

## Модуль 2 «Математические методы, модели и алгоритмы компьютерной геометрии»

### Лекция 7 «Трёхмерное наблюдение»

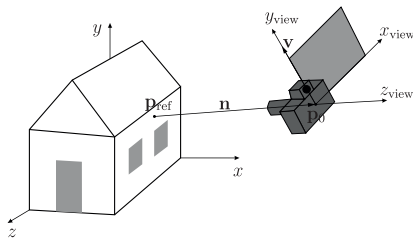
к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,  
ауд.: 930а(УЛК)  
моб.: 8-910-461-70-04,  
email: azaharov@bmstu.ru



МГТУ им. Н.Э. Баумана

27 октября 2025 г.

# Преобразование наблюдения



Процедуры генерации компьютерных проекций трёхмерной сцены чем-то похожи на действия фотографа. Прежде всего нужно выбрать точку наблюдения, соответствующую месту, где мы расположили камеру. Точка наблюдения выбирается согласно тому, какая проекция сцены требуется: фронтальная, задняя, верхняя, нижняя, боковая. Место наблюдения можно также выбрать внутри группы объектов или даже внутри такого объекта, как здание или молекула. Затем нужно определиться с ориентацией камеры — как нам хочется, чтобы камера «смотрела» с точки съёмки, и как повернуть её вокруг линии наблюдения, чтобы задать верхнее положение изображения. Наконец, когда мы нажимаем на кнопку, сцена обрезается до размера, выбранного отсекающего окна, которая соответствует апертуре или типу линз камеры, и свет от видимых поверхностей проецируется на пленку.

## Задание матрицы преобразования наблюдения

Для задания параметров наблюдения нужно сформировать матрицу, которая преобразует описания объектов из внешних координат в координаты наблюдения. Для формирования матрицы наблюдения используется метод `lookAt` класса `mat4` библиотеки `glmMatrix`, который выполняет комбинацию процедур трансляции, смещающей начало координат системы наблюдения в начало внешней системы координат, и поворота, который совмещает оси системы наблюдения с осями внешней системы координат:

```
lookAt(mat4 out, vec3 eye, vec3 center, vec3 up)
```

В данной функции начало координат системы наблюдения (положение камеры)  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  указывается как точка с внешними координатами `eye`, точка взгляда («look-at-point»)  $\mathbf{p}_{\text{ref}} = (x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}}, z_{\text{ref}})$ , — как `center`, а вектор верха камеры  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — как `up`.

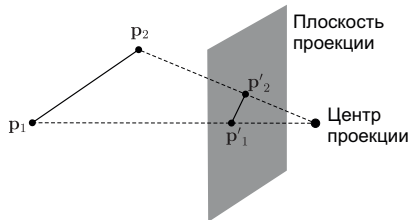
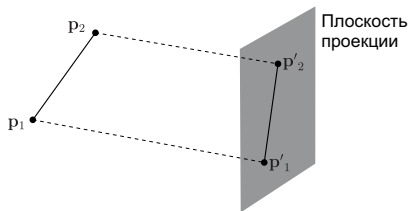
Положительное направление оси  $z_{\text{view}}$  идет вдоль направления наблюдения  $\mathbf{n} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_{\text{ref}}$ . Обычно в качестве точки взгляда  $\mathbf{p}_{\text{ref}}$  берется некоторое положение в центре сцены, которое можно использовать для привязки при задании параметров проекции. Точку наблюдения можно представить себе как положение, на которое наводится камера, находящаяся в начале координат системы наблюдения. Вектор верха камеры  $\mathbf{v}$  выравнивается перпендикулярно  $\mathbf{n}$ .

Единичная матрица, фактически, применяемая по умолчанию, когда мы не формируем матрицу наблюдения, соответствует следующим значениям параметров наблюдения:

$$\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{p}_{\text{ref}} = (0, 0, -1), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0).$$

При этих значениях система координат наблюдения совпадает с системой координат WebGL, а направление наблюдения — с отрицательным направлением оси  $z$ .

# Проекции



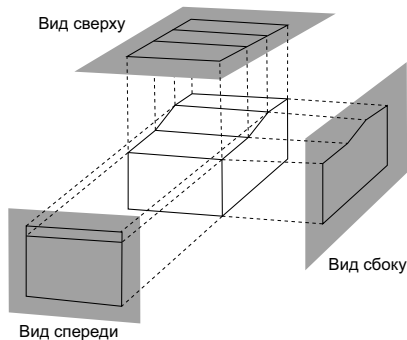
Существует два способа проецирования 3D-сцены на плоскость наблюдения.

Параллельная проекция проецирует точки поверхности объекта вдоль параллельных линий. Она позволяет сохранить относительные пропорции объектов. Все параллельные линии сцены остаются параллельными.

Перспективная проекция проецирует объекты на плоскость наблюдения вдоль линий, сходящихся к точке за плоскостью наблюдения. При данном способе проецирования объекты, расположенные дальше от точки наблюдения, получаются меньшими, чем объекты такого же размера, но расположенные ближе. При перспективной проекции не сохраняются относительные пропорции объектов. Сцена, генерируемая с использованием перспективной проекции, выглядит более реалистично.

# Параллельные проекции

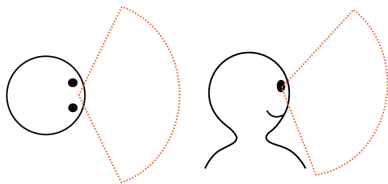
Существует два общих метода получения параллельной проекции объекта: можно проектировать вдоль линий, перпендикулярных плоскости наблюдения, или точки можно спроектировать под любым углом к плоскости наблюдения.



Преобразование описаний объектов на плоскость наблюдения вдоль линий, параллельных вектору нормали  $n$ , называется ортогональной проекцией (или ортографической проекцией). В результате получается параллельная проекция, в которой линии проекции перпендикулярны плоскости наблюдения. В данной проекции длины и углы изображаются точно и их можно измерить по чертежу. Поэтому такое проецирование широко используются в инженерных и архитектурных чертежах.

Если траектории проектирования не перпендикулярны плоскости наблюдения, данное отображение называется косоугольной параллельной проекцией.

Мы можем размещать объекты в любой точке трёхмерного пространства, но отображаться будут только те, которые оказываются внутри границ видимого диапазона. Если вспомнить аналогию с камерой, то фактором, определяющим какая часть сцены попадёт в объектив, будет тип линз. Широкоугольная линза захватывает большую часть сцены, чем обычная.



Ограниченность поля зрения свойственна и человеку: мы видим объекты в определённых границах сектора, который имеет величину примерно 200 градусов по горизонтали.

Графическая библиотека также определяет видимые границы и не отображает объекты, выходящие за них.

## Отсекающее окно и видимый объём наблюдения

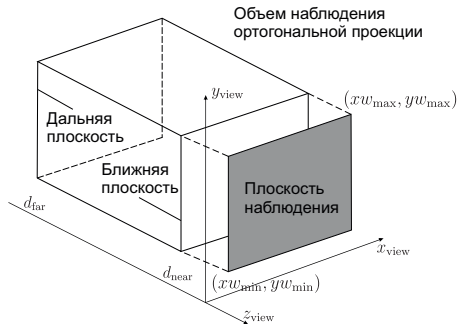
Чтобы добиться определённого эффекта наблюдения, можно разработать свое отсекающее окно с произвольными выбранными формой, размером и ориентацией. Например, выбрать звездообразную форму или эллипс, а также фигуру со сплайновыми границами. В то же время, чтобы обрезать сцену с использованием невыпуклого многоугольника или отсекающего окна с нелинейными границами, необходимо больше обработки, чем для обрезки с использованием прямоугольника. Поэтому графические пакеты в общем случае разрешают использовать только прямоугольные отсекающие окна.

Если требуется, чтобы отсекающее окно имело какую-то другую форму, можно по определённому шаблону наложить многоугольники, покрашенные цветом фона. Таким образом можно генерировать любые граничные эффекты или создавать на изображении внутренние дыры. Если требуется получить повернутое изображение сцены, можно либо определить прямоугольное отсекающее окно в повернутой системе координат изображения, либо (что равнозначно) повернуть сцену в мировых координатах.

Помимо определения отсекающего окна, WebGL ограничивает также видимую глубину. Все эти границы в совокупности определяют видимый объём наблюдения.



# Объём наблюдения ортогональной проекции



Прямоугольные отсекающие окна стандартной ориентации легко определяются координатами левой  $xw_{min}$ , правой  $xw_{max}$ , нижней  $yw_{min}$  и верхней  $yw_{max}$  границ.

Размер ортогонального объёма наблюдения по оси  $z_{view}$  ограничивается двумя дополнительными плоскостями, которые параллельны плоскости наблюдения и стороны которых параллельны осям  $x_{view}$  и  $y_{view}$ . Данные две плоскости называются ближней и дальней (передней и задней) плоскостями отсечения. Если ближняя и дальняя плоскости заданы ( $z = z_{near}$  и  $z = z_{far}$ ), получаем конечный ортогональный объём наблюдения, представляющий собой прямоугольный параллелепипед. Проекция сцены будет содержать только те объекты, которые принадлежат объёму наблюдения (прямоугольному параллелепипеду).

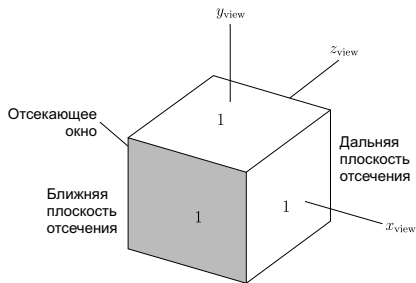
Для создания матрицы проекции можно использовать методы класса `mat4` библиотеки `glmatrix`.

Параметры ортогональной проекции выбираются с помощью метода:

```
ortho(mat4 out, left, right, bottom, top, near, far)
```

Метод используется для формирования матрицы объёма наблюдения ортогональной проекции путём задания координат вершин прямоугольного параллелепипеда. Параметры функции `left`, `right`, `up`, `down` соответствуют значениям  $xw_{\min}$ ,  $xw_{\max}$ ,  $yw_{\min}$ , и  $yw_{\max}$ . А параметры `near` и `far` — значениям  $d_{\text{near}}$  и  $d_{\text{far}}$ , которые указывают расстояния по отрицательному направлению оси  $z_{\text{view}}$  от начала координат системы наблюдения, то есть  $z_{\text{near}} = -d_{\text{near}}$  и  $z_{\text{far}} = -d_{\text{far}}$ . Должно удовлетворяться условие:  $d_{\text{near}} < d_{\text{far}}$ .

# Матрица проекции по умолчанию в glmatrix



Если не формировать матрицу проектирования и не домножать её на полученные координаты наблюдения, то это эквивалентно домножению на единичную матрицу. Она соответствует использованию ортогональной проекции и матрицы, эквивалентной матрице, которая формируется при помощи вызова метода `ortho` со следующими параметрами:

```
ortho(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0, 1.0, -1.0); //ошибка!!!
```

В этом случае объём наблюдения представляет собой симметричный нормированный куб. При этом отсекающее окно является симметричным нормированным квадратом. Однако значения параметров  $d_{\text{near}} = 1.0$  и  $d_{\text{far}} = -1.0$ , т.е.  $d_{\text{near}} > d_{\text{far}}$  говорят о том, что это соответствует случаю использования левосторонней системы координат!

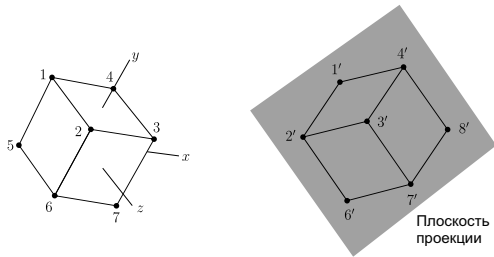
# Матрица проекции по умолчанию в wgpu-matrix

Единичной матрице проецирования в библиотеке wgpu-matrix соответствует вызов метода `ortho` со следующими параметрами:

```
ortho(-1, 1, -1, 1, 0, -1); //ошибка!!!
```

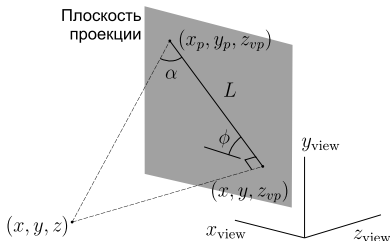
Данный объём наблюдения захватывает только область, находящуюся с противоположной стороны от направления, куда направлена камера.

# АксонOMETрические и изометрические ортогональные проекции



С помощью ортогональных проекций можно отображать несколько граней объекта. Такие проекции называются *аксонометрическими* ортогональными проекциями. Наиболее распространённой аксонометрической проекцией является *изометрическая*, которая получается таким согласованием плоскости проекции и ориентации объекта, при котором эта плоскость пересечёт все координатные оси, по которым определен объект (главные оси), на одинаковом расстоянии от начала координат. На изометрической проекции все три главные оси проецируются одинаково, поэтому сохраняются относительные пропорции. Для общей аксонометрической проекции подобное утверждение неверно, здесь масштабные коэффициенты могут быть разными в трёх главных направлениях.

# Косоугольные параллельные проекции

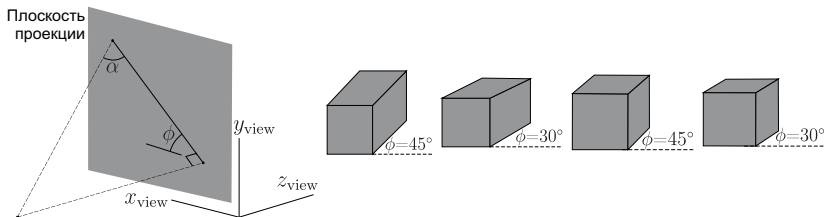


В приложениях из области инженерного и архитектурного проектирования косоугольная параллельная проекция часто задаётся двумя углами:  $\alpha$  и  $\phi$ . Точка  $(x, y, z)$  проектируется в точку  $(x_p, y_p, z_{vp})$  плоскости проекции, где координата  $z_{vp}$  определяется положением плоскости проекции.

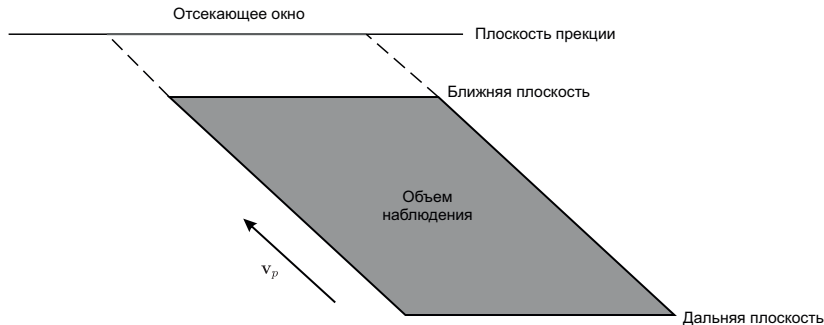
Соответствующей точкой ортогональной проекции является  $(x, y, z_{vp})$ . Пусть линия косоугольной параллельной проекции, идущая от  $(x, y, z)$  к  $(x_p, y_p, z_{vp})$ , пересекается под углом  $\alpha$  с линией, соединяющей точки  $(x_p, y_p, z_{vp})$  и  $(x, y, z_{vp})$  в плоскости проекции. Пусть данная линия имеет длину  $L$  и образует угол  $\phi$  с горизонтальным направлением плоскости проекции (осью  $x$ ). Углу  $\alpha$  можно присвоить значение между  $0$  и  $90^\circ$ , а угол  $\phi$  может меняться от  $0$  до  $360^\circ$ .

# Косоугольные параллельные проекции

Обычно угол  $\phi$  выбирают равным  $30^\circ$  или  $45^\circ$ , при этом получается комбинированное изображение передней, боковой и верхней (нижней) сторон объекта. Двумя наиболее распространёнными значениями  $\alpha$  являются те, для которых  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  и  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ . В первом случае  $\alpha = 45^\circ$ , и получаемые проекции называются *косоаксонометрическими*. Все линии, перпендикулярные плоскости проекции, проектируются без изменений длины. Во втором случае проекция называется *кабинетной*. При таком угле ( $\alpha \approx 63.4^\circ$ ) линии, перпендикулярные поверхности наблюдения, проектируются в отрезки вдвое меньшей длины. Кабинетные проекции кажутся более реалистичными, чем косоаксонометрические, именно из-за этого сокращения длин перпендикуляров.



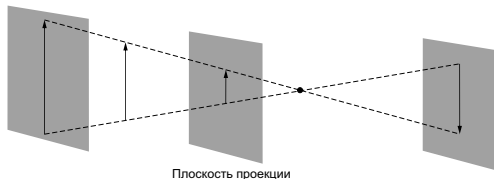
# Объём наблюдения косоугольной параллельной проекции



Объём наблюдения косоугольной параллельной проекции задаётся аналогично ортогональной проекции. Вначале выбирается отсекающее окно на плоскости наблюдения; левый нижний и правый верхний углы отсекающего прямоугольника имеют координаты  $(xw_{\min}, yw_{\min})$  и  $(xw_{\max}, yw_{\max})$ . Затем добавляются ближняя и дальняя плоскости. Окончательно объём наблюдения косоугольной параллельной проекции представляет собой наклонный параллелепипед.



# Перспективные проекции



Для получения реалистичного изображения, даваемого камерой, необходимо рассмотреть лучи от объектов на сцене, идущие по траекториям, которые сходятся в фокусе камеры. Данное явление, описываемое геометрической оптикой, можно аппроксимировать, спроектировав объекты на плоскость наблюдения вдоль траекторий, сходящихся в точку, называемую центром проекции.

Обычно плоскость наблюдения размещается между центром проекции и сценой. В общем случае плоскость наблюдения можно поместить в любом месте, только не в центре проекции, так как в этом случае вся сцена спроектировалась бы в одну точку. Если центр проекции находится между плоскостью наблюдения и сценой, объекты на плоскости наблюдения переворачиваются. Когда сцена расположена между плоскостью наблюдения и центром проекции, объекты увеличиваются, поскольку они проектируются от точки наблюдения на плоскость наблюдения.

# Перспективные проекции

Эффекты перспективы также зависят от расстояния между центром проекции и плоскостью наблюдения. Если центр проекции близок к плоскости наблюдения, эффекты перспективы усиливаются; т.е. более близкие объекты кажутся больше удалённых объектов такого же размера. Таким образом, при удалении центра проекции от плоскости наблюдения разница размеров ближних и дальних объектов уменьшается. Если центр проекции расположен очень далеко от плоскости наблюдения, перспективная проекция переходит в параллельную.



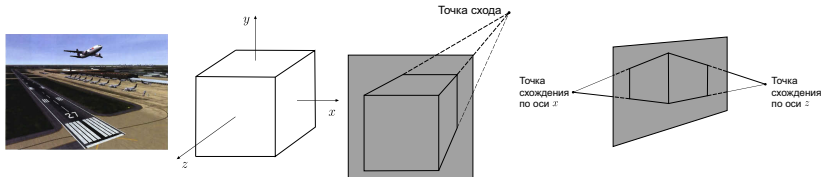
# Точки схождения перспективных проекций

Когда сцена проектируется на плоскость наблюдения с использованием перспективного отображения, параллельные линии сцены, которые при этом не параллельны плоскости наблюдения, проектируются в сходящиеся линии. Точка, в которую сходятся проекции параллельных прямых, называется точкой схождения. Каждый набор проекций параллельных прямых имеет свою точку схождения.

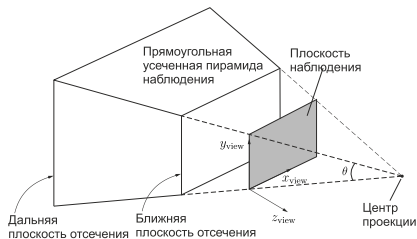
Если набор линий параллелен одной из главных осей объекта, соответствующая точка схождения называется главной точкой схождения.

Число главных точек схождения (одна, две или три) на проекции равно числу главных осей, которые пересекают плоскость наблюдения.

Перспективные проекции классифицируются по этому признаку как одно-, двух- и трёхточечные проекции. Трёхточечная проекция не намного повышает реализм сцены по сравнению с двухточечной, поэтому в архитектурном и инженерном проектировании трёхточечные проекции не получили широкого распространения.



# Объём наблюдения перспективной проекции



В случае перспективной проекции верхняя, нижняя и боковые граничные плоскости объёма наблюдения не параллельны, поскольку не параллельны линии проекции, и проходят через центр проекции. Добавляя ближнюю и дальнюю плоскости отсечения, перпендикулярные оси  $z_{\text{view}}$  (и параллельные плоскости наблюдения), мы отсекаем части бесконечного объёма наблюдения перспективной проекции и получаем усеченную пирамиду объёма наблюдения. Обычно и ближняя, и дальняя отсекающие плоскости находятся с одной стороны от центра проекции, причём дальняя плоскость расположена дальше по направлению наблюдения от центра проекции, чем ближняя.

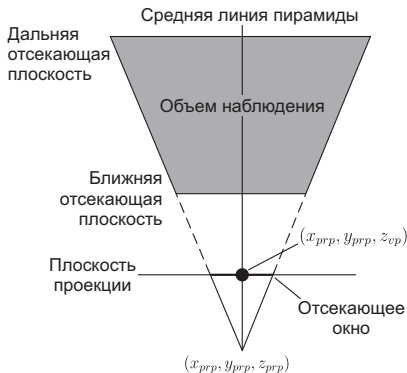
Объём наблюдения перспективной проекции часто называется *пирамидой зрения*. Отображенная проекция сцены включает только объекты, находящиеся внутри пирамиды.

# Симметричная пирамида перспективной проекции

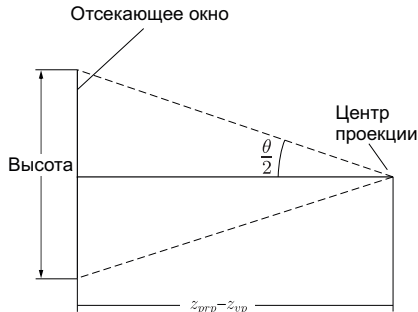
Линия, проходящая через центры ближней и дальней плоскостей отсечения, является средней линией пирамиды перспективной проекции. Если данная средняя линия перпендикулярна плоскости наблюдения, то имеем симметричную усеченную пирамиду. Пусть средняя линия пирамиды пересекает плоскость наблюдения в точке  $(x_{prp}, y_{prp}, z_{vp})$ , тогда угловые точки отсекающего окна можно выразить через размеры окна:

$$\begin{aligned} xw_{\min} &= x_{prp} - \frac{\text{ширина}}{2}, & xw_{\max} &= x_{prp} + \frac{\text{ширина}}{2}, \\ yw_{\min} &= y_{prp} - \frac{\text{высота}}{2}, & yw_{\max} &= y_{prp} + \frac{\text{высота}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, симметричную перспективную проекцию сцены можно задать, используя ширину и высоту отсекающего окна, а не его координаты.



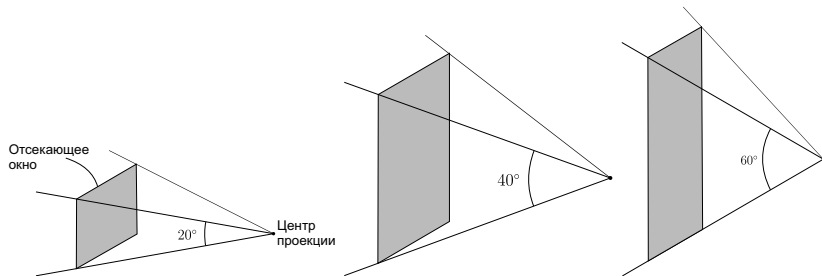
# Симметричная пирамида перспективной проекции



Другой способ задания симметричной перспективной проекции определяется *углом обзора* — мерой размера линз камеры. Обычно углом обзора считается угол между верхней и нижней отсекающими плоскостями усечённой пирамиды. Следовательно для данного центра проекции и положения плоскости наблюдения угол обзора определяет высоту отсекающего окна, а не его ширину.

Чтобы полностью определить размеры отсекающего окна, нужен дополнительный параметр, и этим вторым параметром может быть либо ширина окна, либо характеристическое отношение (ширина:высота) отсекающего окна.

# Симметричная пирамида перспективной проекции



Если угол обзора уменьшается, то эффекты перспективы также уменьшаются. Это можно сравнить с удалением центра проекции от плоскости наблюдения. Кроме того, уменьшение угла обзора уменьшает высоту отсекающего окна, поэтому на данном эффекте можно построить схему увеличения небольших участков сцены. Наоборот, большие углы обзора дают большую высоту окна отсечения (уменьшение масштаба). При этом усиливаются эффекты перспективы, и такое изображение мы получаем, располагая центр проекции близко к плоскости наблюдения.

## Задание симметричной перспективной проекции с помощью glmMatrix

Объём наблюдения перспективной проекции в виде симметричной усечённой пирамиды устанавливается методом:

```
perspective(mat4 out, fovy, aspect, near, far)
```

Здесь параметры `fovy` и `aspect` определяют размер отсекающего окна на ближней плоскости, а `near`, `far` — расстояние от точки наблюдения до ближней и дальней плоскостей отсечения. Параметр `fovy` представляет угол обзора между верхней и нижней плоскостями отсечения, который задаётся в радианах. Данному углу можно присвоить любое значение от 0 до  $\pi$ . Параметру `aspect` присваивается значение характеристического отношения (ширина:высота) отсекающего окна. Центр проекции совпадает с началом системы наблюдения, а ближняя плоскость отсечения — с плоскостью наблюдения.

При построении перспективной проекции ближняя и дальняя плоскости отсечения должны всегда идти по отрицательному направлению оси  $z_{\text{view}}$ ; ни одна из них не может располагаться позади точки наблюдения. Данное ограничение предотвращает вывод на экран перевернутой перспективной проекции объекта. Следовательно, обоим параметрам `near` ( $d_{\text{near}}$ ) и `far` ( $d_{\text{far}}$ ) нужно присвоить положительные значения, а положения ближней и дальней плоскостей вычисляются как  $z_{\text{near}} = -d_{\text{near}}$  и  $z_{\text{far}} = -d_{\text{far}}$ .



## Задание произвольной перспективной проекции в glMatrix

Чтобы задать перспективную проекцию с объёмом наблюдения, представляющим собой либо симметричную усеченную пирамиду, либо наклонную усеченную пирамиду, можно использовать следующую функцию:

```
frustum(out out, left, right, bottom, top, near, far)
```

Центр проекции находится в точке наблюдения (начало координат), ближняя плоскость отсечения является плоскостью наблюдения. Данная функция имеет те же параметры, что и функция ортогональной параллельной проекции, но теперь расстояния до ближней и дальней плоскостей отсечения должны быть положительными. Первые четыре параметра задают координаты отсекающего окна, а последние два — расстояния от начала координат до ближней ( $d_{near}$ ) и дальней ( $d_{far}$ ) плоскости отсечения вдоль отрицательного направления оси  $z_{view}$ .

Положения ближней и дальней плоскостей вычисляются как  $z_{near} = -d_{near}$  и  $z_{far} = -d_{far}$ .

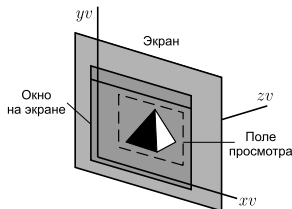
Предполагается, что плоскостью наблюдения всегда является ближняя плоскость отсечения. Отсекающее окно можно задать где угодно на ближней плоскости. Выбрав координаты отсекающего окна, при которых  $left = -right$  и  $bottom = -top$ , получим симметричную усеченную пирамиду (средней линией является отрицательная ось  $z_{view}$ ).

# Преобразование координат наблюдения в экранные координаты

Чтобы процесс наблюдения был независимым от разрешения экрана или другого устройства вывода, в графических системах описания объектов в отсекающем окне преобразуется в нормированные координаты.

В одних системах используются нормированные координаты в диапазоне от 0 до 1, в других — в диапазоне от  $-1$  до 1.

Данное преобразование должно сохранять относительное расположение описаний объектов. Например, если точка находилась в центре отсекающего окна, она отобразится в центр поля просмотра. Вершины, лежащие за пределами исходного объёма наблюдения преобразуются в вершины, лежащие вне нормированного объёма.



После завершения процедур отсечения в нормированных координатах содержимое нормированного отсекающего окна масштабируется под размеры прямоугольного окна при визуализации на экране, которое называется полем просмотра. Код цвета каждой точки  $xv$  поля просмотра записываются в буфер кадра, также для каждой точки  $xv$  в буфере глубины записывается информация о глубине  $z$ .

Относительные пропорции объектов сохраняются только если равны характеристические отношения поля просмотра и отсекающего окна. В противном случае объекты сцены будут растягиваться или сжиматься в направлении  $x$  или  $y$  (или обоих) при отображении на устройстве вывода.