

Конспект лекций по математическому анализу: 1 семестр

С. Г. Басалаев

24 ноября 2025 г.

Аннотация

Это конспект лекций, прочитанных для студентов 1 курса ММФ НГУ в 2023 г. Курс основан на учебных пособиях [1, 2, 3]. Не гарантирую, что данный конспект будет полным и актуальным, чаще всего я буду сюда записывать только определения и формулировки. Последний вариант конспекта доступен на веб-странице курса [4].

Содержание

1 Числа	3
1.1 Основные классы чисел	3
1.2 Аксиоматика вещественных чисел	4
1.3 Минимум и максимум	10
1.4 Границы числовых множеств	11
1.5 Принцип Архимеда и следствия	13
1.6 Модуль и знак	14
1.7 Расстояние	15
2 Последовательности вещественных чисел	17
2.1 Последовательности	17
2.2 Предел последовательности	18
2.3 Предел и арифметика	20
2.4 Предел и неравенства	21
2.5 Монотонные последовательности	22
2.6 Частичные пределы	25
2.7 Критерий Коши	28
2.8 Вещественная степень числа	30

2.9	Экспонента	33
2.10	Топологическое определение предела	35
3	Последовательности комплексных чисел	37
3.1	Комплексные числа	37
3.2	Полезные тригонометрические оценки	38
3.3	Предел последовательности комплексных чисел	38
3.4	Экспонента комплексного аргумента	40
4	Предел функции	42
4.1	Пределевые точки	42
4.2	Определение и свойства предела	42
4.3	Асимптотические сравнения	44
4.4	Признаки существования предела	45
5	Непрерывные функции	46
5.1	Классификация разрывов	46
5.2	Глобальные свойства непрерывных функций	46
5.3	Равномерная непрерывность	50
6	Производная	53
6.1	Линейные функции	53
6.2	Производная и дифференциал	54
6.3	Свойства дифференцируемых функций	56
6.4	Теоремы о среднем	59
6.5	Старшие производные	61
6.6	Формула Тейлора	61
7	Исследование функции	63
7.1	Исследование на монотонность и экстремумы	63
7.2	Выпуклость	64

1 Числа

1.1 Основные классы чисел

Для обозначения основных классов чисел используется ажурный шрифт, в котором некоторые штрихи удваиваются.

- Символом \mathbb{N} обозначается совокупность *натуральных чисел* — чисел, используемых при счёте:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Запись вида $n \in \mathbb{N}$ означает « n — натуральное число». Я начинаю считать с единицы, но если вы предпочитаете считать ноль натуральным числом, можете это делать. В тех случаях, когда утверждение работает и для нуля тоже, я буду использовать обозначение

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

- Символом \mathbb{Z} обозначается совокупность *целых чисел*, которые возникают из необходимости считать разности натуральных

$$\mathbb{Z} := \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

- Символом \mathbb{Q} обозначается совокупность *рациональных чисел*, которые возникают из необходимости считать частные

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Развитие геометрии в античности привело к открытию, что для задачи измерения длин отрезков понятия рациональных чисел недостаточно. Утверждение о том, что длина диагонали квадрата несоизмерима с его стороной, приписывают Гиппасу из Метапонта, хотя у нас нет письменных свидетельств, подтверждающих это.

1.1.1 Теорема (Гиппас, VI в. до н. э.). *Число $\sqrt{2}$ не рационально.*

Доказательство. Допустим, что $\sqrt{2}$ рационально. Тогда это число можно представить несократимой дробью $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Отсюда $m = \sqrt{2}n$ и $m^2 = 2n^2$. Следовательно, m чётно — $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Подставляя $m = 2k$ в исходное уравнение, получаем $4k^2 = 2n^2$, откуда $n^2 = 2k^2$ и n также чётно — $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, несократимая дробь сократима $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$. Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверно, и $\sqrt{2}$ не рационально. \square

- Расширение класса рациональных чисел, подходящее для измерения длин отрезков — класс *вещественных* или *действительных* чисел — обозначается символом \mathbb{R} .

Развитие алгебры в средние века привело к открытию, что для решения кубических уравнений понятия вещественного числа недостаточно.

- Символом \mathbb{C} обозначается класс *комплексных*¹ чисел

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}\},$$

где формальный символ i обладает свойством $i^2 = -1$.

1.2 Аксиоматика вещественных чисел

Существует несколько конструктивных моделей построения вещественных чисел, например

- арифметическая — как бесконечные десятичные дроби;
- геометрическая — как точки на прямой;
- теоретико-множественная — как сечения над рациональными.

Я крайне рекомендую ознакомиться хотя бы с одной из этих моделей (см. хотя бы [здесь](#)), однако, для нас важно не *как* числа устроены, а *что* с ними можно делать — свойства, не зависящие от конкретной модели. Поэтому мы не будем объяснять, что такое число. Мы опишем *аксиомы* — базовые свойства, их определяющие. Всё, что удовлетворяет этим свойствам (неважно, десятичные дроби это или точки на прямой), мы называем числом.

1.2.1 Неопределение. Множество \mathbb{R} называется *множеством вещественных (или действительных) чисел*, а его элементы, соответственно, *числами*, если на нём определены:

- | | |
|----------------------|--|
| • операция сложения | $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$ |
| • операция умножения | $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$ |
| • отношение порядка | $\leq : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{\text{истина, ложь}\};$ |

удовлетворяющие 16 аксиомам, которые мы перечислим и разберём в следующих подпунктах.

¹Ударение возможно как на первый так и на второй слог.

Аксиомы сложения

Первая группа аксиом описывает свойства операции сложения.

[+1] коммутативность сложения.

От перестановки слагаемых сумма не меняется.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x.$$

[+2] ассоциативность сложения.

От расстановки скобок сумма не меняется.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

[+3] существование нейтрального элемента по сложению.

Есть особое число *ноль*, сложение с которым не меняет число.

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x.$$

[+4] существование противоположного по сложению.

У каждого числа есть противоположное, сумма с которым равна нулю.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists -x \in \mathbb{R} \quad x + (-x) = 0.$$

В алгебре любую структуру, удовлетворяющую аксиомам [+1]–[+4] называют *коммутативной* (или *абелевой*) группой, т. е. $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ — коммутативная группа. Другие примеры коммутативных групп: целые числа, рациональные числа, векторы на плоскости, вычеты по модулю заданного числа.

1.2.2 Теорема (о единственности нуля). *Ноль единствен.*

Доказательство. Допустим, что существует два числа, удовлетворяющих аксиоме [+3]: 0 и \emptyset . Тогда по аксиоме коммутативности [+1]:

$$0 = 0 + \emptyset = \emptyset + 0 = \emptyset.$$

Таким образом, 0 — единственное число, нейтральное по сложению. \square

1.2.3 Задача. Докажите, что противоположное число $-x$ определяется единственным образом для каждого $x \in \mathbb{R}$.

1.2.4 Определение. Разностью чисел x и y назовём число

$$x - y := x + (-y).$$
²

Упражнения

1. $-(-x) = x$.
2. $(-x) + (-y) = -(x + y)$.
3. Пусть A — произвольное множество. Докажите, что операция симметрической разности $\Delta : \wp(A) \times \wp(A) \rightarrow \wp(A)$ удовлетворяет аксиомам сложения (иными словами $(\wp(A), \Delta)$ — коммутативная группа).

Аксиомы умножения

Следующая группа аксиом определяет свойства умножения и его связь со сложением.

коммутативность умножения.

От перестановки сомножителей произведение не меняется.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

ассоциативность умножения.

От расстановки скобок произведение не меняется.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

существование нейтрального элемента по умножению.

Есть особое число *один*, которое во-первых не совпадает с нулём, а во вторых умножение на которое не меняет число.

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \quad (1 \neq 0) \text{ и } (\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x).$$

существование обратного по умножению.

У каждого числа, кроме нуля, есть *обратное*, произведение с которым равно одному.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

²Здесь и далее символ $:$ означает *равно по определению*.

+ × *дистрибутивность умножения* (правило раскрытия скобок):

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Сравните аксиомы $[\times 1] - [\times 4]$ с аксиомами $[+1] - [+4]$. Заметьте, что если исключить из рассмотрения 0, то они одинаковы. Иными словами, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ — коммутативная группа. Это значит, что все факты, доказанные для сложения, верны и для умножения, например, единица и обратное число определяются единственным образом. Для этого в доказательствах утверждений 1.2.2 и 1.2.3 необходимо заменить $+$ на \cdot и 0 на 1. Как вы, должно быть, догадываетесь, аналогичные утверждения верны в любой коммутативной группе.

В алгебре структура, удовлетворяющая аксиомам сложения и умножения, называется *полем*. Таким образом, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ — поле. Другие примеры полей: рациональные числа, комплексные числа, вычеты по модулю простого числа.

1.2.5 Определение. Частным чисел x и $y \neq 0$ назовём число

$$\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}.$$

1.2.6 Теорема (о невозможности деления на ноль). У нуля нет обратного.

Доказательство. Допустим, что существует число $\frac{1}{0}$ такое, что $0 \cdot \frac{1}{0} = 1$. Тогда

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{0} \cdot 1 = \frac{1}{0}(1 + 0) = \frac{1}{0} \cdot 1 + \frac{1}{0} \cdot 0 = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} \cdot 0.$$

Какой аксиомой мы воспользовались в каждом из равенств? Обратите внимание на левую и правую части получившегося тождества. По теореме 1.2.2 о единственности нуля $\frac{1}{0} \cdot 0 = 0$. Но отсюда $1 = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0$, что противоречит аксиоме единицы. \square

Таким образом, в аксиоматике вещественных чисел (и вообще в любом поле) делить на ноль нельзя. Существуют алгебраические структуры, допускающие деление на ноль — так называемые «колёса». Но ничего не даётся бесплатно — все они нарушают какие-то из аксиом поля.

Упражнения

1. Обозначим $2 := 1 + 1$, $4 := ((1 + 1) + 1) + 1$. Докажите, что $2 \cdot 2 = 4$.
2. $-x = -1 \cdot x$.
3. $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

4. Если $x \cdot y = 0$, то $x = 0$ или $y = 0$.
5. Докажите, что множество \mathbb{Q} рациональных чисел — поле.
6. Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} = \{p + \sqrt{2}q : p, q \in \mathbb{Q}\}$. Докажите, что \mathbb{A} — поле.

Аксиомы порядка

Следующие 6 аксиом задают отношение порядка \leq «не превосходит», а также его связь со сложением и умножением.

≤ 1 рефлексивность порядка.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x.^3$$

≤ 2 транзитивность порядка.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ и } y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z.$$

≤ 3 антисимметричность порядка.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ и } y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

≤ 4 линейность порядка. Любые два числа сравнимы:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ или } y \leq x.$$

$\leq +$ связь порядка со сложением.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z.$$

$\leq \times$ связь порядка с умножением.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ и } 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z.$$

Всякое отношение, удовлетворяющее аксиомам ≤ 1 — ≤ 3 , называют (*частичным*) *порядком*. Например, отношение \subseteq задаёт порядок на множествах. Однако, не всякие два множества можно сравнить. Отношение, удовлетворяющее аксиомам ≤ 1 — ≤ 4 , называют *полным* или *линейным порядком*.

³ В этом месте мне часто задают вопрос: «зачем писать $x \leq x$, если $x = x$?» Дело в том, что в данный момент мы *определяем*, что такое отношение \leq . Определить отношение значит для каждой пары аргументов x, y объяснить, сопоставляет им отношение $x \leq y$ значение **истина** или **ложь**. Свойство рефлексивности говорит о том, что если $x = y$, то $x \leq y$ — истина.

1.2.7 Определение. Через отношение \leq определяются остальные три знакомых вам отношения:

- не меньше $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x.$
- меньше $x < y \Leftrightarrow$ не $(y \leq x).$
- больше $x > y \Leftrightarrow$ не $(x \leq y).$

Упражнения

1. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено ровно одно из отношений

$$x < y \text{ либо } x = y \text{ либо } x > y.$$

2. Если $x \leq y$ и $y < z$, то $x < z$.
3. Если $x < y$ и $y \leq z$, то $x < z$.
4. Если $x < y$, то для всякого $z \in \mathbb{R}$ выполнено $x + z < y + z$.
5. Если $x < y$, то для всякого $z > 0$ выполнено $x \cdot z < y \cdot z$.
6. $x \leq 0$ тогда и только тогда, когда $-x \geq 0$.
7. Для всякого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $x \cdot x \geq 0$.
8. $0 < 1$.
9. Если $x < y + \varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$, то $x \leq y$.

Аксиома непрерывности

1.2.8 Лемма (о плотности чисел). *Междуд любыми двумя числами найдётся третъе.*

$$a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad a < c < b.$$

Доказательство. Подходит $c = \frac{a+b}{2}$. Действительно,

$$2a = a + a < a + b < b + b = 2b.$$

Отсюда $a < \frac{a+b}{2} < b$. □

1.2.9 Следствие. *Всякий промежуток не пуст.*

Такое утверждение можно доказать во всякой алгебраической системе, для которой выполнены предыдущие 15 аксиом (например, в рациональных числах). Однако, всё меняется, если мы хотим рассматривать

не числа, а множества чисел. Рассмотрим, например, два множества на рациональной прямой:

$$A = \{p \in \mathbb{Q} : p > 0, p^2 < 2\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 > 2\}.$$

Не существует такого *рационального* числа, которое бы разделяло эти два множества. В самом деле, таким числом может быть только $\sqrt{2}$, а оно, как мы убедились, не рационально.



Рис. 1: Дырка в рациональных числах

Вещественные числа отличаются от всех прочих именно тем, что каждую такую дырку мы можем заполнить. Итак, 16-я аксиома, важнейшая для нашего курса, это

АН Аксиома непрерывности.

Если $A, B \subseteq \mathbb{R}$ — непустые множества такие, что для всех $a \in A, b \in B$ выполнено $a \leq b$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A, b \in B$ выполнено $a \leq c \leq b$.

Говоря простыми словами: если одно множество расположено левее другого на вещественной прямой, то найдётся разделяющее их число.

1.2.10 Теорема (принцип вложенных отрезков Коши — Кантора). Для всякой последовательности вложенных отрезков числовой прямой

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

найдётся хотя бы одно число $c \in \mathbb{R}$, принадлежащее всем этим отрезкам, т. е. $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить [аксиому непрерывности](#) к множествам $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. \square

1.3 Минимум и максимум

1.3.1 Определение. Число b называется *наибольшим элементом* или *максимумом* множества $E \subseteq \mathbb{R}$, и обозначается $b = \max E$, если

1. $b \in E$;
2. $\forall x \in E \ x \leq b$.

Число a называется *наименьшим элементом* или *минимумом* множества $E \subseteq \mathbb{R}$, и обозначается $a = \min E$, если

1. $a \in E$;
2. $\forall x \in E \ a \leq x$.

Например, $\max\{1, 2, 3\} = 3$, $\min[4, 5] = 4$. Не у всякого множества есть максимум или минимум.

1.3.2 Пример. У интервала $(0, 1)$ нет минимума. Действительно, если $x \in (0, 1)$, то $x > 0$. Но тогда $0 < \frac{x}{2} < x < 1$ и число $\frac{x}{2}$ также лежит в интервале $(0, 1)$. Докажите, что у интервала $(0, 1)$ нет максимума.

Упражнения

1. Докажите методом математической индукции, что всякое непустое конечное множество вещественных чисел имеет минимум и максимум.
2. Всякий непустой набор натуральных чисел имеет наименьший элемент.

$$\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists \min E.$$

1.4 Границы числовых множеств

Нам потребуется способ оценивать величины элементов числового множества даже в том случае, когда нет возможности определить максимум или минимум.

1.4.1 Определение. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью*, *верхней границей* или *максорантой* множества $E \subseteq \mathbb{R}$, если для всех $x \in E$ выполнено $x \leq b$.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *нижней гранью*, *нижней границей* или *минорантой* множества $E \subseteq \mathbb{R}$, если для всех $x \in E$ выполнено $a \leq x$.

1.4.2 Определение. Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если у него существует хотя бы одна верхняя грань. Иначе говоря,

$$E \text{ ограничено сверху} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leq b. \quad (1.4.1)$$

В противном случае говорят, что множество неограничено сверху.

1.4.3 Задача. Сформулируйте понятия *ограниченного снизу* и *неограниченного снизу* числового множества.

1.4.4 Определение. Числовое множество *ограничено*, если оно ограничено и снизу и сверху.

Ясно, что если b — верхняя граница, то $b+1$ — также верхняя граница, т. е. верхних границ у множества может быть много.

1.4.5 Теорема (о существовании точной верхней границы). *Если множество $A \subseteq \mathbb{R}$ непусто и ограничено сверху, то существует его наименьшая верхняя граница.*

Доказательство. Так как A ограничено сверху, множество его мажорант непусто. Обозначим множество верхних границ как B . Тогда для любого $a \in A$ и для всякого $b \in B$ выполнено $a \leq b$. По [аксиоме непрерывности](#) существует число, которое разделяет эти два множества, т. е. такое $c \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A$, $b \in B$ выполнено $a \leq c \leq b$. Из первого неравенства ($a \leq c$ для всех $a \in A$) следует, что c — верхняя граница. Из второго ($c \leq b$ для всех $b \in B$) следует, что эта граница — наименьшая. \square

1.4.6 Задача (о существовании точной нижней границы). Докажите, что если множество непусто и ограничено снизу, то существует его *наибольшая нижняя граница*.

1.4.7 Определение. *Расширенной вещественной прямой* назовём множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Символ $+\infty$ называется *положительной бесконечностью*, символ $-\infty$ — *отрицательной бесконечностью*.

1.4.8 Доопределение. Доопределим отношение порядка на бесконечные символы. Для всякого $x \in \mathbb{R}$ положим $-\infty < x < \infty$.

1.4.9 Определение. *Точная верхняя граница* или *супремум* множества $A \subseteq \mathbb{R}$ это наименьшая из его верхних границ в $\overline{\mathbb{R}}$, т. е.

$$\sup A = \begin{cases} \text{число из теоремы 1.4.5,} & \text{если } A \text{ непусто и ограничено сверху;} \\ +\infty, & \text{если } A \text{ неограничено сверху;} \\ -\infty, & \text{если } A \text{ пусто.} \end{cases}$$

1.4.10 Определение. Аналогично, *точная нижняя граница* или *инфимум* множества $A \subseteq \mathbb{R}$ это наибольшая из его нижних границ в $\overline{\mathbb{R}}$, т. е.

$$\inf A = \begin{cases} \text{число из теоремы 1.4.6,} & \text{если } A \text{ непусто и ограничено снизу;} \\ -\infty, & \text{если } A \text{ неограничено снизу;} \\ +\infty, & \text{если } A \text{ пусто.} \end{cases}$$

Упражнения

1. $\inf(a, b) = a, \sup(a, b) = b.$
2. Если $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}$, то $\inf E \leq \sup E.$
3. Если $\inf E = \sup E$, то E состоит из одного числа (какого?).
4. Если $A, B \subseteq \mathbb{R}$ непусты и $A \leq B$. Тогда $\sup A \leq \inf B.$
5. Если $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, то $\inf A \geq \inf B, \sup A \leq \sup B.$
6. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, определим $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Тогда $\sup(-A) = -\inf A.$
7. Пусть $A \subset \mathbb{R}, \lambda > 0$. Определим $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$. Тогда $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A.$
8. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — непустой набор числовых множеств. Тогда

$$\sup\{\sup A_i : i \in I\} = \sup \bigcup_{i \in I} A_i.$$

1.5 Принцип Архимеда и следствия

1.5.1 Теорема (принцип Архимеда). *Множество натуральных чисел неограничено сверху:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x.$$

Доказательство. Допустим, что \mathbb{N} ограничено. Тогда по теореме 1.4.5 о точной верхней грани $\sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Поскольку $\sup \mathbb{N} - 1$ — не верхняя грань \mathbb{N} , найдётся натуральное число $n > \sup \mathbb{N} - 1$. Но $n + 1$ также натуральное, и $n + 1 > \sup \mathbb{N}$. \square

1.5.2 Следствие. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Если $a < b + \frac{1}{n}$ для всякого натурального n , то $a \leq b$.

1.5.3 Определение. Целой частью вещественного числа называется наибольшее целое, не превосходящее этого числа:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Альтернативно можно дать определение так: $\lfloor x \rfloor$ это такое целое число k , что $k \leq x < k + 1$.

1.5.4 Теорема (о целой части). *Целая часть всякого вещественного числа определена корректно, т. е. существует и единственна.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $A = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. По принципу Архимеда 1.5.1 найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $-n < x$, т. е. $-n \in A$. Таким образом, A непусто и ограничено сверху. По теореме о точной верхней грани 1.4.5 $\sup A \in \mathbb{R}$. Поскольку $\sup A - 1$ — не верхняя граница, найдётся целое k такое, что

$$\sup A - 1 < k \leq \sup A \leq x.$$

Но отсюда $k + 1 > \sup A$. Значит, $k + 1 \notin A$ и $k + 1 > x$. Таким образом, число k — искомое. \square

1.5.5 Лемма (о плотности рациональных чисел в вещественных). *Между любыми двумя числами найдётся рациональное:*

если $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, то найдётся такое $q \in \mathbb{Q}$, что $a < q < b$.

Доказательство. По принципу Архимеда 1.5.1 найдётся натуральное n такое, что $\frac{1}{n} < b - a$. Тогда число $\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}$ — искомое. Действительно, по определению целой части $\lfloor na \rfloor \leq na < \lfloor na \rfloor + 1$, откуда

$$a = \frac{na}{n} < \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < b.$$

\square

1.5.6 Задача (о плотности иррациональных чисел в вещественных). *Между любыми двумя числами найдётся иррациональное.*

Идея. Докажите, что между любыми вещественными $a < b$ найдётся число вида $\frac{m}{n}\sqrt{2}$. Заметьте, чтобы это число оказалось иррациональным, m не должно быть нулём. \square

1.6 Модуль и знак

1.6.1 Определение. *Модуль* или *абсолютная величина* числа $x \in \mathbb{R}$ определяется как

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

1.6.2 Свойства (модуля).

1. положительная определённость: $|x| \geq 0$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. мультипликативность: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. Если $a > 0$, то

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \\ |x| < a &\Leftrightarrow -a < x < a. \end{aligned}$$

4. неравенства треугольника:

$$\begin{aligned}|x + y| &\leq |x| + |y|, \\ |x| - |y| &\leq |x - y|.\end{aligned}$$

Доказательство. Все свойства помимо неравенств треугольника должны быть очевидны. Докажем первое неравенство. Поскольку $-|x| \leq x \leq |x|$ и $-|y| \leq y \leq |y|$, делаем вывод, что

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Из свойства 3 следует первое неравенство треугольника. Далее, воспользуемся только что доказанным неравенством

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Перенося $|y|$ в левую часть, получаем второе неравенство треугольника. \square

1.6.3 Задача. Числовое множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда найдётся $C \geq 0$ такое, что $|x| \leq C$ для всех $x \in A$.

1.6.4 Задача (полезные соотношения между модулем, минимумом и максимумом). Проверьте, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

1.6.5 Определение. *Знаком* числа $x \in \mathbb{R}$ называем число

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $x = |x| \cdot \operatorname{sign} x$.

1.7 Расстояние

1.7.1 Определение. *Метрикой* или *расстоянием* на множестве M называется функция $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами

1. *положительная определённость*: для всех $x, y \in M$

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{и} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2. *симметричность*: для всех $x, y \in M$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

3. *неравенство треугольника*: для всех $x, y, z \in M$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Пара (M, d) называется *метрическим пространством*.

Расстояние между вещественными числами определяется как длина отрезка их соединяющего

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

2 Последовательности вещественных чисел

2.1 Последовательности

2.1.1 Определение. *Последовательностью* элементов множества A называется отображение $a : \mathbb{N} \rightarrow A$. Для обозначения элемента последовательности часто вместо $a(n)$ пишут a_n . Иногда удобно воспринимать последовательность не как функцию, а как пронумерованный набор значений из множества A :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Для обозначения последовательности вместо $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ буду использовать обозначение $\{a_n \in A\}_{n \in \mathbb{N}}$, или просто $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если понятно, о каком множестве идёт речь.

Например, в принципе математической индукции речь идёт о последовательности высказываний. В этом же разделе мы будем изучать последовательности чисел. Последовательность вещественных чисел, как всякую числовую функцию, можно изобразить с помощью графика:

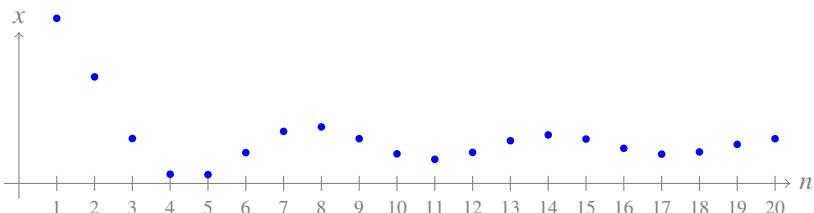


Рис. 2: График последовательности $x_n = \frac{n + \sin n}{n}$.

Иногда полезно вместо этого изображать *образ* последовательности, т. е. множество её значений на числовой прямой.



Рис. 3: Значения последовательности $x_n = \frac{n + \sin n}{n}$ на числовой прямой. Видно, что большинство значений кучкуется в небольшой области.

2.1.2 Определение. Последовательность чисел $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ограничена*, если множество её значений ограничено, т. е. если найдётся такое $C > 0$, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq C.$$

В противном случае последовательность *неограничена*.

Упражнения

1. Сумма и произведение ограниченных последовательностей ограничены.
2. Сумма ограниченной и неограниченной последовательностей неограничена.
3. Следующие последовательности неограничены:

$$x_n = n, \quad y_n = (1,001)^n, \quad z_n = \log_{10} n, \quad w_n = n \sin n.$$

4. Следующие последовательности ограничены:

$$x_n = \sin n, \quad y_n = \frac{n+1}{n}, \quad z_n = \frac{\log_{10} n}{n}, \quad w_n = \sqrt[n]{n}.$$

2.2 Предел последовательности

2.2.1 Определение. Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность вещественных чисел. Число $a \in \mathbb{R}$ называется (*конечным*) *пределом* x_n при $n \rightarrow \infty$ если значения x_n становятся сколь угодно близки к a при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что какое бы малое расстояние $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, начиная с некоторого момента $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ значения x_n отличаются от a менее, чем на ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (2.2.1)$$

Предел последовательности обозначается

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Мы также говорим, что x_n *сходится* к a при $n \rightarrow +\infty$, стремящемся к бесконечности, и обозначаем это

$$x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$

Последовательность *сходится* на бесконечности, если у неё есть конечный предел при $n \rightarrow +\infty$, и *расходится*, если такого предела нет.

2.2.2 Пример. $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Чтобы доказать сходимость последовательности x_n к числу a по определению, нужно для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ указать номер, начиная с которого $|x_n - a| < \varepsilon$.

Итак, фиксируем $\varepsilon > 0$. Требуется доказать, что начиная с некоторого номера выполнено неравенство $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$. Это неравенство легко разрешить:

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, если, например, $N_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$, то для $n \geq N_\varepsilon$ требуемое неравенство выполнено. \square

2.2.3 Пример. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Поскольку определение предела даётся для определённой последовательности x_n и определённого числа a , то отрицанием определения предела будет утверждение « a — не предел x_n ». Распишем отрицание высказывания (2.2.1):

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad |x_n - a| \geq \varepsilon_0. \quad (2.2.2)$$

Это означает следующее: можно указать расстояние $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в последовательности встречаются члены со сколь угодно большими номерами, отличающиеся от a не менее, чем на это расстояние.

Докажем, например, что 1 — не предел $(-1)^n$. Действительно, для всех нечётных n имеет место $|(-1)^n - 1| = 2$. Таким образом, утверждение (2.2.2) выполнено с $\varepsilon_0 = 2$ и $n(N) = 2N + 1$.

Чтобы доказать по определению, что последовательность не имеет предела, вообще говоря, требуется проверить, что никакое число не может быть его пределом. Т. е. мы должны также проверить утверждение (2.2.2) для всех остальных вещественных чисел. Если $a \neq 1$, то уже расстояние $\varepsilon_0 = |a - 1|$ положительно, и для всех чётных n имеет место $|(-1)^n - a| = \varepsilon_0$. \square

2.2.4 Лемма (о единственности предела). *Если предел есть, то только один.*

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Доказательство. Допустим, что есть два различных числа a, b , для которых выполнено определение предела последовательности. Пусть для определённости $a < b$. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. По определению предела найдётся номер n_1 , начиная с которого

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

а также найдётся номер n_2 , начиная с которого

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon.$$

При $n > \max\{n_1, n_2\}$ оба неравенства выполнены. Но, поскольку

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} = b - \varepsilon,$$

получаем

$$x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < x_n,$$

что невозможно. \square

2.2.5 Лемма. *Если числовая последовательность сходится, то она ограничена.*

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \quad \Rightarrow \quad \exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq C.$$

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon = 1$. По определению предела найдётся такой номер n_0 , начиная с которого $|x_n - a| < 1$. Отсюда по неравенству треугольника при $n \geq n_0$ выполнено

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Таким образом, мы оценили все члены последовательности кроме первых $n_0 - 1$. Положим

$$C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, |a| + 1\}.$$

Тогда C — искомая постоянная. \square

2.3 Предел и арифметика

2.3.1 Теорема (связь предела с арифметическими операциями). *Пусть x_n, y_n — две последовательности вещественных чисел.*

1. Сумма пределов равна пределу суммы.

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \quad \Rightarrow \quad x_n + y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a + b.$$

2a. Противоположное предела равно пределу противоположного.

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow -x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -a.$$

2b. Разность пределов равна пределу разности.

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \Rightarrow x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b.$$

3. Произведение пределов равно пределу произведения.

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \Rightarrow x_n \cdot y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b.$$

4a. Предел обратного равен обратному к пределу.

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0, \Rightarrow \frac{1}{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b}.$$

4b. Частное пределов равно пределу частного.

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}.$$

2.4 Предел и неравенства

2.4.1 Теорема (о сравнении пределов). Пусть x_n и y_n — сходящиеся числовые последовательности.

1. Можно навешивать предел на нестрогие неравенства.

Если, начиная с некоторого номера, $x_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

2. Можно снимать предел со строгих неравенств.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, то, начиная с некоторого номера, $x_n < y_n$.

2.4.2 Теорема (о промежуточной последовательности). Пусть x_n, y_n, z_n — числовые последовательности. Если

1. начиная с некоторого номера $x_n \leq y_n \leq z_n$;

2. $x_n \rightarrow a$ и $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда y_n тоже сходится и стремится к a при $n \rightarrow \infty$.

2.5 Монотонные последовательности

2.5.1 Определение. Последовательность вещественных чисел x_n

- монотонно возрастает, если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- монотонно убывает, если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В обоих случаях мы называем последовательность *монотонной*.

2.5.2 Теорема (Вейерштрасса о монотонной последовательности). *Монотонная ограниченная последовательность вещественных чисел сходится.*

1. Если x_n возрастает и ограничена сверху, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

2. Если x_n убывает и ограничена снизу, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Доказательство. Рассмотрим случай монотонно возрастающей последовательности. Случай убывающей последовательности аналогичен и остаётся в качестве упражнения.

По теореме 1.4.5 о точной верхней грани $M = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $M - \varepsilon$ — НЕ верхняя грань, найдётся такой номер N_ε , что $M - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq M$. Но, поскольку последовательность возрастает

$$M - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq M.$$

Таким образом, выполнено определение предела (2.2.1) при $n \rightarrow +\infty$. \square

2.5.3 Задача. Монотонно возрастающая неограниченная последовательность расходится к $+\infty$.

На практике мы не всегда знаем точную границу значений в последовательности, а значит и не всегда знаем и точное значение предела. Но мы можем оценить значение предела снизу и сверху.

2.5.4 Следствие (как пользоваться теоремой Вейерштрасса). *Пусть x_n — последовательность вещественных чисел.*

- *Если, начиная с некоторого номера N (т. е. при $n \geq N$)*

- 1) $x_{n+1} \geq x_n$;

- 2) $x_n \leq C$, где постоянная C не зависит от n ;

то x_n сходится и

$$x_N \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq C.$$

- *Если, начиная с некоторого номера N (т. е. при $n \geq N$)*

- 1) $x_{n+1} \leq x_n$;

- 2) $x_n \geq C$, где постоянная C не зависит от n ;

то x_n сходится и

$$C \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq x_N.$$

2.5.5 Пример. Последовательность x_n задана рекуррентно

$$x_1 = 8, \quad x_{n+1} = \sqrt{8x_n - 15}.$$

Доказать, что x_n сходится при $n \rightarrow +\infty$ и найти её предел.

Решение. 1) Только что мы обсудили, что теорема Вейерштрасса не позволяет определить значение предела. Для рекуррентно заданных последовательностей иногда можно найти его значение, переходя к пределу в рекуррентном выражении. Допустим, $x_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \sqrt{8x_n - 15} \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & = & \sqrt{8b - 15}. \end{array}$$

Мы получили уравнение на возможное значение предела, которое имеет только два вещественных корня — 3 и 5. Таким образом, *если конечный предел существует*, то его значение может быть только из набора $\{3, 5\}$.

2) Исследуем последовательность на монотонность. Поскольку $x_2 = 7 < 8$, можно предположить, что она убывает. Чтобы проверить, что это действительно так, воспользуемся методом математической индукции. База индукции $x_2 < x_1$ уже проверена, далее

$$x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_{n+2} = \sqrt{8x_{n+1} - 15} < \sqrt{8x_n - 15} = x_{n+1}.$$

3) Осталось показать, что последовательность ограничена снизу. Но чем? В пункте 1) мы нашли два кандидата в значение предела. Поскольку предел убывающей последовательности ограничивает её снизу, эти числа

и нужно использовать в качестве предположительной границы. Начнём с наибольшего: $x_1 = 8 > 5$. Далее, по индукции

$$x_n > 5 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{8x_n - 15} > \sqrt{8 \cdot 5 - 15} = 5.$$

Таким образом, 5 — действительно нижняя граница, а значит единственно возможное значение предела. \square

2.5.6 Пример (базельская задача). Доказать, что определена и конечна сумма обратных квадратов, т. е. существует предел последовательности

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Решение. Достаточно очевидно, что последовательность монотонно возрастает. Для того, чтобы ограничить её сверху, воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Отсюда при $n \geq 2$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

По теореме Вейерштрасса 2.5.2 последовательность S_n сходится, причём $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in (1, 2]$.

Гораздо сложнее найти точное значение предела. Впервые эту задачу поставил Пьетро Менголи в 1650 г., Якоб Бернуlli безуспешно пытался решить её и увлёк ей многих европейских математиков (он жил в Базеле, поэтому задача стала известна как базельская проблема). Вычислить точное значение смог Леонард Эйлер в 1734 г. Оно оказалось равно $\frac{\pi^2}{6}$. Возможно, мы докажем это во втором семестре. \square

2.5.7 Задача. Докажите, что определена и конечна сумма обратных кубов, т. е. существует предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}.$$

Точное значение этого предела, известного как постоянная Апери, неизвестно до сих пор, т. е. неизвестно, можно ли её выразить через другие известные постоянные с помощью (конечного числа) арифметических операций. Роже Апери в 1978 г. доказал, что это число иррационально, однако до сих пор неизвестно, является ли оно трансцендентным.

2.6 Частичные пределы

2.6.1 Определение. Пусть x_n — последовательность вещественных чисел, n_k — строго возрастающая последовательность натуральных номеров. Последовательность x_{n_k} называется *подпоследовательностью* последовательности x_n . *Частичным пределом* последовательности называется предел некоторой её подпоследовательности.

2.6.2 Задача. Если последовательность сходится, то всякая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.

2.6.3 Задача. Если последовательность монотонна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

2.6.4 Задача. Пусть x_n — числовая последовательность. Если $x_{2n} \rightarrow a$ и $x_{2n+1} \rightarrow a$ при $n \rightarrow +\infty$, то $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow +\infty$.

Задача 2.6.2 даёт простой способ доказать расходимость последовательности — достаточно найти два различных частичных предела.

2.6.5 Теорема (Больцано — Вейерштрасса о частичных пределах). *Всякая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность. Более того, среди частичных пределов последовательности всегда есть наибольший и наименьший.*

Доказательство для наибольшего предела. **Шаг 1.** Построим мажоранту всех частичных пределов. Для этого рассмотрим последовательность верхних границ

$$h_m = \sup_{n \geq m} x_n = \sup\{x_m, x_{m+1}, \dots\}.$$

При этом, если $|x_n| \leq C$ для всех n , то и $|h_m| \leq C$ для всех m . Заметим, что последовательность h_m монотонно убывает. По теореме Вейерштрасса 2.5.2 она сходится. Пусть её предел равен b . Поскольку для любой сходящейся подпоследовательности выполнено $x_{n_k} \leq h_{n_k}$, всякий частичный предел не превосходит b .

Шаг 2. Построим подпоследовательность, предел которой равен b . Поскольку $h_m \searrow b$ при $m \rightarrow \infty$, найдётся m_1 такое, что

$$b \leq h_{m_1} < b + 1.$$

Поскольку h_{m_1} это наименьшая верхняя граница значений $x_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots$, найдётся $n_1 \geq m_1$ такое, что $x_{n_1} > h_{m_1} - 1$. Таким образом, в последовательности нашли число x_{n_1} такое, что

$$b - 1 \leq h_{m_1} - 1 < x_{n_1} \leq h_{m_1} < b + 1.$$

Далее рассуждаем по индукции. Пусть построены $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$ такие, что $b - \frac{1}{j} < x_{n_j} < b + \frac{1}{j}$, $j = 1, \dots, k-1$. Найдётся $m_k > n_{k-1}$ такое, что

$$b \leq h_{m_k} < b + \frac{1}{k}.$$

Найдётся $n_k \geq m_k$ такое, что $x_{n_k} > h_{m_k} - \frac{1}{k}$. Отсюда

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}.$$

Таким образом, построена подпоследовательность x_{n_k} , сходящаяся к b . Теорема доказана. \square

2.6.6 Задача. Адаптировать рассуждения теоремы для наименьшего частичного предела.

2.6.7 Определение. Наибольший из частичных пределов последовательности x_n называется её *верхним пределом* и обозначается

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Наименьший из частичных пределов последовательности x_n называется её *нижним пределом* и обозначается

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2.6.8 Свойства (верхнего и нижнего пределов). (*упражнения*)

(все свойства имеют естественные обобщения на случай бесконечных пределов в случае, когда соответствующие выражения имеют смысл)
Для всякой ограниченной числовой последовательности x_n

$$1. \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

$$2. \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n, \text{ если } \lambda > 0.$$

$$3. \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-x_n) = - \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

$$4. \quad \text{Если } a_n \text{ сходится, то } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + a_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

5. Если y_n тоже ограничена, то

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, например, что для двух ограниченных последовательностей x_n, y_n выполнено

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

Существует подпоследовательность $x_{n_k} + y_{n_k}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{n_k} + y_{n_k}) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n).$$

Слагаемые по отдельности могут и не сходиться, но у x_{n_k} есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_{k_l}}$. При этом последовательность $y_{n_{k_l}}$ также сходится (почему?). Имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} x_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} y_{n_{k_l}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n. \quad \square \end{aligned}$$

2.6.9 Пример (к последнему свойству). Если $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, то

$$0 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) < \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2.$$

Придумайте пример двух последовательностей, для которых все 5 чисел в свойстве 5 будут разными.

2.6.10 Критерий (существования предела в терминах верхнего и нижнего пределов). *Ограниченнная числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда её верхний предел совпадает с нижним.*

Доказательство. Необходимость следует из задачи 2.6.2 — если последовательность сходится, то все её частичные пределы совпадают.

Достаточность. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Если a — не предел последовательности x_n , то по определению найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность x_{n_k} такие, что $|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$. По теореме 2.6.5 о частичных пределах у неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_{k_l}}$. Но предел этой подпоследовательности не может совпадать с a . Значит, наше предположение неверно, и a — предел последовательности x_n . \square

2.7 Критерий Коши

2.7.1 Определение. Числовая последовательность x_n называется *последовательностью Коши* или *фундаментальной последовательностью*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon \quad |x_m - x_n| < \varepsilon. \quad (2.7.1)$$

Т. е. какое бы малое расстояние мы ни выбрали, начиная с какого-то момента члены последовательности отличаются *друг от друга* менее, чем на это расстояние.

2.7.2 Критерий (Коши). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. 1) Необходимость — сходящаяся последовательность фундаментальна. Если $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n|.$$

Докажите, что из определения предела следует фундаментальность последовательности.

2) Достаточность — фундаментальная последовательность сходит ся.

Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Докажем, что она ограничена. Полагая $\varepsilon = 1$, найдём номер N , что при $n \geq N$ выполнено $|x_n - x_N| \leq 1$. Отсюда

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}.$$

По теореме 2.6.5 о частичных пределах существует её сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a$ при $k \rightarrow +\infty$. Докажем, что a — предел всей последовательности. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдётся N_ε такое, что

$$m, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon,$$

и найдётся $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{k_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$ и $|x_{n_{k_\varepsilon}} - a| < \varepsilon$. Отсюда при $n \geq n_{k_\varepsilon}$

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}| + |x_{n_{k_\varepsilon}} - a| < 2\varepsilon.$$

По определению предела, $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow +\infty$. □

2.7.3 Следствие (как доказать расходимость по критерию Коши). Если в последовательности x_n удается найти две подпоследовательности x_{n_k}, x_{m_k} такие, что

$$|x_{n_k} - x_{m_k}| \geq \varepsilon_0$$

для всех k и фиксированного расстояния ε_0 , то последовательность расходится.

2.7.4 Пример (гармонический ряд). Последовательность

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

расходится к $+\infty$.

Доказательство. Поскольку S_n монотонно возрастает, она либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Но, поскольку

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

сходиться она не может. \square

2.7.5 Следствие (сходимость по критерию Коши и оценка погрешности). Если удаётся получить оценку

$$|x_N - x_{N+n}| \leq \Delta_N,$$

где Δ_N не зависит от n и $\Delta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$, то последовательность x_n сходится, причём разность между x_n и её пределом можно оценить как

$$|x_N - a| \leq \Delta_N.$$

2.7.6 Пример (оценка погрешности в задаче Базеля). В примере 2.5.6 доказали, что последовательность

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

сходится. Но как приблизённо узнать значение предела, чтобы не ждать, пока за нас это сделает Эйлер? Оценим разность:

$$S_{N+n} - S_N = \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=N+1}^{N+n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+n}.$$

Нужно получить оценку, не зависящую от n , и в данном случае это можно сделать

$$|S_{N+n} - S_N| \leq \frac{1}{N} = \Delta_N.$$

Поскольку $\frac{1}{N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, по критерию Коши последовательность S_N сходится к некоторому пределу S (но это мы знали и раньше), и отличается от предела не более, чем на $\frac{1}{N}$ (а это новое знание). Таким образом, чтобы гарантированно знать значение этого предела с точностью до 0.01, достаточно сложить 100 первых слагаемых.

2.8 Вещественная степень числа

2.8.1 Теорема (об арифметическом корне). Для всяких $a \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственное $x \geq 0$ такое, что

$$x^n = a.$$

2.8.2 Определение. Число x из теоремы 2.8.1 называется *арифметическим корнем* степени n числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. В случае нечётного n арифметический корень доопределяется для отрицательных чисел по правилу

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Доказательство теоремы 2.8.1. Сразу будет следовать из теоремы Больцано — Коши 5.2.1, которую мы пройдём в разделе «непрерывные функции».

Но можем не ждать и доказать сейчас — методом деления отрезка пополам. Пусть $x_0 = 0$ и $y_0 = M$ — любое натуральное, большее a . Тогда

$$x_0^n = 0 \leq a \leq M \leq M^n = y_0^n.$$

Рассмотрим середину отрезка $z_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$. В качестве нового отрезка берём ту половину, у которой с одной стороны значение поменьше нужного, а с другой побольше. Т. е. если $z_0^n \leq a$, то полагаем $x_1 = z_0$, $y_1 = y_0$, а в противном случае полагаем $x_1 = x_0$, $y_1 = z_0$. Т. е. получается

$$x_1^n \leq a \leq y_1^n, \quad \text{причём } |y_1 - x_1| \leq \frac{y_0 - x_0}{2} = \frac{M}{2}.$$

Продолжая делить отрезок пополам строим последовательности точек x_k, y_k таких, что

$$x_k^n \leq a \leq y_k^n, \quad \text{причём } |y_k - x_k| \leq \frac{M}{2^k}. \quad (2.8.1)$$

Последовательность x_n возрастает и ограничена сверху M . Последовательность y_n убывает и ограничена снизу 0, значит обе сходятся. Кроме того, $|y_k - x_k| \leq \frac{M}{2^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Значит, их пределы совпадают

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = c.$$

Переходом к пределу в (2.8.1) получаем $c^n \leq a \leq c^n$. Т. е. c — искомое. Осталось убедиться, что оно единственно. Действительно, если взять другое число $c' > c$, то $(c')^n > c^n = a$. Значит $(c')^n \neq a$. То же самое, для чисел, меньших c . \square

2.8.3 Теорема (функциональное задание степени). Для всякого $a > 0$ существует единственная функция $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

1. $f_a(x + y) = f_a(x)f_a(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$;
2. f_a монотонна;
3. $f_a(1) = a$.

2.8.4 Определение. Функция из теоремы 2.8.3 называется *показательной функцией* с основанием a , или вещественной степенью числа a и обозначается a^x .

Доказательство. **Шаг 1.** Зависимость от знака.

Поскольку

$$a = f_a(1 + 0) = f_a(1)f_a(0) = a \cdot f_a(0),$$

получаем $f_a(0) = 1$. Если $x > 0$, то из

$$1 = f_a(0) = f_a(x - x) = f_a(x)f_a(-x)$$

получаем $f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)}$. Таким образом, значения функции f_a на неположительных числах однозначно определяются значениями на положительных.

Шаг 2. Рациональные значения.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$a = f_a(1) = f_a\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n\right) = \underbrace{f_a\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f_a\left(\frac{1}{n}\right)}_n = f_a\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

По теореме 2.8.1 об арифметическом корне $f_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$. Далее, из определения натуральной степени $f_a\left(\frac{m}{n}\right) = (\sqrt[n]{a})^m$. Проверьте, что полученная функция монотонна на рациональных значениях!

Шаг 3. Иррациональные значения.

Если $a = 1$, то в силу монотонности $f_a \equiv 1$.

Разберём случай $a > 1$. В этом случае f_a монотонно возрастает на \mathbb{Q} . Положим

$$A = \{f_a(q) : q \in \mathbb{Q}, q < r\}, \quad B = \{f_a(q) : q \in \mathbb{Q}, q > r\}.$$

Чтобы f_a была монотонна, в точке r должно выполняться

$$\sup A \leq f_a(r) \leq \inf B.$$

Покажем, что $\sup A = \inf B$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. По теореме 1.5.4 о целой части, существует единственное $m \in \mathbb{Z}$, что $\frac{m}{n} < r < \frac{m+1}{n}$. Следовательно,

$$\sqrt[n]{a^m} \leq \sup A \leq \inf B \leq \sqrt[n]{a^{m+1}} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a}.$$

Можем воспользоваться левой частью неравенства в правой, и получить

$$\sup A \leq \inf B \leq \sup A \cdot \sqrt[n]{a}.$$

Поскольку $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$, имеем $\sup A = \inf B$. Таким образом, значение $f_a(r) = \sup A$ определяется однозначно.

Шаг 4. Основное свойство степени.

Построенная нами функция f_a удовлетворяет свойствам 2 и 3 по построению. Но свойство 1 требуется проверить.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. По теореме 1.5.4 о целой части, найдутся $k, m \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, \quad \frac{m}{n} \leq y < \frac{m+1}{n}.$$

Отсюда $\frac{k+m}{n} \leq x + y < \frac{k+m+2}{n}$. Напомню, что мы рассматриваем случай $a > 1$, и по построению f_a монотонно возрастает. Следовательно,

$$f_a(x)f_a(y) \leq \sqrt[n]{a^{k+1}} \sqrt[n]{a^{m+1}} = \sqrt[n]{a^{k+m}} \sqrt[n]{a^2} \leq f_a(x+y) \sqrt[n]{a^2}.$$

Переходя к пределу в левой и правой частях этого неравенства, получаем $f_a(x)f_a(y) \leq f_a(x+y)$. Обратно,

$$f_a(x+y) \leq \sqrt[n]{a^{k+m+2}} = \sqrt[n]{a^k} \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^2} \leq f_a(x)f_a(y) \sqrt[n]{a^2}.$$

Отсюда $f_a(x+y) \leq f_a(x)f_a(y)$. Таким образом, свойство 3 выполнено. \square

2.8.5 Следствие. Для всякого $a > 0$ и любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Доказательство. Фиксируем a, x и рассмотрим функцию $f(y) = a^{x \cdot y}$. Она обладает основным свойством степени

$$f(y_1 + y_2) = a^{x(y_1 + y_2)} = a^{xy_1 + xy_2} = a^{xy_1}a^{xy_2} = f(y_1)f(y_2).$$

Проверьте, что она монотонна. По теореме 2.8.3 $f(y) = f(1)^y = (a^x)^y$. \square

2.8.6 Теорема (о логарифме). Для всяких $a \neq 1$ и $b > 0$ существует единственное $x \geq 0$ такое, что

$$a^x = b.$$

Доказательство. Сразу следует из теоремы 5.2.7 об обратной функции, которую мы пройдём в разделе «непрерывные функции».

Либо можете доказать методом деления отрезка пополам. \square

2.9 Экспонента

2.9.1 Лемма. Последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$ и $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ сходятся к одному и тому же конечному положительному пределу.

Доказательство. Убедимся, что последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ возрастает. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$

Отсюда, по неравенству Бернулли

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Следовательно, $a_{n+1} > a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрите последовательность $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ и докажите аналогичным способом, что $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$, т. е. эта последовательность убывает.

Кроме того, $b_n = a_n(1 + \frac{1}{n}) > a_n$. Таким образом,

$$2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4.$$

Последовательность a_n возрастает и ограничена сверху, b_n — убывает и ограничена снизу. Наконец, из соотношения $b_n = a_n(1 + \frac{1}{n})$ следует, что их пределы совпадают. \square

2.9.2 Определение. Числом Непера или числом Эйлера называется предел

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2.9.3 Следствие. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Поскольку $(1 + \frac{1}{n})^n$ строго возрастает, $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ строго убывает, и обе последовательности сходятся к e , имеет место неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Логарифмируя, получаем

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

из чего следует требуемое неравенство. \square

2.9.4 Лемма. Для всякого $x \in \mathbb{R}$ последовательность $(1 + \frac{x}{n})^n$ сходится.

Доказательство. Аналогично предыдущему утверждению, докажите что последовательность $(1 + \frac{x}{n})^n$ возрастает при $n > |x|$.

Далее, докажем, что для всякого натурального k выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < e^k.$$

Действительно, для $k = 1$ это доказано ранее, а далее можно рассуждать по индукции. Если неравенство верно для фиксированного $k \in \mathbb{N}$, то

$$e^{k+1} = e^k e > \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)^n > \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n.$$

Таким образом, для всякого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ можно указать натуральный номер $k > x$ такой, что при $n \geq k$ последовательность $(1 + \frac{x}{n})^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху e^k . Следовательно, она имеет конечный предел. \square

2.9.5 Определение. Экспоненциальной функцией или экспонентой вещественного числа назовём функцию $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную по правилу

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2.9.6 Теорема (о неопределённости 1^∞). Если $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow +\infty$, то

$$\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \rightarrow \exp(a)$$

при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. **Шаг 1.** Пусть $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажем, что $(1 + \frac{z_n}{n}) \rightarrow 1 = \exp(0)$. Действительно, с одной стороны по неравенству Бернулли $(1 + \frac{z_n}{n})^n \geq 1 + z_n$. С другой стороны

$$\frac{1}{(1 + \frac{z_n}{n})^n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{z_n}{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\frac{z_n}{n}}{1 + \frac{z_n}{n}}\right)^n \geq 1 - \frac{z_n}{1 + \frac{z_n}{n}}.$$

Таким образом, как только $|z_n| \leq 1$, выполнена двусторонняя оценка

$$1 + z_n \leq \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{z_n}{1 + \frac{z_n}{n}}\right)^{-1}.$$

Левая и правая части стремятся к 1 при $n \rightarrow +\infty$.

Шаг 2. Пусть $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $x_n = a + z_n$, где $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Имеем

$$\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a + z_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + \frac{z_n/(1 + \frac{a}{n})}{n}\right)^n.$$

По шагу 1 второй сомножитель стремится к 1 при $n \rightarrow +\infty$. \square

2.9.7 Следствие. $\exp(x) = e^x$.

Доказательство. Проверим, что экспонента удовлетворяет всем свойствам степени. Действительно, если $x < y$, то для достаточно больших n

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n.$$

Отсюда $\exp(x) \leq \exp(y)$, т. е. экспонента монотонно возрастает. Далее,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x+y+\frac{xy}{n}}{n}\right)^n.$$

Переходя к пределу и пользуясь предыдущей теоремой, получаем, что $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$, т. е. экспонента обладает основным свойством степени. По теореме 2.8.3 о степени $\exp(x) = \exp(1)^x = e^x$. \square

2.10 Топологическое определение предела

2.10.1 Определение. Для всякого $\varepsilon > 0$ элементарной ε -окрестностью числа $a \in \mathbb{R}$ называем интервал

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Заметим, что ε -окрестность числа a это множество всех чисел, находящихся от a на расстоянии, меньшем чем ε :

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon.$$

Окрестностью числа x называется любое множество, содержащее его элементарную окрестность:

$$U \subseteq \mathbb{R} — \text{окрестность } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

2.10.2 Определение. Для всякого $r \in \mathbb{R}$ элементарной r -окрестностью положительной бесконечности называем луч

$$\mathcal{O}_r(+\infty) = (r, +\infty],$$

а элементарной r -окрестностью отрицательной бесконечности — луч

$$\mathcal{O}_r(-\infty) = [-\infty, r).$$

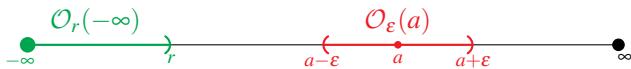


Рис. 4: Окрестности на расширенной числовой прямой.

2.10.3 Определение. Множество элементарных окрестностей точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *локальной базой* точки x . Это множество будем обозначать символом $\mathfrak{B}(a)$.

Используя язык топологии можно три определения предела последовательности объединить в одно:

2.10.4 Определение (топологическое определение предела последовательности). Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом последовательности чисел x_n при $n \rightarrow \infty$, если

$$\forall U \in \mathfrak{B}(a) \ \exists N_U \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N_U \Rightarrow x_n \in U.$$

Т. е. какую бы окрестность U предельного значения a мы ни взяли, начиная с некоторого момента N_U значения последовательности x_n лежат в этой окрестности.

3 Последовательности комплексных чисел

3.1 Комплексные числа

Напомню, что *комплексным числом* называется число вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, i — мнимая единица ($i^2 = -1$). Множество комплексных чисел обозначается символом \mathbb{C} .

Если $z = x + iy$, то x называется *вещественной частью* числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, y называется *мнимой частью* числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Комплексно сопряжённым к комплексному числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = x - iy$. Справедливы формулы

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Комплексные числа можно изображать как точки на декартовой плоскости. В этом случае ось абсцисс служит осью вещественных чисел, ось ординат служит осью мнимых чисел.

3.1.1 Определение. *Модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа z называется длина отрезка, соединяющего его с началом координат (радиус-вектора). Если $z = x + iy$, то по теореме Пифагора

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.1.1)$$

3.1.2 Задача (свойства модуля). Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
3. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

3.1.3 Определение. *Аргументом* ненулевого числа $z \in \mathbb{C}$ называется угол между полуосью положительных вещественных чисел и его радиус-вектором (см. [рис. 5](#)). Аргумент числа z обозначается $\operatorname{Arg} z$ и определяется с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Главным значением аргумента считают число из $(-\pi, \pi]$ и обозначают $\arg z$. Если $z = x + iy$, то

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

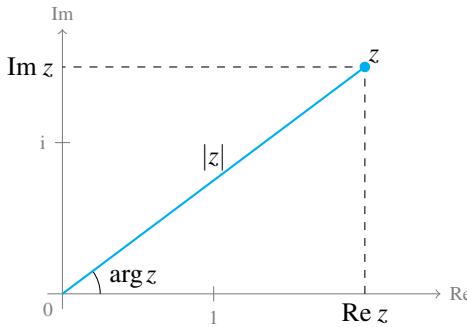


Рис. 5: Геометрическое представление комплексного числа.

Таким образом, всякое комплексное число можно представить в виде

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta),$$

где $r \geq 0$.

3.1.4 Теорема (об умножении комплексных чисел). *При перемножении ненулевых комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Если $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}.$$

3.2 Полезные тригонометрические оценки

3.2.1 Лемма (о приращениях тригонометрических функций). *Для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

3.2.2 Лемма. *Для всех $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ имеет место неравенство*

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

3.3 Предел последовательности комплексных чисел

3.3.1 Определение. Элементарной ε -окрестностью числа $c \in \mathbb{C}$ называется множество всех чисел, находящихся от него на расстоянии менее ε :

$$\mathcal{O}_\varepsilon(c) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < \varepsilon\}.$$

Геометрически это круг радиуса ε с центром в c .

Как только у нас есть определение окрестности, можно определить предел:

3.3.2 Определение. Пусть $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел, $c \in \mathbb{C}$.

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |z_n - c| < \varepsilon.$$

Т. е. определение предела аналогично таковому для вещественных чисел, с той лишь разницей, что абсолютную величину мы считаем от комплексного числа.

В действительности, большинство свойств, доказанных нами для предела вещественных чисел, верны и для предела комплексных чисел, т. к. опираются только на свойства модуля. Однако, признаки сходимости мы использовать не можем, поскольку они опираются на сравнения чисел и границы числовых множеств, а на комплексных числах отношение порядка не определено. По этой причине нужно сформулировать новые признаки.

3.3.3 Критерий (сходимости координатный). *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда сходятся её вещественные и мнимые части.*

$$z_n \rightarrow c \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} c, \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} c \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $z_n = x_n + i y_n$, $c = a + i b$. Если $z_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$0 \leq |x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - c|.$$

Отсюда, по теореме 2.4.2 о промежуточной последовательности, $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично, $y_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$.

Обратно, пусть $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$|z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \rightarrow \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

при $n \rightarrow \infty$. □

3.3.4 Критерий (сходимости Коши). *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Докажите аналогично предыдущей теореме, что последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальны её вещественная и мнимая части. □

3.3.5 Признак (сходимости полярный). *Если $|z_n| \rightarrow |c|$ и $\arg z_n \rightarrow \arg c$ при $n \rightarrow +\infty$, то $z_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow +\infty$.*

Доказательство. Обозначим $r_n = |z_n|$, $\theta_n = \arg z_n$. Тогда

$$z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) = r_n \cos \theta_n + i r_n \sin \theta_n.$$

Если $r_n \rightarrow r$ и $\theta_n \rightarrow \theta$ при $n \rightarrow +\infty$, то из оценок леммы 3.2.1 о приращениях тригонометрических функций

$$r_n \cos \theta_n \rightarrow r \cos \theta, \quad r_n \sin \theta_n \rightarrow r \sin \theta$$

при $n \rightarrow +\infty$. По координатному критерию сходимости 3.3.3 последовательность z_n сходится. \square

3.4 Экспонента комплексного аргумента

3.4.1 Лемма. *Для всякого $y \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n = \cos y + i \sin y.$$

Доказательство. Воспользуемся полярным признаком сходимости 3.3.5.

Заметим, что $|1 + \frac{iy}{n}| = |1 - \frac{iy}{n}| = \sqrt{1 + \frac{y^2}{n^2}}$. Отсюда

$$\left| \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n \right|^2 = \left| \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n \left(1 - \frac{iy}{n}\right)^n \right| = \left(1 + \frac{y^2/n}{n}\right)^n \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow +\infty$. Далее,

$$\operatorname{Arg} \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n = n \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{iy}{n}\right).$$

Пусть $y > 0$. Тогда $1 + iy$ лежит в первой четверти, и для главного значения аргумента $\arg(1 + \frac{iy}{n}) = \arctg \frac{y}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$. Сделав в оценке (3.2.2) подстановку $\alpha = \arctg \frac{y}{n}$, получим

$$\frac{y}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{n^2}}} < n \arctg \frac{y}{n} < y,$$

откуда переходом к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получаем требуемое. Для $y < 0$ предел тот же в силу нечётности выражения $(n \arctg(-\frac{y}{n})) = -n \arctg(\frac{y}{n})$, а для $y = 0$ предел очевиден.

Итак, модуль сходится к 1, аргумент сходится к y , а значит утверждение доказано. \square

3.4.2 Следствие. Если $z_n \rightarrow c = x + iy$ при $n \rightarrow +\infty$, то

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow e^x(\cos y + i \sin y)$$

при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. **Шаг 1.** Пусть $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Воспользуемся полярным признаком 3.3.5. Для модуля имеем

$$\left(1 - \frac{|z_n|}{n}\right)^n \leq \left|\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leq \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)^n.$$

По теореме 2.9.6 левая и правая части стремятся к 1. Далее, пусть $z_n = x_n + iy_n$. Тогда

$$\arg\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = n \arg\left(1 + \frac{x_n + iy_n}{n}\right) = n \operatorname{arctg} \frac{y_n}{x_n + y_n}.$$

Поскольку по оценке (3.2.2) $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$, получаем

$$\left|\arg\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leq \left|\frac{y_n}{1 + \frac{x_n}{n}}\right| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$.

Шаг 2. Представим z_n как $z_n = x + iy + \alpha_n$, где $\alpha_n \rightarrow 0$. Тогда

$$\left(1 + \frac{x + iy + \alpha_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_n - \frac{ixy}{n}}{(1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{iy}{n})}\right)^n.$$

По шагу 1 последний сомножитель стремится к единице. Пределы остальных сомножителей и есть то, что требуется. \square

3.4.3 Доопределение. Экспонентой комплексного аргумента называется функция $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, заданная по правилу

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Эту функцию часто обозначают как e^z .

3.4.4 Следствие. Для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

4 Предел функции

4.1 Предельные точки

4.1.1 Определение. Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется окрестность, из которой исключена сама точка x_0 :

$$\mathring{U} = U \setminus \{x_0\}, \quad \text{где } U \in \mathfrak{B}(x_0).$$

Например, проколотая элементарная окрестность вещественного числа x_0 имеет вид

$$\mathring{O}_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

4.1.2 Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной для множества D , если в любой её проколотой окрестности есть точки множества D :

$$\forall U \in \mathfrak{B}(x_0) \quad \mathring{U} \cap D \neq \emptyset.$$

Множество всех предельных точек множества D обозначаем $\text{Lim } D$.

4.1.3 Лемма (эквивалентное определение предельной точки). x_0 — предельная точка D тогда и только тогда, когда она предел некоторой последовательности несовпадающих с ней точек из D .

$$x_0 \in \text{Lim } D \iff \exists x_n \in D \setminus \{x_0\} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0.$$

4.2 Определение и свойства предела

4.2.1 Определение (топологическое определение предела функции). Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Lim } D$. Значение $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предел функции f при $x \rightarrow x_0$, если какую бы окрестность U_{y_0} значения y_0 мы ни взяли, найдётся проколотая окрестность V_{x_0} аргумента x_0 в которой функция принимает только значения из U_{y_0} :

$$\forall U_{y_0} \in \mathfrak{B}(y_0) \quad \exists V_{x_0} \in \mathfrak{B}(x_0) \quad \forall x \in D \quad x \in \mathring{V}_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U_{y_0}.$$

В этом общем определении как x_0 так и y_0 может быть числом, положительной или отрицательной бесконечностью. Чтобы получить из него арифметическое определение, которое можно использовать, нужно расписать, что такое окрестность.

4.2.2 Пример. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$ неограничено снизу, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Что значит

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0?$$

По определению

$$\forall U_0 \quad \exists V_{-\infty} \quad \forall x \in D \quad x \in V_{-\infty} \Rightarrow f(x) \in U_0.$$

Элементарные окрестности имеют вид $U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $V_{-\infty} = (-\infty, L)$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и $L \in \mathbb{R}$. При этом

$$x \in (-\infty, L) \Leftrightarrow x < L, \quad f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, определение можно сформулировать как

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad x < L \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.}$$

4.2.3 Пример. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Что значит функция имеет конечный предел в конечной точке? Т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$$

где $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Окрестность числа x_0 это интервал вида $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. При этом

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ и } x \neq x_0 \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Аналогично, окрестность числа y_0 это всякий интервал вида $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и

$$f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \Leftrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Подставив эти арифметические выражения вместо окрестностей, получим классическое определение конечного предела функции по Коши:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.}$$

4.2.4 Теорема (о замене переменной в пределе). *Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$, $y_0 \in \text{Lim } E$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ имеет предел в точке y_0 .*

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Lim } D$ и $\varphi : D \rightarrow E$ такова, что $\varphi(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$ и $\varphi(x) \rightarrow y_0$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

4.3 Асимптотические сравнения

4.3.1 Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Lim } D$. Говорим, что при x , стремящемся к x_0

f имеет не больший порядок роста, чем g , $\boxed{f \preceq g}$, или

f есть O -большое от g $\boxed{f(x) = O(g(x))}$,

если найдутся окрестность U_{x_0} и постоянная $C > 0$ такие, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad x \in \mathring{U}_{x_0}.$$

Если $g(x)$ не обращается в ноль, то определение эквивалентно тому, что

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C$$

в некоторой окрестности x_0 .

4.3.2 Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Lim } D$. Говорим, что при x , стремящемся к x_0

f имеет меньший порядок роста, чем g , $\boxed{f \preceq g}$, или

f есть o -малое от g $\boxed{f(x) = o(g(x))}$,

если найдутся окрестность U_{x_0} и функция $\alpha : \mathring{U}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$, что $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad x \in \mathring{U}_{x_0}.$$

Если $g(x)$ не обращается в ноль, то определение эквивалентно тому, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow x_0$.

4.3.3 Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Lim } D$. Функции f и g асимптотически эквивалентны при x , стремящемся к x_0 , $\boxed{f \sim g}$, если найдутся окрестность U_{x_0} и функция $u : \mathring{U}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $u(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$ и

$$f(x) = u(x)g(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Если $g(x)$ не обращается в ноль, то определение эквивалентно тому, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$$

при $x \rightarrow x_0$.

4.4 Признаки существования предела

4.4.1 Теорема (о промежуточной функции). *Пусть $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Lim } D$. Если*

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ в некоторой проколотой окрестности x_0 ;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.4.2 для промежуточной последовательности. \square

4.4.2 Теорема (об односторонних пределах монотонной функции). *Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, x_0 левая (или правая) предельная к множеству D , тогда в этой точке существует левый (или соотв. правый) предел функции f .*

Если f монотонно возрастает, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in D}} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in D}} f(x).$$

Если f монотонно убывает, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \inf_{\substack{x < x_0 \\ x \in D}} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \sup_{\substack{x > x_0 \\ x \in D}} f(x).$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.5.2 для монотонных последовательностей. \square

5 Непрерывные функции

5.1 Классификация разрывов

Для простоты рассмотрим только внутренние точки области определения.

5.1.1 Определение. Пусть x_0 — внутренняя точка множества $D \subseteq \mathbb{R}$, функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ в точке разрыва x_0 имеет

1. *устранимый разрыв*, если существует конечный двусторонний предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но он не совпадает с $f(x_0)$;
2. *скажок*, если существуют конечный односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, но они не совпадают друг с другом;
3. *существенный разрыв*, если хотя бы с одной стороны от точки x_0 нет конечного предела.

Разрыв в точке x_0 называется разрывом I рода, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, и разрывом II рода иначе.

5.1.2 Теорема (о разрывах монотонной функции). *Монотонная функция на промежутке может иметь только скачки, причём не более чем счётное их число.*

5.2 Глобальные свойства непрерывных функций

5.2.1 Теорема (Больцано—Коши о промежуточных значениях). *Непрерывная функция на промежутке принимает все промежуточные значения между sup и inf значений.*

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f \in \mathcal{C}(I)$. Тогда для всякого значения $y \in (\inf f(I), \sup f(I))$ найдётся аргумент $x \in I$, что

$$y = f(x).$$

Доказательство. Фиксируем y как в условии теоремы. Т. к. $y > \inf f(I)$, найдётся такой аргумент $a_1 \in I$, что $f(a_1) < y$. Аналогично найдётся $b_1 \in I$ такое, что $f(b_1) > y$. Не умаляя общности, считаем, что $a_1 < b_1$.

Рассмотрим точку $c = \frac{a_1 + b_1}{2}$ — среднюю точку отрезка $[a_1, b_1]$. Возможно три случая:

- $f(c) = y$, тогда искомая точка найдена;

- $f(c) < y$, тогда поиск надо продолжить на отрезке $[c, b_1]$. Полагаем $a_2 = c$, $b_2 = b_1$;
- $f(c) > y$, тогда поиск надо продолжить на отрезке $[a_1, c]$. Полагаем $a_2 = a_1$, $b_2 = c$.

Отметим, что в любом случае $a_2 \geq a_1$, $b_2 \leq b_1$, и $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$.

Далее те же рассуждения проводим по индукции. Если построен отрезок $[a_n, b_n]$ такой, что $f(a_n) < y$, $f(b_n) > y$, и $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$, то разбиваем его пополам. Если значение в середине не равно y , то как $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ обозначаем левую либо правую половину так, что $f(a_{n+1}) < y$, $f(b_{n+1}) > y$. При этом $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$ и $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n+1}}$.

Если ни на каком конечном шаге нам не повезло найти точку, в которой значение функции равно y , то мы построили две последовательности a_n , b_n точек отрезка $[a_1, b_1]$. При этом a_n возрастает, b_n убывает и $b_n - a_n \rightarrow 0$. Как следствие, обе последовательности сходятся к одной и той же точке $x \in [a_1, b_1]$. В силу непрерывности функции f имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x).$$

По построению $f(a_n) < y$, а значит $f(x) \leq y$. Но $f(b_n) > y$, а значит $f(x) \geq y$. Следовательно, точка x — искомая. \square

5.2.2 Следствие. *Непрерывная функция переводит промежуток в промежуток.*

5.2.3 Теорема (Вейерштрасса об экстремумах непрерывной функции). *Непрерывная функция на отрезке имеет максимум и минимум.*

Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда найдутся $p, q \in [a, b]$ такие, что

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $M = \sup f([a, b])$. Тогда найдётся последовательность $y_n \in f([a, b])$ такая, что $y_n \rightarrow M$ при $n \rightarrow +\infty$. Это последовательность значений функции, т. е. $y_n = f(x_n)$ для некоторого $x_n \in [a, b]$.

По теореме 2.6.5 о частичных пределах, существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow q$ при $k \rightarrow +\infty$. При этом из $a \leq x_{n_k} \leq b$ следует $a \leq q \leq b$, т. е. $q \in [a, b]$.

В силу непрерывности f в точке q имеем $f(x_{n_k}) \rightarrow f(q)$ при $k \rightarrow +\infty$. Но в силу построения, $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow M$ при $k \rightarrow +\infty$. Таким образом, $f(q) = M$, т. е. мы нашли точку, в которой функция достигает максимального значения. \square

5.2.4 Следствие. *Непрерывная функция на отрезке ограничена.*

5.2.5 Следствие. *Непрерывная функция переводит отрезок в отрезок.*

5.2.6 Признак (Больцано строгой монотонности). *Непрерывная инъективная функция на промежутке строго монотонна.*

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f \in C(I)$ инъективна. Если для некоторых $a, b \in I$ таких, что $a < b$, выполнено $f(a) < f(b)$, то f строго возрастает.

Доказательство. **Шаг 1.** Рассмотрим три неравных точки $x_1, x_2, x_3 \in I$. Пусть, для определённости, $x_1 < x_2 < x_3$. Поскольку функция инъективна, все значения $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ различны. Может ли $f(x_2)$ быть самым большим из них, т. е. например, может ли быть выполнен вариант

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)?$$

Фиксируем значение y такое, что $f(x_1) < f(x_3) < y < f(x_2)$. По теореме 5.2.1 о промежуточных значениях найдётся аргумент $z_1 \in (x_1, x_2)$ такой, что $f(z_1) = y$ и найдётся $z_2 \in (x_2, x_3)$ такой, что $f(z_2) = y$. Т. е. f не может быть инъективной. Таким образом, исключены все варианты соотношений между значениями функции на трёх точках, кроме двух:

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \quad \text{либо} \quad f(x_1) > f(x_2) > f(x_3).$$

Шаг 2. Пусть для двух конкретных точек $a < b$ выполнено $f(a) < f(b)$. Покажем, что в этом случае функция f строго возрастающая. Возьмём две произвольные точки x_1, x_2 такие, что $a < x_1 < x_2 < b$. По шагу 1

$$f(a) < f(x_1) < f(b) \quad \text{либо} \quad f(a) > f(x_1) > f(b),$$

но второй вариант исключён, ведь в этом случае $f(a) > f(b)$. Значит, $f(a) < f(x_1)$. Далее, аналогично,

$$f(a) < f(x_1) < f(x_2) \quad \text{либо} \quad f(a) > f(x_1) > f(x_2),$$

но второй вариант исключён, ведь в этом случае $f(a) > f(x_1)$. Таким образом, $f(x_1) < f(x_2)$. Мы показали, что f строго возрастает на отрезке $[a, b]$. Для завершения доказательства надо рассмотреть ещё случаи

- $x_1 < x_2 < a < b$,
- $x_1 < a < x_2 < b$,
- $x_1 < a < b < x_2$,
- $a < x_1 < b < x_2$,
- $a < b < x_1 < x_2$.

Но, рассуждая аналогично, во всех этих случаях можно доказать, что $f(x_1) < f(x_2)$. \square

5.2.7 Теорема (о непрерывной обратной). *Обратная к непрерывной функции на промежутке непрерывна.*

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f \in \mathcal{C}(I)$ и инъективна. Тогда обратная $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ — непрерывна.

Доказательство. По признаку Больцано f строго монотонна. Пусть для определённости f строго возрастает.

Докажем, что f переводит окрестность точки в окрестность её образа. Пусть $x_0 \in I$ — внутренняя точка I , $\varepsilon > 0$ такое, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. По теореме 5.2.1 о промежуточных значениях,

$$f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)].$$

В силу строгого возрастания функции f

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon).$$

Иными словами, $f(x_0)$ — внутренняя точка этого отрезка, и найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon).$$

Пусть теперь g — обратная функция к функции f , $y_0 = f(x_0)$. Из приведённых рассуждений следует, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Rightarrow f(g(y_0) - \varepsilon) < y < f(g(y_0) + \varepsilon).$$

В силу строгого возрастания функции g из последнего следует, что

$$g(y_0) - \varepsilon < g(y) < g(y_0) + \varepsilon,$$

т. е. для g в точке y_0 выполнено определение предела.

- Если промежуток содержит крайние точки (напр. $I = [a, b]$), то в этих точках требуется несколько модифицировать рассуждения теоремы — доказать, что в этом случае полуокрестность крайней точки перейдёт в полуокрестность образа. Попробуйте сделать рассуждения теоремы подходящими к этому случаю.

- Если f убывает, то некоторые рассуждения также придётся поменять. Какие?

5.3 Равномерная непрерывность

5.3.1 Определение. Модулем непрерывности функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ на множестве $E \subseteq D$ называется такая функция $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, что

1. для всех $x, y \in E$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$;
2. $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ и $\omega(0) = 0$.

Функция *равномерно непрерывна на E* , если такой модуль для неё существует. Функцию называем *равномерно непрерывной*, если она равномерно непрерывна на своей области определения.

5.3.2 Свойства (равномерно непрерывных функций).

1. *равномерно непрерывная функция непрерывна;*
2. *если функция равномерно непрерывна на каком-то множестве, то она равномерно непрерывна и на любом его подмножестве;*
3. *сумма равномерно непрерывных функций равномерно непрерывна.*

Из определения ясно, что модуль непрерывности существует только у непрерывной функции — из равномерной непрерывности следует непрерывность. Обратное в общем случае неверно, функция может быть *неравномерно непрерывной*, т. е. быть непрерывной, но при этом не иметь модуля непрерывности на заданном множестве. Модуль непрерывности, с которым мы будем работать чаще всего, это линейный модуль:

5.3.3 Определение. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна по Липшицу* или *липшицева*, если существует постоянная $L \geq 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

для всех $x, y \in D$. Это условие эквивалентно тому, что у функции есть линейный модуль непрерывности $\omega(t) = Lt$.

5.3.4 Пример. Функция $f(x) = \sin(x^2)$ лишицева на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Действительно,

$$|\sin(x^2) - \sin(y^2)| \leq |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2|x - y|$$

для всех $x, y \in [0, 1]$. □

В дальнейшем мы научимся находить линейный модуль непрерывности, используя дифференциальное исчисление.

5.3.5 Пример. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ не липшицева на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Действительно, если рассмотреть пару точек 0 и $x > 0$, то отношение

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

не ограничено. Т. е. не существует такой постоянной $L \geq 0$, чтобы было выполнено $|f(x) - f(0)| \leq L|x - 0|$ для всех $x \in [0, 1]$. \square

Функция в предыдущем примере всё же равномерно непрерывна, однако её модуль непрерывности «хуже».

5.3.6 Определение. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна по Гёльдеру с показателем* $\alpha \in (0, 1)$ или *гёльдерова*, если существует постоянная $L \geq 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

для всех $x, y \in D$. Это условие эквивалентно тому, что у функции есть степенной модуль непрерывности $\omega(t) = Lt^\alpha$.

5.3.7 Пример. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ гёльдерова с показателем $\frac{1}{2}$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть для определённости $y \geq x \geq 0$. Тогда

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y - 2\sqrt{xy} + x \leq y - 2x + x = y - x.$$

Отсюда $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$. \square

5.3.8 Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $f(0) = 0$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, но не гёльдерова ни с каким показателем.

Доказательство. То, что какой-то модуль непрерывности у этой функции есть, следует из теоремы Кантора 5.3.10, доказанной ниже. Однако, если рассмотрим пару точек 0 и $x > 0$, то отношение

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|^\alpha} = \frac{1}{|x^\alpha \ln x|}$$

неограничено в окрестности нуля ни для какого $\alpha > 0$. \square

5.3.9 Пример. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет модуля непрерывности на интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности точек

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, но $|f(x_n) - f(y_n)| = 2$. Это противоречит существованию какого бы то ни было модуля непрерывности. \square

5.3.10 Теорема (Кантора о непрерывной функции на отрезке). *Непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Определим функцию $\omega(t)$, $t \geq 0$, как

$$\omega(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq t\}. \quad (5.3.1)$$

По теореме Вейерштрасса 5.2.3 функция f ограничена, следовательно, \sup в определении (5.3.1) конечен. Докажем, что функция ω есть модуль непрерывности f . Из определения (5.3.1) сразу следует, что

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

Допустим, что $\omega(t) \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность t_n такая, что

$$t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, \quad \text{и} \quad \omega(t_n) > \varepsilon_0.$$

Для фиксированного n из $\omega(t_n) > \varepsilon_0$ и определения \sup следует, что найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$ такие, что

$$|x_n - y_n| \leq t_n, \quad \text{но} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0.$$

По теореме 2.6.5 Больцано — Вейерштрасса из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$ при $k \rightarrow \infty$. При этом, так как

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq t_{n_k} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow +\infty$, также выполнено $y_{n_k} \rightarrow c$. Из непрерывности функции f в точке c получаем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(c) - f(c)| = 0,$$

что противоречит утверждению $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon_0$. Таким образом, мы вынуждены заключить, что $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$. \square

6 Производная

6.1 Линейные функции

Существуют два разных по смыслу понятия линейной функции: геометрическое и алгебраическое.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ: функция f линейна, если её график — прямая. Вам известно, что такая функция имеет вид $f(x) = kx + b$.

В этом курсе мы, однако, используем другое, алгебраическое понятие.

6.1.1 Определение. Пусть V_1, V_2 — векторные пространства (над \mathbb{R}). Отображение $L : V_1 \rightarrow V_2$ называется *линейным*, если оно:

1. однородно: $L(\alpha \vec{x}) = \alpha L(\vec{x})$ для всех $\vec{x} \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. аддитивно: $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$ для всех $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Иными словами можно сформулировать это определение так — отображение L линейно, если её значение на линейной комбинации равно линейной комбинации значений:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad L(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha L(\vec{x}) + \beta L(\vec{y}).$$

6.1.2 Лемма (о линейной функции). *Функция $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейна тогда и только тогда, когда*

$$L(x) = kx.$$

Причём $k = L(1)$.

Доказательство. Достаточность следует из свойств произведения чисел. Докажем необходимость. Пусть $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная. Тогда

$$L(x) = L(x \cdot 1) = x \cdot L(1).$$

Обозначив $k := L(1)$ получаем требуемый вид функции. □

График линейной функции $L(x) = kx$ — прямая, проходящая через ноль. Коэффициент k есть тангенс угла между прямой и положительным направлением оси x . Действительно, в прямоугольном треугольнике на [рис. 6](#) имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L(h)}{h} = \frac{kh}{h} = k.$$

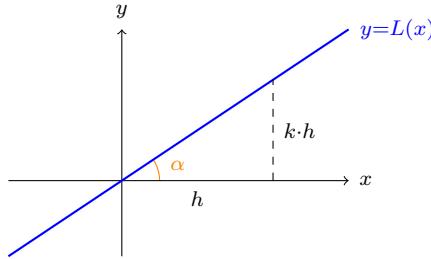


Рис. 6: Линейная функция.

6.2 Производная и дифференциал

Исторически существуют два определения производной. Ньютон определял её из физических соображений, как мгновенную скорость роста функции, а Лейбниц из геометрических соображений — используя касательную к графику функции.

6.2.1 Определение (по Ньютону). Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 . Если существует предел приращения функции к приращению её аргумента:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

то он называется *производной функции f в точке x_0* и, как правило, обозначается одним из символов

$$f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0), \quad \frac{d}{dx} f(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

6.2.2 Определение (по Лейбницу). Функция f , определённая в окрестности точки x_0 называется *дифференцируемой в точке x_0* , если существует линейная функция $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Функция L при этом называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или df_{x_0} .

Геометрически определение Лейбница означает, что график функции f должен касаться некоторой прямой.

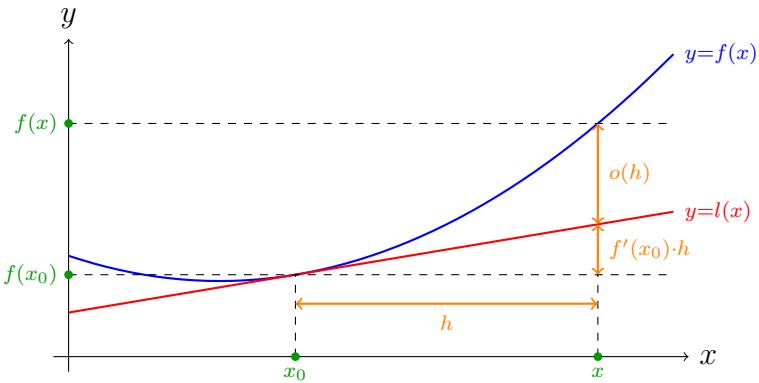


Рис. 7: Производная функции и касательная к её графику.

6.2.3 Определение. Графики функций f и g *касаются с порядком* $n \in \mathbb{N}$ в точке x_0 , если $f(x) = g(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

6.2.4 Теорема (о разложении Лейбница). *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда у неё существует конечная производная в точке x_0 . При этом $df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$, т. е. выполнено разложение*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Если в точке x_0 определена производная $f'(x_0)$, то в терминах асимптотических отношений имеем

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h),$$

где $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Отсюда

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha(h)h,$$

что и требовалось доказать. Обратно, если

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

то по лемме 6.1.2 имеет место представление $L(h) = kh$, $k \in \mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{kh + o(h)}{h} = k + \frac{o(h)}{h} \rightarrow k \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Таким образом, $f'(x_0) = k$. Теорема доказана. \square

6.2.5 Определение. Фразу «функция f дифференцируема в точке x_0 » записываем как $f \in \mathcal{D}(x_0)$. Говорим, что функция f дифференцируема на множестве E , и обозначаем $f \in \mathcal{D}(E)$, если f дифференцируема в каждой точке множества E . Функцию f , дифференцируемую на всей области определения, называем просто *дифференцируемой*.

6.2.6 Определение. Если функция f дифференцируема на множестве E , то можно определить функцию $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую аргументу $x \in E$ число $f'(x)$. Такую функцию называют *производной функцией* или также *производной* функции f .

6.3 Свойства дифференцируемых функций

1° Если $f \in \mathcal{D}(x_0)$, то $f \in \mathcal{C}(x_0)$.

Доказательство. Сразу следует из разложения Лейбница 6.2.4. \square

2° Производная линейна (в смысле определения 6.1.1). Если $f, g \in \mathcal{D}(x_0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $f + g, \alpha f \in \mathcal{D}(x_0)$ и

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (\alpha \cdot f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x).$$

Докажите это самостоятельно.

3° Если $f, g \in \mathcal{D}(x_0)$, то $f \cdot g \in \mathcal{D}(x_0)$, и выполнено правило Лейбница

$$(fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0).$$

Доказательство. По определению производной имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) \end{aligned}$$

при $x \rightarrow x_0$. Заметим, что $f(x) \rightarrow f(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$ в силу свойства 1°. \square

4° Если $f \in \mathcal{D}(x_0)$ и $f(x_0) \neq 0$, то $\frac{1}{f} \in \mathcal{D}(x_0)$ и

$$(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Доказательство. По свойству 1° функция f непрерывна в точке x_0 . Следовательно, в некоторой окрестности точки x_0 выполнено $f(x) \neq 0$ и функция $\frac{1}{f}$ определена. Далее, по определению производной

$$(\frac{1}{f})'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)} = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Свойство доказано. \square

5° Если $f, g \in \mathcal{D}(x_0)$, $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(x_0)$ и

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0).$$

Докажите это, используя два предыдущих свойства.

Следующая теорема также известна как правило дифференцирования сложной функции или цепное правило.

6.3.1 Теорема (о дифференцировании композиции). *Композиция дифференцируемых функций дифференцируема. Если $f \in \mathcal{D}(x_0)$, $g \in \mathcal{D}(f(x_0))$, то $g \circ f \in \mathcal{D}(x_0)$, и*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Доказательство. По определению $f(x) \in \mathcal{D}(x_0)$ означает, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

при $x \rightarrow x_0$. По определению o -малого в окрестности точки x_0 определена функция $\alpha(x)$:

$$o(x - x_0) = \alpha(x)(x - x_0),$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Таким образом,

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(x))(x - x_0). \quad (6.3.1)$$

Обозначим для удобства $y_0 = f(x_0)$. Аналогично, для функции g в окрестности точки y_0 имеем

$$g(y) - g(y_0) = (g'(y_0) + \beta(y))(y - y_0), \quad (6.3.2)$$

где $\beta(y) \rightarrow \beta(y_0) = 0$ при $y \rightarrow y_0$. Заметим, что тождество (6.3.2) не нарушается, если положить $\beta(y_0) = 0$.

Сделаем в равенстве (6.3.2) подстановку $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, и воспользуемся равенством (6.3.1):

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= [g'(f(x_0)) + \beta(f(x))] [f(x) - f(x_0)] \\ &= [g'(f(x_0)) + \beta(f(x))] [f'(x_0) + \alpha(x)] (x - x_0) \\ &= [g'(f(x_0))f'(x_0) + g'(f(x_0))\alpha(x) + \beta(f(x))f'(x_0) + \beta(f(x))\alpha(x)] (x - x_0). \end{aligned}$$

Теперь в полученном равенстве необходимо узнать разложение Лейбница 6.2.4:

$$g \circ f(x) - g \circ f(x_0) = L(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Первое слагаемое в полученном разложении линейно (постоянная умножить на приращение аргумента):

$$L(x - x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0).$$

Это и есть дифференциал композиции, если мы докажем, что остаток есть $o(x - x_0)$. Для этого лишь надо показать, что выражение в скобках (за исключением первого слагаемого) стремится к нулю. В силу того, что $f(x) \rightarrow f(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$ и функция β непрерывна в x_0 , получаем $\beta(f(x)) \rightarrow \beta(f(x_0)) = 0$ при $x \rightarrow x_0$. Таким образом,

$$g'(f(x_0))\alpha(x) + \beta(f(x))f'(x_0) + \beta(f(x))\alpha(x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow x_0$. Теорема доказана. \square

6.3.2 Теорема (правило дифференцирования обратной функции). *Пусть U — некоторая окрестность точки x_0 , $f : U \rightarrow f(U)$ — биекция. Обозначим как $g : f(U) \rightarrow U$ обратную функцию к f и $y_0 = f(x_0)$. Если*

1. $f \in \mathcal{D}(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$;

2. $g \in \mathcal{C}(y_0)$;

тогда $g \in \mathcal{D}(y_0)$ и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Итак, определён конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Сделаем в этом пределе замену переменной $x = g(y)$. По теореме 4.2.4 это можно сделать, т. к. g инъективна и $g(y) \rightarrow g(y_0)$. Таким образом, существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Поскольку $f'(x_0) \neq 0$, по свойствам арифметики пределов существует также конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана. \square

6.4 Теоремы о среднем

Во всех теоремах этого раздела рассматривается функция, непрерывная на отрезке и дифференцируемая внутри него (т. е. всюду, за исключением граничных точек). В граничных точках отрезка от функции требуется только непрерывность (т. е. не обязательно даже существование односторонних производных).

6.4.1 Лемма (Ферма). *Если $f \in \mathcal{D}(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$, то во всякой окрестности точки x_0 функция f принимает значения как меньшие, так и большие $f(x_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $f'(x_0) > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при $0 < |x - x_0| < \delta$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Отсюда при $x > x_0$ выполнено $f(x) > f(x_0)$, а при $x < x_0$ выполнено $f(x) < f(x_0)$. \square

6.4.2 Теорема (Ролля о среднем). *Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая $c \in (a, b)$, что*

$$f'(c) = 0.$$

Доказательство. Если f постоянна, то её производная равна нулю во всякой внутренней точке.

Если f непостоянна, то найдутся точки, в которых её значение меньше или больше $f(a)$. Пусть для определённости где-то она принимает значение, большее $f(a)$. По теореме Вейерштрасса 5.2.3 найдётся такое c , что $f(c) = \max f([a, b])$. Это внутренняя точка, так как её значение больше чем $f(a)$ и $f(b)$, и по лемме Ферма 6.4.1 значение производной в этой точке не может быть ненулевым. \square

6.4.3 Теорема (Лагранжа о среднем). *Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда существует такая $c \in (a, b)$, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Заметим, что $g(a) = g(b) = f(a)$, т. е. g удовлетворяет условиям теоремы Ролля 6.4.2. Следовательно, найдётся $c \in (a, b)$ такое, что

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Точка c — искомая. \square

6.4.4 Следствие (о приращении дифференцируемой функции). *Если производная функции ограничена, то сама функция липшицева.*

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $|f'(x)| \leq L$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

для всех $x, y \in [a, b]$.

Доказательство. Действительно, по теореме Лагранжа 6.4.3 между любыми неравными x, y из отрезка $[a, b]$ найдётся точка ξ такая, что

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq L|x - y|.$$

Для $x = y$ неравенство очевидно. \square

6.4.5 Теорема (Коши о среднем). *Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда найдётся $c \in (a, b)$ такое, что*

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(c)}{g'(c)}(g(b) - g(a)).$$

Доказательство. Заметим, что $g(a) \neq g(b)$, иначе по теореме Ролля 6.4.2 её производная обращается в ноль в некоторой внутренней точке.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Имеем $h(a) = h(b) = f(a)$. По теореме Ролля найдётся $c \in (a, b)$ такое, что

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c).$$

Утверждение теоремы следует. \square

6.5 Старшие производные

6.6 Формула Тейлора

6.6.1 Определение. Пусть $f \in D^n(x_0)$. Многочленом Тейлора степени n функции f относительно точки x_0 назовём многочлен

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Здесь используются соглашения $f^{(0)} = f$, $(x - x_0)^0 = 1$.

Легко проверить следующие

6.6.2 Свойства (многочлена Тейлора).

1) Многочлен Тейлора — единственный многочлен $P(x)$ степени n такой, что

$$f(x_0) = P(x_0), \quad f'(x_0) = P'(x_0), \quad f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0).$$

2) Производная многочлена Тейлора степени n функции f — многочлен Тейлора степени $n - 1$ функции f' .

6.6.3 Формула (Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть $f \in D^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Иными словами, если T_n — многочлен Тейлора степени n функции f относительно точки x_0 , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n .

При $n = 1$ утверждение становится уже доказанным разложением Лейбница 6.2.4:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Далее, пусть при $n - 1$ утверждение доказано, т. е. если $\varphi \in \mathcal{D}^{n-1}(x_0)$ и $P_{n-1}(x)$ — её многочлен Тейлора степени $n - 1$, то

$$\frac{\varphi(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow x_0$. В частности, утверждение выполнено для функции f' , т. е.

$$f'(x) = T'_n(x) + \alpha(x)(x - x_0)^{n-1},$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и $\alpha(x_0) = 0$. Здесь мы пользуемся тем, что многочлен Тейлора для функции f' это T'_n — производная многочлена Тейлора функции f .

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - T_n(x)$. По предположению индукции $g'(x) = \alpha(x)(x - x_0)^{n-1}$. По теореме 6.4.3 Лагранжа о среднем, для каждого x в некоторой окрестности точки x_0 найдётся такое $c(x)$ между x и x_0 , что

$$g(x) - g(x_0) = g'(c(x))(x - x_0) = \alpha(c(x))(x - x_0)^n.$$

Поскольку $g(x_0) = 0$, получаем

$$g(x) = f(x) - T_n(x) = \alpha(c(x))(x - x_0)^n.$$

Осталось убедиться, что $\alpha(c(x)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Действительно, точка $c(x)$ лежит между x и x_0 (т. е. либо $x < c(x) < x_0$ либо $x_0 < c(x) < x$), следовательно $c(x) \rightarrow x_0$ при $x \rightarrow x_0$. Поскольку функция α непрерывна в x_0 , получаем $\alpha(c(x)) \rightarrow \alpha(x_0) = 0$ при $x \rightarrow x_0$. \square

6.6.4 Формула (Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть $f \in \mathcal{D}^{n+1}([x_0, x_1])$, $T_n(x)$ — её многочлен Тейлора степени n относительно точки x_0 . Тогда найдётся точка ξ между x_1 и x_0 , что*

$$f(x_1) - T_n(x_1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_1 - x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - T_n(x) - (x - x_0)^{n+1} \frac{f(x_1) - T_n(x_1)}{(x_1 - x_0)^{n+1}}.$$

Убедитесь, что при этом $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Кроме того, $g(x_1) = 0$.

Так как $g(x_0) = g(x_1) = 0$, по теореме 6.4.2 Ролля о среднем, найдётся точка ξ_1 между x_0 и x_1 такая, что $g'(\xi_1) = 0$. Далее, вновь по теореме Ролля, найдётся ξ_2 между x_0 и ξ_1 такая, что $g''(\xi_2) = 0$. Применив теорему Ролля $n + 1$ раз, мы найдём такую ξ_{n+1} , что $g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$. Получаем

$$0 = g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) - 0 - (n+1)! \frac{f(x_1) - T_n(x_1)}{(x_1 - x_0)^{n+1}}.$$

Отсюда ξ_{n+1} — искомая точка. \square

6.6.5 Следствие (оценка разности между функцией и её многочленом Тейлора). *Пусть $f \in \mathcal{D}^{n+1}([x_0, x_1])$ и $|f^{(n+1)}(x)| \leq L$ для всех $x \in [x_0, x_1]$. Пусть также $T_n(x)$ — её многочлен Тейлора степени n относительно точки x_0 . Тогда*

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{L}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

для всех $x \in [x_0, x_1]$.

7 Исследование функции

7.1 Исследование на монотонность и экстремумы

7.1.1 Признак (монотонности достаточный). *Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) . Если*

- $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f возрастает на $[a, b]$;
- $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f строго возрастает на $[a, b]$;
- $f'(x) \leq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f убывает на $[a, b]$;
- $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f строго убывает на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. По теореме Лагранжа найдётся точка $\xi \in (x_1, x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Отсюда знак этой разности определяется знаком производной. \square

7.1.2 Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Точка $p \in D$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции f , если найдётся окрестность U точки p , что $f(p) \geq f(x)$ (соответственно $f(p) \leq f(x)$) для всех $x \in D \cap U$. Точка p — точка *строгого локального максимума (минимума)*, если к тому же неравенство строгое при $x \neq p$. Точки минимума и максимума также называют точками *экстремума* функции f .

7.1.3 Признак (локального экстремума необходимый). *Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — внутренняя точка D . Если x_0 — точка локального экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f' \notin \mathcal{D}(x_0)$.*

Доказательство. Если производная в точке x_0 определена и отлична от нуля, по лемме Ферма 6.4.1 точка x_0 не является точкой экстремума. \square

7.1.4 Признак (локального экстремума достаточный). *Пусть f непрерывна на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и дифференцируема на этом интервале, за исключением, может быть, точки x_0 . Если*

- $f'(x) \leq 0$ при $x < x_0$ и $f'(x_0) \geq 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка локального минимума;
- $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x_0) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка строгого локального минимума;
- $f'(x) \leq 0$ при $x < x_0$ и $f'(x_0) \geq 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка локального максимума;
- $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x_0) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка строгого локального максимума.

7.2 Выпуклость

7.2.1 Признак (выпуклости достаточный). *Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дважды дифференцируема на (a, b) . Если*

- $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$, тогда f выпукла на $[a, b]$;

- $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, тогда f строго возрастает;
- $f''(x) \leq 0$ для всех $x \in (a, b)$, тогда f монотонно убывает;
- $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, тогда f строго убывает.

Предметный указатель

- абсолютная величина числа
 - вещественного, 13
 - комплексного, 36
- арифметический корень, 29
- бесконечность, 11
- грань множества
 - верхняя, 10
 - нижняя, 10
- группа, 4
- знак числа, 14
- инфимум, 11
- лемма
 - Ферма, 58
- мажоранта, 10
- максимум, 9
- метрика, 14
- минимум, 9
- миноранта, 10
- множество
 - ограниченное, 10
- модуль числа
 - вещественного, 13
 - комплексного, 36
- модуль непрерывности, 49
- окрестность
 - $+\infty$, 35
 - $-\infty$, 35
- вещественного числа, 34
- проколотая, 41
- подпоследовательность, 24
- поле, 6
- последовательность, 16
 - возрастающая, 21
 - Коши, 27
 - монотонная, 21
 - неограниченная, 17
 - ограниченная, 17
 - расходящаяся, 17
 - сходящаяся, 17
 - убывающая, 21
 - фундаментальная, 27
- предел, 35
 - верхний, 25
 - вещественный, 17
 - конечный, 17
 - нижний, 25
 - последовательности, 17
 - частичный, 24
- принцип
 - Архимеда, 12
 - вложенных отрезков, 9
 - Коши — Кантора, 9
- разность, 5
- разрыв
 - I рода, 45
 - II рода, 45
 - скакок, 45
 - существенный, 45
 - устранимый, 45
- расстояние, 14
- скакок, 45
- супремум, 11
- теорема
 - Больцано — Коши, 45

Вейерштрасса, 46
Кантора, 51
Коши о среднем, 59
Лагранжа, 59
об обратной функции, 48
о промежуточных значениях, 45
Ролля, 58

точка
предельная, 41

формула
Тейлора, 60

функция
дифференцируемая, 55
линейная, 52
липшицева, 49
равномерно непрерывная, 49
гёльдерова, 50

частное, 6

число
вещественное, 3
действительное, 3
 e , 32
комплексное, 3, 36
натуральное, 2
Непера, 32
обратное, 5
противоположное, 4
рациональное, 2
целое, 2

экспонента, 33

Список литературы

- [1] *C. K. Водопьянов*, Пределы, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие.
<http://math.nsc.ru/~matanalyse/basic2.pdf>
- [2] *B. A. Зорич*, Математический анализ, ч. 1. М.: ФАЗИС, 1997. xiv+554 с.
- [3] *Ю. Г. Решетняк*, Курс математического анализа, ч. 1, кн. 1. / Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. 454 с.
- [4] Веб-страница курса.
<https://matan.nsu.ru>