

1

2024-11-26

## 离散时间傅立叶变换

# 时域数字信号处理 (7)

## 傅立叶转换的由来 (1)

- 傅立叶是法国数学家和物理学家，于1807年在法国科学学会上发表了一篇论文，论文里描述运用正弦曲线来描述温度分布，论文里有个在当时具有争议性的决断：**任何连续周期信号都可以由一组适当的正弦曲线组合而成。**
- 拉普拉斯同意，拉格朗日坚决反对！
- 理论上，拉格朗日是对的，应用上，傅立叶是对的。
- 用正弦信号模拟的信号和原信号不存在能量差。 $|E_{new} - E_{old}| < \varepsilon$
- 这说明出了有限个不可导的点以外，其他点都可以完美的近似。

2024/11/26

## 傅立叶转换的由来 (2)

### ■ 为什么用正弦信号？

- 1) 正弦信号是周期的，分析要容易的多。
- 2) 正弦曲线保真度。一个正余弦曲线信号输入于常见LTI系统后，输出的仍是正余弦曲线，只有幅度和相位可能发生变化，但是频率和波的形状仍是一样的。（后面可证明）
- 3) 正弦信号和余弦信号互为倒数，所以求微分方程极为方便。
  - 常见微分方程的例子：电路，温度，压强，功与能量。。。

## 傅立叶的基础思想 (1)

- 用对已知函数组加权求和的方法表示出一个未知的函数。其中的权（也就是系数），就是原函数映射至相应函数数组的结果。
- 这个方法实际上是数据分析（不限于时序序列）的最最重要、最主流的方法：
- 对于需要研究的 $y[n]$  ( $y[n]$ 通常是采样的，没有函数表示)，我们定义

$$y[n] = \sum_i w_i x_i[n] \text{ 或者 } y(t) = \int_k^{\square} w_k x_k(t)$$

- 其中 $x_i[n]$ 或者 $x_k(t)$ 的性质已知，所以从研究 $y[n]$ 改为研究 $w_i$ , 其中 $w_i$ 是 $y[n]$ 在 $x_i[n]$ 上的性质。

2024/11/26

## 傅立叶的基础思想 (2)

$$y[n] = \sum_i w_i x_i[n] \text{ 或者 } y(t) = \int_k^{\square} w_k x_k(t)$$

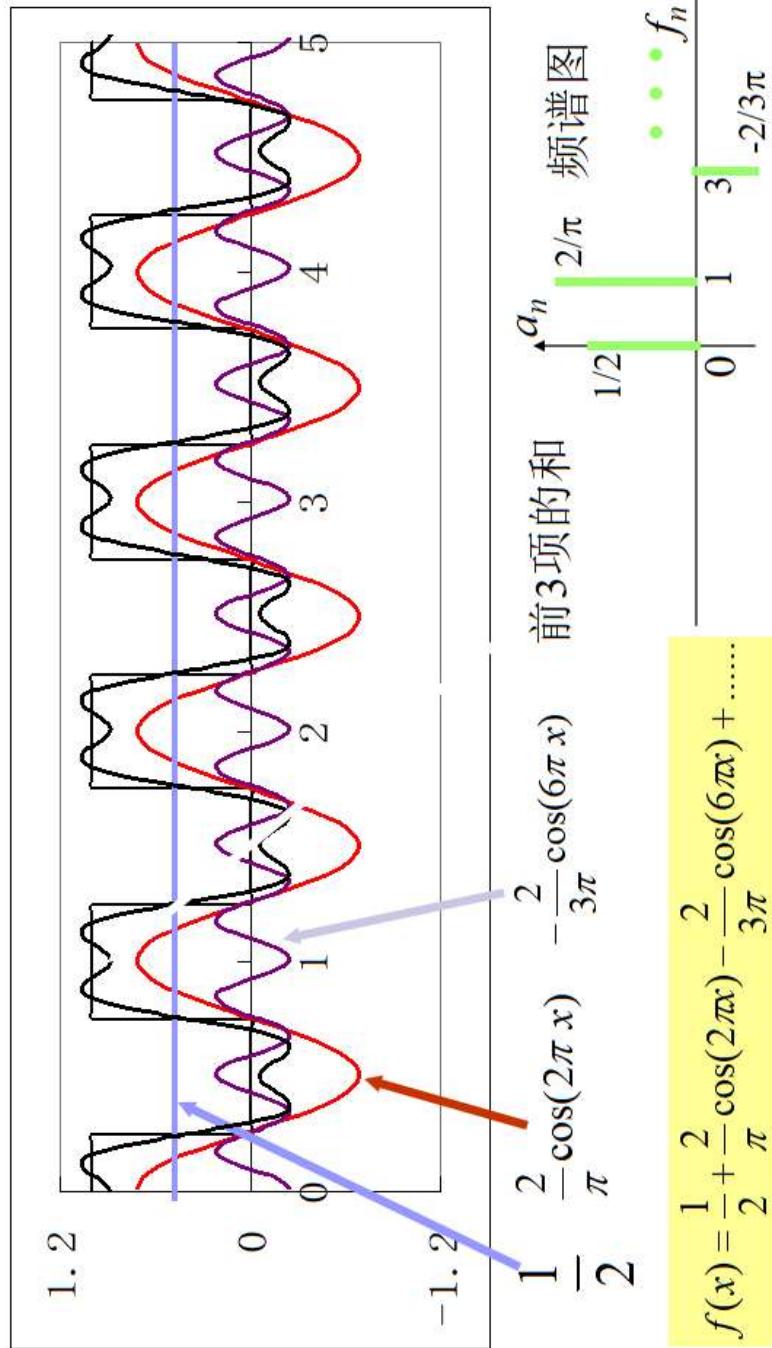
### ■ 这种方法的好处有很多

- 1.  $y[n]$  中的每一个点，都是孤立的，要想研究这个点和其他的关系，需要借由“窗口”（滑动窗，这个概念在CNN中演化为可视野）；但是没办法研究整体的性质，例如单增、单减的走势、周期性、整体能量幅度等；而  $x_i[n]$  是一条和  $y[n]$  等长、已知整体性质的序列；所以  $w_i$  就表示了  $y[n]$  在  $x[n]$  这个幅度上的整体走势。
- 2. 不同的  $x_i[n]$  族构成了不同的工具盒，可以快速、公式化的分析研究  $y[n]$  的性质

2024/11/26

## 用傅立叶的基础思想（3）-例子

周期为  $t = 1$  的方波函数被余弦信号加和表示



0024/11/26

## 回到傅立叶变换（1）

- 傅立叶变换是最经典、常见、基础的变换方法。
  - 通过傅立叶变换可以引入频率的概念；频率（域）是少有的几种可以明确解释 $w_i$ 的变换方法
  - 频率域在DSP领域尤其重要，因为波的概念在自然界的普遍定义（后面学习详解）
  - 讨论到傅立叶变换时，我们面临若干核心问题，
    - → 研究 $w_i$ :  $w_i$ 算？取决于 $x_i[n]$  →
    - → 研究 $x_i[n]$ : 设定 $x_i[n]$ 的一系列工作，有几个 $x_i[n]$ ,该是什么样的？ →
    - → 定义 $y[n]$ : 到底有哪些 $y[n]$ 能够变换

## 回到傅立叶变换 (2)

- 对于不同信号应用正弦函数进行调制的方法

信号类型	变换方法
非周期性连续信号	傅立叶变换 (Fourier Transform)
周期性连续信号	傅立叶级数(Fourier Series)
非周期性离散信号	离散时域傅立叶变换 (Discrete Time Fourier Transform)
周期性离散信号	离散傅立叶变换(Discrete Fourier Transform)

8024/11/26

# 回到傅立叶变换 (3)

■ 不同傅立叶变换的图示

■ 怀着以下几个问题学习

□ 这几种变换有什么不同？？？

□ 在这里的处理对象都是具有无穷长度的信号  
 $\text{Discrete signal}$

□ 问题：当有限长度怎么处理呢？

□ 那么对于有限长信号，我们应该采取那种研究

■ 书目使用

□ 实际上我们后面对要按照这本书后三-四章走。

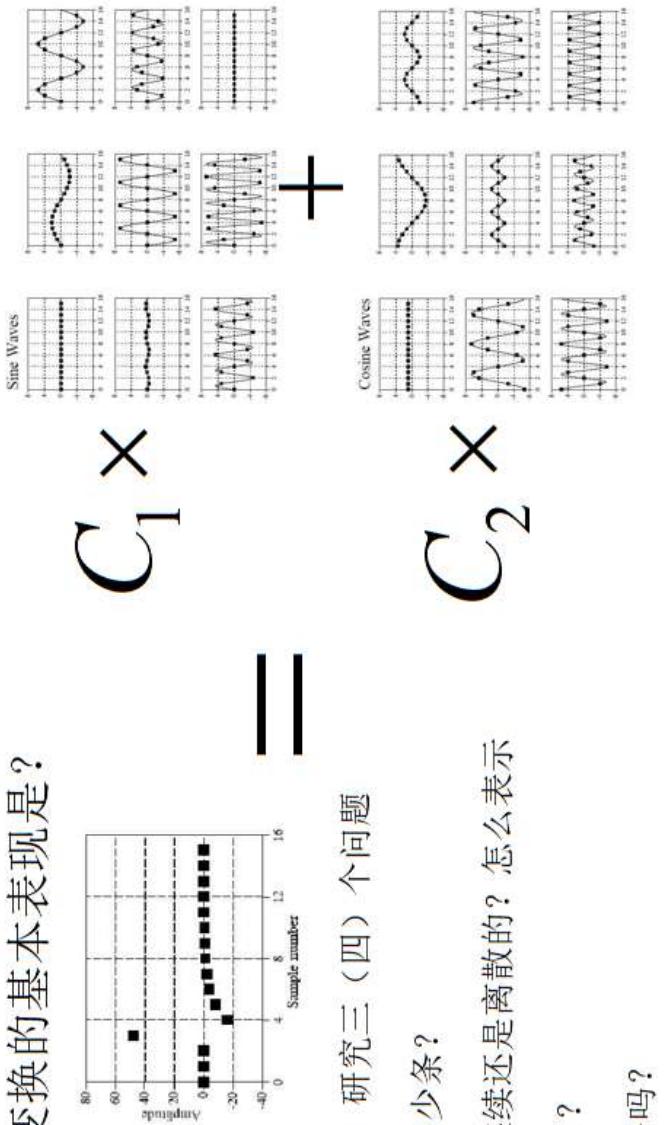
□ 第8章有中文翻译版

2024/11/26

Fo <sub>r</sub> sign	For sign	Dis signan
FUNDAMENTALS		
Chapter 5.	Linear Systems .....	87
Chapter 6.	Convolution .....	107
Chapter 7.	Properties of Convolution .....	123
Chapter 8.	The Discrete Fourier Transform .....	141
Chapter 9.	Applications of the DFT .....	169
Chapter 10.	Fourier Transform Properties .....	185
Chapter 11.	Fourier Transform Pairs .....	209
Chapter 12.	The Fast Fourier Transform .....	225
Chapter 13.	Continuous Signal Processing .....	243
DIGITAL FILTERS		

# 实数离散傅立叶变换 (DFT) (1)

■ 傅立叶变换的基本表现是？

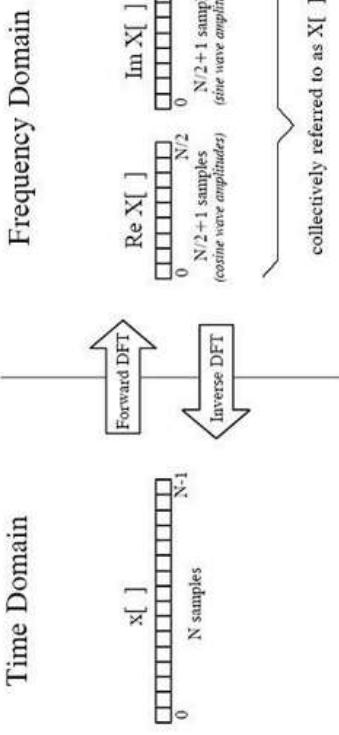


□ 根据这个图，研究三（四）个问题

- 1) 曲线有多少条？
- 2) 曲线是连续还是离散的？怎么表示？
- 3) C 是什么？
- 4) 算的回去吗？

2024/11/26

## 实数离散傅立叶变换 (DFT) (2)



- 关于曲线/系数的个数  $x[n]$  的数量
- 最朴素的方法：

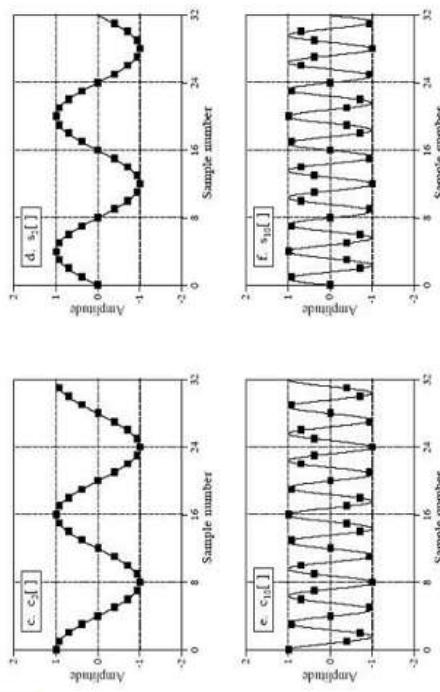
□ 一个序列的点  $N =$  曲线的数量  $N$  (这个是暂时的)

- 然后第二步，正弦余弦怎么拆分，一家一半  $\frac{N}{2}$ ，然后再加一条，所以从  $0, \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1$  条正弦， $\frac{N}{2} + 1$  条余弦 (下一页讨论为什么要加一)

2024/11/26

## 傅立叶变换的具体算法（1）

■  $\cos$  及  $\sin$  函数组是如何产生的



■ 最朴素的算法：取  $K = \frac{N}{2} + 1$  条互不相同的曲线

■ 不重复的区间是  $[0, \pi]$

□ 注意，闭区间，不是半开半闭，对于  $\sin$  来说， $\sin 0n = \sin \pi n = 0$  对  $\cos$  来说， $\cos 0n = 1, \cos \pi n = [-1, 1, -1, \dots]$  不一样

■ 取曲线为  $\cos\left(\frac{\pi}{N/2}kn\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$  及  $\sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$

□ 因为是 0 到  $\frac{N}{2}$  条，所以一共是  $\frac{N}{2} + 1$  条 正弦与余弦。其实应该是  $\frac{N}{2} + 1$  条余弦与  $\frac{N}{2}$  条正弦，为保持一致，**多加一条**。此时多加的曲线，是  $\sin \pi n = 0$ ，不影响最后求和式子

□ 我们可以看到再多的曲线就用不到了，例  $k = \frac{N}{2} + 1$ ，则  $\cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) = -\cos\left(\frac{2\left(\frac{N}{2}+1\right)\pi}{N}n\right) = -\cos\left(\frac{2\left(\frac{N}{2}-1\right)\pi}{N}n\right)$

□ 请注  $n$  和  $k$ ， $N$  的定义、关系  
2024/11/26

## 傅立叶变换的具体算法（2）

- $\cos$ 及 $\sin$ 函数组是如何产生的
- 知识点：看下 $n$ 和 $k$ ,  $N$ 的定义、关系
  - $n$ 是 $\cos(\omega n)$ 中的 $n$ , 是信号的必须时序自变量，没有 $n$ 就不是信号了。
  - $N$ 是信号中点的数量，是外部获取的。所以 $n = 0:N-1$
  - $K$ 是我们**自定的**，目标是曲线的数量，**定多少多可以**。 $K$ 在公式里面没有出现。我们暂时令 $K = N/2 + 1$ 。所以我们用 $N/2 + 1$ 代替了 $K$ 。
  - $k$ 是第几条曲线的index，是从 $1:K$ ，即 $k = 0:K = 0:\frac{N}{2}$
  - 对于 $\cos(\omega_k n)$ ，即第 $k$ 条曲线的 $\omega_k$ 来说，有 $\omega_k = \frac{\pi}{N/2} \cdot k = \frac{2k\pi}{N}$

## 实数离散傅立叶变换 (DFT) (3)

■ 希望解决的三个问题：几条正余弦线；都是什么样的正余弦线；系数怎么算

- 解决了  $x_k[n] = \cos(\omega_k n)$  的数量问题： $\frac{N}{2} + 1$  正余弦（后续会调整）
- 又解决了  $\omega_k$  到底应该等于多少的问题： $\omega_k = \frac{2k\pi}{N}$
- 第三个问题是，如何找到对应的权重  $w_k$
- 请注意，上面两个问题中，权限数量、 $\omega_k$  的设置，都是 “一拍脑袋” 朴素想出来的
- 所以对于寻找权重，我们也 “一拍脑袋”，我们首先给出一个  $w_k$  的定义，
- 遗留潜在问题，三个 “拍脑袋” 的方案，能够满足  $x[n] = \sum_k w_k \cos\left(\frac{2k\pi}{N} n\right)$  吗？

2024/11/26

## 实数离散傅立叶变换 (DFT) (4)

■ 仍然：一个朴素的想法，如果这个信号和cos或者sin越像，则给他的w<sub>k</sub>越大。

□ 相似性的度量：相关性， $l_{xy} = \sum_n x[n]y[n]$ ,忽略k的延迟

□ 注：后面我们用c<sub>k</sub> (coefficient) 来替代w<sub>k</sub> (weight)，c<sub>k,cos</sub>来表示余弦的系数，c<sub>k,sin</sub>来表示正弦的系数

■ 所以分别定义系数为：

$$c_{k,cos} = \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right), c_{k,sin} = -\sum_n x[n] \sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right)$$

□ 配平

$$c_{k,cos} = \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right), c_{k,sin} = -\frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right), c_{0,cos} = -\frac{1}{N} \sum_n x[n] \sin/\cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right)$$

□ 合在一起，给个名字

$$X[k] = Re\bar{X}[k] + jIm\bar{X}[k] = c_{k,cos} + j c_{k,sin} = \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) - j \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right)$$

2624/11/26

## 实数离散傅立叶变换 (DFT) (5)

$$X[k] = \operatorname{Re} X[k] + j \operatorname{Im} X[k] = c_{k,\cos} + j c_{k,\sin} = \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) - j \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right)$$

- 上述公式中功能存在以下若干问题：

1) 算 $\sin$ 时为什么加“-”？

源于函数族关于 $\omega_k$ 的奇偶性和虚数，后面会讲

2)  $N/2$ 是个什么意思？

配平，看起来是算平均到 $x[n]$ 与 $\cos(\omega_k n)$ 每个点的相似度，但是 $N/2$ 怎么理解？

- a) 为了后续方便操作，后面讲到
- b) 此处有一个重要的引申知识点，我们将再来看

3) 复数 $X[k]$ ：

为什么是复数？前文讲过，表述方便，两部分通过 $j$ 分隔，不进行运算，但暂时还没有其他作用。

$X[k]$ 与 $x[n]$ 的关系？ $X[k]$ 是由 $x[n]$ ，通过一系列拍脑袋的朴素想法算出来的即， $X[k] \leftarrow x[n]$ ；但是我们不知道是否有

$\text{#62411}_{26} X[k] \Rightarrow x[n]$ ；

## 例题1.

- 假设给出一个序列 $x[n], n = 0:7$  that is  $N = 8$ , 计算前面的三个问题, 即需要几条正余弦信号进行加成模拟, 都是什么, 对应系数是什么。

答:

1)  $N = 8 \Rightarrow K = \frac{N}{2} + 1 = 5$ , 即分别需要5个正余弦信号;

2) 切分区间为 $[0, \pi]$ ,  $\omega_k = \frac{\pi}{N/2} \cdot k = \frac{2k\pi}{N}, k = 0, 1, 2, 3, 4$ ;

即五个信号的角速度分别为  $\omega_0 = \frac{2\pi}{8} \cdot 0 = 0; \omega_1 = \frac{2\pi}{8} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}; \omega_2 = \frac{\pi}{4}; \omega_3 = \frac{\pi}{2}; \omega_4 = \frac{3\pi}{4}$

五个信号分别为  $\cos(0n), \cos(\frac{\pi}{4}n), \cos(\frac{\pi}{2}n), \cos(\frac{3\pi}{4}n), \cos(\pi n)$ , 以及相应的 $\sin$ 信号

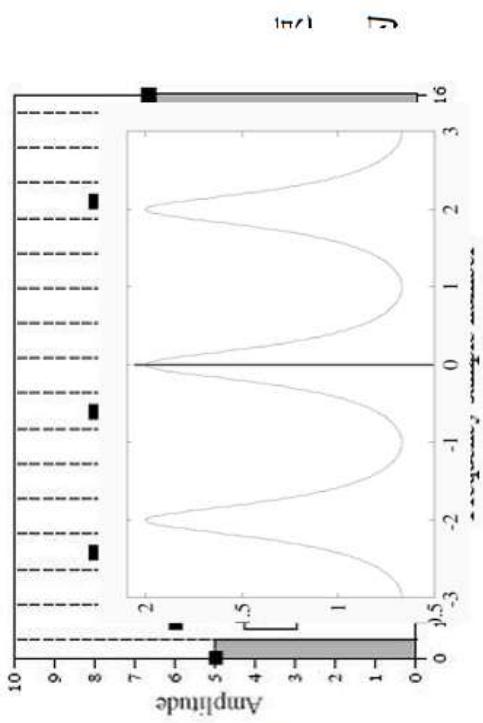
3) 根据公式, 则有

$$\begin{aligned}c_{0, \cos} &= \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos(0n); c_{1, \cos} = \frac{1}{N/2} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos(\omega_1 n) = \frac{1}{N/2} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \dots, c_{5, \cos} \\&= \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos(\pi n)\end{aligned}$$

$\sin$ 算法一样, 但是加" - "

## 频谱的概念

- 由系数个数引发的重要概念→频域
- 将坐标系的
  - 横轴定义为：第 $k$ 条曲线的序号 $k$
  - 纵轴定义为：第 $k$ 条曲线的系数 $w_i$ 或 $c_i$
- 此时我们发现横轴的意义是第 $k$ 条曲线，将度，而纵轴则是这个角速度/频率对应的正信号的频谱



## 频谱的理解

### ■ 频谱vs空间谱：

- 频谱对应的是时间域（谱）或时空谱（如图像）对于时空域的一个点的变动，对应的就是一个时间点或像素点的变化，与周围无关；如果想影响周围，需要借助滑动窗的概念；
- 而频谱上的一个点，对应的是一个曲线的权重；权重的变化，对应一条贯穿时间轴的曲线的增加或减少，影响所有空间上的点。

### ■ 频域的衍生：

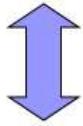
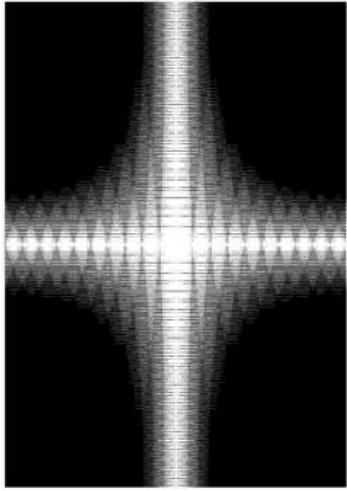
- 各种变换域的理解都是基于其基底函数组的。所谓频域上的值，就是对应某频率（正余弦）波的系数。所以：脱离开函数组理解变换的值是完全无用的！

### ■ 一个例子：

2024/11/26

# 一张FFT的示意图

- 一张书中非常常见的图



2024/11/26

## 多选题 1分

我们基于朴素思想，“不用算一样的曲线” 定义了 $\cos \omega_k n$ , 直接导致了以下哪些问题?

- A  $\cos$  曲线 $\omega_k$ 的有意义对选取区间是 $[0, \pi]$ , 而 $\sin$ 曲线有意义的选取区间是 $[0, \pi)$ ,
- B N个点的序列, 保持一样的间隔 $\pi / (\frac{N}{2})$ 时,  $\cos$ 和 $\sin$ 曲线的起始数量不一样多
- C 我们不得已, 选择了正余弦各 $\frac{N}{2} + 1$ , 一共 $N+2$ 条曲线和对应系数
- D  $X[k]$ 不(知道)能反推回 $x[n]$ , 即  $x[n] \leftarrow X[k]$

21

2024-11-26

## 离散傅立叶变化化简与规范化

- 我们基于以下朴素思想设定了曲线数量：
  - 没有重复的曲线，所以产生了两个区间 $[0, \pi]$ ,  $[0, \pi]$ ，进而每个区间需要 $N/2 + 1$ 条曲线
  - 部分去掉不算重复曲线的约束，换成找到一个**cos**和**sin**一样的区间这个约束：
- $[0, 2\pi]: s.t. \cos 2\pi n = \cos 0n = [..., 1, ...], \sin 2\pi n = \sin 0n = [..., 0, ...]$
- 对于这个区间，我们发现：
  - 1. 将 $[0, 2\pi)$ 分成 $N$ 份算 $\omega_k$ ，和将 $[0, \pi)$ 分成 $N/2$ 的间隔（频谱解析度）是一样的。也就是说，两次取出来的 $\omega_k$ 是一样的。只不过后者的曲线没有重复而已。
  - 2. 我们不需要重新定义 $X[k]$ 的计算公式，只需要将之前的系数“一分两半”就可以了。

$$c_{k,\cos} = \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{2}{N} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) + \frac{1}{N} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2(N-k)\pi}{N}n\right)$$

2024/11/26

## 离散傅立叶变化化简与规范化(2)

$$\hat{c}_{k,\cos} = \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{2}{N} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) + \frac{1}{N} \sum_n x[n] \cos\left(\frac{2(N-k)\pi}{N}n\right) = c_{k,\cos} + c_{N-k,\cos}$$

$$\hat{c}_{k,\sin} = \frac{1}{N/2} \sum_n x[n] \sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{2}{N} \sum_n x[n] \sin\left(\frac{2k\pi}{N}n\right) - \frac{1}{N} \sum_n x[n] \sin\left(\frac{2(N-k)\pi}{N}n\right) = c_{k,\sin} - c_{N-k,\sin}$$

■ 上式说明：

□  $N$ 点序列，在 $[0,2\pi]$ 区间上去 $\mathbf{N}$ 条正弦曲线， $\mathbf{N}$ 条余弦曲线。

□ 曲线的 $\omega_k$ 的结果不变  $\frac{\pi}{N/2} = \frac{2\pi}{N}$

□  $k$ 的范围从 $0: N/2$ 到了 $0: N-1$

□ 解释了为什么之前的平均配平系数是 $\frac{1}{N/2}$ ，为了分给 $\omega_k$ 与 $\omega_{N-k}$ 一条曲线一半（后面还有引申）

□  $\text{Re}X[k] = c_{k,\cos} = c_{N-k,\cos} = \text{Re}X[N-k], \text{Im}X[k] = c_{k,\sin} = -c_{N-k,\sin} = \text{Im}X[N-k]$

□  $\Rightarrow X^*[k] = X[N-k]$

2624/1426为什么 $\text{Im}X[k] = c_{k,\sin}$ 运算有个“-”，曲线的性质决定

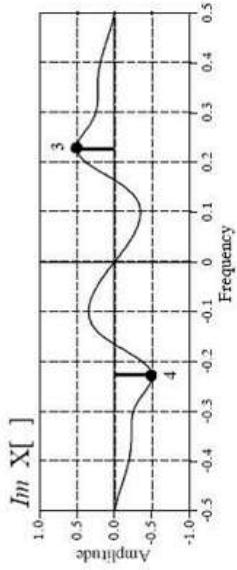
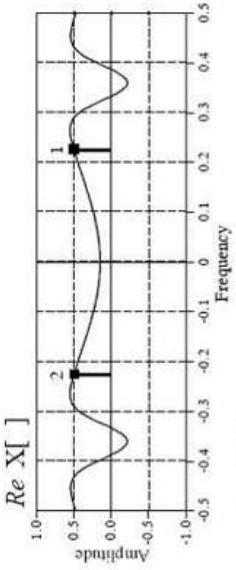
## 关于复数的离散傅立叶变换(DFT)

### ■ 上述公式需注意：

- 1.  $X[k]$  此时长度与  $x[n]$  一样，都是  $N$  个点； $X[k]$  中的  $N$  个点对应了  $N$  条正弦曲线的系数组。
- 2.  $X[k]$  都是复数，为保持一致性，我们令  $x[n]$  也是复数，但  $x[n]$  的虚数部分都是由 0 组成的，实数部分表示原始信号；
- 3. 其中的  $j$  是一个不可分离的组成部分，就象一个等式中的变量一样，不能随便去掉，去掉之后意义就完全不一样了；

## 关于复数的离散傅立叶变换(DFT)

4.  $k$ 的取值范围是 $0 \sim N - 1$ (也可以表达成 $\omega_k \in [0, 2\pi]$ );
5. 还有一种表达, 由 $\sin \omega_n$ 的 $\omega$ 周期性和对称性, 平移 $[0, 2\pi]$ 至 $[-\pi, \pi]$ , 其对应 $0 \sim N/2$  (或 $0 \sim \pi$ ) 是正频部分,  $N/2 \sim N - 1$  ( $\pi \sim 2\pi$ ) 是负频部分;
6. 负频率(暂时)只是一种描述, 没有实际意义;
7.  $Re X[k]$ 是余弦的系数, 在频域上, 呈轴对称(不管原始称。
8. 复数写法的傅立叶变换 $X[k] = \sum_n x[n] e^{-j2k\pi/N}$



2624/11/26

## 关于傅立叶变换的一些说明

- 绝大部分的书，都是直接从N点的复数傅立叶变换开始的，省去了实数部分的推导。

□ 这样的缺点：缺乏对于傅立叶变换种种设定的“直观感受”，导致只能死记硬背。

- 直观学习的遗留：

- 我们的出发点是找到  $x[n] = \sum_k w_k \cos(\omega_k n)$  的一系列  $w_k, \cos(\omega_k n)$ ，且满足公式
- 我们现在“直观”的设定了  $K, \omega_k, c_k$ ，但是满足这个等号吗？—待证明，在此我们先不加证明的给出傅里叶逆变换的定义公式。

$$x[n] = \sum_K X[k] e^{\frac{j2k\pi}{N}} \quad VS. \quad X[k] = \frac{1}{n} \sum_n x[n] e^{-\frac{j2kn\pi}{N}}$$

- 注：由  $x[n] \Rightarrow X[k]$  称为（离散（时间））傅立叶变换；而由  $X[k] \Rightarrow x[n]$  称为傅立叶逆变换

2624/11/26

## 例题1.(延展)

- 假设给出一个序列 $x[n], n = 0:7$  that is  $N = 8$ , 计算前面的三个问题, 即需要几条正余弦信号进行加成模拟, 都是什么, 对应系数是什么。

答:

1)  $N = 8 \Rightarrow K = 8$ , 即分别需要8个正余弦信号;

2) 切分区间为  $[0, 2\pi]$ ,  $\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k = \frac{2k\pi}{N}, k = 0, 1, 2, \dots, 7$ ;

即 五个信号的角速度分别为  $\omega_0 = \frac{2\pi}{8} \cdot 0 = 0; \omega_1 = \frac{2\pi}{8} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}; \dots; \omega_4 = \pi, \dots, \omega_7 = \frac{2\pi}{8} \cdot 7 = \frac{7\pi}{4}$   
8个信号分别为  $\cos(0n), \cos(\frac{\pi}{4}n), \cos(\frac{\pi}{2}n), \cos(\frac{3\pi}{4}n), \cos(\pi n), \dots, \cos(\frac{7\pi}{4}n)$  及相应的sin信号

## 例题1. (延展)

- 假设给出一个序列 $x[n], n = 0:7$  that is  $N = 8$ , 计算前面的三个问题, 即需要几条正余弦信号进行加成模拟, 都是什么, 对应系数是什么。

答:

- 3) 根据公式, 则有

$$\begin{aligned} c_{0,cos} &= \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos(0n); c_{2,cos} = \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \dots, c_{5,cos} \\ &= \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos(\pi n), \dots, c_{7,cos} = \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right) \end{aligned}$$

- 每个系数都是 $1/N$

- 而  $c_{0,sin} = -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin(0n); c_{2,sin} = -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin(\omega_2 n) = -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), \dots, c_{5,sin} = -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin(\omega_5 n) = -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right)$

## 例题1. (延展)

- 假设给出一个序列 $x[n], n = 0:7$  that is  $N = 8$ , 计算前面的三个问题, 即需要几条正余弦信号进行加成模拟, 都是什么, 对应系数是什么。

答:

- 3) 根据公式, 则有

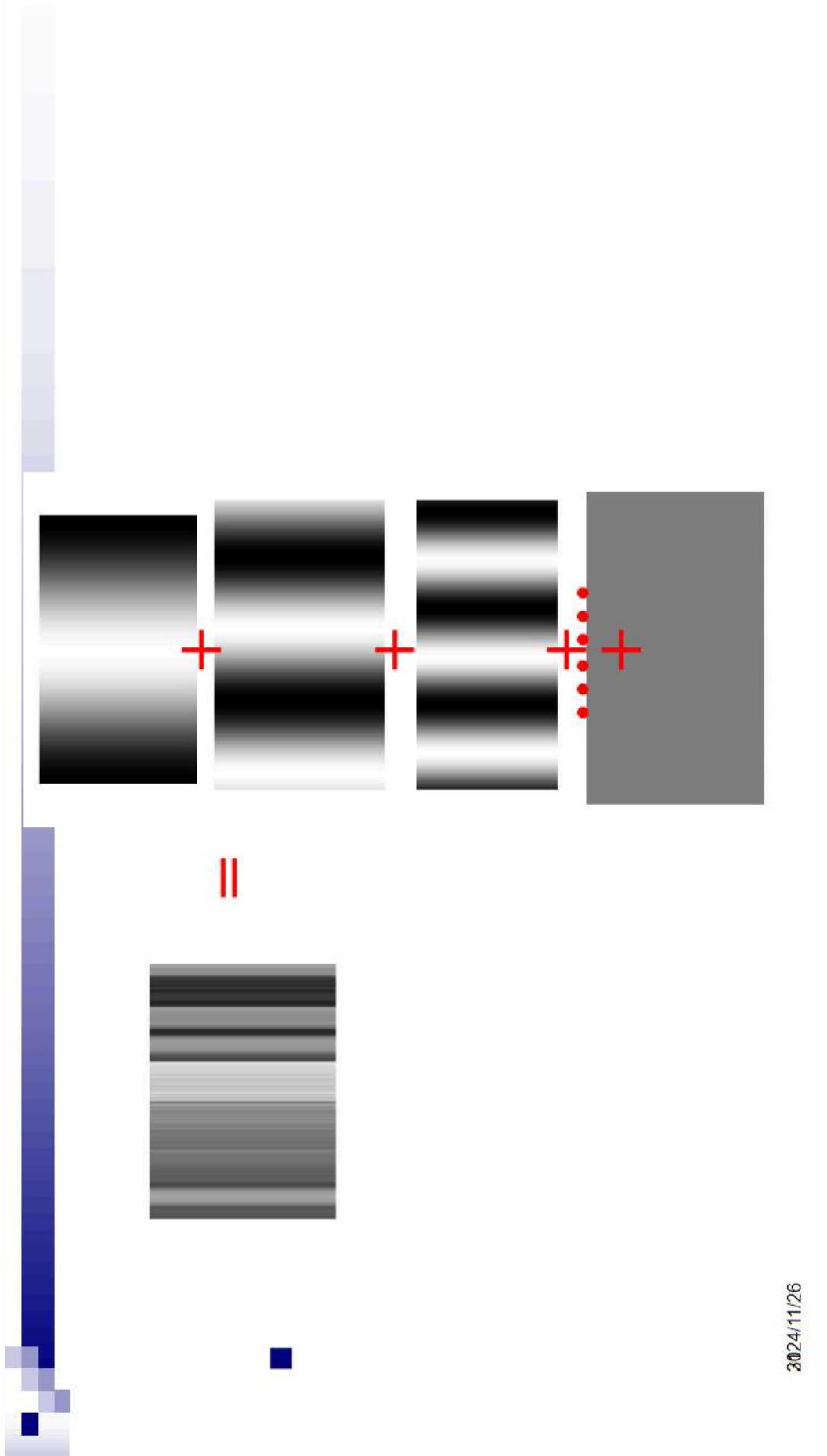
$$\begin{aligned}c_{0, \cos} &= \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos(0n); \\c_{2, \cos} + c_{7, \cos} &= \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right) = \frac{2}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \\c_{2, \sin} + c_{7, \sin} &= -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}n\right) = -\frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{1}{N} \sum_0^7 x(n) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}n\right)\end{aligned}$$

## 关于傅立叶变换的直观展示

- 我们尝试直观观察傅立叶变换（假设先承认正变换、逆变换都成立）
- 在还没有学2维傅立叶变换的情况下，我们逐行处理Lena.jpg
- 实验1，选取Lena中的任一行（实验是选512行中的第100行）
  - 一行是一条一个像素的细线，看不清，我们就把处理前后的线分别复制300次。
- 观察 $w_k \cos(\omega_k n)$ 的效果

2024/11/26

2024/11/26



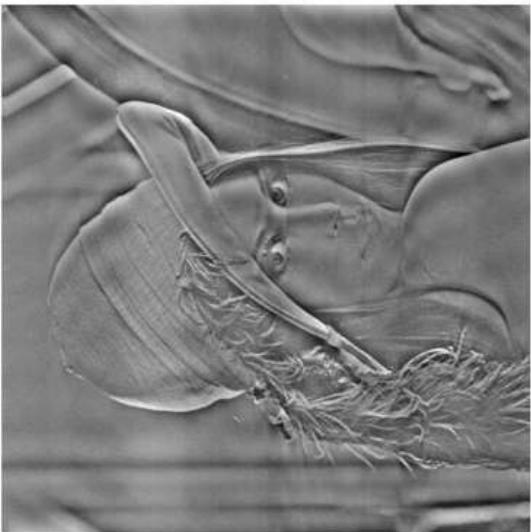
## 关于傅立叶变换的直观展示

- 实验2，观察 $X[k]$ 的各种性质（略，留做探索实验）
- 实验方法：调用各个编程环境下的**默认函数**对于Lena中的某一行进行分解，观察分解结果
- 观察目标：
  - 1. 观察输出格式：是实数还是复数，如何表示
  - 2. 观察 $ReX[k], ImX[k], |X[k]|, arg(X[k])$ 的奇偶性，其中 $| |$ ， $arg$ 分别是复数的模和复角
  - 3. 通过观察多行的分解，观察上述4个序列在低频和高频的数量（大小）是否有明显的趋势。

2024/11/26

## 关于傅立叶变换的直观展示

- 实验3，观察 $\sum_n x[n]e^{-j2k\pi \frac{n}{N}}$ 的效果
- 实验方法：我们对于Lena的每一行逐行分解，计算 $X[k]$ ，然后令一部分 $X[k] = 0$ ，观察失去的那部分 $X[k]$ 带来的影响
  - 逐行对Lena进行傅立叶分解得到 $X[k]$ ，分别令低频系数和高频系数为0，得到 $X_1[k], X_2[k]$
  - 对修改过的序列 $X_1[k], X_2[k]$ 进行逆变换（上述两步其实就是一种手动的低频（=高通）、高频（=低通）滤波）
  - 重组Lena1, Lena2，观察舍去不同的 $k$ 带来的影响。
    - 提示1：舍去低频时，不要舍去 $X[k = 0]$ （直流）的部分；
    - 提示2：低频舍去后，图像比较暗，要整体调高亮度才能看清；
- 3624/11/26 ■ 提示3：低频 $k$ 舍去的少一些，高频要舍得更多一些。

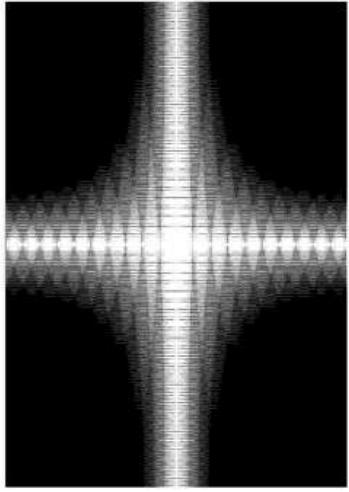


## 滤波实际效果

2024/11/26

## 2维傅立叶变换简要说明\*

- 和2维卷积类似，2维傅立叶变换也可以进行分解；
- 两方向傅立叶变换原理是上设定一个2个参数的一维
- 2维傅里叶变换得到的是也是一个2维的复数数组。
- 这个数组和一维一样，都是低频部分的系数模大，高频的系数模小，且有对称性
- 为了便于观察，我们将一个数组切开后重拼起来，才能得到下图
- 和傅里叶变换一样，肉眼观察这张图，很难得到明确的可量化物理意义。



3624/11/26

## 图像的傅立叶变换\*

- 以图像为例，简单谈一下2维傅立叶变换

$$F(f_x, f_y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

$$X[k_x, k_y] = \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M I[x, y] e^{-j2\pi\left(\frac{k_x}{N}x + \frac{k_y}{M}y\right)}$$

$$= \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M I[x, y] e^{-j2\pi\frac{k_x}{N}x} e^{-j2\pi\frac{k_y}{M}y}$$

3624/11/26

图像  
不是

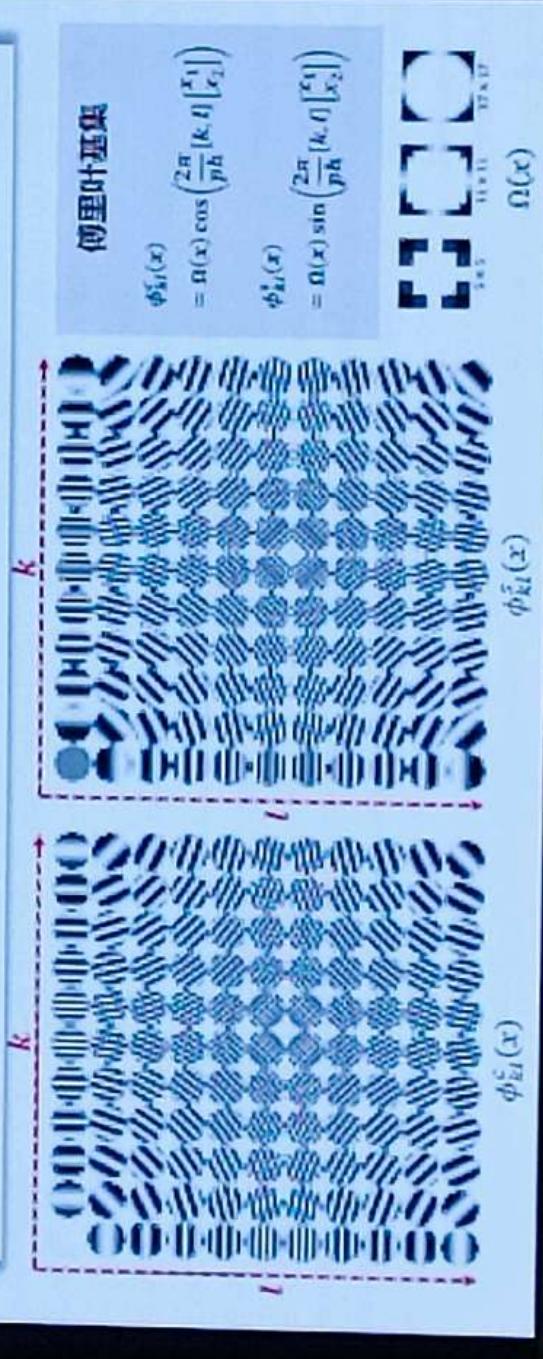
## 局部卷积参数化

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} \left[ a_{kl} \cos\left(k \frac{2\pi}{ph} x + l \frac{2\pi}{ph} y\right) + b_{kl} \sin\left(k \frac{2\pi}{ph} x + l \frac{2\pi}{ph} y\right) \right]$$

$p$ : filter size  
 $h$ : mesh size

傅利叶展开

系数  
基底  
系数  
基底



2024/11/26

# DFT的拓展

■ 翻开数学书，可以看到下面的傅立叶变换：

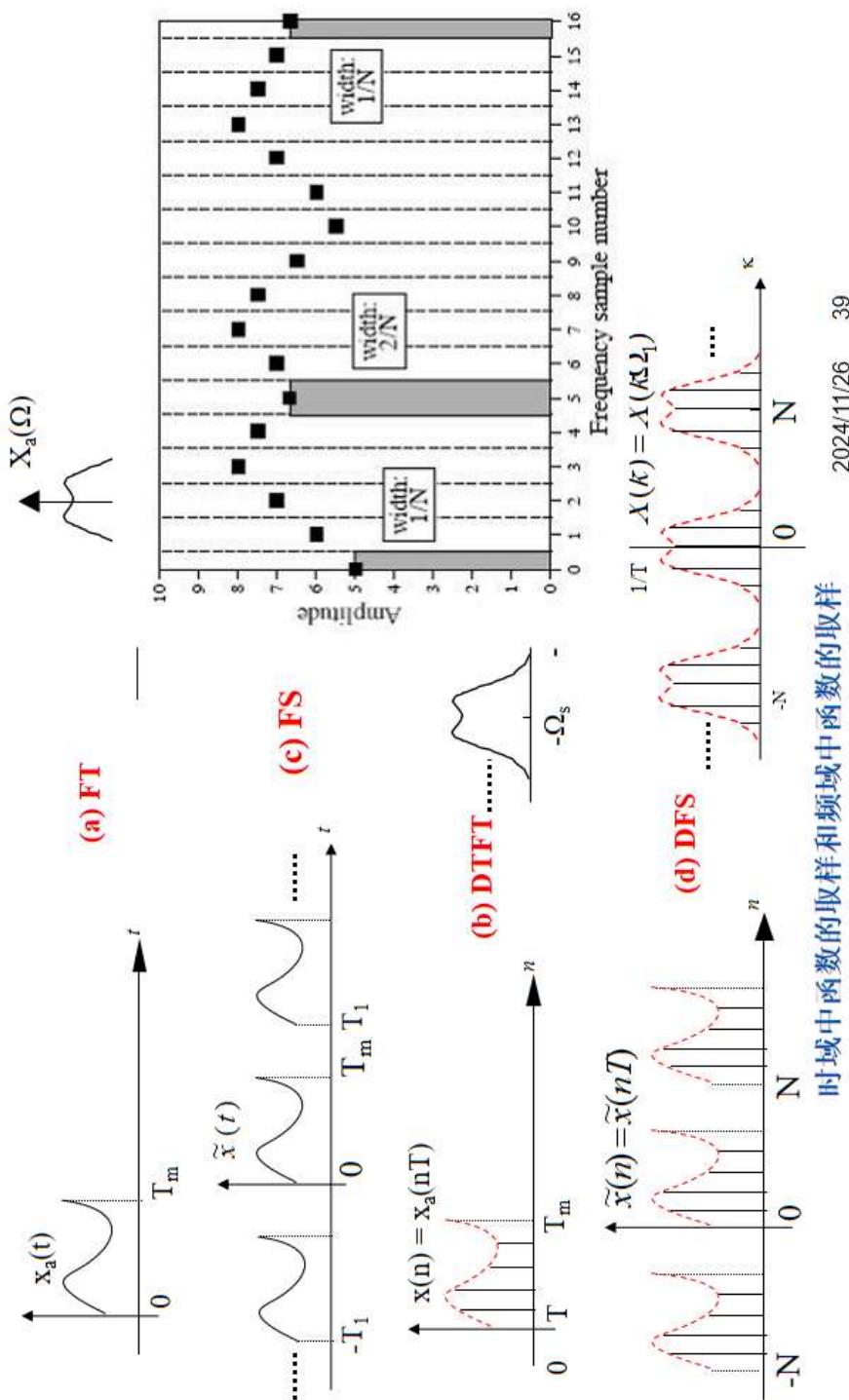
- 傅里叶变换 FT (Fourier Transform)
- 傅里叶级数 FS (Fourier Series)
- 离散时间傅里叶变换DTFT
- 离散傅里叶变换（级数）DFT(DFS)

■ 有什么区别，为什么有这些区别？

- 适用对象的区别， $\Rightarrow$  运算的区别

3824/11/26

## 时域取样与频域取样



2024/11/26 39

时域中函数的取样和频域中函数的取样

## 再次回到4种变换的总结

形式	时间函数	频率函数
傅里叶变换 FT	连续 非周期	非周期 连续
傅里叶级数 FS	连续 周期( $T_0$ )	非周期 离散( $\Omega_0=2\pi/T_0$ )
离散时间傅里叶变换 DTFT	离散( $T$ ) 非周期	周期( $\Omega_s=2\pi/T$ ) 连续
离散傅里叶变换(级数) DFT(DFS)	离散( $T$ ) 周期( $T_0$ )	周期( $\Omega_s=2\pi/T$ ) 离散( $\Omega_0=2\pi/T_0$ )

**结论：**

- ① 时域中函数取样~~离散~~ → (映射) 频域中函数周期重複;
- ② 频域中函数取样 → (映射) 时域中函数周期重複;
- ③ 取样间隔 → (映射) 周期  $(2\pi/\text{间隔})$

- 离散时间函数的取样间隔：  $T_1$ ， 取样频率：  $f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{1}{T_1}$
- 离散频率函数的取样间隔：  $F_0$ ， 时间周期：  $T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

2024/11/26

## 时频对应关系

- 由以上讨论可以清楚地看到，**时域取样将引起频域的周期延拓，频域取样也将引起时域的周期延拓。**

□ 即**离散化的** $x[n]$ 需要用离散化的 $\cos(\omega n)$ 来表示，而这个信号的 $\omega$ 是周期的，所以系数 $c_k$ 也是周期的；

□ 离散化的 $\cos(\omega n)$ 配上系数求和  $\sum_k c_k \cos(\omega_k n)$ ，得出的一定是周期信号，想研究非周期信号，

需要用运算  $\int_{\Omega} c_{\Omega} \cos(\Omega n) d\Omega$

□ 注：此处每种情况少写了一种子情况，请自行完善。

□ 因此可以设想，如果同时对频域和时域取样，其结果是时域和频域的波形都变成离散、周期性的波形，从而我们可以利用级数这一工具，得到它们之间的离散傅立叶变换 **DFT**（或称离散傅立叶变换**DFT**）。

2024/11/26

41

## 后续学习

■ 后面我们将快速的连续学习三种傅立叶变换：

□ 实际上**4**种变换的本质、性质都是基本一致的。

□ 区别在于 $\sum_k$  ，  $\int_{\Omega}$  

□ 我们将在DTFT情况下讨论未曾证明的  $X[k] \Rightarrow x[n]$

□ 学习进度会相对较快

2024/11/26

42

## 连续时间傅立叶转换-1

- 定义 - 连续时间讯号  $X_a(t)$  ( a 表示 analog ) 的连续时间傅立叶转换 (Continuous-Time Fourier Transform, CTFT, ), 为:

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt$$

- CTFT 经常被用来讨论傅立叶频谱 (Fourier spectrum), 或简单而言，就是连续时间讯号的频谱。
  - 其实我们主要是希望有一个连续的频谱，DTFT也能做到。
- 注意：  $X_a(j\Omega)$  的输出自变量是？

## 连续时间傅立叶转换-2

- 定义：傅立叶转换  $X_a(j\Omega)$  的逆变换， $iCTFT$  为

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

通常被称为傅立叶积分 (Fourier integral)

- CTFT 转换对被表示为：

$$x_a(t) \xrightarrow{CTFT} X_a(j\Omega)$$

## 连续时间傅立叶转换-3

- $\Omega$ 是实数，且表示连续时间的角频率变量，单位为弧度。
- 一般而言，CTFFT 是  $\Omega$  的复数函数，即  $X_a(j\Omega)$  是复数，其中， $\Omega$ 的范围为  
 $-\infty < \Omega < \infty$
- 也可以表示为极坐标 (polar form) 形式：  $X_a(j\Omega) = |X_a(j\Omega)|e^{j\theta_a(\Omega)}$
- 其中  $\theta_a(\Omega) = \arg\{X_a(j\Omega)\}$
- $|X_a(j\Omega)|$ 被称为强度频谱 (magnitude spectrum)， $\theta_a(\Omega) = \arg(X_a(j\Omega))$ 被称为相位频谱 (phase spectrum)。两者均为  $\Omega$  的实数函数。

## 连续时间傅立叶转换-4

- CTFT 存在的条件：一般而言，当连续时间讯号  $x_a(t)$  满足 **Dirichlet 条件**，则  $CTFT X_a(j\Omega)$  存在。

- **Dirichlet 条件**

- (a) 在任何有限区间内，讯号  $x_a(t)$  仅存在有限个不连续和有限个最大值与最小值。
- (b) 讯号是绝对可积分 (absolutely integrable)，意即， $\int_{-\infty}^{\infty} |x_a| dt < \infty$
- 假若 Dirichlet 条件满足，则： $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$  会收敛到  $x_a(t)$ ，除了  $x_a(t)$  的不连续处。
  - 即满足  $x_a(t) \rightarrow X(j\Omega) \rightarrow x_a(t)$  的闭环
  - 注：后面会学到一个重要的反例，即闭环不存在
  - 我们也可以证明，假若  $x_a(t)$  是绝对可积分时，则  $|X_a(j\Omega)| < \infty$  证明了 CTFT 的存在性。

4624/11/26

## 能量密度频谱-1

- 一个有限能量连续时间复数讯号  $x_a(t)$  的总能量  $E_x$  为:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) x_a^*(t) dt$$

- 上述式子也可以表示为:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a^*(j\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega \right] dt$$

## 能量密度频谱-2

- 交换积分顺序，可以得到：

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a^*(j\Omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \right] d\Omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a^*(j\Omega) X_a(j\Omega) d\Omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(j\Omega)|^2 d\Omega\end{aligned}$$

- 因此  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(j\Omega)|^2 d\Omega$

4824/11/26

## 能量密度频谱-3

- 上述关系通常被称为有限
  - Parseval关系式说明了啥？
- 编程观察练习题：关于 $|X_a(\omega)|^2$
- 为什么频率的强度谱随着 $\omega$ ？

$$\begin{aligned} dE &= dE_k + dE_p \\ &= (\rho A V) A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \alpha(t - \frac{x}{u}) \right] \end{aligned}$$

表明：任一质元的总能量随时间作周期性变化，时而达到最大值，时而为零，说明任意质元都在不断的接受和放出能量。

意味着：**在有波传播的细棒中有能量在传播**  
把这样的波称作行波

——既传播振动形式又传播振动能量



## 能量密度频谱-4

- $|X_a(j\Omega)|^2$  被称为连续时间讯号  $x_a(t)$  的能量密度频谱，通常被表示为：
- $S_{xx}(\Omega) = |X_a(j\Omega)|^2$
- 在某一特定频率区间  $\Omega_a \leq \Omega \leq \Omega_b$  的能量  $|X_a(j\Omega)|^2$ ，可以经由下式积分而得到：

$$E_{x,r} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_a}^{\Omega_b} S_{xx}(\Omega) d\Omega$$

2024/11/26

## 有限频宽连续时间讯号-1

- 一个全频且有限能量之连续时间讯号，它的频谱分布在整个的频率范围  $-\infty < \Omega < \infty$ 。
- 有限频宽 (bandlimited) 连续时间讯号的频谱则是限制在频率范围  $-\infty < \Omega < \infty$  的一部分。
- 也就是时频对应关系的一种
- 从这个时间点开始，我们会学习从频率开始学习一个信号。

2024/11/26

## 有限频宽连续时间讯号-2

- 一个理想的有限频宽连续时间讯号，它在有限频率范围 $\Omega_a \leq |\Omega| \leq \Omega_b$ 之外的频谱值为零，意即：

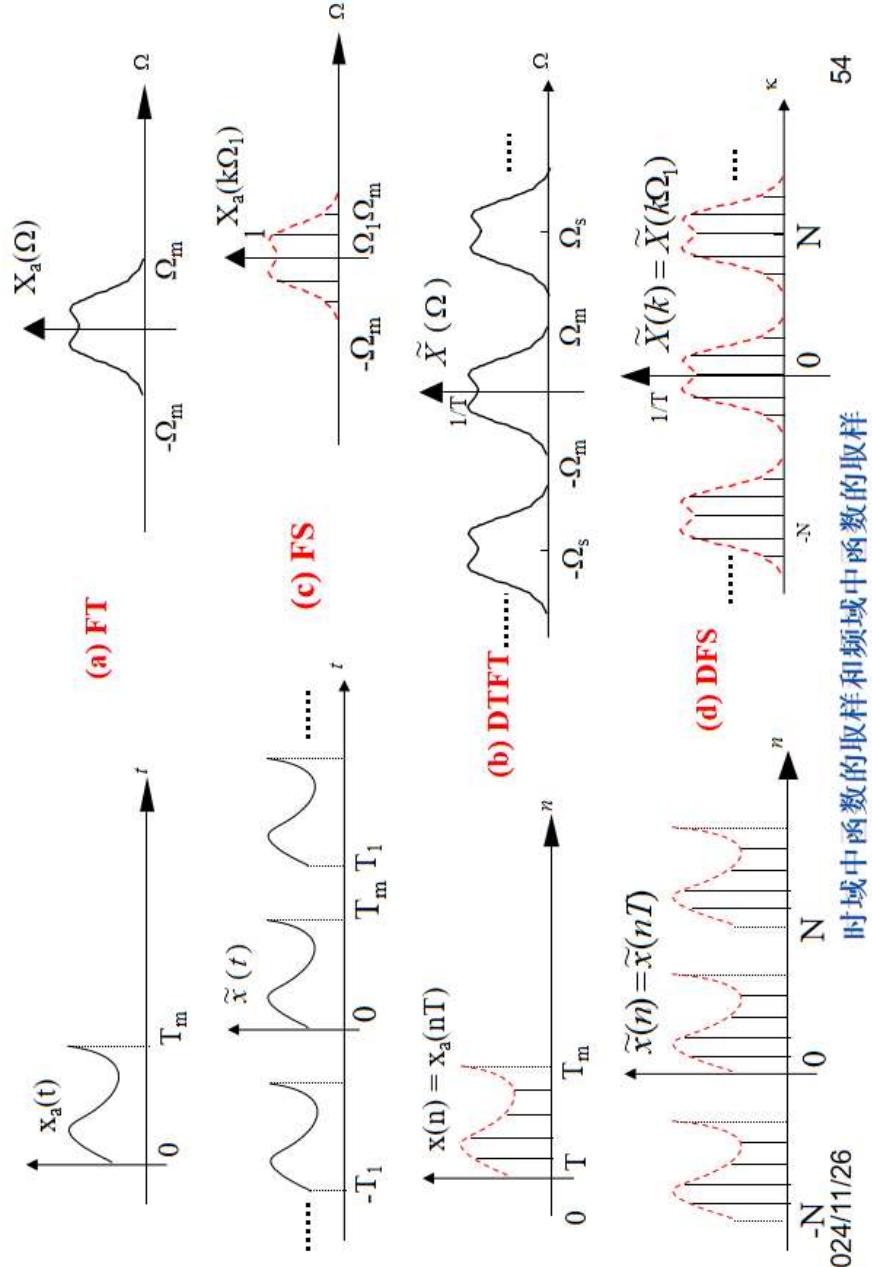
$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_a \\ 0, & \Omega_b < |\Omega| < \infty \end{cases}$$

- 然而，一个**理想的**有限频宽连续时间讯号在实际上是无法产生的。
  - 后面会对这个现象进行证明 (DTFT) 部分

## 有限频宽连续时间讯号-3

- 有限频宽连续时间讯号可以根据能量集中的频率范围来加以分类。
- 一个低通(**lowpass**)的连续时间讯号，其频谱只在 $|\Omega| \leq \Omega_p < \infty$ 的频率范围内，其中， $\Omega_p$ 被称为讯号的频宽。
- 一个高通(**highpass**)的连续时间讯号，其频谱只在 $0 \leq \Omega_p \leq |\Omega| < \infty$ 的频率范围内，其中，信号频宽是由 $\Omega_p$ 到 $\infty$ 。
- 一个带通(**bandpass**)连续时间讯号，其频谱只在 $0 \leq \Omega_L \leq |\Omega| \leq \Omega_h < \infty$ 范围内，其中 $\Omega_L \sim \Omega_H$ 是信号的频宽。

## 时域取样与频域取样



时域中函数的取样和频域中函数的取样

2024/11/26

54

# 再次回到4种变换的总结

形式	时间函数	频率函数
傅里叶变换 FT	连续 非周期	非周期 连续
傅里叶级数 FS	连续 周期( $T_0$ )	非周期 离散( $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ )
离散时间傅里叶变换 DTFT	离散( $T$ ) 非周期	周期( $\Omega_s = 2\pi/T$ ) 连续
离散傅里叶变换 (级数) DFT(DFS)	离散( $T$ ) 周期( $T_0$ )	周期( $\Omega_s = 2\pi/T$ ) 离散( $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ )

结论：

- ① 时域中函数取样~~离散~~ → (映射)  
频域中函数周期重~~复~~；
- ② 频域中函数取样 → (映射) 时  
域中函数周期重~~复~~；
- ③ 取样间隔 → (映射)  
周期 ( $2\pi/\text{间隔}$ )

● 离散时间函数的取样间隔：  $T_1$ ， 取样频率： $f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{1}{T_1}$

● 离散频率函数的取样间隔：  $F_0$ ， 时间周期： $T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  55

2024/11/26

## 离散时间傅立叶转换-1

- 定义 - 序列 $x[n]$ 的离散时间傅立叶转换 (Discrete-Time Fourier Transform,

DTFT) $X(e^{j\omega})$ 定义如下：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

- 请注意比较到目前为止，学到的三种傅立叶变换的符号
- 一般而言， $X(e^{j\omega})$  是 $\omega$ 的复数函数，可以表示为：
$$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + jX_{im}(e^{j\omega})$$
- $X_{re}(e^{j\omega})$  与  $X_{im}(e^{j\omega})$  分别表示  $X(e^{j\omega})$  的实数部分 (real part) 与虚数部分 (imaginary part)，且是  $\omega$  的实数函数。

## 离散时间傅立叶转换-2

- $X(e^{j\omega})$ 也可以表示为：

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

- 其中  $\theta(\omega) = \arg\{X(e^{j\omega})\}$
- $|X(e^{j\omega})|$ 称为强度函数 (magnitude function),  $\theta(\omega)$ 称为相位函数 (phase function)。
  - 两者均为 $\omega$ 的实数函数。
- 在很多应用中，傅立叶转换被称为**傅立叶频谱 (Fourier spectrum)**。
  - $|X(e^{j\omega})|$ 与 $\theta(\omega)$ 分别被称为强度频谱(magnitude spectra)和相位频谱(phase spectra)。
  - 其中强度频谱是绝大部分应用的研究对象

2024/11/26

## 离散时间傅立叶转换-3

- 对于一个实数序列  $x[n]$ ,  $|X(e^{j\omega})|$  与  $X_{re}(e^{j\omega})$  为  $\omega$  的偶函数,  $\theta(\omega)$  与  $X_{im}(e^{j\omega})$  为  $\omega$  的奇函数。
- 注意: 对于任意整数  $k$ , 有
$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j(\theta(\omega)+2\pi k)} = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$
- 即离散时间傅立叶转换的相位函数  $\theta(\omega)$  不是唯一的。
- 除非特别声明, 我们将假设相位函数  $\theta(\omega)$  被限制于:  $-\pi \leq \theta(\omega) < \pi$  (奇函数)
- 这个区间被称为 **主值 (principle value)**。

2024/11/26

多选题 1分

单位取样序列 $\delta[n]$ 的DTFT为:  $\Delta(e^{j\omega}) = ?$

- A  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega n}$
- B  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\omega n}$
- C  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta[t]e^{-j\omega t} dt$
- D 1
- E 0

2024/11/26

59

## 离散时间傅立叶转换-4

- 范例 2- 考虑因果序列  $x[n] = \alpha^n \mu[n]$ ,  $|\alpha| < 1$
- 它的 DTFT 为:

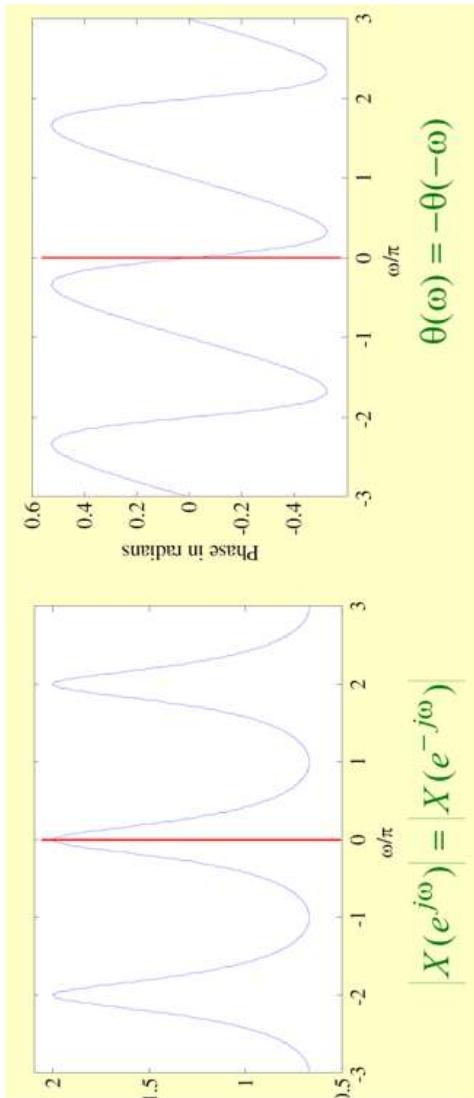
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

- 在推导过程中我们利用了  $|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha| < 1$  的性质。

0024/11/26

## 离散时间傅立叶转换-5

- DTFT  $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$ ,  $\alpha = 0.5$  的强度和相位函数如下图所示:



0024/11/26

## 离散时间傅立叶转换-6

- 序列  $x[n]$  的 DTFT  $X(e^{j\omega})$  是一个  $\omega$  的连续函数, 它亦是  $\omega$  的周期函数, 其周

$$\text{期为 } 2\pi : \quad X(e^{j(\omega_0+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega_0+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega_0 n} e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega_0 n} = X(e^{j\omega_0})$$

- 因此  $X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$  代表周期函数的傅立叶级数表示法。

- 结果, 傅立叶系数  $x[n]$  可以透过  $X(e^{j\omega})$  的傅立叶积分获得, 表示如下:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega l} \right) e^{j\omega n} d\omega$$

0024/11/26

## 虚假的证明

- 离散傅立叶变换快速算一下：

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- 令：

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j\omega_k n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} e^{j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{x}[n] \end{aligned}$$

0024/11/26

## 真正的证明

- 反向离散时间傅立叶转换 (inverse discrete-time Fourier transform) :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j\omega l} \right) e^{j\omega n} d\omega$$

证明：

- 如果上式中刮号内的连加能够均匀地收敛，意即如果  $X(e^{j\omega})$  存在，则右侧的积分与连加的顺序可以交换

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-\ell)} d\omega \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] \frac{\sin \pi(n-\ell)}{\pi(n-\ell)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \pi(n-\ell)}{\pi(n-\ell)} &= \begin{cases} 1, & n = \ell \\ 0, & n \neq \ell \end{cases} \\ &= \delta[n - \ell] \end{aligned}$$

0024/11/26

## DTFT-7：傅立叶变换的存在性

- 我们来进一步研究：什么样的序列可以做傅立叶变换？
- 收敛条件—下列的无穷序列

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

可能或可能不会收敛；令

$$X_K(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^K x[n]e^{-j\omega n}$$

若  $X(e^{j\omega})$  欲均匀收敛，则须  $\lim_{K \rightarrow \infty} |X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega})| = 0$

- 即：通过窗口化的方法来尝试解决部分不能做傅立叶变换的信号的傅立叶变换

## DTFT-8

- 现在，假若  $x[n]$  为绝对可加成序列，即  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$
- 对所有  $\omega$  而言
$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \right| < \infty$$
- 因此，对决定 DTFT  $X(e^{j\omega})$  的存在与否， $x[n]$  的绝对可加成性是一个充分条件。

□ 范例 - 序列  $x[n] = \alpha^n \mu[n]$  ( $|\alpha| < 1$ ) 是绝对可加成的，因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha^n| \mu[n] = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha^n| = \frac{1}{1-|\alpha|} < \infty$$

它的 DTFT  $X(e^{j\omega})$  会均匀收敛至  $1/(1 - \alpha e^{-j\omega})$

## DTFT-9：能量序列的DTFT存在性讨论：

- 能量序列的可加成性和DTFT存在性讨论：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right)^2$$

- 因此，一个绝对可加成序列的能量一定是有限的；但是一个有限能量的序列不一定是绝对可加成的。

□ 范例 - 序列  $x[n] = \begin{cases} 1/n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$

□  $x[n]$  为有限能量，并且等于  $E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$ ，但  $x[n]$  不是绝对可加成的  $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]| = \infty$

0024/11/26

## DTFT-10：能量序列的DTFT存在性讨论：

- 为了将这种非绝对可加成的有限能量序列 $x[n]$ 以 DTFT  $X(e^{j\omega})$  来表示，有必要考虑一种  $X(e^{j\omega})$  的均方收敛 (mean-square convergence)：

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

- 其中

$$X_K(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^K x[n] e^{-j\omega n}$$

- 此时，误差的总能量  $|X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega})|$ ,  $K \rightarrow \infty$  时，在所有的  $\omega$  处，其值趋于 0。
- 在这种情形下，当  $K \rightarrow \infty$  时，绝对误差  $|X(e^{j\omega}) - X_K(e^{j\omega})|$  不一定趋近于 0，因此 DTFT 不再是有界的 (bounded)。

0824/11/26

## DTFT-11：能量序列的DTFT存在性讨论：

- 关于前面工作的讨论说明：
- 1. 在所有的做不了DTFT的序列中（DTFT算出来趋于 $\infty$ ），我们特别定义了一种序列：不满足绝对可加成的能量序列，讨论其的DTFT变换。选择这种序列做特别分析原因是：
  - 它还是一种能量序列，DSP中最常见的序列；
  - 由于常见性，这种序列需要被做频谱分析；
  - 常见DTFT解决不了，新的解决方法提供了一种思路，借鉴给其他的信号（但是其他信号不多一一分析）

0924/11/26

## DTFT-12：能量序列的DTFT存在性讨论：

- 2. 计算方法：**窗口化**，计算一个窗口（有限长）的DTFT，然后扩展窗口至无限（需要长度）
- 3. 理论保证：这种方法的误差可能存在，但是其误差的能量却是趋于0的（平方收敛）
- 4. **重要：**
- 在理论上这种序列的DTFT是**不存在的**，我们在工程上使用**替代品**，**有限长窗口**内的DTFT替代了他；
- **理论上当这个窗口拓展至无限时**，误差的能量足够小（误差不足够小）；
- **实际上这个窗口不可能无限长**，所以工程上就带来**系统误差**。

2024/11/26

## 经常使用的 DTFT 转换对（作业）

序列	DTFT
$\delta[n]$	$\leftrightarrow 1$
$1$	$\leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\mu[n]$	$\leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$\mu[n], ( \alpha  < 1)$	$\leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$

2024/11/26

71

## DTFT 性质(作业2)

- DTFT 有许多重要的定理，这些在数字讯号处理中是核心的计算，非常有用的。
- 此处仅列出一些性质，并不全部加以证明。它们的证明是非常直接的。（作业）
- 后面的性质适用于所有四种傅立叶变换，我们不加区分（反倒会在多页间用来自不同教科书的表示，促使大家对这四种变换加以熟悉。）
- 证明时，各位同学可以任选一种傅立叶变换的公式，甚至实数傅立叶变换的方法，进行证明。

2024/11/26

# 傅立叶变换性质-1

## ■ 傅立叶变换的性质

□ 一般假定

■  $f(x) \rightarrow F(\omega)$ ,  $g(x) \rightarrow G(\omega)$

□ 奇偶虚实性

- $f(x)$ 为偶函数,  $F(\omega)$ 为实函数;
- $f(x)$ 为奇函数,  $F(\omega)$ 为虚函数

□ 线性性质

- $k f(x) \rightarrow k F(\omega)$ ;
- $f(x) + g(x) \rightarrow F(\omega) + G(\omega)$

□ 分析性质

- $f'(x) \rightarrow i\omega F(\omega)$ ;  $\int_{-\infty}^x f(x)dx \rightarrow \frac{1}{i\omega} F(\omega)$

2024/11/26

## 傅立叶变换性质-2

### □ 位移性质

- $f(x - a) \rightarrow e^{-i\omega a} F(\omega)$ ;
- $e^{-i\omega a} f(x) \rightarrow F(\omega - \varphi)$

### □ 相似性质

- $f(ax) \rightarrow \frac{1}{a} \cdot F(\omega/a)$ ;
- $\frac{1}{b} \cdot f(x/b) \rightarrow F(b\omega)$ 。

### □ 卷积性质(必证)

- $f(x) * g(x) \rightarrow 1/2\pi F(\omega)G(\omega)$ ;
- $f(x)g(x) \rightarrow F(\omega) * G(\omega)$

### □ 对称性质

- 正变换与逆变换具有某种对称性;
- 适当调整定义中的系数后，可以使对称性更加明显。

2024/11/26

表3.1：DTFT性质：对称关系(复数序列表)

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{\text{cs}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\}$
$j\text{Im}\{x[n]\}$	$X_{\text{ca}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\}$
$x_{\text{cs}}[n]$	$X_{\text{re}}(e^{j\omega})$
$x_{\text{ca}}[n]$	$jX_{\text{im}}(e^{j\omega})$

2624/11/26

表3.2：DTFT 性质：对称关系(实数序列表)

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X_{\text{re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{im}}(e^{j\omega})$
$x_{\text{ev}}[n]$	$X_{\text{re}}(e^{j\omega})$
$x_{\text{od}}[n]$	$jX_{\text{im}}(e^{j\omega})$
	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
	$X_{\text{re}}(e^{j\omega}) = X_{\text{re}}(e^{-j\omega})$
Symmetry relations	$X_{\text{im}}(e^{j\omega}) = -X_{\text{im}}(e^{-j\omega})$
	$ X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega}) $
	$\arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\}$

2624/11/26

表3.4：DTFT一般性质

Theorem	Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
	$g[n]$	$G(e^{j\omega})$
	$h[n]$	$H(e^{j\omega})$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(e^{j\omega}) + \beta H(e^{j\omega})$
Time-reversal	$g[-n]$	$G(e^{-j\omega})$
Time-shifting	$g[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} G(e^{j\omega})$
Frequency-shifting	$e^{j\omega_0 n} g[n]$	$G\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
Differentiation-in-frequency	$ng[n]$	$j \frac{dG(e^{j\omega})}{d\omega}$
Convolution	$g[n] \otimes h[n]$	$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
Parseval's Relation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) d\omega$	

2024/11/26

## 傅立叶变换性质-3

■ 傅立叶变换的性质证明（全部以DFT为例，使用实数傅立叶变换方法证明）

□ 奇偶虚实性

□  $x(x)$ 为偶函数， $X(\omega)$ 为实函数；

□ 证明：因为  $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n](\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N))$

□ 且由于  $\cos(2\pi kn/N)$  和  $\sin(2\pi kn/N)$  的周期性和对称性

□ 我们有

$$X[k] = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N/2} x[n]\cos(2\pi kn/N) + \sum_{n=-N/2}^0 x[n]\cos(2\pi kn/N) \right]$$
$$\quad \quad \quad - j \sum_{n=0}^{N/2} x[n]\sin(2\pi kn/N) + j \sum_{n=-N/2}^0 x[n]\sin(2\pi kn/N) \right]$$

2024/11/26

## 傅立叶变换性质-4

□ 证明(续): 因为 $x[n]$ 为偶函数, 所以

□ 故  $x[n] = -x[n]$ ;

$$\sum_{n=0}^{N/2} x[n]\cos(2\pi kn/N) = \sum_{n=-N/2}^0 x[n]\cos(2\pi kn/N); j \sum_{n=0}^{N/2} x[n]\sin(2\pi kn/N) = j \sum_{n=-N/2}^0 x[n]\sin(2\pi kn/N)$$

□ 则

$$X[k] = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N/2} x[n]\cos(2\pi kn/N) + \sum_{n=-N/2}^0 x[n]\cos(2\pi kn/N) \right]$$

□ 为偶函数

2024/11/26

## 傅立叶变换性质-3

### 说明：

- 实数傅立叶变换的证明方法几乎是最低效、最繁杂的证明方法
- 本证明采取这种方法，是为了更好的从定义层面深化理解傅立叶变换的意义
- 在已经理解傅立叶变换的情况下，强烈建议大家直接使用常见的4种定义公式来证明
- 同时实数傅立叶变换证明是为了给后面快速傅立叶变换讲解做好一定基础。

8024/11/26

## 傅立叶变换性质-5

- 傅立叶变换的性质证明（全部以DFT为例）  
– 位移性质

•  $x[n-a] \rightarrow e^{-jka}X[k]$  ;

证明：因为  $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$

则DFT 
$$\begin{aligned} DFT(x[n-a]) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-j2\pi k(n-a)/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-[j2\pi k(n-a)]/N} e^{-[j2\pi ka]/N} = e^{-[j2\pi ka]/N} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-[j2\pi k(n-a)]/N} \\ &= e^{-[j2\pi ka]/N} X[k] \end{aligned}$$

2024/11/26

## 傅立叶变换性质-6

$$\begin{aligned} \text{则DFT } \quad DFT(x[n-a]) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{[j2\pi k(n-a)]/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-[j2\pi k(n-a)]/N} e^{-[j2\pi ka]/N} \\ &= e^{-[j2\pi ka]/N} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-a] e^{-[j2\pi k(n-a)]/N} \\ &= e^{-[j2\pi ka]/N} X[k] \end{aligned}$$

8024/11/26

# DTFT 一般性质

Theorem	Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
	$g[n]$	$G(e^{j\omega})$
	$h[n]$	$H(e^{j\omega})$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(e^{j\omega}) + \beta H(e^{j\omega})$
Time-reversal	$g[-n]$	$G(e^{-j\omega})$
Time-shifting	$g[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} G(e^{j\omega})$
Frequency-shifting	$e^{j\omega_o n} g[n]$	$G\left(e^{j(\omega - \omega_o)}\right)$
Differentiation-in-frequency	$ng[n]$	$j \frac{dG(e^{j\omega})}{d\omega}$
Convolution	$g[n] \otimes h[n]$	$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
Parseval's Relation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) d\omega$	

8024/11/26

# 傅立叶变换

## ■ 傅立叶变换的意义

### □ 数学意义

- 从一个函数空间(集合)到另一个函数空间(集合)的映射；
- $f(x)$ 称为变换的原函数(相当于自变量)， $F(\omega)$ 称为象函数。

### □ 应用意义

- 把任意函数分解为简单周期函数之和， $F(\omega)$ 的自变量为频率，函数值为对应的振幅。

### □ 物理意义

- 把一般运动分解为简谐运动的叠加；
- 把一般电磁波(光)分解为单色电磁波(光)的叠加。

### □ 物理实现

- 分解方法：棱镜光谱仪、光栅光谱仪；
- 记录方式：(用照相底版)摄谱仪、(用光电探测器)光度计。