Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»
Лекция 4 «B-сплайны и B-сплайновые поверхности. NURBS-кривые»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

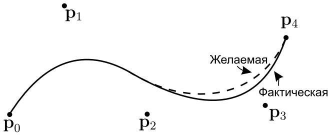
МГТУ им. Н.Э. Баумана

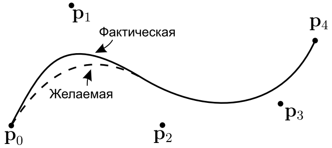
1 апреля 2024 г.

Введение

Данная категория сплайнов является наиболее используемой, и функции *B-сплайнов* широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, B-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, B-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома B-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями); во-вторых, B-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является бóльшая сложность B-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

В кривой Безье глобальное влияние каждой опорной точки $\mathbf{p}_i$ на всю кривую происходит из-за того, что каждая из функций B_i^n не равна нулю на всем интервале (0;1). Если бы вместо функций Бернштейна выступали функции с локальными носителями, существенно меньшими, чем область определения параметра кривой t, то удалось бы локализовать влияние отдельной точки на всю кривую.





Введение

Поэтому поставим задачу следующим образом. Пусть даны контрольные точки $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$. Определим кривую $\mathbf{r}(t)$ по формуле

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i(t)\mathbf{p}_i, \qquad t_{\text{min}} \leqslant t \leqslant t_{\text{max}}, \tag{1}$$

где $N_i(t)$ — набор кусочно-полиномиальных функций, таких, что

1. $N_i(t) = 0$ при $t \notin [a_i, b_i] \subset [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$;
2. $N_i(t)$ линейно независимы и образуют базис.
3. $\sum\limits_{i=0}^{n} N_i(t) = 1$ для каждого $t \in [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$.

Последнее условие вводится для того, чтобы в случае совпадения всех контрольных точек кривая превращалась бы в ту же точку.
Решение поставленной задачи даётся B-кривыми (сокр. от базисные — basis). B-кривые обобщают кривые Безье.

Уравнение B-сплайна

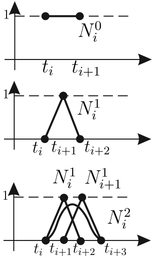
Общее выражение для расчёта координат точек B-сплайна:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\mathbf{p}_i, \qquad t_{\text{min}} \leqslant t \leqslant t_{\text{max}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

В 1972 г. Кокс (Cox) и де Бур (de Boor) предложили использовать функции N_i^k, определяемые рекурсивно:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leqslant t < t_{i+1}, \qquad 0 \leqslant i < n+k+1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t). \qquad (2)$$



Функции N_i^k называют базисными функциями. Каждая точка t_i называется *узлом* (knot). Узлы определяют области, внутри которых функции сопряжения имеют ненулевые значения. Полный набор используемых узлов $\{t_0, \ldots, t_{n+k+1}\}$ называется *вектором узлов* (knot vector). Значения узлов можно выбирать любыми при условии, что $t_i \leqslant t_{i+1}$. В частности, расстояния между соседними узлами могут быть равны нулю, тогда говорят о кратности узлов.

Свойства базисных функций

Свойство локальности: каждая базисная функция $N_i^k = 0$, если $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$.

$$\begin{tikzcd}
N_1^0 & & N_0^2 & \\
& N_1^1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & N_0^3 \\
N_2^0 & & N_1^2 \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
& N_2^1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & N_1^3 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
N_3^0 & & N_2^2 \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
& N_3^1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & N_2^3 \\
N_4^0 & & N_3^2 &
\end{tikzcd}$$

N_1^3 — комбинация значений функций N_1^0, N_2^0, N_3^0 и N_4^0. Таким образом, функции N_1^3 отличны от нуля только для значений $t \in [t_1, t_5)$.

Свойства базисных функций

В любом заданном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ могут быть отличны от нуля только $k+1$ функций: $N_{i-k}^k, \ldots, N_i^k$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & N_1^1 & & & & N_0^3 \\
 & & & & & \nearrow & \\
N_2^0 & & & & N_1^2 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & N_2^1 & & & & N_1^3 \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
N_3^0 & & & & N_2^2 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & N_3^1 & & & & N_2^3 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
N_4^0 & & & & N_3^2 & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & N_4^1 & & & & N_3^3
\end{array}
$$

На интервале $[t_3, t_4)$ единственной функцией, отличной от нуля, является функция N_3^0. Следовательно, единственные кубические функции, отличные от нуля на $[t_3, t_4)$ — это функции $N_0^3, \ldots, N_3^3$.

Алгоритм вычисления базисных функций B-сплайна

В силу последнего свойства, при вычислении базисных функций N^k в точке t, важно уметь находить индекс i в векторе узлов, при котором выполняется соотношение $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$.
Отдельно стоит рассмотреть случай вычисления значения i при максимально возможном значении параметра $t = t_{n+1}$. В этом случае, параметр i следует принять равным n, т.е. расширить область $t \in [t_n, t_{n+1}]$ в которой функция $N_n^0 = 1$.
В общем случае для вычисления значения i можно использовать алгоритмы линейного или бинарного поиска.

Алгоритм вычисления базисных функций B-сплайна

Листинг алгоритма бинарного поиска индекса i:

```
/// \param [in] n,k,t,knot_vector
/// \return i
findSpan(n,k,t,knot_vector)
{
    if (t == knot_vector[n + 1])
        return n; /* Special case */

    /* Do binary search */
    low = k;    high = n + 1;
    mid = (low + high) / 2;
    while ((t < knot_vector[mid]) || (t >= knot_vector[mid + 1])) {
        if (t < knot_vector[mid])
            high = mid;
        else
            low = mid;
        mid = (low + high) / 2;
    }

    return mid;
}
```

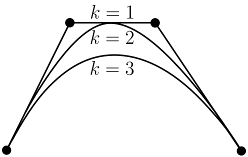
Алгоритм вычисления базисных функций B-сплайна

Приведем листинг алгоритма для вычисления ненулевых базисных функций $N_{i-k}^k,\ldots,N_i^k$:

```
/// \param [in] i,t,k,knot_vector
/// \param [out] N (массив базисных функций, нумерация с нуля!)
basisFunc(i,t,k,knot_vector,N)
{
    N[0] = 1.0;
    for (j = 1; j <= k; j++) {
        left[j] = t - knot_vector[i + 1 - j];
        right[j] = knot_vector[i + j] - t;
        saved = 0.0;
        for (r = 0; r < j;  r++) {
            temp = N[r]/(right[r+1]+left[j-r]);
            N[r] = saved + right[r+1]*temp;
            saved = left[j-r]*temp;
        }
        N[j] = saved;
    }
}
```

Свойства B-сплайнов

- Полиномиальная кривая имеет степень k и непрерывность C^{k-1}.
- Диапазон параметра t делится на $n+k+1$ подынтервалов $n+k+2$ значениями, заданными в векторе узлов.
- Если значения узлов обозначить $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n+k+1}\}$, получающийся B-сплайн определяется только в промежутке $[t_k, t_{n+1})$, т.к. только в этом промежутке $\sum\limits_{i=0}^{n} N_i^k(t) = 1$.
- Каждый участок сплайна определяется $k+1$ контрольными точками.
- Локальная коррекция: любая контрольная точка $\mathbf{p}_i$ может влиять на форму кривой $\mathbf{r}(t)$ только на интервале $[t_i, t_{i+k+1})$.
- При движении вдоль кривой, функции $N_i^k(t)$ действуют подобно переключателям. Когда t проходит мимо узла t_{i+k+1} в векторе узлов, функция N_i^k (и, соответственно, точка $\mathbf{p}_i$) выключаются, поскольку становится равной нулю, и включаются следующие.
- Чем меньше степень кривой, тем ближе она подходит к контрольным точкам. Кривые высоких порядков более гладкие.



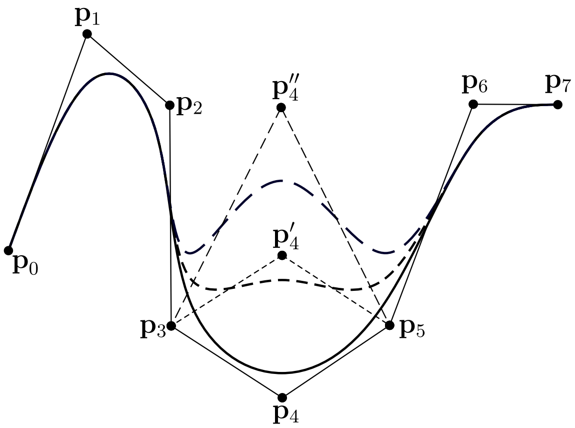
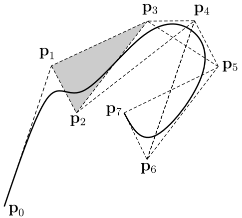


Рис.: Локальная коррекция B-сплайна.

Помимо локального контроля B-сплайны позволяют варьировать число контрольных точек, используемых в разработке кривой, без изменения степени полинома.

Свойства B-сплайнов

- Кривые на базе B-сплайнов аффинно инвариантны. Для преобразования B-сплайн кривой мы просто преобразуем каждую контрольную точку и генерируем новую кривую.
- B-сплайн кривая является выпуклой комбинацией своих контрольных точек и поэтому лежит внутри их выпуклой оболочки. Возможно более сильное утверждение: при любом значении $t \in [t_k, t_{n+1}]$ только $k+1$ функций B-сплайна «активны» (то есть отличны от нуля). В этом случае кривая должна лежать внутри выпуклой оболочки не более $k+1$ последовательных активных контрольных точек.
- B-сплайн кривые обеспечивают линейную точность: если $k+1$ последовательных контрольных точек коллинеарны, то их выпуклая оболочка будет прямой линией, и кривая будет захвачена внутрь её.
- B-сплайн кривые уменьшают колебания: B-сплайн кривая не пересекает никакую линию чаще, чем её контрольный полигон.



Выпуклые оболочки для квадратичной B-сплайн кривой

Дифференцирование B-сплайна

Аналогично случаю вычисления производной от кривой Безье, производная B-сплайна записывается через уравнение B-сплайна, порядок которого на единицу меньше исходного. Если параметр t лежит между узловыми значениями t_l и t_{l+1}, то производная от B-сплайна имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \sum_{i=l-k+1}^{l} N_i^{k-1}(t)\mathbf{p}_i^1, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{p}_i^1 = k\frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+k} - t_i}. \tag{4}$$

Правая часть уравнения (3) имеет форму уравнения B-сплайна, поэтому можно предполагать, что производные более высоких порядков могут быть получены рекурсивным применением формулы (3). Так, производная порядка m от B-сплайна имеет вид:

$$\frac{d^m\mathbf{r}(t)}{dt^m} = \sum_{i=l-k+m}^{l} N_i^{k-m}(t)\mathbf{p}_i^m, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{p}_i^m = (k-m+1)\frac{\mathbf{p}_i^{m-1} - \mathbf{p}_{i-1}^{m-1}}{t_{i+k+1-m} - t_i}. \tag{6}$$

Разные методы задания узловых значений позволяют получить разные функции сопряжения и, соответственно, разные кривые. Если расстояние между значениями в узлах постоянно, получающаяся в результате кривая называется *равномерным* В-сплайном. Например, можно задать следующий равномерный вектор узлов:

$$\{-1.5; -1.0; -0.5; 0.0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0\}.$$

Часто значения узлов нормируются в диапазон от 0 до 1:

$$\{0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\}.$$

Во многих приложениях удобно задать равномерные значения узлов с шагом 1 и начальным значением 0:

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Равномерные В-сплайны имеют *периодические* стыковочные функции. Следовательно, для заданных значений n и k все стыковочные функции имеют одинаковую форму. Каждая последующая стыковочная функция является просто смещённой версией предыдущей:

$$N_i^k(t) = N_{i+1}^k(t + \Delta t) = N_{i+2}^k(t + 2\Delta t), \tag{7}$$

где Δt — интервал между соседними значениями узлов.

Пример. Равномерные квадратичные B-сплайны

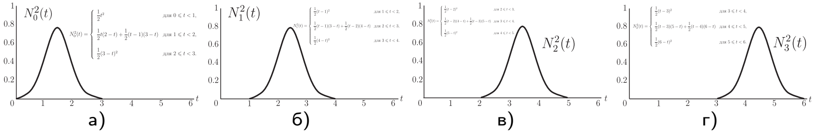


Рис.: Периодические стыковочные функции равномерного B-сплайна

Проиллюстрируем стыковочные функции B-сплайнов для равномерного целого вектора узлов при $k+1=n=3$. Вектор узлов должен содержать $n+k+2=7$ значений узлов: $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Каждая из четырёх стыковочных функций захватывает $k+1=3$ подынтервалов. Используя рекуррентные формулы (2), получаем первую стыковочную функцию $N_0^2(t)$. Следующая функция N_1^2 получается с использованием соотношения (7) при подстановке $t-1$ вместо t в N_0^2 и смещения начального положения t на 1 в сторону увеличения. Подобным образом, оставшиеся две периодические функции получаются последовательным смещением N_1^2 вправо. Первая контрольная точка умножается на стыковочную функцию N_0^2. Следовательно, изменение положения первой контрольной точки влияет только на форму кривой до $t=3$. Аналогично последняя контрольная точка влияет на форму сплайновой кривой в интервале, где определена N_3^2.

Пример. Равномерные квадратичные B-сплайны

Поскольку диапазон получающейся полиномиальной кривой принадлежит промежутку от $t_k = 2$ до $t_{n+1} = 4$, начальную и конечную позицию кривой можно определить, вычислив стыковочные функции в этих точках:

$$\mathbf{r}(2) = 0.5(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1), \qquad \mathbf{r}(4) = 0.5(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3).$$

Т.о., кривая начинается посередине между первыми двумя контрольными точками и заканчивается посередине между двумя последними.

Вычисляя производные стыковочных функций, получаем:

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \qquad \mathbf{r}'(4) = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2.$$

Параметрическая касательная кривой в начале параллельна линии, соединяющий первые две контрольные точки, а параметрическая касательная в конце кривой параллельна линии, соединяющей последние две контрольные точки.

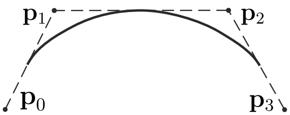
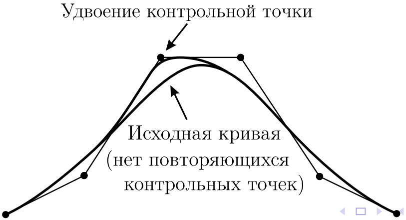


Рис.: Квадратный периодический B-сплайн, построенный по четырём контрольным точкам на плоскости xy. Кривая проходит через середины ребер контрольного полигона

Равномерные периодические В-сплайны

В предыдущем примере было отмечено, что квадратичная кривая начинается между первыми двумя и заканчивается между двумя последними контрольными точками. Полученный результат справедлив для квадратичных периодических В-сплайнов, подобранных по любому числу различных контрольных точек. Вообще, для полиномов высокого порядка начальная и конечная точки являются взвешенным средним k контрольных точек. Кроме того, как это было для кривых Безье, сплайновую кривую можно поместить ближе к любой контрольной точке, введя эту точку несколько раз. При задании кратности k выпуклые оболочки, окружающие эту точку состоят из ребер контрольного полигона, поэтому кривая «захватывается» этим ребром на протяжении одного диапазона полиномов. Аналогичного действия можно добиться, увеличивая кратность значения в векторе узлов. Однако это приводит к уменьшению непрерывности на 1 при каждом повторе узлового значения.



Открытые равномерные B-сплайны

Данный класс B-сплайнов является промежуточным между равномерными и неравномерными B-сплайнами. Иногда он считается частным случаем равномерного B-сплайна, а иногда он относится к неравномерным B-сплайнам. Для *открытых равномерных* B-сплайнов, или просто *открытых* B-сплайнов, расстояние между узлами равномерно, за исключением концов, где значения узлов повторяются $k+1$ раз. Примеры открытых равномерных целочисленных вектора узлов:

$$\{0,0,1,2,3,3\} \qquad \text{для } k=1 \text{ и } n=3,$$
$$\{0,0,0,0,1,2,2,2,2\} \qquad \text{для } k=3 \text{ и } n=4.$$

Данные векторы можно нормировать в единичный интервал от 0 до 1:

$$\{0,0,0.33,0.67,1,1\} \qquad \text{для } k=1 \text{ и } n=3,$$
$$\{0,0,0,0,0.5,1,1,1,1\} \qquad \text{для } k=3 \text{ и } n=4.$$

Для любых значений параметров k и n открытый равномерный вектор узлов с целыми значениями можно сгенерировать, используя формулы

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ i-k & \text{для } k+1 \leqslant i \leqslant n, \\ n-k+1 & \text{для } n < i \leqslant n+k+1. \end{cases}$$

При этом первым $k+1$ узлам присваивается значение 0, а последние $k+1$ узлов имеют значение $n-k+1$.

Открытые равномерные B-сплайны

Открытые равномерные B-сплайны обладают характеристиками, весьма подобными характеристикам сплайнов Безье. При $n = k$ открытые B-сплайны совпадают со сплайнами Безье, и все значения узлов равны 0 или 1. Это означает, что

$$N_i^k(t) = B_i^n(t),$$

где $i = 0, \dots, n$.

Например, при кубическом открытом B-сплайне $(k = 3)$ и четырёх контрольных точках вектор узлов равен:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}.$$

Полиномиальная кривая для открытого B-сплайна соединяет первую и последнюю контрольную точку. Кроме того, параметрическая касательная кривой в первой контрольной точке параллельна прямой линии, сформированной первыми двумя контрольными точками, а параметрическая касательная в последней контрольной точке параллельна линии, определённой двумя последними контрольными точками. Таким образом, геометрические условия для согласования участков кривой не отличаются от условий для кривых Безье.

Для данного класса сплайнов вектор узлов может принимать любые значения из любых интервалов. Для *неравномерных* B-сплайнов можно выбирать несколько одинаковых внутренних значений узлов и неравномерное размещение значений узлов. Например, внутренние значения могут быть пропорциональны длинам ребер между вершинами многоугольника:

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ \left(\dfrac{\left(\dfrac{i-k}{n-k+1}\right) c_{i-k+1} + \sum\limits_{j=1}^{i-k} c_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} \right)(n-k+1) & \text{для } k+1 \leqslant i \leqslant n, \\ n-k+1 & \text{для } n < i \leqslant n+k+1, \end{cases}$$

где $c_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$.

Неравномерные B-сплайны предлагают повышенную гибкость в управлении формой кривой. Неравномерные интервалы в векторе позволяют получать различные формы стыковочных функций в различных интервалах, что может использоваться для воспроизведения определённых особенностей аппроксимации. В любой момент работы с неравномерным B-сплайном в состав кривой можно ввести дополнительный узел и изменить её форму при помощи дополнительных контрольных точек.

Объединение кривых Безье в один B-сплайн

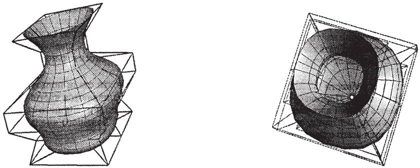
Рассмотрим проблему объединения двух или более кривых Безье в один B-сплайн. Пусть имеется две кривые Безье второй степени $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{r}_1(t)$, определённые с помощью контрольных точек $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_0'$, $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$. Требуется объединить эти кривые в одну кривую $\mathbf{r}(t)$, которая состоит из $\mathbf{r}_0(t)$, за которой следует $\mathbf{r}_1(t)$. То есть $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t)$ для $1 \leqslant t \leqslant 2$. Это можно сделать с помощью квадратичного B-сплайна $\mathbf{r}(t)$ с узловым вектором $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и с шестью контрольными точками $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_0'$, $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$. Обычно две кривые Безье образуют единую непрерывную кривую, то есть $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0'$. В в этом случае $\mathbf{r}(t)$ совпадает с B-сплайном, у которого вектор узлов равен $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и который строится по пяти контрольным точкам $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$.
Это правило можно обобщить. Если есть три кривые Безье второй степени, которые образуют одну непрерывную кривую, то они эквивалентны квадратичному B-сплайну с вектором узлов$\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$. Аналогичным образом можно построить B-сплайн по любому числу квадратичных кривых Безье, непрерывно стыкующихся между собой.

B-сплайновые поверхности

Формулировка B-сплайновой поверхности подобна формулировке поверхностных сплайнов Безье. Векторную функцию B-сплайновой поверхности можно получить, используя декартово произведение стыковочных B-сплайновых функций вида

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v), \tag{8}$$

где $\mathbf{p}_{ij}$ задают положения $(n+1)$ на $(m+1)$ контрольных точек. Поверхность можно построить по выбранным значениям степеней полиномов k и l. Для каждого параметра u и v также выбираются значения векторов узлов, которые определяют диапазон параметров стыковочных функций. B-сплайновые поверхности имеют почти все те же свойства, что и составляющие их B-сплайны.



На рисунке показан другой вид, откуда становится ясно, что данная поверхность не является поверхностью вращения.

Рис.: Пример B-сплайн поверхности

Дифференцирование B-сплайновой поверхности

Достаточно часто возникает необходимость вычисления производных B-сплайновой поверхности:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}.$$

Продифференцируем выражение (8) по u и v:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} = \sum_{j=0}^{m} \frac{d}{du}\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_{i,j} N_i^k(u)\right) N_j^l(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t,v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{dv}\left(\sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{i,j} N_j^l(v)\right) N_i^k(u),$$

Производную B-сплайна можно вычислить по формуле (3).

Рациональные B-сплайны

Аналогично случаю рациональных кривых Безье, контрольные точки рационального B-сплайна указываются с использованием однородных координат. Функции сопряжения применяются именно к этим однородным координатам. Координаты точки рационального B-сплайна в однородном пространстве получаются по формулам:

$$x \cdot h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t) \left(h_i \cdot x_i\right); \tag{9}$$

$$y \cdot h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t) \left(h_i \cdot y_i\right); \tag{10}$$

$$z \cdot h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t) \left(h_i \cdot z_i\right); \tag{11}$$

$$h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t) h_i. \tag{12}$$

Координаты точки в трёхмерном пространстве x, y и z получаются делением xh, yh и zh на h, поэтому уравнение рационального В-сплайна в векторном виде может быть записано следующим образом (поделим (9), (10) и (11) на (12)):

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} h_i \mathbf{p}_i N_i^k(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} h_i N_i^k(t)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i R_i^k(t), \qquad (13)$$

где

$$R_i^k(t) = \frac{h_i N_i^k(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} h_j N_j^k(t)}$$

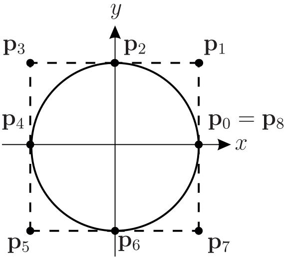
— базисные функции рационального В-сплайна.
Если всем весовым коэффициентам будут присвоены одинаковые ненулевые значения (например, 1), получим стандартный В-сплайн, поскольку в таком случае $R_i^k(t) \equiv N_i^k(t)$ для всех i.

Свойства рациональных B-сплайнов

Рациональные B-сплайны и их базисы это обобщение нерациональных B-сплайнов и базисов. При $h_i \geqslant 0$ для всех i они наследуют почти все аналитические и геометрические свойства последних. В частности:

- каждая функция рационального базиса положительна или равна нулю для всех значений параметра, т.е. $R_i^k \geqslant 0$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} R_i^k(t) \equiv 1$ для $t \in [t_k, t_{n+1}]$;
- при $k > 0$ каждая функция $R_i^k(t)$ имеет ровно один максимум;
- рациональный B-сплайн степени k имеет непрерывность C^{k-1};
- максимальная степень рационального B-сплайна равна количеству контрольных точек минус 1;
- рациональный B-сплайн обладает свойством уменьшения вариации;
- если $t \in [t_i, t_{i+1})$, то $\mathbf{r}(t)$ находится в пределах выпуклой оболочки, составленной из контрольных точек $\mathbf{p}_{i-k}, \ldots, \mathbf{p}_i$;
- свойство локальности $R_i^k(t) = 0$ для $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$. Если $t \in [t_i, t_{i+1})$ только функции $R_{i-k}^k, \ldots, R_i^k$ являются ненулевыми;
- аффинная и перспективная инвариантность: применяемое к кривой преобразование можно свести к преобразованию только ее контрольных точек;
- свойство уменьшения вариации: прямая или плоскость пересекают сплайн не большее количество раз чем контрольный полигон сплайна.

Представление единичной окружности



С помощью рациональных квадратичных B-сплайнов можно сразу целиком построить окружность или какое-либо другое коническое сечение. Т.е. с их помощью можно сшить отдельные дуги, представляемые с помощью рациональных сплайнов Безье. Это возможно сделать множеством способов, например, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек, причём начальная и конечная вершины должны совпадать в одной из середин. Узловой вектор можно задать в следующем виде: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Неравномерные рациональные B-сплайны

Обычно в пакетах графической разработки для построения рациональных B-сплайнов используются неравномерные представления вектора узлов. Данные сплайны называются «NURBS» (Nonuniform Rational B-splines — неравномерные рациональные B-сплайны). NURBS с 1983 г. являются стандартом IGES. IGES — это стандарт обмена проектной информацией между системами автоматизированного проектирования, а также между ними и системами автоматизированного производства. Рациональные B-сплайны реализованы аппаратно в некоторых графических рабочих станциях.

NURBS-поверхности

Распространим понятие NURBS-кривых на NURBS-поверхности, для чего используем декартово произведение:

$$\mathbf{r}(u,v) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}\mathbf{p}_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}, \tag{14}$$

где $\mathbf{p}_{ij}$ — векторы задающих точек с компонентами x_{ij}, y_{ij} и z_{ij}, а h_{ij} — однородные координаты задающих точек.

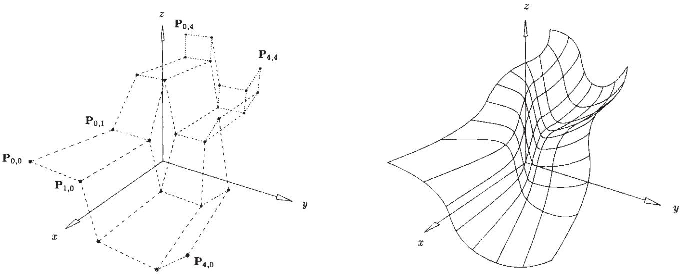
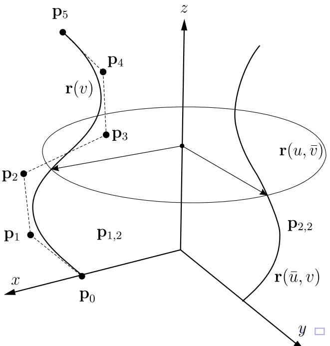


Рис.: Биквадратичная NURBS поверхность, $h_{11} = h_{12} = h_{21} = h_{22} = 10$, остальные веса равны 1. Узловой вектор: $\{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$

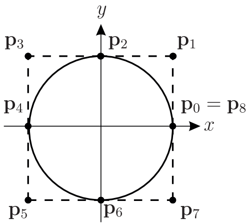
Благодаря общности и гибкости NURBS-поверхности стали пользоваться популярностью. Поскольку B-сплайны являются частным случаем NURBS-поверхностей (при $h_{i,j} = 1$), можно использовать единый алгоритм для создания обширного семейства поверхностей. NURBS поверхности обладают большинством свойств, присущих B-сплайновым поверхностям и NURBS-кривым. NURBS поверхности позволяют точно описывать квадратичные поверхности, такие как цилиндр, конус, сфера, параболоид и гиперболоид. Поэтому дизайнеру вместо инструментария, состоящего из большого числа различных алгоритмов для создания поверхностей, потребуется всего один метод.

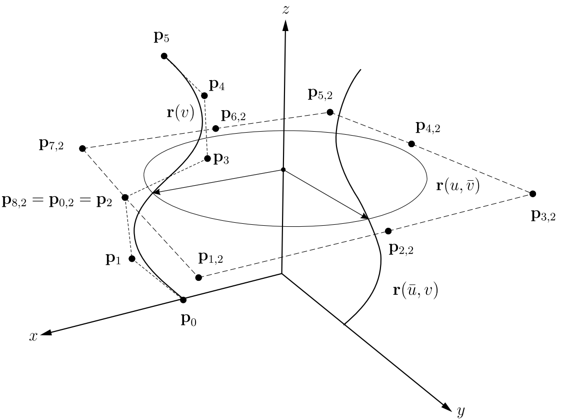
Пусть задана рациональная NURBS-кривая $\mathbf{r}(v) = \sum_{j=0}^{m} R_j^l(v)\mathbf{p}_j$ с вектором узлов $\{v_0, \ldots, v_{n+l+1}\}$. Пусть эта кривая, называемая образующей, вращается вокруг некоторой оси. Рассмотрим случай, когда кривая $\mathbf{r}(v)$ лежит в плоскости xz и поворачивается на угол 360° вокруг оси z. Построим поверхность вращения $\mathbf{r}(u, v)$ со следующими свойствами:

- при фиксированном $u = \bar{u}$, $\mathbf{r}(\bar{u}, v)$ является кривой $\mathbf{r}(v)$, повернутой на некоторый угол вокруг оси z.
- при фиксированном $v = \bar{v}$, $\mathbf{r}(u, \bar{v})$ является окружностью в плоскости xy с центром на оси z.



Построение поверхностей вращения





Воспользуемся представлением окружности с помощью NURBS-кривой, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек с узловым вектором: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Тогда искомая поверхность будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{r}(u,v) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{8}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}\mathbf{p}_{ij}N_i^2(u)N_j^l(v)}{\sum\limits_{i=0}^{8}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}N_i^2(u)N_j^l(v)}. \tag{15}$$

Контрольные точки и веса определяются следующим образом:
для $i = 0$: $\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_{0j} = \mathbf{p}_j$.
Поскольку $\mathbf{r}(u,\bar{v})$ является окружностью в плоскости xy, все точки $\mathbf{p}_{ij}$ при фиксированном j и $0 \leqslant i \leqslant 8$ должны образовывать квадрат, лежащий в плоскости xy с центром на оси z, ширина которого определяется положением контрольной точки $\mathbf{p}_j$. Веса точек получаются с помощью произведений весов образующей кривой h_j и весов окружности h_i, т.е.:
$h_{0,j} = h_j$, $h_{1,j} = (\frac{\sqrt{2}}{2})h_j$, $h_{2,j} = h_j$, $h_{3,j} = (\frac{\sqrt{2}}{2})h_j, \dots, h_{8,j} = h_j$.
По параметру u вектор узлов равен $\left\{0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,1,1\right\}$, а по параметру v — $\{v_0,\dots,v_{n+l+1}\}$.