Формальные языки

домашнее задание до 23:59 26.03

№2 Приведите грамматику в нормальную форму Хомского:
$S \ \rightarrow \ RS \mid R$
$R \ \rightarrow aSb \mid cRd \mid ab \mid cd \mid \varepsilon$
Терминалы: $a,\ b,\ c,\ d$, нетерминалы: $R,\ S$, стартовый нетерминал: S, пустая строка: ε.
Решение
Поменяем старт. Получим:
$S \rightarrow S'$
$S' \rightarrow RS' \mid R$
$R \rightarrow aS'b \mid cRd \mid ab \mid cd \mid \varepsilon$

Устраним длинные правила. Получим:
$S \rightarrow S'$
$S' \rightarrow RS' \mid R$
$R \rightarrow EB \mid FD \mid AB \mid CD \mid \varepsilon$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$
$C \rightarrow c$
$D \rightarrow d$
$E \rightarrow AS'$
$F \rightarrow CR$

Устраним ε-правила. Получим:
$S \rightarrow S' \mid \varepsilon$
$S' \rightarrow RS' \mid R$
$R \rightarrow EB \mid FD \mid AB \mid CD$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$
$C \rightarrow c$
$D \rightarrow d$
$E \rightarrow AS' \mid A$
$F \rightarrow CR \mid C$

Устраним цепные правила. Получим:
$S \rightarrow RS' \mid EB \mid FD \mid AB \mid CD \mid \varepsilon$
$S' \rightarrow RS' \mid EB \mid FD \mid AB \mid CD$
$R \rightarrow EB \mid FD \mid AB \mid CD$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$
$C \rightarrow c$
$D \rightarrow d$
$E \rightarrow AS' \mid a$
$F \rightarrow CR \mid c$
Эта грамматика в нормальной форме Хомского.

№3 Является ли следующий язык контекстно-свободным? Если является, привести КС грамматику, иначе – доказать.

$L = \{\ a^m\ b^n \mid m\ +\ n\ >\ 0,\ (m\ +\ n) \vdots 2\ \}$

Решение

Сделаем такую КС грамматику: $S \to aa \mid bb \mid ab \mid aaS \mid aSb \mid Sbb$.
Пусть она задает язык L'.
Нетрудно понять, что все слова в L' будут непустые и четной длины.
Докажем, что L = L'.
Сначала, включение в одну сторону: L $\subset$ L'.
Нетрудно понять, что все слова из букв a и все слова из букв b, которые лежат в L, также лежат и в L' (по индукции).
Рассмотрим слово w = $a^k b^m$, w $\in$ L. Пусть k $\leq$ m.
Удалим из слова $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ строк "aa"сначала. Если k нечетное, то после этого удалим букву "a"с начала и букву "b"с конца. Получим слово w', состоящее только из букв b. Оно лежит в L и L' (так как состоит только из букв b).
Мы можем по правилам получить слово w из слова w'. Значит, w $\in$ L'.
Если k > m то сделаем аналогично, только вместо одного правила будем юзать другое и получим слово, состоящее только из букв "a". Включение в другую сторону - очевидно. Все слова из L' подходят в качестве слов из L. Так как они четной длины, непустые и имеют вид $a^k b^m$.