Отчёт по лабораторной работе 5

Модель хищник-жертва

Аристова Арина Олеговна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Цель:

- Изучить простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.
- Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$
- Найти стационарное состояние системы

2 Задание

2.1 Вариант 4

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.15 * x(t) + 0.044 * x(t) * y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.35 * y(t) – 0.32 * x(t) * y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 9, y_0 = 14$. Найти стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Julia – высокоуровневый язык, который разработан для научного программирования. Язык поддерживает широкий функционал для математических вычислений и работы с большими массивами данных[1].

OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. Основано на языке Modelica. Активно развивается Open Source Modelica Consortium, некоммерческой неправительственной организацией. Open Source Modelica Consortium является совместным проектом RISE SICS East AB и Линчёпингского университета. По своим возможностям приближается к таким вычислительным средам как Matlab Simulink, Scilab xCos, имея при этом значительно более удобное представление системы уравнений исследуемого блока [2].

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [3]

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a * x(t) – b * x(t) * y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c * y(t) + d * x(t) * y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, с - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников $(xy) $. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = c/d, y_0 = a/b$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии x $x(0) = x_0, y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе[3,4].

При малом изменении модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a * x(t) – b * x(t) * y(t) + \epsilon * f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -c * y(t) + d * x(t) * y(t) + \epsilon * g(x, y), \epsilon << 1 \end{cases}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Выполнение на Julia

Мой вариант лабораторной работы: 4. Я получила его по заданной формуле:

Рис. 4.1: Определение варианта.

Затем я написала 2 программы для каждого из случаев на языке Julia:

Вот листинг первой программы для **нестационарного** случая. Проблема заключается аналогично предыдущим лабораторным работам в решении одногодного дифференциального уравнения. Решение этой проблемы и отображается на графике.

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 9
```

```
y0 = 14

a = 0.15
b = 0.044
c = 0.35
d = 0.032

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt1 = plot(dpi=300, legend=false)

plot!(plt1, title="График зависимости x от y")
plot!(plt1, X, Y, color=:green)

savefig(plt1, "lab5_1_1.png")

plt2 = plot(dpi=300, legend=true)
```

```
plot!(plt2, title="Нестационарный случай")
plot!(plt2, T, X, label="Численность жертв", color=:blue)

plot!( plt2, T, Y, label="Численность хищников", color=:red)

savefig(plt2, "lab5_1_2.png")
```

Полученный результат:

- Первый график отражает $x(t), y(t)$:

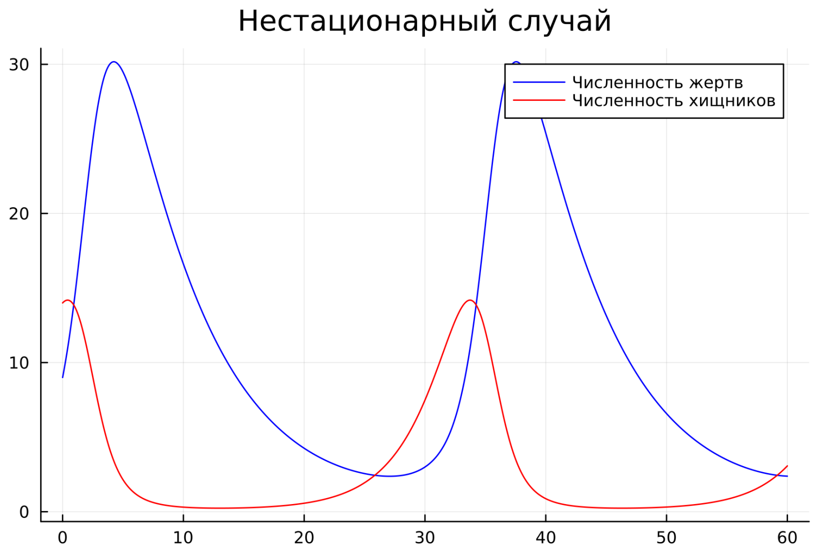

Рис. 4.2: Случай 1.Решение, полученное на Julia

- Второй график отражает зависимость x от y:

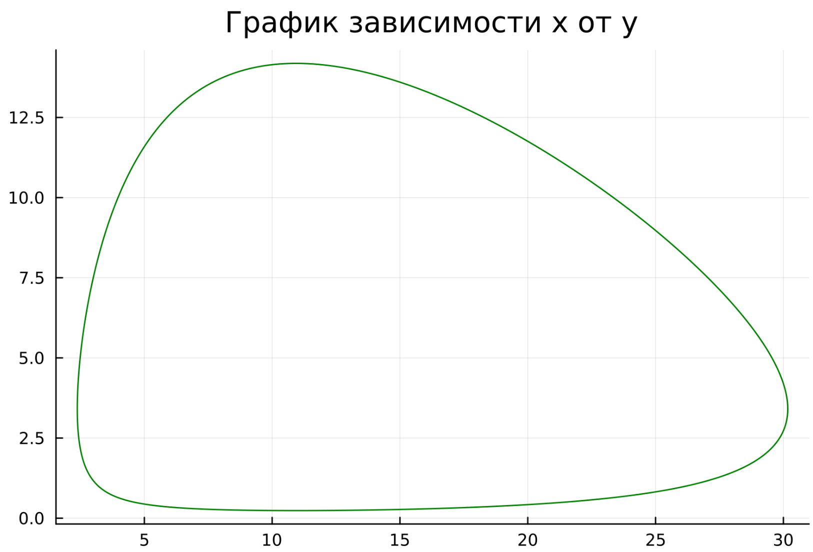

Рис. 4.3: Случай 1. График зависимости x от y, полученный на Julia

Вот листинг второй программы, который помог нам отыскать **стационарное состояние системы**: Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) достигается в точке: $x_0 = c/d, y_0 = a/b$.

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.15
b = 0.044
c = 0.35
d = 0.032

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
```

```
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=300, legend=true)

plot!(plt, title="Стационарный случай")
plot!(plt, T, X, label="Численность жертв", color=:blue)

plot!( plt, T, Y, label="Численность хищников", color=:red)

savefig(plt, "lab5_2.png")
```

Полученный результат:

Рис. 4.4: Случай 2. Стационарное состояние, полученное на Julia

4.2 Выполнение на Modelica

Затем я написала необходимые программы для каждого из случаев для получения решений на языке Modelica в OpenModelica:

Вот листинг первой программы для **нестационарного случая** случая:

```
model lab5_1

Real a = 0.15;
Real b = 0.044;
Real c = 0.35;
Real d = 0.032;

Real x;
Real y;

initial equation
x = 9;
```

```
y = 14;

equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_1;
```

Полученный результат:

- Первый график отражает зависимость $x(t), y(t)$:

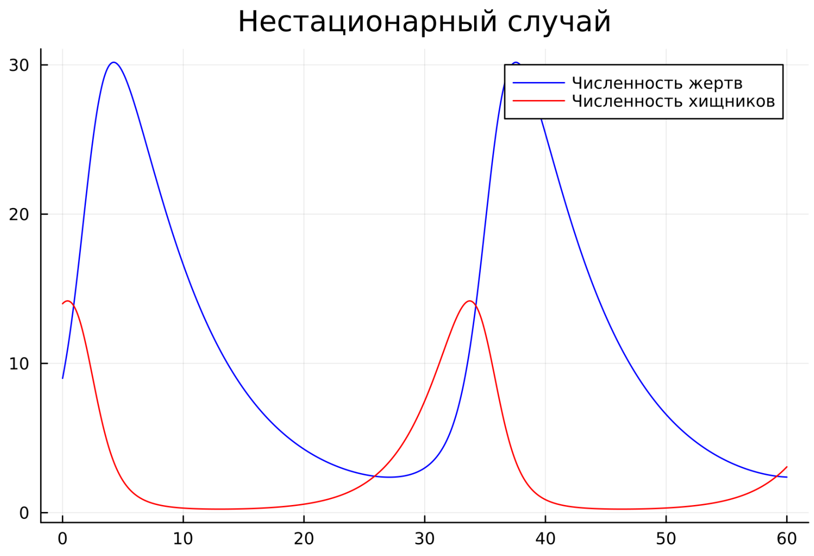

Рис. 4.5: Случай 1. Решение, полученное на Modelica

- Второй график отражает зависимость x от y:

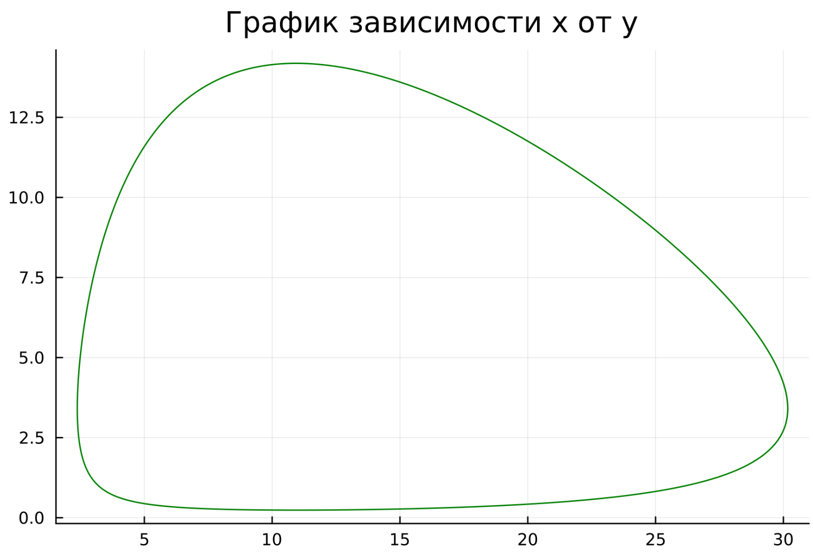

Рис. 4.6: Случай 1. График зависимости x от y, полученный на Modelica

Вот листинг второй программы, который помог нам отыскать **стационарное состояние системы**: Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) достигается в точке: $x_0 = c/d, y_0 = a/b$.

```
model lab5_2

Real a = 0.15;
Real b = 0.044;
Real c = 0.35;
Real d = 0.032;

Real x;
Real y;

initial equation
x = c / d;
y = a / b;
```

```
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_2;
```

Полученный результат:

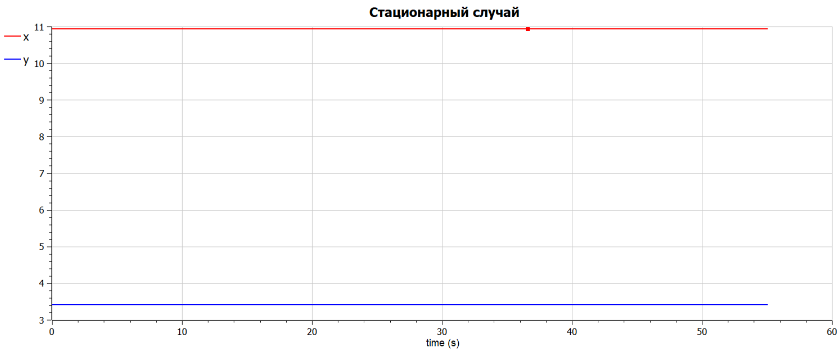

Рис. 4.7: Случай 2. Стационарное состояние, полученное на Modelica

5 Анализ полученных результатов

В итоге проделанной работы мною были построены все необходимые графики: график зависимости численности хищников от численности жертв, графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Аналогично предыдущим лабораторным работам, код для построения модели хищник-жертва на языке Modelica занимает меньше строк, нежели аналогичное построение на Julia.

Также немаловажно, что на обоих языках содержание графиков получилось идентичным:

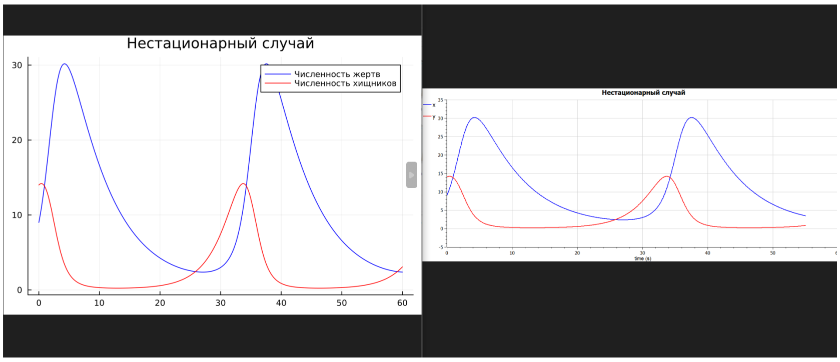

Рис. 5.1: Сравнение графиков нестационарного состояния.

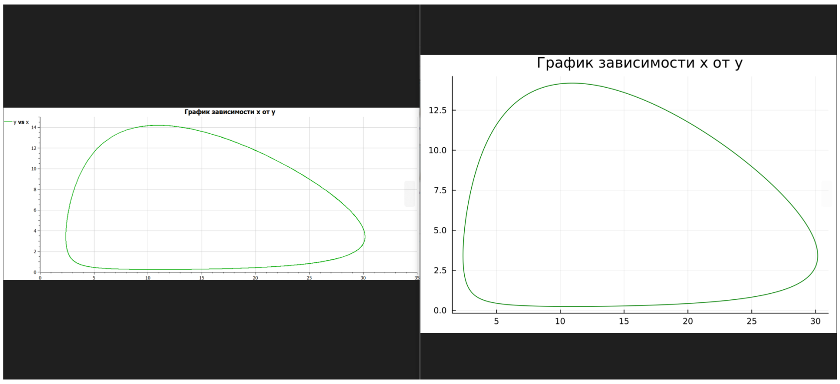

Рис. 5.2: Сравнение графиков зависимости x от y.

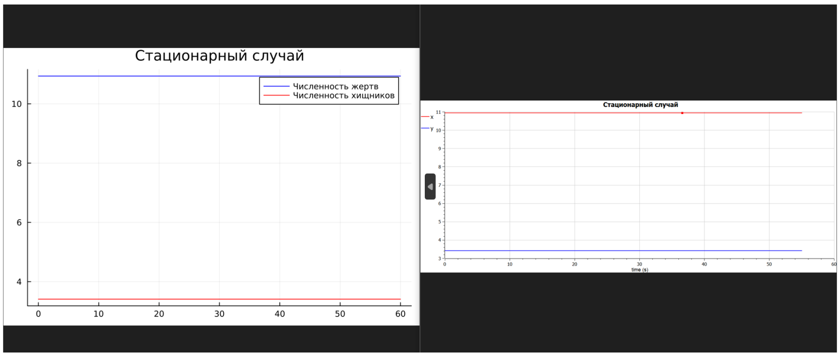

Рис. 5.3: Сравнение графиков стационарного состояния.

6 Выводы

В ходе и по результатам выполнения лабораторной работы я построила необходимые графики (два описывающие нестационарный случай и зависимость количества жертв от количества хищников, и описывающий стационарный случай) на двух языках: Julia и Modelica.

Список литературы. Библиография

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Модель Лотки – Вольтерры https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B

[4] Материалы к лабораторной работе