



图的应用



术语

- ★ AOV网: 用顶点表示活动，用弧表示活动间的优先关系的有向图称为顶点表示活动的网，简称为AOV网。
- ★ AOE网: 边表示活动的网。
- ★ 求关键路径是有向无环图的另一种重要应用。



AOE网

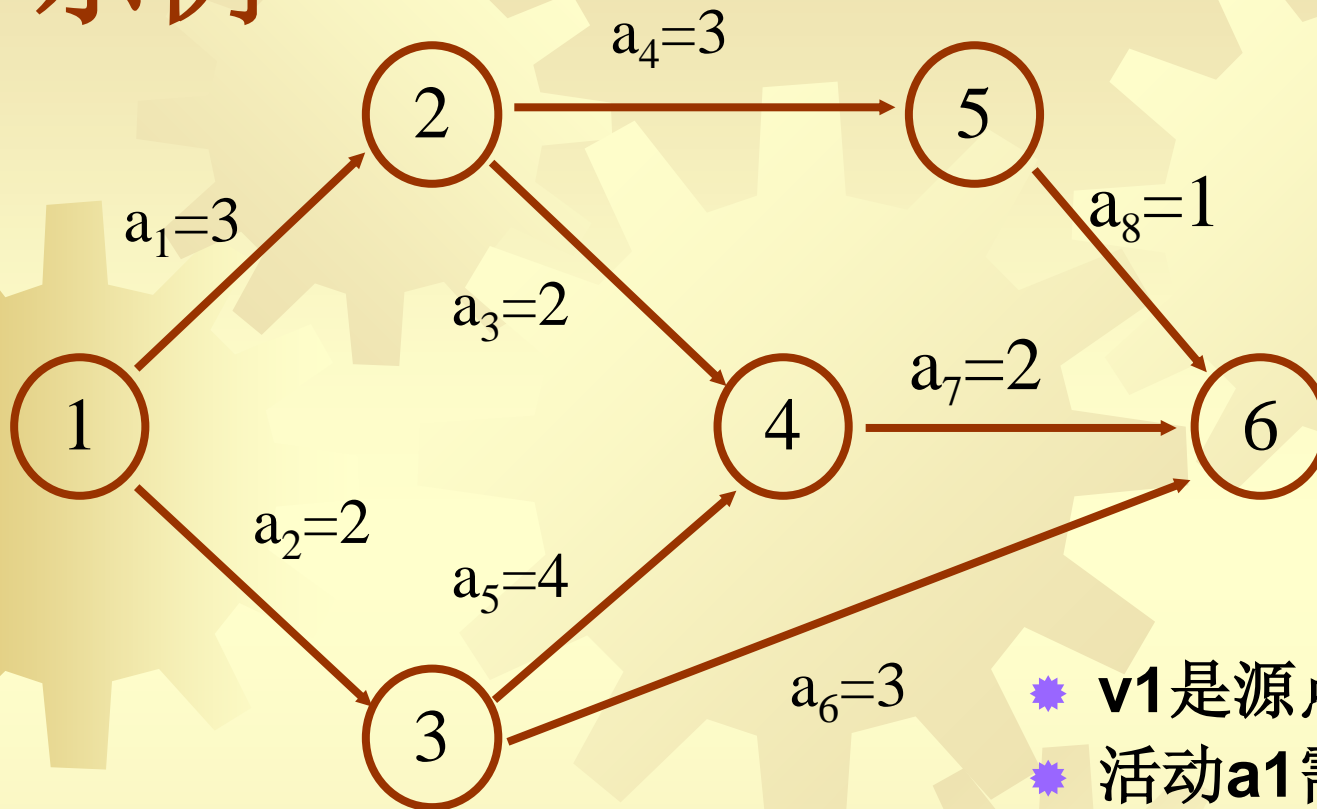
- 在带权的有向图中，用顶点表示事件（event），用弧表示活动（activity），权表示活动持续的时间，这样组成的网称为以边表示活动的网（activity on edge），简称为AOE网。
- 在AOE网中，通常只有一个入度为0的点和一个出度为0的点，这是因为一个工程只有一个开始点和一个完成点。
- 入度为0的点称为起始点或源点，出度为0的点称为结束点或汇点。



AOE网

- 一个工程中的某些子活动是可以并行进行的；从源点到汇点最长路径的长度，即该路径上所有活动持续时间之和，就是完成整个工程所需的最少时间。
- 从源点到汇点具有最大长度的路径称为关键路径 (*critical path*)。关键路径上的所有活动称为关键活动。

示例



- ✿ **v1**是源点，**v6**是汇点。
- ✿ 活动**a1**需要**3**天完成，活动**a2**需要**2**天完成，活动**a3**需要**2**天完成，
- ✿ 这项工程至少需要**8**天才能完成。



定义

- 在AOE网中，从源点 v_1 到任意顶点 v_i 的最长路径长度叫做事件 v_i 的最早发生时间。这个时间决定了所有以 v_i 为尾的弧所表示的活动的最早开始时间。
- 在不推迟整个工程完成的前提下，活动 a_i 最迟必须开始进行的时间称作活动 a_i 的最迟开始时间。



- ✿ $e(i)$ 表示活动 a_i 的最早开始时间， $l(i)$ 表示其最迟开始时间。两者之差 $l(i) - e(i)$ 意味着完成活动 a_i 的时间余量。
- ✿ a_i 的实际开始时间可以在 $e(i)$ 到 $l(i)$ 之间任意调整，而丝毫不会影响整个工程的完成时间。
- ✿ 辨别关键活动就是要找 $e(i) = l(i)$ 的活动



- 设活动 a_i 由弧 (j, k) 表示，其持续时间记为 $\text{dut}(j, k)$ ，**事件**的最早开始时间为 $\text{ve}(j)$ ，最迟开始时间为 $\text{vl}(j)$ ，则有如下关系：
 - ★ $e(i) = \text{ve}(j)$
 - ★ $l(i) = \text{vl}(k) - \text{dut}(j, k)$
- 求 $\text{ve}(j)$ 和 $\text{vl}(j)$ 将采用递推的方法，分两步进行



计算过程

- 从 $ve(1) = 0$ 开始向前递推

- $ve(j) = \max \{ ve(i) + dut(i, j) \} \quad (i, j) \in T, \quad 2 \leq j \leq n$
其中 T 是所有以第 j 个顶点为头的弧的集合。

- 从 $vl(n) = ve(n)$ 起向后递推

- $vl(i) = \min \{ vl(j) - dut(i, j) \} \quad (i, j) \in S, \quad 1 \leq i \leq n-1$
其中 S 是所有以第 i 个顶点为尾的弧的集合。

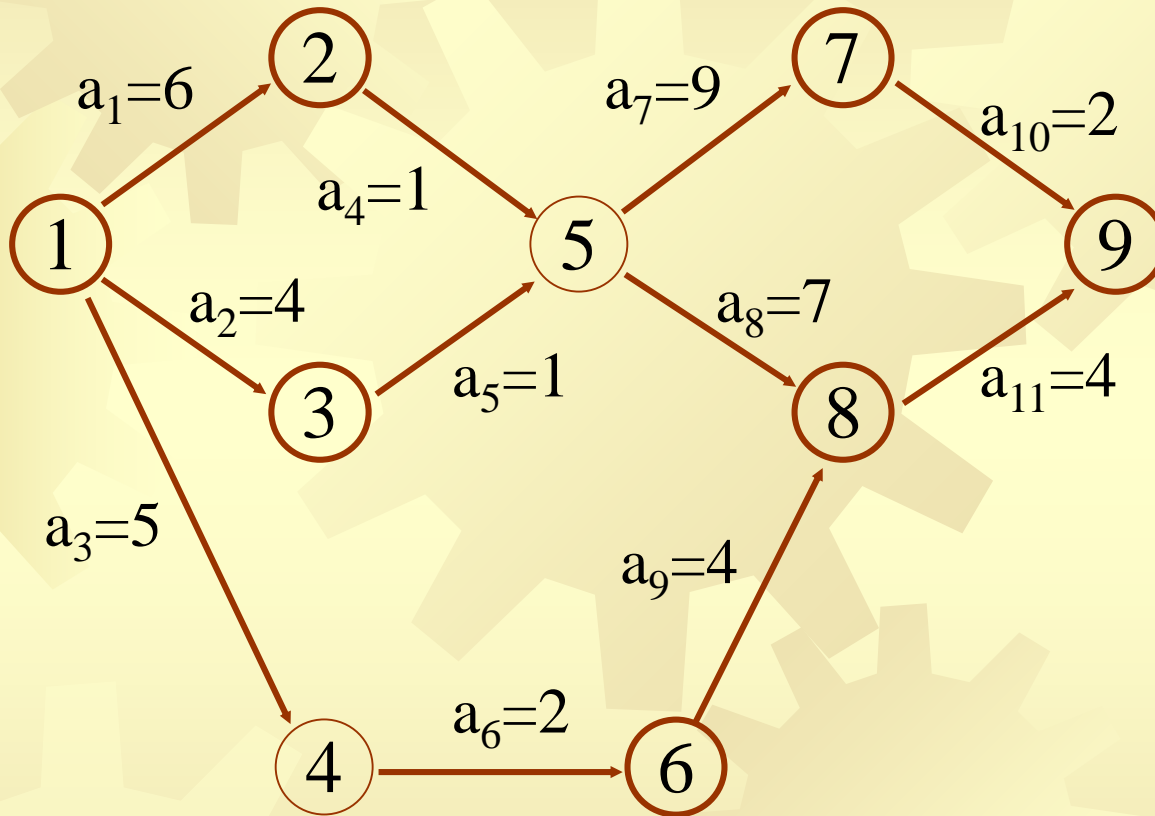
- 这两个递推公式的计算必须分别在拓朴有序和逆拓朴有序的前提下进行。



关键路径算法

1. 输入 e 条弧 (j, k) ，建立AOE-网的存储结构；
2. 从源点 v_1 出发，令 $ve[1] = 0$ ，按拓朴有序求其余各顶点的最早发生时间 $ve[i]$ ($2 \leq i \leq n$)。如果得到的拓朴有序序列中顶点个数小于网中顶点数 n ，则说明网中存在环，不能求关键路径，算法终止；否则执行步骤(3)。
3. 从汇点 v_n 出发，令 $vl[n] = ve[n]$ ，按拓朴逆序求其余各顶点的最迟发生时间 $vl[i]$ ($n-1 \geq i \geq 1$)；
4. 根据各顶点的 ve 和 vl 值，求每条弧 s 的最早开始时间 $e(s)$ 和最迟开始时间 $l(s)$ 。若某条弧满足条件 $e(s) = l(s)$ ，则为关键活动。

示例





事件的计算

事件	ve	vl
v_1	0	0
v_2	6	6
v_3	4	6
v_4	5	8
v_5	7	7
v_6	7	10
v_7	16	16
v_8	14	14
v_9	18	18



活动的计算

活动	e	1	1-e
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	3
a_7	7	7	0
a_8	7	7	0
a_9	7	10	3
a_{10}	16	16	0
a_{11}	14	14	0



结果

✿ a_1 、 a_4 、 a_7 、 a_8 、 a_{10} 和 a_{11} ，它们构成两条关键路径：

✿ $(v_1, v_2, v_5, v_7, v_9)$

✿ $(v_1, v_2, v_5, v_8, v_9)$

✿ 设AOE网中有 n 个事件， e 个活动，则求关键路径的时间复杂度为 $O(n+e)$