

## Модуль 2 «Математические методы, модели и алгоритмы компьютерной геометрии»

### Лекция 9 «Матрицы преобразований конвейера наблюдения»

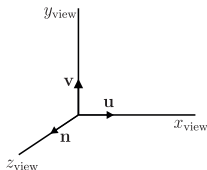
к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,  
ауд.: 930а(УЛК)  
моб.: 8-910-461-70-04,  
email: azaharov@bmstu.ru



МГТУ им. Н.Э. Баумана

10 ноября 2024 г.

## Базовые векторы системы наблюдения $uvn$



Поскольку нормаль к плоскости наблюдения  $\mathbf{N}$  определяет направление оси  $z_{\text{view}}$ , а вектор верха  $\mathbf{V}$  используется для получения направления оси  $y_{\text{view}}$ , то остаётся определить только направление оси  $x_{\text{view}}$ . Используя входные значения  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{V}$ , можно вычислить третий вектор  $\mathbf{U}$ , перпендикулярный  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \times \mathbf{N}.$$

Вектор верха  $\mathbf{V}$ , который задаёт пользователь, обычно не перпендикулярен вектору  $\mathbf{N}$ . Поэтому его также необходимо скорректировать следующим образом:

$$\mathbf{V} = \mathbf{N} \times \mathbf{U}.$$

В итоге получаем следующий набор единичных осевых векторов правосторонней системы наблюдения:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = (u_x, u_y, u_z), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = (v_x, v_y, v_z), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = (n_x, n_y, n_z).$$

# Преобразование из внешних координат в координаты наблюдения в 3D

В трёхмерном конвейере наблюдения первым действием после построения сцены является перенос описаний объектов в систему координат наблюдения. Это преобразование описаний объектов эквивалентно последовательности преобразований, совмещающих систему координат наблюдения с внешней системой координат, и состоит из

1. Трансляции начала системы координат наблюдения в начало внешней системы координат.
2. Поворотов, совмещающих оси  $x_{\text{view}}$ ,  $y_{\text{view}}$  и  $z_{\text{view}}$  с осями  $x$ ,  $y$  и  $z$  внешней системы координат соответственно.

Начало системы координат наблюдения находится в точке с внешними координатами  $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Следовательно, матрица трансляции начала системы координат наблюдения в начало внешней системы координат выглядит так:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

# Преобразование из внешних координат в координаты наблюдения в 3D

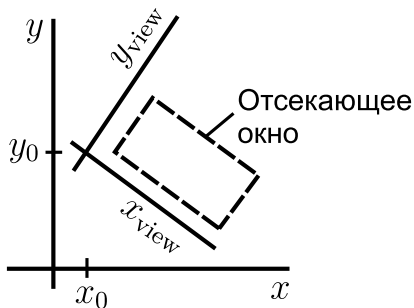
В преобразовании поворота можно с помощью единичных векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$  сформировать сложную матрицу поворота, совмещающую оси системы координат наблюдения с осями внешней системы координат. Данная матрица преобразования записывается следующим образом:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

где элементы матрицы  $\mathbf{R}$  — это компоненты осевых векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$ . Матрица преобразования координат получается умножением приведённых выше матриц трансляции и поворота:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_0 \\ v_x & v_y & v_z & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_0 \\ n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Матрица (4) переводит описания объектов из внешней системы координат в систему координат наблюдения.



Начало двумерной системы координат наблюдения выбирается в некоторой точке внешней системы координат  $P_0 = (x_0, y_0)$ , а ориентацию можно задать, используя вектор  $V$ , который определяет направление оси  $y_{view}$ . Вектор  $V$  называется двумерным вектором верха (view up vector). После установки параметров наблюдения, описание сцены переводится в систему координат наблюдения. Это включает ряд преобразований и эквивалентно наложению системы координат наблюдения на внешнюю систему координат.

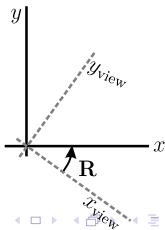
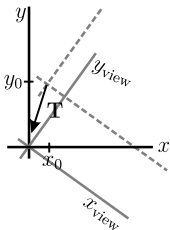
# Преобразование из внешних координат в координаты наблюдения в 2D

Первый этап в последовательности преобразований — транслировать начало координат системы наблюдения в начало внешней системы координат. Затем нужно повернуть систему координат наблюдения, чтобы совместить её с внешней системой координат. Для данного вектора ориентации  $\mathbf{V}$  нужно вычислить компоненты единичных векторов  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  и  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  для осей  $y_{\text{view}}$  и  $x_{\text{view}}$  соответственно. Они используются для формирования первой и второй строки матрицы вращения  $\mathbf{R}$ , которая поворачивает систему координат наблюдения до её совмещения с внешней системой координат.

Матрица сложного двумерного преобразования имеет вид:

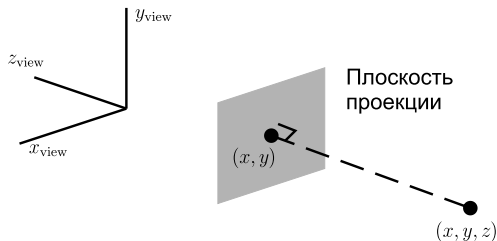
$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{T}$  — матрица трансляции, переносящая начало координат системы наблюдения  $\mathbf{P}_0$  в начало внешней системы координат.



На следующем этапе трёхмерного конвейера наблюдения (после перехода к координатам наблюдения) описания объектов проецируются на плоскость наблюдения. Как правило, графические библиотеки поддерживают и параллельную, и перспективную проекцию.

# Координаты ортогональной проекции



Когда направление проектирования параллельно оси  $z_{\text{view}}$ , уравнения преобразования ортогональной проекции тривиальны. Для любой точки  $(x, y, z)$  в координатах наблюдения, координаты проекции выражаются так:

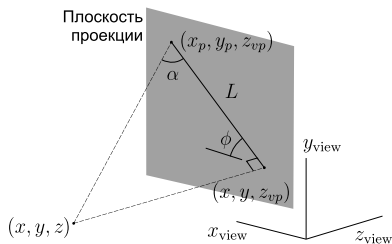
$$x_p = x, \quad y_p = y. \quad (6)$$

Значение координаты  $z$  при любом преобразовании проектирования записывается для использования в процедурах определения видимости. Запишем результат в виде матрицы преобразования:

$$\mathbf{M}_{\text{ortho}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



# Косоугольные параллельные проекции



Координаты косоугольной параллельной проекции можно следующим образом выразить через  $x$ ,  $y$ ,  $L$  и  $\phi$ :

$$\begin{aligned}x_p &= x + L \cos \phi, \\y_p &= y + L \sin \phi.\end{aligned}\quad (7)$$

Длина  $L$  зависит от угла  $\alpha$  и расстояния по перпендикуляру от проецируемой точки  $(x, y, z)$  до плоскости наблюдения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_{vp} - z}{L}.\quad (8)$$

Следовательно,

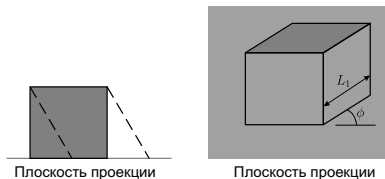
$$L = \frac{z_{vp} - z}{\operatorname{tg} \alpha} = L_1(z_{vp} - z),\quad (9)$$

где  $L_1 = \operatorname{ctg} \alpha$ . Таким образом, уравнения (7) косоугольной параллельной проекции можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}x_p &= x + L_1(z_{vp} - z) \cos \phi, \\y_p &= y + L_1(z_{vp} - z) \sin \phi.\end{aligned}\quad (10)$$

Ортогональная проекция получается при  $L_1 = 0$  (это условие выполняется, когда угол проекции  $\alpha = 90^\circ$ ).

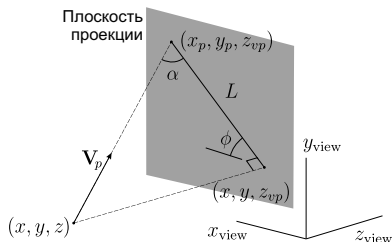
# Косоугольные параллельные проекции



**Рис.:** Косоугольная параллельная проекция куба (вид сверху) на плоскость наблюдения, которая совпадает с передней гранью куба, даёт комбинацию вида спереди, сбоку и сверху. Задняя плоскость куба сдвигается и накладывается на переднюю при проектировании на плоскость наблюдения. Боковая грань куба, соединяющая переднюю и заднюю плоскости, проектируется в линию длины  $L_1$ , которая образует угол  $\phi$  с горизонтальной линией плоскости проекции.

Уравнения (10) представляют преобразование сдвига по оси  $z$ . Фактически влияние косоугольной параллельной проекции заключается в сдвиге плоскостей постоянного  $z$  и проектировании их на плоскость наблюдения.

## Вектор косоугольной параллельной проекции



Направление проекции на плоскость наблюдения часто задаётся вектором параллельной проекции  $\mathbf{V}_p$ . Данный вектор направления можно задать точкой относительно точки наблюдения (начала координат) или двумя любыми точками. После определения вектора проекции  $\mathbf{V}_p$  в координатах наблюдения все точки сцены переносятся на плоскость наблюдения вдоль линий, параллельных этому вектору.

Компоненты вектора проекции относительно системы наблюдения можно обозначить как  $\mathbf{V}_p = (V_{px}, V_{py}, V_{pz})$ , где  $V_{py}/V_{px} = \tan \phi$ . После этого, сравнивая подобные треугольники, получим:

$$\frac{x_p - x}{z_{vp} - z} = \frac{V_{px}}{V_{pz}}, \quad \frac{y_p - y}{z_{vp} - z} = \frac{V_{py}}{V_{pz}}.$$

Тогда можно записать эквивалент уравнений косоугольной параллельной проекции (10) через вектор проекции:

$$x_p = x + (z_{vp} - z) \frac{V_{px}}{V_{pz}}, \quad y_p = y + (z_{vp} - z) \frac{V_{py}}{V_{pz}}. \quad (11)$$

# Матрица косоугольной параллельной проекции

Элементы матрицы косоугольной параллельной проекции можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\text{oblique}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{V_{px}}{V_{pz}} & z_{vp} \frac{V_{px}}{V_{pz}} \\ 0 & 1 & -\frac{V_{py}}{V_{pz}} & z_{vp} \frac{V_{py}}{V_{pz}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Под действием данной матрицы значения координат  $x$  и  $y$  смещаются на величину, пропорциональную расстоянию от плоскости наблюдения, которая имеет координату  $z_{vp}$  по оси  $z_{\text{view}}$ . Значения  $z$  точек не меняются. Если  $V_{px} = V_{py} = 0$ , получаем ортогональную проекцию, и матрица (12) сводится к единичной.

# Объём наблюдения косоугольной параллельной проекции

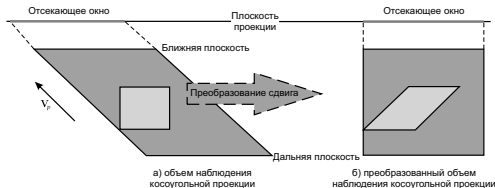
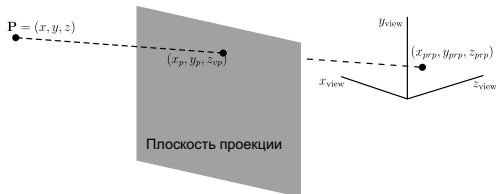


Рис.: Вид сверху косоугольного параллельного преобразования.

Для произвольной косоугольной параллельной проекции матрица (12) представляет преобразование сдвига относительно оси  $z$ . Все точки косоугольного объёма наблюдения сдвигаются на величину, пропорциональную их расстоянию от плоскости наблюдения. Целью является сдвиг косоугольного объёма наблюдения в прямоугольный параллелепипед. Таким образом, точки внутри объёма наблюдения сдвигаются в точки ортогональной проекции под воздействием косоугольной параллельной проекции. Точки с координатами  $(x, y)$  на каждой плоскости постоянного  $z$  смещаются на величину, пропорциональную расстоянию до плоскости наблюдения, поэтому углы, расстояния и параллельные линии на плоскости  $z$  проектируются точно.

# Координаты перспективной проекции



Пусть точка  $(x, y, z)$  проектируется в произвольный центр проекции  $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp})$ . Линия проекции пересекает плоскость наблюдения в точке с координатами  $(x_p, y_p, z_{vp})$ , где  $z_{vp}$  — некоторое выбранное положение плоскости наблюдения на оси  $z_{view}$ . Далее можно составить уравнения, в параметрической форме описывающие координаты вдоль данной линии перспективной проекции:

$$\begin{aligned}x' &= x - (x - x_{prp})u, \\y' &= y - (y - y_{prp})u, \\z' &= z - (z - z_{prp})u.\end{aligned}\tag{13}$$

## Координаты перспективной проекции

Координаты  $(x', y', z')$  представляют любую точку вдоль линии проекции. При  $u = 0$  мы находимся в точке  $P = (x, y, z)$ . На другом конце линии (при  $u = 1$ ) имеем центр проекции с координатами  $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp})$ . На плоскости наблюдения  $z' = z_{vp}$ , и из уравнения для  $z'$  находится параметр  $u$  в этой точке вдоль линии проекции:

$$u = \frac{z_{vp} - z}{z_{prp} - z}. \quad (14)$$

Подставляя это значение  $u$  в уравнения для  $x'$  и  $y'$ , получим уравнения произвольного перспективного преобразования:

$$\begin{aligned} x_p &= x \left( \frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z} \right) + x_{prp} \left( \frac{z_{vp} - z}{z_{prp} - z} \right), \\ y_p &= y \left( \frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z} \right) + y_{prp} \left( \frac{z_{vp} - z}{z_{prp} - z} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения перспективного отображения гораздо сложнее уравнений параллельной проекции, поскольку знаменатели в формулах (15) являются функциями координаты  $z$  точки пространства. Следовательно, теперь нужно сформулировать процедуры перспективного преобразования немного иначе, чтобы это отображение можно было свернуть с другими преобразованиями наблюдения.

## Частные случаи уравнений перспективной проекции

1. Чтобы упростить расчёт, положение центра проекции можно ограничить точками вдоль оси  $z_{\text{view}}$ . Тогда  $x_{prp} = y_{prp} = 0$  и

$$x_p = x \left( \frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z} \right), \quad y_p = y \left( \frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z} \right). \quad (16)$$

2. Иногда центр проекции фиксируется в начале координат. Тогда  $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp}) = (0, 0, 0)$  и

$$x_p = x \left( \frac{z_{vp}}{z} \right), \quad y_p = y \left( \frac{z_{vp}}{z} \right). \quad (17)$$

3. Если плоскостью наблюдения является плоскость  $uv$ , то  $z_{vp} = 0$  и

$$\begin{aligned} x_p &= x \left( \frac{z_{prp}}{z_{prp} - z} \right) - x_{prp} \left( \frac{z}{z_{prp} - z} \right), \\ y_p &= y \left( \frac{z_{prp}}{z_{prp} - z} \right) - y_{prp} \left( \frac{z}{z_{prp} - z} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

4. Когда плоскостью наблюдения является плоскость  $uv$ , а центр проекции находится на оси  $z_{\text{view}}$ , то  $x_{prp} = y_{prp} = z_{vp} = 0$  и уравнения перспективной проекции записываются так

$$x_p = x \left( \frac{z_{prp}}{z_{prp} - z} \right), \quad y_p = y \left( \frac{z_{prp}}{z_{prp} - z} \right). \quad (19)$$



# Матрица перспективной проекции

Чтобы получить выражения для элементов матрицы перспективной проекции из уравнений (15), нужно использовать трёхмерное представление в однородных координатах. Пусть

$$x_p = \frac{x_h}{h}, \quad y_p = \frac{y_h}{h}, \quad (20)$$

где однородный параметр имеет значение:

$$h = z_{prp} - z. \quad (21)$$

Числители в уравнениях (20) такие же, как в уравнениях (15):

$$\begin{aligned} x_h &= x(z_{prp} - z_{vp}) + x_{prp}(z_{vp} - z), \\ y_h &= y(z_{prp} - z_{vp}) + y_{prp}(z_{vp} - z). \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда матрица перспективной проекции имеет вид:

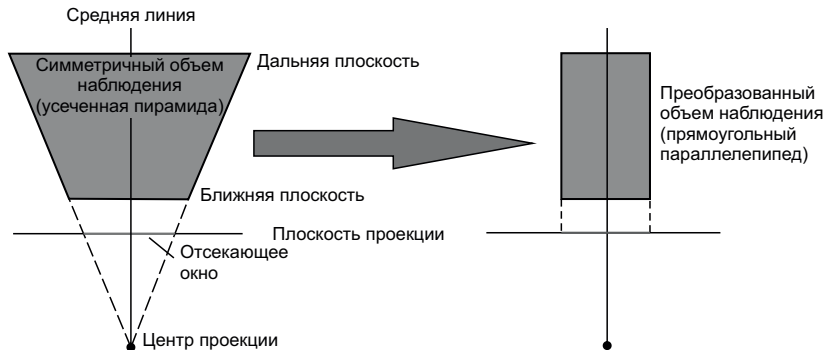
$$\mathbf{M}_{\text{pers}} = \begin{bmatrix} z_{prp} - z_{vp} & 0 & -x_{prp} & x_{prp}z_{vp} \\ 0 & z_{prp} - z_{vp} & -y_{prp} & y_{prp}z_{vp} \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & z_{prp} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Параметры  $s_z$  и  $t_z$  — это коэффициенты масштабирования и трансляции для нормировки спроектированных значений координат  $z$ , которые зависят от выбранного диапазона нормировки.

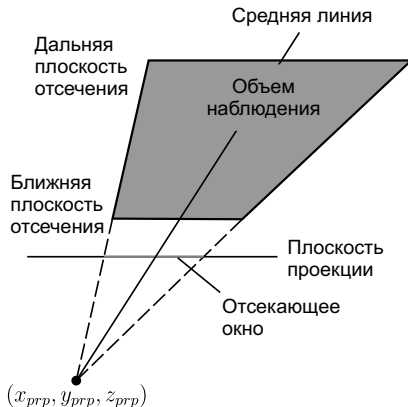
# Симметричная пирамида перспективной проекции

Под действием матрицы (23) описание сцены переводится в однородные координаты параллельной проекции.

Когда объём наблюдения перспективной проекции является симметричной пирамидой, перспективное преобразование отображает точки внутри усечённой пирамиды в прямоугольный параллелепипед. Средняя линия параллелепипеда является средней линией пирамиды, поскольку эта прямая уже перпендикулярна плоскости наблюдения. После преобразования симметричной пирамиды в объём наблюдения ортогональной проекции, можно применить преобразование нормировки.



# Несимметричная пирамида перспективной проекции



Если средняя линия объёма наблюдения перспективной проекции не перпендикулярна плоскости наблюдения, получаем наклонную усеченную пирамиду. В этом случае можно вначале преобразовать объём наблюдения в симметричную усеченную пирамиду, а затем — в нормированный объём наблюдения.

# Несимметричная пирамида перспективной проекции

Объём наблюдения косоугольной перспективной проекции можно преобразовать в симметричную пирамиду, подействовав матрицей сдвига вдоль оси  $z$ . Данное преобразование смещает все точки любой плоскости, которая перпендикулярна оси  $z$ , на величину, пропорциональную расстоянию от этой плоскости до заданной опорной точки на оси  $z$ . В данном случае опорной точкой является  $z_{prp}$  — координата  $z$  центра проекции. Величина сдвига должна быть такой, чтобы центр отсекающего окна переместился в точку  $(x_{prp}, y_{prp})$  на плоскости наблюдения. В этом случае, средняя линия усечённой пирамиды станет перпендикулярна плоскости наблюдения.

Расчёты преобразования сдвига, а также перспективного преобразования и нормировки существенно сокращаются, если положить, что центр проекции находится в начале системы координат наблюдения. Чтобы сделать это, не нарушая общности, можно так транслировать все точки сцены, чтобы выбранный центр проекции сместился в начало координат. Или же можно изначально так задать систему наблюдения, чтобы её начало находилось в точке проекции данного положения сцены. Кроме того, некоторые графические библиотеки фактически помещают центр проекции в начало координат.

Элементы матрицы перспективной проекции можно упростить ещё больше, если совместить плоскость наблюдения с ближней плоскостью отсечения.

# Несимметричная пирамида перспективной проекции

Матрица сдвига относительно центра проекции  $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp}) = (0, 0, 0)$  имеет вид:

$$\mathbf{M}_{z\text{shear}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda_{zx} & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_{zy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Поскольку центр отсекающего окна мы поместили в точку с координатами  $(0, 0)$ , то имеем:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{\text{near}} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{z\text{shear}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{xw_{\min} + xw_{\max}}{2} \\ \frac{yw_{\min} + yw_{\max}}{2} \\ z_{\text{near}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Следовательно, параметры этого преобразования сдвига записываются так:

$$\begin{aligned} \lambda_{zx} &= -\frac{xw_{\min} + xw_{\max}}{2z_{\text{near}}}, \\ \lambda_{zy} &= -\frac{yw_{\min} + yw_{\max}}{2z_{\text{near}}}. \end{aligned} \quad (26)$$

## Несимметричная пирамида перспективной проекции

Если центр проекции находится в начале системы координат наблюдения, а плоскость наблюдения совпадает с ближней плоскостью отсечения, матрица перспективной проекции (23) упрощается до вида:

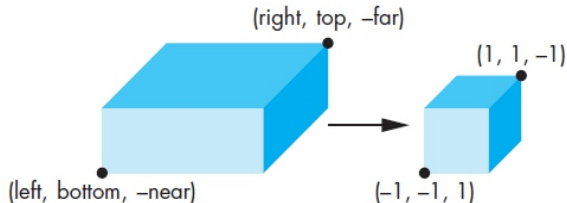
$$\mathbf{M}_{\text{pers}} = \begin{bmatrix} -z_{\text{near}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{\text{near}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Сворачивая упрощённую матрицу перспективной проекции (27) с матрицей сдвига (24), получим следующую матрицу косоугольной перспективной проекции:

$$\mathbf{M}_{\text{obliquepers}} = \mathbf{M}_{\text{pers}} \cdot \mathbf{M}_{z\text{shear}} = \begin{bmatrix} -z_{\text{near}} & 0 & \frac{xw_{\min} + xw_{\max}}{2} & 0 \\ 0 & -z_{\text{near}} & \frac{yw_{\min} + yw_{\max}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Матрица (28) переводит точки сцены из координат наблюдения в координаты перспективной проекции и преобразует пирамидальный объём наблюдения перспективной проекции в прямоугольный параллелепипед.

## Нормировка ортогональной проекции



Рассмотрим объём наблюдения ортогональной проекции, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда, правая сторона которого — это плоскость  $xw_{\max} = r$ , левая — плоскость  $xw_{\min} = l$ , верхняя — плоскость  $yw_{\max} = t$ , нижняя — плоскость  $yw_{\min} = b$ , передняя — ближняя плоскость отсечения  $z_{\text{near}} = -n$ , а задняя — дальняя плоскостью отсечения  $z_{\text{far}} = -f$ . Проекционная матрица должна преобразовывать этот объём в нормированный объём наблюдения, представляющим собой куб с центром в начале координат со сторонами длиной 2.

Точки внутри нормированного объема с координатами  $x = 1$  (соответственно  $x = -1$ ) должны находиться в правой (соответственно левой) части окна, а точки с координатами  $y = 1$  (соответственно  $y = -1$ ) находятся вверху (соответственно внизу) экрана. Точки с координатой  $z = 1$  — это точки, лежащие на ближней плоскости отсечения, а точки с  $z = -1$  принадлежат дальней плоскости отсечения.


## Нормировка ортогональной проекции

Чтобы получить итоговую матрицу ортогональной проекции, осуществляющей проецирование и нормировку, воспользуемся известными геометрическими преобразованиями. Нам нужно выполнить две задачи. Во-первых, мы должны переместить центр заданного объёма наблюдения в центр нормированного объёма наблюдения (т.е. в начало координат), выполнив преобразование перемещения. Во-вторых, мы должны масштабировать стороны заданного объёма наблюдения, чтобы каждая из них имела длину 2. Запишем эти два преобразования:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} -(r+l)/2 & -(t+b)/2 & +(f+n)/2 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} 2/(r-l) & 2/(t-b) & 2/(n-f) \end{pmatrix}.$$

Объединим их вместе и получим итоговую матрицу:

$$\mathbf{M}_{\text{ortho,norm}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

На данную матрицу справа множится матрица наблюдения, в результате чего находится полное преобразование из внешних координат в нормированные координаты ортогональной проекции: 



Поскольку уравнения косоугольной параллельной проекции переводят описания объектов в координаты ортогональной проекции, после этого преобразования можно применить процедуры нормировки. Таким образом, полное преобразование из координат наблюдения в нормированные координаты для косоугольной параллельной проекции записывается так:

$$\mathbf{M}_{\text{oblique,norm}} = \mathbf{M}_{\text{ortho,norm}} \cdot \mathbf{M}_{\text{oblique}}. \quad (30)$$

Преобразование  $\mathbf{M}_{\text{oblique}}$  представляется матрицей (12), под действием которой описание сцены переводится в координаты ортогональной проекции, а преобразование  $\mathbf{M}_{\text{ortho,norm}}$  описывается матрицей (29), и при его применении содержимое ортогонального объёма наблюдения отображается в симметричный нормированный куб.

Чтобы завершить преобразование наблюдения (исключая отображение в экранные координаты поля просмотра), умножим матрицу (30) слева на матрицу преобразования из внешних координат в координаты наблюдения (4).

Заключительным этапом процесса перспективного преобразования является отображение данного параллелепипеда в *нормированный объём наблюдения*.

Используем ту же процедуру нормировки, что и для параллельной проекции. Преобразованный пирамидальный объём наблюдения (прямоугольный параллелепипед) отображается в симметричный нормированный куб, определённый в левосторонней системе координат. В матрицу перспективной проекции (28) уже включены параметры нормировки по  $z$ . Кроме того, нужно определить параметры нормировки по  $x$  и  $y$ . Поскольку средней линией объёма наблюдения (прямоугольного параллелепипеда) является ось  $z_{\text{view}}$ , при нормировке по  $x$  и  $y$  никакой трансляции не требуется. Нужны всего лишь параметры масштабирования по осям  $x$  и  $y$  относительно начала координат. Матрица масштабирования для выполнения нормировки по  $xy$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{M}_{xy\text{scale}} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

## Нормировка координат перспективной проекции

Сворачивая матрицу (31) с матрицей (28), получаем следующую матрицу нормировки для преобразования перспективной проекции:

$$\mathbf{M}_{\text{normpers}} = \mathbf{M}_{xyscale} \cdot \mathbf{M}_{\text{obliquepers}} = \begin{bmatrix} ns_x & 0 & s_x \frac{r+l}{2} & 0 \\ 0 & ns_y & s_y \frac{t+b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Из этого преобразования получаем однородные координаты:

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\text{normpers}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Координаты проекции выражаются так:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{x_h}{h} = \frac{ns_x x + s_x z(r+l)/2}{-z}, \\ y_p &= \frac{y_h}{h} = \frac{ns_y y + s_y z(t+b)/2}{-z}, \\ z_p &= \frac{z_h}{h} = \frac{s_z z + t_z}{-z}. \end{aligned} \quad (34)$$

## Нормировка координат перспективной проекции

Для нормировки этого перспективного преобразования требуется, чтобы координаты проекции были равны  $(x_p, y_p, z_p) = (-1, -1, -1)$  при входных координатах  $(x, y, z) = (l, b, -n)$ , а также необходимо, чтобы координаты проекции точки были  $(x_p, y_p, z_p) = (1, 1, 1)$  при входных координатах  $(x, y, z) = (r, t, -f)$ . Подставляя эти условия в уравнения (34) получаем:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{2}{r-l}, & s_y &= \frac{2}{t-b}, \\ s_z &= \frac{f+n}{n-f}, & t_z &= \frac{2fn}{n-f}. \end{aligned} \quad (35)$$

Элементы нормированной матрицы преобразования для произвольной перспективной проекции выражаются следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\text{normpers}} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t-b}{t+b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Если объём наблюдения перспективной проекции первоначально задан в виде симметричной усечённой пирамиды, элементы нормированного перспективного преобразования можно выразить через угол обзора и размеры отсекающего окна. Если центр проекции находится в начале координат и плоскость наблюдения совпадает с ближней плоскостью отсечения, то получаем:

$$\mathbf{M}_{\text{норм. симм. персп.}} = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{хар. отн.}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2nf}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Данная матрица осуществляет преобразование из координат наблюдения в нормированные координаты перспективной проекции. Для получения матрицы полного преобразования из внешних координат в нормированные требуется матрицу (37) домножить слева на матрицы преобразования наблюдения  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$ .