Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Εργαστήριο Επεξεργασίας Σημάτων & Τηλεπικοινωνιών
Τομέας Υλικού και Αρχιτεκτονικής Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Πατρών

Εργαστήριο Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων

Σετ Βοηθητικών Ασκήσεων #1

(Ανακατασκευή Σημάτων & Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα)

Επιβλέπων Καθηγητής:
Δημήτριος Κοσμόπουλος

Σύνταξη – Επιμέλεια:
Αλέξανδρος-Οδυσσέας Φαρμάκης

Πάτρα, Εαρινό Εξάμηνο, 2022-23

Θέματα: Εισαγωγή στη MATLAB για ΨΕΣ

Θέμα 1ο) Η sinc(x) & Επαλήθευση του Τύπου Ανακατασκευής Σήματος

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι η αρχική εξοικείωση με το περιβάλλον της MATLAB στο πλαίσιο της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος. Συνεπώς, ζητείται από σας:

α) Να γράψετε μια δική σας συνάρτηση που να υλοποιεί τη συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$. Να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση για την περίπτωση όπου $x = 0$ που έχουμε $\mathrm{sinc}(0) = 1$. Να σχεδιάσετε το $\mathrm{sinc}(2\pi t)$ για $-1 \leq t \leq 1$.

β) Θεωρήστε το το ακόλουθο περιοδικό σήμα περιορισμένης ζώνης που μπορεί να θεωρηθεί ως περικομμένη σειρά Fourier.

$$x_a(t) = 1 - 2\sin(\pi t) + \cos(2\pi t) + 3\cos(3\pi t)$$

Γράψτε πρόγραμμα MATLAB που χρησιμοποιεί την έτοιμη συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ για την μερική ανακατασκευή της $x_a(t)$ ως εξής:

$$x_p(t) = \sum_{k=-p}^{p} x_a(kT_s)\, sinc\left[f_s(t - kT_s)\right]$$

Το πρόγραμμά σας πρέπει να έχει συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 6\text{Hz}$. Να σχεδιάσετε τα $x_a(t)$ και $x_p(t)$ στην ίδια γραφική παράσταση, χρησιμοποιώντας 101 σημεία σε ίση απόσταση μεταξύ τους στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιπλέον, να περιέχει ένα prompt για τον χρήστη να εισάγει τον αριθμό p, και να καταγράψετε τα αποτελέσματα για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) p = 5
2) p = 10
3) p = 20

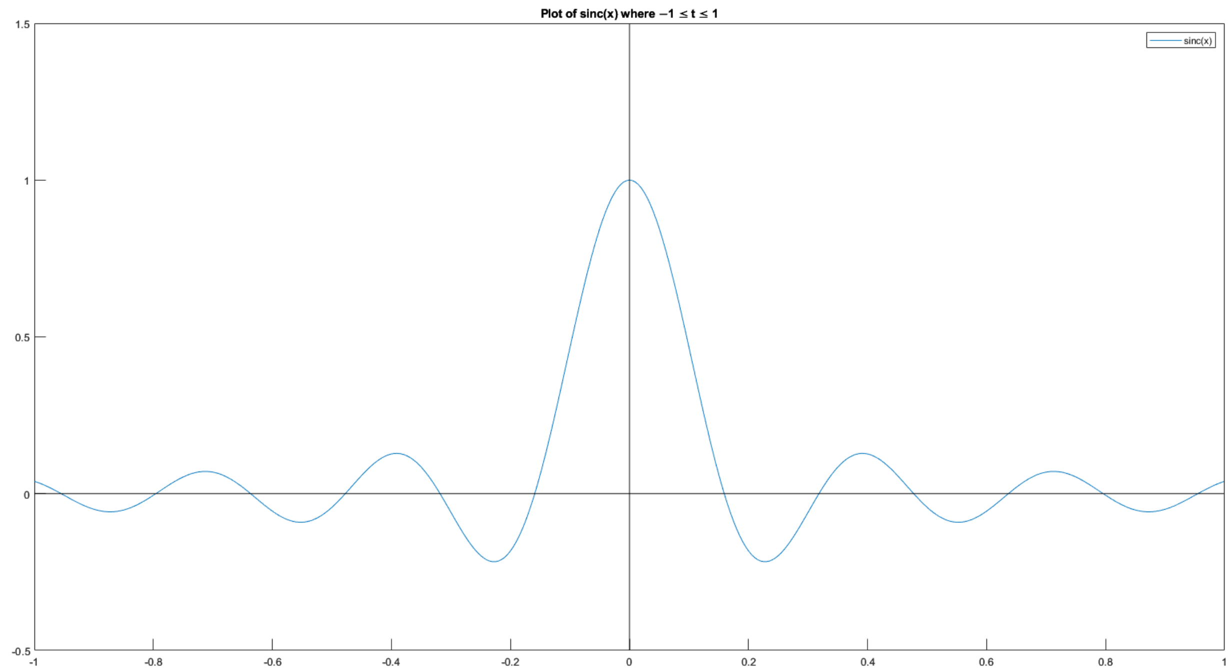
Λύση:

α) Έστω ότι ονομάζουμε την συνάρτηση που υλοποιούμε *my_sinc*. Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση sinc, η οποία συχνά αποκαλείται και *συνάρτηση δειγματοληψίας*, όταν θεωρείται ως συνάρτηση του χρόνου ή του χώρου, αποτελεί τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του τετραγωνικού παλμού που έχει συχνότητα με κέντρο το μηδέν, πλάτος 2π και μοναδιαίο ύψος. Ο κώδικας αυτής της συνάρτησης μπορεί να μοιάζει ως εξής:

```
function y = my_sinc(x)
      y = sin(pi*x) ./ (pi*x);
      % Εύρεση του index της NaN τιμής για την περίπτωση που x = 0
      index = isnan(y);
      y(index) = 1;
end
```

Χρησιμοποιώντας δηλαδή είτε την έτοιμη συνάρτηση sinc είτε τη δική μας, το αποτέλεσμα θα μοιάζει με το γράφημα που δίνεται στην επόμενη σελίδα:

Το γράφημα της κανονικοποιημένης sinc:

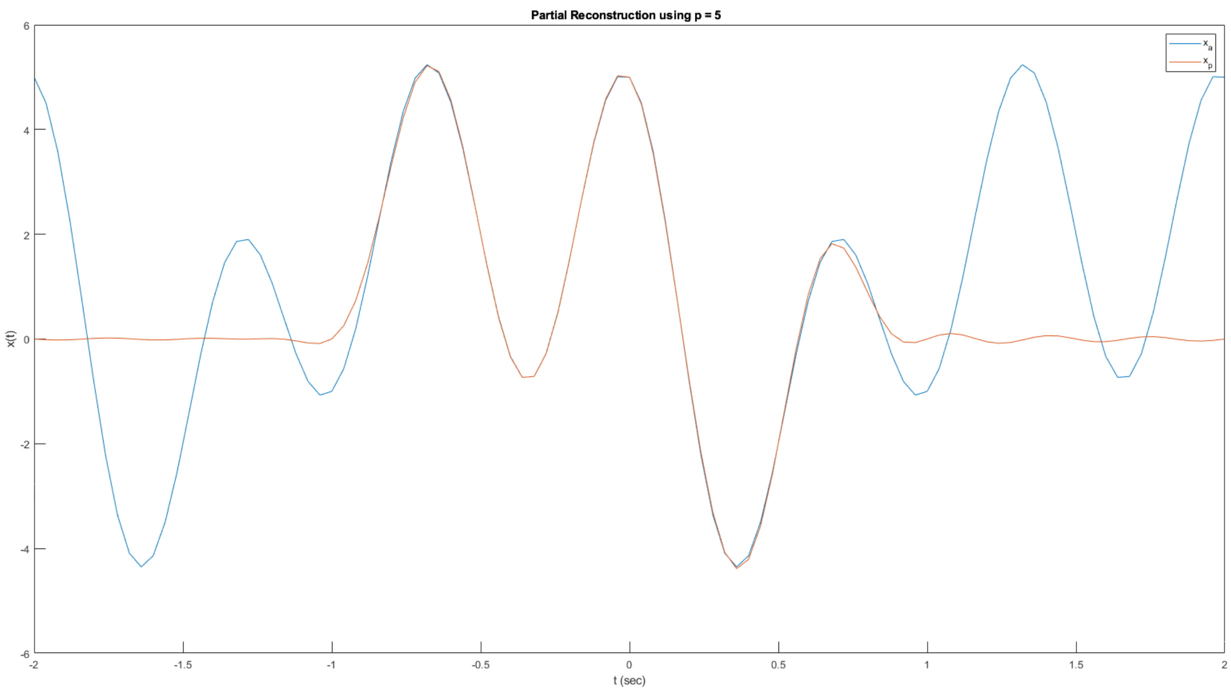


β) Το αποτελέσματα του κώδικα παρακάτω, που περιέχει και αυτά του ερωτήματος α), φαίνονται στις επόμενες σελίδες.

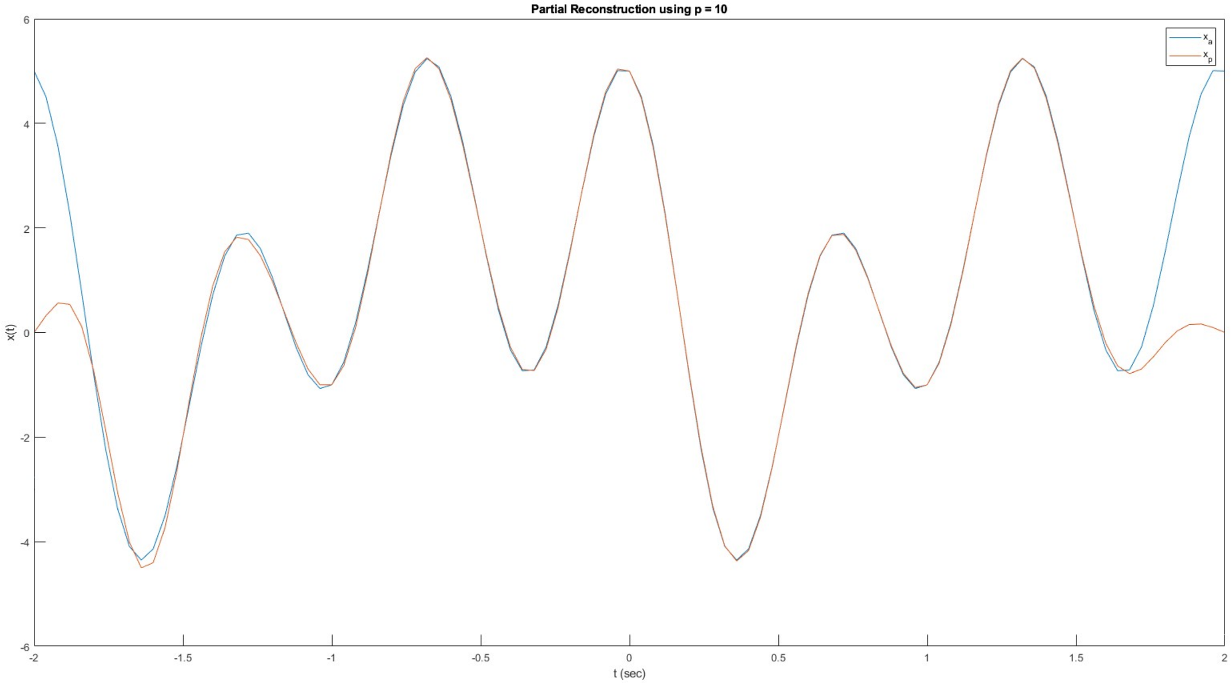
```
%========================================================================%
% Μέρος 1ο: Κατασκευή του γραφήματος της συνάρτησης sinc
%========================================================================%
t = linspace (-1, 1, 401);
y = sinc(2*pi*t);
figure(1);
plot (t, y);
hold on;
title('Plot of sinc(x) where -1 ≤ t ≤ 1');
% Σχεδιασμός μαύρων αξόνων με κέντρο το (0, 0) για τη συνάρτηση sinc
plot([-1 1], [0 0], 'Color', [0, 0, 0]);
plot([0 0], [-0.5 1.5], 'Color', [0, 0, 0]);
legend('sinc(x)');
hold off;

%========================================================================%
% Μέρος 2ο: Αριθμητική επαλήθευση του τύπου ανακατασκευής σήματος
%========================================================================%
fs = 6;
Ts = 1/fs;
% Ορισμός της συνάρτησης x_a μέσω anonymous function
x_a = @(t) 1 - 2*sin(pi*t) + cos(2*pi*t) + 3*cos(3*pi*t);
```

```
% Ανακατασκευή του x_a(t) από τα δείγματά του
prompt = "Enter number of terms p: ";
p = input(prompt);
t = linspace (-2, 2, 101);
x_p = zeros(size(t));
for i = 1 : length(t)
      for k = -p : p
            x_p(i) = x_p(i) + sum(x_a(k.*Ts) .* sinc(fs .* (t(i) - k.*Ts)));
      end
end
figure(2);
plot (t, x_a(t), t, x_p);
title(['Partial Reconstruction using p = ', num2str(p)]);
xlabel('t (sec)');
ylabel('x(t)') ;
legend('x_a','x_p');
```

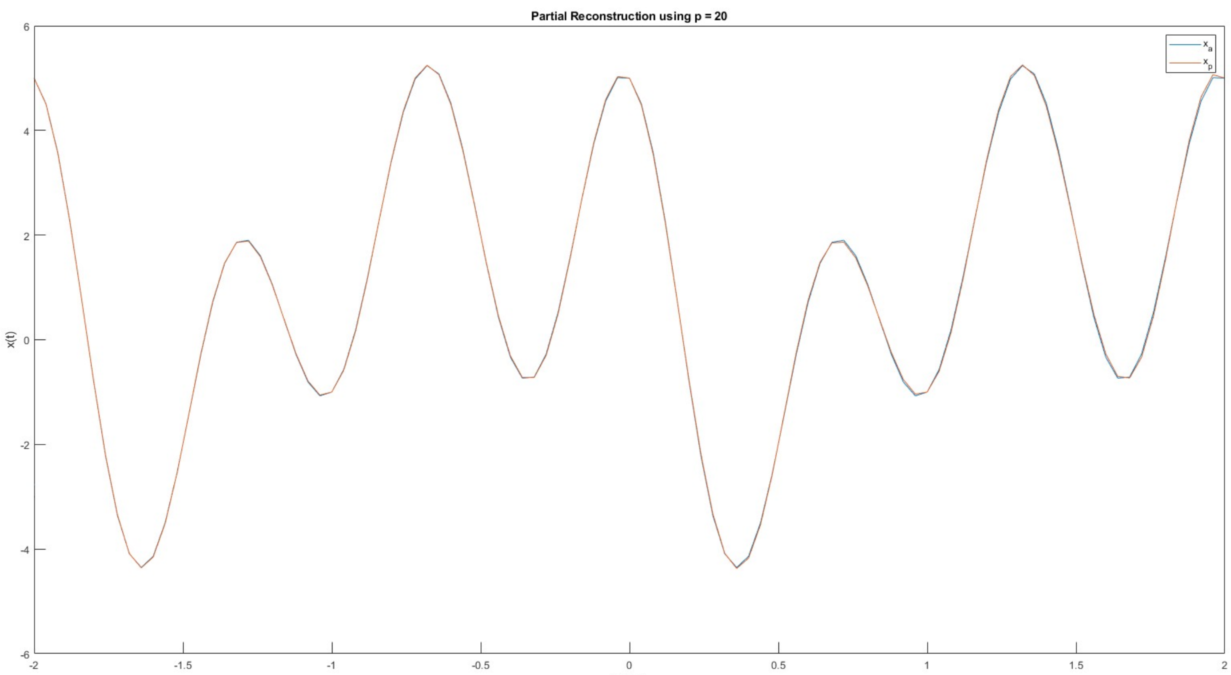
Για p = 5:



Για p = 10:



Για p = 20:



Για διδακτικούς λόγους όμως, παρέχεται και λειτουργικά ισοδύναμη υλοποίηση των ίδιων ζητουμένων, ο κώδικας αυτών όμως είναι πιο αργός.

```
function y = my_sinc(x)
      for i = 1 : length(x)
            if abs(x(i)) < eps
            y(i) = 1;
      else
            y(i) = sin(pi*x(i)) / (pi*x(i));
            end
      end
end



%===========================================================================%
% Μέρος 2ο: Αριθμητική επαλήθευση του τύπου ανακατασκευής σήματος
%===========================================================================%
fs = 6;
Ts = 1/fs;
% Ορισμός της συνάρτησης x_a μέσω anonymous function
x_a = @(t) 1 - 2*sin(pi*t) + cos(2*pi*t) + 3*cos(3*pi*t);

% Ανακατασκευή του x_a(t) από τα δείγματά του
prompt = "Enter number of terms p: ";
p = input(prompt);
t = linspace (-2, 2, 101);
x_p = zeros(size(t));
for i = 1 : length(t)
      for k = -p : p
            %Χρήση vectorization στο πολλαπλασιασμό για λόγους ταχύτητας
            x_p(i) = x_p(i) + x_a(k * Ts) * sinc(fs * (t(i) - k * Ts));
      end
end
figure(2);
plot (t, x_a(t), t, x_p);
title(['Partial Reconstruction using p = ', num2str(p)]);
xlabel('t (sec)');
ylabel('x(t)');
legend('x_a','x_p');
```

Αρκεί να κάνετε tic και toc κατάλληλα για να συγκρίνετε τους χρόνους μεταξύ αυτών των υλοποιήσεων. Συνήθως, η χρήση της for στη MATLAB αποφεύγεται όταν θέλουμε γρήγορο κώδικα.

Θέμα 2ο) Κρουστική Απόκριση & Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$y[n]=-\frac{1}{12}x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]+x[n-2]-\frac{1}{4}x[n-3]-\frac{2}{9}x[n-4]-\frac{1}{15}x[n-5]$$

α) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.
β) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος θεωρητικά και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ***freqz()*** της MATLAB.
γ) Σχεδιάστε τα κανονικοποιημένα γραφήματα του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας.
δ) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ***filter()*** της MATLAB, υπολογίστε και σχεδιάστε τα πρώτα και τα τελευταία 100 δείγματα για την έξοδο του συστήματος με την παρακάτω είσοδο:

$$x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{-1}{4}\right)^n,\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ 10000$$

<u>Λύση:</u>

α) Η κρουστική απόκριση του συστήματος, βάση ορισμού, είναι η έξοδος του συστήματος όταν του δοθεί ένα σύντομο σήμα εισόδου, δηλαδή η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού δ(t). Πιο γενικά, η κρουστική απόκριση είναι η αντίδραση οποιουδήποτε δυναμικού συστήματος σε κάποια εξωτερική αλλαγή. Συνεπώς, η κρουστική απόκριση του συστήματός μας προκύπτει ως εξής:

$$h[n]=-\frac{1}{12}\delta[n]+\frac{1}{3}\delta[n-1]+\delta[n-2]-\frac{1}{4}\delta[n-3]-\frac{2}{9}\delta[n-4]-\frac{1}{15}\delta[n-5]$$

β) Επειδή γνωρίζουμε ότι ισχύει από το Μετασχηματισμό Fourier ότι

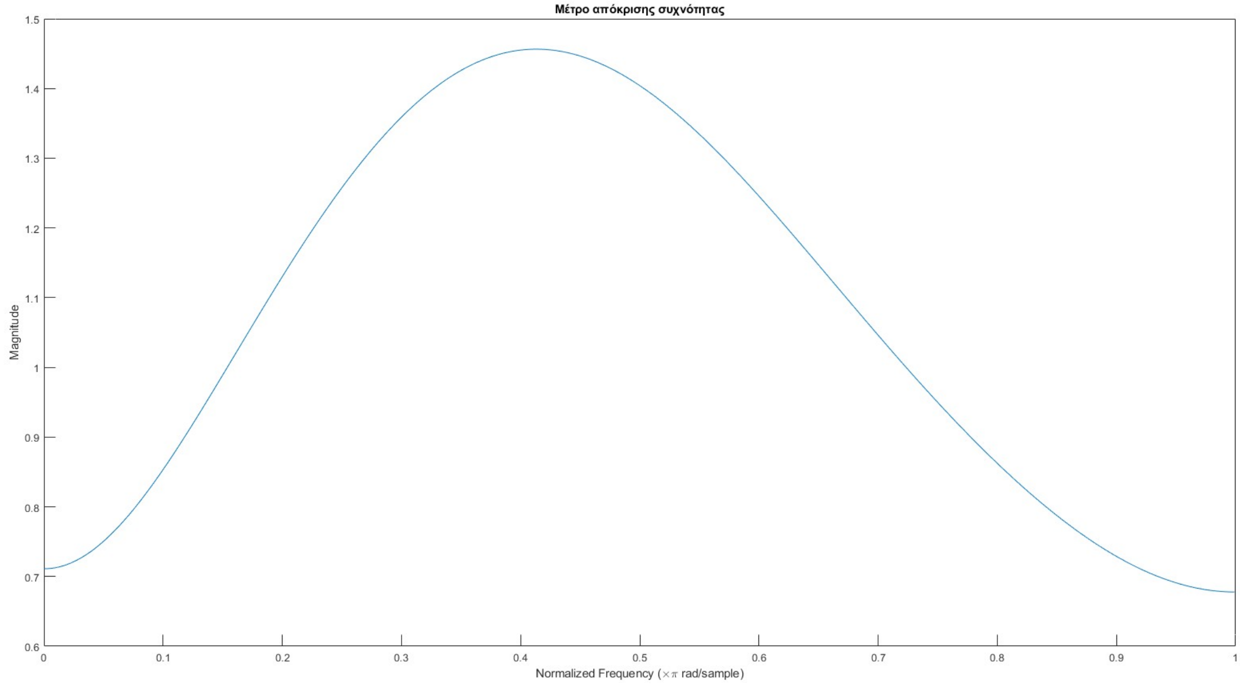
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\omega}$$

προκύπτει τελικά μέσω της κρουστικής απόκρισης ότι η απόκριση συχνότητας είναι:

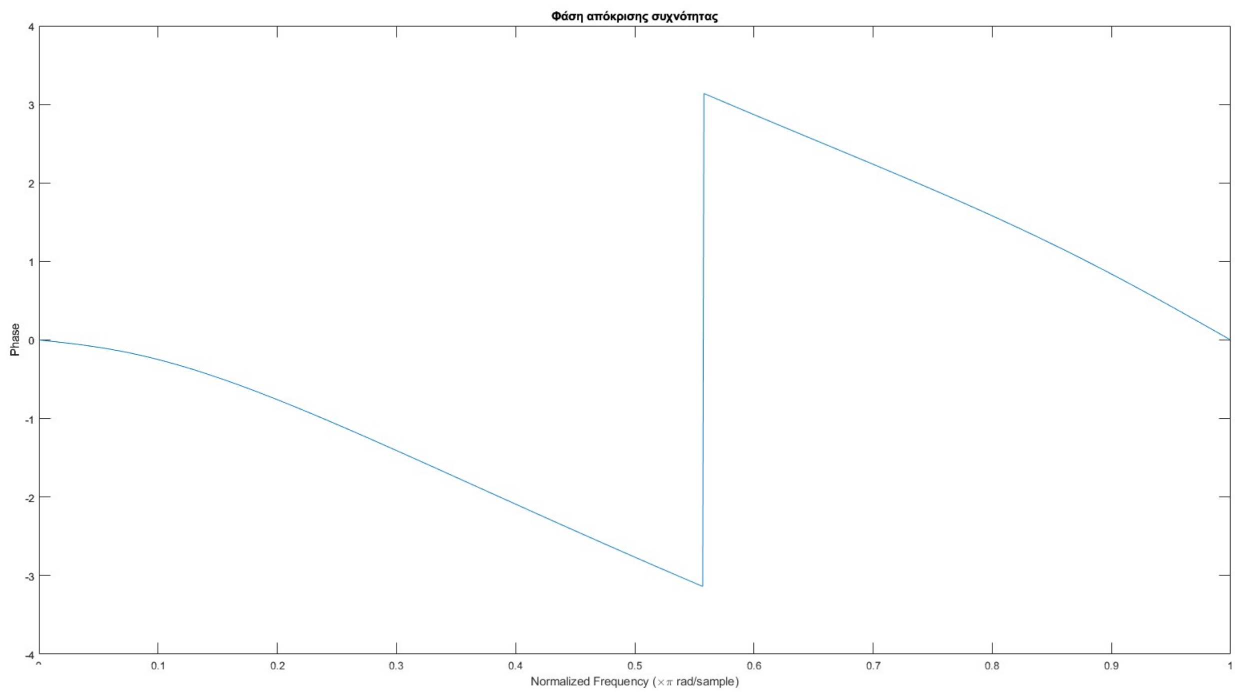
$$H\left(e^{j\omega}\right)=-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}-\frac{1}{4}e^{-3j\omega}-\frac{2}{9}e^{-4j\omega}-\frac{1}{15}e^{-5j\omega}$$

Ο κώδικας με τη ***freqz()*** της MATLAB θα ακολουθήσει στο τέλος της άσκησης μαζί με τα υπόλοιπα ερωτήματα.
γ) Τα ζητούμενα γραφήματα δίνονται στην επόμενη σελίδα:

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας:

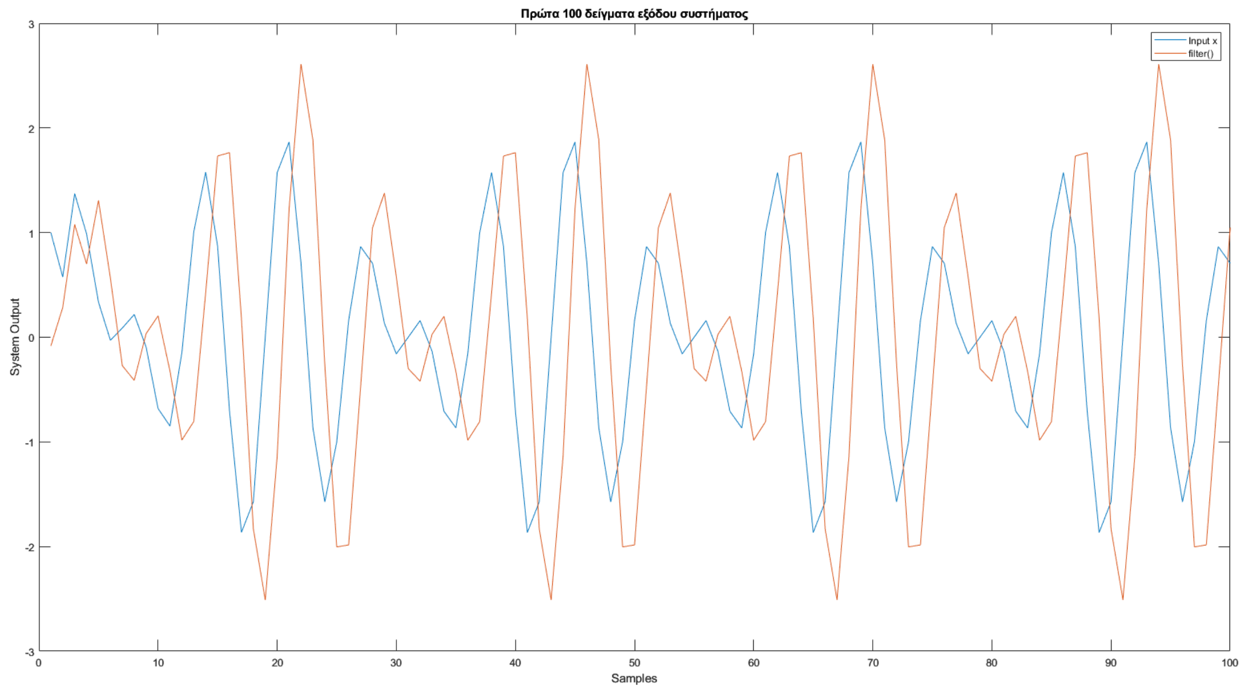


Η φάση της απόκρισης συχνότητας:

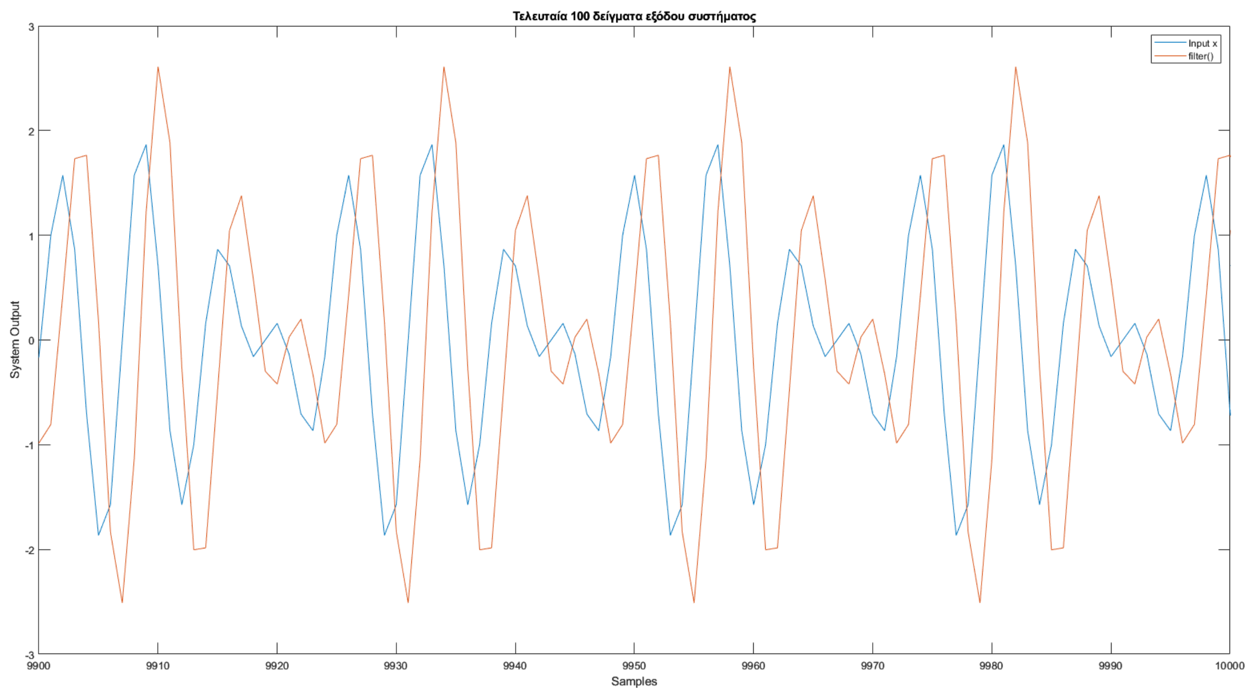


δ) Τα ζητούμενα γραφήματα δίνονται στην επόμενη σελίδα:

Τα πρώτα 100 δείγματα:



Τα τελευταία 100 δείγματα:



Ο κώδικας MATLAB συνολικά της άσκησης αυτής είναι ο παρακάτω:

```
% Η κρουστική απόκριση του συστήματος
h = [-1/12, 1/3, 1, -1/4, -2/9, -1/15];

% Ορισμός χιλίων δειγμάτων για τη συνάρτηση
[H, w] = freqz(h, 1, 1000);

% Κανονικοποιημένο γράφημα μέτρου απόκρισης συχνότητας
figure(1);
plot(w/pi, abs(H))
title('Μέτρο απόκρισης συχνότητας');
xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)');
ylabel('Magnitude');

% Κανονικοποιημένο γράφημα φάσης απόκρισης συχνότητας
figure(2);
plot(w/pi, angle(H));
title('Φάση απόκρισης συχνότητας');
xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)');
ylabel('Phase');

n = 0:10000;
x = sin((pi/3)*n) - cos((pi/4)*n) + (2/3).^n + (-1/4).^n;
y = filter(h, 1, x);

figure(3);
plot(x(1:100));
hold on;
plot(y(1:100));
title('Πρώτα 100 δείγματα εξόδου συστήματος');
xlabel('Samples');
ylabel('System Output');
legend('Input x', 'filter()');
hold off;

figure (4);
plot(x);
hold on;
plot(y);
title('Τελευταία 100 δείγματα εξόδου συστήματος');
xlabel('Samples');
ylabel('System Output');
legend('Input x', 'filter()');
% Θέτουμε τον άξονα x μεταξύ 9900 και 10000. Πρέπει να γίνει plot()
% ολόκληρου του σήματος για να εμφανιστεί σωστά το γράφημα
xlim([9900, 10000]);
% Θέτουμε το tick του άξονα x στις τιμές 9900 ως 10000 με βήμα 10
xticks(9900:10:10000);
hold off;
```