Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчёт по заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии»
Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области

Выполнил: Анжиганов Д.А.
608 группа
Вариант 6

Москва 2023

Введение

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.
Исследуемая область $D = |x| + |y| < 2, y < 1$

Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$, ограниченной контуромγ, рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

функция $f(x, y) = 1$. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению в области D и краевому условию на ее границе.

Численный метод решения уравнения

Для решения был выбран предложенный метод наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $\omega^{(k)} \in H$, k = 1, 2, ..., сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$$\left\|\omega - \omega^{(k)}\right\|_E \to 0, k \to \infty$$

Начальное приближение $\omega^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки. Метод является одношаговым. Итерация $\omega^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $\omega^{(k)}$ согласно равенствам:

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \omega_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}$$

где невязка $r^k = A\omega^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\left\|Ar^{(k)}\right\|_E^2}$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\left\|\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}\right\|_E < \delta$$

где δ – положительное число, определяющее точность итерационного метода.

Краткое описание проделанной работы по созданию OpenMP-программы

Для реализации поставленной задачи была использована технология OpenMP.

При подсчете площадей пересечения данной в 6 варианте фигуры с областью Π_{ij} были использованы два способа. Первый заключался в разбиении сложной фигуры на сумму более простых. Под простыми фигурами, как правило понимаются трапеции и треугольники. Такой путь оказался весьма трудоемким поскольку при подсчете было необходимо разобрать большое множество всевозможных вариантов пересечения. В связи с этим был придуман более простой в реализации способ - пересечение области

$\Pi_{ij} = \{(x, y)\colon x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \le y \le y_{j+1/2}\}$ с фигурой определяется разбиением этой области на ещё 100*100 узлов. Таким образом появляется возможность определить количество точек принадлежащих пересечению. После этого отношение найденного количества и общего количества узлов в области Π_{ij} умножается на площадь области Π_{ij}.

Для реализации распараллеливания использовались директивы:

#pragma omp parallel default(shared) private(i) для арифметических операций

#pragma omp parallel default(shared) private(i) reduction(+:sum) для скалярного произведения

Результаты расчетов для разных размеров задач и на разном числе процессов.

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M×N	Время решения (с)	Ускорение
2	80*80	29.1113	1.73
4	80*80	18.6243	2.71
8	80*80	12.9444	3.91
16	80*80	10.1774	4.96
2	160*160	500.652	1.77
4	160*160	283.374	3.12
8	160*160	181.295	4.88
16	160*160	142.657	6.21

Ускорение считалось как отношение времени выполнения последовательной программы к времени выполнения программы на определённой конфигурации программы для заданного числа точек сетки M*N и числа нитей OpenMP.
Таким образом, было разобрано следующее число нитей: 2, 4, 8, 16 и числа точек в сетке: 80*80 и 160*160. Время выполнения последовательной программы для 80*80: 50.4867 сек. Время выполнения последовательной программы для 160*160: 886.336 сек.

Рисунок приближенного решения, полученного на сетке с наибольшим количеством узлов, графики ускорений.

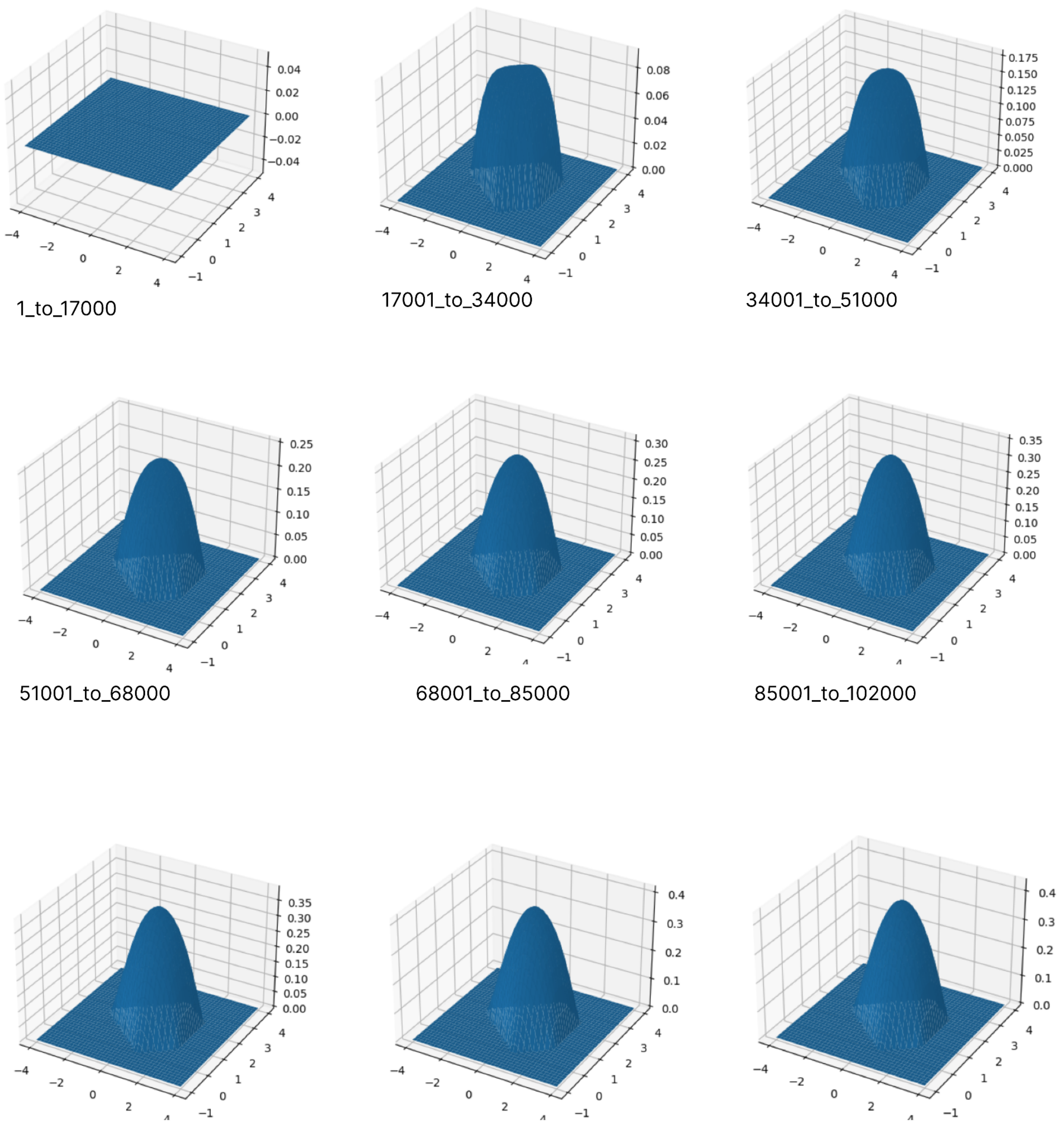


Рис 1. Получение решения.

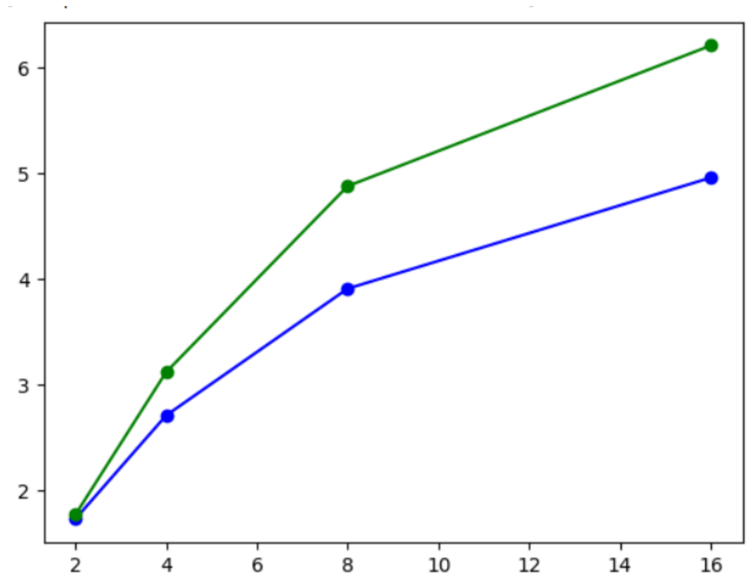
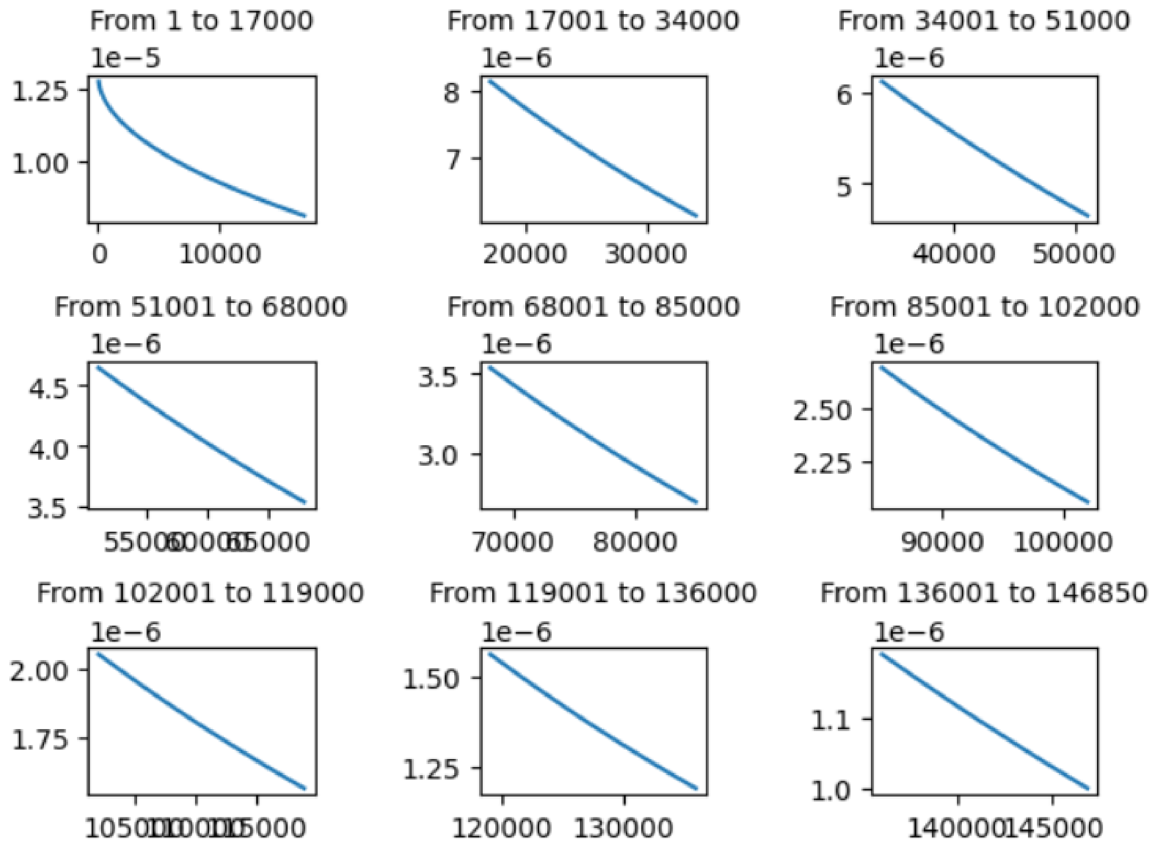


Рис 2. Зависимость ускорения по оси ординат и числа OpenMP-нитей по оси абсцисс для параметров M, N = 80 (синий) и M, N (зелёный) = 160.



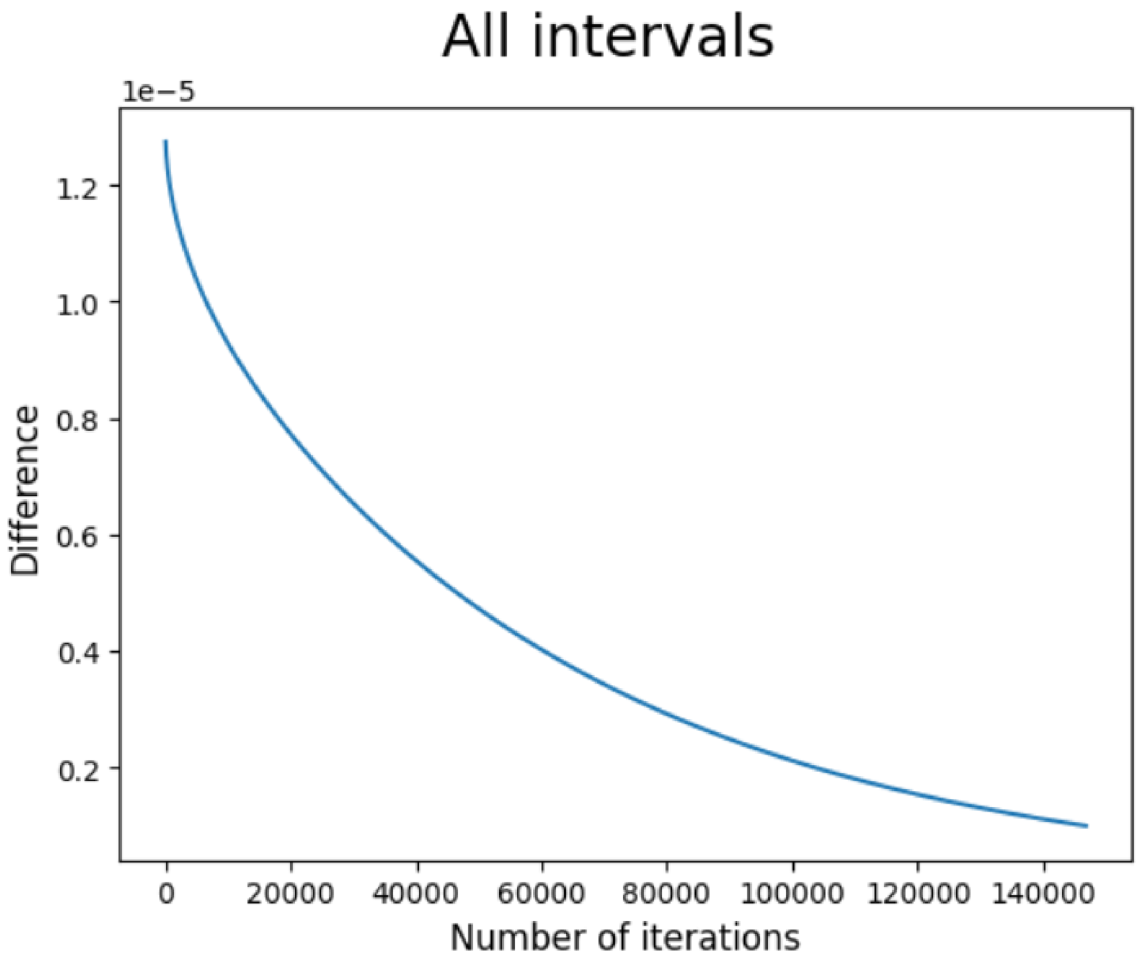


Рис 3. Графики сходимости за определённые интервалы итераций и общая сходимость за все интервалы

Список литературы

[1] IBM Polus. —http://hpc.cs.msu.su/polus