第15章　搜索树(二)

计算机学院

主要内容

- B树
  - 定义
  - 搜索
  - 插入
  - 删除
  - B^+树
- 红-黑树

动机：建立索引

- 当数据**元素数目较大**时，不能一次读入内存，可以把所有n个元素分为b个子块存放
- 建立索引表，其中每一项是索引项，记录了各子块中最大的关键值
- 此时，索引项与子块一一对应，**便于查找**！
- 当**元素数目特别大**时，索引也不能一次读入内存，可以建立索引的索引（**多级索引**）

索引示例


美莎国际运动城
MASS SPORT CITY
1F
adidas
2F
PUMA
Kappa
adidas
NIKE
Mizuno
RBK
new balance
CONVERSE
UMBRO
LACOSTE
CASIO
361°
OUTDO
Panasonic
adidas 香水
3F
361°
PLAYBOY
PEAK
CBA
speedo
NBA
VICTOR
ZOKE
hosa
YONEX
4F
hosa 浩沙（美莎）健身会所


病房楼层索引图
北区
楼层
南区
上下楼梯
注意安全
⑨ 麻醉科手术室
⑧ 儿科二病区
⑦ 外二病区 肛肠、泌尿、烧伤、耳鼻喉
⑥ 妇产科病区
⑤ 儿科病区
④ 神经内科病区
③ 内科病区
药房 新农合办公室 ② 外一病区
被褥发放处 治安室 ① 骨科病区
免费接诊电话：7100000
昵图网 www.nipic.com BY: ylxgyq

索引示

U

V

W

X

Y

Z

倒排索引示例

文档 1
I did enact Julius Caesar: I was killed i' the Capitol; Brutus killed me.

文档 2
So let it be with Caesar. The noble Brutus hath told you Caesar was ambitious:

词项	docID
I	1
did	1
enact	1
julius	1
caesar	1
I	1
was	1
killed	1
i'	1
the	1
capitol	1
brutus	1
killed	1
me	1
so	2
let	2
it	2
be	2
with	2
caesar	2
the	2
noble	2
brutus	2
hath	2
told	2
you	2
caesar	2
was	2
ambitious	2

⟹

词项	docID
ambitious	2
be	2
brutus	1
brutus	2
capitol	1
caesar	1
caesar	2
caesar	2
did	1
enact	1
hath	1
I	1
I	1
i'	1
it	2
julius	1
killed	1
killed	1
let	2
me	1
noble	2
so	2
the	1
the	2
told	2
you	2
was	1
was	2
with	2

⟹

词项	文档频率	→	倒排记录表
ambitious	1	→	2
be	1	→	2
brutus	2	→	1 → 2
capitol	1	→	1
caesar	2	→	1 → 2
did	1	→	1
enact	1	→	1
hath	1	→	2
I	1	→	1
i'	1	→	1
it	1	→	2
julius	1	→	1
killed	1	→	1
let	1	→	2
me	1	→	1
noble	1	→	2
so	1	→	2
the	2	→	1 → 2
told	1	→	2
you	1	→	2
was	2	→	1 → 2
with	1	→	2

m叉搜索树

- **定义：*m*叉搜索树**（*m*-way search tree）
  可以是一棵空树，
  如果非空，它必须满足：

1）在相应的扩充搜索树中（用外部节点替换零指针），**每个内部节点最多可以有*m*个子女及1～*m*-1个元素**（外部节点不含元素和子女）

m叉搜索树

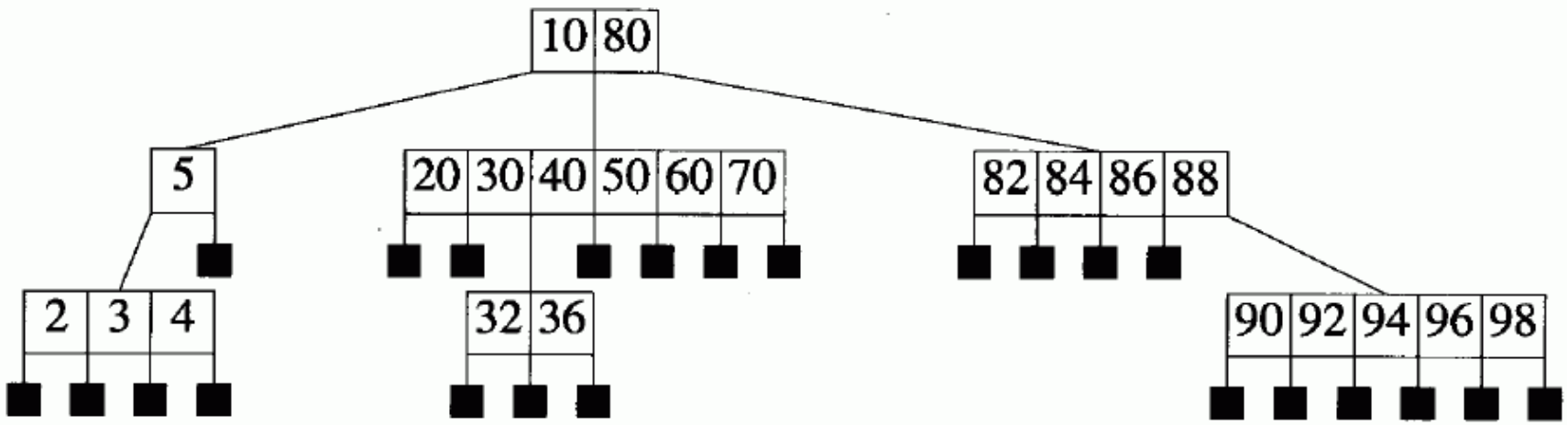
2） 每个含p个元素的节点，有p+1个子女

3） 考察含p个元素的任意节点

- 设k_1，．．．，k_p是这些元素的关键值，元素按关键字**升序**排列，即有$k_1<k_2<...<k_p$
  设c_0，c_1，．．．，c_p是节点的p+1个孩子
  - 以c_0为根的子树中的元素关键值小于k_1
  - 以c_p为根的子树中的元素关键值大于k_p
  - 并且以c_i为根的子树中的元素关键值会大于k_i而小于k_{i+1}，其中$1 \leqslant i \leqslant p$

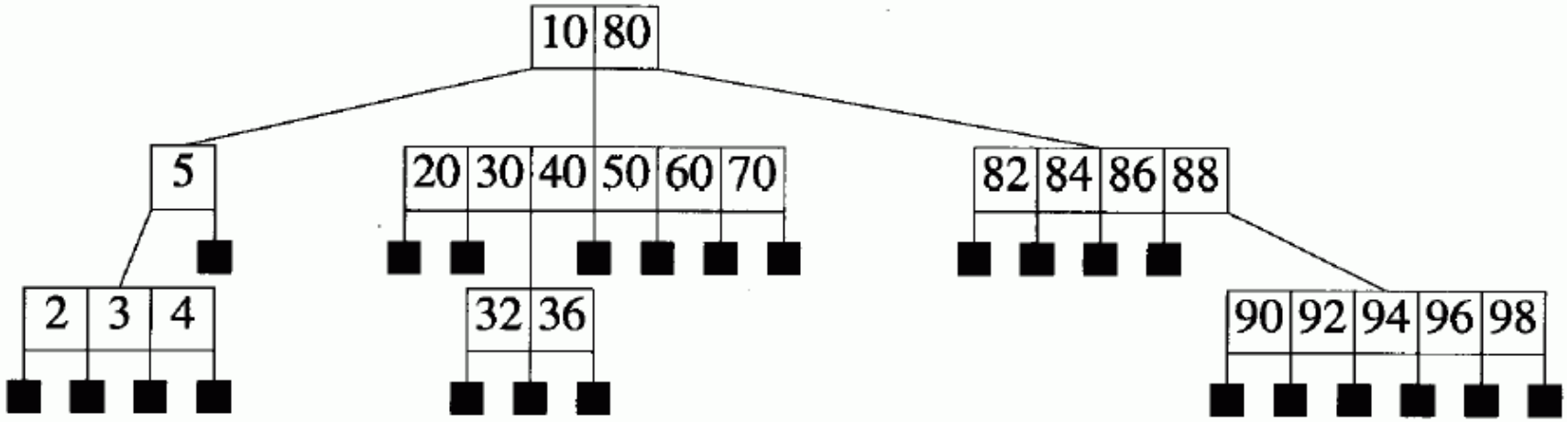
例：7叉搜索树

m=7
检验条件1、2、3



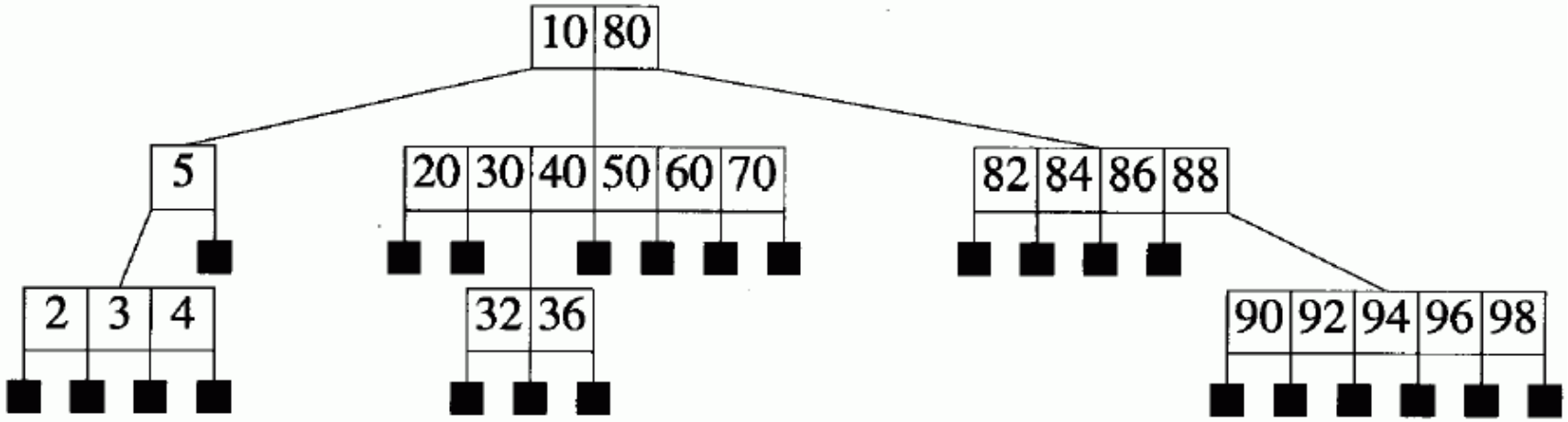
- **搜索**操作
  - 从根节点开始，向下搜索
  - 对每个节点，若目标关键字k
    - $=k_i$，搜索成功
    - $k_i<k<k_{i+1}$，在子树i中继续寻找
  - 到达外部节点——失败：搜索31

例



- **插入**操作
  - 先进行搜索：成功，插入失败；否则，在失败位置（最后的一个内部节点）进行插入
  - 元素数<m-1，直接插入：插入31
  - ≥m-1，生成新孩子节点：插入65

例



- **删除**操作
  - 先进行搜索，找到元素后进行删除
  - 左右子树均为空，直接进行删除：删除20
  - 不都为空，子树中元素提升，替代被删除元素：删除10

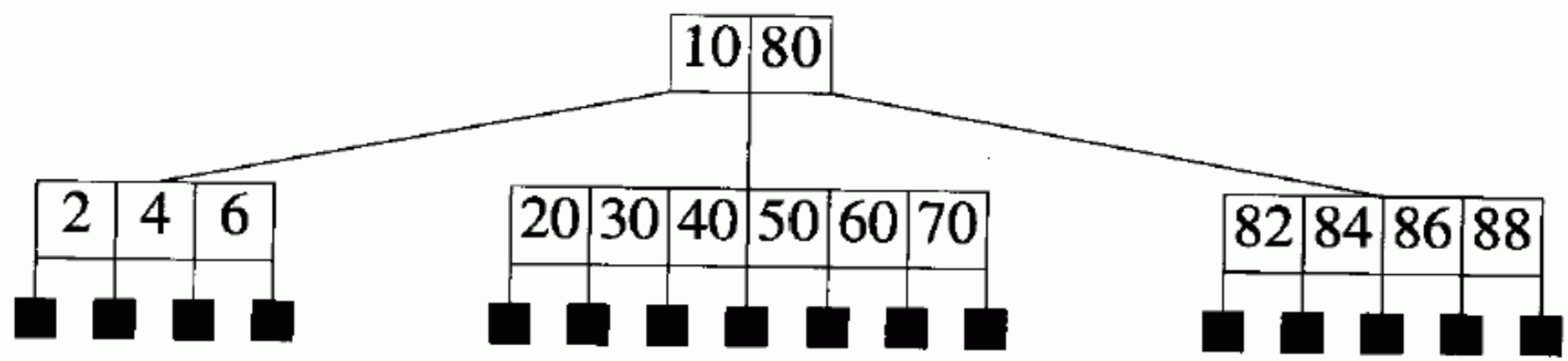
m叉搜索树的高度

- 高度为h，最少h个元素，最多$m^h - 1$
  - 1层～h-1层的每个节点孩子数都是m
    h层节点无孩子，节点总数 $\sum_{i=0}^{h-1} m^i = (m^h - 1)/(m-1)$
    每个节点m-1个元素
    元素总数m^h-1
- n个元素，高度n～$\log_m(n+1)$
- 与二叉搜索树类似，最坏情况很差——
  m叉平衡搜索树，保证总有对数的复杂性

H1. m阶B树

- **定义：*m*阶*B*树**（B-Tree of order m）是一棵*m*叉搜索树，如果B树非空，那么相应的扩充树满足下列特征：
  1) 根节点至少有2个孩子
  2) 除根节点外，所有内部节点至少有 $\lceil m/2 \rceil$ 个孩子
  3) 所有外部节点位于同一层上

7阶B树例



1）在扩充搜索树中，每个内部节点最多可以有m个子女及1～m-1个元素

2）每个含p个元素的节点，有p+1个子女

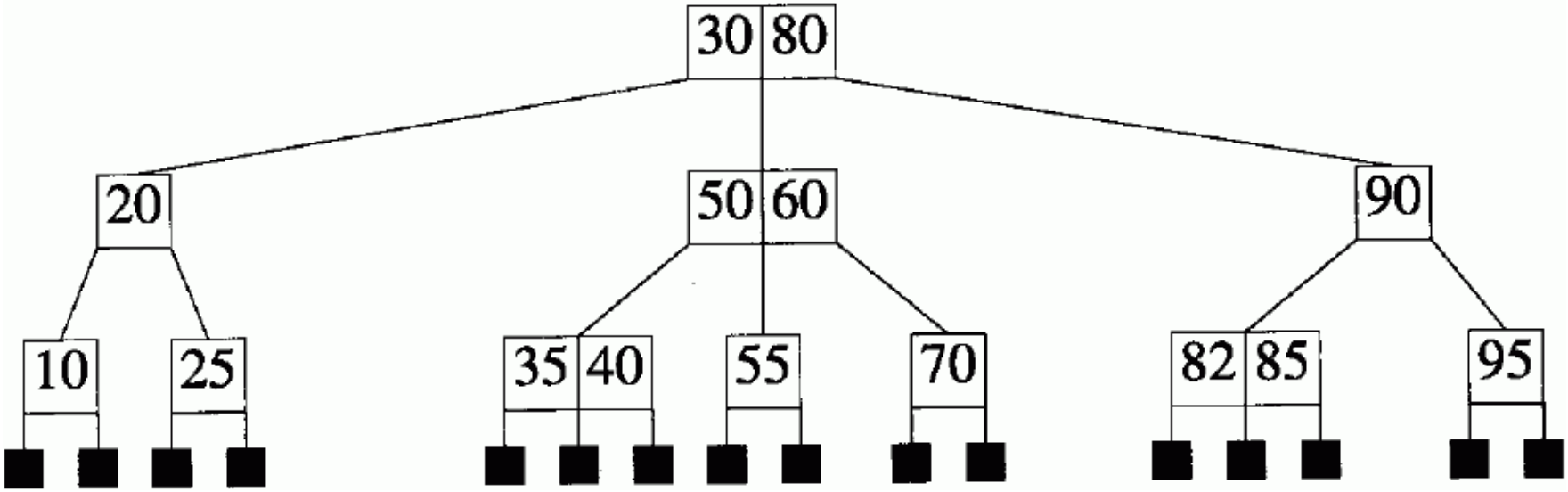
3）考察含p个元素的任意节点以c_i为根的子树中的元素关键值会大于k_i而小于k_{i+1}，其中$1 \le i \le p$

1) 根节点至少有2个孩子
2) 除根节点外，所有内部节点至少有 $\lceil m/2 \rceil$ 个孩子
3) 所有外部节点位于同一层上

例

- 二阶B树：满二叉树
- 三阶B树：2-3树
- 四阶B树：2-3-4树

问题1：2-3-4树中有几种节点？
问题2：这些节点如何存储？



重新整理m阶B树特征

1. 每个节点至多有m棵子树
2. 若根节点有子树，则至少有2棵子树
3. 除根节点外，每个节点至少有ceil(m/2)棵子树

个数要求

4. 子树与它的索引有确定的大小关系

大小要求

5. 所有叶节点在同一层上

层次要求

B树的高度

- 定理11-3
  设T是一棵高度为h的m阶B树
  $d=\lceil m/2 \rceil$　　且n是T中的元素个数，则

  1) $2d^{h-1}-1 \leqslant n \leqslant m^h-1$

  2) $\log_m(n+1) \leqslant h \leqslant \log_d((n+1)/2)+1$

证明

n的上限，由T是一棵m叉搜索树，得证

对于下限，扩充B树的外部节点都在h+1层。1，2，3，4，. . .，h+1层的节点最小数目是1，2，2d，2d^2，. . .，2d^{h-1}，

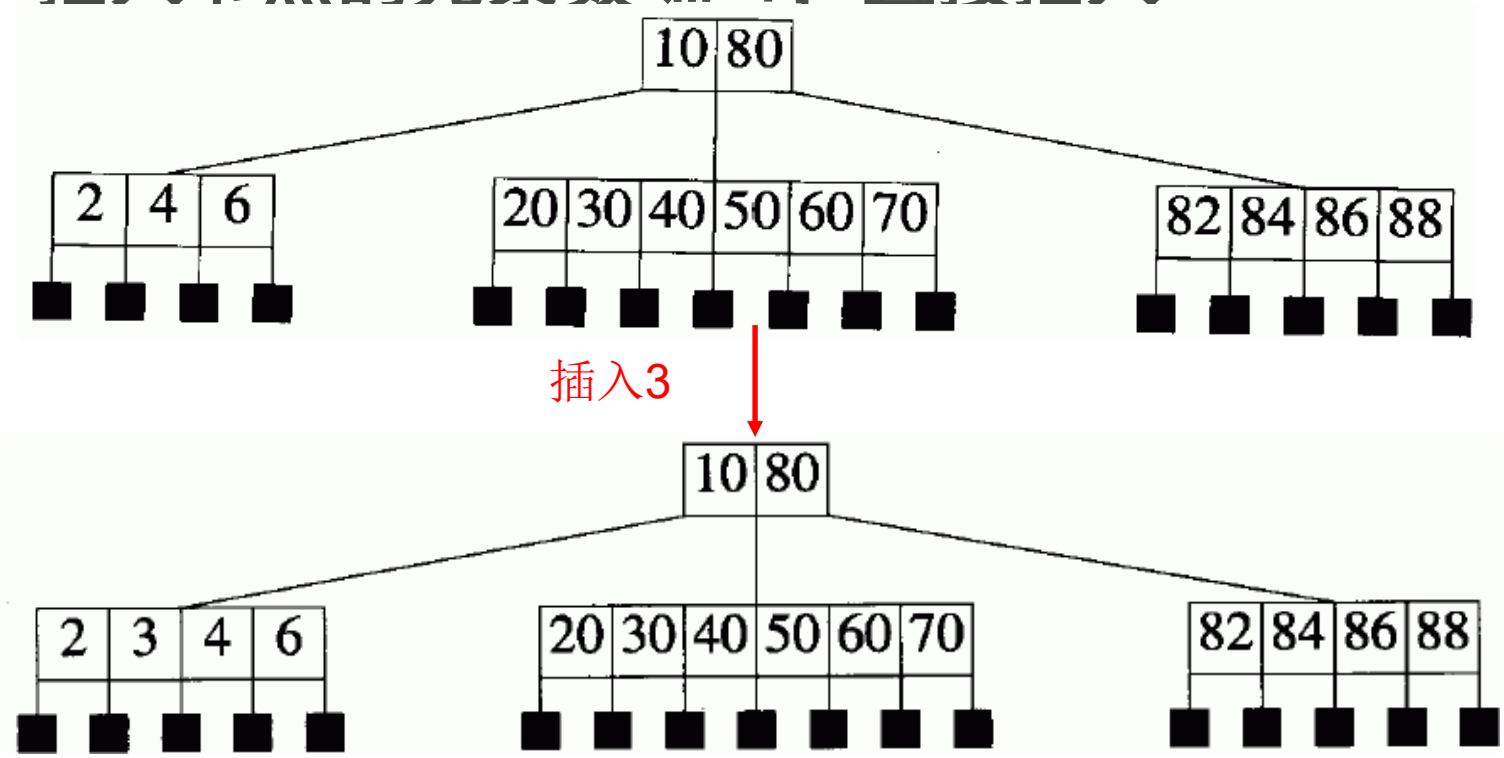
➔B树中外部节点的最小数是2d^{h-1}

外部节点的数量比元素的个数多1

➔$n \geqslant 2d^{h-1}-1$从1）直接可以得到2 ）

插入操作——简单情况

- 插入节点的元素数<m-1，直接插入



插入操作——分裂

- 插入节点的元素数＝m−1，再添加新的元素，必然超出限制，怎么办？分裂！
- 带空指针的新元素e插入饱和节点P
  →成为溢出节点

  $m,\ c_0,\ (e_1,\ c_1),\ \ldots,\ (e_m,\ c_m)$

插入操作——分裂

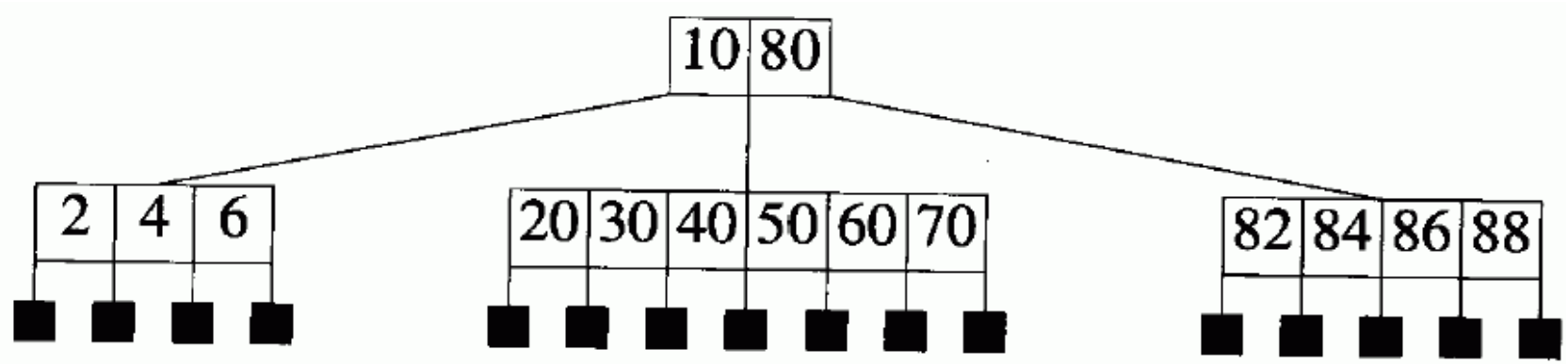
- 从e_d处分裂出新节点Q:

  P: $d-1$, c_0, (e_1, c_1), ..., (e_{d-1}, c_{d-1})

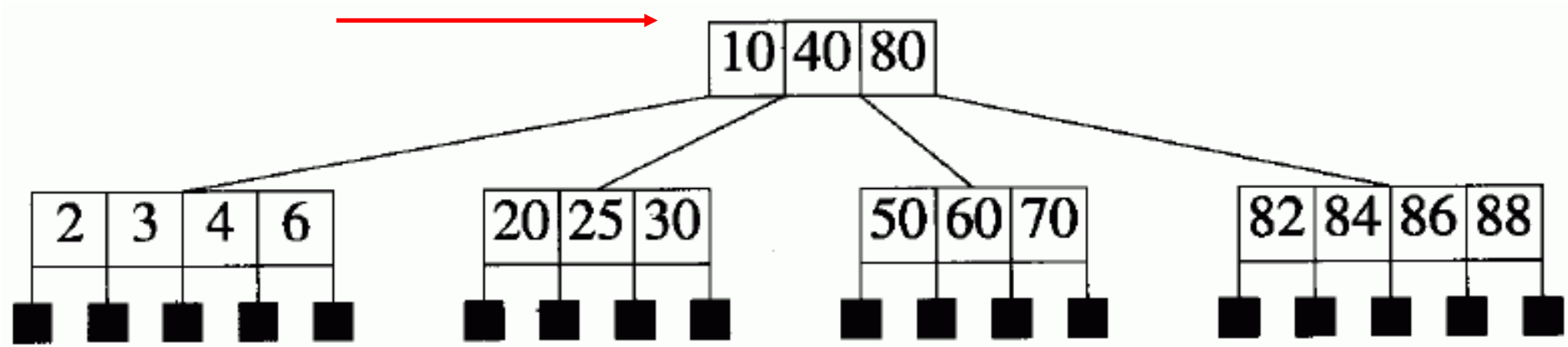
  Q: $m-d$, c_d, (e_{d+1}, c_{d+1}), ..., (e_m, c_m)

- (e_d, Q)提升到P的父节点中

分裂例


10 80
2 4 6
20 30 40 50 60 70
82 84 86 88

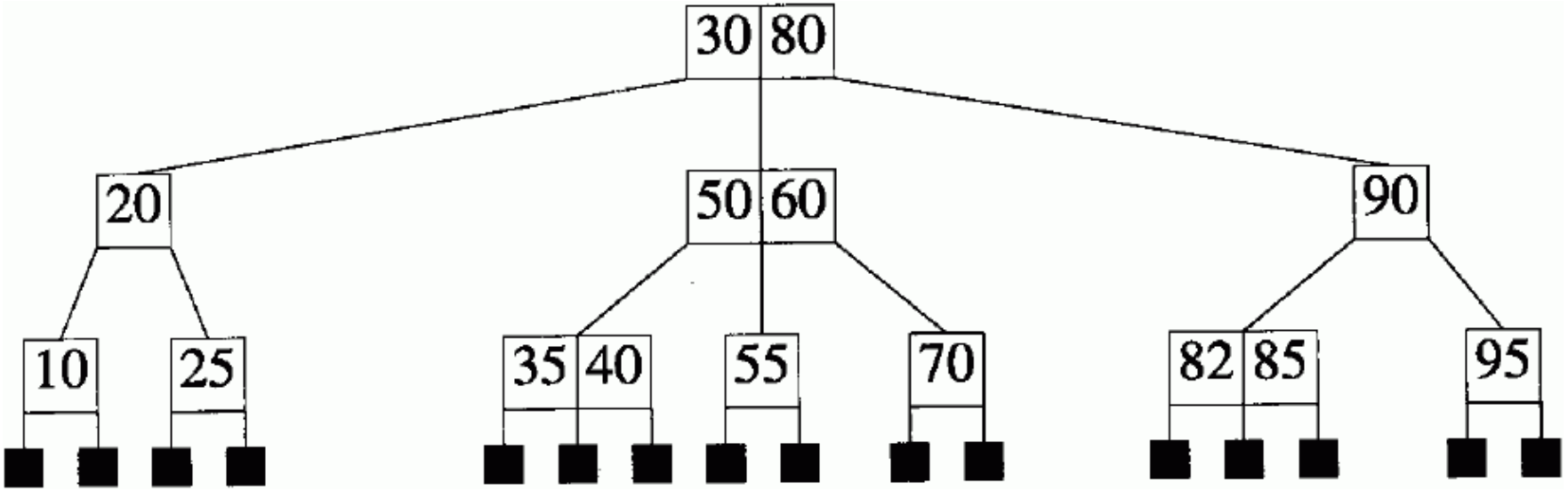
插入25


10 40 80
2 3 4 6
20 25 30
50 60 70
82 84 86 88

插入操作——分裂回溯

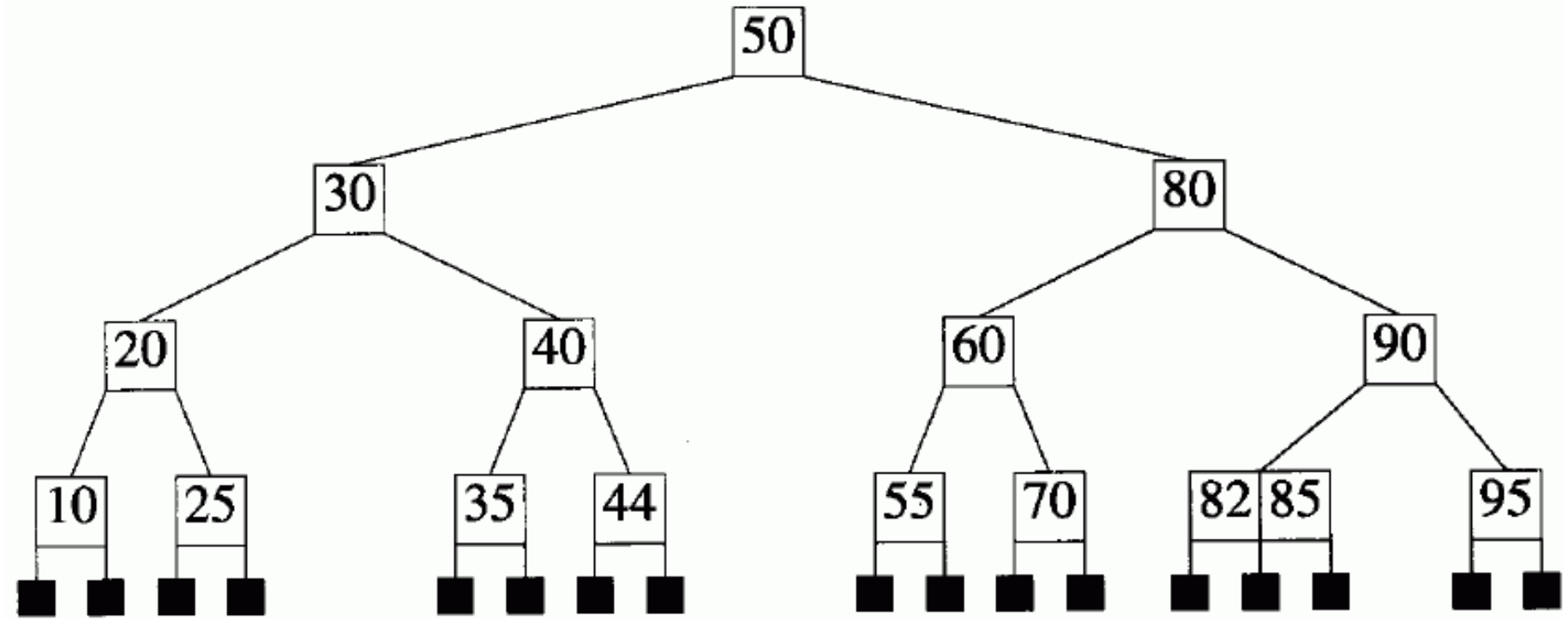
- 分裂后，中心节点提升至父节点——
  可能导致父节点溢出——
  继续分裂，. . .，直至根节点

分裂回溯例——三阶B树



插入44

分裂回溯例（续）



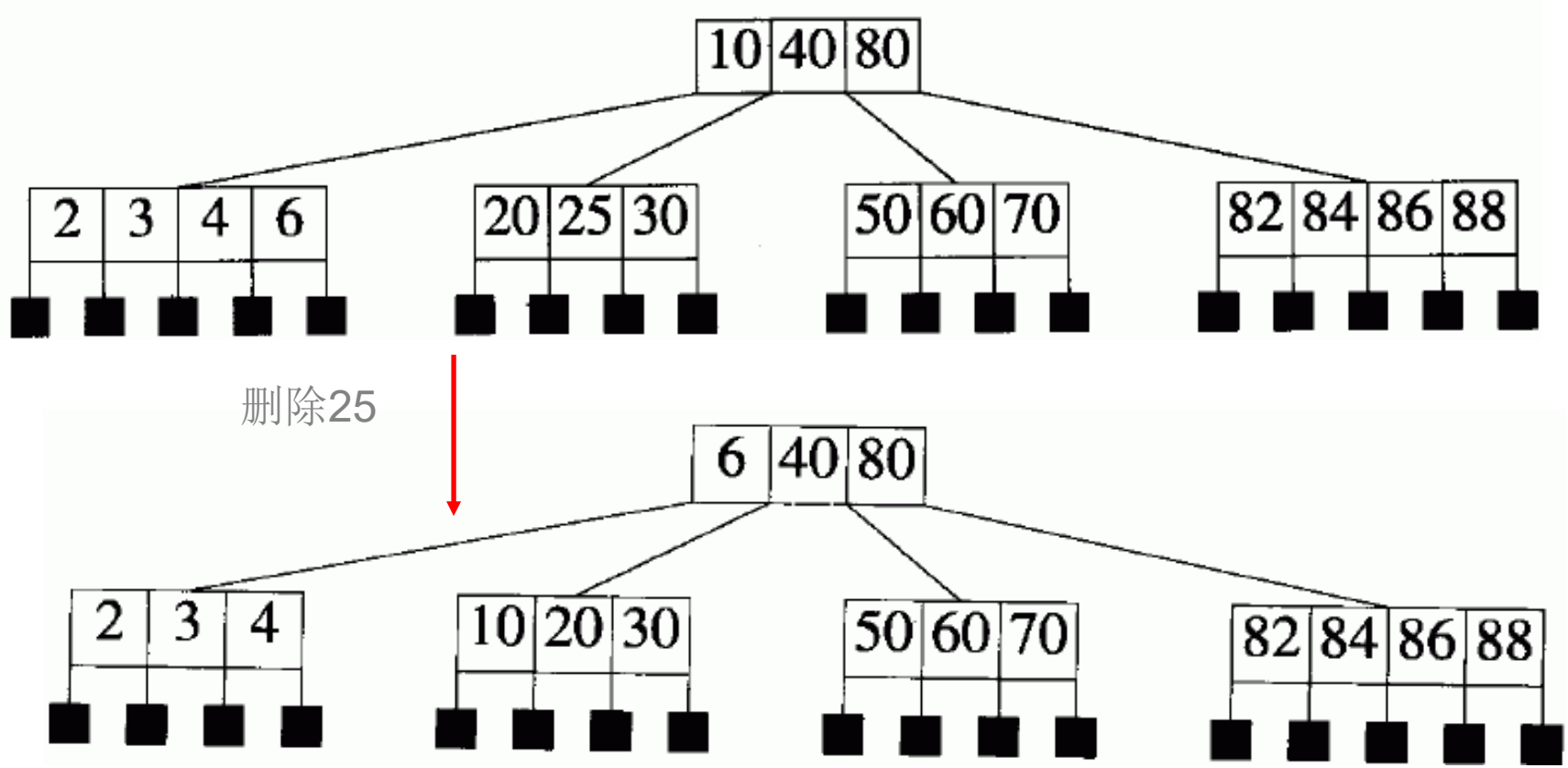
删除操作

1） 删除叶节点中元素

2） 删除非叶节点元素，类似AVL树，子树叶节点元素与之交换，转换为1）

- 元素数目>d-1，直接删除即可
- 元素数目=d-1，删除后小于限制值
  - 借用兄弟节点“多余”的元素
  - 兄弟节点也无多余元素，合并

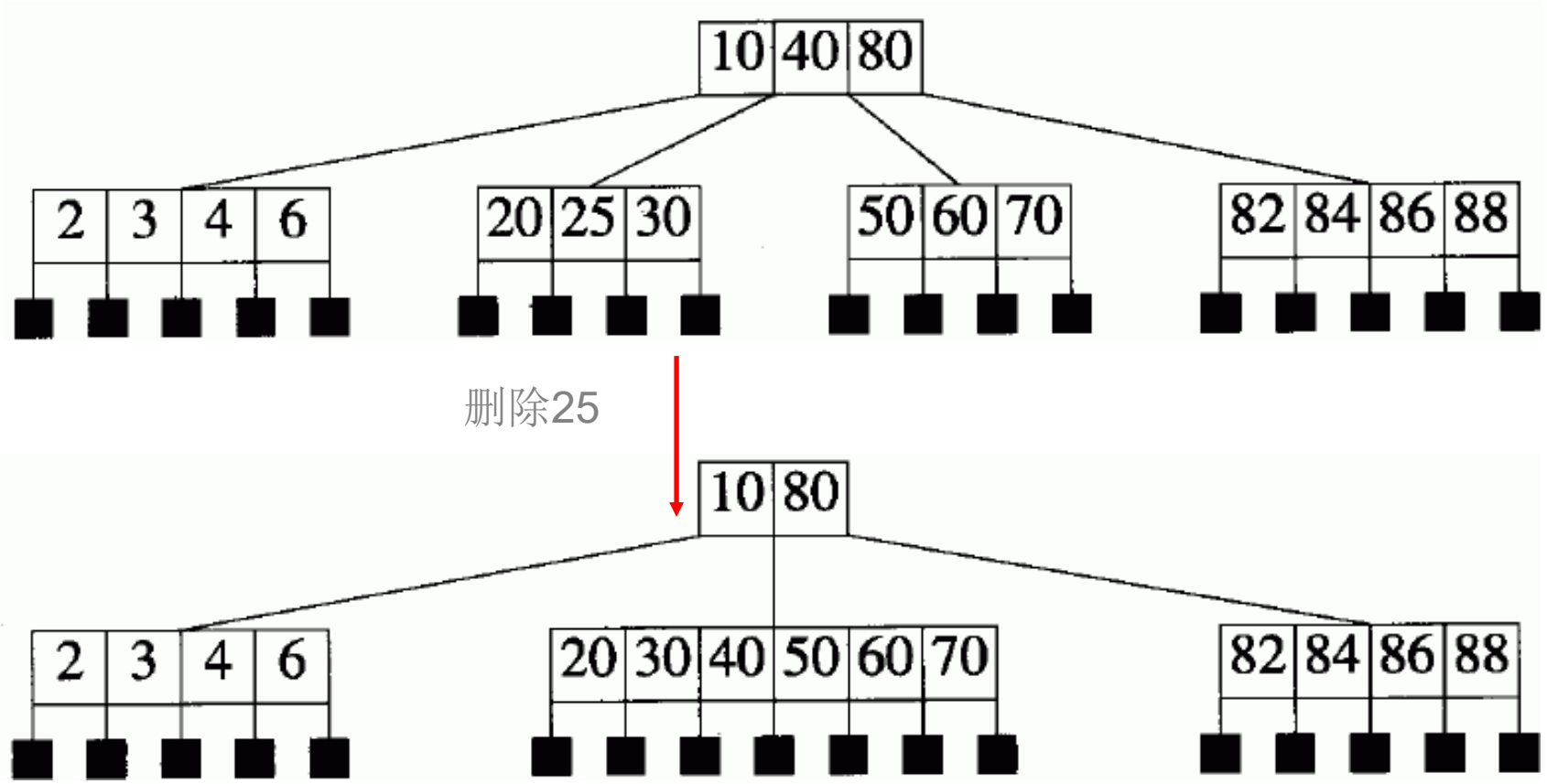
删除操作——借用兄弟节点m=7



删除操作——借用兄弟节点

- 左（右）兄弟节点元素数>d-1
- 将其最右（左）元素提升至父节点，父节点相应元素下降到删除节点
  ➔元素数目>=d-1

删除操作——与兄弟节点合并m=7



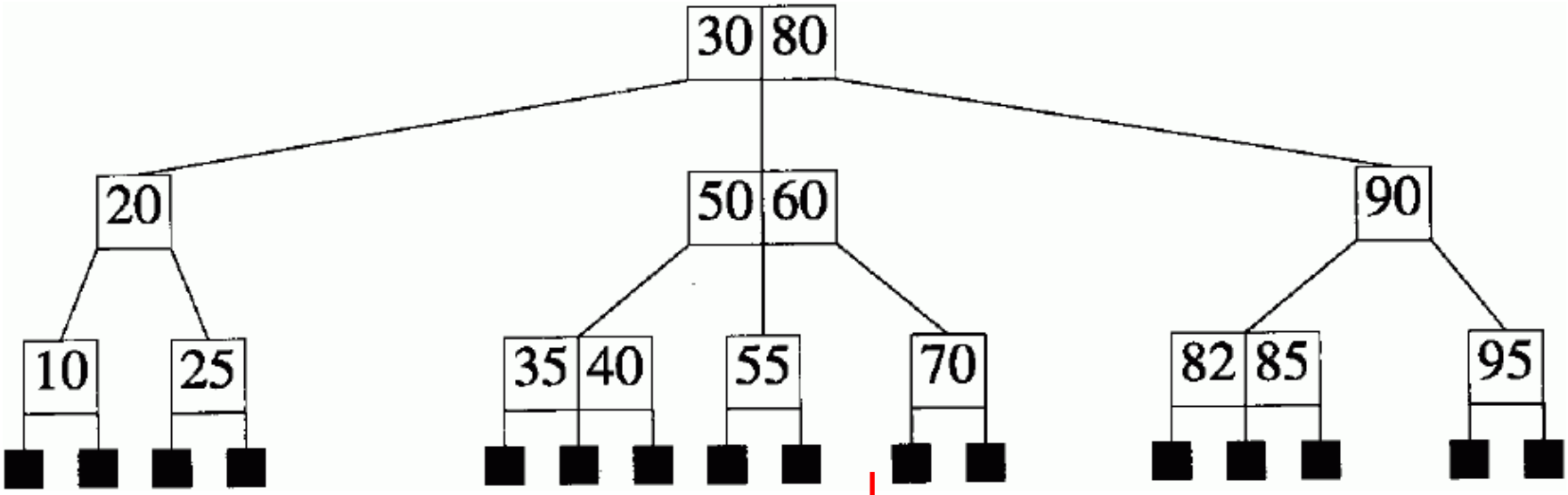
删除操作——与兄弟节点合并

- 本节点元素数：d-2＋
  兄弟节点元素数：d-1＋
  父节点中介于两者之间的元素：1
  ＝ 2d － 2≤m － 1

删除操作——合并的回溯

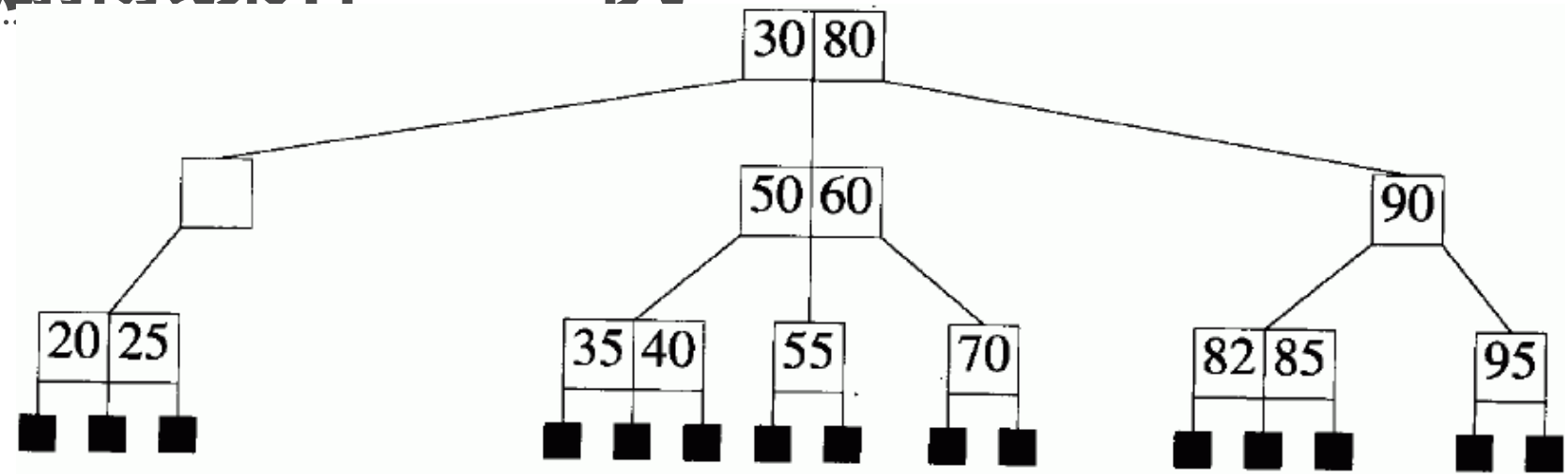
- 合并：父节点元素数减少，可能<d-1
- 继续前面所述的处理方法
- 可能需合并——涉及祖父节点. . .
- 最坏情况回溯到根节点

删除操作——合并的回溯m=3



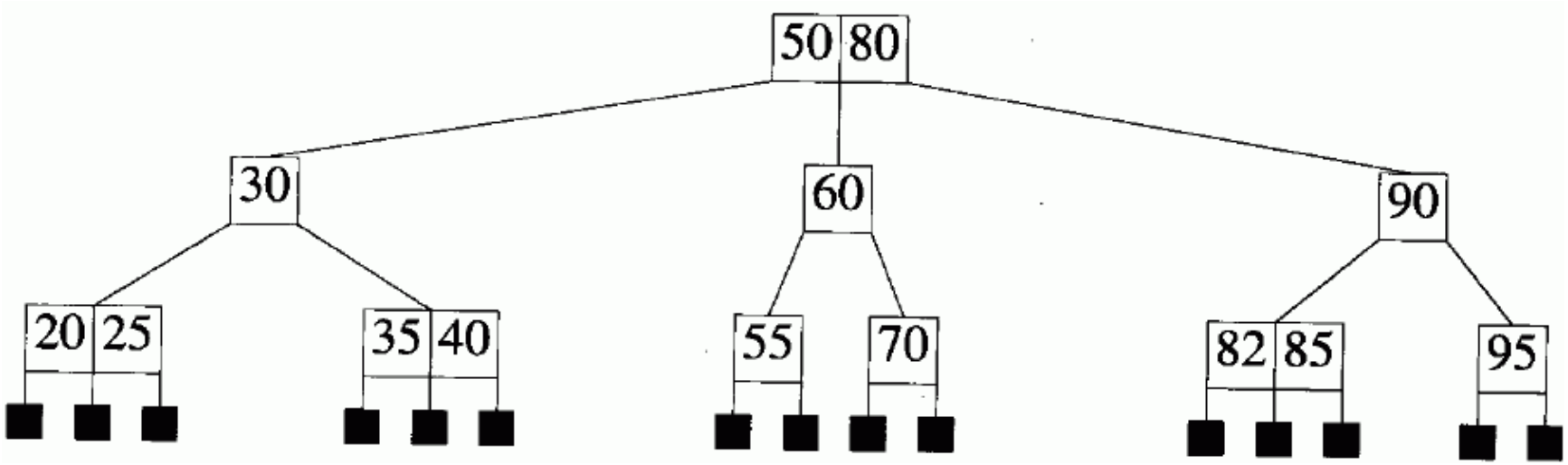
删除10

删除操作——例

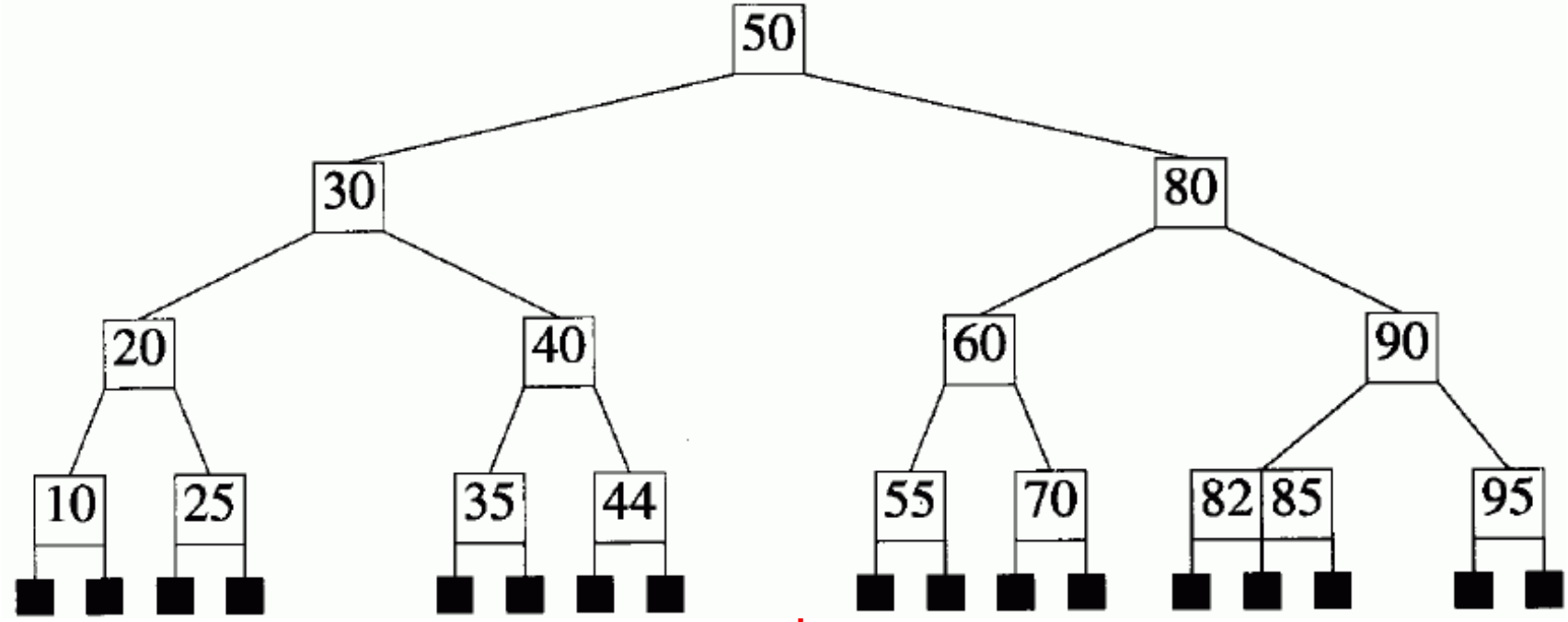


父节点采取“借用法”

删除操作——例

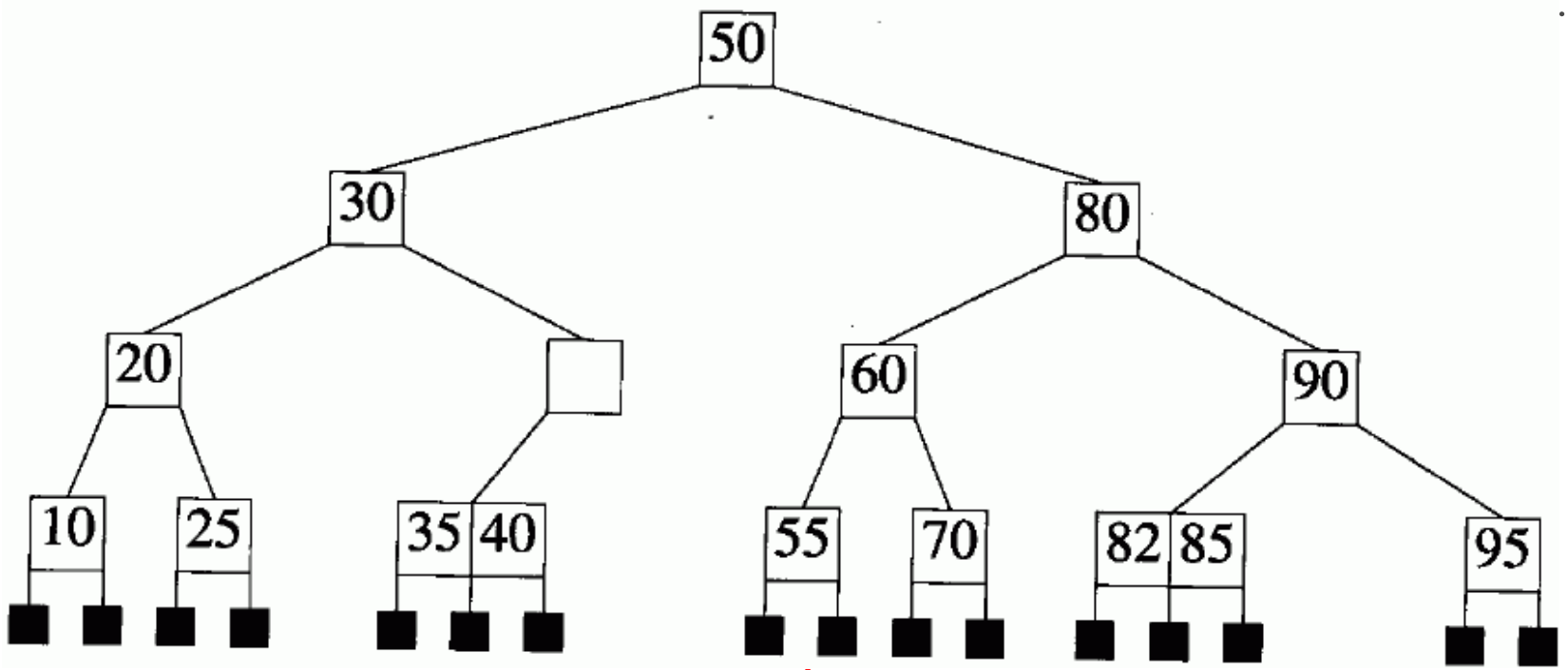


删除操作——例



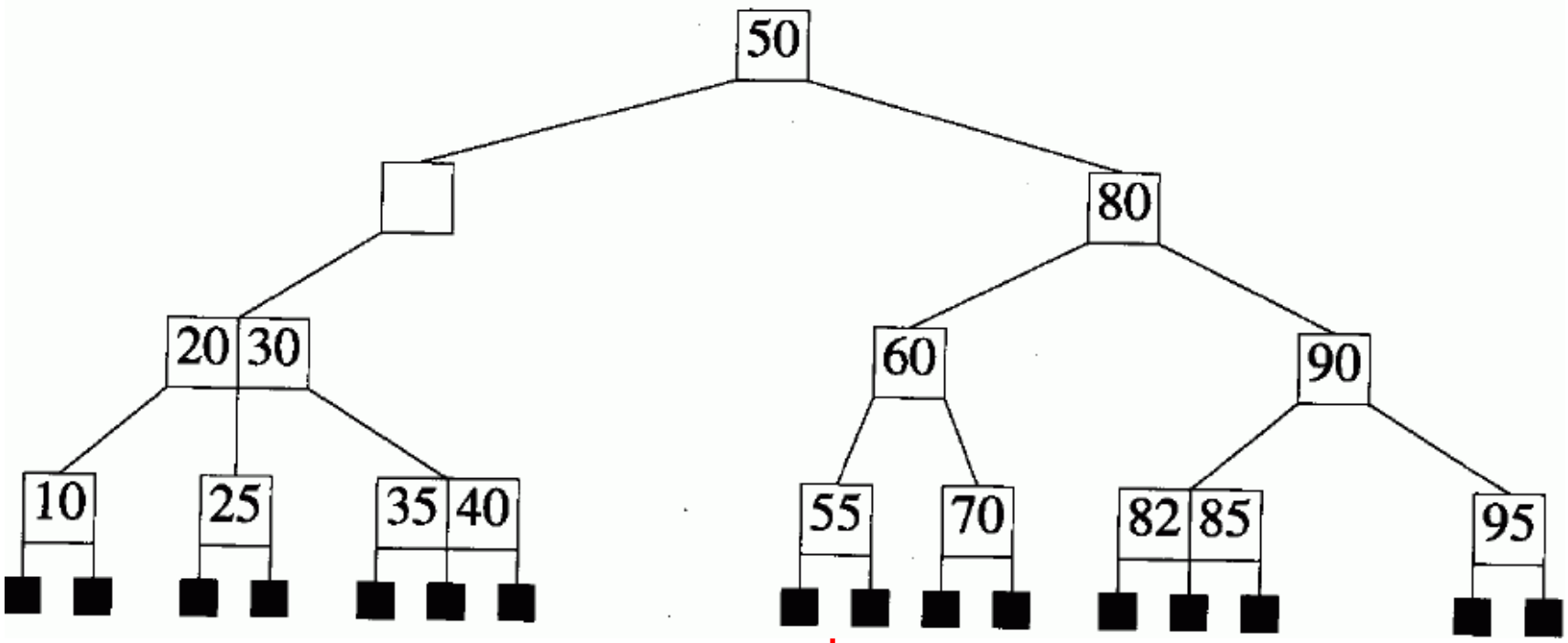
删除44

删除操作——例



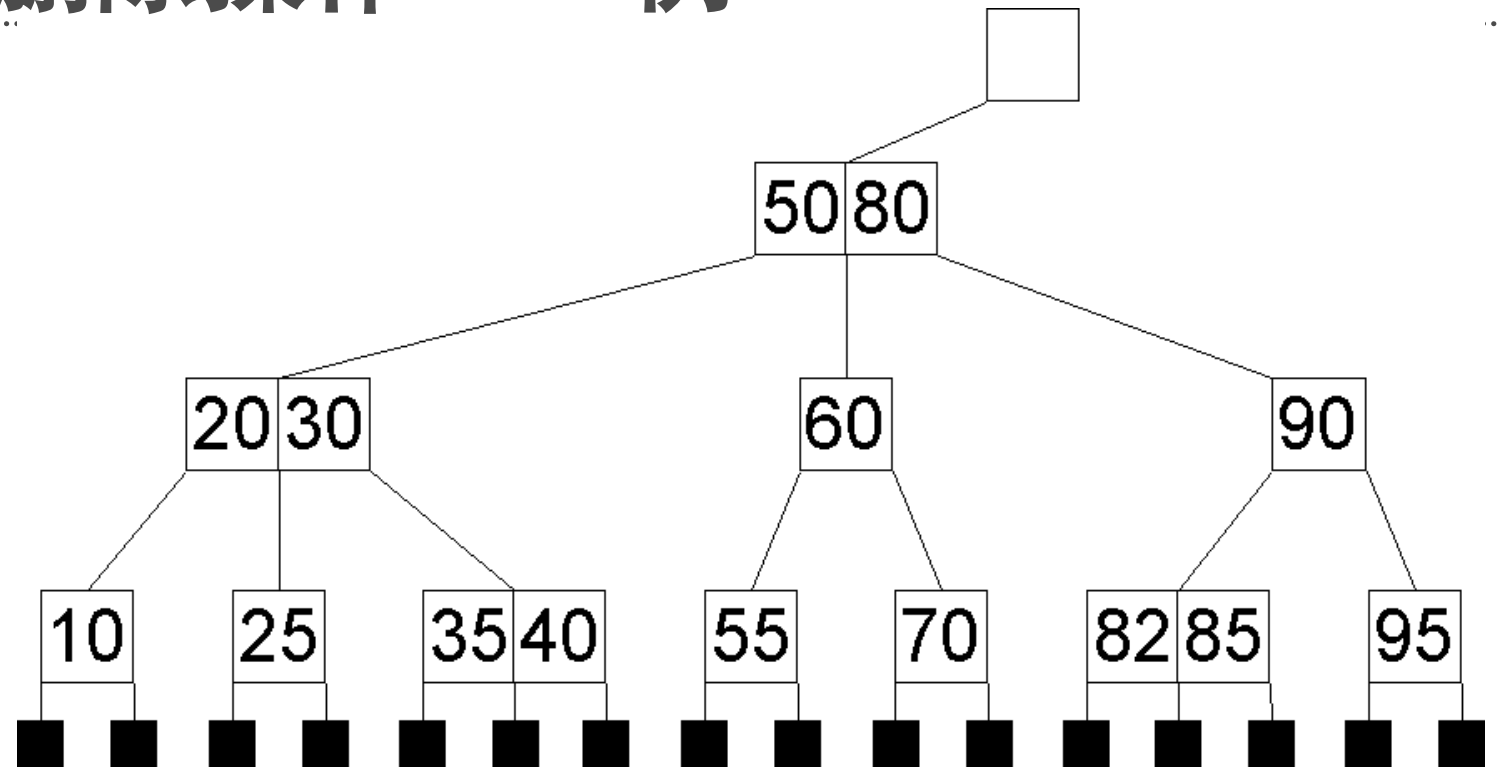
20、30合并

删除操作——例



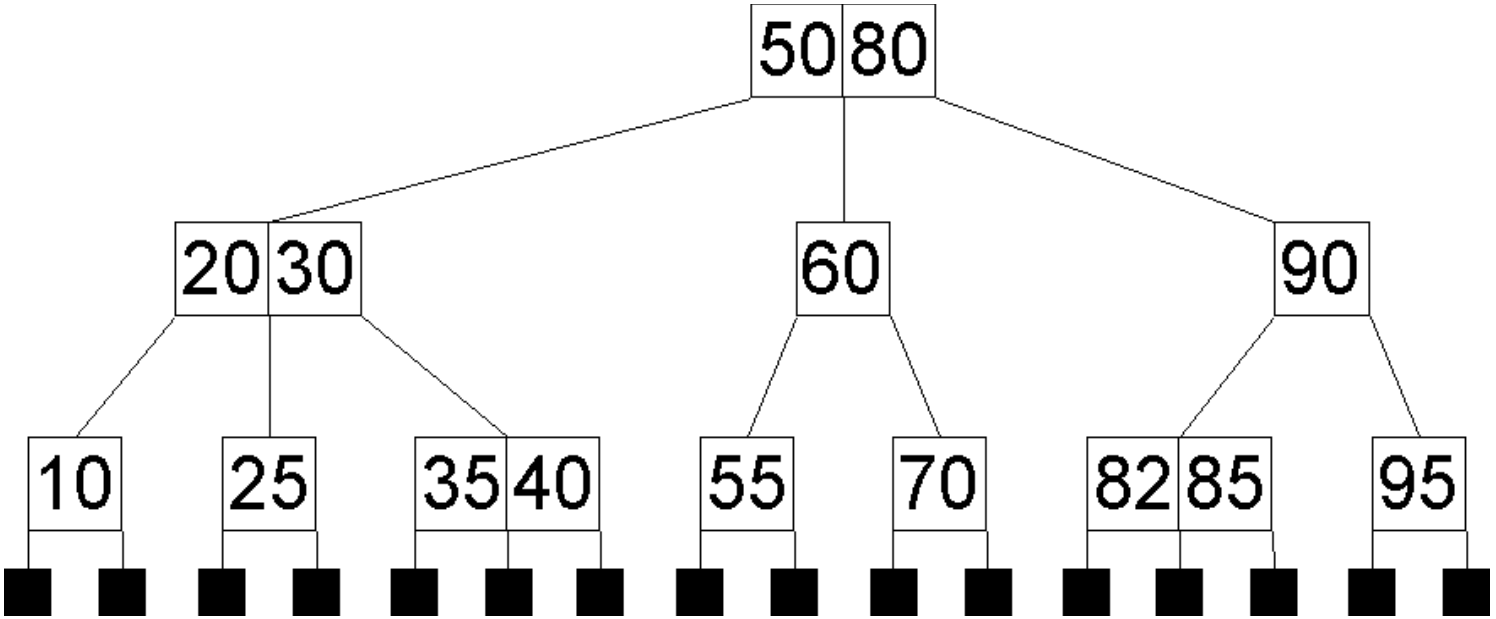
继续合并，根节点变空

删除操作——例



删除操作——例

丢弃根节点，最终结果



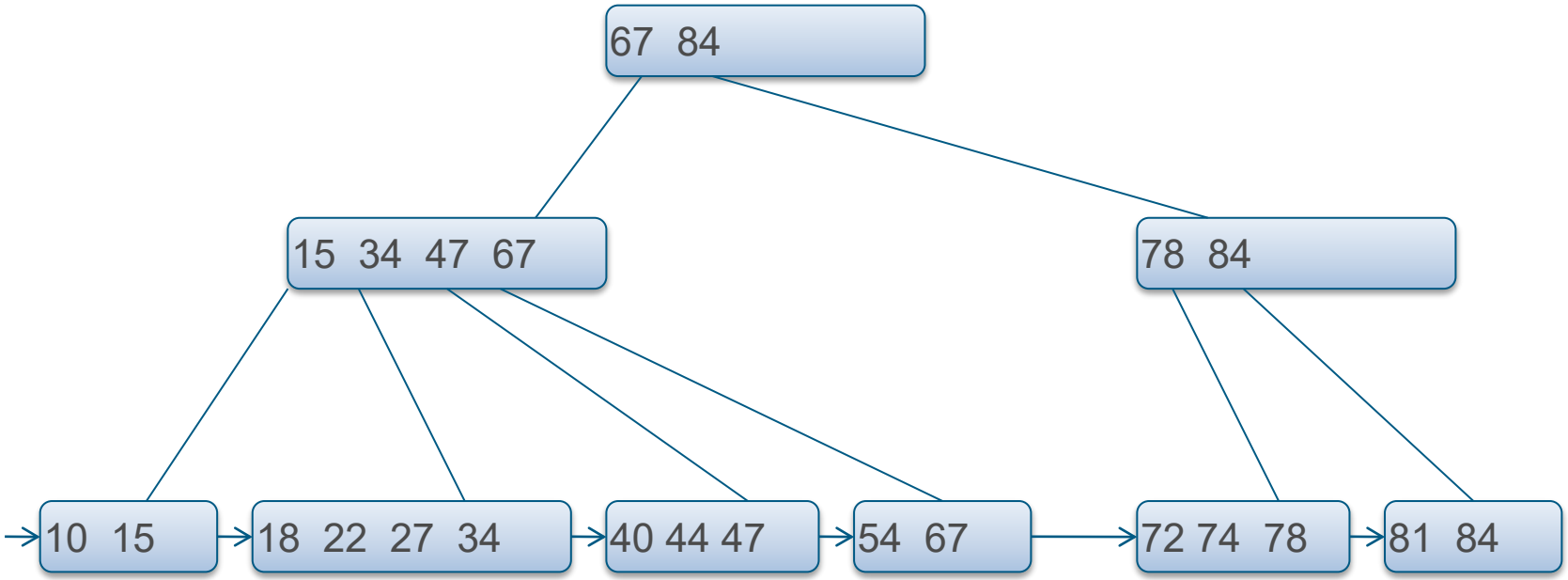
H1小结

- n阶B树的插入
  - 需考虑违背n阶上限的情况
  - 处理方法：**分裂**
- n阶B树的删除
  - 需考虑违背n阶下限的情况
  - 处理方法：**能借就借，不能借合并**

B+树定义

- B+树与B树的区别
  - 所有关键字都放在叶节点中，上层的非叶结点的关键字是其子树中最大关键字的复写
  - 叶节点包含了全部关键字，且叶节点本身按关键字值从小到大链接

4阶B+树示例



B^+树插入

- 通过查找，在叶节点的适当位置插入元素
- 如果插入后合法，结束
- 如果插入后非法，将该叶节点均匀分裂，更新其父节点
- 递归检查其父节点在更新后是否合法，直至结束。

B+树插入示例

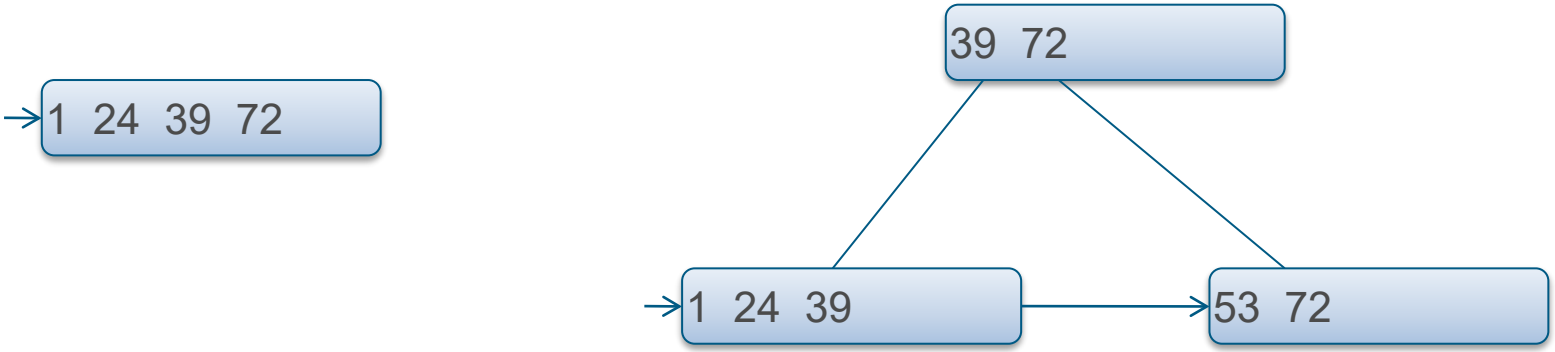
- 要求：连续插入十三个数，形成4阶B+树
  24, 72, 1, 39, 53, 63, 90, 88, 15, 10, 44, 68, 18

第1步：插入24,72,1,39

B+树插入示例

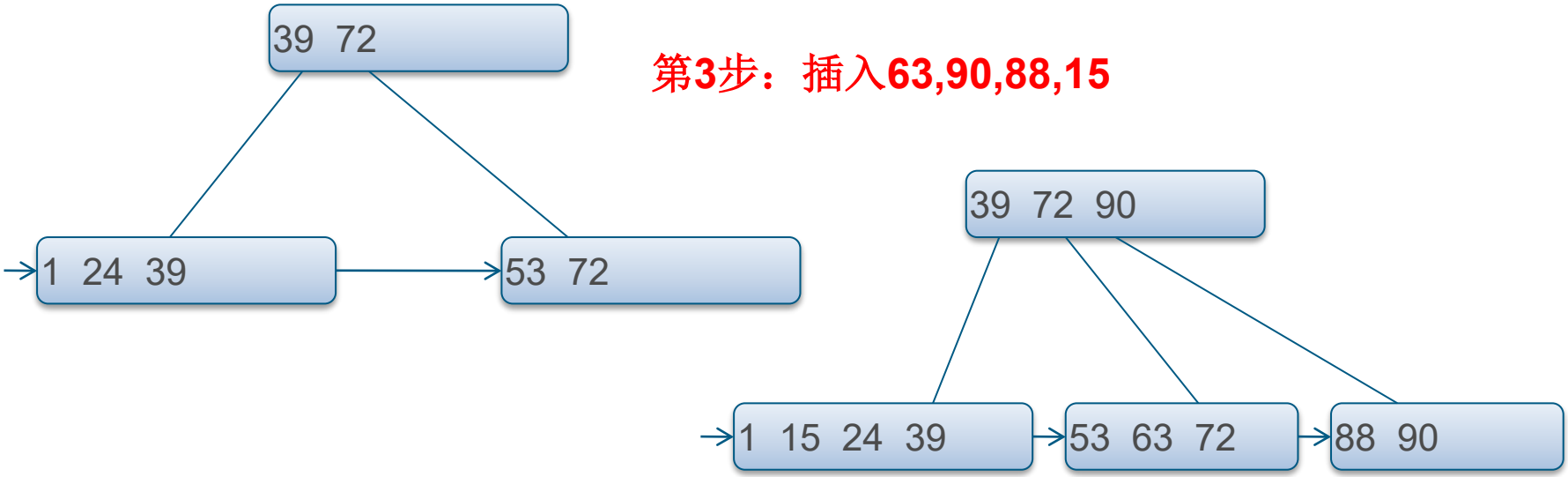
- 要求：连续插入十三个数，形成4阶B+树
  24, 72, 1, 39, 53, 63, 90, 88, 15, 10, 44, 68, 18

第2步：插入53



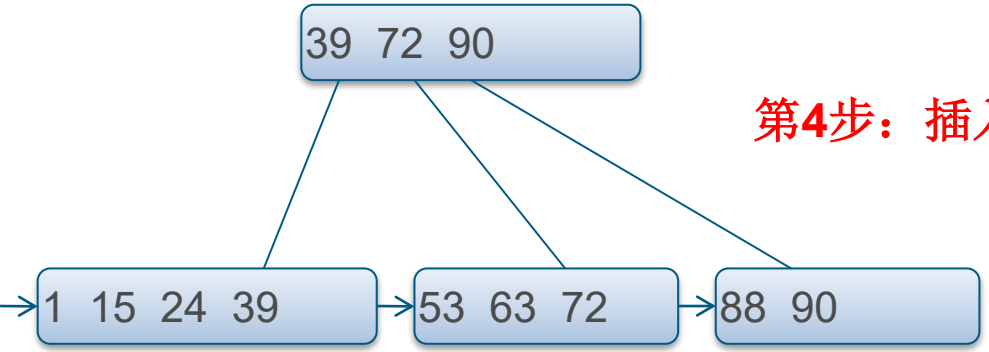
B+树插入示例

- 要求：连续插入十三个数，形成4阶B+树
  24, 72, 1, 39, 53, 63, 90, 88, 15, 10, 44, 68, 18

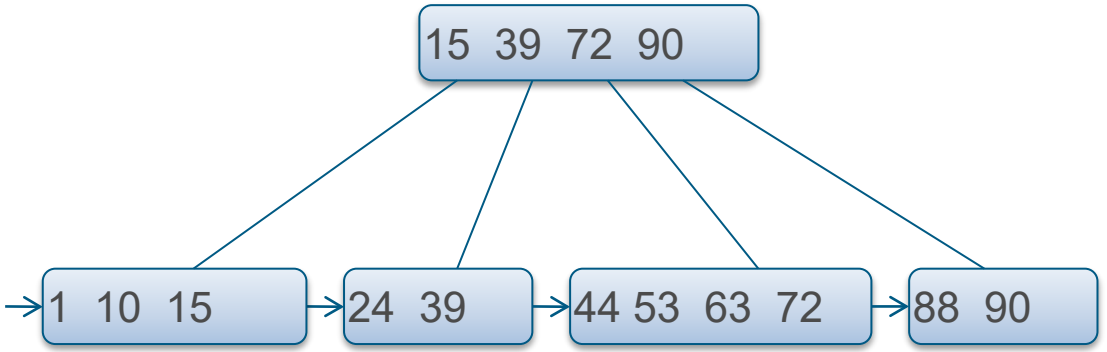


B+树插入示例

- 要求：连续插入十三个数，形成4阶B+树
  24, 72, 1, 39, 53, 63, 90, 88, 15, 10, 44, 68, 18

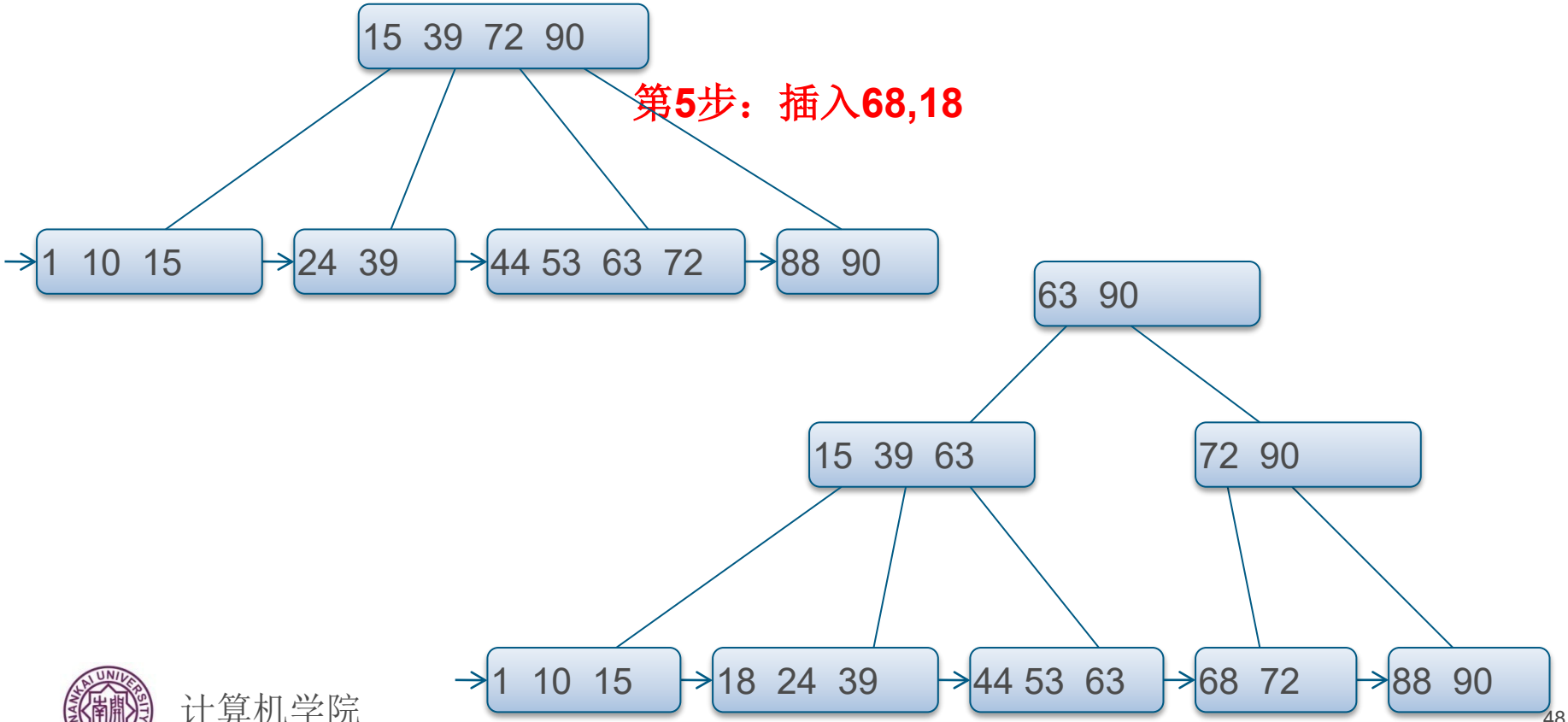


第4步：插入10,44



B+树插入示例

- 要求：连续插入十三个数，形成4阶B+树
  24, 72, 1, 39, 53, 63, 90, 88, 15, 10, 44, 68, 18



B^+树删除

- 首先在叶节点上进行删除
- 如果删除后该节点仍满足最小元素数要求，停止
- 如果不满足了，从兄弟节点借元素
- 如果没法借，则合并兄弟节点
- 递归考察父节点，直至结束

主要内容

- B树
- 红-黑树
  - 定义
  - 搜索
  - 插入
  - 删除

红－黑树定义

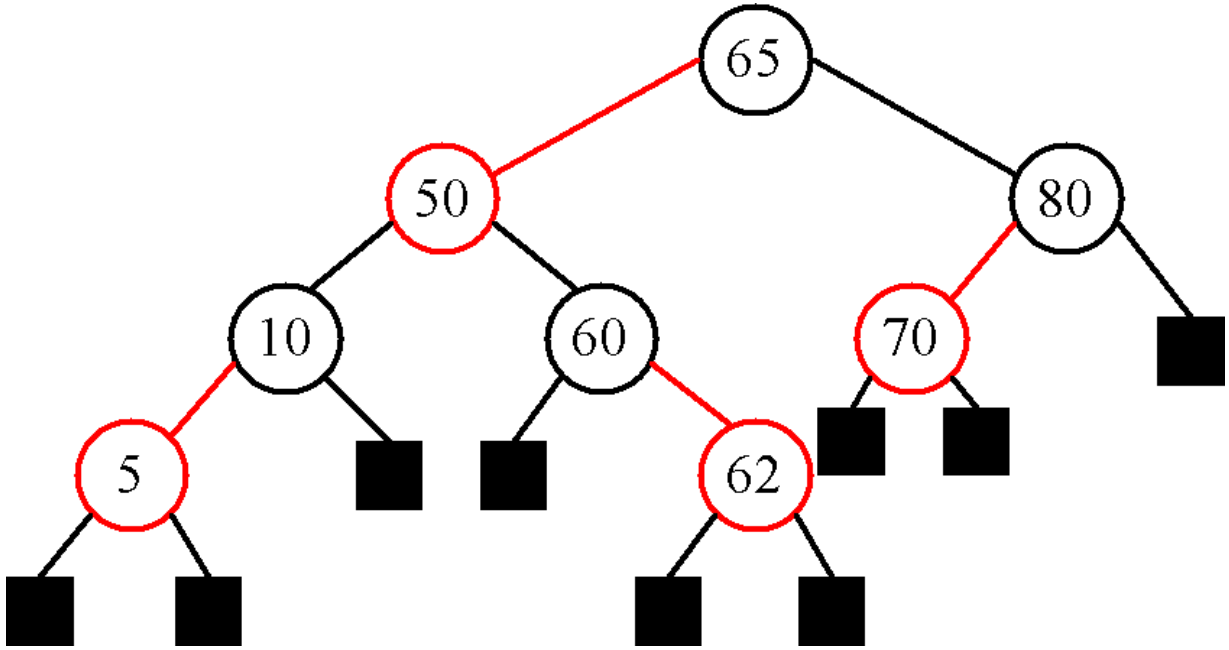
- 特殊的二叉搜索树，对扩充（外部节点）的二叉搜索树，满足以下条件
  - RB1：根节点和所有外部节点的颜色是黑的
  - RB2：根至外部节点的路径上没有连续红节点
  - RB3：所有根至外部节点的路径具有相同数目的黑节点

另一种定义方式

- 边（指针）的颜色
  - RB1’：从内部节点指向外部节点的指针是黑的
  - RB2’：从根至外部节点的路径上没有连续红指针
  - RB3’：所有根至外部节点的路径具有相同数目的黑指针
- 黑指针指向的孩子节点是黑的
  红指针指向的孩子节点是红的

红—黑树例

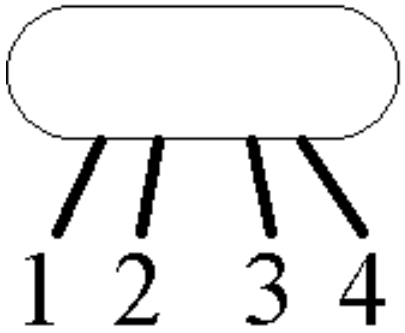
- 节点的阶（rank）：从该节点到其子树中任一外部节点的路径上的黑色指针数目

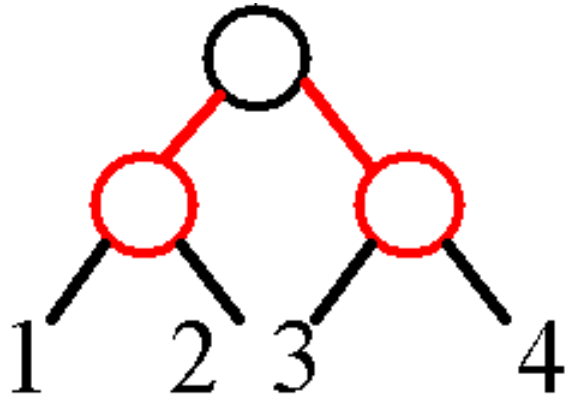


红－黑树是怎么来的

- 实际上因为2-3-4树实现比较复杂，仍然想通过二叉树结构描述2-3-4树
  - 2节点（一个关键字，两个孩子）用二叉树结构表示当然没问题
  - 3节点、4节点怎么办？多个关键字在二叉树中只能形成多个节点
  - 用红边描述——**红边连接的节点中的关键字，在2－3－4树中是一个节点内的**

2-3-4树的红－黑树表示

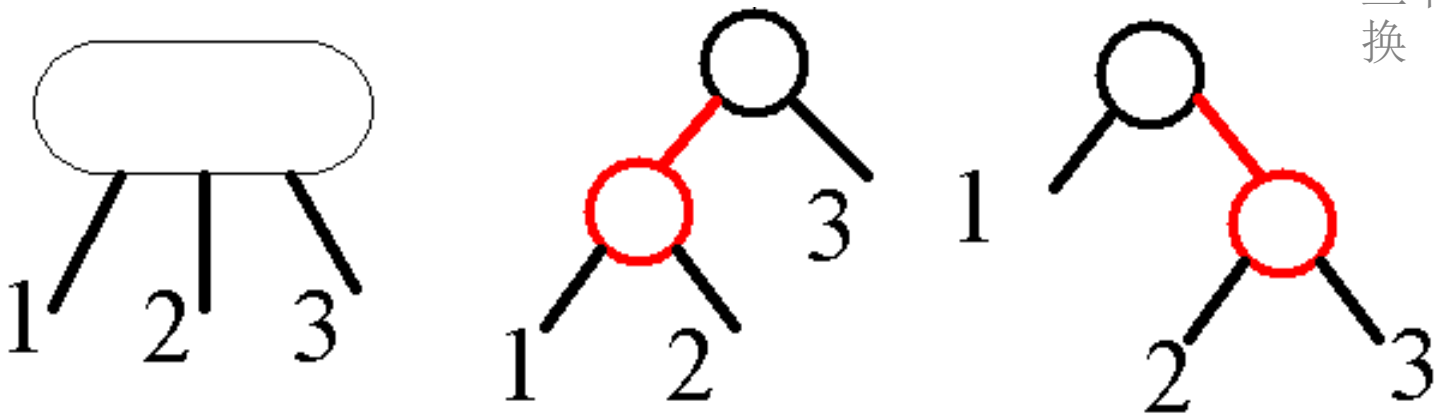




四节点的转换

2-3-4树的红－黑树表示

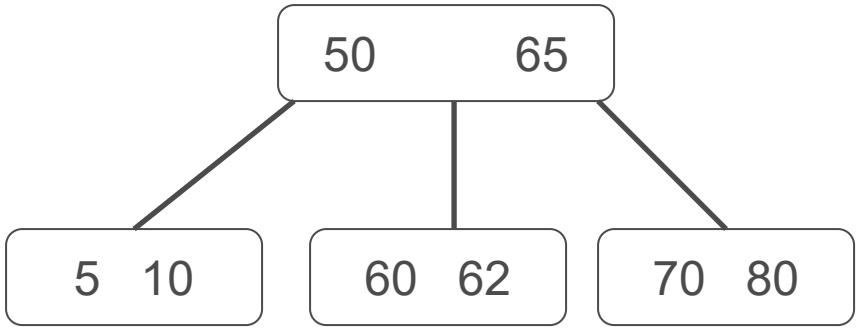
三节点的转换

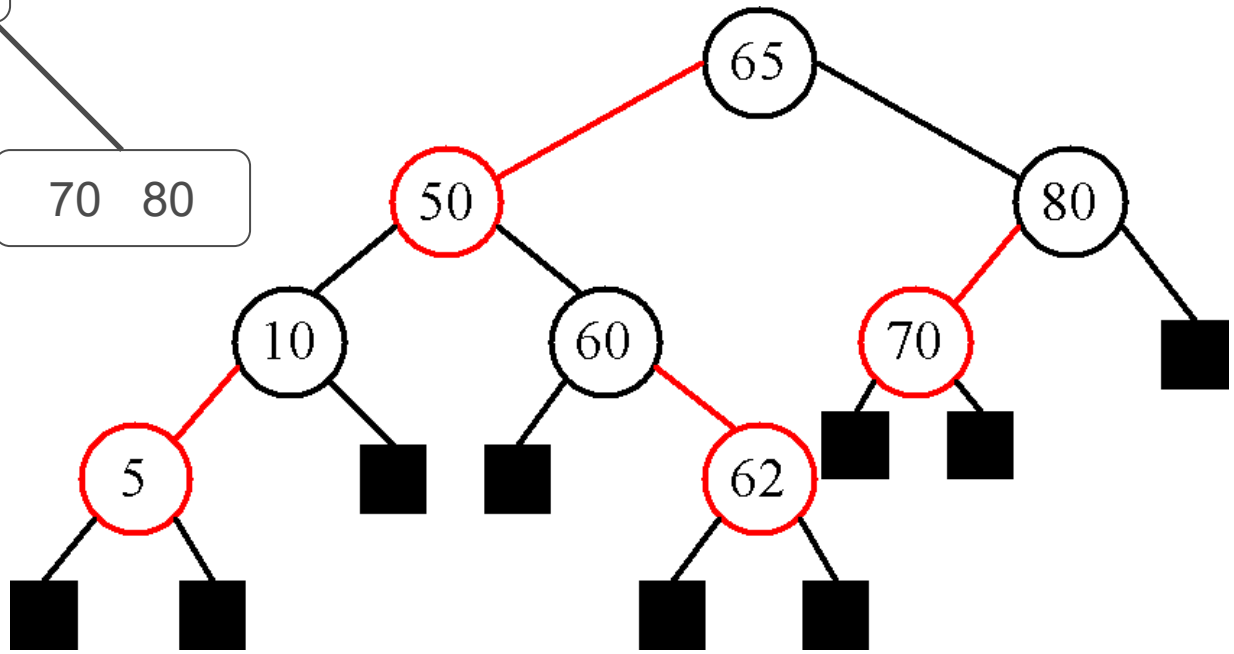


即：红边实际上表示的是2-3-4树的同节点关系

黑边表示父子关系

2-3-4树的红－黑树表示





几个问题

- 为什么用节点和边的颜色表示是等价的？
- 为什么根和外部节点都是黑的？
- 为什么路径上没有连续红节点？
- 为什么每条路径上具有相同数量的黑指针？
- 了解了红－黑树的来历就一清二楚了

红－黑树特性1

- 定理11-1：设从根到外部节点的路径的长度（length）是该路径中指针的数量，若P、Q是红－黑树中两条从根至外部节点的路径，那么length(P) ≤2length(Q)

证明：

设根的阶为r——黑指针数为r

红—黑树特性1

由RB1’知：每条路径最后一个指针为黑色的

由RB2’知：所有路径都不包含连续红指针

➔每个红指针后面都会紧跟一个黑指针

➔红指针数目最多为r➔指针总数在r~2r之间

定理得证

红－黑树特性2

- 定理11-2：设h是一棵红－黑树的高度（不包括外部节点），n是树中内部节点的数目，而r是根节点的阶，则有

1) $h \leqslant 2r$——由定理11-1显然

2) $n \geqslant 2^r - 1$ ⟸ 根的阶为r➔树高至少为r

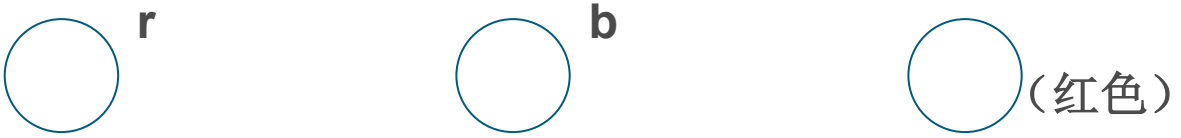
3) $h \leqslant 2\log_2(n+1)$ ⟸ 由2可得$r \leq \log_2(n+1)$，再结合1即可得证

红—黑树的描述

- 外部节点无需实际保存
- 每个节点需保存其颜色和两个指针的颜色——最多需3个二进制位

红黑树如何绘制？

- 节点表示



- 指针表示（可选）

红一黑树的搜索

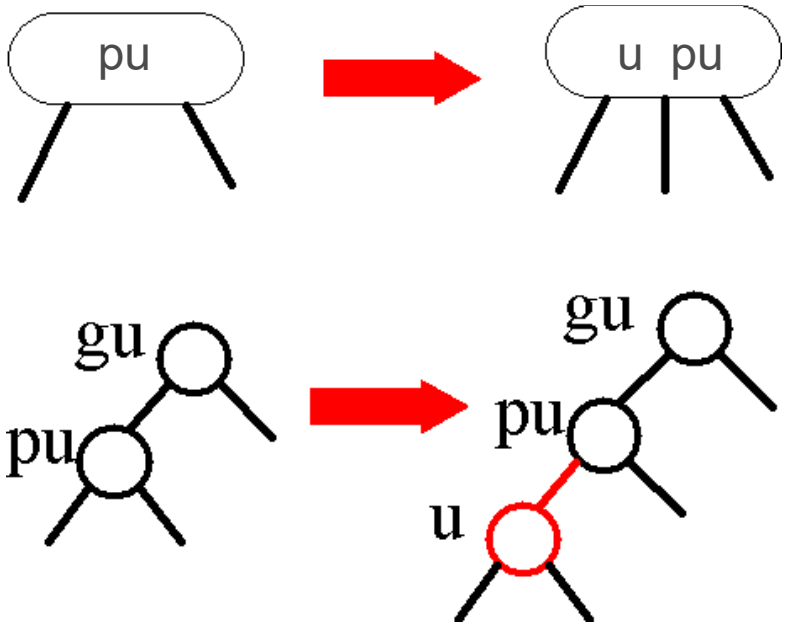
- 与二叉搜索树相同
- 复杂性0(logn)

H2. 红－黑树的插入

- 首先还是简单的二叉搜索树插入方法
- 然后有一个着色的问题——新节点应该是黑色还是红色？
- 应该是红色，为什么？——考虑2-3-4树（B-树）的插入
- 可能会出现连续红边，显然要调整树的结构，如何调整？——考虑对应的2-3-4树（B-树）插入的情况

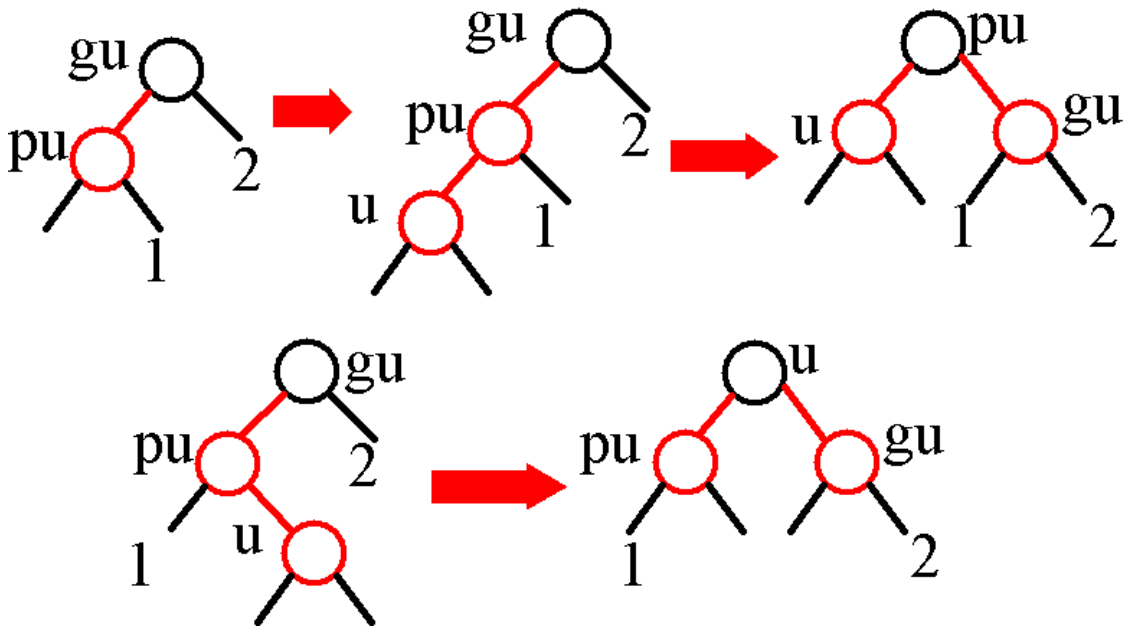
没有连续红边的情况（最理想）

- 对应2-3-4树的情况应该是2节点变为3节点



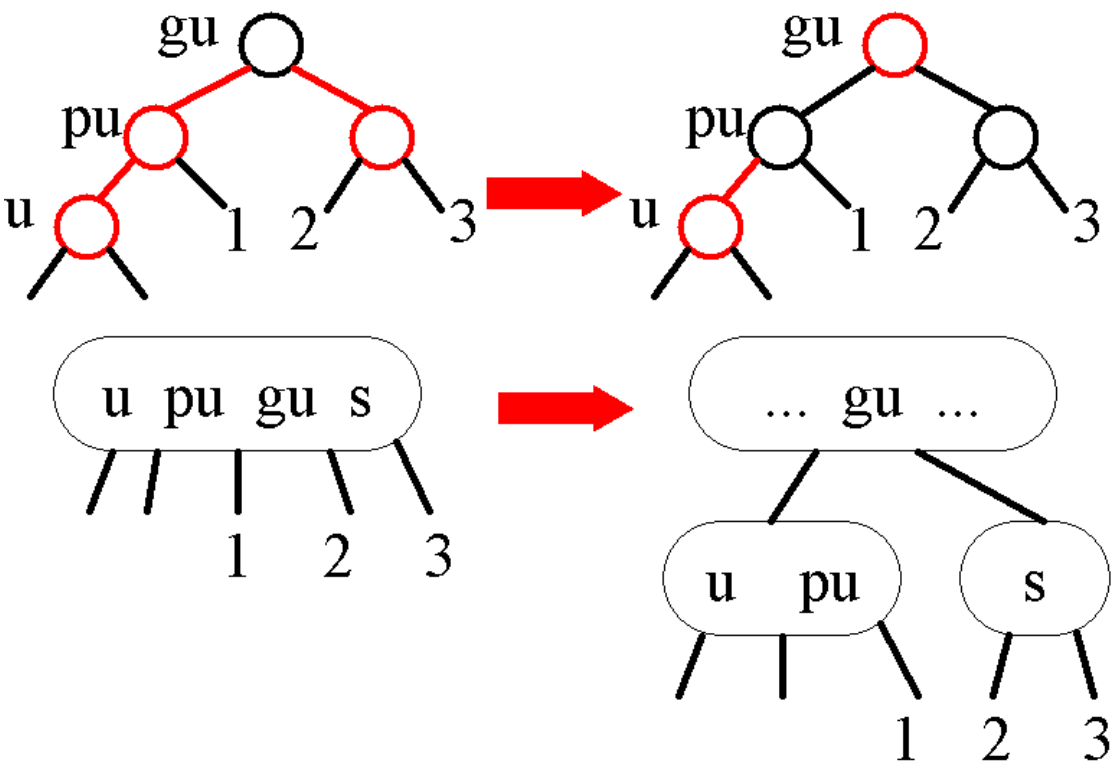
连续红边情况1：XYb

- 祖父的另一个孩子是黑色—3节点变为4节点
- **旋转变色：根黑、子红**



连续红边情况2：XYr

- 祖父的另一个孩子是红色——溢出
- **不转变色：根红、子黑**

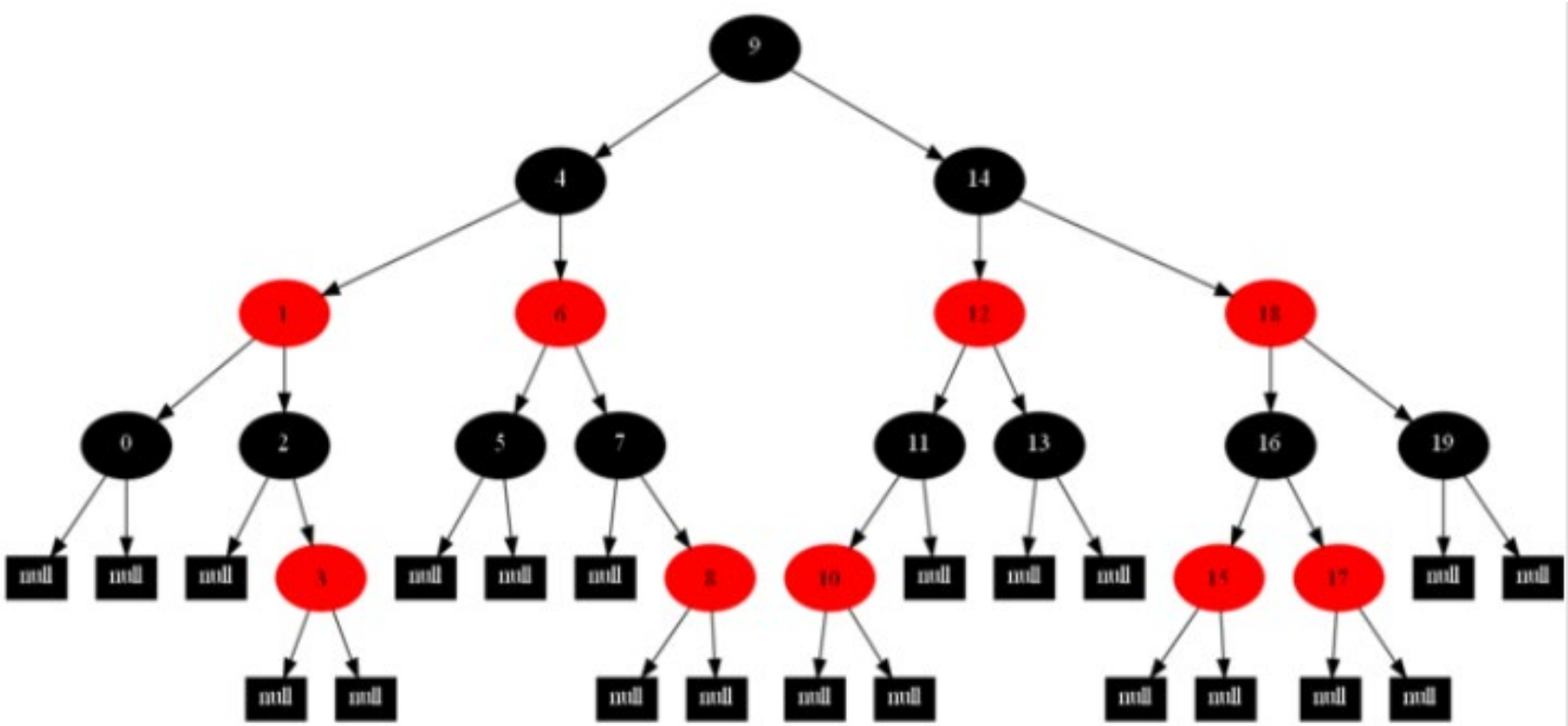


例题

- 教材P370， 将70, 60, 65, 62依次插入到15-13a)所示的红黑树中

H2结束

- 练习：依次插入这些12 1 9 2 0 11 7 19 4 15 18 5 14 13 10 16 6 3 8 17，生成红黑树



红－黑树的删除

- 首先还是类似二叉搜索树的方法——
  转化为叶节点删除——
  不是叶节点的，与中序遍历的后继节点交换
- 可对应2-3-4树自底向上删除算法设计红－黑树自底向上的删除算法
- 若删除红节点，结束——3节点或4节点的删除
- 若删除黑节点，调整，可能回溯——2节点的删除

例题

- 有以下关键字：28，72，97，23，11，63，4，53，84，32，61，52，按序插入到初始为空的4阶B树中。依次绘制以下的结构：
  （1）4阶B树
  （2）红黑树
  （3）还原的森林

本章结束