时域数字信号处理（6）

信号系统

2024-11-12

1

本章要点

- 信号的表示
- 信号的基本运算
- 信号分类
- 基本信号
- 信号的抽样
- 信号系统

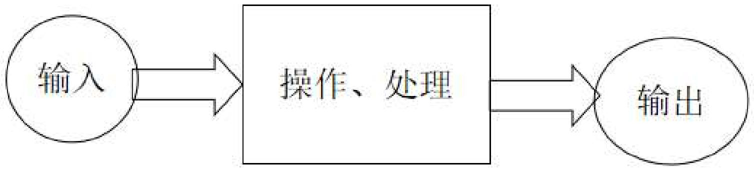
系统简介

- 基本系统举例(4.1) ; 基本系统分类(4.2); 脉冲响应(4.3)
- LTI系统(4.4-4.9)
  - 4.4 LTI时域特性
  - 4.5 互连
  - 4.6 离散系统（表示）
  - 4.7 分类
  - 4.8 频域表示+4.9 相位延迟+群延迟

借用脉冲响应来研究LTI系统

什么是系统？？

- 系统的构成



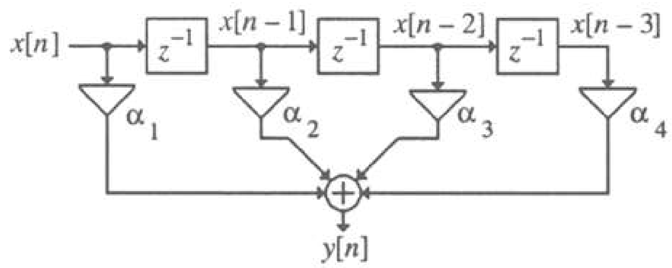
- 我们所接触过的系统有哪些？
  - 加、减、乘、时移、卷积、插值 每一个我们接触的操作都可以看做一个系统
- 离散时间系统的功能在于对已知的输入序列 $x[n]$ 进行处理，以产生具有所要性质的输出序列 $y[n]$。
- 在大部分的应用中，离散时间系统通常是单一输入、单一输出的架构。

2024-11-12

3

离散时间系统：范例-1（章节4.1）

- 学习系统性质之前，先看一些系统的例子和表现



- 2-输入，1-输出的离散时间系统：
  - e.g., 调变器，加法器
- 1-输入，1-输出的离散时间系统：
  - e.g., 乘法器，单位延迟，单位超前

2024-11-12

离散时间系统：范例-2

- 累加器 –

r - $$y[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n}x[\ell]$$

$$=\sum_{\ell=-\infty}^{n-1}x[\ell]+x[n]=y[n-1]+x[n]$$

- 输出值 $y[n]$，本来是将时间 $-\infty$至时间 $n-1$ 的所有输入取样值相加。问题：
  - 1）处理无限长序列
  - 2）每一个点的处理复杂度太高
- 通过系统变换，变成是输入信号 $x[n]$ 及输出信号$y[n-1]$ 两者的和。反馈系统，运算复杂度大大降低。

离散时间系统：范例-3

- 累加器 - 其输入及输出之间的关系如下

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{\ell=-\infty}^{-1} x[\ell] + \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell] \\ &= y[-1] + \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell],\ n \geq 0 \end{aligned}$$

- 上述形式可应用于因果 (causal) 输入序列，其中 $y[-1]$ 称为“初始条件”。
- 所以对于一个累加器，我们通过两种变换，实现了两种不同的“理解”和设计。这是一个系统设计的入门级小例子。

2024-11-12

6

离散时间系统：范例-4

- M-点移动平均滤波器 –

$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$$

- 它可被应用来滤除信号中随机变动的噪声
- 在大部分应用中，数据 $x[n]$ 是有界序列，M-点平均输出 $y[n]$ 亦为有界序列
  - 有界序列指的是信号的大小是$-\infty,+\infty$之间。
- 如果量测值没有偏差 (bias)，则当增加量测值个数 M 时，可以改善被噪声干扰数据的估测值。
- 直接实现 M-点移动平均滤波器需要 $M-1$ 个加法、1个除法，并需能够储存$M-1$ 个过去取样数据的储存体。然后再移动N次，他的时间复杂度是？
  - 注：DSP很多时候是电路级别的处理，对时间复杂度很敏感。

2024-11-12 7

离散时间系统：范例-5

- 能否建立一个更有效率实现移动平均滤波器的方法。 $y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$

$$y[n]=\frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=0}^{M-1}x[n-\ell]+x[n-M]-x[n-M]\right)$$
$$=\frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=1}^{M}x[n-\ell]+x[n]-x[n-M]\right)$$
$$=\frac{1}{M}\left(\sum_{\ell=0}^{M-1}x[n-1-\ell]+x[n]-x[n-M]\right)$$

- 因此

$$y[n]=y[n-1]+\frac{1}{M}\left(x[n]-x[n-M]\right)$$

充分说明：递归算法的有效性！

此时的时间复杂度与空间复杂度是？

利用recursive来计算一个序列中时间 n 的 M-点移动平均值 $y[n]$，现在仅需要 2 个加法及 1 个除法。

2024-11-12

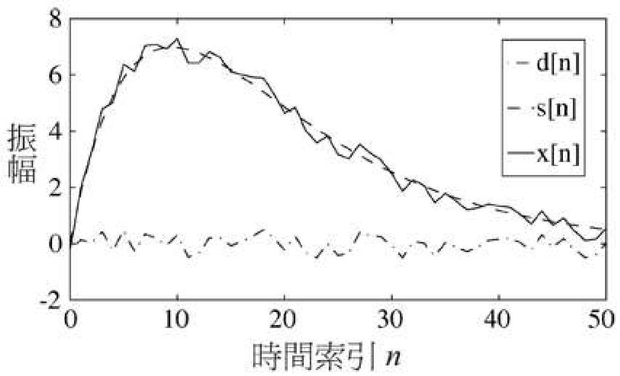
8

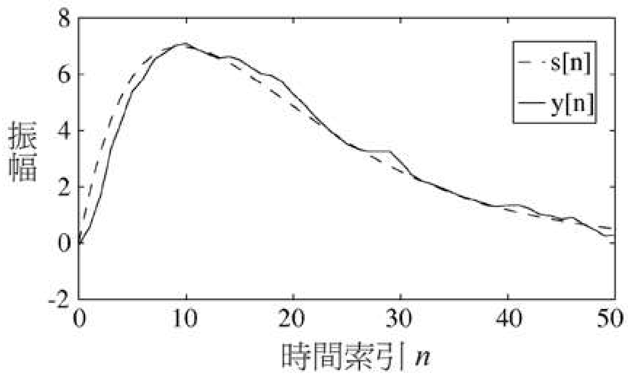
离散时间系统：范例-6

- 应用范例：考虑

$$x[n] = s[n] + d[n]$$

- 其中 s[n] 是原信号，它被噪声 d[n] 所干扰。
- 随机信号 干扰 $s[n] = 2[n(0.9)^n]$





2024-11-12

9

离散时间系统：范例-7

- 指数加权移动平均滤波器

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$$

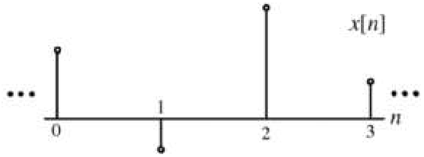
- 上式的移动平均值计算需要 1个加法及 1 个乘法。因为递归算法的存在，不需要储存前面的输入数据。
- 展开以后的表现形式为？
  - 对于 $0 < \alpha < 1$，指数加权移动平均滤波器给予目前数据取样值较大的权重，而对过去的资料取样值给予较少的权重值（呈指数递减方式）：

$$\begin{aligned} y[n] &= \alpha(\alpha y[n-2] + x[n-1]) + x[n] \\ &= \alpha^2 y[n-2] + \alpha x[n-1] + x[n] \\ &= \alpha^2(\alpha y[n-3] + x[n-2]) + \alpha x[n-1] + x[n] \\ &= \alpha^3 y[n-3] + \alpha^2 x[n-2] + \alpha x[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

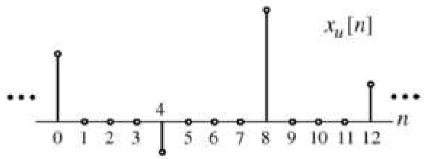
2024-11-12

离散时间系统：范例-8

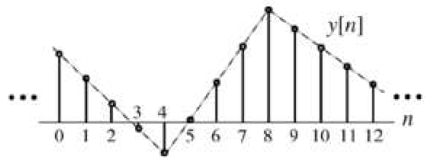
- 线性内插器 - 常被用来估算一个离散序列中相邻两个取样点之间的取样值。
- 4-因子 (factor-of-4) 内插



(a)



(b)



(c)

2024-11-12

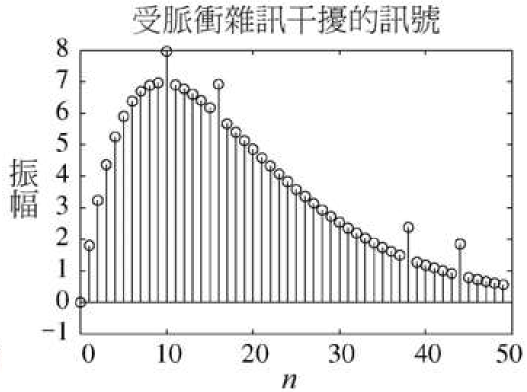
离散时间系统：范例-9

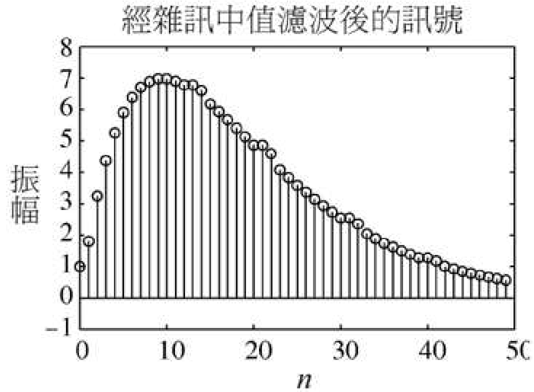
- 中值滤波器 –
  - 一组 (2K+1) 个数值的中值 (median)，它所代表的意义为：这些数值中有 K 个数值会大于中值，而另外 K 个数值会小于中值。
  - 藉由对这一组数值大小的排序，再选择排序后中间的数值即可得到中值。
- 中值算法 –
- 范例：
  - 考虑以下数值 $\{2,-3,10,5,-1\}$
  - 其排序后的结果为$\{-3,-1,2,5,10\}$
  - 因此，中值为$med\{2,-3,10,5,-1\}=2$；　$mean\{2,-3,10,5,-1\}=2.6$
- 请问：中值滤波器与平均滤波器的不同在哪里？

2024-11-12　　12

离散时间系统：范例-10

- 中值滤波器 –
  - 实现中值滤波器的方式是在输入序列$\{x[n]\}$上滑动一个长度为奇数的窗框，一次滑动输出一个取样点（和平均滤波器一样）。
  - 在窗框下一次的滑动前，选取窗框内输入取样值的中值当作滤波器的输出 $y[n]$（使用中值）。
  - 可应用于随机加成性噪声的移除，特别是噪声在被干扰信号中呈现一个大的突波错误。
  - 因此可用来移除脉冲噪声 (impulse noise)。





如果使用M-点平均滤波器会发生什么？

推荐小实验：编程比较两个滤波器

2024-1ʼ

13

离散时间系统：范例-11

- 回顾题
- 1. 我们这段学习的对象，和前几节课有什么不同？
  - 我们不过多关注每个单独的运算（处理）；而关注输入、输出、运算的变化，造成的效果，几个“系统”间的异同
- 2. 我们还会回来的。
  - 本节学习的，是大部分最常见的系统，在后续的工作中，我们没学习一个新的知识点（例如系统的划分、系统的特性），都会返回来用新知识点来分析这些系统。
  - 换而言之，我们现在学习的是对这些系统的认知；后面会学习对这些系统的分析。

系统简介

- 基本系统举例
- 基本系统分类
- 线性时不变系统

离散时间系统的分类（章节4.2）

- 线性系统 (Linear system)
- 位移不变性系统 (Shift-invariant system)
- 因果系统 (Causal system)
- 稳定系统 (Stable system)
- 被动及无损系统 (Passive and lossless system)

2024-11-12

线性离散时间系统-1

- 定义 – 对一个线性离散时间系统，假设 $y_1[n]$ 与 $y_2[n]$ 分别对应于输入序列 $x_1[n]$ 及 $x_2[n]$ 的输出响应，则对于输入

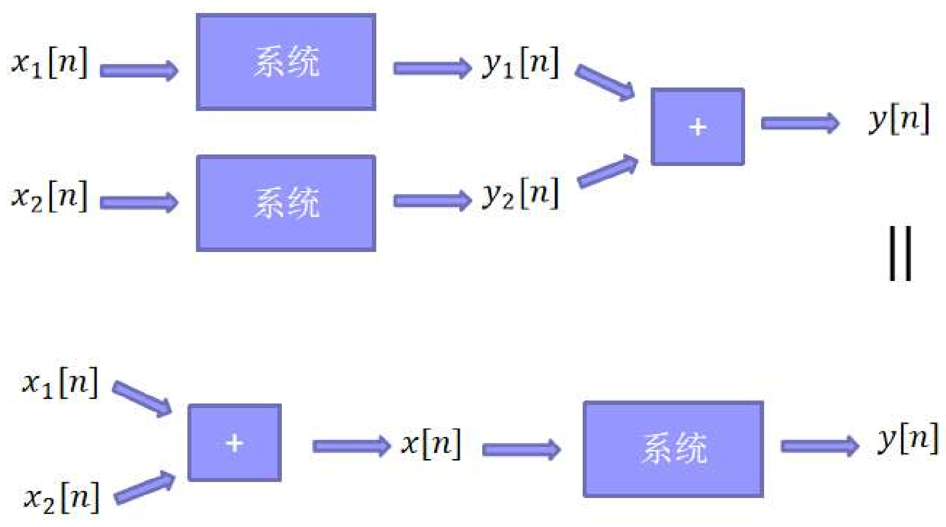
$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

- 其输出为

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

- 对任意常数α与β及任何可能的输入序列 $x_1[n]$ 与 $x_2[n]$ 而言，上述的迭加定理均必须满足。

线性离散时间系统-2



线性离散时间系统-3

- 最常见的线性系统是？
- 累加器 – $y_1[n]=\sum_{l=-\infty}^{n}x_1[n]\,,y_2[n]=\sum_{l=-\infty}^{n}x_2[n]$
  - 证明：对于 $x[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_2[2]$
  - 其相对应的输出为

$$y[n]=\sum_{l=-\infty}^{n}(\alpha x_1[n]+\beta x_2[2])=\alpha\sum_{l=-\infty}^{n}x_1[n]+\beta\sum_{l=-\infty}^{n}x_2[n]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$$

  - 等式第一部分来自加法分配率；等式第二部分来自累加器的定义
- 因此，上述的系统是线性的
- 还有那些常见的系统？

非线性离散时间系统-1

- 中值滤波器 (median filter) 是一个非线性的离散时间系统。
  - 回顾数学方法：证明是，需要公式证明；证明不是，可以公式证明或者找到一个反例即可
- 反例证明，我们考虑一个具有窗框长度为3的中值滤波器。
- 对于输入$x_1[n] = \{3, 4, 5\}$， $0 \le n \le 2$，所产生的输出为$y_1[n] = \{4\}$。
- 注：上面计算错误！！！请注意，我们需要注意滑动窗的概念
- 所以正确结果是对于3点中值滤波器，获得的窗口是$\{0,0,3\}, \{0,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,0\}, \{5,0,0\}$
- 输入$x_1[n] = \{3, 4, 5\}$， $0 \le n \le 2$结果是$y_1[n] = \{0,3,4,4,0\}$, $0 \le n \le 5$
- 对于输入$x_2[n] = \{2, -1, -1\}, 0 \le n \le 2$ 输出为 $y_2[n] = \{0, 0, -1, -1, 0\}$, $0 \le n \le 5$。
- 对输入$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = \{5,3,4\}$ 所产生的输出为 $y[n] = \{0, 3, 4,3,0\}$, $0 \le n \le 5$
- 而$y_1[n] + y_2[n] = \{0,0,\} = \{0, 3, 3,3,0\}, 0 \le n \le 5$
- 所以不是线性系统

2024-11-12

20

非线性离散时间系统-2

- 请判断系统的线性性（简单方法和证明—计算题）
- $y[n] = 3x[n] + 5x[n-2]$;
- $y[n] = 2x[n] + 5z[n]^2$;
- $y[n] = \log_2 x[n]$
- $y[n] = x[n] * z[n]$ (针对$x[n]$)

2024-11-12

线性系统的讨论

- 线性性是信号系统中总重要的性质:
- 我们对于一个未知/待研究的信号，最常见的方法是一系列信号对齐进行进行线性表出。
  - 即将目标信号做一个拆分，拆成一系列已知信号的和。（例如正余弦信号—傅立叶分解 ）
  - 所以只有后续的系统支持这样一个拆分-组合，我们才可以这么做。
- 结论：我们本节课或者入门级DSP都只研究线性时不变系统。
  - 有些目标线性或非线性系统都能实现，只不过实现效果有差别
- 下面我们就来学习时不变系统

位移不变性(shift invariant)系统-1

- 对于一个位移不变性的离散时间系统，若 $y_1[n]$是$x_1[n]$的输出响应，则输入序列

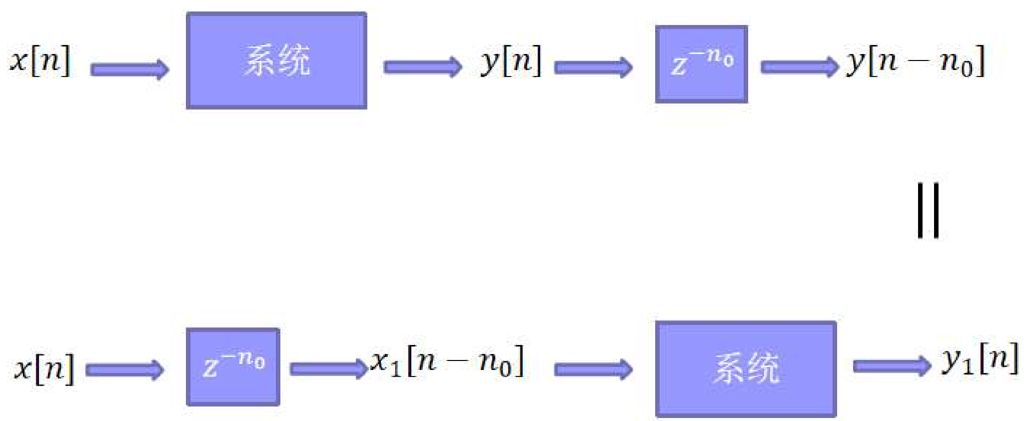
$$x[n] = x_1[n-n_0]$$

的输出响应为

$$y[n] = y_1[n-n_0]$$

  - 其中 n_0 是任意的正整数或负整数。对于任意的输入与其输出序列而言，上述关系都必须成立
- 若考虑离散时间为 n 时的序列或系统，则上述性质通常被称为非时变 性质。
- 非时变性质：对于特定的输入，其系统输出与输入的时间是无关的。

时不变时间系统-2

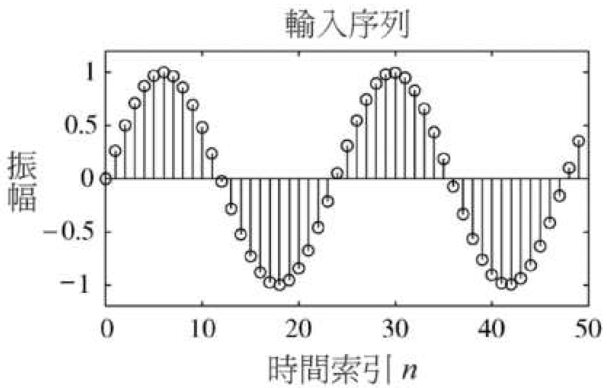


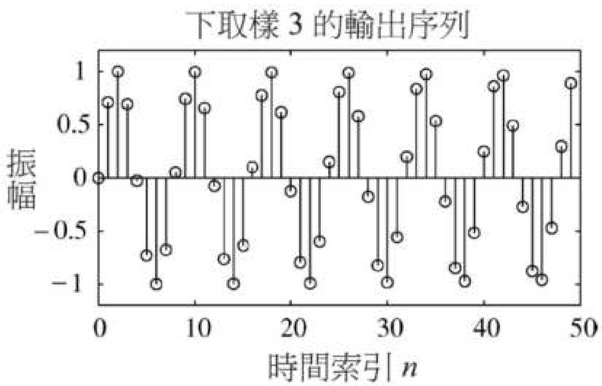
2024-11-12

24

位移不变性系统-3

- 简单的位移不变系统，
- 累加器、放大器、M-平均移动滤波器？
  - 证明略，方法同前。
- 反例，有哪些简单的移变系统？





2024-11-12

位移不变性系统的判定-4

- 判断系统（简单判断和证明）
- $y[n] = 3x[n] + 5x[2n];$
- $y[n] = 2x[n] + 5z[n]^2;$
- $y[n] = \log_2 x[n]$
- $y[n] = x[n] * z[n^2]$
- $y[n] = nx[n]$

的时变特性

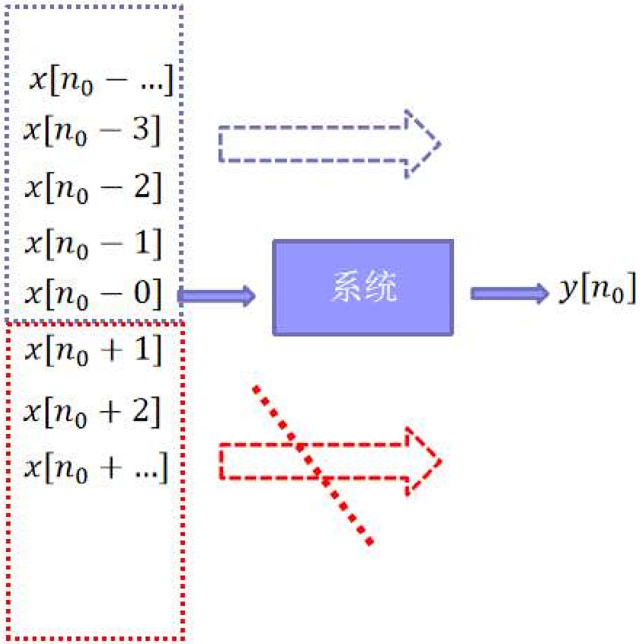
2024-11-12

线性非时变系统

- 线性非时变系统(Linear Time Invariant System-LTI)：系统同时满足线性及非时变的性质。
  - 这样的一个系统在数学上的分析是容易的，因此也易于设计。过去数十年来利用此种系统发展出一些非常有用的信号处理算法。
- 作业2.1：
- 分析前文的若干系统的线性和时不变性

因果系统-1

- 定义1： 在一个因果离散时间系统中，其第 n_0 个输出取样值 $y[n_0]$ 只与 $n \le n_0$ 的输入取样值 $x[n]$ 有关，而与 $n > n_0$的输入取样值无关。

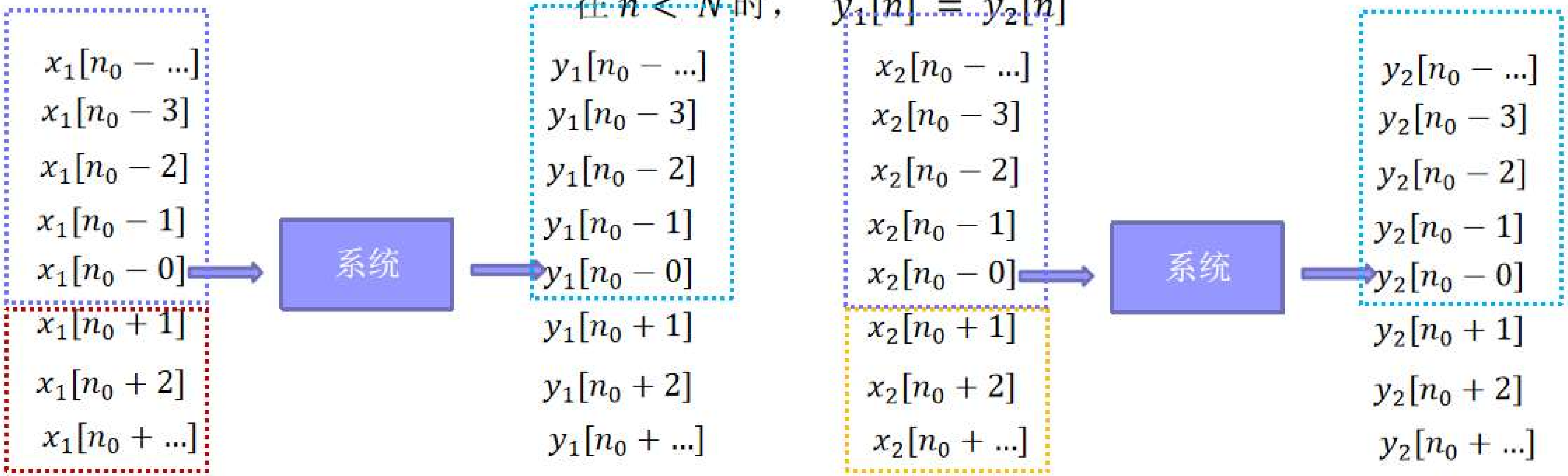


2024-11-12

因果系统-2

- 定义2：令 $y1[n]$ 与 $y_2[n]$ 是分别对应于输入序列 $x_1[n]$及 $x_2[n]$的输出响应。则在 $n < N$ 时，若有 $x_1[n] = x_2[n]$；则必有

在 $n < N$ 时， $y_1[n] = y_2[n]$



- 对于一个因果系统，输出取样点所发生的改变并不会发生在输入取样点发生改变之前。

因果系统-3

- 因果系统的例子：

$$y[n]=\alpha_1 x[n]+\alpha_2 x[n-1]+\alpha_3 x[n-2]+\alpha_4 x[n-3]$$

$$y[n]=b_0 x[n]+b_1 x[n-1]+b_2 x[n-2] + a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]$$

$$y[n]=y[n-1]+x[n]$$

- 非因果系统的例子：

$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{2}(x_u[n-1]+x_u[n+1])$$

$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{3}(x_u[n-1]+x_u[n+2])$$

- 因果系统的判断方法：
- 对于计算$y[n]$的通式中，不含有$n+1$，$n+2,\ldots$的项

单选题 1分

现有一个系统，对于任意输入$x[n]$,使其于内置默认的序列$h[k]=\{3,2,5,0,3\}$, $\mathrm{k}=-1:3$做卷积，即$y[n]=x[n]*k[k]$,请问这个系统是因果的吗？

- A 是
- B 不是
- C 要根据$x[n]$判断
- D 不知道

2024-11-12

因果系统-4

- 藉由将$y[n]$延迟适当个取样点的时间，则非因果系统亦可如因果系统实现。
- 一个 2-因子内插器的因果式实现方式如下所示：

$$y[n]=x_u[n-1]+\frac{1}{2}(x_u[n-2]+x_u[n])$$

- 将输出结果做一个单位的延迟，得到规范化的内插器，他是非因果的；反向操作，也可得到因果系统。：

$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{2}(x_u[n-1]+x_u[n+1])$$

- 有疑问吗？我们讨论过，上下取样时时变的？
- 注意区分因果系统与时变系统的区别。
  - 由因果系统定义2可知因果系统讨论的是2个输入、2个输出的对应关系；而时变系统讨论的是对一个输入输出做延迟的影响。

2024-11-12 32

稳定系统

- 对于稳定性有多种不同的定义。
- 此处考虑的是有界输入、有界输出的稳定性(bounded-input, bounded output, BIBO)。
- 若 $y[n]$是对映于输入 $x[n]$的响应，且若对所有 n 值有$|x[n]| \le B_x$,则对所有 n 值，有

$$|y[n]| \le B_y$$

- 范例：M –点移动平均滤波器具 BIBO 稳定性

$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$$

- 对一有界输入$|x[n]| \le B_x$,则有

$$|y[n]|=\left|\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]\right| \le \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}|x[n-k]|$$
$$\le \frac{1}{M}(MB_x) \le B_x$$

2024-11-12

33

被动及无损系统

- 对于一个离散时间系统，如果对任一有限能量的输入序列 x[n]，其输出序列 y[n]至多具有相同的能量，则被称为被动 (passive)系统。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- 上面的式子如果对任何输入序列都能使其等号成立，则该离散时间系统称为无损 (lossless) 系统。

- 范例 - 考虑$y[n] = \alpha x[n-N]$的离散时间系统，其中 N 是一个正整数。其输出能量为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |x[n]|^2$

  - 此时，若$|\alpha| \le 1$,则该系统为被动系统；若$|\alpha| = 1$则为无损系统

2024-11-12

系统简介

- 基本系统举例
- 基本系统分类
- 脉冲响应
- 线性时不变系统

脉冲（IR）和步阶响应（章节4.3）

- 当用户面对一个未知的系统时，最有效的方法是投石问路；向系统输入一个最简单的、标准的信号，观测输出的信号（响应）
- 数字滤波器对于脉冲序列$\{\delta[n]\}$ 的输出响应称为脉冲响应 (Impulse Response)，通常记为$\{h[n]\}$。
- 离散时间系统对于步阶序列 $\{u[n]\}$ 的输出称为步阶响应 (step response)，通常记为$\{s[n]\}$。

2024-11-12

36

脉冲响应-1

这是一个已知系统

- 范例 – 观察系统$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3]$的脉冲响应:
- 由定义 $x[n] = \delta[n]$ 而得到

$$h[n] = \alpha_1 \delta[n] + \alpha_2 \delta[n-1] + \alpha_3 \delta[n-2] + \alpha_4 \delta[n-3]$$

- 注：此时$\delta[n]$是一个已知序列，所以$h[n]$是一个可以计算得出的序列
- 脉冲响应是长度 4 的有限长度序列，如下所示：

$$\{h[n]\} = \{\underset{\uparrow}{\alpha_1}, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4\}$$

- 思考上述$h[n]$所表述的意义，它是如何表述一个系统的？

2024-11-12

脉冲响应-2

- 范例 – 离散时间累加器的脉冲响应： $y[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} x[l]$
- 令 $x[n] = \delta[n]$, 则 $h[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} \delta[l] = ?$

$$y[n] = \sum_{l=0}^{+\infty} x[n-l] \rightarrow h[n] = \sum_{l=0}^{+\infty} \delta[n-l] = u[n]$$

- 思考上述$h[n]$所表述的意义，它是如何表述一个系统的？
  - 提示：首先理解，为什么是$u[n]$,
  - 然后反转，配权为1，累加

2024-11-12

38

脉冲响应-3

- 范例 – 因子-2 内插器 $y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1])$的脉冲响应 $\{h[n]\}$，
- 设定 $x_u[n] = \delta[n]$ 而得到如下

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n-1] + \delta[n+1])$$

- 因此，脉冲响应是长度 3 的有限长度序列

$$h[n] = \{0.5, \underset{\uparrow}{1}, 0.5\}$$

- 思考上述$h[n]$所表述的意义，它是如何表述一个系统的？

2024-11-12

39

脉冲响应-4

- 关于脉冲响应的说明
- 1. 脉冲响应是一个序列，是一个由系统决定，（如果给出表达式可以算出），由脉冲算出来的的序列。
- 2. 脉冲响应可以用来描述系统干了什么： （可能）有以下意义：
  - a）任何一个系统，如果只输入脉冲信号，则系统的输出就叫做脉冲响应（定义）
  - b）当我们把输入由脉冲信号变成其他现实中的值，系统保持其运算不变（前提条件），则可以轻易根据脉冲响应求出相应的值
  - c）反之，当我们把现实中信号简化成脉冲信号时，就可以得到特殊的表示—脉冲响应。
- 由b），c）可知，脉冲响应是一种对任何系统的描述，描述准确度而与系统性质无关！
- 对吗？
- 结论：对于任何系统，a），c）都对；但是b）只有线性时不变系统才行

系统简介

- 基本系统举例
- 基本系统分类
- 脉冲响应
- 线性时不变系统（章节4.4）

2024-11-12

线性非时变系统的时域特性-1（章节4.4）

- 我们首先给出结论：
- 根据线性及非时变特性的结果，一个 LTI 离散时间系统的作用和功能，可以完全以其脉冲响应来描述。
- 知道了一个系统的脉冲响应，我们就可以（通过卷积）计算此系统对任意输入所产生的输出。

2024-11-12

42

线性非时变系统的时域特性-2

- 假设 $h[n]$是一个LTI离散时间系统的脉冲响应。对于任意一个输入$x[n]$，我们不妨随意给定下列$x[n] = \{0.5,0,0,1.5,-1,0,0,0.75\}$， n=-2:5, 我们希望计算$h[n]$对应系统的输出 $y[n]$
- 首先，我们将$x[n]$ 用$\delta[n]$表示，

$$x[n] = 0.5\delta[n+2] + 1.5\delta[n-1] - \delta[n-2] + 0.75\delta[n-5]$$

- 因为是线性系统，我们可以把$x[n]$拆成上述好多$\delta[n]$,每个输入成分别计算其输出，然后再将个别的输出加总来得到 $y[n]$ 。
- 又由于时不变性，所以有

$$\begin{array}{ccc} \delta[n] & \rightarrow & h[n] \\ \text{输入} & & \text{输出} \\ \delta[n+2] & \rightarrow & h[n+2] \\ \delta[n-1] & \rightarrow & h[n-1] \\ \delta[n-2] & \rightarrow & h[n-2] \\ \delta[n-5] & \rightarrow & h[n-5] \end{array}$$

2024-11-12

线性非时变系统的时域特性-3

- 同理，因为系统是线性，因此

input	output
$0.5\delta[n+2]$	$\rightarrow 0.5h[n+2]$
$1.5\delta[n-1]$	$\rightarrow 1.5h[n-1]$
$-\delta[n-2]$	$\rightarrow -h[n-2]$
$0.75\delta[n-5]$	$\rightarrow 0.75h[n-5]$

- 因为线性的特性，我们可以得到

$$x[n] = 0.5\delta[n+2] + 1.5\delta[n-1] - \delta[n-2] + 0.75\delta[n-5]$$

⇨ 序列和

$$y[n] = 0.5h[n+2] + 1.5h[n-1] - h[n-2] + 0.75h[n-5]$$

2024-11-12 44

线性非时变系统的时域特性-4

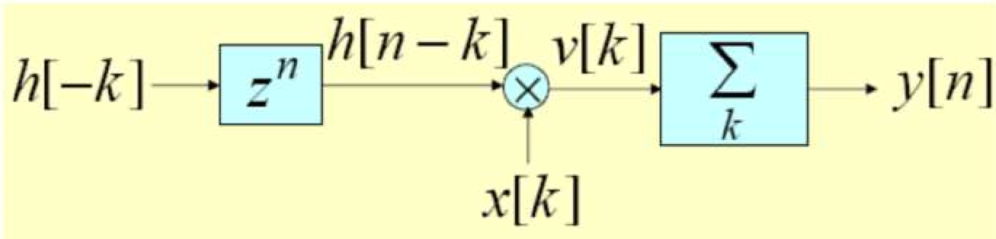
- 现在，任意输入序列 $x[n]$ 可表示成不同延迟或超前单位取样值序列的加权线性组合，如下所示：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

我们将 $x[k]$ 看做系数，而将 $\delta[n-k]$ 放入系统

- LTI 离散时间系统对于序列 $x[k]\delta[n-k]$ 的响应为 $x[k]h[n-k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$



2024-11-12

线性非时变系统的时域特性-5

- 我们定义系统的表示：如果有一个已知公式，对于一个系统，满足：对于任何输入，系统的输出序列都和公式计算的输出一样，则称这个公式表示了这个系统。
- 例如我们购入某一个黑盒子系统，后破解发现其运算为

$$x[n] \Rightarrow\ \uparrow 3\ ,\ \downarrow 3, z^1, z^1,\ \cdot 2\ , z^{-1}, \frac{1}{2}, z^{-1} \Rightarrow y[n]$$

- 同时我们有公式 $y[n] = x[n]$, 这个公式和黑盒子系统对于任何运算都一样，那么我们就说这个公式可以表示这个系统。
  - 注：如果黑盒子系统调换顺序，变成

$$x[n] \Rightarrow\ \uparrow 3, z^1, z^1,\ \cdot 2\ , z^{-1}, \frac{1}{2},\ \downarrow 3, z^{-1} \Rightarrow y[n]$$

  - 则$y[n] = x[n]$不是系统的表示。

2024-11-12

46

线性非时变系统的时域特性-6

- 一个LTI系统有且只有一个$h[n]$序列和其一一对应，且满足任何输入$x[n]$对应的输出都可以表示成 $y[n] = x[n] * h[n]$
- 证明$h[n]$存在性：
  - 需要证明能找到一个$h[n]$,可以满足卷积表示（即现在不知道是否有这么一个卷积表示LTI）
- 我们首先令 $x[n] = \delta[n]$, 输入系统，得到对应输出$\hat{h}[n]$（此时我们不确定这个$\hat{h}[n]$能否通过卷积表示这个系统）
- 由前面分析可知

1）对于任意$x[n]$都可以将其表示为$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

2）$x[n]$的输出可以表示为$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\hat{h}[k]$

- 所以$\hat{h}[n]$就是我们要找的$h[n]$

线性非时变系统的时域特性-6

- 一个LTI系统有且只有一个$h[n]$序列和其对应，且满足任何输入$x[n]$对应的输出都可以表示成 $y[n] = x[n] * h[n]$
- 证明$h[n]$唯一性：假设存在两个$h_1[\mathrm{n}], h_2[n]$都能够满足一个LTI系统的卷积表示
  - 注：系统是黑盒子，不支持除法消元。
- 我们分别将$\delta[n-k], k=-\infty:+\infty$，每次一个的输入系统，则得到$\delta[n-k] * h_1[n] = h_1[k], \delta[n-k] * h_2[n] = h_2[k]$（注：此时$k$是一个参数，每次输入取一个值）
- 由于两个$h_1[\mathrm{n}], h_2[n]$表示的同一个真实系统，所以必然有$h_1[k] = h_2[k]\ \forall k=-\infty:+\infty$,即

$$h_1[\mathrm{n}] = h_2[n] = h[n]$$

2024-11-12

线性非时变系统的时域特性-7

- 一个LTI系统⇒一个$h[n]$ (有且只有)序列和其对应
- 那么一个$h[n]$ ⇒一个LTI系统(有且只有)，即一个$h[n]$ 是否对应唯一一个LTI系统？构成一一对应
- 先看下面的计算例子

2024-11-12

49

线性非时变系统的时域特性-8

- 计算下列系统的脉冲响应,同时观察其系统线性性和时不变性
- $y[n] = 3x[n]$
  - $h[n] = 3\delta[n] = \{\dots, 3, \dots\}$,
- $y[n] = 3x[n] + 2x[n+2]$
  - $h[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n+2] = \{\dots, 2, 0, 3, \dots\}$
- $y[n] = x[n-1]^2$
  - $h[n] = \delta[n-1]^2 = \{\dots, 0, 1, \dots\}$
- $y[n] = x[n-1]$
  - $h[n] = \delta[n-1] = \{\dots, 0, 1, \dots\}$
- $y[n] = nx[n]$
  - $h[n] = n\delta[\mathrm{n}] = 0$

2024-11-12

线性非时变系统的时域特性-9

- $h_{y[n]=nx[n]}[n]=\{0\}$ 说明：
- 非LTI系统不能用脉冲响应的卷积表示
  - 以上式为例，如果与$h[n]=0$做卷积，任何输入输出都是0，显然不对。
- $h_{y[n]=x[n-1]^2}[n]=\{\ldots,0,1,\ldots\}=h_{y[n]=x[n-1]}[n]$
- 非LTI系统可能多个系统对应同一个脉冲响应；但是，同一个系统，不管是不是LTI的，都只能有一个脉冲响应（定义）

性质	LTI系统	非LTI系统	随机系统
有且只有一个脉冲响应	是的	是的	不是
可以用脉冲响应表示	是的	不是	NA
一个脉冲响应只对应一个系统	?	不是	NA

2024-11-12 51

线性非时变系统的时域特性-10

- 观察$y[n]=3x[n]$，其$h[n]=3\delta[n]=\{\ldots,3,\ldots\}$,
- 我们定义系统1： $x[n]\Rightarrow\ \cdot 3\ \Rightarrow y[n]$
- 定义系统2： $x[n]\Rightarrow z^{1},\ \cdot 3,\ z^{-1}\Rightarrow y[n]$
- 上述系统1，系统2是现实中的系统，我们发现系统2比系统1多了两个模块，显然不一样；但是数学，他们对所有输出都是一样的。
- 所以我们定义理论上的系统是排除冗余操作的（回归系统的表示的定义）；系统1和系统2的表示是一样的，所以在理论上是一个 系统。
- 所以我们说：理论上一个脉冲响应只对应一个系统，两者构成一一对应

性质	*LTI*系统	非*LTI*系统	随机系统
有且只有一个脉冲响应	是的	是的	不是
可以用脉冲响应表示	是的	不是	NA
一个脉冲响应只对应一个系统	是的	不是	NA

2024-11-12

52

线性非时变系统的时域特性-11

- 使用脉冲响应来理解一个LTI系统

- 假设$h[n]$ 为以下几个序列，请描述该LTI系统的时域处理特性。
- 上述问题等价于理解一个卷积核的功效

- $h[n] = [0.5\ 1\ -0.5]$， $n = -1:1$
- $h[n] = [3\ 2\ 1\ 0.5]$，$n = 0:3$
- $h[n] = [-1\ -2\ 2\ 1]$， $n = -2:1$

线性非时变系统的时域特性-12

- 实际上，只有在脉冲响应序列及输入序列为有限长度的情况下，卷积才能被使用来计算任何时间点的输出取样值，也就是乘积和是有限的。
  - 要特别强调的是，若输入与脉冲响应序列皆为有限长度，则输出序列亦为有限长度。
- 在脉冲响应为无限序列的情况下，若输入序列亦为无限长度序列，此时就无法利用卷积的方式来计算输出序列。
- 因此对于这样的系统，我们应该利用另外一种只包括有限乘积和的时域表示法来代表该系统。

2024-11-12 54

系统简介

- 基本系统举例(4.1) ; 基本系统分类(4.2); 脉冲响应(4.3)
- LTI系统(4.4-4.9)
  - 4.4 LTI时域特性
  - 4.5 互连
  - 4.6 离散系统（表示）
  - 4.7 分类
  - 4.8 频域表示+4.9 相位延迟+群延迟

借用脉冲响应来研究LTI系统

2024-11-12

LTI 离散时间系统的稳定条件-1（章节4.4）

- BIBO 稳定条件 -有界输入有界输出 (BIBO) 的稳定离散时间系统表示对于任意有界的输入序列，其输出序列亦为有界。
- 若且唯若一个 LTI 数字滤波器的脉冲响应序列 $\{h[n]\}$ 为绝对可加成，则该滤波器具备 BIBO 稳定性。即

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- 范例 - 考虑一个具下列脉冲响应的因果性 LTI 离散时间系统 $h[n] = (\alpha)^n \mu[n]$的有界性
  - （注：请先确认这个系统是LTI的吗？略）
  - 对于此系统$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha^n|\mu[n] = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha^n| = \frac{1}{1-|\alpha|},\ if\ |\alpha| < 1$
  - 因此，若 $|\alpha| < 1$ 则 $S < \infty$，此系统为 BIBO 稳定。若$|\alpha| = 1$，则此系统不为 BIBO 稳定
  - 现实中该脉冲响应代表什么操作？

LTI 离散时间系统的因果性条件-1

- 因果系统的定义：一个LTI系统是因果的，当 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$是任意两个输入序列，且存在下列关系：

  在 $n \le n_0$ 时，$x_1[n] = x_2[n]$, 则输出序列, 在 $n \le n_0$时，$y_1[n] = y_2[n]$

- 充要条件：
- 当且仅当 LTI 离散时间系统的脉冲响应 $\{h[n]\}$ 是1个因果序列，即 $k < 0$ 时，$h[k] = 0$ 则该系统为因果系统。
- 范例- 离散时间系统

$$y[n] = \alpha_0 x[n] + \alpha_1 x[n-1] + \alpha_2 x[n-2] + \alpha_3 x[n-3]$$

- 是因果系统，因为它有因果脉冲响应 $\{h[n]\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \mathrm{n} = 0{:}3$

2024-11-12 57

LTI 离散时间系统的因果性条件-2

- 范例 – 2-因子线性内插器 $y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1])$
- 是非因果性，因为它有非因果性脉冲响应如下： $\{h[n]\} = \{0.5,1,0.5\}, n =-1:1$

- 注意：一个具备有限长度脉冲响应的非因果性离散时间系统通常可以藉由插入适当量的延迟，来成为一个因果性系统。
- 举例来说，离散时间 2-因子线性内插器的因果系统版本，可藉由将输出延迟一个取样周期来达成。

$$\hat{y}[n] = x_u[n-1] + \frac{1}{2}(x_u[n-2] + x_u[n])$$

LTI 系统的互连（章节4.5）

- 我们可以简单的LTI系统通过串联和并联等方式组成新的系统：
- 基本方式：级联（串联）和并联

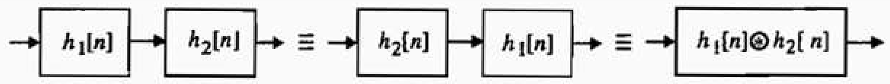


图 4.8 级联

1. 满足交换律；（不受顺序影响）
2. 稳定系统和无源系统 经过级联性质不变化
3. 例题：可以设计一个可逆系统

2024-11-12

LTI 系统的并联

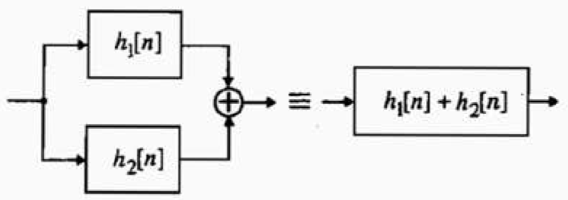
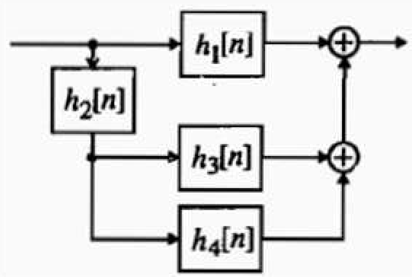


图 4.9　并联

1. 稳定的求和还是稳定的
2. 无损的求和不一定无损

例题：$h_1[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]; h_2[n]=\frac{1}{2}\delta[n]-\frac{1}{4}\delta[n-1];$

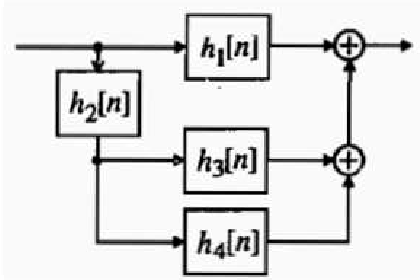
$$h_3[n]=2\delta[n], \qquad h_4[n]=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{2}u[n]$$



求 $h[n]$

2024-11-12

互连例题



则$h[n] = h_1[n] + h_2[n] * (h_3[n] + h_4[n]) = h_1[n] + h_2[n] * h_3[n] + h_2[n] * h_4[n]$

$$h_2[n] * h_3[n] = \left(\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]\right) * 2\delta[n] = ?$$

$$= \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$h_2[n] * h_4[n] = \left(\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]\right) * \left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n-1] - u[n]) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n] = -\delta[n]$$

则$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] - \delta[n] = \delta[n]$

系统简介

全解计算

形如式(4.32)的常系数差分方程的求解步骤与在 LTI 连续时间系统中求解常系数微分方程相似。在由式(4.32)定义的离散时间系统中，输出响应 $y[n]$ 包含两个部分，它们可以单独计算，然后相加得到全解：

$$y[n] = y_c[n] + y_p[n] \tag{4.39}$$

在式(4.39)中，分量 $y_c[n]$ 是当输入 $x[n]=0$ 时式(4.32)的解；即它是齐次差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = 0 \tag{4.40}$$

的解，而 $y_p[n]$ 是当 $x[n] \neq 0$ 时式(4.32)的解。$y_c[n]$ 称为**齐次解**，$y_p[n]$ 是对称为**激励函数**的特定输入 $x[n]$ 得到的解，称为**特解**。式(4.39)给出的齐次解与特解之和称为**全解**。

先说明计算齐次解 $y_c[n]$ 的方法。为此，假定齐次解形如

$$y_c[n] = \lambda^n \tag{4.41}$$

有限维度的 LTI 离散时间系统-1（章节4.6）

- 如下形式的线性常系数差分方程式所定义的系统是 LTI 离散时间系统中的一个重要种类。

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} p_l y[n-l]$$

  - $x[n]$ 和 $y[n]$ 分别是系统的输入与输出, $\{dk\}$ 与 $\{pk\}$ 是系统的常数。
- 这个表达式是一个系统的最常见表达式，叫做系统的转移公式
- 对于无限长序列，需要将两侧k,l上下限改为$-\infty,+\infty$ 即可
- 我们到现在只见过公式右侧只有一项$y[n]$的系统，这种系统可以使有限长，也可以是无限长的，反之也可以无限长（累加器）或有限长的（例如M-点移动滤波器）。
- 不管有限长还是无限长的，都可以是LTI的

2024-11-12 63

有限维度的 LTI 离散时间系统-2

- 例:如考虑累加器: $y[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} x[l]$,
- 1. 他是LTI的（已证明）
- 2. 他的IR是 $u[n]$ （已验证），这个是无限长序列
- 3. 他的实现是一个自反馈系统， $y[n] = y[n-1] + x[n]$
- 这个系统的转移公式 是 $x[n] = y[n] - y[n-1] \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} p_l y[n-l]$
- 这个序列的输入、输出都是无限长的

有限维度的 LTI 离散时间系统-3

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} p_l y[n-l]$$

- 上述离散时间系统的阶数 (order) 被定义为max(N, M)，它也是差分方程式的阶数。
- 实现上述所定义的 LTI 系统是可行的，这是因为它的计算只包含有限项的乘积和。
- 假设该系统为因果系统，则输出 y[n] 可藉由下列公式以递归计算而得：

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{p_k}{d_0} x[n-k]$$

其中 $d_0 \neq 0$

- 当 $x[n]$ 与下列初始条件为已知时，我们可以计算 $n \geq n_0$ 时的 $x[n]$

$$y[n_o-1], y[n_o-2], \ldots, y[n_o-N]$$

2024-11-12

有限维度的 LTI 离散时间系统-4 差分方程的全解计算

形如式(4.32)的常系数差分方程的求解步骤与在 LTI 连续时间系统中求解常系数微分方程相似。在由式(4.32)定义的离散时间系统中，输出响应 $y[n]$ 包含两个部分，它们可以单独计算，然后相加得到全解：

$$y[n] = y_c[n] + y_p[n] \tag{4.39}$$

通解中含有任意常数，而特解是指含有特定常数。比如y=4x^2就是xy'=8x^2的特解，但是y=4x^2+C就是xy'=8x^2的通解，其中C为任意常数。

求微分方程通解的方法有很多种，如：特征线法，分离变量法及特殊函数法等等。而对于非齐次方程而言，任一个非齐次方程的特解加上一个齐次方程的通解，就可以得到非齐次方程的通解。

2024-11-12

有限维度的 LTI 离散时间系统-4 差分方程的全解计算

先说明计算齐次解 $y_c[n]$ 的方法。为此，假定齐次解形如

$$y_c[n] = \lambda^n \tag{4.41}$$

将上式代入到式(4.40)中可得

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} d_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N}(d_0\lambda^N + d_1\lambda^{N-1} + \cdots + d_{N-1}\lambda + d_N) = 0 \tag{4.42}$$

多项式 $\sum_{k=0}^{N} d_k \lambda^{N-k}$ 称为由式(4.32)定义的离散时间系统的**特征多项式**。设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$表示它的 N 个根。若这些根彼此不同，则齐次解的一般形式为

$$y_c[n] = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \cdots + \alpha_N\lambda_N^n \tag{4.43}$$

2024-11-12

LTI 离散时间系统的分类

- 基于脉冲响应长度的分类 -
- 若 $h[n]$ 为有限长度，也就是 $h[n]=0,\ for\ n<N_1\ and\ n>N_2,\ N_1<\mathrm{N}_2$，则称此脉冲响应为一有限脉冲响应 (finite impulse response, FIR) 离散时间系统。
- 其卷积运算可化简为： $y[n]=\sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$
- 若 $h[n]$ 为无限长度，一般称为无限脉冲响应 (infinite impulse response, IIR) 离散时间系统。
- FIR和IIR是 LTI系统下最主要、最核心的分类标准。
  - 从难度、应用方便程度、理解程度、数学推导等多方面来说,FIR要比IIR系统容易
  - 在所有的DSP教材中，在第三部分，滤波器设计中，都是先讲FIR，再讲IIR
  - 在本课程中为了多方面原因（课程设计目的、课程难度控制、课程进度），本课程主要讲解介绍FIR，IIR部分只做提及。感兴趣同学可以自学。

系统简介

- 基本系统举例(4.1) ; 基本系统分类(4.2); 脉冲响应(4.3)
- LTI系统(4.4-4.9)
  - 4.4 LTI时域特性
  - 4.5 互连
  - 4.6 离散系统（表示）
  - 4.7 分类
  - 4.8 频域表示+4.9 相位延迟+群延迟

本章知识要点

- 基本信号入门
- 基本信号处理方法及图示（图示与数学公式），卷积
- 基本信号模型（冲击，阶跃，衰减，余弦）
- 取样（取样频率，上下取样）
- 系统（线性及LTI系统定义，基于脉冲响应的系统简单分析）
- 建议自行拓展知识点：
  - 反馈电路；
  - 正余弦变换中的震荡频率及相关电路知识
  - 无限长序列的认知

2024-11-12

70