Métodos de Modelação Estocástica

Modelação e Desempenho de Redes e Serviços

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2024/2025

Experiência aleatória

- Numa experiência aleatória, o *espaço de resultados*, S, é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência
- Qualquer subconjunto E do espaço de resultados S designa-se por evento ou *acontecimento*

- Dados dois acontecimentos E e F, podem-se definir outros acontecimentos:
  - A *união dos acontecimentos*, $E \cup F$, é o conjunto de resultados possíveis que pertence a pelo menos um dos acontecimentos
  - A *intersecção dos acontecimentos*, EF, é o conjunto de resultados possíveis que pertence simultaneamente aos dois acontecimentos

---

- Quando $EF = \emptyset$ ($\emptyset$ é o conjunto vazio) os acontecimentos dizem-se *mutuamente exclusivos*
- O *complemento de E*, E^c, é o conjunto de resultados possíveis de S que não pertencem a E

Probabilidades definidas sobre acontecimentos

- Para cada acontecimento E de S, admite-se a existência de um número $P(E)$ designado por probabilidade de E, se satisfaz as seguintes condições:

  (1) $0 \leq P(E) \leq 1$

  (2) $P(S) = 1$

  (3) Para qualquer conjunto de acontecimentos mutuamente exclusivos $E_1, E_2, E_3, \ldots$

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$$

- Corolários:

  $P(E) + P(E^c) = 1$

  $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

Probabilidades condicionadas

- Dados dois acontecimentos E e F, a *probabilidade condicionada de E ocorrer dado que F ocorreu* designa-se por $P(E|F)$ e é definida por

$$P(E|F) = P(EF) / P(F)$$

- Dois acontecimentos E e F dizem-se *acontecimentos independentes* se

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

- Se E e F são independentes, então:

$$P(E|F) = P(EF) / P(F) = P(E)P(F) / P(F) = P(E)$$

$$P(F|E) = P(FE) / P(E) = P(F)P(E) / P(E) = P(F)$$

ou seja, se o conhecimento que um acontecimento ocorreu não afetar a probabilidade do outro ter ocorrido.

Regra de Bayes

Sejam F_1, F_2, …, F_n acontecimentos mutuamente exclusivos tais que a sua união forma o espaço de resultados S. Então, a probabilidade de um acontecimento E é dada por:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) P(F_i)$$

Sabendo que ocorreu o acontecimento E, a probabilidade de F_j (j = 1, 2, …, n) ter ocorrido é dada por:

$$P(F_j \mid E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E \mid F_j) P(F_j)}{P(E)} = \frac{P(E \mid F_j) P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) P(F_i)}$$

Probabilidades condicionadas – Exemplo 1

Num teste de escolha múltipla, um estudante sabe a resposta certa com probabilidade p e adivinha a resposta com probabilidade $1 - p$. Ao adivinhar a resposta, o estudante acerta com probabilidade $1/m$, sendo m o número de alternativas de escolha múltipla.

Determine a probabilidade de um estudante *(i)* responder corretamente a uma pergunta e *(ii)* saber a resposta dado que a respondeu corretamente.

Acontecimentos: E – o aluno responde corretamente
F_1 – o aluno sabe a resposta
F_2 – o aluno não sabe a resposta

(i) $P(E) = P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)$

$= 1 \times p + 1/m \times (1 - p) =$

$= p + (1 - p)/m$

(ii) $P(F_1|E) = P(E|F_1)P(F_1) \;/\; P(E)$

$= 1 \times p \;/\; [p + (1 - p)/m] =$

$= p\, m \;/\; [1 + (m - 1)\, p]$

Se $p = 50\%$ e $m = 4$, então *(i)* $P(E) = 62.5\%$ e *(i)* $P(F_1|E) = 80\%$

Probabilidades condicionadas – Exemplo 2

Numa ligação sem fios (wireless) entre dois equipamentos, a probabilidade dos pacotes de dados serem recebidos com erros é de 0.1% em condições normais ou de 10% quando há interferências. A probabilidade de haver interferência é de 2%. Os equipamentos têm a capacidade de verificar na receção se os pacotes de dados foram ou não foram recebidos com erros.

Determine: *(i)* a probabilidade de um pacote ser recebido com erros e *(ii)* se um pacote for recebido com erros, qual a probabilidade da ligação estar em interferência.

Acontecimentos: E – o pacote é recebido com erros
F_1 – a ligação está em condições normais
F_2 – a ligação está em interferência

(i) $P(E) = P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)$

$= 0.001\times(1 - 0.02) + 0.1\times 0.02$

$= 0.00298 = 0.298\%$

(ii) $P(F_2|E) = P(E|F_2)P(F_2) \,/\, P(E)$

$= 0.1 \times 0.02 \,/\, 0.00298$

$= 0.671 = 67.1\%$

Variáveis aleatórias

- Uma ***variável aleatória X é uma função*** que atribui um número real a cada ponto do espaço de resultados *S* de uma experiência aleatória.

- A ***função distribuição*** (ou função de distribuição cumulativa) da v.a. *X* é:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad , -\infty < x < +\infty$$

- ***Propriedades*** da função distribuição:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$ para todo o x

(2) se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$ (função não decrescente)

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(4) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, para $a < b$

Variáveis aleatórias discretas

- Uma *<u>variável aleatória X diz-se discreta</u>* se puder tomar, quando muito, um número contável de valores x_1, x_2, …, x_i, …

- Define-se *<u>função probabilidade</u>* (ou função massa de probabilidade) da v.a discreta X por

$$f(x_i) = P(X = x_i) \qquad \text{para todos os valores de } i = 1,2,3,...$$

- Obrigatoriamente, tem de acontecer que: $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

- A *<u>função distribuição</u>* da v.a discreta X é:

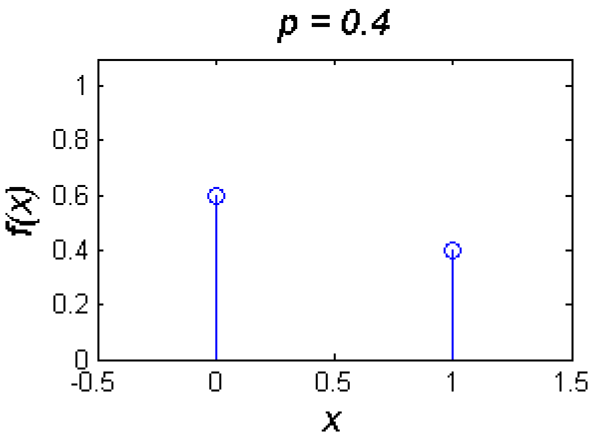
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \qquad , -\infty < x < +\infty$$

Exemplos de variáveis aleatórias discretas

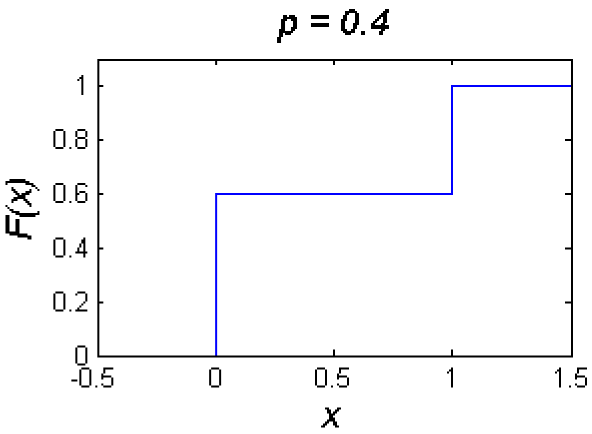
Variável aleatória de Bernoulli: experiência que pode resultar em sucesso com probabilidade *p* ou insucesso com probabilidade 1 – *p*.

Se *X* = 1 representar um sucesso e *X* = 0 um insucesso, a função probabilidade é:

$$f(i) = p^i (1-p)^{1-i}, i = 0,1$$



f(x) - função probabilidade



F(x) - função distribuição

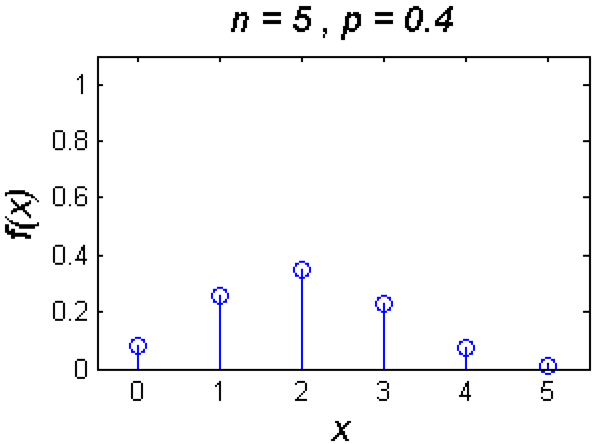
Exemplos de variáveis aleatórias discretas

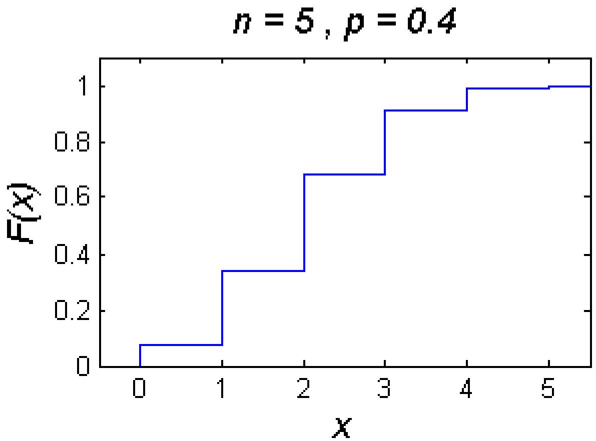
<u>*Variável aleatória binomial*</u>: conjunto de *n* experiências de Bernoulli independentes, cada uma das quais resulta num sucesso com probabilidade *p* ou num insucesso com probabilidade 1 – *p*.

Se *X* representar o número de sucessos em *n* experiências, a função probabilidade é:

$$f(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

onde $$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$



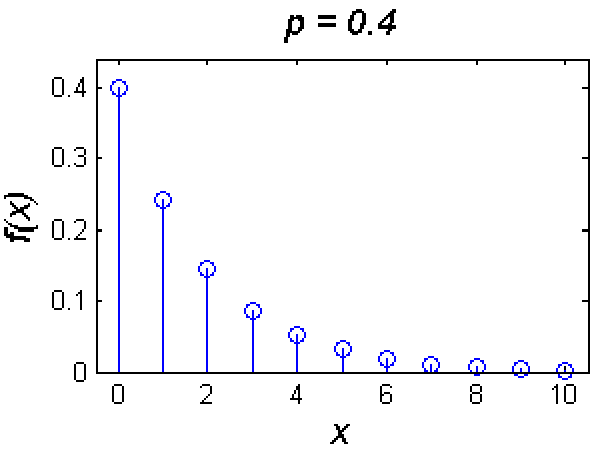


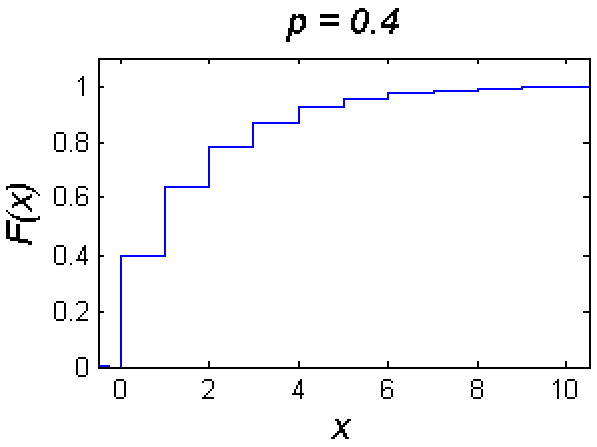
Exemplos de variáveis aleatórias discretas

<u>*Variável aleatória geométrica*</u>: são realizadas experiências de Bernoulli independentes com parâmetro *p* (probabilidade de sucesso) até que ocorra um sucesso.

Se *X* representar o número de insucessos antes do sucesso, a função probabilidade é

$$f(i) = (1-p)^i p \ \ , \ i = 0, 1, 2, \ldots$$





Se *X* representar o número de experiências até ao sucesso, a função probabilidade é

$$f(i) = (1-p)^{i-1} p \ \ , \ i = 1, 2, \ldots$$

Variáveis aleatórias discretas – Exemplo 3

Numa dada ligação de dados, a probabilidade de erro de bit (BER – *Bit Error Rate*) é 10^{-5} e os erros em diferentes bits são estatisticamente independentes.

Determine: *(i)* a probabilidade de um pacote de dados de 100 Bytes ser recebido sem bits errados e *(ii)* a probabilidade de um pacote de dados de 1000 Bytes ser recebido com 2 ou mais bits errados.

O número de bits errados num pacote é uma variável aleatória binomial em que a probabilidade de sucesso é o BER e o número de experiências de Bernoulli é o número de bits do pacote

$$f(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, 1, 2, ..., n$$

(i) $$f(0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = \binom{100 \times 8}{0} \times \left(1-10^{-5}\right)^{100\times 8} = 0.992 = 99.2\%$$

(ii) $$1 - f(0) - f(1) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} - \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1}$$

$$= 1 - \left(1-10^{-5}\right)^{8000} - 8000 \times 10^{-5} \left(1-10^{-5}\right)^{7999} = 3.034\text{E-}3 = 0.3\%$$

Variáveis aleatórias contínuas

- Uma *variável aleatória X diz-se contínua* se existir uma função não negativa $f(x)$ tal que para qualquer conjunto de números reais B:

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$f(x)$ é a *função densidade de probabilidade* da v.a contínua X

- Resulta então que: $$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

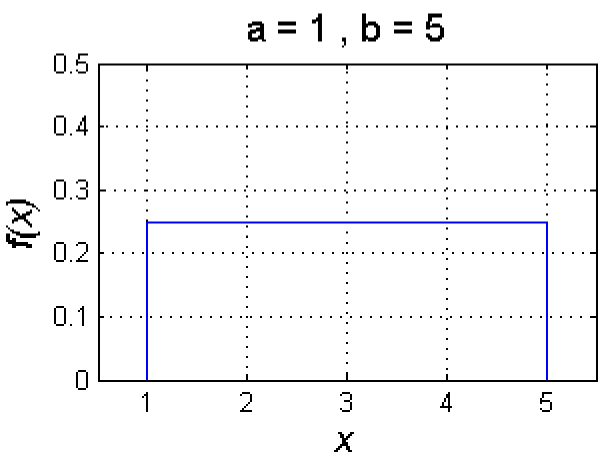
- A *função distribuição* da v.a contínua X é:

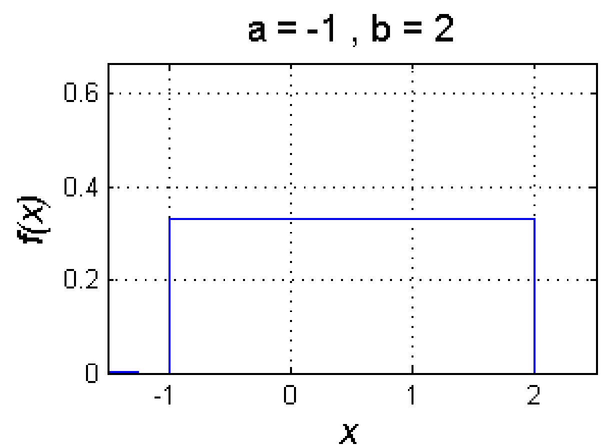
$$F(x) = P(X \in [-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

Variável aleatória com Distribuição Uniforme: uma v.a. diz-se uniformemente distribuída no intervalo [*a*,*b*] se a função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , cc \end{cases}$$

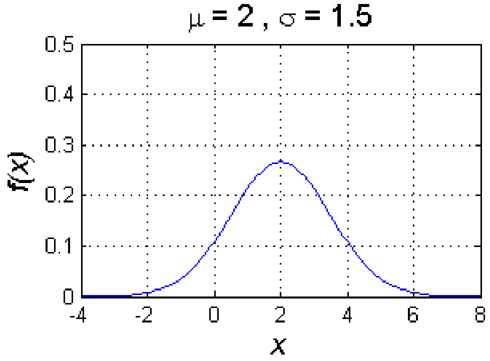




Exemplos de variáveis aleatórias contínuas

<u>Variável aleatória com Distribuição Gaussiana (ou Normal)</u>: Uma v.a. X tem uma distribuição Gaussiana com média μ e desvio padrão σ se a função densidade é dada por:

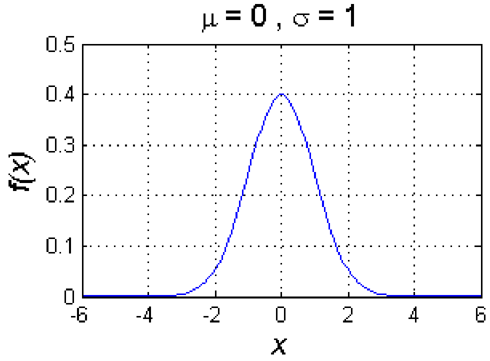
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



Designa-se por distribuição Gaussiana (ou Normal) padrão à distribuição Gaussiana com média 0 e desvio padrão 1.

Neste caso:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



Média de uma variável aleatória

- *Média* ou *valor esperado* de uma v.a. *X*:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} x_j f_X(x_j) \ \ se\ X\ discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \ \ se\ X\ continua \end{cases}$$

- Propriedades importantes:

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$$

- Média da v.a. *Y* = *g*(*X*):

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) f_X(x_j) \ \ se\ X\ discreta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \ \ se\ X\ continua \end{cases}$$

Variância e desvio padrão de uma variável aleatória

- *Variância* de uma v.a. *X*:

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - E[X]^2$$

2º momento da v.a. X

- Propriedades importantes da variância:

$$Var[X] \geq 0$$

$$Var[cX] = c^2\, Var[X]$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$ se X_i forem independentes

- *Desvio padrão* de uma v.a. *X*:

$$\sigma[X] = \sqrt{Var[X]}$$

Exemplo 4

Uma ligação de dados de 10 Mbps suporta um fluxo de pacotes cujo tamanho é 100 Bytes com probabilidade 10%, 500 Bytes com probabilidade 50% e 1500 Bytes com probabilidade 40%. Considere a variável aleatória *X* representativa do tempo de transmissão dos pacotes.

Determine: *(i)* o tempo médio de transmissão dos pacotes *E*[*X*], *(ii)* o segundo momento do tempo de transmissão dos pacotes *E*[*X*^{2}] e *(iii)* a variância do tempo de transmissão dos pacotes *Var* [*X*].

(i)
$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f_X(x_j) = \frac{100 \times 8}{10^7} \times 0.1 + \frac{500 \times 8}{10^7} \times 0.5 + \frac{1500 \times 8}{10^7} \times 0.4$$
$$= 0.688 \times 10^{-3} \text{ seg} = 0.688 \text{ mseg}$$

(ii)
$$E[X^2] = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j)^2 f_X(x_j) = \left(\frac{100 \times 8}{10^7}\right)^2 \times 0.1 + \left(\frac{500 \times 8}{10^7}\right)^2 \times 0.5 + \left(\frac{1500 \times 8}{10^7}\right)^2 \times 0.4$$
$$= 6.5664 \times 10^{-7} \text{ seg}^2$$

Exemplo 4 - continuação

Uma ligação de dados de 10 Mbps suporta um fluxo de pacotes cujo tamanho é 100 Bytes com probabilidade 10%, 500 Bytes com probabilidade 50% e 1500 Bytes com probabilidade 40%. Considere a variável aleatória *X* representativa do tempo de transmissão dos pacotes.

Determine: *(i)* o tempo médio de transmissão dos pacotes $E[X]$, *(ii)* o segundo momento do tempo de transmissão dos pacotes $E[X^2]$ e *(iii)* a variância do tempo de transmissão dos pacotes $Var[X]$.

(iii) **1ª alternativa:** $Var[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$

$$Var[X] = \left(\frac{100\times 8}{10^7} - E[X]\right)^2 \times 0.1 + \left(\frac{500\times 8}{10^7} - E[X]\right)^2 \times 0.5 + \left(\frac{1500\times 8}{10^7} - E[X]\right)^2 \times 0.4$$

$$= 1.833\times 10^{-7}\ \text{seg}^2$$

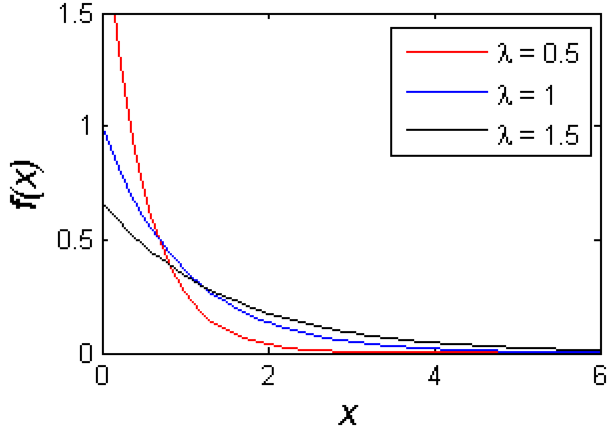
2ª alternativa: $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$Var[X] = 6.5664\times 10^{-7} - \left(0.688\times 10^{-3}\right)^2 = 1.833\times 10^{-7}\ \text{seg}^2$$

Distribuição exponencial

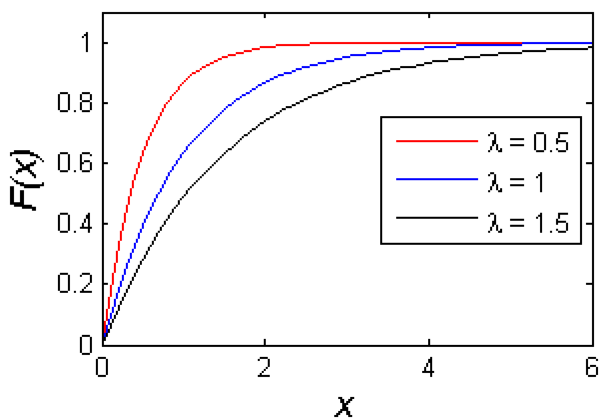
- Uma v. a. contínua *X* tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ, $\lambda > 0$, se a sua função densidade de probabilidade for:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



- A função distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Distribuição exponencial

- A média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição exponencial são:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \qquad \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- A distribuição exponencial não tem memória, isto é,

$$P\{X > s + t \mid X > t\} = P\{X > s\}$$

- Se X_1 e X_2 são v. a. independentes e exponencialmente distribuídas com médias $1/\lambda_1$ e $1/\lambda_2$ respetivamente, então

$$P\{X_1 < X_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Distribuição exponencial – Exemplo 5

Uma ligação de dados com a capacidade de 10 Mbps suporta um fluxo de pacotes cujo tamanho é exponencialmente distribuído com média de 1000 Bytes. Considere a variável aleatória *X* representativa do tempo de transmissão dos pacotes.

Determine: *(i)* o tempo médio de transmissão dos pacotes $E[X]$, *(ii)* a variância do tempo de transmissão dos pacotes $Var[X]$ e *(iii)* o segundo momento do tempo de transmissão dos pacotes $E[X^2]$.

(i) $$E[X] = \frac{1000 \times 8}{10^7} = 8 \times 10^{-4} = 0.8\,\text{mseg}$$

Capacidade da ligação em pacotes por segundo

$$E[X] = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{8 \times 10^{-4}} = 1250\,\text{pacotes/s}$$

(ii) $$Var[X] = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \left(8 \times 10^{-4}\right)^2 = 6.4 \times 10^{-7}\ \text{seg}^2$$

(iii) $$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 \Leftrightarrow E[X^2] = Var[X] + E[X]^2$$

$$E[X^2] = 6.4 \times 10^{-7} + \left(8 \times 10^{-4}\right)^2 = 1.28 \times 10^{-6}\ \text{seg}^2$$

Processos estocásticos

- Um *processo estocástico* $\{X(t),\ t \in T\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias: para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

- O índice t é frequentemente interpretado como tempo. Nesta interpretação, $X(t)$ é o *estado* do processo no instante t.

- O conjunto T é o *conjunto de índices* do processo.

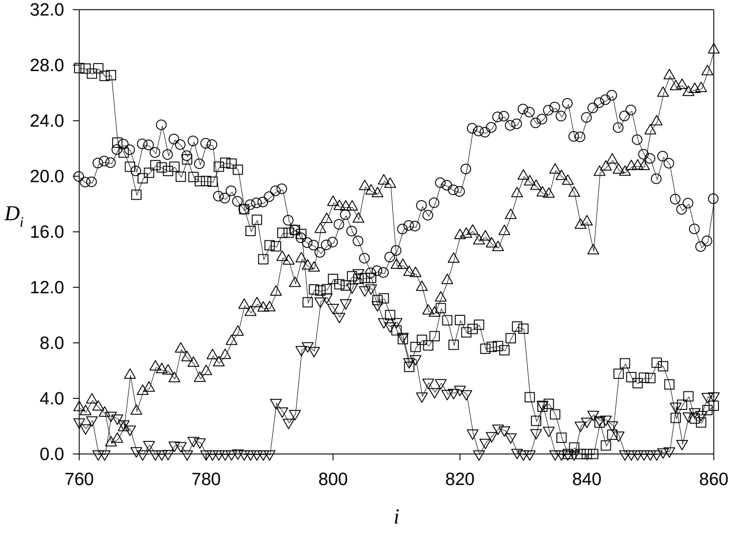
  (1) se T é um conjunto contável, designa-se o processo estocástico como sendo *em tempo discreto*

  (2) se T é um intervalo da reta real, designa-se o processo estocástico como sendo *em tempo contínuo*

- O *espaço de estados* é o conjunto de todos os valores que as variáveis aleatórias $X(t)$ podem tomar.

Exemplos de processos estocásticos

Considere um sistema com uma fila de espera e um servidor. A este sistema chegam clientes para serem servidos.



<u>Atrasos sofridos por cada cliente</u>

<u>na fila de espera</u>

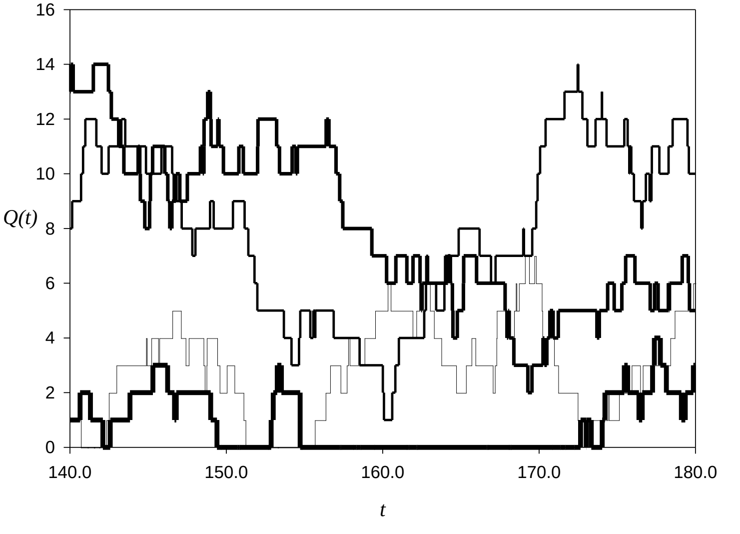
(1) é um processo estocástico em

tempo discreto (1º cliente,

2º cliente, etc.)

(2) o estado é uma variável contínua

(o tempo de espera é um valor real)



<u>O número de clientes em espera</u>

(1) é um processo estocástico

em tempo contínuo

(2) o estado é uma variável discreta

(0 clientes, 1 cliente, 2 clientes, etc.)

Processo de contagem

- Um processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ diz-se um *processo de contagem* se $N(t)$ representar o número total de eventos que ocorreram até ao instante t.
- Um processo de contagem satisfaz as seguintes condições:

  (1) $N(t) \geq 0$.

  (2) $N(t)$ toma valores inteiros apenas.

  (3) Se $s < t$, então $N(s) \leq N(t)$.

  (4) Se $s < t$, então $N(t) - N(s)$ é igual ao número de eventos ocorridos no intervalo de tempo $[s,t]$.
- Um processo de contagem tem *incrementos independentes* se o número de eventos em intervalos de tempo disjuntos for independente.
- Um processo de contagem tem *incrementos estacionários* se a distribuição do número de eventos que ocorre em qualquer intervalo de tempo depender apenas do comprimento do intervalo de tempo.

Processo de Poisson

- Um processo de contagem diz-se um <u>*processo de Poisson*</u> com taxa λ, $\lambda > 0$, se:

  (1) $N(0) = 0$;

  (2) o processo tem incrementos independentes;

  (3) o número de eventos num intervalo de duração t tem uma distribuição de Poisson com média λt. Isto é, para todo s, $t \geq 0$

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

- Um processo de Poisson tem incrementos estacionários e média

$$E[N(t)] = \lambda t$$

razão pela qual λ é designada a <u>*taxa*</u> (i.e., o número médio de eventos por unidade de tempo) do processo de Poisson.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 1:** Num processo de Poisson com taxa λ considere-se:
  - T_1 o instante do primeiro evento
  - T_n, $n > 1$, o intervalo de tempo entre o (n-1)-ésimo evento e o n-ésimo evento
- Então, T_n, $n = 1, 2, \ldots$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com *distribuição exponencial* de média $1/\lambda$.
- **Propriedade 2:** Num processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ com taxa λ considere-se que cada evento é classificado de forma independente em:
  - evento do tipo 1 com probabilidade p
  - evento do tipo 2 com probabilidade $1 - p$
- Ou seja, $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ são o número de eventos de cada tipo que ocorreram no intervalo $[0,t]$.
- Então, $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são *ambos processos de Poisson independentes* com taxas λp e $\lambda(1–p)$.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 3:** Sejam $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2,
- Então, o processo $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é também *um processo de Poisson* com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

- **Propriedade 4:** Sabendo-se que num processo de Poisson ocorreram exatamente n eventos até ao instante t,
- Então, os instantes de ocorrência dos eventos são *distribuídos independentemente e uniformemente* no intervalo $[0, t]$. Por esta razão diz-se que num processo de Poisson as chegadas são *aleatórias*.

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Considere-se um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t), t \geq 0\}$ com o espaço de estados definido pelo conjunto dos números inteiros não negativos (i.e., $\{0, 1, 2, \ldots\}$).
- $X(t)$ ***é uma cadeia de Markov*** se para todo o s, $t \geq 0$ e inteiros não-negativos i, j, $x(u)$, $0 \leq u < s$:

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

- Significa que a distribuição futura $X(s+t)$ condicionada ao presente $X(s)$ e ao passado $X(u)$, $0 \leq u < s$, depende apenas do presente e é independente do passado (propriedade *Markoviana*).

- Se $P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$ for independente de s então diz-se que a cadeia de Markov em tempo contínuo tem *probabilidades de transição estacionárias* ou *homogéneas*:

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$$

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Uma cadeia de Markov em tempo contínuo tem como propriedades:

  (1) Quando o processo entra no estado *i*, o tempo de permanência nesse estado, antes de efetuar uma transição para um estado diferente, é exponencialmente distribuído (designamos a média por $1/q_i$);

  NOTA: Esta propriedade é equivalente a dizer que quando o processo está no estado *i*, ele transita para outro estado qualquer a uma taxa q_i.

  (2) Quando o processo deixa o estado *i*, entra de seguida no estado *j* com uma probabilidade P_{ij} que satisfaz as seguintes condições

$$P_{ii} = 0 \qquad 0 \le P_{ij} \le 1 \quad , j \ne i \qquad \sum_j P_{ij} = 1$$

- Numa cadeia de Markov em tempo contínuo, o tempo de permanência num estado e o próximo estado visitado são variáveis aleatórias independentes.

Taxas de transição instantâneas

- Para qualquer par de estados *i* e *j* seja:

$$q_{ij} = q_i P_{ij}$$

q_i - a taxa à qual o processo faz uma transição quando está no estado *i* (definida no slide anterior)

P_{ij} - a probabilidade que a transição seja para o estado *j* quando está no estado *i* (definida no slide anterior)

q_{ij} - a taxa à qual o processo faz uma transição para o estado *j* quando está no estado *i*

- As q_{ij} designam-se por <u>*taxas de transição instantâneas*</u>. Estas são as grandezas habitualmente representadas nos diagramas de transição de estados.

- Como $$q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij} \qquad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

resulta que a especificação das taxas de transição instantâneas determina a cadeia de Markov em tempo contínuo.

Probabilidades limite

- Seja $$P_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

  a probabilidade de um processo presentemente no estado *i* estar no estado *j* após um intervalo de tempo *t*.

- A probabilidade de uma cadeia de Markov em tempo contínuo estar no estado *j* no instante *t* converge para um valor limite independente do estado inicial:

$$\pi_j \equiv \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

- Condição suficiente para a existência de probabilidades limite:

  (1) a cadeia de Markov é irredutível, isto é, começando no estado *i* existe uma probabilidade positiva de alguma vez se estar no estado *j*, para todo o par de estados *i*, *j*

  (2) a cadeia de Markov é recorrente positiva, isto é, começando em qualquer estado o tempo médio para voltar a esse estado é finito

Cálculo das probabilidades limite

- As probabilidades limite podem calcular-se resolvendo as equações:

$$q_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k \,, \qquad \text{para todos os estados } j$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

- Estas equações são designadas por *equações de balanço*:

taxa à qual o sistema transita do estado *j*
=
taxa à qual o sistema transita para o estado *j*

- A probabilidade π_j pode ser interpretada como a proporção de tempo em que o processo está no estado *j*.

- As probabilidades π_j são designadas por *probabilidades estacionárias*: se o estado inicial for dado pela distribuição $\{\pi_j\}$, então a probabilidade de se estar no estado *j* no instante *t* é π_j, para todo o *t*.

Processos de nascimento e morte

- Considere um sistema cujo estado representa o número de clientes no sistema.

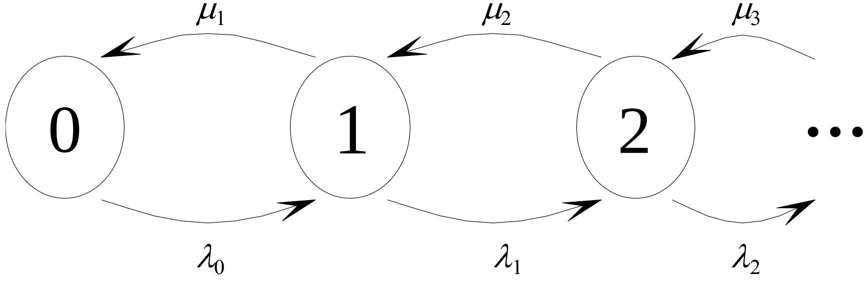
- Sempre que o sistema tem *n* clientes:

  (1) chegam novos clientes ao sistema a uma taxa exponencial λ_n

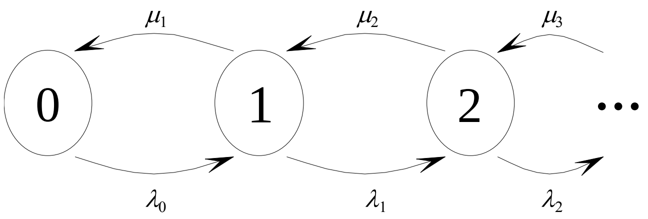
  (2) partem clientes do sistema a uma taxa exponencial μ_n

- Este sistema é designado por *processo de nascimento e morte*.

- Os parâmetros λ_n (n = 0, 1, …) e μ_n (n = 1, 2, …) são designados por *taxas de chegada* (ou de nascimento) e *taxas de partida* (ou de morte), respetivamente.



Equações de balanço de processos de nascimento e morte



Num processo de nascimento e morte, é possível calcular as probabilidade limite π_n de cada estado n (= 0, 1, 2, …) da seguinte forma.

Equações de balanço: $\boxed{q_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k}$

Estado	*taxa de saída = taxa de entrada*
0	$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \mu_2 \pi_2 + \lambda_0 \pi_0$
2	$(\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 = \mu_3 \pi_3 + \lambda_1 \pi_1$
$n, n \geq 1$	$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \mu_{n+1} \pi_{n+1} + \lambda_{n-1} \pi_{n-1}$

Ou, de forma equivalente (por manipulação das equações anteriores):

$$\lambda_n \pi_n = \mu_{n+1} \pi_{n+1}, \qquad n \geq 0$$

Probabilidades limite de processos de nascimento e morte

Probabilidade limite de cada estado:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}\right)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot \pi_0, \; n \geq 1$$

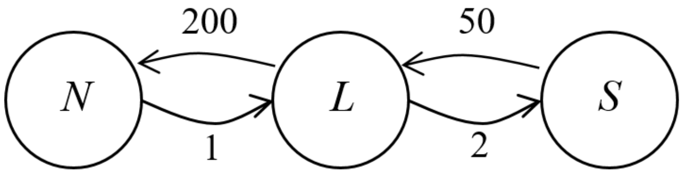
NOTA: Se o processo tiver um número finito N de estados (i.e., n = 0, 1, …, N), o somatório das expressões é de 0 até ao número de estados N.

Condição necessária para a existência de probabilidades limite (no caso de um número infinito de estados):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} < \infty$$

Exemplo 6

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



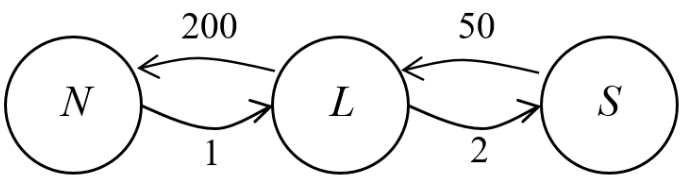
(a) Determine a probabilidade de cada um dos estados.

(b) Determine o tempo de permanência médio de cada estado (em minutos).

(c) Sabendo que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é de 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S*, qual a probabilidade da ligação estar no estado *N* quando um pacote é recebido com erros?

Exemplo 6 – Resolução (a)

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



(a) Determine a probabilidade de cada um dos estados.

$$P_N = \frac{1}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.99483 = 99.483\%$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}}$$

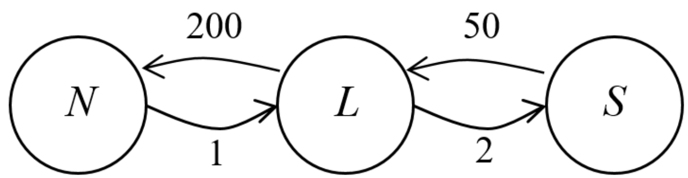
$$P_L = \frac{\frac{1}{200}}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.00497 = 0.497\%$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot \pi_0$$

$$P_S = \frac{\frac{1}{200} \times \frac{2}{50}}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.0002 = 0.02\%$$

Exemplo 6 – Resolução (b)

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



(b) Determine o tempo de permanência médio de cada estado (em minutos).

$$T_N = \frac{1}{1} = 1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos}$$

$$T_L = \frac{1}{2+200} = 0.00495 \text{ horas} = 0.3 \text{ minutos}$$

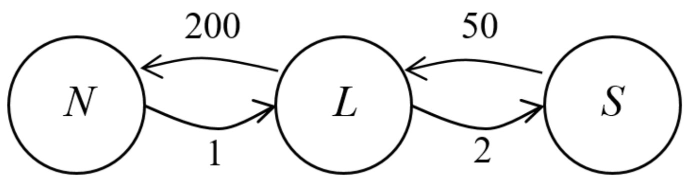
$$T_S = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ horas} = 1.2 \text{ minutos}$$

Tempo médio de permanência $T = 1/q_i$

$$q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

Exemplo 6 – Resolução (c)

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



(c) Sabendo que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é de 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S*, qual a probabilidade da ligação estar no estado *N* quando um pacote é recebido com erros?

$$P(N|E) = \frac{P(E|N) \times P(N)}{P(E|N) \times P(N) + P(E|L) \times P(L) + P(E|S) \times P(S)}$$

$$= \frac{0.0001 \times 0.99483}{0.0001 \times 0.99483 + 0.001 \times 0.00497 + 0.01 \times 0.00020}$$

$$= 0.9346 = 93.46\%$$

Definições do teorema de Little

- Admita-se que se observa um sistema desde o instante t = 0. Seja:

  $L(t)$ - o número de clientes no sistema no instante t,

  $N(t)$ - o número de clientes que chegaram no intervalo [0,t],

  W_i - o tempo despendido no sistema pelo i-ésimo cliente.

- Média temporal do *número de clientes* observados até ao instante t:

$$L_t = \frac{1}{t}\int_0^t L(\tau)d\tau \qquad L = \lim_{t\to\infty} L_t$$

- Média temporal da *taxa de chegada* no intervalo [0,t]:

$$\lambda_t = N(t)/t \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$$

- Média temporal do *atraso dos clientes* até ao instante t:

$$W_t = \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{N(t)} \qquad W = \lim_{t\to\infty} W_t$$

Teorema de Little

- O teorema de Little enuncia que

$$L = \lambda W$$

- O teorema de Little traduz a ideia intuitiva de que, para a mesma taxa de chegada de clientes, sistemas mais congestionados (*L* elevado) impõem maiores atrasos (*W* elevado).

- Exemplos:
  - Num dia de chuva, o mesmo tráfego (mesmo λ) é mais lento do que normalmente (*W* maior) e, consequentemente, as ruas estão mais congestionadas (*L* maior).
  - Um restaurante de refeições rápidas (*W* menor) precisa de uma sala menor (*L* menor) que um restaurante normal, para a mesma taxa de chegada de clientes (mesmo λ).

Propriedade PASTA
(*Poisson Arrivals always See Time Averages*)

- Considere um sistema em que os clientes chegam um de cada vez e são servidos um de cada vez.
- Seja $L(t)$ o número de clientes no sistema no instante t e defina-se P_n, $n \geq 0$, como

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P\{L(t) = n\}$$

P_n é a probabilidade em estado estacionário de existirem exatamente n clientes no sistema (ou a proporção de tempo em que o sistema contém exatamente n clientes).

- Considere a_n a proporção de clientes que ao chegar encontram n clientes no sistema.

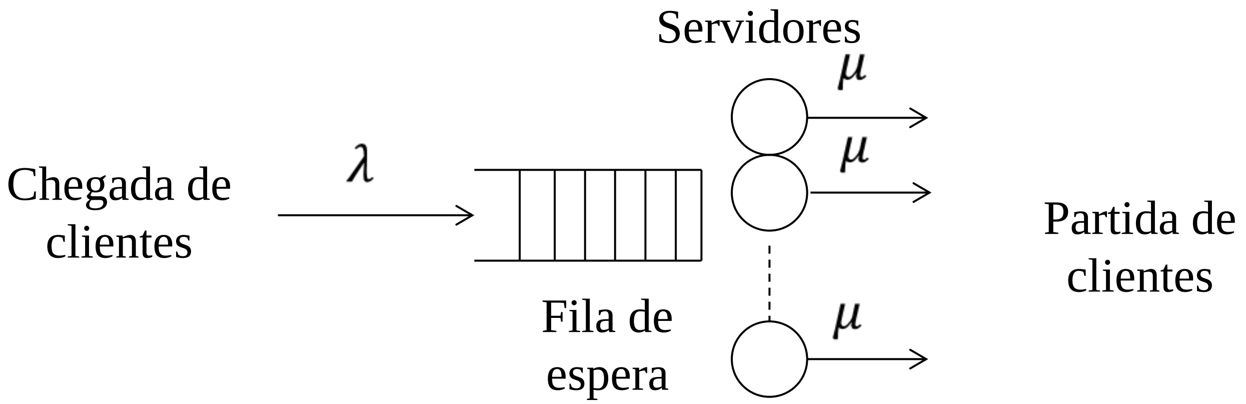
- **Propriedade PASTA:**

As <u>*chegadas de Poisson*</u> em que o <u>*tempo de serviço é estatisticamente independente dos instantes de chegada*</u>, vêem sempre médias temporais:

$$a_n = P_n$$

Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é caracterizado por:
  - um conjunto de *c* servidores, cada um com capacidade para servir clientes a uma taxa μ
  - uma fila de espera com uma determinada capacidade (em nº de clientes)
- A este sistema chegam clientes a uma taxa λ
- Quando um cliente chega:
  - ele começa a ser servido por um servidor se houver algum disponível
  - ele é colocado da fila de espera se os servidores estiverem todos ocupados (ou é perdido se a fila de espera estiver cheia)
- Os clientes na fila de espera são atendidos segundo uma disciplina FIFO (*First-In-First-Out*)



Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é representado por:

$$A/B/c/d$$

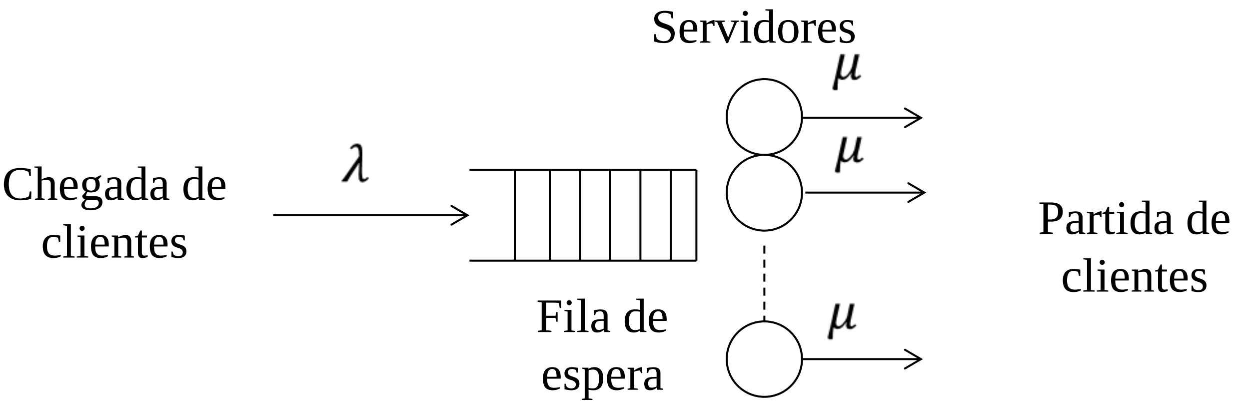
A – o processo de chegada de clientes:
M – Markoviano, *D* – Determinístico, *G* – Genérico

B – o processo de atendimento de clientes:
M – Markoviano, *D* – Determinístico, *G* – Genérico

c – o número de servidores

d – capacidade do sistema em nº de clientes:
número de servidores + capacidade da fila de espera

- Quando *d* é omisso, a fila de espera tem tamanho infinito.



Sistema *M*/*M*/1

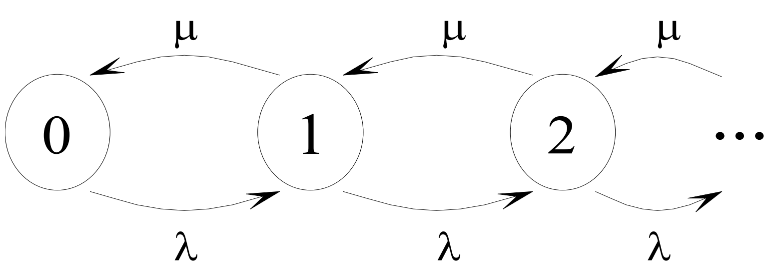
- Processo de nascimento e morte em que:

  (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ

  (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$

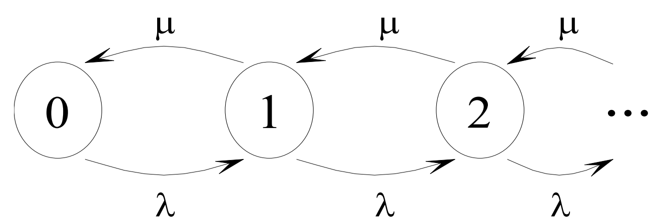
  (3) o sistema tem 1 servidor

  (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes



- Uma ligação ponto-a-ponto com capacidade μ pacotes/s e uma fila de espera muito grande onde chegam pacotes a uma taxa de Poisson λ pacotes/s com comprimento exponencialmente distribuído de média $1/\mu$ é modelado por um sistema *M*/*M*/1

Sistema *M*/*M*/1



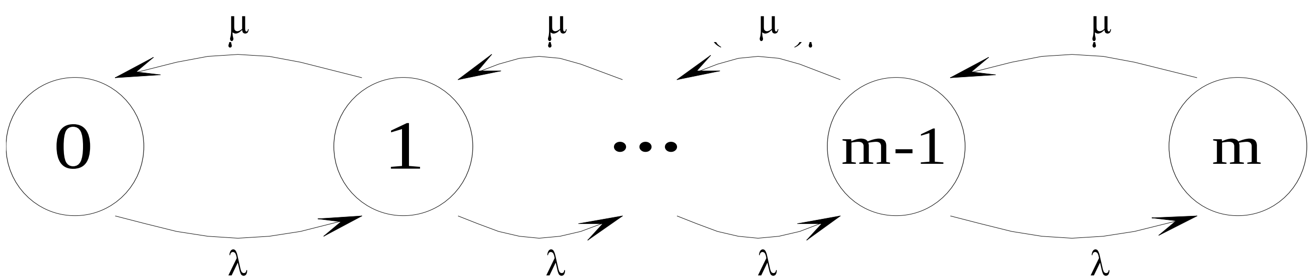
$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}} = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

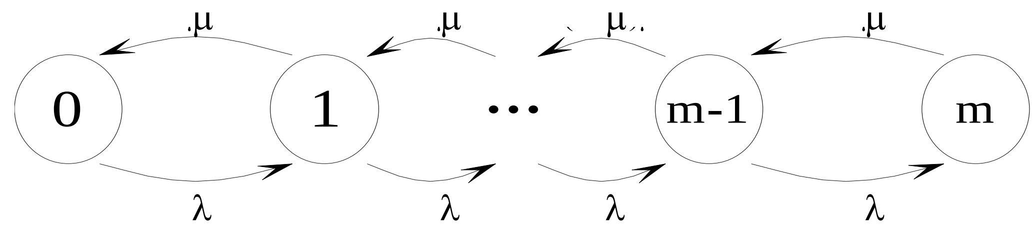
- Número médio de clientes no sistema: $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
- Atraso médio no sistema: $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ pelo Teorema de Little
- Atraso médio na fila de espera: $W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
- Número médio de clientes na fila de espera: $L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Sistema *M*/*M*/1/*m*

- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
  - (3) o sistema tem 1 servidor
  - (4) o sistema acomoda no máximo *m* clientes (*i.e.*, a fila de espera tem capacidade para *m* – 1 clientes)



Sistema *M*/*M*/1/*m*



- Equações de balanço:

$$\lambda P_{n\text{-}1} = \mu P_n, \qquad n = 1, 2, ..., m$$

- Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário:

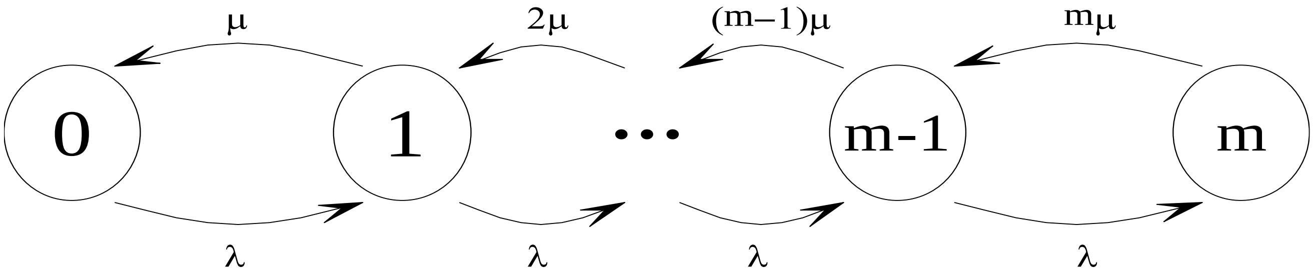
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i} \qquad n = 0, 1, \ldots, m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de um cliente chegar e encontrar o sistema cheio (*i.e.*, o servidor ocupado e a fila de espera cheia) é igual à probabilidade do estado *m*:

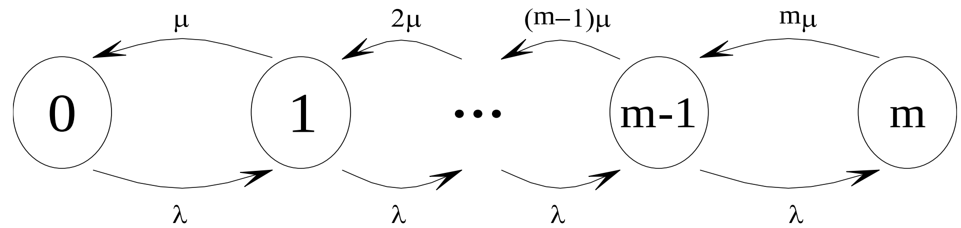
$$P_m = \frac{(\lambda/\mu)^m}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i}$$

Sistema *M/M/m/m*

- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
  - (3) o sistema tem *m* servidores
  - (4) o sistema acomoda no máximo *m* clientes (*i.e.*, não tem fila de espera)



Sistema *M/M/m/m*



- Equações de balanço:

$$\lambda P_{n\text{-}1} = n\mu P_n, \qquad n = 1, 2, ..., m$$

- Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i / i!} \qquad n = 0, 1, ..., m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de um cliente chegar e encontrar o sistema cheio é (fórmula de Erlang B):

$$P_m = \frac{(\lambda/\mu)^m / m!}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i / i!}$$

Sistema *M/G/1*

- Processo de nascimento e morte em que:

  (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ

  (2) o tempo de atendimento S do servidor tem uma distribuição genérica e independente das chegadas dos clientes

  (3) o sistema tem 1 servidor

  (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes

- Sendo conhecidos a média $E[S]$ e o segundo momento $E[S^2]$ do tempo de atendimento S, a fórmula de Pollaczek - Khintchine enuncia que <u>o atraso médio de cada cliente na fila de espera</u> é dado por:

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2\left(1-\lambda E[S]\right)}$$

- O atraso médio de cada cliente no sistema é a soma do atraso médio na fila de espera mais o tempo médio de atendimento:

$$W = \frac{\lambda E[S^2]}{2\left(1-\lambda E[S]\right)} + E[S]$$

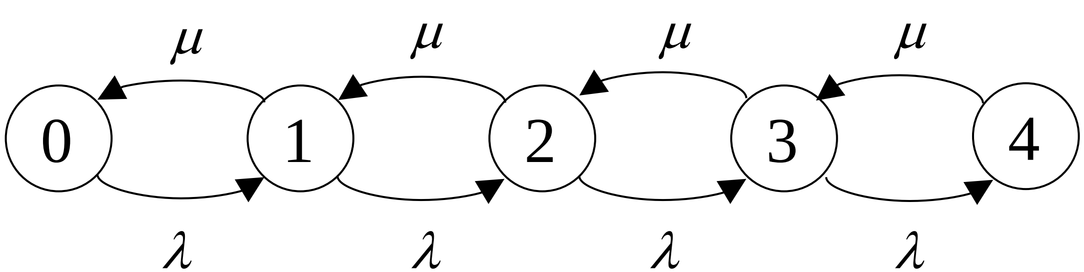
Exemplo 7

Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego suportado é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

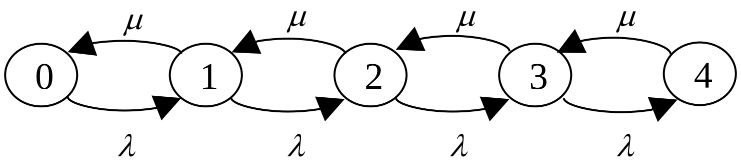
(a) A percentagem de pacotes perdidos.

(b) A percentagem de pacotes que não sofre atraso na fila de espera.

(c) A percentagem de utilização da linha de transmissão.



Exemplo 7 – Resolução (a)



Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego suportado é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(a) A percentagem de pacotes perdidos.

$$\boxed{P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i} \qquad n = 0, 1, \ldots, m}$$

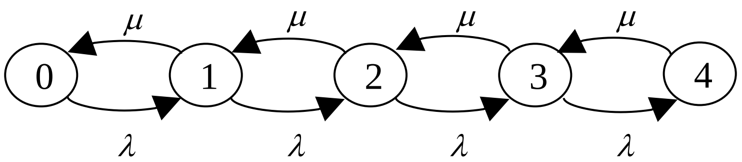
$$\mu = \frac{64000 \text{ bps}}{400 \times 8 \text{ bpp}} = 20 \text{ pps} \qquad \lambda = 15 \text{ pps}$$

$$P_4 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}$$

Pela propriedade PASTA

$$P_4 = \frac{\left(\frac{15}{20}\right)^4}{1 + \frac{15}{20} + \left(\frac{15}{20}\right)^2 + \left(\frac{15}{20}\right)^3 + \left(\frac{15}{20}\right)^4} = 0.104 = 10.4\%$$

Exemplo 7 – Resolução (b)



Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego suportado é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(b) A percentagem de pacotes que não sofre atraso na fila de espera.

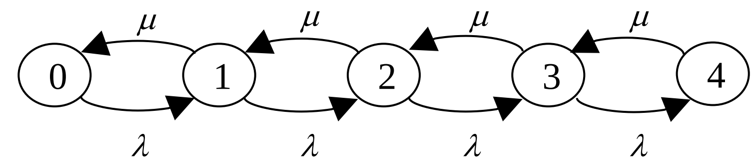
$$\mu = \frac{64000 \text{ bps}}{400 \times 8 \text{ bpp}} = 20 \text{ pps} \qquad \lambda = 15 \text{ pps} \qquad P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^{m} (\lambda/\mu)^i} \qquad n = 0, 1, \ldots, m$$

$$P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}$$

Pela propriedade PASTA

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{15}{20} + \left(\frac{15}{20}\right)^2 + \left(\frac{15}{20}\right)^3 + \left(\frac{15}{20}\right)^4} = 0.328 = 32.8\%$$

Exemplo 7 – Resolução (c)



Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego suportado é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(c) A percentagem de utilização da linha de transmissão.

$$U = 0 \times P_0 + 1 \times P_1 + 1 \times P_2 + 1 \times P_3 + 1 \times P_4$$

$$U = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_0$$

$$U = 1 - 0.328 = 0.672 = 67.2\%$$

Exemplo 8

Considere um sistema de transmissão ponto-a-ponto de 128 kbps que suporta dois fluxos de pacotes: no fluxo 1, os pacotes têm um tamanho constante de 128 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 30 pacotes/segundo; no fluxo 2, os pacotes têm um tamanho constante de 512 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 10 pacotes/segundo. Os pacotes dos dois fluxos partilham uma única fila de espera de tamanho muito grande.

(a) Indique justificando que tipo de fila de espera modela o desempenho deste sistema de transmissão.

(b) Calcule o atraso médio no sistema dos pacotes de cada fluxo.

Exemplo 8 – Resolução (a)

Este sistema é modelado por uma fila de espera $M/G/1$:

- a soma de 2 processos de Poisson é um processo de Poisson e, assim, o processo de chegada de pacotes é um processo de Poisson ('*M*' em $M/G/1$) com taxa 30 + 10 = 40 pps;
- o tempo de transmissão dos pacotes do conjunto dos 2 fluxos é genérico ('*G*' em $M/G/1$) porque a distribuição dos tamanhos não segue uma distribuição comum: o tamanho é 128 Bytes com probabilidade 30/(30+10) = 0.75 = 75% ou 512 Bytes com probabilidade 10/(30+10) = 0.25 = 25%;
- o número de servidores é um ('1' em $M/G/1$) pois o canal de transmissão é usado para transmitir um pacote de cada vez;
- como o sistema tem uma fila de espera muito grande, a notação relativa à capacidade do sistema é omissa (considera-se que o sistema tem capacidade infinita).

Exemplo 8 – Resolução (b)

Atraso médio de cada pacote na fila de espera de um sistema *M*/*G*/1	$W_Q = \dfrac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}$

$S_{128} = (128 \times 8)/128000 = 8 \times 10^{-3}$ seg $\qquad S_{512} = (512 \times 8)/128000 = 32 \times 10^{-3}$ seg

$E[S] = 0.75 \times S_{128} + 0.25 \times S_{512} =$

$= 0.75 \times 8 \times 10^{-3} + 0.25 \times 32 \times 10^{-3} = 14\text{e}{-3}$ seg

$E[S^2] = 0.75 \times (S_{128})^2 + 0.25 \times (S_{512})^2 =$

$= 0.75 \times (8 \times 10^{-3})^2 + 0.25 \times (32 \times 10^{-3})^2 = 3.04\text{e}{-4}\ \text{seg}^2$

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])} = \frac{40 \times 3.04\text{e}-4}{2(1-40 \times 14\text{e}-3)} = 0.0143 = 14.3\ \text{mseg}$$

$W_{128} = W_Q + S_{128} = 14.3 + 8 = 22.3$ mseg

$W_{512} = W_Q + S_{512} = 14.3 + 32 = 46.3$ mseg