

## Вопросы экзаменационных билетов

- Будет два набора вопросов — по I и II части семестра соответственно. Билет состоит из двух полубилетов, один из них по первой, а другой по второй части.

### Структура билета

Билет состоит из двух полубилетов, каждый из которых охватывает одну тему курса: определения, теорему и задачу к этой теореме. Задачи приведены для примера — в билете может быть не в точности эта, но аналогичная.

- Теорема должна быть строго сформулирована. Вы должны уметь сформулировать все определения, входящие в формулировку теоремы.
- Доказательство можно привести в схематичном виде. Однако, по просьбе преподавателя, нужно уметь детализировать каждый шаг доказательства. Если доказательство теоремы опирается на другие утверждения курса, эти утверждения нужно уметь сформулировать и объяснить, как они используются (т.е. какие буквы в утверждении каким объектам доказательства соответствуют).
- Решение задачи должно быть полным. Нужно уметь объяснить, как именно используется определение или теорема в решении задачи (какие буквы утверждения теоремы каким объектам в задаче соответствуют).
- Преподаватель имеет право спрашивать знание определений и формулировок курса, не входящих в билет. Полный список определений и формулировок дан ниже.

### Оценка ответа

Каждый вопрос билета оценивается по четырёхбалльной шкале (2–5). При этом

- Оценка «отлично» (5) означает, что вы владеете материалом курса на выдающемся уровне:

- свободно владеете терминологией;
  - можете объяснить доказательство на идейном уровне;
  - можете объяснить, почему каждое условие в теореме важно, привести контрпримеры в случае, если какое-либо условие теоремы неверно;
  - можете объяснить, верна ли теорема в обратную сторону, если нет, то по каким причинам;
  - допускаете лишь незначительные ошибки, способны их тут же исправить после замечания преподавателя.
- Оценка «хорошо» (4) означает, что вы хорошо усвоили материал:
    - знаете определения курса и формулировки теорем;
    - понимаете идею доказательства и его связь с другими разделами курса;
    - не допускаете грубых ошибок, после замечаний преподавателя способны самостоятельно исправить допущенные ошибки.
  - Оценка «удовлетворительно» (3) означает, что вы удовлетворяете минимальным требованиям к положительной аттестации:
    - знаете определения курса и формулировки теорем;
    - способны с помощью преподавателя довести до конца доказательство теоремы и решение сопутствующей задачи.
  - В противном случае выставляется оценка «неудовлетворительно» (2).

## Итоговая оценка

Оценка за семестр складывается из трёх — оценки за практические занятия и двух оценок за теоретические ответы.

Оценка за практические занятия зарабатывается в семестре и выставляется по его итогам. Те, кто получил по итогам семестра оценку 2, будут вынуждены сначала сдать практическую часть экзамена и продемонстрировать своё умение решать задачи базового уровня.

Требования на итоговую оценку:

- «3» каждая из трёх оценок хотя бы 3;
- «4» кроме того не более одной оценки 3;
- «5» кроме того не более одной оценки 4.

То есть, например, набор (3, 3, 5) соответствует итоговой 3.

# Определения и формулировки теорем, которые надо знать

## Множества и отображения

Образ множества под действием отображения.  
Множество уровня функции.  
Прообраз множества под действием отображения.  
Инъекция, однозначное отображение.  
Сюръекция, отображение «на».  
Биекция, взаимно однозначное отображение.  
Обратная функция.  
Обратимая функция.  
Критерий обратимости функции.  
Композиция функций.  
Монотонная функция.  
Чётная функция.  
Нечётная функция.  
Выпуклая функция.  
Строго выпуклая функция.  
Вогнутая функция.  
Строго вогнутая функция.

## Вещественные числа

Промежуток. Интервал, отрезок, луч, числовая прямая.  
Аксиома непрерывности.  
Принцип Коши — Кантора вложенных отрезков.  
Принцип Архимеда.  
Целая часть числа.  
Расширенная числовая прямая и порядок на ней.

## Границы числовых множеств

Максимум и минимум числового множества.  
Верхняя и нижняя граница числового множества.  
Точная верхняя, точная нижняя граница числового множества.  
Теорема о точной верхней границе.  
Теорема о точной нижней границе.  
Ограниченное сверху, ограниченное снизу числовое множество.  
Ограниченное числовое множество.  
Неограниченное сверху, неограниченное снизу числовое множество.  
Неограниченное числовое множество.

## Предел числовой последовательности

Последовательность чисел.  
Ограниченная последовательность чисел.  
Неограниченная последовательность чисел.  
Конечный предел последовательности чисел.  
Бесконечный предел последовательности чисел.  
Топологическое определение предела последовательности.  
Сходящаяся последовательность чисел.  
Расходящаяся последовательность чисел.  
Связь предела и арифметических операций.  
Связь предела и неравенств.

### **Признаки существования предела**

Теорема о пределе промежуточной последовательности.  
Пределы последовательностей вида  $\sqrt[n]{x_n}$ .  
Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.  
Фундаментальная последовательность.  
Критерий Коши существования предела последовательности.  
Частичный предел последовательности.  
Теорема Больцано — Вейерштрасса о частичных пределах.  
Верхний и нижний пределы последовательности.  
Критерий существования предела в терминах частичных пределов.

### **Экспонента**

Теорема о степени.  
Экспонента вещественного аргумента.  
Предел последовательности вида  $(1 + \frac{x_n}{n})^n$ .

### **Комплексные последовательности**

Координатный критерий сходимости последовательности.  
Полярный признак сходимости последовательности.  
Экспонента мнимого аргумента.  
Предел последовательности вида  $(1 + \frac{x_n + iy_n}{n})^n$ .

### **Топология вещественной прямой**

Элементарная окрестность числа.  
Элементарная окрестность положительной бесконечности.  
Элементарная окрестность отрицательной бесконечности.  
Проколота окрестность.  
Внутренняя точка множества.  
Граничная точка множества.  
Изолированная точка множества.  
Предельная точка множества.

## **Предел функции вещественной переменной**

Топологическое определение предела функции.

Предел функции слева.

Предел функции справа.

Односторонний предел функции.

Двусторонний предел функции.

Связь односторонних и двустороннего пределов.

## **Признаки существования предела функции**

Теорема о замене переменной в пределе.

Теорема о пределе промежуточной функции.

Теорема о пределах монотонной функции.

Частичный предел функции.

Критерий Гейне существования предела функции.

Колбание функции на множестве.

Критерий Коши существования предела функции.

## **Асимптотические сравнения**

$O$ -большое,  $o$ -малое.

Асимптотическая эквивалентность функций.

Асимптотическое разложение функции.

## **Непрерывность и разрывы**

Функция, непрерывная в точке.

Функция, непрерывная на множестве.

Непрерывная функция.

Разрыв функции.

Устранимый разрыв функции.

Скачок функции.

Существенный разрыв функции.

Разрыв I рода.

Разрыв II рода.

Теорема о разрывах монотонной функции.

## **Глобальные свойства непрерывных функций**

Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях.

Теорема Вейерштрасса об экстремумах непрерывной функции.

Признак Больцано строгой монотонности.

Теорема о непрерывности обратной функции.

Модуль непрерывности.

Равномерно непрерывная функция.

Условие Липшица.

Условие Гёльдера.

Теорема Кантора о непрерывной функции.

### **Производная**

Производная.

Дифференциал.

Дифференцируемая функция.

Правило дифференцирования произведения.

Правило дифференцирования композиции.

Правило дифференцирования обратной функции.

### **Глобальные свойства дифференцируемых функций**

Теорема Ролля о среднем.

Теорема Лагранжа о среднем.

Теорема о конечных приращениях.

Дифференциальный признак монотонности.

Дифференциальный признак выпуклости.

### **Старшие производные и классы функций**

$n$ -я производная функции.

Функция,  $n$  раз дифференцируемая в точке.

Непрерывно дифференцируемая функция.

$n$  раз непрерывно дифференцируемая функция.

Бесконечно дифференцируемая функция.

### **Формула Тейлора**

Многочлен Тейлора функции.

Асимптотическая формула Тейлора.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Оценка разницы между функцией и её многочленом Тейлора.

Ряд Тейлора.

Аналитическая функция.

### **Исследование функции**

Точка разрыва функции.

Стационарная (критическая) точка функции.

Точка излома функции.

Точка локального экстремума функции.

Точка перегиба функции.

Необходимый признак локального экстремума.

Достаточный признак локального экстремума.

Признак локального экстремума по старшим производным.

Признак точки перегиба по старшим производным.

## Полубилет 1: границы множеств

СФОРМУЛИРУЙТЕ аксиому непрерывности вещественных чисел. РАСКАЖИТЕ о границах числовых множеств, ограниченных и неограниченных множествах.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему о точной нижней границе.

ЗАДАЧА: Вычислите точную нижнюю и точную верхнюю границу множества всех чисел вида

$$\frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m+1}} + \dots + \frac{1}{3^n}, \quad \text{где } m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n.$$

## Полубилет 2: арифметика пределов

СФОРМУЛИРУЙТЕ топологическое определение предела функции. Перечислите основные свойства, которыми обладает этот предел.

Пусть  $f(x) \rightarrow a \neq 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . ДОКАЖИТЕ по определению предела, что функция  $\frac{1}{f(x)}$  определена в окрестности точки  $x_0$  и имеет конечный предел при  $x \rightarrow x_0$ . Чему равен этот предел?

ЗАДАЧА: Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1})$ .

## Полубилет 3: промежуточная последовательность

СФОРМУЛИРУЙТЕ топологическое определение предела последовательности. Перечислите основные свойства, которыми обладает этот предел.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему о пределе промежуточной последовательности. Как сформулировать аналогичную теорему для предела функции? Верна ли она для односторонних пределов? Для двусторонних?

ЗАДАЧА: Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ .

## Полубилет 4: монотонные последовательности

СФОРМУЛИРУЙТЕ определение предела последовательности. Что такое ограниченная и неограниченная последовательность? Всякая ли сходящаяся последовательность ограничена? Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему Вейерштрасса о монотонной последовательности.

Докажите, используя теорему Вейерштрасса, что последовательность сходится, и найдите её предел при  $n \rightarrow \infty$ :

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 15}{8}.$$

## Полубилет 5: частичные пределы

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятия частичного предела функции, её верхнего и нижнего пределов.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ критерий Гейне существования предела функции.

Задача: Пусть  $f, g$  — неотрицательные функции вещественной переменной, определённые в окрестности точки  $x_0$ . Докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x).$$

## Полубилет 6: верхний и нижний пределы

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятия частичного предела последовательности, верхнего и нижнего пределов. Всякая ли последовательность имеет частичный предел? Может ли последовательность иметь несколько частичных пределов?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему Больцано — Вейерштрасса о частичных пределах.

Задача: Пусть

$$x_n = \left(1 + \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n}\right)^n.$$

Вычислите все частичные пределы последовательности, её верхний и нижний пределы.



## Полубилет 7: фундаментальные последовательности

РАССКАЖИТЕ о фундаментальных последовательностях.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ критерий Коши существования предела последовательности.

ЗАДАЧА: Пусть

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-0,01)^k}{2k+1}.$$

Докажите, что эта последовательность сходится. Оцените разницу между членами последовательности и её пределом. Вычислите этот предел с точностью  $10^{-3}$ . Обоснуйте, что достигнута требуемая точность.

## Полубилет 8: последовательности вида $\sqrt[n]{x_n}$

РАССКАЖИТЕ определение предела последовательности и его основные свойства.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ чему равен предел последовательности  $\sqrt[n]{n}$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Чему равен предел последовательности  $\sqrt[n]{\ln n}$ ? Последовательности  $\sqrt[n]{n!}$ ?

ЗАДАЧА: Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{5n} + 5^{2n}}{2^n + 5^n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

## Полубилет 9: экспонента

РАССКАЖИТЕ определение предела последовательности и его основные свойства.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему о пределе последовательности вида  $(1 + \frac{x_n}{n})^n$ .

ЗАДАЧА: Вычислите

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n^2 + \sqrt[n]{n^{-e} + e^{-n}}}{n^2 + \ln \sqrt[n]{n^e + e^n}} \right)^{n^2}.$$

## Полубилет 10: разрывы функции

РАССКАЖИТЕ о том, что такое разрыв функции и какие виды разрывов вы знаете.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему о разрывах монотонной функции.

ЗАДАЧА: найдите область допустимых значений функции

$$f(x) = \frac{4x^2 - \pi^2}{\cos x}.$$

Непрерывна ли эта функция на своей области допустимых значений? Можно ли доопределить её в особых точках с сохранением непрерывности? Если нет, разрывы какого типа там возникнут?

## Полубилет 11: теорема о промежуточных значениях

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятие непрерывной функции. РАССКАЖИТЕ о свойствах непрерывных функций на промежутках.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.

ЗАДАЧА: Найдите множество значений, которые принимает функция

$$f(x) = \frac{1+x}{1+e^{1/x}}.$$

Является ли эта функция сюръекцией на  $\mathbb{R}$ ? Инъекцией? Монотонной?

## Полубилет 12: теорема Вейерштрасса об экстремумах

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятие непрерывной функции. РАССКАЖИТЕ о свойствах непрерывных функций на промежутках.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему Вейерштрасса об экстремумах непрерывной функции.

ЗАДАЧА: Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Докажите, что  $f$  имеет глобальный минимум.

### Полубилет 13: непрерывность обратной функции

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятие непрерывной функции. РАССКАЖИТЕ о свойствах непрерывных функций на промежутках.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему о непрерывности обратной функции. Всегда ли обратная к дифференцируемой функции дифференцируема?

ЗАДАЧА: Докажите, что функция  $x + e^{|x|} \operatorname{sgn} x$  обратима, и что обратная к ней непрерывна.

### Полубилет 14: равномерная непрерывность

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятие модуля непрерывности функции. Всякая ли непрерывная функция имеет модуль непрерывности? Как найти модуль непрерывности дифференцируемой функции? Как показать, что модуль непрерывности отсутствует?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему Кантора о непрерывной функции на отрезке.

Равномерно ли непрерывна функция  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  на интервале  $x \in (0, 1)$ ? Если да, то найдите её модуль непрерывности.

### Полубилет 15: производная композиции

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятие производной функции и РАССКАЖИТЕ о её основных свойствах.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ правило дифференцирования композиции функций.

ЗАДАЧА: В каких точках определена и чему равна производная функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^3}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Непрерывна ли  $f'$ ? Определена ли  $f''(0)$ ?

## Полубилет 16: производная обратной функции

СФОРМУЛИРУЙТЕ понятие обратной функции. При каких условиях обратная к непрерывной функции непрерывна? При каких условиях обратная к дифференцируемой функции дифференцируема?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему о производной обратной функции.

ЗАДАЧА: Докажите, что функция  $f(x) = x + x^5$  обратима на своей области определения, и что обратная к ней дифференцируема. Вычислите  $(f^{-1})''(2)$ .

## Полубилет 17: теоремы о среднем

ОПРЕДЕЛИТЕ понятие производной функции. РАССКАЖИТЕ о свойствах дифференцируемых функций на промежутках.

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ теорему Ролля и теорему Лагранжа о среднем.

ЗАДАЧА: функция  $f$  бесконечно гладкая и уравнение  $f(x) = 1$  имеет  $n$  корней на отрезке  $[0, 1]$ . Докажите, что найдётся точка  $x_0 \in (0, 1)$  такая, что  $f^{(n)}(x_0) = 0$ .

## Полубилет 18: выпуклые функции

РАССКАЖИТЕ о понятии выпуклой функции. Что известно о непрерывности выпуклой функции? Что известно о производной выпуклой функции?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ дифференциальный признак выпуклости функции.

ЗАДАЧА: Докажите, что при  $x, y > 0$  и  $x \neq y$  выполнено неравенство

$$x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}.$$

## Полубилет 19: разложение по Тейлору

РАССКАЖИТЕ о многочлене Тейлора и его свойствах. Как оценить разность между функцией и её многочленом Тейлора? Всегда ли последовательность многочленов Тейлора сходится? Всегда ли предел этой последовательности совпадает с исходной функцией?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ асимптотическую формулу Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано).

ЗАДАЧА: разложите по Тейлору до третьего порядка функцию

$$f(x) = \ln x - (x - 1)e^{\frac{1-x}{2}}$$

в точке  $x_0 = 1$ . Используя полученный результат, вычислите  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ .

## Полубилет 20: аппроксимация многочленом Тейлора

РАССКАЖИТЕ о многочлене Тейлора и его свойствах. Всегда ли последовательность многочленов Тейлора сходится? Всегда ли предел этой последовательности совпадает с исходной функцией?

СФОРМУЛИРУЙТЕ и ДОКАЖИТЕ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. СФОРМУЛИРУЙТЕ оценку разницы между функцией и её многочленом Тейлора.

ЗАДАЧА: Вычислите  $1,1^{1,2}$  с погрешностью менее  $10^{-4}$ . Обоснуйте, что требуемая точность достигнута.