Модуль 2 «Математические модели геометрических объектов»
Лекция 8 «Построения на кривых и поверхностях»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

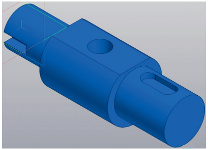
МГТУ им. Н.Э. Баумана

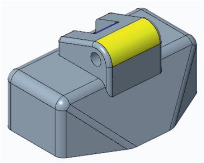
3 мая 2023 г.

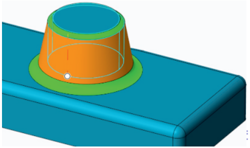
Построения в геометрических моделях

Мы рассмотрели методы построения различных кривых линий, поверхностей и объёмных тел. Этих методов не достаточно, чтобы моделировать сложные геометрические объекты. В большинстве случаев сложные геометрические объекты появляются как результат некоторой операции над более простыми объектами. Операцией будем называть совокупность действий над одним или несколькими исходными объектами, которая приводит к рождению нового геометрического объекта.

К операциям мы будем относить построение проекций точек на кривые и поверхности по нормали к ним, построение проекций точек на поверхности по заданному направлению, построение точек пересечения кривых, построение точек пересечения кривых и поверхностей, построение линий пересечения поверхностей, построение поверхностей скругления и поверхностей фасок, а также решение других задач. Операция пересечения двухмерных кривых и операция пересечения поверхностей являются основополагающими, так как они присутствуют в большинстве других операций, выполняемых над геометрическими объектами.

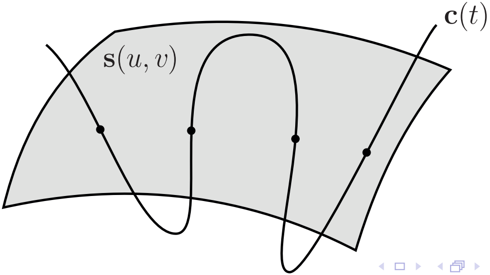






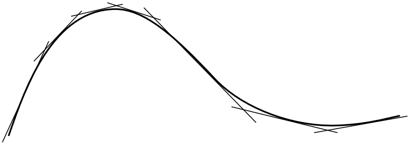
Построения в геометрических моделях

В качестве примера рассмотрим задачу определения точки пересечения поверхности $\mathbf{s}(u,v)$ и кривой линии $\mathbf{c}(t)$. В точке их пересечения радиус-векторы кривой и поверхности имеют одинаковые значения: $\mathbf{s}(u,v) = \mathbf{c}(t)$. Это векторное равенство представляет собой систему трёх скалярных уравнений, искомыми величинами которых являются параметры u, v и t. Решив эту систему уравнений, получим параметры u, v и t, по которым при необходимости можно вычислить точку на поверхности или на кривой. Система уравнений в общем случае является нелинейной и решается итерационными методами. Точек пересечения может быть несколько и от того, с какого приближения параметров начнется итерационный процесс решения, зависит, к каким параметрам сойдется решение.



Для определения нулевого приближения будем двигаться с некоторым шагом по параметрической области и в пробных точках проверять выполнение некоторого условия, характерного для данного построения. Пробные точки должны быть выбраны таким образом, чтобы было найдено нулевое приближение для каждого решения. Характерным условием для некоторого построения, как правило, является смена знака невязки уравнений рассматриваемой системы или уменьшение невязки уравнений рассматриваемой системы ниже известного уровня. Нулевое приближение может быть найдено довольно грубо, важно только, чтобы оно лежало в области сходимости решения системы уравнений к одному из точных решений. Важно также, чтобы каждому решению было найдено свое нулевое приближение.
Шагать по параметрической области нужно достаточно часто, чтобы не пропустить решение, и в то же время достаточно редко, чтобы потратить меньше времени.
Длину параметрического шага будем связывать с искривленностью геометрического объекта, поскольку поиск точек пересечения кривых и криволинейных поверхностей, будет основываться на линеаризации их уравнений.

Движение по кривой



Движение по параметрической области некоторой кривой $\mathbf{c}(t)$ будем начинать с минимального значения её параметра t_{min}. Двигаться будем в направлении возрастания параметра до достижения его максимального значения t_{max} с некоторым вычисляемым шагом Δt по параметру. Шаг Δt мы будем вычислять исходя из условия, что при переходе от точки к точке касательная кривой отклонялась бы на угол, не превышающей некоторую величину $\Delta\alpha$. Приращение параметра или параметрический шаг Δt меняется от точки к точке и зависит от кривизны кривой. Значение предельного угла отклонения будем считать заданным. Для вычисления нулевых приближений параметров при выполнении операций можно принять $\pi/20 \leqslant \Delta\alpha \leqslant \pi/10$. Если предположить, что кривизна кривой сохраняется постоянной в окрестности точки $t = t_0$, то кривая отклоняется на угол $\Delta\alpha$, если точка сместится по дуге на расстояние

$$\Delta s = \frac{\Delta\alpha}{k},$$

где k — кривизна кривой в данной точке.

Если ещё предположить, что и длина производной радиуса-вектора кривой сохранится постоянной в окрестности рассматриваемой точки, то смещению Δs по дуге будет соответствовать приращение параметра

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{|\mathbf{c}'|} = \frac{\Delta \alpha}{k|\mathbf{c}'|},$$

где $\mathbf{c}'$ — производная радиуса-вектора кривой по параметру.
Подставив в последнее равенство выражение для кривизны кривой, получим шаг по параметру

$$\Delta t = \frac{\Delta \alpha |\mathbf{c}'|^2}{|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|}. \tag{1}$$

Описанным способом пройдем по всей линии и проверим в каждой точке выполнение некоторого условия, по которому можно судить о близости того или иного события.

Движение по кривой

Кривизна кривой в рассматриваемой точке может быть очень малой или вовсе равной нулю, хотя в достаточно близкой к рассматриваемой точке области кривизна может иметь гораздо большее значение. В таком случае Δt окажется слишком большим. Для учёта подобных ситуаций можно ввести ограничение максимального параметрического шага.

Если в рассматриваемой точке длина первой производной радиуса-вектора оказывается очень малой или вовсе равной нулю, то длина параметрического шага тоже стремится к нулю, хотя в достаточно близкой к рассматриваемой точке области длина производной может иметь гораздо большее значение. В таком случае Δt будет неоправданно малым или вовсе равным нулю. Для учёта подобных ситуаций вводится ограничение минимального параметрического шага. Для разных кривых это ограничение может быть различным.

Параметрические шаги допускается определять приближённо, так как мы ничего не вычисляем окончательно, а лишь находим нулевые приближения для дальнейшего уточнения. Для некоторых кривых нет необходимости прибегать к вычислениям для определения шага Δt. Например, для окружности или её дуги $\Delta t = \Delta\alpha$, если параметром является центральный угол, для отрезка прямой можно положить $\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$.

Шаги Δu и Δv для поверхности $\mathbf{s}(u,v)$ будем вычислять исходя из условия, что при переходе от точки к точке нормаль поверхности отклонялась бы на угол, не превышающий некоторую величину $\Delta\alpha$. Шаги по параметрам поверхности будем вычислять как шаги для соответствующих координатных кривых поверхности. Положим один из параметров постоянным, и будем двигаться вдоль другого параметра описанным выше способом. При $v =$const и $u =$const кривизны линий соответственно равны $\mu_u = b_{11}/g_{11}$ или $\mu_v = b_{22}/g_{22}$, где g_{11} и g_{22} — коэффициенты первой основной квадратичной формы поверхности; b_{11} и b_{22} — коэффициенты второй основной квадратичной формы поверхности. В результате шаг по параметрам поверхности вычислим по формулам

$$\Delta u = \frac{\Delta\alpha\sqrt{g_{11}}}{b_{11}} = \frac{\Delta\alpha|\mathbf{s}_1|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}_{11}|}; \qquad \Delta v = \frac{\Delta\alpha\sqrt{g_{22}}}{b_{22}} = \frac{\Delta\alpha|\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}_{22}|}, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль поверхности; $\mathbf{s}_1 = \dfrac{\partial\mathbf{s}}{\partial u}$, $\mathbf{s}_2 = \dfrac{\partial\mathbf{s}}{\partial v}$, $\mathbf{s}_{11} = \dfrac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial u^2}$, $\mathbf{s}_{22} = \dfrac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial v^2}$.

Движение по поверхности

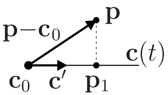
Начинать движение по параметрической области поверхности будем с минимальных значений параметров $u_{\min}$ и $v_{\min}$. Двигаться будем в направлении возрастания одного из параметров до его максимального значения, одновременно вычисляя среднее значение шага вдоль другого параметра. Затем сделаем усреднённый шаг по другому параметру поверхности и повторим проход по первому параметру от его минимального значения до максимального. Так рядами пройдем всю параметрическую область поверхности. В каждой точке будем выполнять проверку некоторого условия, по которому можно судить о наличии решения вблизи этой точки.

Если поверхность построена на базе кривых линий, то для вычисления шага по параметру поверхности можно привлекать соответствующий шаг по параметру кривой. Для аналитических поверхностей нет необходимости прибегать к вычислениям по формулам (2), так как шаг можно определить по аналитическим формулам поверхности.

Также как для кривых, предполагаем, что рассматриваемая окрестность точки поверхности сохраняет постоянной нормальную кривизну вдоль параметрических направлений в пределах шага. В областях резкого изменения формы поверхности можно ввести ограничение максимального и минимального шагов по соответствующему параметру.

Проекция точки на прямую линию

Пусть дана прямая $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + t\mathbf{c}'$ и проецируемая точка $\mathbf{p}$. Будем считать, что вектор $\mathbf{c}'$ имеет произвольную длину. Прямая линия проходит через точку $\mathbf{c}(0)$, в которой параметр t равен нулю, и имеет направление вектора $\mathbf{c}'$. Построим вектор из точки прямой $\mathbf{c}_0$ в точку $\mathbf{p}$ и вычислим скалярное произведение этого вектора и вектора прямой $\mathbf{c}'$. Если разделим это скалярное произведение на длину вектора $\mathbf{c}'$, то получим длину проекции вектора $\mathbf{p} - \mathbf{c}_0$ на прямую линию, а если на квадрат длины вектора $\mathbf{c}'$, то получим длину проекции вектора $\mathbf{p} - \mathbf{c}_0$ на прямую в единицах длины вектора $\mathbf{c}'$, т.е. получим параметр t для проекции точки $\mathbf{p}$ на прямую линию.



Таким образом, параметр t_p проекции точки $\mathbf{p}$ на прямую линию и радиус-вектор проекции $\mathbf{p}_1$ вычисляются по формулам

$$t_p = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{c}_0) \cdot \mathbf{c}'}{|\mathbf{c}'|^2}; \qquad \mathbf{p}_1 = \mathbf{c}(t_p) = \mathbf{c}_0 + t_p \mathbf{c}'.$$

Расстояние от точки до её проекции на кривую в общем случае вычисляется как длина вектора $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$. Расстояние от точки до её проекции на прямую линию можно определить не вычисляя проекцию точки, а воспользовавшись формулой

$$l_p = \frac{|(\mathbf{p} - \mathbf{c}_0) \times \mathbf{c}'|}{|\mathbf{c}'|}.$$

Проекция точки на кривую

Пусть требуется найти все проекции точки $\mathbf{p}$ на кривую $\mathbf{c}(t)$. Каждая искомая точка кривой $\mathbf{c}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c}(t))\cdot\frac{d\mathbf{c}}{dt}=0.$$

Это уравнение содержит одну неизвестную величину — параметр t. Как было указано, решение этой задачи разобьем на два этапа. На первом этапе определим нулевые приближения параметров проекций точки на кривую, а на втором — найдем точные значения параметров кривой, определяющие проекции заданной точки $\mathbf{p}$ на кривую $\mathbf{c}(t)$.
С шагом Δt, определяемым по формуле (1), пройдем вдоль кривой и в каждой точке t_i вычислим скалярные произведения векторов

$$a_i=(\mathbf{p}-\mathbf{c}(t_i-\Delta t))\cdot\frac{d\mathbf{c}}{dt};\qquad b_i=(\mathbf{p}-\mathbf{c}(t_i+\Delta t))\cdot\frac{d\mathbf{c}}{dt}.$$

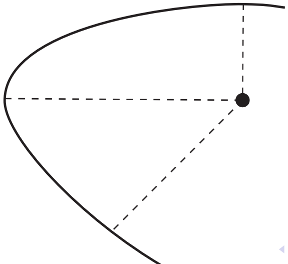
Если искомое решение лежит на параметрическом расстоянии Δt от параметра t_i, то $a_ib_i\leqslant 0$. Смена знака произведений a_ib_i и является тем событием, которое сигнализирует о близости корня уравнения. Примем за нулевое приближение решения параметр $t^{(0)}=t_i$ и одним из методов решения нелинейных уравнений найдем решение с заданной точностью.

Проекция точки на кривую

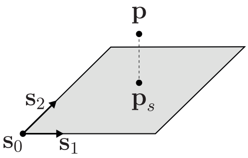
Например, с помощью метода Ньютона $(k+1)$-е приближение параметра проекции точки на кривую вычисляются по формуле

$$t^{(k+1)} = t^{(k)} + \left.\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{p})\cdot\dfrac{d\mathbf{c}}{dt}}{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot\dfrac{d^2\mathbf{c}}{dt^2} - \dfrac{d\mathbf{c}}{dt}\cdot\dfrac{d\mathbf{c}}{dt}}\right|_{t^{(k)}}$$

Процесс уточнения параметра закончим, когда на очередной итерации $|t^{(k+1)} - t^{(k)}|$ станет меньше заданной величины ε.
Если требуется найти только ближайшую проекцию точки на кривую, то можно пройтись по всем найденным начальным приближениям и выбрать из них ближайшую к заданной точке. Параметры ближайшей точки и следует выбрать в качестве нулевого приближения решения задачи.



Проекция точки на плоскость



Рассмотрим задачу проецирования точки $\mathbf{p}$ на плоскость, заданную радиусом-вектором

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{s}_0 + u\mathbf{s}_1 + v\mathbf{s}_2.$$

Будем считать, что векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ не коллинеарные. Допустим, что в общем случае векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ не ортогональны и имеют не единичную длину. Плоскость проходит через точку $\mathbf{s}_0$, в которой параметры равны нулю, а векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ определяют параметрические направления. Заданная точка $\mathbf{p}$ имеет единственную проекцию на плоскость $\mathbf{s}(u, v)$. Построим единичную нормаль к плоскости

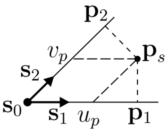
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}. \tag{3}$$

Вычислим радиус-вектор $\mathbf{p}_s$ проекции точки на плоскость как разность радиуса-вектора проецируемой точки и составляющей вектора $\mathbf{p} - \mathbf{s}_0$, параллельной нормали к плоскости

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{p} - \mathbf{n}\left((\mathbf{p} - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{n}\right).$$

Проекция точки на плоскость

Найдем параметры u_p и v_p, соответствующие проекции точки на плоскость. Для вычисления параметров проекции точки найдем длины проекций вектора $\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0$ на векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, которые обозначим через p_1 и p_2



$$p_1 = \frac{(\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|}; \qquad p_2 = \frac{(\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2|}.$$

Параметры u_p и v_p и длины проекций p_1 и p_2 связаны уравнениями

$$p_1 = u_p|\mathbf{s}_1| + v_p|\mathbf{s}_2| \cos\varphi; \qquad p_2 = v_p|\mathbf{s}_2| + u_p|\mathbf{s}_1| \cos\varphi,$$

где $\cos\varphi = (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)/(|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|)$ — косинус угла между $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. Тогда

$$u_p = \frac{p_1 - p_2 \cos\varphi}{(1-\cos^2\varphi)|\mathbf{s}_1|} = \frac{g_{22}(\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0)) - g_{21}(\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0))}{g_{11}g_{22} - g_{21}^2} = \\ = g^{11}\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) + g^{12}\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0); \quad (4)$$

$$v_p = \frac{p_2 - p_1 \cos\varphi}{(1-\cos^2\varphi)|\mathbf{s}_2|} = \frac{g_{11}(\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0)) - g_{12}(\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0))}{g_{11}g_{22} - g_{21}^2} = \\ = g^{21}\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) + g^{22}\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0), \quad (5)$$

где $g_{11} = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1$, $g_{22} = \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2$, $g_{12} = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ — ковариантные компоненты метрического тензора плоскости; g^{11}, g^{22}, g^{12}, g^{21} — контравариантные компоненты метрического тензора.

Проекция точки на плоскость

Если векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ ортогональные, то $g_{12} = g^{21} = 0$ и формулы (4) и (5) примут вид

$$u_p = \frac{(\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1}; \qquad v_p = \frac{(\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{s}_2}{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2}.$$

Расстояние от точки до её проекции на плоскость в общем случае вычисляется как длина вектора $\mathbf{p}_s - \mathbf{p}$. Расстояние от точки до её проекции на плоскость можно определить не вычисляя проекцию точки, а вычислив проекцию вектора $\mathbf{p} - \mathbf{s}_0$ на нормаль к плоскости

$$l_s = (\mathbf{p} - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{n}.$$

Проекция точки на поверхность

Рассмотрим задачу проецирования точки на поверхность в общем случае. Пусть требуется найти все проекции точки $\mathbf{p}$ на поверхность $\mathbf{s}(u, v)$. Каждая искомая точка поверхности $\mathbf{s}(u, v)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} (\mathbf{p} - \mathbf{s}(u, v)) \cdot \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} = 0; \\ \\ (\mathbf{p} - \mathbf{s}(u, v)) \cdot \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

которая содержит две неизвестные величины — параметры u и v. Пройдем по поверхности с шагами Δu и Δv, вычисляемыми по формулам (2). Через u_i и v_j обозначим параметры точек, в которых будем вычислять скалярные произведения векторов

$$a_{ij} = (\mathbf{p} - \mathbf{s}(u_i - \Delta u, v_j)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u}; \qquad b_{ij} = (\mathbf{p} - \mathbf{s}(u_i + \Delta u, v_j)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u};$$

$$c_{ij} = (\mathbf{p} - \mathbf{s}(u_i, v_j - \Delta v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}; \qquad d_{ij} = (\mathbf{p} - \mathbf{s}(u_i, v_j + \Delta v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}.$$

Если мы находимся рядом с искомым решением, то a_{ij} и b_{ij} будут иметь разные знаки, а также c_{ij} и d_{ij} будут иметь разные знаки ($a_{ij} b_{ij} \leqslant 0$ и $c_{ij} d_{ij} \leqslant 0$). За нулевое приближение примем значения $u^{(0)} = u_i$, $v^{(0)} = v_j$. Далее одним из методов решения нелинейных уравнений найдем решение задачи с заданной точностью.

Проекция точки на поверхность

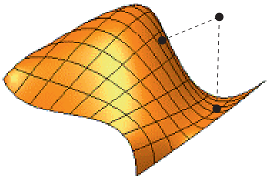
Например, в методе Ньютона на k-й итерации приращения параметров $\Delta u^{(k)}$ и $\Delta v^{(k)}$ проекции найдутся из системы линейных уравнений

$$((\mathbf{p}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{s}_{11}-\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_1)\,\Delta u^{(k)}+((\mathbf{p}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{s}_{12}-\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{s}_1)\,\Delta v^{(k)}=(\mathbf{s}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{s}_1;$$

$$((\mathbf{p}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{s}_{21}-\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2)\,\Delta u^{(k)}+((\mathbf{p}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{s}_{22}-\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{s}_2)\,\Delta v^{(k)}=(\mathbf{s}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{s}_2;$$

Следующее приближение параметров проекции точки равны $u^{(k+1)}=u^{(k)}+\Delta u^{(k)}$, $v^{(k+1)}=v^{(k)}+\Delta v^{(k)}$. Процесс уточнения параметров закончим, когда на очередной итерации выполнятся неравенства $u^{(k+1)}-u^{(k)}<\varepsilon$ и $v^{(k+1)}-v^{(k)}<\varepsilon$, где ε — заданная погрешность.

Если требуется найти только ближайшую проекцию заданной точки на поверхность, то можно пройти по всем найденным начальным приближениям и выбрать из них ближайшую к заданной точке. Параметры ближайшей точки и следует выбрать в качестве нулевого приближения решения задачи.

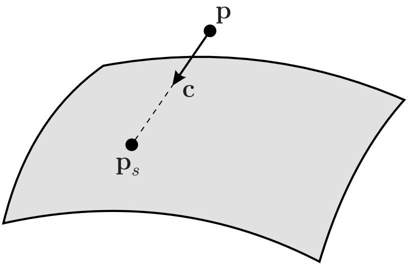


Проекция точки на поверхность в заданном направлении

В определённых случаях возникает задача определения проекции точки на поверхность не по нормали к ней, а вдоль заданного направления. Пусть направление проецирования задано вектором единичной длины $\mathbf{c}$. Построим прямую линию

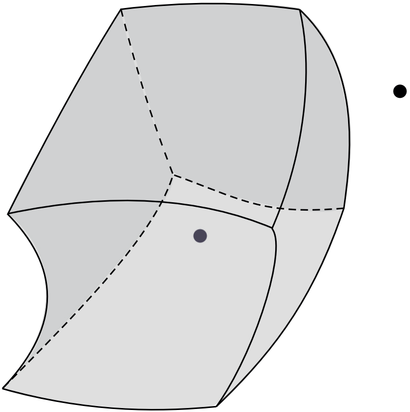
$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{c},$$

проходящую через заданную точку и имеющую направление заданного вектора. Проекции точки на поверхность в заданном направлении определим как точки пересечения поверхности с прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

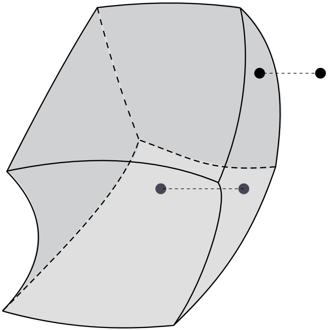


Положение точки относительно оболочки

Пусть задана точка $\mathbf{p}$ и однородная оболочка. Одним из применений построения проекции точки на поверхность и кривую является определение положения точки относительно оболочки.
Оболочка состоит из граней, стыкующихся по ребрам. Каждая грань описывается некоторой поверхностью, а каждое ребро — кривой.



Положение точки относительно оболочки



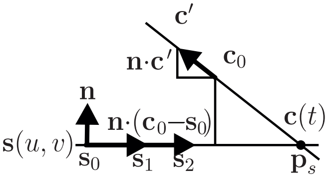
Для решения задачи найдем ближайшую к точке $\mathbf{p}$ точку $\mathbf{p}_0$ на заданной оболочке. Ближайшей точкой оболочки будет или проекция на одну из граней, или проекция на одно из ребер, или одна из вершин. Построим вектор $\mathbf{w}$ из найденной точки $\mathbf{p}_0$ в точку $\mathbf{p}$. В точке $\mathbf{p}_0$ вычислим единичный вектор $\mathbf{n}$, направленный вне оболочки. Если $\mathbf{p}_0$ есть проекция на одну из граней, то вектор $\mathbf{n}$ должен быть нормалью соответствующей грани. Если $\mathbf{p}_0$ есть проекция на одно из ребер, то вектор $\mathbf{n}$ должен быть нормированной суммой нормалей граней, стыкующихся в ребре. Если $\mathbf{p}_0$ совпадает с одной из вершин, то вектор $\mathbf{n}$ должен быть нормированной суммой нормалей граней, стыкующихся в вершине. По взаимной направленности векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{n}$ можно сказать, вне оболочки, на оболочке или внутри оболочки находится точка $\mathbf{p}$. Если $|\mathbf{w}| = 0$, то точка $\mathbf{p}$ принадлежит оболочке. Если $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} > 0$, то точка $\mathbf{p}$ лежит вне оболочки. Если $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} < 0$, то точка $\mathbf{p}$ лежит внутри оболочки.

Пересечение прямой и плоскости

Пусть радиусы-векторы прямой линии
и плоскости описываются зависимостями

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + t\mathbf{c}'; \tag{6}$$

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{s}_0 + u\mathbf{s}_1 + v\mathbf{s}_2. \tag{7}$$



Найдем точку их пересечения. Такая точка существует и является единственной, если прямая не параллельна плоскости, т.е. если $\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \neq 0$. Найдем нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости по формуле (3). Значение параметра прямой, соответствующее точке пересечения плоскости и прямой, вычислим по формуле

$$t_0 = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_0 - \mathbf{c}_0)}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}'}. \tag{8}$$

Подставим (8) в (6) получим радиус вектор точки пересечения

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}' \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_0 - \mathbf{c}_0)}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}'}. \tag{9}$$

Далее по формулам (4) и (5) вычислим параметры плоскости u_0 и v_0, соответствующие точке пересечения

$$u_0 = g^{11}\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) + g^{12}\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0); \tag{10}$$

$$v_0 = g^{21}\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0) + g^{22}\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p}_s - \mathbf{s}_0). \tag{11}$$

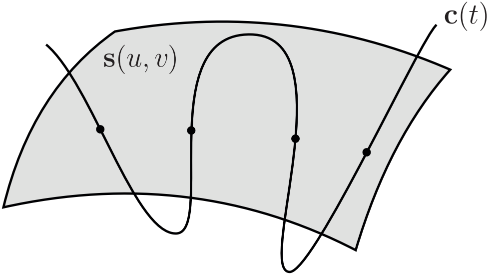
Точки пересечения кривой и поверхности

Пусть требуется найти все точки пересечения поверхности $\mathbf{s}(u,v)$ и кривой $\mathbf{c}(t)$. Для каждой точки пересечения должно удовлетворяться векторное уравнение

$$\mathbf{s}(u,v) - \mathbf{c}(t) = 0, \tag{12}$$

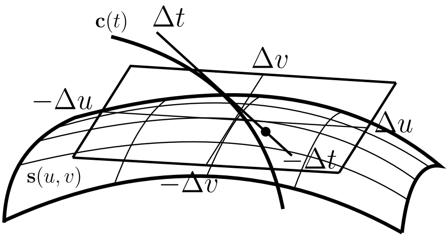
которое представляет собой систему трёх скалярных уравнений с тремя неизвестными — u, v и t.

Система уравнений в общем случае является нелинейной и решается итерационными методами. Точек пересечения может быть несколько, и от того, с какого приближения параметров начнется итерационный процесс решения, зависит, к какой тройке параметров сойдется решение.



Точки пересечения кривой и поверхности

Для нахождения нулевого приближения каждого решения будем двигаться от точки к точке с вычисляемыми по формулам (2) шагами Δu и Δv поверхности и вычисляемым по формуле (1) шагом Δt кривой. Для каждой точки поверхности u_i и v_j и кривой t_k построим касательную плоскость (7) в рассматриваемой точке поверхности и касательную прямую (6) в данной точке кривой. Векторы плоскости в рассматриваемой точке равны $\mathbf{s}_1 = \partial\mathbf{s}/\partial u$, $\mathbf{s}_2 = \partial\mathbf{s}/\partial v$, а вектор $\mathbf{c}' = d\mathbf{c}/dt$.
По формулам (8)–(11) найдем параметры u_0, v_0, t_0 точки пересечения касательной плоскости и касательной прямой линии. Будем предполагать, что они не параллельны. Вблизи точки пересечения параметры u_0 и v_0 приблизительно соответствуют приращениям параметров поверхности, а параметр t_0 приблизительно соответствует приращению параметра кривой.

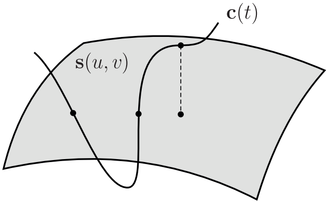


Точки пересечения кривой и поверхности

Если при решении уравнений встречаются особые точки, где касательная к прямой параллельна касательной плоскости, то для нахождения точек пересечения можно использовать систему трёх уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathbf{s}(u,v)-\mathbf{c}(t))\cdot \mathbf{s}_1 = 0; \\ (\mathbf{s}(u,v)-\mathbf{c}(t))\cdot \mathbf{s}_2 = 0; \\ (\mathbf{s}(u,v)-\mathbf{c}(t))\cdot \mathbf{c}' = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

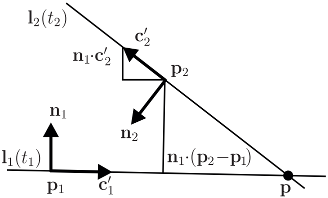
Но этой системе удовлетворяют не только точки пересечения, а ещё и другие точки, в которых касательная прямая параллельна касательной плоскости, когда отрезок, соединяющий точки касания, ортогонален касательной прямой и касательной плоскости. Поэтому, после решения системы уравнений (13), следует проверить, являются ли полученные точки точками касания.



Точка
пересечения прямых линий в двумерном пространстве может быть найдена аналитически. Пусть даны прямые

$$\mathbf{l}_1(t_1) = \mathbf{p}_1 + t_1\mathbf{c}_1'; \tag{14}$$

$$\mathbf{l}_2(t_2) = \mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{c}_2'. \tag{15}$$



Прямые имеют точку пересечения, если их направляющие векторы не коллинеарны. Через $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ обозначим единичные нормали к прямым $\mathbf{l}_1(t_1)$ и $\mathbf{l}_2(t_2)$. Если касательный вектор $\mathbf{c}' = (x, y)$ кривой имеет координаты x и y, то ортогональный ему вектор $\mathbf{n}$ имеет координаты $-ky$ и kx, где $k = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Параметры точки пересечения для прямых равны

$$t_1 = \frac{\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)}{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{c}_1'}; \qquad t_2 = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{c}_2'}. \tag{16}$$

Радиус-вектор точки пересечения найдем, подставив в (14) или (15) соответствующий параметр

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)}{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{c}_1'}\mathbf{c}_1' = \mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{c}_2'}\mathbf{c}_2'.$$

Пересечение отрезков

Аналитически можно найти точку пересечения отрезков прямых в двумерном пространстве. Пусть даны два отрезка прямых

$$\mathbf{l}_1(t_1) = (1 - t_1)\mathbf{p}_1 + t_1\mathbf{p}_3;$$
$$\mathbf{l}_2(t_2) = (1 - t_2)\mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{p}_4,$$

построенных по точкам $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$; $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$; $\mathbf{p}_3 = (x_3, y_3)$ и $\mathbf{p}_4 = (x_4, y_4)$. Параметры их точки пересечения найдем из векторного уравнения

$$(1 - t_1)\mathbf{p}_1 + t_1\mathbf{p}_3 = (1 - t_2)\mathbf{p}_2 + t_2\mathbf{p}_4,$$

которое представляет собой систему двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 - x_3)t_1 - (x_2 - x_4)t_2 = x_1 - x_2; \\ (y_1 - y_3)t_1 - (y_2 - y_4)t_2 = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Если $(x_2 - x_4)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) \neq 0$, то по формуле Крамера параметры точки пересечения равны

$$t_1 = \frac{(x_2 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_4)}{(x_2 - x_4)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4)};$$
$$t_2 = \frac{(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_1 - y_3)}{(x_2 - x_4)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4)}.$$

Отрезки пересекаются, если $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant t_2 \leqslant 1$, в противном случае пересекаются продолжения отрезков.

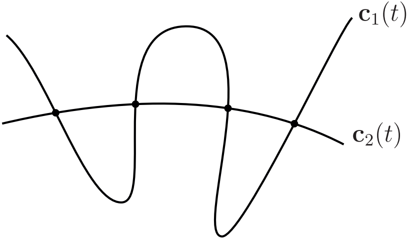
Общий случай пересечения кривых в двухмерном пространстве

Построение точек пересечения кривых в двумерном пространстве является основополагающим элементом, на котором базируются многие другие построения на поверхностях.

Пусть требуется найти все точки пересечения двух двухмерных кривых, радиусы-векторы которых описываются функциями $\mathbf{c}_1(t_1)$ и $\mathbf{c}_2(t_2)$. Для каждой точки пересечения должно удовлетворяться векторное уравнение

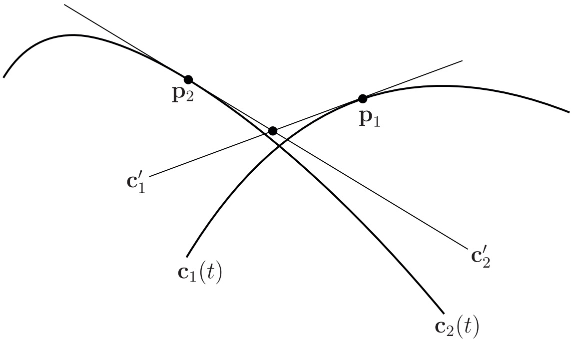
$$\mathbf{c}_1(t_1) - \mathbf{c}_2(t_2) = 0. \tag{17}$$

Неизвестными являются параметры кривых t_1 и t_2. Система уравнений в общем случае является нелинейной и решается итерационными методами. Точек пересечения может быть несколько, и от того, с какого приближения параметров начнется итерационный процесс решения, зависит, к какой точке сойдется решение.



Общий случай пересечения кривых в двухмерном пространстве

Для нахождения нулевого приближения каждой точки пересечения будем двигаться с вычисляемыми по формуле (1) шагами Δt_1 и Δt_2 по кривым, в каждом сочетании точек строить касательные линии (14) и (15) к кривым и определять параметры точки их пересечения.
Для этого в (14) и (15) подставим значения: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{c}_1(t_1)$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{c}_2(t_2)$ — точки на кривых, $\mathbf{c}_1' = d\mathbf{c}_1/dt_1$; $\mathbf{c}_2' = d\mathbf{c}_2/dt_2$ — производные кривых в этих точках. Параметры касательных прямых в точке их пересечения определим по формулам (16). Вблизи точки пересечения эти параметры попадают в диапазон приращений параметров кривых.

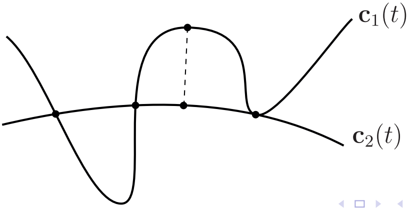


Общий случай пересечения кривых в двухмерном пространстве

Если заданные кривые имеют точку касания, то на некоторой итерации определитель системы уравнений станет недопустимо малым или равным нулю. В этом случае вместо векторного уравнения (17) можно решать систему скалярных уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{c}_1(t_1) - \mathbf{c}_2(t_2)) \cdot \dfrac{d\mathbf{c}_1}{dt_1} = 0; \\ \\ (\mathbf{c}_2(t_2) - \mathbf{c}_1(t_1)) \cdot \dfrac{d\mathbf{c}_2}{dt_2} = 0. \end{cases}$$

определитель которой не равен нулю в точке касания. Но этой системе удовлетворяют ещё и точки, в которых касательные прямые параллельны друг другу и ортогональны вектору, соединяющему точки, в которых построены касательные прямые. Поэтому после решения этой системы уравнений следует проверить полученные точки.



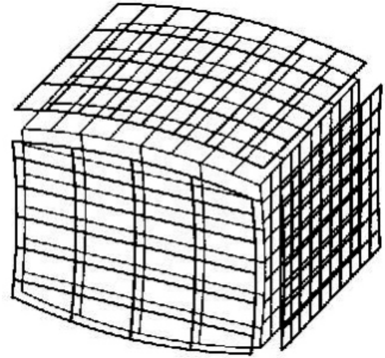
Пересечение пространственных кривых

Задача нахождения точек пересечения пространственных кривых встречается при построении ребер пересечения граней в булевых операциях, при построении эквидистантных оболочек, при скруглении ребер оболочек и во многих других операциях.
Системе уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{c}_1(t_1) - \mathbf{c}_2(t_2)) \cdot \dfrac{d\mathbf{c}_1}{dt_1} = 0; \\ \\ (\mathbf{c}_2(t_2) - \mathbf{c}_1(t_1)) \cdot \dfrac{d\mathbf{c}_2}{dt_2} = 0. \end{cases}$$

удовлетворяют точки пересечения пространственных кривых $\mathbf{c}_1(t_1)$ и $\mathbf{c}_2(t_2)$, точки касания кривых, а также точки, в которых касательные к кривым $\mathbf{c}_1(t_1)$ и $\mathbf{c}_2(t_2)$ прямые линии ортогональны вектору, соединяющему точки построения касательных прямых. Проверкой на близость точек решения указанной системы уравнений можно определить точки пересечения кривых. Проверкой параллельности производных радиусов-векторов кривых можно выделить среди полученных точек точки касания.

Точки пересечения трёх поверхностей



В некоторых случаях требуется найти точку (точки) пересечения трёх поверхностей. Например, при построении эквидистантных оболочек требуется определять точки пересечения трёх поверхностей. Рассмотрим сначала частный случай — пересечение трёх плоскостей.

Пересечение трёх плоскостей

Пусть даны три плоскости

$$\begin{cases} \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1 + v\mathbf{r}_2; \\ \mathbf{s}(a,b) = \mathbf{s}_0 + a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2; \\ \mathbf{q}(t,\tau) = \mathbf{q}_0 + t\mathbf{q}_1 + \tau\mathbf{q}_2 \end{cases}$$

с единичными нормалями $\mathbf{n}_r$, $\mathbf{n}_s$, $\mathbf{n}_q$ соответственно. Плоскости имеют единственную точку пересечения, если смешанное произведение нормалей отлично от нуля, т.е.: $(\mathbf{n}_r \times \mathbf{n}_s) \cdot \mathbf{n}_q \neq 0$. Пусть искомая точка имеет радиус-вектор $\mathbf{p}$. Тогда вектор $\mathbf{p} - \mathbf{r}_0$ коллинеарен плоскости $\mathbf{r}(u,v)$, вектор $\mathbf{p} - \mathbf{s}_0$ коллинеарен плоскости $\mathbf{s}(a,b)$, вектор $\mathbf{p} - \mathbf{q}_0$ коллинеарен плоскости $\mathbf{q}(t,\tau)$. Следовательно, должны выполняться равенства

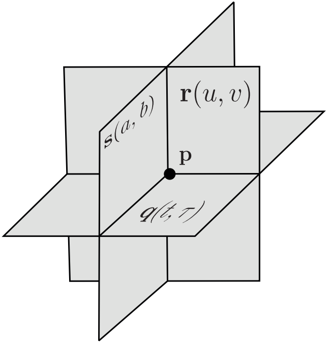
$$\begin{cases} (\mathbf{p} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_r = 0; \\ (\mathbf{p} - \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{n}_s = 0; \\ (\mathbf{p} - \mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{n}_q = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Обозначим через p_1, p_2, p_3 координаты точки $\mathbf{p}$, через m_1, m_2, m_3 — компоненты вектора нормали $\mathbf{n}_r$, через n_1, n_2, n_3 — компоненты вектора нормали $\mathbf{n}_s$, через l_1, l_2, l_3 — компоненты вектора нормали $\mathbf{n}_q$. Тогда система уравнений (18) примет вид

$$\begin{cases} m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_r; \\ n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n}_s; \\ l_1p_1 + l_2p_2 + l_3p_3 = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{n}_q. \end{cases}$$

Пересечение трёх плоскостей

Решив
эту систему линейных алгебраических
уравнений относительно p_1, p_2,
p_3, найдем общую точку трёх плоскостей.
Параметры этой точки для каждой
из плоскостей определим по формулам



$$u_p = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1}; \qquad v_p = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2};$$

$$a_p = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{s}_0)}{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1}; \qquad b_p = \frac{\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{s}_0)}{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2};$$

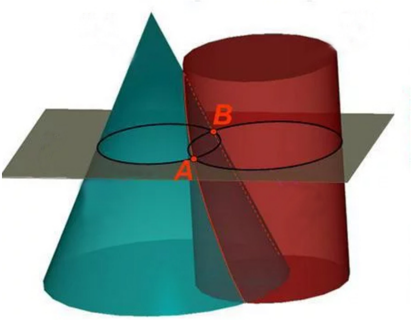
$$t_p = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}_0)}{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1}; \qquad \tau_p = \frac{\mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}_0)}{\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_2},$$

если ортогональны пары векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$; $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$; $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, или по формулам (4) и (5) в противном случае.

В общем случае пересечения трёх поверхностей $\mathbf{r}(u,v)$, $\mathbf{s}(a,b)$, $\mathbf{q}(t,\tau)$ каждая точка пересечения должна удовлетворять векторным уравнениям

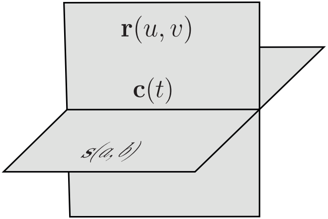
$$\begin{cases} \mathbf{r}(u,v) - \mathbf{q}(t,\tau) = 0; \\ \mathbf{s}(a,b) - \mathbf{q}(t,\tau) = 0, \end{cases}$$

которые содержат шесть скалярных нелинейных уравнений относительно шести параметров u, v, a, b, t, τ поверхностей. Если в точках пересечения смешанное произведение нормалей поверхностей отлично от нуля, то система может быть решена одним из численных методов.



Линия пересечения двух плоскостей

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1 + v\mathbf{r}_2;$$
$$\mathbf{s}(a,b) = \mathbf{s}_0 + a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2;$$



с единичными нормалями $\mathbf{n}_r$ и $\mathbf{n}_s$ находится достаточно просто. Её направление определяется вектором $\mathbf{n} = \mathbf{n}_r \times \mathbf{n}_s$. Если длина вектора $\mathbf{n}$ отлична от нуля, то плоскости пересекаются, в противном случае они параллельны или совпадают. Если плоскости пересекаются, то нужно найти точку на линии пересечения. Построим вектор $\mathbf{w} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0$ и вычислим его составляющую, параллельную плоскости $\mathbf{s}(a,b)$: $\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{n}_s(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_s)$. Далее по формуле (9) определим точку $\mathbf{p}$ пересечения линии, проходящей через точку $\mathbf{s}_0$ в направлении вектора $\mathbf{w}'$, с плоскостью $\mathbf{r}(u,v)$

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{w}' \frac{\mathbf{n}_r \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_0)}{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{w}'}.$$

Плоскости пересекаются по линии

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{n}.$$

Пересечение плоскостей

Параметры плоскостей, соответствующие точке $\mathbf{p}$, определим по формулам

$$u_p = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1}; \quad v_p = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2}; \quad a_p = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{s}_0)}{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1}; \quad b_p = \frac{\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{s}_0)}{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2},$$

при условии ортогональности пар векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ или по формулам (4) и (5) в противном случае. Аналогичным образом можно найти параметры для ещё одной точки линии пересечения $\mathbf{q} = \mathbf{c}(1) = \mathbf{p} + \mathbf{n}$. Пусть параметры u_q и v_q соответствуют точке $\mathbf{q}$ на плоскости $\mathbf{r}(u, v)$, а параметры a_q и b_q — этой же точке на плоскости $\mathbf{s}(a, b)$. Построим на плоскостях линии

$$\mathbf{l}_{uv}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p(1-t) + u_q t \\ v_p(1-t) + v_q t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{l}_{uv}(t) \subset \mathbf{r}(u, v);$$

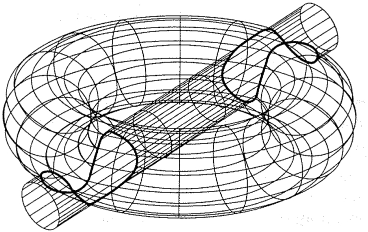
$$\mathbf{l}_{ab}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p(1-t) + a_q t \\ b_p(1-t) + b_q t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{l}_{ab}(t) \subset \mathbf{s}(a, b).$$

Эти линии при каждом параметре t совпадают в пространстве друг с другом и с линией $\mathbf{c}(t)$. Для линии пересечения будем использовать также запись

$$\mathbf{c}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(u(t), v(t)) \\ \mathbf{s}(a(t), b(t)) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(u_p(1-t) + u_q t, v_p(1-t) + v_q t); \\ \mathbf{s}(a_p(1-t) + a_q t, b_p(1-t) + b_q t), \end{array} \right.$$

$$t_{\mathrm{min}} \leqslant t \leqslant t_{\mathrm{max}}.$$

Линии пересечения поверхностей



Алгоритм построения линий пересечения поверхностей является базовым алгоритмом в булевых и других операциях. Он может иметь множество разновидностей. В одних случаях могут быть известны начальная и конечная точки линии пересечения, в других случаях могут быть известны одна из конечных точек кривой пересечения и направление кривой в ней. Рассмотрим построение кривых пересечения поверхностей при отсутствии дополнительной информации.
К сожалению, построение таких пересечений является очень сложной проблемой и в настоящее время не известен алгоритм, который является эффективным и точным. Эффективные алгоритмы имеют проблемы вблизи особенностей или почти-сингулярностей, поскольку компьютеры имеют только конечную точность. Точные и устойчивые алгоритмы в настоящее время слишком медленные.

Общий случай пересечения поверхностей

Пусть требуется найти линию пересечения поверхностей, описываемых радиусами-векторами $\mathbf{r}(u,v)$ и $\mathbf{s}(a,b)$. Каждая точка линии пересечения поверхностей должна удовлетворять системе векторных уравнений

$$\mathbf{r}(u,v) - \mathbf{s}(a,b) = 0, \tag{19}$$

которое содержит три скалярных уравнения для компонент радиусов-векторов поверхностей и четыре искомых параметра: u, v, a, b. Данная задача отличается от рассмотренных тем, что из трёх уравнений нужно найти четыре неизвестные величины. Если определить один из четырёх параметров, то остальные три можно найти из системы уравнений (19), т.е. один из параметров может в то же время служить параметром решения или являться однозначной функцией от него. Таким образом, три параметра являются функциями четвёртого параметра. Чтобы все четыре параметра были равноправными, представим их в виде функции некоторого общего параметра t. Тогда результатом решения системы уравнений (19) являются две кривые на пересекаемых поверхностях, определяющих одну и ту же кривую в пространстве — линию пересечения поверхностей:

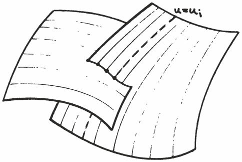
$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{uv}(t) &= \mathbf{r}\left(u(t), v(t)\right), \qquad & \mathbf{l}_{uv}(t) &\in \mathbf{r}(u,v), \\ \mathbf{l}_{ab}(t) &= \mathbf{s}\left(a(t), b(t)\right), \qquad & \mathbf{l}_{ab}(t) &\in \mathbf{s}(a,b), \end{aligned}$$
$$t_{\min} \leqslant t \leqslant t_{\max}.$$

Алгоритм построения линий пересечения

Две поверхности могут пересекаться по нескольким кривым. Алгоритм построения всех линий пересечения поверхностей разобьём на два этапа. На первом этапе, шагая по поверхностям и исследуя их близость, найдем отдельные точки всех кривых пересечения. Под точками в данном случае будем иметь в виду пары параметров u, v и a, b на параметрических плоскостях поверхностей.
На втором этапе возьмём любую точку из имеющегося набора и, двигаясь от неё с некоторым шагом сначала в одну сторону, затем в другую, найдем точку за точкой искомую совокупность точек линии пересечения. Направление движения даёт векторное произведение нормалей поверхностей. Шаг движения вычислим в соответствии с кривизнами поверхностей в текущей точке. Движение по кривой пересечения закончим, когда дойдем до края одной из поверхностей или когда кривая замкнется — новая точка окажется на расстоянии текущего шага от точки старта. По пути следования будем вычислять расстояние от текущей точки кривой пересечения до каждой точки из набора, полученного на первом этапе. Если вычисленное расстояние до какой-либо точки набора соизмеримо с текущим шагом движения, то эту точку удалим из набора как более не нужную. Так получим совокупность отдельных точек u_i, v_i и a_i, b_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ одной кривой пересечения. Если в наборе остаются ещё точки, то данные поверхности имеют ещё линии пересечения, повторим для них этап построения.

Алгоритм построения линий пересечения

Для определения начальных точек пересечения на первом этапе решим задачу пересечения линий $\mathbf{r}(u, \mathrm{const})$ и $\mathbf{r}(\mathrm{const}, v)$ поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ с поверхностью $\mathbf{s}(a, b)$. Не изменяющемуся параметру будем сообщать последовательно значения $\mathrm{const} = v_{\min} + \Delta v$ (при этом он проходит с некоторым шагом значения от $v_{\min}$ до $v_{\max}$), а затем — $\mathrm{const} = u_{\min} + \Delta u$ (при этом он проходит с некоторым шагом значения от $u_{\min}$ до $u_{\max}$). При одном неподвижном параметре из системы уравнений (19) можно найти остальные три параметра. Далее поменяем поверхности ролями и найдем точки пересечения координатных линий $\mathbf{s}(a, \mathrm{const})$ и $\mathbf{s}(\mathrm{const}, b)$ поверхности $\mathbf{s}(a, b)$ с поверхностью $\mathbf{r}(u, v)$. Таким образом, мы получим набор некоторых точек, принадлежащих в общем случае различным линиям пересечения заданных поверхностей. В этом наборе нам понадобится по одной точке для построения каждой линии пересечения. Эти точки не должны быть точками касания поверхностей. Если известна некоторая точка линии пересечения, то по ней можно построить и другие точки этой линии.



Алгоритм построения линий пересечения

Возьмём из полученного набора произвольную точку пересечения поверхностей. Пусть её параметры на первой поверхности равны u_k, v_k, а на второй — a_k, b_k. Построим нормали к поверхностям $\mathbf{n}_r(u_k, v_k)$ и $\mathbf{n}_s(a_k, b_k)$. Линия пересечения в каждой точке ортогональна нормалям обеих поверхностей, поэтому направление линии пересечения параллельно векторному произведению нормалей к поверхностям

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_r(u_k, v_k) \times \mathbf{n}_s(a_k, b_k).$$

Выберем в качестве направления движения к следующей точке линии пересечения положительное направление вектора $\mathbf{t}$. Далее определим возможный шаг смещения по каждому из четырёх параметров Δu, Δv, Δa, Δb из условия, что нормали поверхностей отклоняются на угол, не превосходящий заданную величину $\Delta\alpha$.

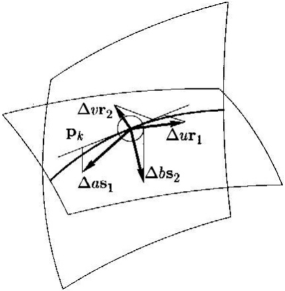
Если одному из параметров дать приращение и сделать его неподвижным, то из системы уравнений (19) можно найти остальные параметры. Важно только, чтобы изменение каждого из параметров по модулю не превышало найденные возможные шаги.

В качестве фиксированного параметра, которому будет дано приращение, выберем тот, направление движения вдоль которого ближе к направлению кривой пересечения, т.е. составляет меньший угол с вектором $\mathbf{t}$.

Алгоритм построения линий пересечения

Радиус сферы смещения r_0 возьмём равным

$$r_0 = \min\left(|\Delta u \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{t}|, |\Delta v \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{t}|, |\Delta a \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{t}|, |\Delta b \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}|\right) \frac{1}{|\mathbf{t}|}.$$



Обращающиеся в ноль проекции векторов $\Delta u \mathbf{r}_1$, $\Delta v \mathbf{r}_2$, $\Delta a \mathbf{s}_1$, $\Delta b \mathbf{s}_2$ на вектор $\mathbf{t}$ не учитываем. Для следующей точки линии пересечения в качестве нулевых приближений примем значения параметров

$$u_{k+1}^{(0)} = u_k + r_0 \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_1}{|\mathbf{t}| \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1}; \qquad v_{k+1}^{(0)} = v_k + r_0 \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{t}| \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2};$$

$$a_{k+1}^{(0)} = a_k + r_0 \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}_1}{|\mathbf{t}| \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1}; \qquad b_{k+1}^{(0)} = b_k + r_0 \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{t}| \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2}.$$

Тот параметр, производная по которому составляет меньший угол (по абсолютному значению) с направлением линии пересечения, сделаем неподвижным. Далее, решив систему уравнений (19), в которой неподвижный параметр будет считаться известным и неизменным, получим остальные три параметра.

Т.о., найдем параметры u_{k+1}, v_{k+1} на первой и a_{k+1}, b_{k+1} на второй поверхности для следующей точки линии пересечения.

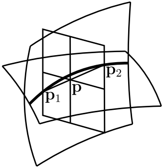
Алгоритм построения линий пересечения

Если линии пересечения поверхностей проходят через точку касания, то в этой точке поверхности имеют коллинеарные нормали. Матрица линеаризованной системы уравнений (19) в этой точке будет иметь нулевой определитель и из этой системы уравнений нельзя найти параметры точки касания поверхностей. В этом случае вместо системы уравнений (19) можно решать систему четырёх скалярных уравнений

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{s}(a,b))\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}&=0,\\
(\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{s}(a,b))\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}&=0,\\
(\mathbf{s}(a,b)-\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial a}&=0,\\
(\mathbf{s}(a,b)-\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial b}&=0,
\end{aligned}
$$

определитель которой не равен нулю в точке касания. Но этой системе удовлетворяют не только точки касания, а ещё и другие точки, в которых касательные к поверхностям плоскости параллельны друг другу и ортогональны отрезку, соединяющему точки касания. Поэтому после решения этой системы уравнений следует проверить то, что полученные точки являются точками касания.

Нахождение промежуточной точки линии пересечения поверхностей



Имея упорядоченные точки линии пересечения, всегда можно найти любую другую точку линии. Пусть параметры u_1, v_1, a_1, b_1 и параметры u_2, v_2, a_2, b_2 поверхностей соответствуют соседним точкам $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ упорядоченной совокупности точек линии пересечения. Пусть первой точке соответствует параметр t_1 линии пересечения, а второй точке — параметр t_2 линии пересечения поверхностей $\mathbf{r}(u,v)$ и $\mathbf{s}(a,b)$. Требуется найти точку линии пересечения с параметром t, где $t_1 < t < t_2$. Построим плоскость $\mathbf{q}(x,y) = \mathbf{p} + x\mathbf{q}_1 + y\mathbf{q}_2$ с началом в точке $\mathbf{p} = \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\mathbf{p}_1 + \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}\mathbf{p}_2$, ортогональную отрезку, проведённому из точки $\mathbf{p}_1$ в точку $\mathbf{p}_2$.

Примем за начальные приближения параметры

$$u^{(0)} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}u_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}u_2; \qquad v^{(0)} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}v_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}v_2;$$

$$a^{(0)} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}a_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}a_2; \qquad b^{(0)} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}b_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}b_2$$

поверхностей и найдем искомую точку пересечения поверхностей и плоскости из системы шести векторных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{r}(u,v) - \mathbf{q}(x,y) = 0; \\ \mathbf{s}(a,b) - \mathbf{q}(x,y) = 0. \end{cases}$$