



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчёт по заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное
моделирование и технологии»
Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в
криволинейной области

Выполнил: Анжиганов Д.А.
608 группа
Вариант 6

Москва 2023

Введение

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

Исследуемая область $D = |x| + |y| < 2, y < 1$

Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$, ограниченной контуром γ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

функция $f(x, y) = 1$. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничным условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению в области D и краевому условию на ее границе.

Численный метод решения уравнения

Для решения был выбран предложенный метод наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $\omega^{(k)} \in H$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$$\|\omega - \omega^{(k)}\|_E \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

Начальное приближение $\omega^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки. Метод является одношаговым.

Итерация $\omega^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $\omega^{(k)}$ согласно равенствам:

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \omega_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}$$

где невязка $r^k = A\omega^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}\|_E < \delta$$

где δ – положительное число, определяющее точность итерационного метода.

Краткое описание проделанной работы по созданию OpenMP-программы

Для реализации поставленной задачи была использована технология OpenMP.

При подсчете площадей пересечения данной в 6 варианте фигуры с областью P_{ij} были использованы два способа. Первый заключался в разбиении сложной фигуры на сумму более простых. Под простыми фигурами, как правило понимаются трапеции и треугольники. Такой путь оказался весьма трудоемким поскольку при подсчете было необходимо разобрать большое множество всевозможных вариантов пересечения. В связи с этим был придуман более простой в реализации способ – пересечение области

$P_{ij} = \{(x, y): x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\}$ с фигурой определяется

разбиением этой области на ещё 100*100 узлов. Таким образом появляется возможность определить количество точек принадлежащих пересечению. После этого отношение найденного количества и общего количества узлов в области P_{ij} умножается на площадь области P_{ij} .

Для реализации распараллеливания использовались директивы:

```
#pragma omp parallel default(shared) private(i) для арифметических операций  
#pragma omp parallel default(shared) private(i) reduction(+:sum) для  
скалярного произведения
```

Результаты расчетов для разных размеров задач и на разном числе процессов.

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M×N	Время решения (с)	Ускорение
2	80*80	180.291	11.075
4	80*80	102.273	19.524
8	80*80	64.148	31.127
16	80*80	50.072	39.878
2	160*160	500.439	11.095
4	160*160	283.374	19.593
8	160*160	181.295	30.626
16	160*160	142.657	38.921

Ускорение считалось как отношение времени выполнения последовательной программы к времени выполнения программы на определённой конфигурации программы для заданного числа точек сетки M*N и числа нитей OpenMP.

Таким образом, было разобрано следующее число нитей: 2, 4, 8, 16 и числа точек в сетке: 80*80 и 160*160. Время выполнения последовательной программы для 80*80: 1996.79 сек. Время выполнения последовательной программы для 160*160: 5552.38 сек.

Рисунок приближенного решения, полученного на сетке с наибольшим количеством узлов, графики ускорений.

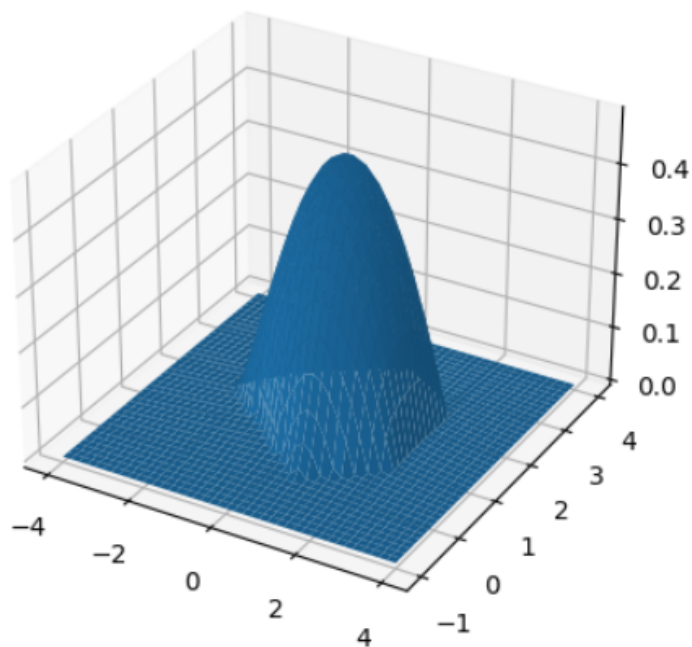


Рис 1. Полученное решение.

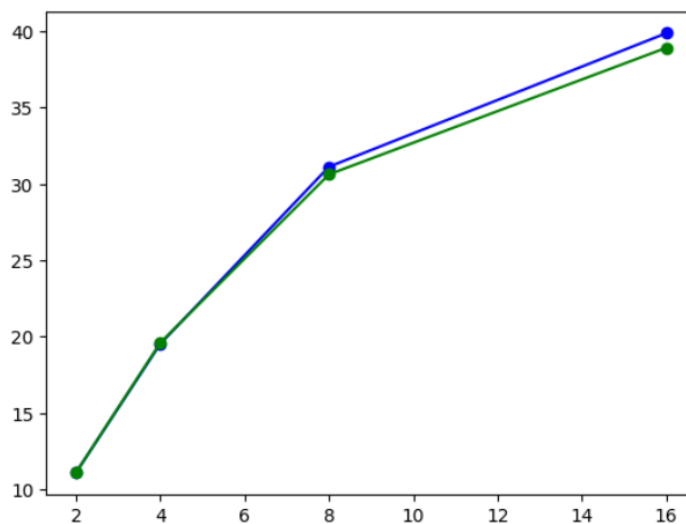


Рис 2. Зависимость ускорения по оси ординат и числа OpenMP-нитей по оси абсцисс для параметров $M, N = 80$ (синий) и M, N (зелёный) = 160.

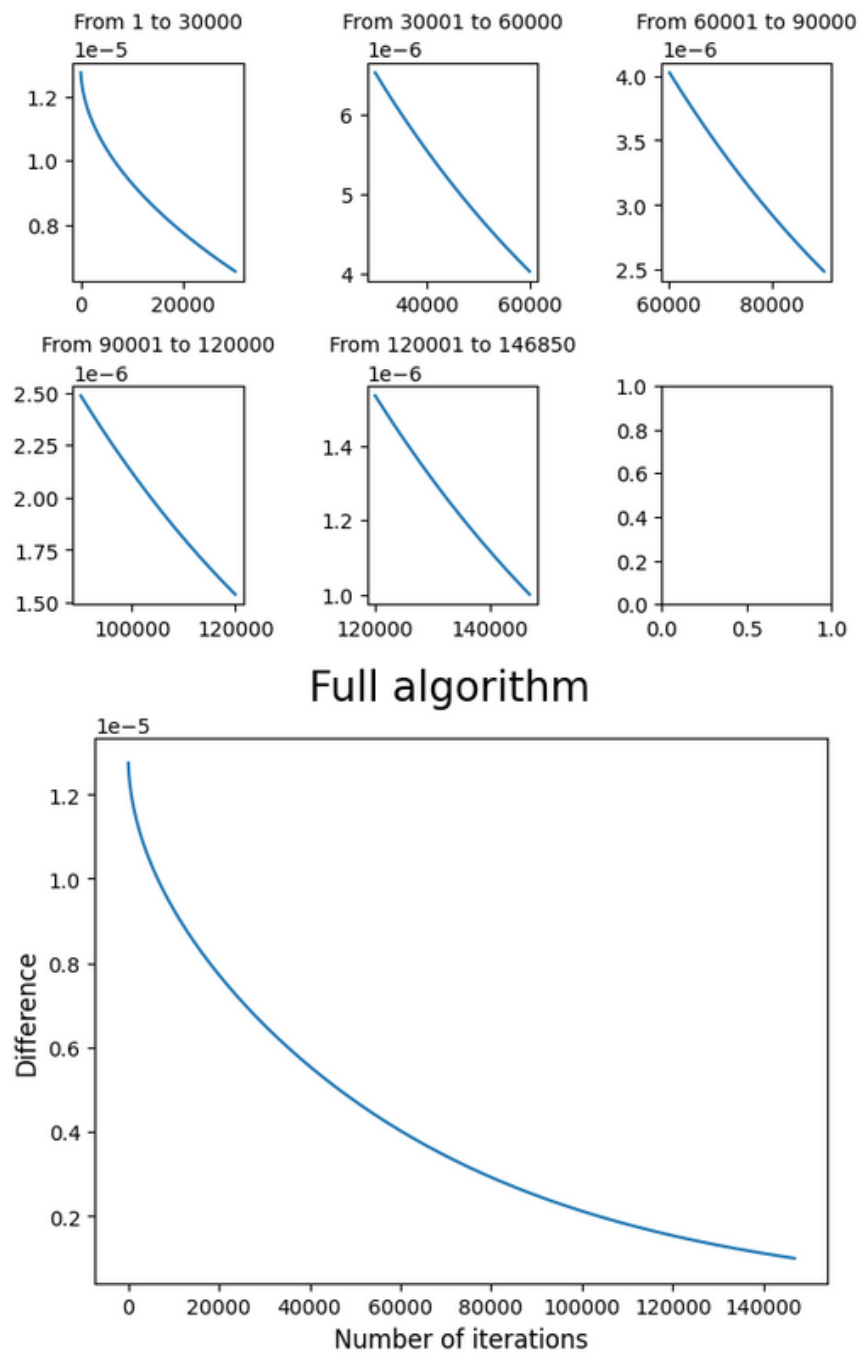


Рис 3. Графики сходимости за определённые интервалы итераций и общая сходимость за все интервалы

Список литературы

[1] IBM Polus. —<http://hpc.cs.msu.su/polus>