Расчетная работа

1. Тема

Разработка программы решения теоретико-графовой задачи

2. Цель

Изучить основы теории графов, ключевые определения и понятия.

3. Задача

При выполнении расчетной работы необходимо разработать и реализовать программу на C/C++, которая решает выданную преподавателем теоретико-графовую задачу.

4. Вариант

Вариант 2(2):

Определить диаметр неориентированного взвешенного графа, заданного через матрицу смежности.

5. Список ключевых понятий

- Граф - это топологичекая модель, которая состоит из множества вершин и множества соединяющих их рёбер.
- Неориентированный граф - граф, ни одному ребру которого не присвоено направление.
- Матрица смежности графа — матрица, значения элементов которой характеризуются смежностью вершин графа.
- Взвешенный граф - граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некое значение (вес ребра).
- Алгоритм Флойда-Уоршелла — это алгоритм для нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин в графе.
- Диаметр графа - максимум расстояния между вершинами для всех пар вершин.

6. Тестовые примеры

Пример 1:

Входная матрица смежности:

0 1 0 1 1 0 0 0
1 0 1 0 1 1 1 0
0 1 0 1 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 1 0
1 1 0 1 0 1 0 1
1 1 0 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0

Матрица расстояний после алгоритма Флойда-Уоршелла:

0	4	5	6	2	3	6	4
4	0	4	3	6	5	2	5
5	4	0	7	3	8	6	1
6	3	7	0	6	6	1	8
2	6	3	6	0	5	7	2
3	5	8	6	5	0	5	7
6	2	6	1	7	5	0	7
4	5	1	8	2	7	7	0

Диаметр графа: 8

Пример 2:

Входная матрица смежности:

0 1 0 1 0 0 0
1 0 1 0 1 0 0
0 1 0 0 0 1 0
1 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 1 1
0 0 1 0 1 0 1
0 0 0 1 1 1 0

Матрица расстояний после алгоритма Флойда-Уоршелла:

0	1	3	4	4	6	8
1	0	2	5	3	5	7
3	2	0	7	5	5	9
4	5	7	0	8	10	6

4	3	5	8	0	2	4
6	5	5	10	2	0	6
8	7	9	6	4	6	0

Диаметр графа: 10

Пример 3:

Входная матрица смежности:

0 1 0 1 0 0 1 0
1 0 1 0 0 0 0 1
0 1 0 0 1 0 0 0
1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 0 0 1 0
0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 0 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 1 0 0

Матрица расстояний после алгоритма Флойда-Уоршелла:

0	8	10	9	9	14	5	11
8	0	2	11	8	12	12	9
10	2	0	13	6	14	10	11
9	11	13	0	18	5	14	2
9	8	6	18	0	20	4	17
14	12	14	5	20	0	19	3
5	12	10	14	4	19	0	16
11	9	11	2	17	3	16	0

Диаметр графа: 20

Пример 4:

Входная матрица смежности:

0 1 0 1 1 0 1 0
1 0 1 0 1 0 0 1
0 1 0 0 1 0 1 0
1 0 0 0 0 1 0 1
1 1 1 0 0 0 1 0
0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 0 1
0 1 0 1 0 1 1 0

Матрица расстояний после алгоритма Флойда-Уоршелла:

0	4	8	1	4	3	7	7
4	0	6	5	7	7	7	7
8	6	0	9	4	11	1	5
1	5	9	0	5	2	8	6
4	7	4	5	0	7	3	7
3	7	11	2	7	0	10	8
7	7	1	8	3	10	0	4
7	7	5	6	7	8	4	0

Диаметр графа: 11

Пример 5:

Входная матрица смежности:

0 1 1 0 0 0
1 0 0 1 0 1
1 0 0 0 1 0
0 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 0
0 1 0 1 0 0

Матрица расстояний после алгоритма Флойда-Уоршелла:

0	7	9	13	10	14
7	0	11	6	10	7
9	11	0	5	1	10
13	6	5	0	4	5
10	10	1	4	0	9
14	7	10	5	9	0

Диаметр графа: 14

7. Детализация преобразования входной конструкции в выходную

Рассмотрим процесс преобразования входных данных на конкретном примере.

7.1. Входные данные:

Файл adjacency.txt (матрица смежности):

0 1 0 1
1 0 1 1
0 1 0 1
1 1 1 0

Файл weights.txt (веса рёбер):

3 7 1 2 2 7 1 1

7.2. Процесс преобразования

1) Считывание матрицы смежности

2) Инициализация весов рёбер (начальное значение):

Изначально все веса устанавливаются в I, кроме диагональных элементов, которые равны 0.

3) Считывание и установка весов рёбер:

Считываются веса рёбер из weights.txt и устанавливаются на пересечении смежных вершин для обоих направлений рёбер. Обратные рёбра также учитываются (так как граф неориентированный).

Начальная матрица весов рёбер:

```
0 3 I 7
3 0 1 2
I 1 0 2
7 2 2 0
```

4) Алгоритм Флойда-Уоршелла:

Алгоритм использует три вложенных цикла для итерации по всем вершинам графа и обновления матрицы кратчайших путей.

Внешний цикл по вершине k (вершина-посредник):

```
for (int k = 0; k < n; ++k)
```

Средний цикл по вершине i (начальная вершина):

```
for (int i = 0; i < n; ++i)
```

Внутренний цикл по вершине j (конечная вершина):

```
for (int j = 0; j < n; ++j)
```

Для каждой пары вершин (i, j) проверяется, можно ли улучшить кратчайшее расстояние через вершину k:

```
if (dist[i][k] < INF && dist[k][j] < INF) {
    dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j]);
}
```

Шаг 1. Проход через вершину 1 (k=0)

При проходе через вершину 1 нет более коротких путей, поэтому в матрице рёбер ничего не изменяется.

Шаг 2. Проход через вершину 2 (k=1)

Обновляются следующие пути:

1 -> 3: 1 -> 2 -> 3 = 3 + 1 = 4

1 -> 4: 1 -> 2 -> 4 = 3 + 2 = 5

3 -> 1: 3 -> 2 -> 1 = 1 + 3 = 4

4 -> 1: 4 -> 2 -> 1 = 2 + 3 = 5

Обновленная матрица весов рёбер:

0	3	4	5
3	0	1	2
4	1	0	2
5	2	2	0

Шаг 3. Проход через вершину 3 (k=2)

При проходе через вершину 3 нет более коротких путей, поэтому в матрице рёбер ничего не изменяется.

Шаг 4. Проход через вершину 4 (k=3)

При проходе через вершину 4 нет более коротких путей, поэтому в матрице рёбер ничего не изменяется.

5) Окончательная матрица кратчайших путей:

0	3	4	5
3	0	1	2
4	1	0	2
5	2	2	0

Окончательная матрица кратчайших путей показывает минимальные расстояния между всеми парами вершин после применения алгоритма Флойда-Уоршелла.

6) Нахождение диаметра графа:

Диаметр графа — максимальное расстояние в матрице кратчайших путей.

Диаметр графа: 5

7.3. Выходные данные:

Диаметр графа: 5

8. Вывод

В ходе расчетной работы я изучила основы теории графов, ключевые определения и понятия; разработала алгоритм нахождения диаметра неориентированного взвешенного графа и реализовала его на языке C++.

9. Список использованных источников

- Гладков, Л. А. Дискретная математика : учебное пособие / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик ; под редакцией В. М. Курейчика. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
- Свободная энциклопедия "Википедия". Глоссарий теории графов
- Теория графов. Термины и определения в картинках