Оглавление

§ 6. Определители 93
6.1. Определитель обратимости матрицы 93
6.2. Свойства определителей 94
6.3. Существование обратной матрицы 99
6.4. Определитель произведения матриц 101
6.5. Разложение определителя по строке 103
6.6. Применение к системам линейных уравнений 104
6.7. Применение к вычислению обратной матрицы 106
6.8. *Задачи на определители и метод Крамера* 108
6.9. *Задачи по обратным матрицам* 111
6.10. *Задачи для любознательных* 112
6.11. *Мозаика: Альбрехт Дюрер и магические квадраты* . . 114

§ 7. Поле комплексных чисел 115
7.1. Постановка задачи 115
7.2. Существование поля комплексных чисел 115
7.3. Единственность поля комплексных чисел 119
7.4. Геометрическая интерпретация поля комплексных чисел 121
7.5. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа 123
7.6. Извлечение квадратного корня 124
7.7. *Задачи по комплексным числам* 126
7.8. *Задачи для любознательных* 127
7.9. *Мозаика: гиперкомплексные числа* 128

§ 8. Общая линейная группа и ее важнейшие подгруппы 131
8.1. *Задачи по линейным группам* 134
8.2. *Мозаика: Устный счет* 135

§ 6. Определители

6.1. Определитель обратимости матрицы. Если K — кольцо, то матрицы степени n над K образуют кольцо, но не поле. Нетрудно заметить, что не всякая ненулевая матрица обладает обратной.

П р и м е р. Рассмотрим ненулевую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и покажем, что у неё не существует обратной. Действительно, найдем произведение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и очевидно, что ни для каких $x, y, z, t \in K$ последняя матрица не является единичной.

Как по произвольной матрице узнать, имеет ли она обратную?

Введём следующее

О п р е д е л е н и е. *Определитель обратимости матрицы*, или просто *определитель* матрицы $A \in M_n(P)$, есть следующий элемент из поля P:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \dots\, a_{n,n\sigma},$$

где S_n — множество подстановок степени n.

Если A — квадратная матрица размера $n \times n$, то $\det A$ называют *определителем порядка* n. Покажем, как, используя это определение, можно вычислять определители порядка 2 и 3.

П р и м е р 1. При $n = 2$ множество S_n содержит две подстановки:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Причем $\operatorname{sgn} \sigma_1 = +1$, $\operatorname{sgn} \sigma_2 = -1$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot a_{1,1\sigma_1}\, a_{2,2\sigma_1} + \operatorname{sgn} \sigma_2 \cdot a_{1,1\sigma_2}\, a_{2,2\sigma_2} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

П р и м е р 2. При $n = 3$ множество S_n содержит шесть подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (13)(3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23).$$

При этом, три первых имеют знак $+1$, а три последних — знак -1. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} -$$

$$-a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}.$$

6.2. Свойства определителей. Матрица $C \in M_n(P)$ называется *полураспавшейся,* если она имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}, \ A \in M_r(P), \ B \in M_{n-r}(P), \ \mathbf{0} \in M_{(n-r)\times r}(P), \ 1 < r < n.$$

1. *Определитель полураспавшейся матрицы вычисляется по формуле*

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим полураспавшуюся матрицу

$$C = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1,r+1} & \dots & b_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,r+1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

Найдем произведение

$$\det A \cdot \det B = \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,1\sigma}\,a_{2,2\sigma}\,\dots\,a_{r,r\sigma} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\tau \in S_{n-r}} \operatorname{sgn} \tau \cdot b_{r+1,(r+1)\tau}\,b_{r+2,(r+2)\tau}\,\dots\,b_{n,n\tau} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_r,\tau\in S_{n-r}} \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\tau \cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{r,r\sigma}\, b_{r+1,(r+1)\tau}\, b_{r+2,(r+2)\tau}\, \ldots\, b_{n,n\tau},$$

где σ — подстановка множества $\{1, 2, \ldots, r\}$, а τ — подстановка множества $\{r+1,\, r+2,\, \ldots, n\}$.

Обозначим

$$\widetilde{\sigma} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & \ldots & r\sigma & r+1 & \ldots & n \end{array}\right),$$

$$\widetilde{\tau} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \ldots & r & r+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & r & (r+1)\tau & \ldots & n\tau \end{array}\right)$$

— подстановки множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, т. е. лежат в группе S_n, и мы можем их перемножать. При этом

$$\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\widetilde{\sigma}, \quad \operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn}\widetilde{\tau}.$$

Следовательно,

$$\det A \cdot \det B = \sum_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}\in S_n} \operatorname{sgn}\widetilde{\sigma} \cdot \operatorname{sgn}\widetilde{\tau} \cdot a_{1,1\widetilde{\sigma}}\, a_{2,2\widetilde{\sigma}}\, \ldots\, a_{r,r\widetilde{\sigma}} \cdot$$

$$\cdot b_{r+1,(r+1)\widetilde{\tau}}\, b_{r+2,(r+2)\widetilde{\tau}}\, \ldots\, b_{n,n\widetilde{\tau}} =$$

$$= \sum_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}\in S_n} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}\cdot\widetilde{\tau})\cdot a_{1,1\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}}\, a_{2,2\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}}\, \ldots\, a_{r,r\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}}\, b_{r+1,(r+1)\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}}\, b_{r+2,(r+2)\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}}\, \ldots\, b_{n,n\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{1,1\pi}\, a_{2,2\pi}\, \ldots\, a_{r,r\pi}\, b_{r+1,(r+1)\pi}\, b_{r+2,(r+2)\pi}\, \ldots\, b_{n,n\pi} = \det C.$$

Здесь мы воспользовались таким фактом: если некоторая подстановка $\pi \in S_n$ не представима в виде $\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}$, то произведение $c_{1,1\pi}\, c_{2,2\pi}\, \ldots\, c_{n,n\pi}$ обращается в нуль, так как содержит элемент $c_{kl} = 0$. Докажем его. Пусть подстановка имеет вид

$$\pi = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ldots & i & \ldots & \ldots & k & \ldots \\ \ldots & j & \ldots & \ldots & l & \ldots \end{array}\right), \quad i, l \le r, \quad k, j > r,$$

тогда в соответствующем произведении содержится множитель $c_{kl} = 0$.

О п р е д е л е н и е. Матрица $A^t \in M_{s\times r}(P)$ называется *транспонированной к матрице* $A \in M_{r\times s}(P)$, если ее i–й столбец совпадает с i–й строкой матрицы A.

П р и м е р. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

транспонированной будет

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы транспонировать — это всё равно что повернуть матрицу относительно главной диагонали. Для квадратных матриц справедливо следующее свойство.

2. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы:*

$$\det A^t = \det A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим элементы матрицы A^t символами b_{ij}. Тогда $b_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i, j \le n$. Находим определитель матрицы A^t:

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_{1,1\sigma}\, b_{2,2\sigma}\, \ldots\, b_{n,n\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma,1}\, a_{2\sigma,2}\, \ldots\, a_{n\sigma,n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\sigma} = \det A.$$

3. *При перестановке двух строк матрицы ее определитель меняет знак.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица, полученная из A перестановкой i–й и j–й строк. Тогда

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{j,i\sigma}\, \ldots\, a_{i,j\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\sigma} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,1\tau\sigma}\, a_{2,2\tau\sigma}\, \ldots\, a_{i,i\tau\sigma}\, \ldots\, a_{j,j\tau\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\tau\sigma} =$$

$$= -\sum_{\tau\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\tau\sigma \cdot a_{1,1\tau\sigma}\, a_{2,2\tau\sigma}\, \ldots\, a_{i,i\tau\sigma}\, \ldots\, a_{j,j\tau\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\tau\sigma},$$

где $\tau = (i, j)$ — транспозиция и действие подстановки $\tau\sigma$ определяется следующим образом:

$$i\tau\sigma = j\sigma, \quad j\tau\sigma = i\sigma, \quad k\tau\sigma = k\sigma \text{ если } k \neq i, j.$$

При этом мы использовали такой факт: если

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n!}\}$$

— множество всех подстановок из S_n, то

$$\{\tau\sigma_1, \tau\sigma_2, \ldots, \tau\sigma_{n!}\}$$

— тоже множество всех подстановок из S_n.

С л е д с т в и е. *Если две строки матрицы одинаковы, то её определитель равен нулю.*

Действительно, если характеристика поля P отлична от 2, то, переставляя две одинаковые строки, получим $\det A = -\det A$.

У п р а ж н е н и е. Докажите следствие для полей характеристики 2.

4. *Если матрица в одной из строчек содержит сумму, то её определитель записывается как сумма определителей:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \ldots & b_n + c_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,n} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где сумма стоит в i–й строке.

Доказательство следует из равенства

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{i-1,(i-1)\sigma}\, (b_{i\sigma}+c_{i\sigma})\, a_{i+1,(i+1)\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\sigma} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{i-1,(i-1)\sigma}\, b_{i\sigma}\, a_{i+1,(i+1)\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\sigma} +$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{i-1,(i-1)\sigma}\, c_{i\sigma}\, a_{i+1,(i+1)\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\sigma}.$$

5. *Если все элементы некоторой строки матрицы умножить на $\alpha\in P$, то её определитель умножится на α.*

Действительно, пусть матрица B получается из матрицы A умножением i–й строки на α. Тогда

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, (\alpha a_{i,i\sigma})\, \ldots\, a_{n,n\sigma} =$$

$$= \alpha \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1,1\sigma}\, a_{2,2\sigma}\, \ldots\, a_{i,i\sigma}\, \ldots\, a_{n,n\sigma} = \alpha \det A.$$

Следствие. *Если две строки матрицы пропорциональны, то её определитель равен нулю.*

Для формулировки последнего свойства определителей введём

Определение. *Линейной комбинацией строк* матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{pmatrix}$$

с коэффициентами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ из P называется строка

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\, a_{i1}, \sum_{i=1}^n \beta_i\, a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^n \beta_i\, a_{in} \right).$$

Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если не все коэффициенты β_i равны нулю.

Пример. Линейной комбинацией строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами $(-1, 0, 2)$ является строка

$$-1(2, -1, 3, 4) + 0(0, 5, 1, 2) + 2(3, -1, 0, 1) = (4, -1, -3, -2).$$

6. *Определитель матрицы не изменится, если к какой–нибудь её строке прибавить линейную комбинацию остальных строк* (*кроме неё самой*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Если к её первой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк, то ввиду свойства 4 определитель полученной матрицы равен

$$\begin{vmatrix} A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_2 A_2 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \beta_n A_n \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в правой части все определители, кроме первого, равны нулю. Действительно, во втором определителе первая строка пропорциональна второй, в третьем — первая строка пропорциональна третьей и т. д. и, наконец, в последнем определителе первая строка пропорциональна последней. По следствию свойства 5 заключаем, что все они равны нулю. Таким образом, сумма, стоящая в правой части, равна определителю матрицы A. Если линейную комбинацию строк прибавить не к первой строке, а к другой, то доказательство аналогично.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что между строками матрицы A существует *нетривиальная линейная зависимость*, если некоторая нетривиальная линейная комбинация строк равна нулевой строке.

С л е д с т в и е. *Если между строками матрицы существует нетривиальная линейная зависимость, то её определитель равен* 0.

Мы сформулировали свойства определителей 3–6 для строк матрицы, но ввиду свойства 2 они справедливы и для столбцов.

6.3. Существование обратной матрицы. Теперь мы можем сформулировать критерий существования обратной матрицы.

Т е о р е м а 1. *Матрица обратима тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю.*

Эта теорема вытекает из следующего более общего утверждения.

Т е о р е м а 2. *Пусть P — поле, $A \in M_n(P)$, тогда равносильны следующие утверждения*:

1) *существует* $X \in M_n(P)$ *такая, что* $AX = XA = E$;

2) *существует* $Y \in M_n(P)$ *такая, что* $AY = E$;

3) *существует* $Z \in M_n(P)$ *такая, что* $ZA = E$;

4) *определитель* $\det A$ *не равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство равносильности будем проводить по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} & & (1) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ (2) & & \uparrow & & (3) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & (4) & & \end{array}$$

Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 1) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

2) $\Rightarrow$ 4) (импликация 3) $\Rightarrow$ 4) устанавливается аналогично). Представим матрицу A в виде произведения диагональной и трансвекций:

$$A = T_1\,T_2\,\ldots T_r\,D\,T_{r+1}\,\ldots\,T_s.$$

Учитывая, что умножить матрицу справа на трансвекцию это всё равно что к одной строке прибавить другую строку, умноженную на некоторый коэффициент, а умножить матрицу слева на трансвекцию это всё равно, что к одному столбцу прибавить другой столбец, умноженный на некоторый коэффициент, то по свойствам 6 и 2 получаем равенство

$$\det A = \det D.$$

Следовательно,

$$\det A = \det D = \alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n,$$

где α_i — коэффициенты диагональной матрицы $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$.

Предположим, что $AY = E$. Имеем

$$T_1\,T_2\,\ldots T_r\,D\,T_{r+1}\,\ldots\,T_s\,Y = E,$$

и надо доказать, что все $\alpha_i \neq 0$. Так как каждая трансвекция обратима, то

$$D\,T_{r+1}\,\ldots\,T_s\,Y = T_r^{-1}\,T_{r-1}^{-1}\,\ldots T_1^{-1},$$

откуда

$$D\,T_{r+1}\,\ldots\,T_s\,Y\,T_1\,T_2\,\ldots T_r = E.$$

Если бы некоторое $\alpha_i = 0$, то и вся строка матрицы D была бы нулевой, и при умножении её на любую матрицу эта строка была бы нулевой. Приходим к противоречию, так как справа стоит единичная матрица E, у которой все строки ненулевые. Следовательно, все $\alpha_i \neq 0$, а потому и $\det A = \alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n \neq 0$.

4) $\Rightarrow$ 1). Так как

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n = \det D = \det A \neq 0,$$

то все $\alpha_i \neq 0$, а потому обладают обратными. Тогда и для матрицы D существует обратная:

$$D^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1},\,\alpha_2^{-1},\,\ldots,\,\alpha_n^{-1}).$$

В качестве матрицы X возьмем матрицу

$$X = T_s^{-1}\,T_{s-1}^{-1}\,\ldots T_{r+1}^{-1}\,D^{-1}\,T_r^{-1}\,\ldots\,T_1^{-1}.$$

Равенство $AX = XA = E$ проверяется непосредственно. Теорема доказана.

6.4. Определитель произведения матриц. Справедлива

Т е о р е м а 3. *Определитель произведения равен произведению определителей*:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьём на несколько случаев.

Случай 1: хотя бы одна из матриц, A или B, необратима. Тогда по теореме 2 либо $\det A = 0$, либо $\det B = 0$. Покажем, что в этом случае матрица AB также необратима. Предположим противное, т. е. найдётся матрица X такая, что

$$(AB)X = X(AB) = E.$$

Тогда $A(BX) = E$ и по теореме 2 $\det A \neq 0$. С другой стороны, $(XA)B = E$ и опять по теореме 2 $\det B \neq 0$. Противоречие. Следовательно, обратной к матрице AB не существует, а потому $\det(AB) = 0$.

Случай 2: обе матрицы A и B обратимы. По теореме 2 $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Пусть

$$A = T_1\, T_2\, \ldots T_r\, D\, T_{r+1}\, \ldots\, T_s,$$

где $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n)$ — диагональная матрица, а T_i — трансвекция. Аналогично

$$B = U_1\, U_2\, \ldots U_p\, F\, U_{p+1}\, \ldots\, U_q,$$

где $F = \mathrm{diag}(\beta_1,\, \beta_2,\, \ldots,\, \beta_n)$ — диагональная матрица, а U_j — трансвекция.

По свойствам 6 и 2 имеем

$$\det A = \det D = \alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n,$$

$$\det B = \det F = \beta_1\, \beta_2\, \ldots\, \beta_n,$$

и произведение

$$DF = \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1,\, \alpha_2\beta_2,\, \ldots,\, \alpha_n\beta_n)$$

имеет определитель

$$\det(DF) = \alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n\, \beta_1\, \beta_2\, \ldots\, \beta_n = \det D \cdot \det F.$$

Рассмотрим произведение

$$AB = T_1\, T_2\, \ldots T_r\, D\, T_{r+1}\, \ldots\, T_s \cdot U_1\, U_2\, \ldots U_p\, F\, U_{p+1}\, \ldots\, U_q =$$

$$= T_1\, T_2\, \ldots T_r\, (D\, T_{r+1} D^{-1})\, (D\, T_{r+2} D^{-1}) \ldots (D\, T_s D^{-1}) \times$$
$$\times DF\, (F^{-1} U_1 F)\, \ldots (F^{-1} U_p F)\, U_{p+1}\, \ldots\, U_q.$$

Заметим, что каждая матрица $D\, T_i D^{-1}$ и $F^{-1}\, U_j F$ является трансвекцией.

Л е м м а. *Если* $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n)$ *— невырожденная диагональная матрица, то*

$$D^{-1}\, T_{ij}(\beta)\, D = T_{ij}\left(\beta \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right),$$

т. е. матрица, сопряженная с трансвекцией при помощи диагональной матрицы, опять является трансвекцией.

Из этой леммы следует, что матрицы DT_iD^{-1} и $F^{-1}U_jF$ являются трансвекциями, а потому

$$\det(AB) = \det(DF) = \det D \cdot \det F = \det A \cdot \det B.$$

Теорема доказана.

6.5. Разложение определителя по строке. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица из $M_n(P)$. Символом M_{ij} будем обозначать матрицу, полученную из A вычёркиванием i–й строки и j–го столбца. Очевидно, M_{ij} опять является квадратной матрицей. *Алгебраическим дополнением* в A к элементу a_{ij} называется элемент

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

При этом определитель $\det(M_{ij})$ называется *дополняющим минором.*

Т е о р е м а 4. *Для всякой строки матрицы $A \in M_n(P)$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, A_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о разбивается на несколько случаев.

Случай 1: $i = j$. В этом случае

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В каждом из определителей, стоящих в правой части, будем переставлять i–ю строку с предыдущей, пока не поставим её на место первой строки. Затем переставляем столбцы так, чтобы в каждом определителе на месте $(1,1)$ стоял ненулевой элемент. Получим

$$\det A = (-1)^{i-1} \left| \begin{array}{c|ccc} a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & M_{i1} & \\ * & & & \end{array} \right| + (-1)^{i} \left| \begin{array}{c|ccc} a_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & M_{i2} & \\ * & & & \end{array} \right| + \dots$$

$$+(-1)^{i+n-2} \left| \begin{array}{c|ccc} a_{in} & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & M_{in} & \\ * & & & \end{array} \right| =$$

$$= (-1)^{i-1}\, a_{i1} \det(M_{i1}) + (-1)^{i}\, a_{i2} \det(M_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n-2}\, a_{in} \det(M_{in}) =$$

$$= a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \dots + a_{in}\, A_{in},$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались первым свойством определителей (определитель полураспавшейся матрицы), а в последнем — определением алгебраического дополнения.

Случай 2: $i \neq j$. Рассмотрим матрицу B, которая получается из матрицы A, если вместо j–й строки поставить i–ю. Расписывая определитель матрицы B по j–й строке, ввиду предыдущего случая имеем

$$\det B = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn},$$

но, как мы знаем из свойств определителя, если в некоторой квадратной матрице две строки одинаковы, то её определитель равен нулю. Следовательно, $\det B = 0$ и

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Теорема доказана.

6.6. Применение к системам линейных уравнений. *Системой m линейных уравнений* от n неизвестных называется следующее выражение:

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \qquad a_{ij}, b_i \in P. \qquad (1)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы*, а столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

— *столбцом неизвестных* и *столбцом свободных членов* соответственно. Кратко систему (1) можно записать в таком виде:

$$A\,X = B.$$

Решением системы (1) называется упорядоченный набор

$$(x_1^0,\, x_2^0,\, \ldots,\, x_n^0) \in P^n,$$

удовлетворяющий всем уравнениям системы.

Изучая системы, мы хотим ответить на следующие вопросы: имеет ли система решения, а если имеет, то как их найти?

Если в системе $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, то мы можем найти определитель матрицы A. Если он отличен от нуля, то говорим, что *система невырожденная*. Для невырожденных систем справедлива

Т е о р е м а 5. *Всякая невырожденная система* (1) *имеет единственное решение, которое задаётся формулой*

$$\left(\frac{d_1}{d},\, \frac{d_2}{d},\, \ldots,\, \frac{d_n}{d}\right),$$

где $d = \det A$ *— определитель матрицы системы, а* d_j *— определитель матрицы, полученной из* A *заменой* j*–го столбца столбцом свободных членов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем существование решений. Так как по условию определитель матрицы A отличен от нуля, то она имеет обратную. Найдём $X = A^{-1}\,B$. Тогда

$$A\,X = A\,(A^{-1}\,B) = (A\,A^{-1})\,B = E\,B = B.$$

Следовательно, решение существует.

Докажем единственность решения. Пусть Y — решение, т. е. $AY = B$. Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}(AY) = A^{-1}B,$$

т. е. $Y = A^{-1}B$, а потому $X = Y$. Следовательно, решение единственно.

Покажем, что решение задается формулой

$$\left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \ldots, \frac{d_n}{d}\right).$$

По теореме 4 имеем

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}.$$

Подставим выражения $x_j = d_j/d$, $j = 1, 2, \ldots, n$ в i–е уравнение системы:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, d_j = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right) =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\, b_k A_{kj} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_k A_{kj} =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}\right) = \frac{1}{d}\, b_i\, d = b_i.$$

Здесь в предпоследнем равенстве мы использовали теорему 4. Теорема доказана.

Формулы, полученные в этой теореме, называются *формулами Крамера.*

6.7. Применение к вычислению обратной матрицы. Как мы знаем, матрица $A \in M_n(P)$ обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Справедлива

Т е о р е м а 6. *Если* $A = (a_{ij}) \in M_n(P)$ *и* $\det A \neq 0$, *то обратная матрица может быть найдена по формуле*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1r}}{d} & \frac{A_{2r}}{d} & \dots & \frac{A_{nr}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix},$$

где $d = \det A$, A_{ij} *— алгебраическое дополнение к элементу* a_{ij} *в матрице* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Y = (y_{ij}) = (\frac{A_{ji}}{d})$ — матрица из теоремы. Ввиду теоремы 2, достаточно доказать, что $AY = E$. Обозначим $AY = C$. Тогда

$$c_{pq} = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}\, y_{rq} = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}\, \frac{A_{qr}}{d} = \frac{1}{d} \sum_{r=1}^{n} a_{pr}\, A_{qr}.$$

По теореме 4 имеем

$$\frac{1}{d} \sum_{r=1}^{n} a_{pr}\, A_{qr} = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad p = q, \\ 0 & \text{если} \quad p \neq q. \end{cases}$$

Следовательно, $C = E$ — единичная матрица. Теорема доказана.

Матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1r} & A_{2r} & \dots & A_{nr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *присоединённой матрицей* к матрице A. Очевидно, что

$$AA^* = A^*A = \mathrm{diag}(d, d, \dots, d).$$

П р и м е р. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

с отличным от нуля определителем $\det A = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$ обратная находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\,\delta - \beta\,\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

6.8. *Задачи на определители и метод Крамера.*

1) Вычислить определители 3-го порядка:

$$(\text{П},\ 45)\ \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}. \quad (\text{П},\ 46)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

2) (П, 197) Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

3) (П, 198) Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

4) (П, 199) Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

5) (П, 204) Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6) Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

$$(\text{П},\ 74)\ \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$(\text{П},\ 75)\ \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$$

$$(\text{П},\ 76)\ \begin{cases} 4x - 3y + 2z + 4 = 0, \\ 6x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

7) Вычислить определители 4-го порядка:

$$(\text{П},\ 238)\ \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}. \quad (\text{П},\ 239)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

8) Вычислить определители 4-го порядка с числовыми элементами:

$$(\text{П},\ 257)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (\text{П},\ 258)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

9) Следующие системы уравнений решить по правилу Крамера:

$$(\text{П},\ 554)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$(\text{П},\ 555)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

10) (П, 290) Вычислить определитель порядка $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}.$$

11) Вычислить следующие определители порядка n методом ре-

куррентных соотношений:

$$(\text{П, }302)\ \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$(\text{П, }303)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

12) (П, 308) Вычислить определитель методом представления их в виде суммы определителей:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

13) (П, 313) Вычислить определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

14) (П, 365) *Рядом Фибоначчи* (Фибоначчи (Fibonacci) — итальянский математик XIII в.) называется числовой ряд, который начинается числами 1, 2 и в котором каждое следующее число равно сумме двух предыдущих, т. е. ряд 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Доказать, что n–й член ряда Фибоначчи равен определителю n–го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Какие последовательности можно получить, рассматривая определители

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c & a \end{vmatrix}$$

для различных a, b, c?

15) (П, 371*) Доказать равенство

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

6.9. *Задачи по обратным матрицам.*

1) Найти обратные матрицы для следующих матриц:

(П, 839) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. (П, 840) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. (П, 845) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

(П, 846) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. (П, 847) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

2) (П, 866) Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

6.10. *Задачи для любознательных.*

1) (ОК, 01–1) Пусть матрица A имеет размерность 3×2, а матрица B — размерность 2×3. Чему равен определитель матрицы AB?

2) (ОК, 04–2) Вычислить определитель а) при $z = i$; б) при $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{199} & z^{200} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{200} & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^{200} & z & \dots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}$$

3) (ОК, 05–2) A и B — квадратные матрицы, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Доказать, что определитель $\det(A-B)$ может принимать только значения 0, 1 или -1.

4) (ОК, 06–1) Доказать, что все 6 слагаемых в разложении определителя 3-го порядка не могут быть одновременно положительными.

5) (ОК, 07–5) В игре используются карточки с числами 1, 2, 3, …, 9. Двое по очереди выкладывают их в клетки таблицы 3×3. По окончании игры подсчитывается определитель. Если он больше 0, то выигрывает первый, а если меньше — второй. На диагонали таблицы оказались числа 1, 2, 4. Кто выиграет?

6) (ОК, 11–5) Пусть q_{ij} — число общих делителей чисел i и j, $1 \le i, j \le n$. Найти $\det(q_{ij})$.

7) (ОК, 15–3) Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\cdot\det(A-B).$$

8) (ОК, 18–1) Матрица A размера $n \times n$ является суммой матрицы B, все элементы которой равны 1, и диагональной матрицы C, на главной диагонали которой стоят числа $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вычислить определитель матрицы A в случае a) $n = 5$, b) произвольного n.

9) (ОК) Все вершины многогранника пронумерованы числами от 1 до N в некотором порядке. Пусть A — матрица размера $N \times N$, состоящая из 0 и 1, причем ее элементы $a_{km} = a_{mk} = 1$, если вершины с номерами k и m лежат на одном ребре, и $a_{km} = 0$ в противном случае (в частности $a_{kk} = 0$). Показать, что $\det(A)$ не зависит от порядка нумерации вершин. Вычислить $\det(A)$ для тетраэдра и октаэдра.

10) (СМО, Задача 335) Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого два элемента равны 4, а остальные 1 или -1.

11) (СМО, Задача 344) Найти сумму всех определителей порядка n, в каждом из которых в каждой строке и в каждом столбце один элемент равен 1, а остальные нулю. Сколько всего таких определителей?

12) (СМО, Задача 346) Пусть α, β, γ — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислить

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

13) (СМО, Задача 353) Дана невырожденная матрица A порядка $n \times n$. Можно ли для всякой матрицы X порядка $n \times n$ найти матрицу Y порядка $n \times n$ такую, чтобы выполнялось равенство $X = AYA^{-1} - A^{-1}YA$?

14) (СМО, Задача 366) Исследовать совместность и найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

14) (СМО, Задача 367) Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где a_{ij} — целые числа для всех i, j, имеет единственное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

6.11. *Мозаика: Альбрехт Дюрер и магические квадраты.*

Меланхолия. Великий художник и учёный эпохи Реформации в Германии Альбрехт Дюрер (1471–1528) специально для художников написал трактат: “Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки”. Также Дюрер занимался составлением магических квадратов. Он поместил свой магический квадрат:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

на знаменитой гравюре «Меланхолия». Это последняя из трёх так называемых «Мастерских гравюр» Альбрехта Дюрера: «Рыцарь, смерть и дьявол», «Святой Иероним в келье».

Рис. 3

Это магический квадрат размера 4×4. Числа 15 и 14, стоящие в нижней строке квадрата, указывают на год создания гравюры. Кроме того, сумма чисел угловых клеток квадрата и сумма чисел четырёх центральных клеток образуют магическую сумму 34. Эта сумма одно из чисел последовательности Фибоначчи. Другие числа: 1, 2, 3, 5, 8, 13 — также из этой последовательности и все они используются в классической системе пропорционирования в архитектуре. С другой стороны, оставшиеся числа: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16 не являются числами Фибоначчи.

Хорошему человеку и хорошей задачи не жалко.

Задача. Постройте магический квадрат размера 5×5 так, чтобы в нижней строке на 3–м и 4–м местах стояли числа 20 и 24. Обладает ли он ещё какими–то симметриями?

Задача. Постройте магический квадрат размера 4×4 так, чтобы нижняя строка имела вид: 1, 9, 6, 3. Обладает ли он ещё какими–то симметриями?

§ 7. Поле комплексных чисел

7.1. Постановка задачи. Предположим, что мы знаем, что такое поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Хотим построить поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Для этого построим поле P со следующими свойствами:

1) $\mathbb{R}$ является подполем поля P;

2) в P существует элемент ξ, для которого справедливо равенство

$$\xi^2 + 1 = 0;$$

3) подполе поля P, порожденное $\mathbb{R}$ и ξ, совпадает с P.

Следующая теорема гарантирует существование такого поля P.

Т е о р е м а 1. *Поле P со свойствами* 1)–3) *существует. Любые два поля со свойствами* 1)–3) *изоморфны.* Любое из таких полей называется *полем комплексных чисел.*

Доказательство этой теоремы разобьем на две части. Вначале докажем существование, а потом единственность.

7.2. Существование поля комплексных чисел. Рассмотрим следующее подмножество матриц:

$$C' = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{array} \right) \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R}).$$

Покажем, что это множество с операциями сложения и умножения матриц является алгебраической системой. Для этого надо убедиться, что операции сложения и умножения являются алгебраическими.

Возьмем две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$$

из C'. Находя их сумму и произведение, получим

$$A+B = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ -(\beta+\delta) & \alpha+\gamma \end{pmatrix}, \quad A\cdot B = \begin{pmatrix} \alpha\gamma-\beta\delta & \alpha\delta+\beta\gamma \\ -(\beta\gamma+\alpha\delta) & -\beta\delta+\alpha\gamma \end{pmatrix}.$$

Следовательно, операции действительно являются алгебраическими, и мы имеем алгебраическую систему

$$\langle\, C'; +, \cdot \rangle.$$

Покажем, что эта алгебраическая система является полем. Для этого надо проверить все аксиомы поля. Аксиомы С1, С2, У1, СУ1, СУ2 выполняются для всех квадратных матриц. Чтобы проверить аксиому С3, заметим, что нулевая матрица принадлежит множеству C'. Чтобы проверить С4, заметим, что если некоторая матрица лежит в C', то и противоположная лежит в C'.

Для проверки У2 находим

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} \alpha\gamma-\beta\delta & \alpha\delta+\beta\gamma \\ -\beta\gamma-\alpha\delta & -\beta\delta+\alpha\gamma \end{pmatrix}, \quad B\cdot A = \begin{pmatrix} \gamma\alpha-\delta\beta & \gamma\beta+\delta\alpha \\ -\gamma\beta-\delta\alpha & -\delta\beta+\gamma\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A \cdot B = B \cdot A$.

У3. Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

очевидно лежит в C'.

Покажем наконец, что для всякой ненулевой матрицы $A \in C'$ найдётся обратная, лежащая в C'. Так как A — ненулевая, то либо $\alpha \neq 0$, либо $\beta \neq 0$, а потому $\det A = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует. Используя теорему о вычислении обратной матрицы, находим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix},$$

т. е. A^{-1} лежит в C'. Следовательно, C' является полем.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow C'$, определенное формулой

$$\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Легко заметить, что это отображение однозначно и унивалентно. Покажем, что оно сохраняет операции. Для этого надо проверить, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta).$$

Эти равенства следуют из правил сложения и умножения диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \beta & 0 \\ 0 & \alpha \cdot \beta \end{pmatrix}.$$

Отметим, что отображение φ не является отображением *на*, а является вложением.

Обозначим символом R' следующее подмножество диагональных матриц:

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subseteq C'.$$

Фактически мы доказали, что $\varphi(\mathbb{R}) = R'$, т. е. поле $\mathbb{R}$ изоморфно полю R'.

Введём множество

$$C = (C' \setminus R') \cup \mathbb{R}.$$

Перенесём операции из множества матриц C' на множество C.

П р и м е р. Рассмотрим сумму следующих матриц из C':

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В результате получим матрицу из C', но она не входит в C.

Определим на C операции $+$ и $\cdot$ следующим образом. Если z_1 и z_2 — два элемента из C, то положим

$$z_1+z_2=\begin{cases} z_1+z_2 & \text{если} \quad z_1\notin\mathbb{R}, z_2\notin\mathbb{R}, z_1+z_2\notin R', \\ \alpha & \text{если} \quad z_1\notin\mathbb{R}, z_2\notin\mathbb{R}, z_1+z_2=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\in R', \\ z_1+\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} & \text{если} \quad z_1\notin\mathbb{R}, z_2=\beta\in\mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}+z_2 & \text{если} \quad z_1=\alpha\in\mathbb{R}, z_2\notin\mathbb{R}, \\ \alpha+\beta & \text{если} \quad z_1=\alpha\in\mathbb{R}, z_2=\beta\in\mathbb{R} \end{cases}$$

— их сумма;

$$z_1\cdot z_2=\begin{cases} z_1\cdot z_2 & \text{если} \quad z_1\notin\mathbb{R}, z_2\notin\mathbb{R}, z_1\cdot z_2\notin R', \\ \alpha & \text{если} \quad z_1\notin\mathbb{R}, z_2\notin\mathbb{R}, z_1\cdot z_2=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\in R', \\ z_1\cdot\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} & \text{если} \quad z_1\notin\mathbb{R}, z_2=\beta\in\mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\cdot z_2 & \text{если} \quad z_1=\alpha\in\mathbb{R}, z_2\notin\mathbb{R}, \\ \alpha\cdot\beta & \text{если} \quad z_1=\alpha\in\mathbb{R}, z_2=\beta\in\mathbb{R} \end{cases}$$

— их произведение.

По построению имеем изоморфизм:

$$\langle\, C;\, +,\, \cdot\,\rangle \simeq \langle\, C';\, +,\, \cdot\,\rangle.$$

Покажем, что C — то поле, которое мы хотели построить. Для этого надо проверить, что выполняются условия 1)–3):

1) по построению поле $\mathbb{R}$ содержится в C;

2) покажем, что в качестве ξ можно взять матрицу

$$i=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\in C.$$

Действительно,

$$i^2=i\cdot i=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица не лежит в C, но в C лежит число -1. Следовательно,

$$i^2 = -1, \quad \text{т. е.} \quad i^2 + 1 = 0;$$

3) покажем, что подполе поля C, порождённое $\mathbb{R}$ и $\imath$ совпадает с C. Для этого заметим, что

$$C = \{\alpha + i\,\beta \,|\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Действительно, рассмотрим произведение

$$i\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

и сумму

$$\alpha + i\beta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Видим, что полученная матрица лежит в C, но из таких матриц и состоит множество C.

Пусть теперь L — подполе поля C, порожденное $\mathbb{R}$ и i. В этом поле лежат вещественные числа, лежит i, а так как поле замкнуто относительно операций сложения и умножения, то и всякий элемент $\alpha + i\beta$ лежит в L, т. е. $C \subseteq L$, по условию $L \subseteq C$. Следовательно, $L = C$, и существование поля со свойствами 1)–3) доказано.

7.3. Единственность поля комплексных чисел. Надо доказать, что любые два поля со свойствами 1)–3) изоморфны. Вначале поймём, как устроено поле P. Докажем, что

$$P = \{\alpha + \xi\,\beta \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим правую часть этого равенства через

$$M = \{\alpha + \xi\,\beta \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Надо доказать два включения:

$$P \supseteq M, \quad P \subseteq M.$$

Первое включение следует из того, что P содержит $\mathbb{R}$ и ξ.

Чтобы доказать второе включение, покажем, что M — подполе в P. Для этого надо доказать, что M замкнуто относительно сложения, умножения, взятия противоположного и обратного:

а) проверим, что M замкнуто относительно сложения, имеем

$$(\alpha + \xi\,\beta) + (\alpha' + \xi\,\beta') = (\alpha + \alpha') + \xi\,(\beta + \beta') \in M;$$

б) проверим, что M замкнуто относительно умножения, имеем

$$(\alpha + \xi\,\beta) \cdot (\alpha' + \xi\,\beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + \xi\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta) \in M;$$

в) легко заметить, что противоположным к элементу $\alpha + \xi\,\beta$ является элемент $-(\alpha + \xi\,\beta) = (-\alpha) + \xi\,(-\beta) \in M$;

г) рассмотрим $\alpha + \xi\,\beta \neq 0$, тогда

$$(\alpha + \xi\,\beta)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \xi\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \in M.$$

Следовательно, M является подполем поля P.

Покажем, что M содержит все действительные числа и элемент ξ. Первое следует из равенства $\alpha = \alpha + \xi \cdot 0 \in M$, а второе — из равенства $\xi = 0 + \xi \cdot 1 \in M$. Но тогда по свойству 3) определения поля P имеем включение $P \subseteq M$.

Докажем, что любое поле P со свойствами 1)–3) изоморфно полю C'. Это следует из того, что если два поля изоморфны некоторому третьему полю, то они изоморфны между собой. Отсюда и последует нужное утверждение.

Т е о р е м а 2. *Отображение $\omega : C' \longrightarrow P$, действующее по правилу*

$$\omega\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right) = \alpha + \xi\,\beta,$$

является изоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению изоморфизма мы должны проверить следующие условия для ω:

1) однозначность;
2) унивалентность;
3) отображение *на*;
4) для любых $z_1, z_2 \in C'$ справедливо равенство

$$\omega(z_1 + z_2) = \omega(z_1) + \omega(z_2);$$

5) для любых $z_1, z_2 \in C'$ справедливо равенство

$$\omega(z_1 \cdot z_2) = \omega(z_1) \cdot \omega(z_2).$$

Условие 1) справедливо в силу определения.

2) Пусть

$$\omega\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right) = \alpha + \xi\,\beta, \quad \omega\left(\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' \end{pmatrix}\right) = \alpha' + \xi\,\beta',$$

и предположим, что $\alpha + \xi\,\beta = \alpha' + \xi\,\beta'$. Тогда $\alpha - \alpha' = \xi\,(\beta - \beta')$. Если $\beta - \beta' \neq 0$, то $\xi = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} \in \mathbb{R}$, но в поле $\mathbb{R}$ нет элемента, удовлетворяющего равенству $\xi^2 + 1 = 0$. Противоречие. Следовательно, $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha'$.

3) Фактически уже доказано. Следует из того, что

$$P = \{\alpha + \xi\,\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

4) Левая часть равенства имеет вид

$$\omega\left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' \end{pmatrix}\right] = \omega\left(\begin{pmatrix} \alpha + \alpha' & \beta + \beta' \\ -(\beta + \beta') & \alpha + \alpha' \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\alpha + \alpha') + \xi\,(\beta + \beta'),$$

правая часть имеет вид

$$(\alpha + \xi\,\beta) + (\alpha' + \xi\,\beta') = (\alpha + \alpha') + \xi\,(\beta + \beta').$$

Эти части равны, а потому равенство справедливо. Свойство 5) устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Множество комплексных чисел будем обозначать символом

$$\mathbb{C} = \{a + i\,b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

7.4. Геометрическая интерпретация поля комплексных чисел. Как мы установили выше, всякое комплексное число $z \in \mathbb{C}$ единственным образом представимо в виде $z = a + i\,b$. При этом a называется *действительной частью числа* z и обозначается $\operatorname{Re} z$; b называется *мнимой частью числа* z и обозначается $\operatorname{Im} z$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем числа* z и обозначается $|z|$. *Комплексно–сопряженным* к числу $z = a + i\,b$ называется число $\overline{z} = a - i\,b$. Очевидно, если $z \in \mathbb{R}$, то $\overline{z} = z$. Легко убедиться, что справедливы формулы

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

З а м е ч а н и е. Заметим, что если обе части второго равенства возвести в квадрат и положить $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, то получим равенство

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2,$$

которое показывает, что произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов есть сумма двух квадратов. Можно ли получить аналогичную формулу для 3–х квадратов? для 4–х квадратов? Чтобы узнать ответы на эти вопросы посмотрите раздел Мозаика в конце настоящего параграфа.

Также очевидно следующее равенство $z\overline{z} = |z|^2$.

У п р а ж н е н и е. Покажите, что отображение, переводящее всякое комплексное число в комплексно–сопряженное, является автоморфизмом поля $\mathbb{C}$.

Сопоставим комплексному числу числу $z = a + i\,b$ точку на плоскости с координатами (a, b).

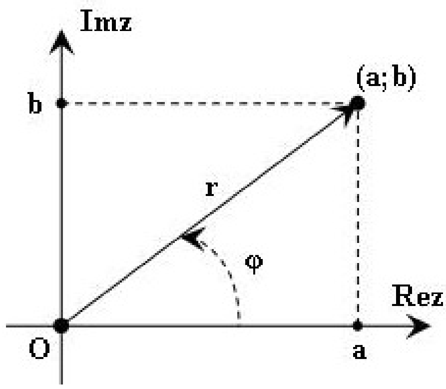

Рис. 2

С другой стороны, положение точки z на плоскости определяется заданием её полярных координат: расстояния $r = |z|$ от начала координат до z и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на z (см. рис. 2). Угол φ называется *аргументом числа* z и обозначается символом $\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. По определению, $\arg z$ может принимать любые положительные и отрицательные значения, но при заданном r, углы, отличающиеся на целое кратное 2π, соответствуют одному и тому же числу. Аргумент не определен для числа 0 с модулем

$|0| = 0$. Таким образом, мы приходим к *тригонометрической форме комплексного числа*

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi), \quad r \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Заметим, что

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, \quad \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

У п р а ж н е н и е. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2$.

У п р а ж н е н и е. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

7.5. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ устанавливается формула

$$(r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi),$$

которая называется *формулой Муавра.*

С другой стороны, используя бином Ньютона, легко проверить равенство

$$(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = \left(\cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \ldots\right) +$$
$$+ i\,\left(C_n^1\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi + \ldots\right).$$

Формулу для извлечения корня n–й степени из комплексного числа даёт

Т е о р е м а 3. *Уравнение*

$$x^n = z \quad \text{где } z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{1}$$

имеет n корней

$$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

которые расположены в вершинах правильного n–угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нуле. В частности, решения уравнения $x^n = 1$ называются корнями из единицы степени n и задаются равенствами

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать решения уравнения (1) в виде $x = \rho(\cos\psi + i\,\sin\psi)$. Подставив в уравнение и, используя формулу Муавра, получим $x^n = \rho^n(\cos n\psi + i\,\sin n\psi)$. Отсюда,

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ \cos n\psi = \cos\varphi, \\ \sin n\psi = \sin\varphi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ n\psi = \varphi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt[n]{r}$ понимается как арифметический корень, т. е. принимает единственное неотрицательное значение. Легко проверить, что полагая

$$\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

получим n различных корней

$$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\psi_k + i\,\sin\psi_k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Утверждение о том, что корни расположены в вершинах правильного n–угольника легко следует из геометрической интерпретации комплексных чисел.

Теорема доказана.

У п р а ж н е н и е. Докажите, что корни n–й степени из единицы, относительно операции умножения, образуют группу, которая изоморфна циклической группе порядка n.

7.6. Извлечение квадратного корня. Пусть мы хотим найти $\sqrt{a+bi}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Понятно, что главный интерес представляет случай $b \neq 0$. Можно показать (сделайте это!), что решая уравнение

$$x + yi = \sqrt{a+bi},$$

получим формулу

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\mathrm{sign}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

где $\mathrm{sign}(b)$ — знак числа b. Вывод этой формулы можно найти во 2-й главе, § 3 учебника: Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие. 5-е изд., стер. СПб.: Издательство Лань, 2007.

Используя указанную формулу, легко найти:

$$1)\ \sqrt{i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+0}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{1+0}-0}{2}}\right)=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

$$2)\ \sqrt{3-4i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right)=\pm(2-i).$$

Школьник Александр Ткачёв предложил следующий метод нахождения $\sqrt{a+bi}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Он заметил, что в предыдущем примере можно воспользоваться равенством:

$$\sqrt{3-4i}=\sqrt{(2-i)^2}=\pm(2-i).$$

Разумеется, в общем случае не так легко записать подкоренное выражение в виде квадрата. Александр предложил ввести числовой множитель k, для которого будет справедливо равенство

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}i=\left(\frac{b}{2k}+i\right)^2,$$

которое приводит к квадратному уравнению относительно k:

$$\frac{b^2}{4k^2}-\frac{a}{k}-1=0.$$

Решая это уравнение, найдём два корня:

$$k_1=\frac{-a-\sqrt{a^2+b^2}}{2},\quad k_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Заметим, что второй корень положительный, а потому его и будем брать в качестве искомого множителя

$$k=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Таким, образом, имеем

$$\sqrt{a+bi}=\pm\sqrt{k}\left(\frac{b}{2k}+i\right). \tag{7.1}$$

В качестве примера найдем $\sqrt{2-3i}$. Имеем

$$k = \frac{-2+\sqrt{2^2+3^2}}{2} = \frac{-2+\sqrt{13}}{2}.$$

Применяя формулу (7.1), получим

$$\sqrt{2-3i} = \pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{2}}\left(\frac{-3}{-2+\sqrt{13}}+i\right).$$

7.7. *Задачи по комплексным числам.*

1) (Ф.С. 101). Вычислить $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$.

2) (Ф.С. 107). Выполнить указанные действия:

$$a)\ \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha},\quad b)\ \frac{a+bi}{a-bi},\quad c)\ \frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2},\quad d)\ \frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}.$$

3) (Ф.С. 108). Решить системы уравнений:

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i,\quad (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i;$

b) $(2+i)x+(2-i)y=6,\quad (3+2i)x+(3-2i)y=8;$

c) $x+yi-2z=10,\quad x-y+2iz=20,\quad ix+3iy-(1+i)z=30.$

4) (Ф.С. 109). Вычислить:

$$a)\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2;\quad b)\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

5) (Ф.С. 112). Вычислить:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$; e) $\sqrt{-11+60i}$; f) $\sqrt{-8-6i}$;

g) $\sqrt{2-3i}$; h) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; i) $\sqrt[4]{-1}$; j) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

6) (Ф.С. 118). Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$1,\quad -1,\quad i,\quad -i,\quad -1+i,\quad 2-3i.$$

7) (Ф.С. 119). Представить в тригонометрической форме следующие числа:

a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$; f) $-1+i$; g) $-1-i$; h) 1 - i; i) $-1-i\sqrt{3}$; j) $\sqrt{3}-i$.

8) (Ф.С. 137). Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

$$\text{a) } (1+i)^{25};\quad \text{b) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20};\quad \text{c) } \left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24};$$

$$\text{d) } \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

9) (Ф.С. 141*) Вычислить $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.
10) (Ф.С. 143). Извлечь корни:

$$\text{a) } \sqrt[3]{i};\quad \text{b) } \sqrt[3]{2-2i};\quad \text{c) } \sqrt[4]{-4};\quad \text{d) } \sqrt[6]{1};\quad \text{e) } \sqrt[6]{-27}.$$

11) (Ф.С. 159). Вычислить сумму

$$1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\ldots+a^k\cos k\varphi.$$

12) (Ф.С. 160). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

13) (Ф.С. 163). Найти суммы:

$$\text{a) } \cos x+C_n^1\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x;$$

$$\text{b) } \sin x+C_n^1\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin(n+1)x.$$

7.8. *Задачи для любознательных.*

1) (ОК, 10–1). Комплексные числа a, b, c таковы, что $|a| = |b| = |c| = r$. Найти модуль числа $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$.
2) (ОК, 18–10). Даны $n \geq 1$ комплексных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Известно, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1}.$$

Верно ли, что $x_i \in \{0, 1\}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$?
3) (Ф.С. 182*). Найти сумму всех корней n–й степени из 1.

4) (Ф.С. 183*). Вычислить

$$1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1},$$

где ε — корень n–й степени из 1.

4) (Ф.С. 187*). Составить простейшее алгебраическое уравнение, корнем которого является длина стороны правильного 14-угольника, вписанного в круг радиуса 1.

5) (СМО, Задача 545). Пусть p — простое число, G — группа всех комплексных корней из единицы степени p^n, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, H — конечная группа такая, что существует гомоморфизм группы G на группу H. Доказать, что $H = \{e\}$.

7.9. *Мозаика: гиперкомплексные числа.*

Материалы из этого раздела можно найти в книге: И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, *Гиперкомплексные числа*, М.: Наука, 1973.

Как мы видели, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, т. е.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Если $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, то это свойство запишется в виде

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Иными словами, произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов есть снова сумма двух квадратов. Возникает естественный вопрос: существуют ли подобные тождества с большим, чем 2, числом квадратов?

Л. Эйлер указал пример тождества для 4 квадратов, позже было найдено тождество для 8 квадратов. Можно предположить, что каждое тождество для n квадратов связано с формулой (2), в которой z_1 и z_2 обозначают уже не комплексные числа, а так называемые гиперкомплексные числа, т. е. выражения вида

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot i_1 + a_2 \cdot i_2 + \ldots + a_n \cdot i_n, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — мнимые единицы, т. е. элементы, удовлетворяющие соотношениям

$$i_1^2 = i_2^2 = \ldots = i_n^2 = -1.$$

Операция сложений для чисел такого вида очевидна, а при определении операции умножения у нас есть масса вариантов. Для каждой пары мнимых единиц i_k и i_l мы можем положить

$$i_k \cdot i_l = \alpha_{kl}^0 \cdot 1 + \alpha_{kl}^1 \cdot i_1 + \alpha_{kl}^2 \cdot i_2 + \ldots + \alpha_{kl}^n \cdot i_n, \quad \alpha_{kl}^j \in \mathbb{R}.$$

Получим операцию умножения на гиперкомплексных числах. Если мы хотим добиться, чтобы построенное умножение обладало хорошими свойствами, например, было коммутативным, ассоциативным, каждый ненулевой элемент обладал обратным, надо специальным образом подобрать коэффициенты α_{kl}^j, что сделать совсем непросто.

Одним из первых обобщений комплексных чисел являются *кватернионы* (“четверные числа”), которые представляют из себя выражения вида

$$a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

где мнимые единицы удовлетворяют соотношениям

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Отметим, что из этих соотношений получаются правила умножения мнимых единиц:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

При этом произведение кватернионов некоммутативно, что видно из равенств

$$ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik.$$

С другой стороны, можно убедиться, что кватернионы удовлетворяют всем аксиомам поля, за исключением коммутативности умножения. Отметим, что такие алгебраические системы называются *телами*. Поэтому множество кватернионов с операциями сложения и умножения является телом, которое называется *телом кватернионов*.

Если

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

— некоторый кватернион, то сопряженным к нему называется кватернион

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

Произведение кватерниона на его сопряженный — есть действительное число:

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Если символом $|q|$ обозначить число $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, которое естественно назвать *модулем кватерниона*, то последнее равенство примет вид

$$q\bar{q} = |q|^2.$$

Видим, что это та же формула, что и для комплексных чисел.

Рассмотрим вопрос о делении кватернионов. Для комплексных чисел частным от деления z_1 на z_2 называется решение уравнения $z_2x = z_1$. Но так как произведение кватернионов не коммутативно, вместо одного уравнения мы имеем два:

$$q_2x = q_1$$

и

$$xq_2 = q_1.$$

Решение первого уравнения называется *левым частным* от деления q_1 на q_2 и обозначается x_l, а решение второго — *правым частным* и обозначается x_p. Легко заметить, что решения задаются формулами:

$$x_l = \frac{1}{|q_2|^2}\bar{q}_2q_1, \quad x_p = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\bar{q}_2.$$

Нетрудно проверить, что модуль произведения двух кватернионов равен произведению их модулей. Следовательно, справедливо равенство

$$|q_1q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2.$$

Если

$$q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, \quad q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k,$$

то предыдущее равенство даёт

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)^2+$$

$$+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)^2+(a_1c_2+c_1a_2+d_1b_2-b_1d_2)^2+(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)^2.$$

Следовательно, произведение суммы четырёх квадратов на сумму четырёх квадратов есть снова сумма четырёх квадратов.

Естественно сформулировать и более общий вопрос: для каких натуральных n найдется тождество вида

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) = Z_1^2+Z_2^2+\ldots+Z_n^2,$$

где Z_k — формы второй степени. При $n = 1$ соответствующее тождество очевидно:

$$x^2y^2 = (xy)^2.$$

При $n = 2$ и $n = 4$ мы нашли соответствующие тождества.

В 1998 г. немецкий математик А. Гурвиц доказал, что такие тождества существуют только при $n = 1, 2, 4, 8$ и не существую ни при каких других n.

Как мы знаем, система комплексных чисел, а также кватернионов являются ассоциативными. Простой пример неассоциативной системы дают числа вида

$$a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

с таблицей умножения

$$i^2 = 0, \quad j^2 = 0, \quad ji = 0, \quad ij = j.$$

В этом случае $(ii)j \neq i(ij)$.

Отметим, что проблема разыскания всех гиперкомплексных систем, в которых возможно деление, не решена до сих пор.

§ 8. Общая линейная группа и ее важнейшие подгруппы

Если K — кольцо с единицей 1, то символом K^* обозначается множество обратимых элементов кольца K, т. е.

$$K^* = \{a \in K \mid \text{найдётся элемент } x \in K \text{ такой, что } ax = xa = 1\}.$$

П р и м е р ы. 1) Для кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ множество $\mathbb{Z}^*$ состоит из двух элементов $\{-1, 1\}$ и, как легко заметить, относительно умножения является циклической группой порядка 2.

2) Если P — поле, то $P^* = P \setminus \{0\}$ — множество всех ненулевых элементов, которое, как мы знаем, является абелевой группой относительно операции умножения.

Пусть $\mathrm{M}_n(P)$ — множество всех матриц степени n над полем P. В этом параграфе мы найдем множество $(\mathrm{M}_n(P))^*$, покажем, что относительно умножения мы имеем группу и определим некоторые её подгруппы.

Определим следующие множества:

$$\mathrm{GL}_n(P) = \{A \in \mathrm{M}_n(P) \,|\, \det A \neq 0\},$$

$$\mathrm{SL}_n(P) = \{A \in \mathrm{M}_n(P) \mid \det A = 1\},$$
$$\mathrm{O}_n(P) = \left\{A \in \mathrm{M}_n(P) \mid A \cdot A^t = E\right\},$$
$$\mathrm{U}_n = \left\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A^t} = E\right\},$$

где A^t — матрица, транспонированная к A, а $\overline{A^t}$ — матрица, полученная из A транспонированием и взятием комплексно–сопряженного к каждому элементу, т. е. если $A = (a_{ij})$, то в матрице A^t на месте (i, j) стоит элемент a_{ji}, а в матрице $\overline{A^t}$ на месте (i, j) стоит элемент $\overline{a_{ji}}$. Множество U_n мы определяем только в случае, когда $P = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Заметим, что в определении $\mathrm{O}_n(P)$ мы требуем, чтобы выполнялось равенство $A \cdot A^t = E$, которое означает, что для A существует правая обратная. Но по теореме о существовании обратной матрицы отсюда следует, что A^t является и левой обратной, т. е. справедливо равенство $A^t \cdot A = E$. Аналогичным образом получаем, что всякая матрица A из U_n удовлетворяет равенству $\overline{A^t} \cdot A = E$.

Покажем, что все эти множества являются группами относительно умножения матриц. Для этого нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Л е м м а 1. *Для любых матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(P)$ справедливо равенство*
$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим
$$A \cdot B = C, \quad C^t = D, \quad A^t = F, \quad B^t = G, \quad G \cdot F = H.$$

Надо доказать, что $D = H$. Имеем
$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki},$$
$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}\, f_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki},$$
т. е. $d_{ij} = h_{ij}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_n(P)$ справедливо равенство*
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из равенства

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A\,A^{-1})^t = E^t = E.$$

Т е о р е м а. *Относительно матричного умножения* $\mathrm{GL}_n(P)$ — *группа, а* $\mathrm{SL}_n(P)$, $\mathrm{O}_n(P)$ — *ее подгруппы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим, что $\mathrm{GL}_n(P)$ — группа. Пусть A, B — две матрицы из $\mathrm{GL}_n(P)$. Тогда $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ и по свойству определителей

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0.$$

Следовательно, операция умножения является алгебраической на множестве $\mathrm{GL}_n(P)$. Проверим аксиомы группы. Ассоциативность умножения выполнена в $\mathrm{M}_n(P)$, а потому и в $\mathrm{GL}_n(P)$. Единичная матрица существует в $\mathrm{M}_n(P)$ и, очевидно, она лежит в $\mathrm{GL}_n(P)$. Так как для всякой матрицы $A \in \mathrm{GL}_n(P)$ её определитель отличен от нуля, то существует A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = E$. Тогда из свойства определителей $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, а потому $\det A^{-1} \neq 0$. Следовательно, A^{-1} лежит в $\mathrm{GL}_n(P)$. Таким образом, мы доказали, что $\mathrm{GL}_n(P)$ является группой.

Далее, множества $\mathrm{SL}_n(P)$, $\mathrm{O}_n(P)$ содержатся в $\mathrm{GL}_n(P)$. Чтобы доказать, что каждое из них является подгруппой, надо доказать замкнутость относительно умножения и взятия обратного.

Если A, B — две матрицы из $\mathrm{SL}_n(P)$, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1,$$

т. е. их произведение опять лежит в $\mathrm{SL}_n(P)$. Мы знаем, что A^{-1} существует, а из равенства $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ следует, что $\det A^{-1} = 1$. Таким образом, A^{-1} тоже лежит в $\mathrm{SL}_n(P)$, и мы установили, что $\mathrm{SL}_n(P)$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(P)$.

Рассмотрим множество $\mathrm{O}_n(P)$. Так как $A \cdot A^t = E$, то $\det A \neq 0$, а потому $\mathrm{O}_n(P)$ содержится в $\mathrm{GL}_n(P)$. Если A и B — две матрицы из $\mathrm{O}_n(P)$, то $A \cdot A^t = E$ и $B \cdot B^t = E$. Произведение $A \cdot B$ лежит в $\mathrm{O}_n(P)$, если

$$(AB) \cdot (AB)^t = E.$$

Обратная матрица A^{-1} лежит в $\mathrm{O}_n(P)$, если

$$(A^{-1}) \cdot (A^{-1})^t = E.$$

По лемме 1

$$(A\,B)\cdot(A\,B)^t=(A\,B)\cdot(B^t\,A^t)=A\cdot(B\,B^t)\,A^t=E.$$

Следовательно, множество $\mathrm{O}_n(P)$ замкнуто относительно умножения.

Для доказательства замкнутости относительно взятия обратного элемента, воспользуемся леммой 2. Таким образом, множество $\mathrm{O}_n(P)$ является подгруппой. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает справедливость равенства $(\mathrm{M}_n(P))^*=\mathrm{GL}_n(P)$.

Упражнение. Докажите, что U_n является подгруппой группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Определенные нами группы носят специальные названия. Группа $\mathrm{GL}_n(P)$ называется *общей линейной группой*, группа $\mathrm{SL}_n(P)$ — *специальной линейной группой*, группа $\mathrm{O}_n(P)$ — *ортогональной линейной группой* и U_n — *унитарной линейной группой.*

8.1. *Задачи по линейным группам.*

1) (П, 873) Целочисленная квадратная матрица называется *унимодулярной*, если её определитель равен ± 1. Доказать, что целочисленная матрица тогда и только тогда имеет целочисленную обратную матрицу, когда данная матрица унимодулярна.

2) (П, 891) Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ порядка n называется *ортогональной*, если $AA'=E$, где E — единичная матрица. Показать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) столбцы A образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\delta_i^j,$$

где δ_i^j — символ Кронекера, обозначающий 1 при $i=j$ и 0 при $i\neq j$;

б) строки А образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\delta_i^j.$$

3) (П, 892) Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ порядка n с вещественными или комплексными элементами называется *унитарной*, если

$AA^* = E$, где $A^* = \bar{A}'$ — матрица, полученная из A путем транспонирования и заменой всех элементов на числа комплексно сопряженные. Показать, что для унитарности квадратной матрицы A необходимо и достаточно любое из следующих условий:

а) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = \delta_i^j$,

б) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk} = \delta_i^j$

(δ_i^j — символ Кронекера).

4) Матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(P)$ называется *шахматной*, если $a_{ij} = 0$ при условии, что сумма $i + j$ нечетна. Например, при $n = 3$ шахматными будут матрицы следующего вида

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Образуют ли шахматные матрицы подкольцо кольца $M_n(P)$? Какие шахматные матрицы образуют группу относительно умножения?

8.2. *Мозаика: Устный счет.*

Художник Богданов–Бельский (1868–1945) написал картину: «Устный счет. В народной школе С. А. Рачинского.» На доске написан такой пример:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Сможете устно решить его?

Рис. 4

На картине изображен профессор естественных наук С. А. Рачинский (1833–1902), покинувший университетскую кафедру, чтобы сделаться рядовым учителем сельской школы. Он культивировал в своей школе устный счет, основанный на виртуозном использовании свойств чисел. Числа, участвующие в примере, обладают любопытной особенностью: $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$, что и является ключом к решению задачи.

Другое решение предложил Тимур Насыбуллов. Он заметил, что

$$11^2+13^2=(12-1)^2+(12+1)^2=2\cdot 12^2+2.$$

Аналогично,

$$10^2+14^2=(12-2)^2+(12+2)^2=2\cdot 12^2+8.$$

Следовательно,

$$10^2+11^2+12^2+13^2+14^2=5\cdot 12^2+10.$$

Последнее выражение можно посчитать устно.

Приведём некоторые задачи С. А. Рачинского, которые можно найти в книге: И. И. Баврин, Сборник задач и занимательных упражнений по математике, 5–9 классы, М.: Гуманитарный изд. центр ВЛАДОС, 2013.

З а д а ч а 1. Купец купил за 150 р. 120 аршин сукна. Сколько стоит аршин?

З а д а ч а 2. Куплено 18 дюжин стульев по 30 р. дюжина. За провоз заплачено 8 р. Затем каждый стул продан по 3 р. Сколько барыша?

З а д а ч а 3. У меня 108 р. 3-, 5- и 10–рублевыми бумажками поровну. Сколько бумажек каждой ценности?

З а д а ч а 3. В 4 корзинках 21, 22, 23 и 24 яблока, сколько нужно прибавить к каждой, чтобы во всех было 100 и в каждой поровну?

З а д а ч а 4. Путь от дворца до собора при Высочайших выходах устилается коврами. Если устлать его коврами в 8 аршин длины, пойдет двумя коврами больше, чем если устлать его коврами в 9 аршин. Сколько саженей от дворца до собора?

З а д а ч а 5. У меня вдвое больше денег, чем у брата. Если же он мне из своих денег отдаст рубль, у меня будет втрое больше денег, чем у него. Сколько денег у каждого из нас?

Помните, что это задачи — для устного счета.