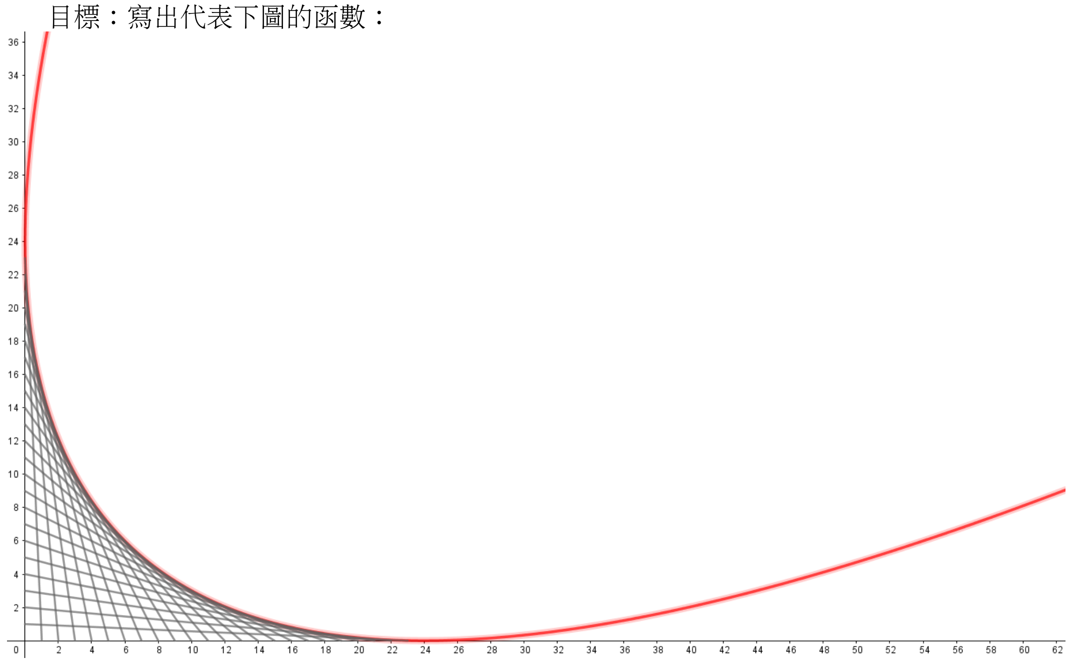
我到底又在做些什麼:(

aoaaceai

目標：寫出代表下圖的函數：



1 步驟們

要找出方程式，大致要經過以下步驟

1. 畫出圖形
2. 討論出有限項的一般型
3. 把項數推向無窮大，求出軌跡方程式

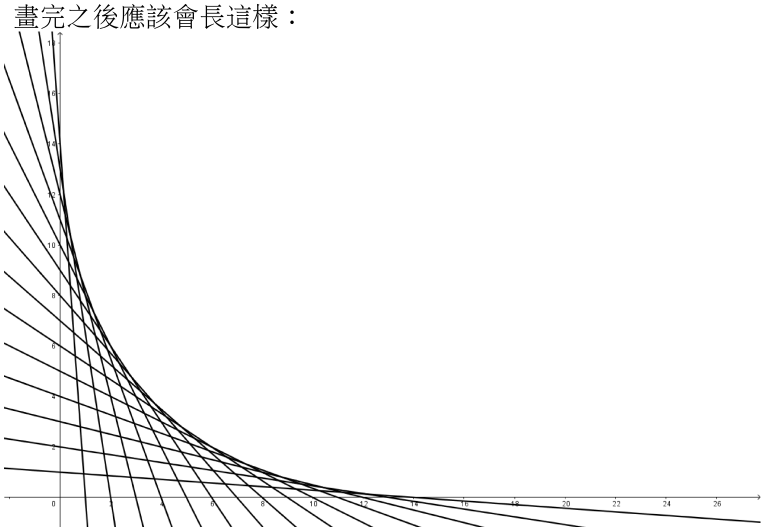
2 實際操作

2.1 這是怎麼畫出來的

先準備好一張白紙，決定好k與d值(15:1左右就很明顯了)。從$a_1 = d, b_1 = k - a_1$開始，逐次使a增加d，以白紙左下角為原點，作出以下直線：

$$L_n : \frac{x}{a_n} + \frac{y}{b_n} = 1 \tag{1}$$

畫完之後應該會長這樣：



畫完之後，可以很明顯的看見一個曲線形邊界。這次證明的目的就是要找出它的方程式。

2.2 找出方程式

在畫圖時，如果仔細觀察的話，會發現L_n與L_{n+1}兩條直線的交點必然出現在圖形的邊界上。也就是說，**這個交點滿足我們要找出的函數方程式**。

對於一般項a, b，這兩條直線分別是：

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{a+d} + \frac{y}{b-d} = 1 \end{cases}$$

運用克拉瑪公式解方程式，得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a+d} & \frac{1}{b-d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a(b-d)} - \frac{1}{b(a+d)} = \frac{d(a+b)}{ab(a+d)(b-d)}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} \\ 1 & \frac{1}{b-d} \end{vmatrix} = \frac{1}{b-d} - \frac{1}{b} = \frac{d}{b(b-d)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{a+d} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} = \frac{d}{a(a+d)}$$

$$x = \frac{ab(a+d)(b-d)}{d(a+b)} \cdot \frac{d}{b(b-d)} = \frac{a(a+d)}{a+b} \tag{2}$$

$$y = \frac{ab(a+d)(b-d)}{d(a+b)} \cdot \frac{d}{a(a+d)} = \frac{b(b-d)}{a+b} \tag{3}$$

在有限項中，所有滿足式*2*與式*3*的點，即為所求。至於它們滿足的方程式，我懶得討論*(*反正也不重要*)*。

2.3 邁向無窮

如果畫出的直線越多條，即d減小，得到的圖形也會漸趨圓滑。如果使d趨近於*0*，得到無窮多條直線，描出來的軌跡就會是平滑且連續的一條曲線。

對x, y取極限，會得到：

$$lim_{d\to 0} x = \frac{a^2}{a+b} = \frac{a^2}{k}$$

$$lim_{d\to 0} y = \frac{b^2}{a+b} = \frac{b^2}{k}$$

整理以上兩式，在x, y均大於0的條件下會得到：

$$a = \sqrt{kx}, b = \sqrt{ky}$$

$$a + b = \sqrt{kx} + \sqrt{ky} = \sqrt{k}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = k$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{k} \tag{4}$$

平方兩次，整理得：

$$x + y + \sqrt{2xy} = k$$
$$x^2 - 2xy + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0 \tag{5}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

依據判別式可以發現式5的圖形為拋物線。

3 What else?

如果仔細觀察的話，會發現這樣用克拉瑪公式的方法，實際上只是微分的反操作而已。原本是從函數圖形找割線，再用極限求切線；這個做法是從類似割線的點開始，再用極限推回方程式。
實際上式5所表示的才是完整拋物線的圖形，而式4與當初設下的$x, y > 0$只不過是方便運算的一小段曲線而已。
最後就用一張圖片結束吧*XD*