

Домашнее задание №1 «Математические модели геометрических объектов»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

22 мая 2024 г.

1 Описание.

Во всех заданиях обязательно использование библиотеки WebGL для вывода графики. Результатом работы программ должен являться вывод заданного количества точек сплайна. Теория и формулы для построения сплайнов содержатся в лекциях.

По результатам выполнения домашнего задания необходимо написать отчёт и выслать его преподавателю. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Формулировку задания.
2. Основные формулы, которые использовались для выполнения задания.
3. Рисунки с результатами работы программы и кратким комментарием, что на них изображено.
4. Часть кода программы, в которой выполняются основные построения.

2 Задания

Амелин: Напишите программу построения естественного кубического сплайна кривой. Используйте краевые условия пятого типа и программу л.р. № 1.

| (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) |
|-------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| (1.7, 0.0, 0.45) | (1.7, 0.66, 0.45) | (1.7, 0.66, 1.275) | (1.7, 0.0, 1.275) |
| (3.1, 0.0, 0.675) | (3.1, 0.66, 0.675) | (2.6, 0.66, 1.275) | (2.6, 0.0, 1.275) |
| (2.4, 0.0, 1.875) | (2.4, 0.25, 1.875) | (2.3, 0.25, 1.95) | (2.3, 0.0, 1.95) |
| (3.3, 0.0, 2.25) | (3.3, 0.25, 2.25) | (2.7, 0.25, 2.25) | (2.7, 0.0, 2.25) |

Таблица 1: Данные для профиля носика чайника (верхняя часть)

| (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) |
|-----------------------|------------------------|--------------------|-------------------|
| (3.3, 0.0, 2.25) | (3.3, 0.25, 2.25) | (2.7, 0.25, 2.25) | (2.7, 0.0, 2.25) |
| (3.525, 0.0, 2.34375) | (3.525, 0.25, 2.34375) | (2.8, 0.25, 2.325) | (2.8, 0.0, 2.325) |
| (3.45, 0.0, 2.3625) | (3.45, 0.1, 2.3625) | (2.9, 0.1, 2.325) | (2.9, 0.0, 2.325) |
| (3.2, 0.0, 2.25) | (3.2, 0.15, 2.25) | (2.8, 0.15, 2.25) | (2.8, 0.0, 2.25) |

Таблица 2: Данные для профиля носика чайника (нижняя часть)

Бочкова: Напишите программу, рисующую поверхность носика чайника (рис. 1). Носик состоит из четырёх кубических лоскутов Безье. Поверхность носика симметрична относительно плоскости xz . Весь верхний y -положительный лоскут содержит 16 контрольных точек, координаты которых приведены в табл. 1. Нижний y -положительный лоскут также содержит 16 контрольных точек, координаты которых приведены в табл. 2. Используйте шаблон программы л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

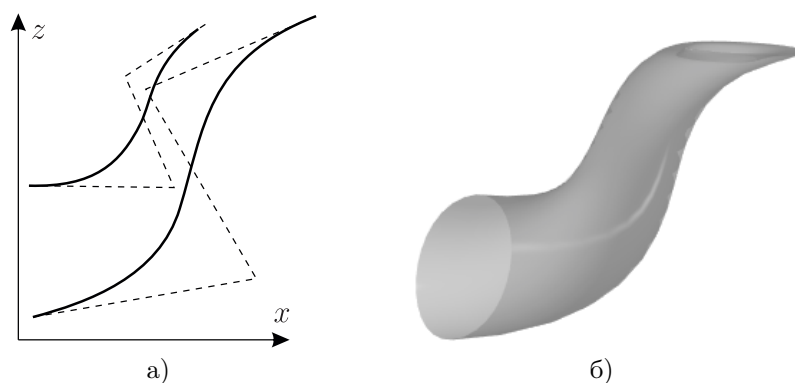


Рис. 1: Носик чайника: а) носик в разрезе; б) визуализированная поверхность

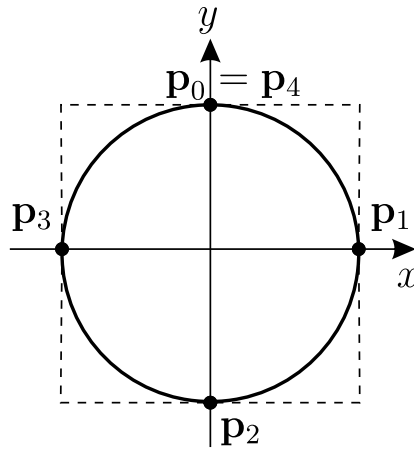


Рис. 2: Квадрат, образуемый пятью взвешенными контрольными точками для построения окружности

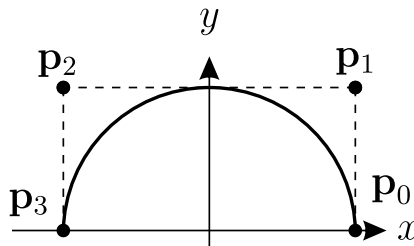


Рис. 3: NURBS-полуокружность, построенная на базе 4 контрольных точек, расположенных на границе описанного квадрата

Быков: Напишите программу построения единичной окружности с центром в начале координат с помощью NURBS-кривой на базе пяти контрольных точек (рис. 2). Однородные координаты точек равны: $\mathbf{p}_0 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{p}_3 = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{p}_4 = (0, 1, 1)$. Вектор узлов имеет вид: $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2\}$. Используйте программу `unitCircle.zip`.

Вахрамеева: Напишите программу построения полуокружности с помощью NURBS-кривой на базе четырёх контрольных точек, лежащих на границе описанного квадрата (рис. 3). Веса контрольных точек равны $h_0 = h_3 = 1$, $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}$. Узловой вектор имеет вид: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right\}$. Используйте программу `circle.zip`.

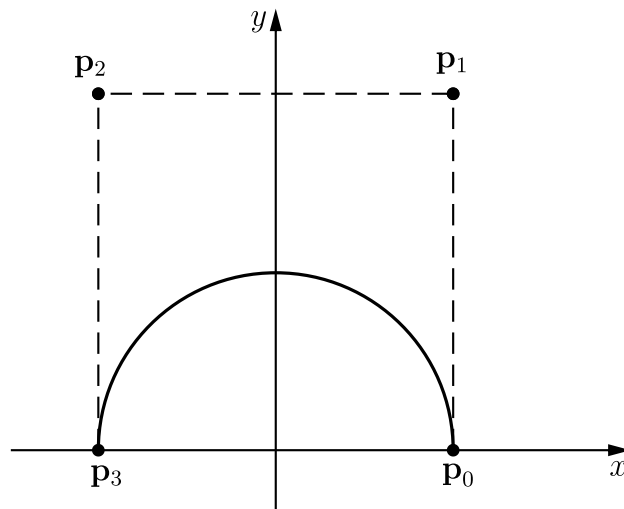


Рис. 4: Полуокружность, построенная с помощью рациональной кривой Безье

Волков: Напишите программу для построения полуокружности с помощью рациональной кривой Безье с центром в начале координат (рис. 4) на базе точек $\mathbf{p}_0 = (r, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (r, 2r)$, $\mathbf{p}_2 = (-r, 2r)$, $\mathbf{p}_3 = (-r, 0)$ и весов: $h_0 = h_3 = 1$, $h_1 = h_2 = \frac{1}{3}$. Используйте программу `circle.zip`. Значение параметра r определяется с помощью заданного в программе радиуса окружности.

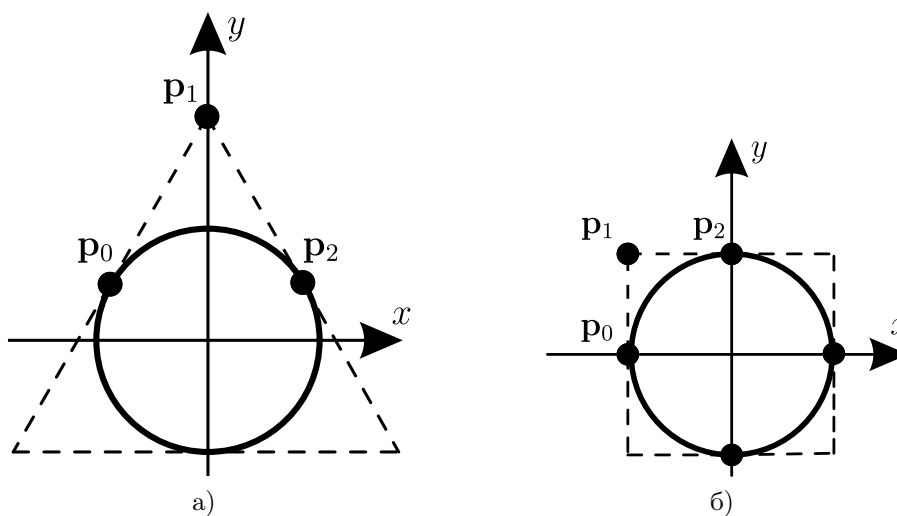


Рис. 5: Окружность, рассматриваемая как совокупность трёх или четырёх дуг

Долотова: На рис 5а приведена окружность, вписанная в равносторонний треугольник. Одну треть этой окружности можно нарисовать с помощью рационального сплайна Безье на базе точек p_0 , p_1 , p_2 и весов: $h_0 = h_2 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$. Тогда окружность целиком может быть нарисована как совокупность трёх дуг, причём каждая из них базируется на трёх точках. Для заданного положения центра окружности и её радиуса рассчитайте координаты контрольных точек и нарисуйте эту окружность с помощью рациональных сплайнов Безье. Используйте программу `circle.zip`.

| (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) |
|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| $(-1.6, 0.0, 1.875)$ | $(-1.6, 0.3, 1.875)$ | $(-1.5, 0.3, 2.1)$ | $(-1.5, 0.0, 2.1)$ |
| $(-2.3, 0.0, 1.875)$ | $(-2.3, 0.3, 1.875)$ | $(-2.5, 0.3, 2.1)$ | $(-2.5, 0.0, 2.1)$ |
| $(-2.7, 0.0, 1.875)$ | $(-2.7, 0.3, 1.875)$ | $(-3.0, 0.3, 2.1)$ | $(-3.0, 0.0, 2.1)$ |
| $(-2.7, 0.0, 1.65)$ | $(-2.7, 0.3, 1.65)$ | $(-3.0, 0.3, 1.65)$ | $(-3.0, 0.0, 1.65)$ |

Таблица 3: Данные для профиля ручки чайника (верхняя часть)

| (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) | (x, y, z) |
|----------------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| $(-2.7, 0.0, 1.65)$ | $(-2.7, 0.3, 1.65)$ | $(-3.0, 0.3, 1.65)$ | $(-3.0, 0.0, 1.65)$ |
| $(-2.7, 0.0, 1.425)$ | $(-2.7, 0.3, 1.425)$ | $(-3.0, 0.3, 1.2)$ | $(-3.0, 0.0, 1.2)$ |
| $(-2.5, 0.0, 0.975)$ | $(-2.5, 0.3, 0.975)$ | $(-2.65, 0.3, 0.7875)$ | $(-2.65, 0.0, 0.7875)$ |
| $(-2.0, 0.0, 0.75)$ | $(-2.0, 0.3, 0.75)$ | $(-1.9, 0.3, 0.45)$ | $(-1.9, 0.0, 0.45)$ |

Таблица 4: Данные для профиля ручки чайника (нижняя часть)

Киселев: Напишите программу, рисующую поверхность ручки чайника (рис. 6). Ручка состоит из четырёх лоскутов Безье. Поверхность ручки симметрична относительно плоскости xz . Верхний и нижний лоскуты находятся на y -положительной стороне относительно плоскости xz , а зеркальные отражения верхнего и нижнего лоскутов расположены на y -отрицательной стороне. Весь верхний y -положительный лоскут содержит 16 контрольных точек, координаты которых приведены в табл. 3. Нижний y -положительный лоскут также содержит 16 контрольных точек, координаты которых приведены в табл. 4. Используйте шаблон программы л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

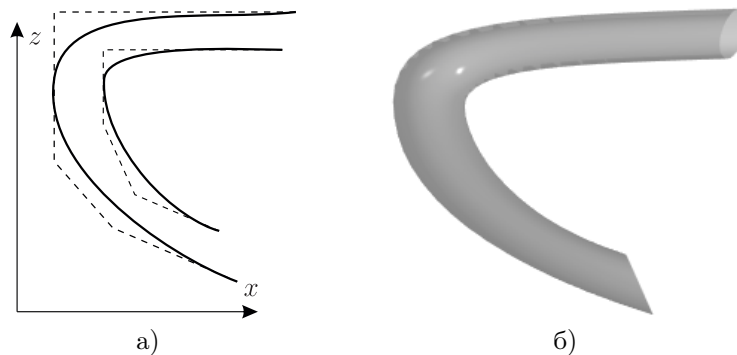


Рис. 6: Ручка чайника: а) сечение ручки и её контрольного полиэдра; б) визуализированная поверхность

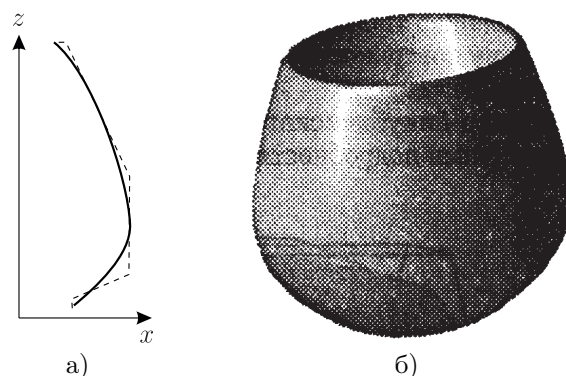


Рис. 7: Корпус чайника: а) профиль корпуса; б) визуализированная поверхность

| k | x | z |
|-----|--------|---------|
| 0 | 1.4 | 2.25 |
| 1 | 1.3375 | 2.38125 |
| 2 | 1.4375 | 2.38125 |
| 3 | 1.5 | 2.25 |
| 4 | 1.75 | 1.725 |
| 5 | 2 | 1.2 |
| 6 | 2 | 0.75 |
| 7 | 2 | 0.3 |
| 8 | 1.5 | 0.075 |
| 9 | 1.5 | 0 |

Таблица 5: Данные для профиля корпуса чайника

Климачева: Напишите программу, рисующую поверхность корпуса чайника (рис. 7). Корпус является поверхностью вращения, профиль которого состоит из трёх кривых Безье в плоскости xz на базе 10 контрольных точек, представленных в табл. 5. Первая кривая Безье определяется контрольными точками 0, 1, 2, 3; вторая — точками 3, 4, 5, 6, а третья — точками 6, 7, 8, 9. Для построения поверхности вращения этого профиля вокруг оси z можно использовать рациональные поверхности Безье. В табл. 6 приводятся однородные координаты контрольных точек для построения половины поверхности вращения (y -положительная). Вторую половину постройте аналогичным образом, отразив контрольные точки относительно плоскости xz . Используйте шаблон программы л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

| k | (x, y, z, h) | (x, y, z, h) | (x, y, z, h) |
|-----|-------------------------|-------------------|--------------------------|
| 0 | (1.4, 0, 2.25, 1) | (0, 1.4, 0, 0) | (-1.4, 0, 2.25, 1) |
| 1 | (1.3375, 0, 2.38125, 1) | (0, 1.3375, 0, 0) | (-1.3375, 0, 2.38125, 1) |
| 2 | (1.4375, 0, 2.38125, 1) | (0, 1.4375, 0, 0) | (-1.4375, 0, 2.38125, 1) |
| 3 | (1.5, 0, 2.25, 1) | (0, 1.5, 0, 0) | (-1.5, 0, 2.25, 1) |
| 4 | (1.75, 0, 1.725, 1) | (0, 1.75, 0, 0) | (-1.75, 0, 1.725, 1) |
| 5 | (2, 0, 1.2, 1) | (0, 2, 0, 0) | (-2, 0, 1.2, 1) |
| 6 | (2, 0, 0.75, 1) | (0, 2, 0, 0) | (-2, 0, 0.75, 1) |
| 7 | (2, 0, 0.3, 1) | (0, 2, 0, 0) | (-2, 0, 0.3, 1) |
| 8 | (1.5, 0, 0.075, 1) | (0, 1.5, 0, 0) | (-1.5, 0, 0.075, 1) |
| 9 | (1.5, 0, 0, 1) | (0, 1.5, 0, 0) | (-1.5, 0, 0, 1) |

Таблица 6: Данные для построения поверхности вращения (y -положительная половина)

Клячко: Напишите программу построения естественного бикубического сплайна по контрольным точкам, лежащим на цилиндрической поверхности заданного радиуса. Используйте краевые условия третьего типа по угловой координате и первого типа по параметрической координате вдоль оси цилиндра (для их задания используйте разностные аппроксимации). Используйте программу л.р. № 2 (Примечание: в функции `generateControlPoints`, в которой генерируются координаты контрольных точек, используйте параметрические уравнения для цилиндрической поверхности заданного радиуса).

Кортенко: Напишите программу построения естественного бикубического сплайна по контрольным точкам, лежащим на цилиндрической поверхности заданного радиуса. Используйте краевые условия третьего типа по угловой координате и пятого типа по параметрической координате вдоль оси цилиндра. Используйте программу л.р. № 2 (Примечание: в функции `generateControlPoints`, в которой генерируются координаты контрольных точек, используйте параметрические уравнения для цилиндрической поверхности заданного радиуса).

Куприн: Реализовать построение линий тока для заданного двумерного векторного поля на четырехугольной, треугольной и гибридной сетке.

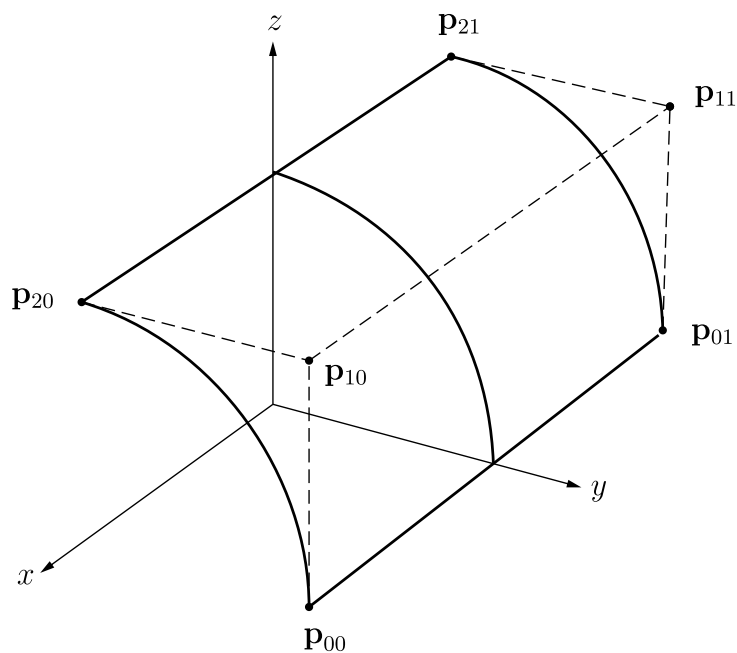


Рис. 8: Четверть поверхности цилиндра, построенная с помощью рациональной поверхности Безье

Писаревский: Напишите программу, которая строит четверть поверхности цилиндра с помощью рациональной поверхности Безье (рис. 8). Рациональная поверхность Безье строится на базе точек, имеющих однородные координаты $\mathbf{p}_{00} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{p}_{10} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{p}_{20} = (2, 0, 2, 2)$, $\mathbf{p}_{01} = (-1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{p}_{11} = (-1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{p}_{21} = (-2, 0, 2, 2)$. Воспользуйтесь программой л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

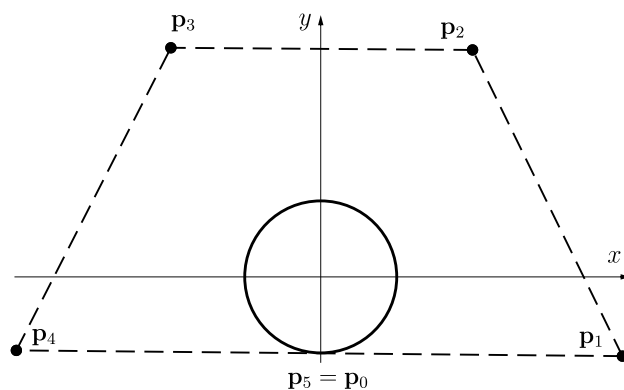


Рис. 9: Окружность, построенная с помощью рациональной кривой Безье

Полетаева: Напишите программу для построения единичной окружности с помощью рациональной кривой Безье с центром в начале координат (рис. 9) на базе точек $\mathbf{p}_0 = (0, -1)$, $\mathbf{p}_1 = (4, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{p}_3 = (-2, 3)$, $\mathbf{p}_4 = (-4, -1)$, $\mathbf{p}_5 = (0, -1)$ и весов: $h_0 = h_5 = 5$, $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$. Используйте программу `unitCircle.zip`.

| (x, y, z, h) | (x, y, z, h) | (x, y, z, h) |
|-------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| $(-2, -1, 0, 1)$ | $(0, 0, 2, 0)$ | $(2, -1, 0, 1)$ |
| $(-3, 0, 0, 1)$ | $(0, 0, 3, 0)$ | $(3, 0, 0, 1)$ |
| $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$ | $(0, 0, \frac{3}{2}, 0)$ | $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$ |
| $(-2, 1, 0, 1)$ | $(0, 0, 2, 0)$ | $(2, 1, 0, 1)$ |

Таблица 7: Данные для построения поверхности вращения (передняя половина)

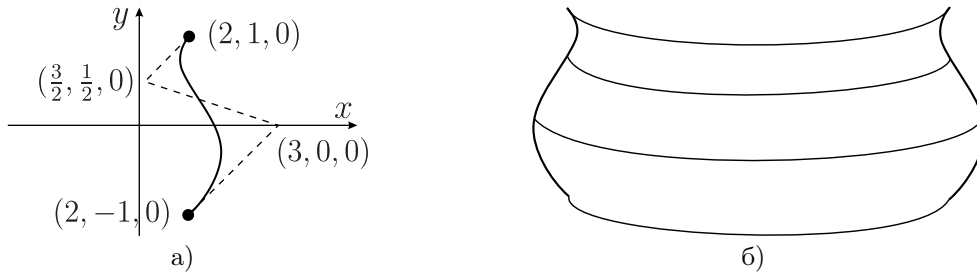


Рис. 10: Поверхность вращения: а) образующий профиль и (x, y, z) -координаты его контрольных точек; б) передняя половина поверхности

Рожков: Напишите программу для построения поверхности вращения, профиль которой определяется кривой Безье в плоскости xy на базе 4-х точек (см. рис. 10), а сама поверхность формируется вращением профиля вокруг оси y . Половину этой поверхности, точки которой имеют положительные координаты z , можно построить с помощью рациональной поверхности Безье по контрольным точкам, однородные координаты которых приведены в табл. 7. Вторую половину постройте аналогичным способом, отразив контрольные точки относительно плоскости xy . Используйте шаблон программы л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).

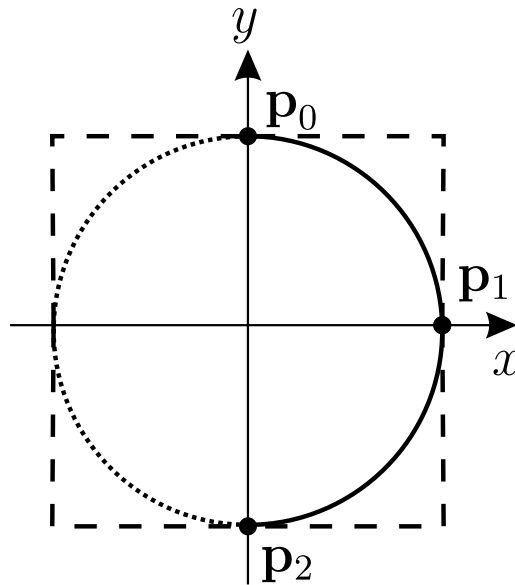


Рис. 11: Окружность, рассматриваемая как совокупность двух дуг

Чернышкова: На рис. 11 показана окружность, вписанная в квадрат. Окружность имеет радиус равный 1 и центр в начале координат. Половину этой окружности можно нарисовать с помощью рациональной кривой Безье на базе точек, имеющих однородные координаты $\mathbf{p}_0 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (0, -1, 1)$. Тогда эта окружность целиком может быть нарисована как совокупность двух дуг, причём каждая из них базируется на трёх точках. Найдите координаты точек для построения второй дуги и нарисуйте окружность с помощью рациональных сплайнов Безье. Используйте программу `unitCircle.zip`.

| k | x | z |
|-----|-----|------|
| 0 | 0 | 3 |
| 1 | 0.8 | 3 |
| 2 | 0 | 2.7 |
| 3 | 0.2 | 2.55 |
| 4 | 0.4 | 2.4 |
| 5 | 1.3 | 2.4 |
| 6 | 1.3 | 2.25 |

Таблица 8: Данные для профиля крышки чайника

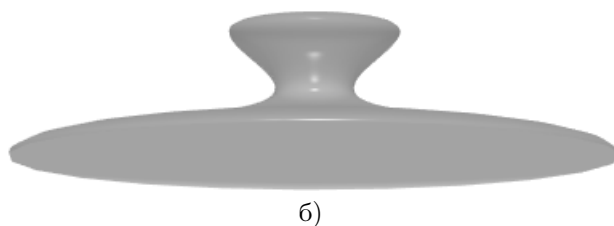
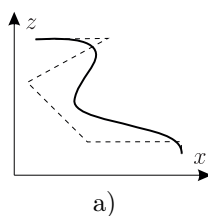


Рис. 12: Крышка чайника: а) кривая профиля крышки; б) визуализированная крышка

Янович: Напишите программу, рисующую поверхность крышки чайника. Крышка — это поверхность вращения, которая описывается двумя кубическими кривыми Безье (рис. 12) в плоскости xz , данные для их построения приведены в табл. 8. Используйте шаблон программы л.р. № 2 (Примечание: координаты контрольных точек задаются в функции `generateControlPoints`).