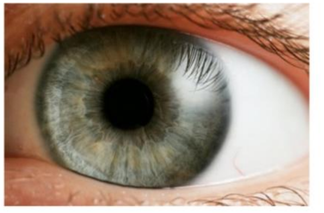
MPEI 2023-2024

Variáveis aleatórias multidimensionais

Motivação

- Trabalhamos frequentemente com grupos de variáveis relacionadas

120 million photoreceptors



256 EEG sensors

- Exemplos:
  – Peso e altura das pessoas
  – Número de temporais em vários meses

X1 = número de temporais em Junho (0, 1, ou 2)

X2 = número de temporais em Julho (0, 1, ou 2)

Variáveis aleatórias multidimensionais

- Frequentemente temos situações em que os resultados possíveis são conjuntos de várias variáveis aleatórias, *X1*, *X2*,..

- Dois tipos de casos:
  - Experiência aleatória produz várias saídas
  - Repetições da experiência aleatória (com uma única saída)

- A um vector n-dimensional em que as componentes são as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ chama-se **vector aleatório** ou v.a. Vectorial

$$\mathbf{X} = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n)$$

Vector aleatório

- **Um vector aleatório** X é uma função que atribui um vector de números reais a todos os resultados ζ em S, o espaço de amostragem da experiência aleatória.

- Exemplo: $\mathbf{X} = (\,H \quad W \quad A)$ com

$$H(\zeta) = \text{altura do estudante } \zeta \text{ em metros,}$$
$$W(\zeta) = \text{peso do estudante } \zeta \text{ em Kg , e}$$
$$A(\zeta) = \text{idade do estudante } \zeta \text{ em anos.}$$

Como caracterizar estas variáveis aleatórias com n-dimensões ?

Funções de distribuição conjuntas

- Para lidar com estas situações envolvendo 2 ou mais variáveis, definem-se, estendendo as definições para uma variável:
  - Função massa de probabilidade conjunta
  - Função de distribuição cumulativa conjunta
  - Função de densidade de probabilidade conjunta

Função probabilidade de massa conjunta

- Para duas variáveis discretas, *X* e *Y*:

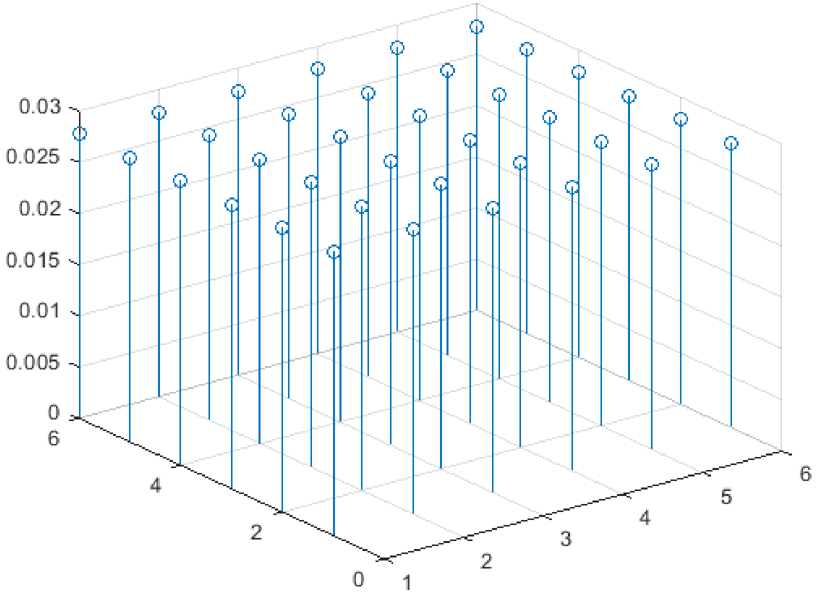
- $p_{X,Y}(i,j) = P(X = i \ \wedge Y = j)$

- Exemplo: *X*= dado 1; *Y*= dado 2

$$p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(1,2) = \ \dots = p_{X,Y}(6,6) = 1/36$$

Exemplo (continuação)

- Representação 3D



Função massa de probabilidade conjunta

- A expressão generaliza para mais de 2 variáveis:

- $p_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$
- Uma função em $\mathbb{R}^n$, não-negativa

- $\sum_{x_1,x_2,\dots,x_n} p_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

função de distribuição acumulada conjunta

- Tal como no caso escalar, pode definir-se uma função de distribuição acumulada conjunta
  - Simples extensão

- Para duas variáveis, *X* e *Y*:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$$

- Para n variáveis:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n).$$

No caso discreto é uma função em terraços …

Exemplo 1

- Caso discreto

  Y_1 = número de temporais em Junho (0, 1, ou 2)

  Y_2 = número de temporais in Julho (0, 1, ou 2)

- Tabela com probabilidades

$p_{y1\ y2}\,(0, 2)$

		Julho (y_2)		
		0	1	2
Junho (y_1)	0	0.05	0.1	0.15
	1	0.1	0.15	0.20
	2	0.15	0.05	0.05

Distribuição de cada uma das variáveis

- A distribuição de cada uma das variáveis pode ser obtida da distribuição conjunta

- Por exemplo, no caso com duas variáveis *X* e *Y*:
- $F_X(a) = P(X \leq a)$
- = $P(X \leq a, Y < \infty)$
- = $F_{X,Y}(a, \infty)$

- De forma similar:
- $F_Y(b) = P(Y \leq b) = F_{X,Y}(\infty, b)$

Funções de probabilidade marginais

- Também se pode obter facilmente a função de massa de probabilidade de cada uma das variáveis

- As fórmulas para o caso discreto são:

- $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
- $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$

Funções de probabilidade marginais

- No caso de duas variáveis (*X* e *Y*):

- Para obter a função massa de probabilidade de *X* somamos as linhas apropriadas da tabela representando a função de probabilidade conjunta

- De forma similar obtém-se *Y* somando as colunas

Exemplo 1

- Para o exemplo introduzido antes..

	Julho (y_2)				
		0	1	2	$p\ (y_1)$
Junho (y_1)	0	0.05	0.1	0.15	0.30
	1	0.1	0.15	0.20	0.45
	2	0.15	0.05	0.05	0.25
	$p\ (y_2)$	0.30	0.30	0.40	1.00

$p_{Y1}(y1) =$

y_1	$p_{Y1}(y_1)$
0	0.30
1	0.45
2	0.25
TOTAL	1.00

y_2	$p_{Y2}(y_2)$
0	0.30
1	0.30
2	0.40
TOTAL	1.00

Generalização

- O caso de *n* variáveis discretas é uma generalização simples

- Se $X_1, X_1, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias discretas no mesmo espaço de amostragem com função massa de probabilidade conjunta:

$$p_{X_1,\dots X_n}(x_1,\dots x_n) = P(X_1 = x_1,\dots, X_n = x_n)$$

- A função de probabilidade marginal para X_1 é:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\dots,x_n} p_{X_1,\dots X_n}(x_1,\dots x_n)$$

- A função (bidimensional) para a função de probabilidade marginal de X_1 e X_2 :

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3,\dots,x_n} p_{X_1,\dots X_n}(x_1, x_2, x_3,\dots, x_n)$$

Independência

- Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se, para qualquer a, b se verificar

- $P(X \leq a, Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b)$

- Ou seja, são independentes se os eventos $E_a = \{X \leq a\}$ e $E_b = \{Y \leq b\}$ são independentes

Independência

- Em termos de função de distribuição acumulada conjunta:

  X e *Y* são independentes **se e só se**

$$F_{X,Y}(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$$

  qualquer que sejam *a* e *b*

- Também, no caso discreto, *X* e *Y* são independentes **se e só se**

$$p(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

- E no caso contínuo $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\ \ f_Y(y)$

Generalização – independência de n variáveis aleatórias

- *n* variáveis $X_1, X_2, \dots, X_n$ são independentes se

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

- Y_1 e Y_2 são independentes ?

Julho (y_2)					
Junho (y_1)		0	1	2	$P\ (y_1)$
	0	0.05	0.1	0.15	0.30
	1	0.1	0.15	0.20	0.45
	2	0.15	0.05	0.05	0.25
	$P(y_2)$	0.30	0.30	0.40	1.00

Julho (y_2)					
Junho (y_1)		0	1	2	$P\ (y_1)$
	0	0.09			0.30
	1				0.45
	2				0.25
	$P\ (y_2)$	0.30	0.30	0.40	1.00

Esperança matemática

Extensão das definições

- Os momentos de ordem *j k* das variáveis X, Y definem-se como sendo,
- Caso discreto:

$$E\left[X^j Y^k\right] = \sum_m \sum_n {x_m}^j {y_n}^k \, p_{XY}(x_m, y_n)$$

- Caso contínuo:

$$E\left[X^j Y^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^j y^k f_{XY}(x, y) dx\, dy$$

- Se *j*=1 e *k*=0 ou *j*=0 e *k*=1 temos os valores médios de *X* e *Y*
- Se *j*=2 e *k*=0 ou *j*=0 e *k*=2 temos os valores quadráticos médios

…

- Os momentos centrais conjuntos de ordem *j k* das variáveis X, Y definem-se como:

$$E\left[(X - E[X])^j (Y - E[Y])^k\right]$$

- Para *j*=2 e *k*=0 ou *j*=0 e *k*=2 obtemos as variâncias de X e Y

Correlação

- O momento de ordem *j=k=* 1, $E[XY]$, é designado de correlação das variáveis X e Y

- Quando $E[XY] = 0$ as variáveis são ortogonais

$E[XY]$ e Independência

- Sendo *X* e *Y* independentes

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

- Demonstração (caso discreto):

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_{x,y} xy\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_{x,y} xy\, p(x) p_Y(y)$$

$$= \left[\sum_x x\, p_X(x)\right] \left[\sum_y y\, p_Y(y)\right]$$

$$= E[X]E[Y]$$

Covariância

- A covariância de duas variáveis X e Y é o seu momento central de ordem $j = k = 1$

  - Ou seja $E\left[(X - E[X])\ \ (Y - E[Y])\ \ \right]$
  - Designa-se por Cov(*X,Y*)

- $Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
  $= E\left[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]\right]$
  $= E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$
  $= E[XY] - E[X]E[Y]$

- $E[X] = 0$ ou $E[Y] = 0 \quad \Rightarrow Cov(X,Y) = E[XY]$

Covariância

- É uma generalização da Variância
  $$Cov(X,X) = E[(X - E[X])(X - E[X])]$$
  $$= Var(X)$$

- A covariância é uma medida de relação linear entre as variáveis aleatórias

- Se a relação for não linear, a covariância pode não ser sensível à relação.

Covariância e independência

- Se X e Y são independentes então $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

- "Demonstração":

- Como vimos $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
- *X* e *Y* são independentes implica
$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Nota: o contrário não é verdadeiro

pode ter-se Cov(*X*,*Y*)=0 e as variáveis não serem independentes

Propriedades da Covariância

- $Cov(X,X) = Var(X)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(cX,Y) = c\,Cov(X,Y)$
- $Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

Demonstração:

$= E[X(Y+Z)] - E[X]E[Y+Z] =$

$= E[XY] + \mathrm{E[XZ]} - \mathrm{E[X]E[Y]} - \mathrm{E[X]E[Z]}$

$= E[XY] - \mathrm{E[X]E[Y]} + \mathrm{E[XZ]} - \mathrm{E[X]E[Z]}$

$= Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

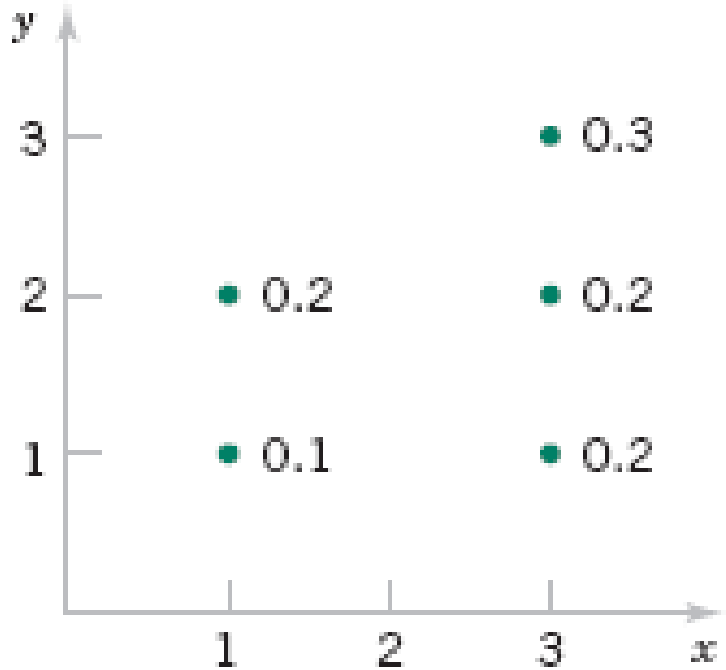
- Generalização: $$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

Covariância de *n* variáveis

- Se tivermos um vector de *n* variáveis aleatórias $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$
- $Cov(Y) = \begin{bmatrix} Cov(Y_1, Y_1) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_n, Y_1) & \cdots & Cov(Y_n, Y_n) \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} Var(Y_1) & \cdots & Cov(Y_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \color{red}{Cov(Y_1, Y_n)} & \cdots & Var(Y_n) \end{bmatrix}$

Exemplo

- Considere a seguinte distribuição conjunta de X e Y e calcule $Cov(X,Y)$



Cov(X,Y)= ?

- E(X) = ?
  = 1 x 0,3 + 3 x 0,7 = 2,4
- E(Y)= ?
- = 1 x 0,3 + 2 x 0,4 + 3 x 0,3 = 2,0

- Cov(X,Y) = E[(X-E[X]) (Y-E[Y])]
- = (1-2,4)(1-2,0) x 0,1 + (1-2,4)(2-2,0) x 0,2
- + (3-2,4)(1-2,0) x 0,2 + (3-2,4)(2-2,0) x 0.2
- + (3-2,4)(3-2,0) x 0,3 = 0,2

Coeficiente de correlação

- A **coeficiente de correlação** de duas variáveis X e Y é:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y}$$

- Demonstra-se que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

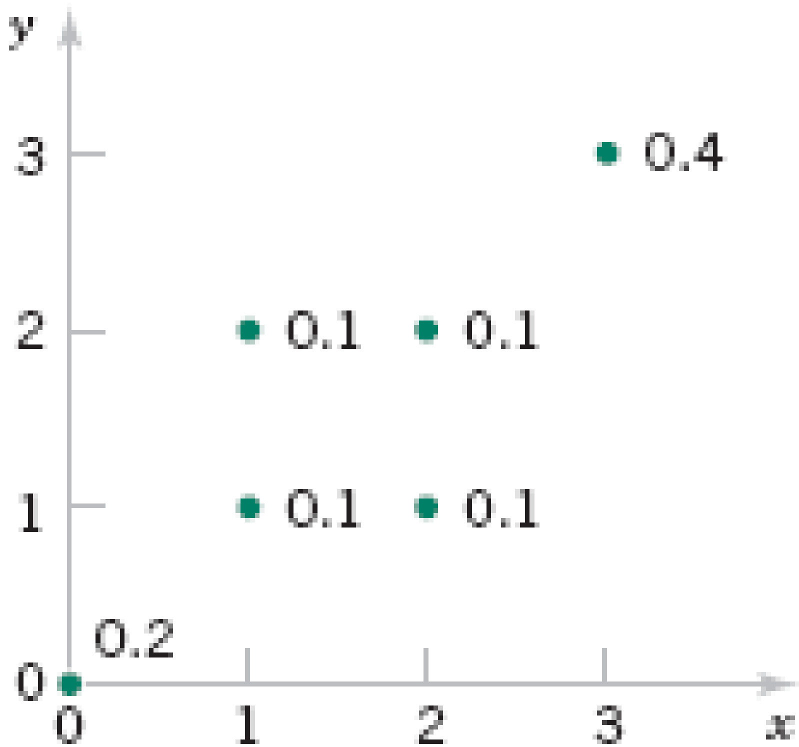
- E que os valores extremos (1 e -1) se obtém para a relação linear $Y = a\,X + b$ com a> 0 ou a <0, respectivamente

Coeficiente de correlação

- Se $\rho_{XY} = 0$ as variáveis dizem-se **descorrelacionadas**

- Como se viu, se X e Y são independentes, a sua covariância é nula e portanto são descorrelacionadas
  - Mas o contrário não é (necessariamente) verdadeiro

Exemplo de cálculo de ρ_{XY}



x	y	P(x,y)
0	0	0,2
1	1	0,1
1	2	0,1
2	1	0,1
2	2	0,1
3	3	0,4
	SOMA	1,0

Cálculo de E[XY], E[X] e E[Y]

x	y	P(x,y)	xy P(x,y)	x P(x)	y P(y)	$x^2\,P(x)$
0	0	0,2	0x0x0,2=0	0	0	0
1	1	0,1	1x1x0,1=0,1	0,1	0,1	0,1
1	2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
2	1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
2	2	0,1	0,4	0,2	0,2	0,4
3	3	0,4	3,6	1,2	1,2	3,6
	SOMA	1,0	4,5	1,8	1,8	4,6

Exemplo de cálculo de ρ_{XY}

- Var(X) = $E[X^2] - (E[X])^2$ = 4,6 – 3,24 = 1,36
- Var(Y) é igual à de X

- $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
- = 4,5 – (1,8) (1,8)=1,26

- Finalmente:
- $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y} = \frac{1,26}{(\sqrt{1,36})(\sqrt{1,36})} = 0,926$