Лабораторная работа №7

Горлачев Никита
3 курс 5 группа (вариант 11)

Имееем уравнение вида: $U_{tt} = \Delta U + (x+y)z$

$$U|_{t=0} = \varphi(x) = x^2 + y^2, U_t|_{t=0} = \psi(x) = z^2, n = 3$$

Решение

Воспользуемся формулой Кирхгофа:

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\xi-x|<at}\frac{1}{|\xi-x|}f(\xi, t-\frac{|\xi-x|}{a})d\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}\psi(\xi)dS + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{d}{dt}(\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=at}\varphi(\xi)dS)$$

Пусть : $U(x,t) = I_1 + I_2 + I_3$
Вычислим $I_i, i = 1,2,3$

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi-x|<t}\frac{1}{|\xi-x|}(x_1+y_1)z_1dx_1dy_1dz_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}r^2\sin\theta(x + r\sin\theta\cos\varphi + y + r\sin\theta\sin\varphi)(z + r\cos\theta)d\varphi d\theta dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\pi r\sin\theta(xz + yz + (x+y)r\cos\theta)d\theta dr = \frac{1}{2}\int_0^t 2r(xz+yz)dr = \frac{1}{2}z(x+y)t^2$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\xi-x|=t}z_1^2dS = \frac{1}{4\pi t}\int_{r=t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}r^2\sin\theta(z + r\cos\theta)^2d\varphi d\theta dr =$$

$$= \frac{t}{2}\int_0^\pi\sin\theta(z + t\cos\theta)^2d\theta = \frac{t}{2}\int_0^\pi\sin\theta z^2 + 2zt\sin\theta\cos\theta + t^2\sin\theta\cos^2\theta d\theta =$$

$$= z^2t + \frac{t^3}{3}$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}(\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=t}(x_1^2+y_1^2)dS) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}(\frac{1}{t}\int_{r=t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}((x + r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (y + r\sin\theta\sin\varphi)^2)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t\int_o^\pi(x^2+y^2)\sin\theta d\theta) = x^2 + y^2$$

Итого получили ответ : $U(x,t) = \frac{1}{2}z(x+y)t^2 + x^2 + y^2 + z^2t + \frac{t^3}{3}$