

Вопросы к экзамену по алгебре

Зима, 2025 г.

1. Алгебраическая операция, алгебраическая система, примеры.
2. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических систем, подсистема, примеры.
3. Отношение эквивалентности, теорема о разбиении множества на классы, фактор–множество.
4. Конгруэнция. Фактор–система.
5. Группа: аксиомы, следствия из аксиом, примеры.
6. Гомоморфизм, его свойства, изоморфизм групп.
7. Подгруппа. Необходимое и достаточное условие того, что подмножество группы является подгруппой.
8. Ядро и образ гомоморфизма. Нормальная подгруппа.
9. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа.
10. Теорема о фактор–группах.
11. Пересечение подгрупп. Порождающее множество. Примеры.
12. Циклические группы, их свойства.
13. Кольца: аксиомы, следствия из аксиом, примеры.
14. Кольца вычетов.
15. Делители нуля, примеры.
16. Поля: аксиомы, следствия из аксиом, характеристика поля, примеры.
17. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец и полей.
18. Подкольцо, подполе. Пересечение подколец, подполей.
19. Ядро и образ гомоморфизма. Идеалы.
20. Порождающее множество идеала. Главный идеал.
21. Фактор–кольца. теорема о фактор–кольцах.
22. Группы подстановок, определения и примеры.
23. Теорема о разложении подстановки в произведение независимых циклов.

24. Чётность подстановки, теорема о разложение подстановки в произведение транспозиций.
25. Декремент, чётность подстановки, знакопеременная группа.
26. Теорема о равенстве числа чётных и нечётных подстановок в группе подстановок.
27. Знак подстановки. Гомоморфизм группы подстановок на циклическую группу порядка 2.
28. Теорема Кэли.
29. Кольца матриц: операции над матрицами. Суперпозиция линейных замен.
30. Кольцо матриц.
31. Диагональные матрицы и трансвекции. Умножение произвольной матрицы на диагональную и трансвекцию.
32. Теорема о разложение матрицы на диагональную и трансвекции.
33. Определитель обратимости матрицы. Вычисление определителей порядка 2 и 3.
34. Определитель полураспавшейся и транспонированной матриц.
35. Поведение определителя при перестановке строк.
36. Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк.
37. Теорема о существовании обратной матрицы.
38. Определитель произведения матриц.
39. Разложение определителя по строке.
40. Применение определителей к системам линейных уравнений.
41. Применение определителей к вычислению обратной матрицы.
42. Поле комплексных чисел: определение, существование.
43. Поле комплексных чисел: определение, единственность.
44. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.
45. Общая линейная группа и её важнейшие подгруппы — специальная, ортогональная, унитарная.
46. Векторное пространство: аксиоматика, примеры. Векторное пространство как алгебраическая система.

47. Примеры векторных пространств. Гомоморфизм и изоморфизм векторных пространств.
48. Линейная зависимость векторов. Линейно эквивалентные системы векторов.
49. Теорема о замене.
50. База и ранг системы векторов. Размерность пространства.
51. Координаты вектора. Изоморфизм любого пространства пространству строк.
52. Связь между базами векторного пространства. Преобразование координат вектора при смене базы пространства.
53. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств.
54. Подпространства. Прямая сумма, линейная оболочка подпространств.
55. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.
56. Ранг матрицы. Теорема о ранге.
57. Теорема о ранге произведения матриц.
58. Системы линейных уравнений: критерий совместности.
59. Системы линейных уравнений: общее решение – определение и отыскание.
60. Однородные системы. Связь произвольных систем с однородными.
61. Однородные системы: пространство решений, фундаментальные системы решений.
62. Отыскание базы суммы и пересечения подпространств.
63. Теорема Фредгольма.
64. Фактор–пространство.
65. Теорема о размерности фактор–пространства.
66. Кольца многочленов от одной переменной.
67. Алгоритм деления с остатком.
68. Наибольший общий делитель двух многочленов.
69. Линейное уравнение с двумя неизвестными в кольце многочленов: критерий разрешимости.
70. Взаимно простые многочлены.
71. Линейное уравнение с двумя неизвестными в кольце многочленов: общее решение.