

1

## 频谱分析！

2024-12-17

# 时域数字信号处理 (8)

# 傅立叶变换

- 离散时间傅立叶变换的数学模型
- 傅立叶变换的性质
- 傅立叶变换的应用
- 频谱分析
- 关于狄拉克函数，频率响应
- 滤波概述

2024/12/17

## 频谱分布

**例：**怎样得到 DFT  $X(k)$  的其他样本（不同的频谱）？

解：频谱区间在  $[-\pi, \pi]$  上，切分成  $N$  个点， $\frac{2\pi}{N} \cdot k$  显然，如果我们希望采样频率更小一些，应增加 N 的长度。

■ 有两种方法，

- 一种是采样时对时间序列就采样更多的样本（内插）；
- 另一种是在时间序列后面添加一定长度的零（补零），在实际中，为了得到一个较密的频谱，这种运算是必要的。

2024/12/17

## 频谱分布

- (a) 给  $x[n]$  后附加 4 个零得到一个 8 点序列。

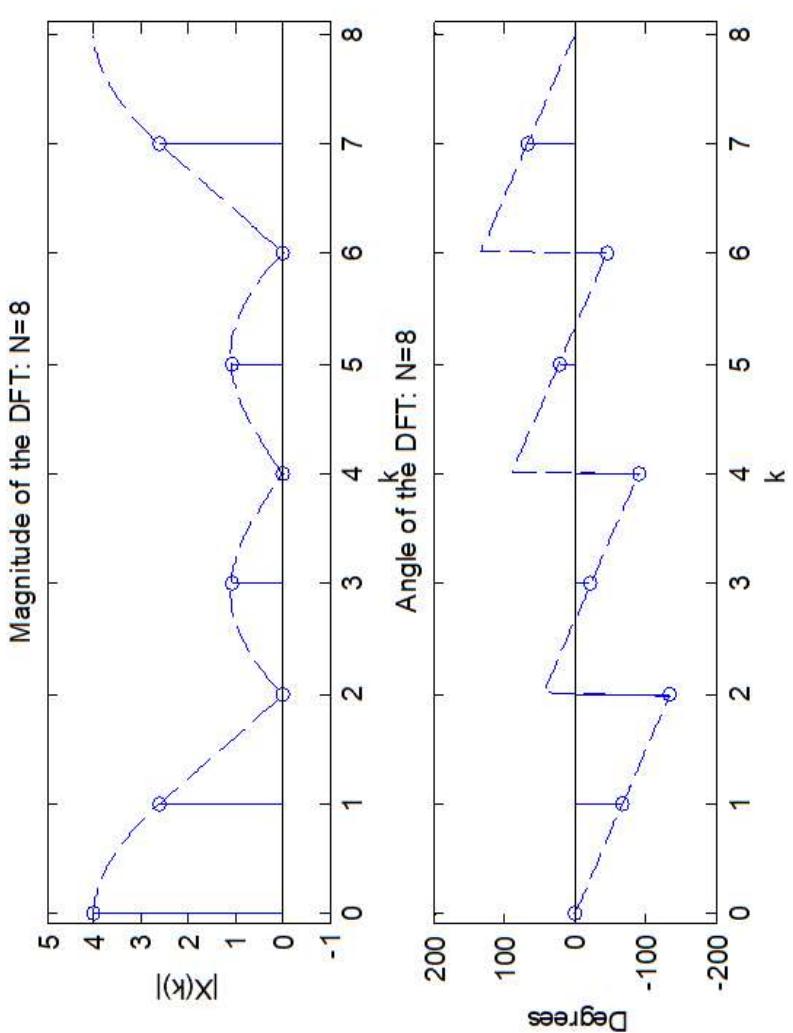
$$x[n] = \{1, 1, 1, 1\} \Rightarrow x[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

- 设  $X_8(k)$  为一 8 点 DFT，则

$$X_8(k) = \sum_{n=0}^7 x[n]W_8^{nk}; k = 0, 1, 2, \dots, 7. W_8 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

- 在这种情况下，频率密度为  $W_1 = 2\pi/8 = \pi/4$ 。

## 频谱分布



2024/12/17

## 频谱分布

- (b) 更进一步，给  $x(n)$  填充 12 个零，变成一个 16 点序列，即：

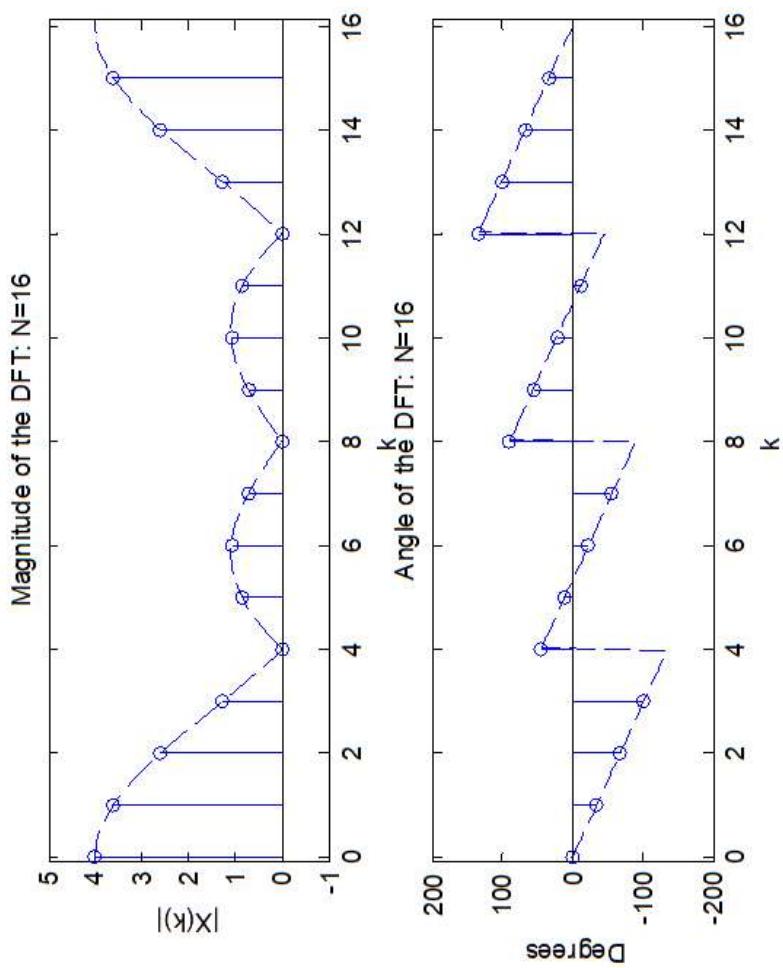
$$x[n] = \{1,1,1,1\} \Rightarrow x[n] = \{1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$$

$$\blacksquare X_{16}(k) = \sum_{n=0}^{16} x[n] W_{16}^{nk}; k = 0, 1, 2, \dots, 15; \text{ s.t. } W_{16} = e^{-j\pi/8}$$

- 在这种情况下，频率密度为  $W_1 = 2\pi/16 = \pi/8$ 。

0024/12/17

## 频谱分布



2024/12/17

7

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_N^{0,0} & w_N^{1,0} & \cdots & w_N^{(N-1),0} \\ w_N^{0,1} & w_N^{1,1} & \cdots & w_N^{(N-1),1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_N^{0,(N-1)} & w_N^{1,(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1),(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

8024/12/17

## 频谱分布

■ 结论：基于以上两个例子，可以得到以下结论。

1. 补零会导致较长的 DFT，它会给原序列的DFT变换提供间隔更密的样本。

- 比如：为精确地画出离散时间傅氏变换  $X(e^{j\omega})$ ，现在只有 4 点 DFT  $X_4(k)$ 。这是因为  $x[n]$  仅有 4 个非零样本，因此，可通过填零得到  $X_8(k)$ 、 $X_{16}(k)$  等等，用它们来填充  $X(e^{j\omega})$  的值。

- 2. 填零运算提供了一个较密的频谱和较好的图示形式，但因为在信号中只是附加了零，而没有增加任何新的信息，因此，它不能提供更高分辨率的频谱。
- 3. 为了得到更高分辨率的频谱，需要获得更多的数据。其他的先进方法则是利用边缘信息和非线性技术。

2024/12/17

## 频谱分布

**例：**为了说明高密度频谱和高分辨率频谱之间的区别，考察序列

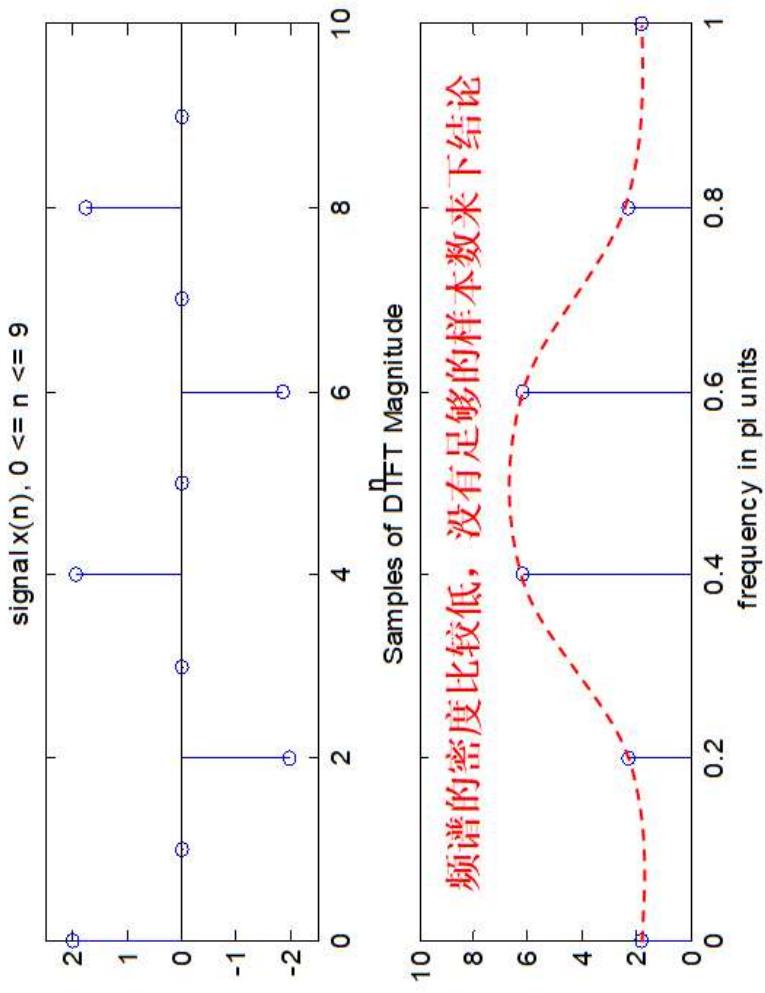
$$x[n] = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

求出它基于有限个样本的频谱。

- (a) 当  $0 \leq n \leq 10$  时，确定并画出  $x[n]$  的离散傅氏变换。
- (b) 当  $0 \leq n \leq 100$  时，确定并画出  $x[n]$  的离散傅氏变换。

2024/12/17

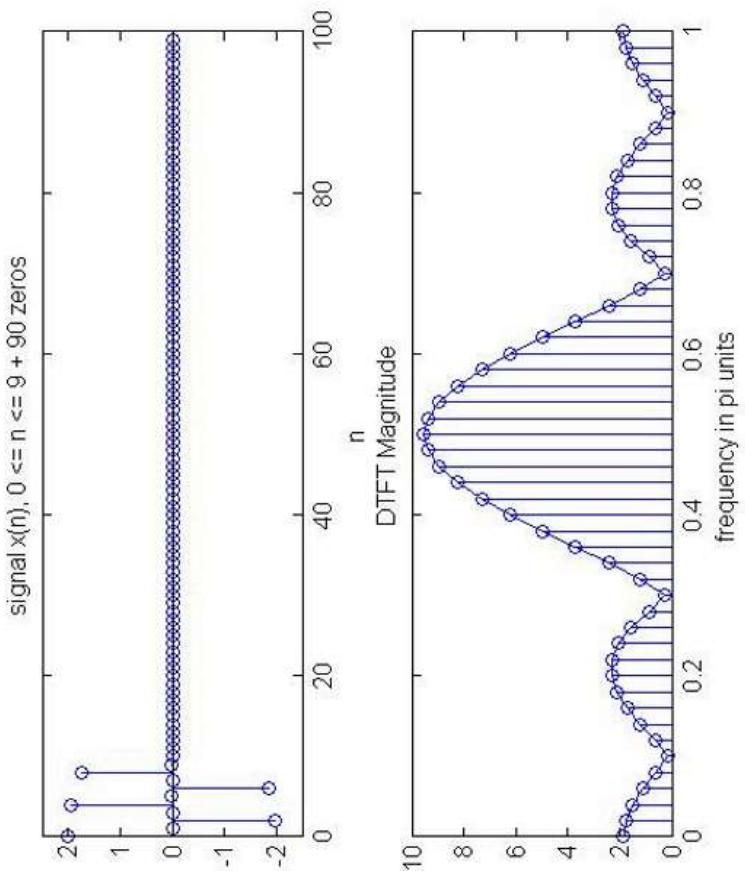
## 频谱分布



2024/12/17

11

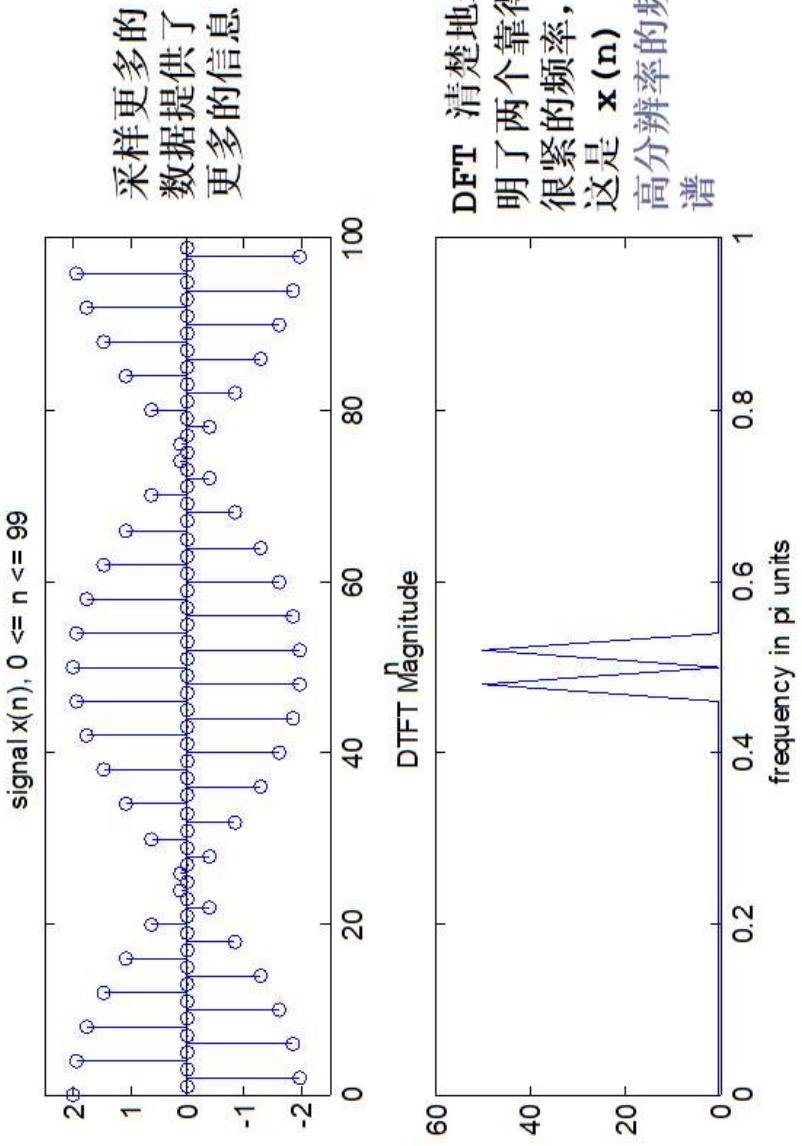
## 频谱分布



2024/12/17

12

## 频谱分布



2024/12/17

13

## 频谱分布

- 结论：基于以上例子，可以得到以下结论。

- 1. 补零会导致较长的DFT，它会给原始序列的离散时间傅氏变换提供间隔更密的样本，但是不能再频率谱上提供额外的信息。
- 2. 高分辨率频谱需要我们提供更多的，非零的样本点。这些样本点的来源可能是扩大时域取值范围（如上述例子中的第二个示范），或者来自于内插取值（相当于生成新的样本）。

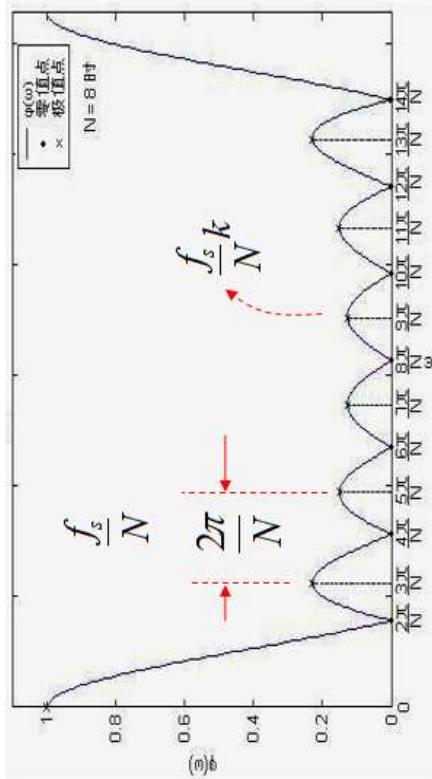
2024/12/17

## 频谱分布-频谱的中心线和频宽关系

■ DFT 从整体上可看成是由窄带相邻滤波器组成的滤波器组

- DFT 的每个分量  $X(k)$  可看成是窄带滤波器的输出，此窄带滤波器的中心位于数字频率  $2\pi k/N$  弧度，带宽为  $2\pi/N$ 。

□ 此概念的一个典型应用是数字音频压缩中的分析滤波器，例如 AC3 和 MPEG Audio 都是如此。



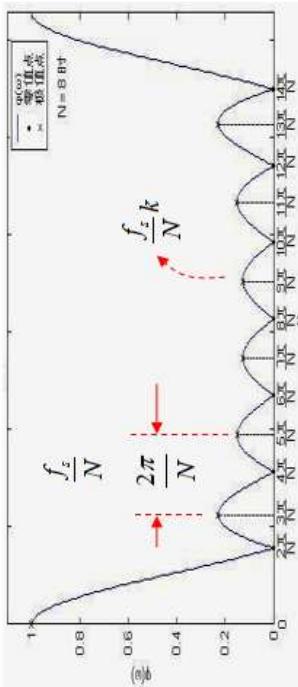
2624/12/17

## 频谱分布

- 那么对于每一个带宽为 $2\pi/N$ 的滤波器，他在现实中（时域）上输出的波的频率是多少呢？

$$\Omega = k\Omega_0 = \frac{2\pi}{NT_1} k = \frac{2\pi f_s}{N} k = 2\pi f$$

$$f = \frac{f_s k}{N}$$



2024/12/17

## 频谱分布

### ■ 分辨率（子带带宽）：

- N 点 DFT 覆盖了 0 到  $f_s$ （取样频率，对应  $[-\pi, \pi]$ ）的频率范围。频率取样点以  $f_s/N$  为间隔。
- 因此，频率取样点以  $f_s/N$  为间隔。该频率间隔称为 DFT 的频率分辨率，它描述了 DFT 分辨相邻信号频率的程度。
- 频率间隔越小，分辨率越好；间隔越大，DFT 分辨率越差。

2024/12/17

## 例题

- 假设一个采样是10000hz的信号，长度是100个点，假设有两个信号分别是2900hz和2950hz，那么请回答

答

- 1) 在当前情况下采集了多长时间的信号
  - 2) 在任意DFT中的处理的频率上限是多少，这当前采样下两个信号又对应多少hz
  - 3) 在当前DFT中能否分辨或者分开处理这两个信号
  - 4) 假设在当前DFT (N=100) 中，K=70的系数放大了2倍，请问对应现实中哪个频率受到了增强？
- 
- 1) 100个点，采样是10000hz，即每秒采样10000个点，所以采样是 $100/10000=0.01$ 秒
  - 2) 任意DFT中，频谱是0-1hz或者-0.5-0.5hz；当前采样率下这两个信号  $2900/10000=0.29$ hz 以及  $0.295$ hz

2024/12/17

## 例题

■ 假设一个采样是10000hz的信号，长度是100个点，假设有两个信号分别是2900hz和2950hz，那么请回答

答 3) 在当前DFT中能否分辨或者分开处理这两个信号

■ 3) 采了100个点，所以频谱分辨率是 $1\text{Hz}/100=0.01\text{hz}$

$$\text{或者实数傅里叶变换 } \omega_k = \frac{2\pi}{100} k \quad f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = k/N = 0.01 * k$$

■ 所以我们只能分辨0.01频率间隔的信号，而0.295hz和0.29hz属于同一个区间，无法分辨或处理

■ 如果需要处理，增加采样频率是不行的，因为那样两个信号更小，只会更加落入同一个区间

例如变成20000Hz，则两个信号分别变成0.1975Hz 和 0.195Hz

■ 应该增加N即分辨率，例如采样1000个点（对应0.1秒钟）

此时间隔变成  $1\text{Hz}/10000 = 0.001\text{ Hz}$ ，此时两个信号分别在  $0.295 = \frac{1}{N}k = \frac{1}{1000}k, k = 295$  和

$k = 200$  两个系数上

2024/12/17

## 例题

- 假设一个采样是1000hz的信号，长度是100个点，假设有两个信号分别是2900hz和2950hz，那么请回答
- 答

- 4) 假设在dft中， $k=70$ 的系数放大了2倍，请问对应现实中哪个频率受到了增强？

- 最后， $k=70$ . 对应0.7hz ( $1/100*70$ ) 数字频率，所以对应现实，反向归一化， $0.7*10000=7000\text{hz}$ 的信号加上了2倍
- 对吗？错，易错题！

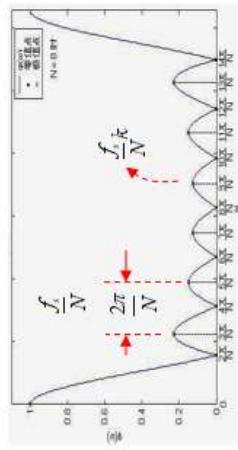
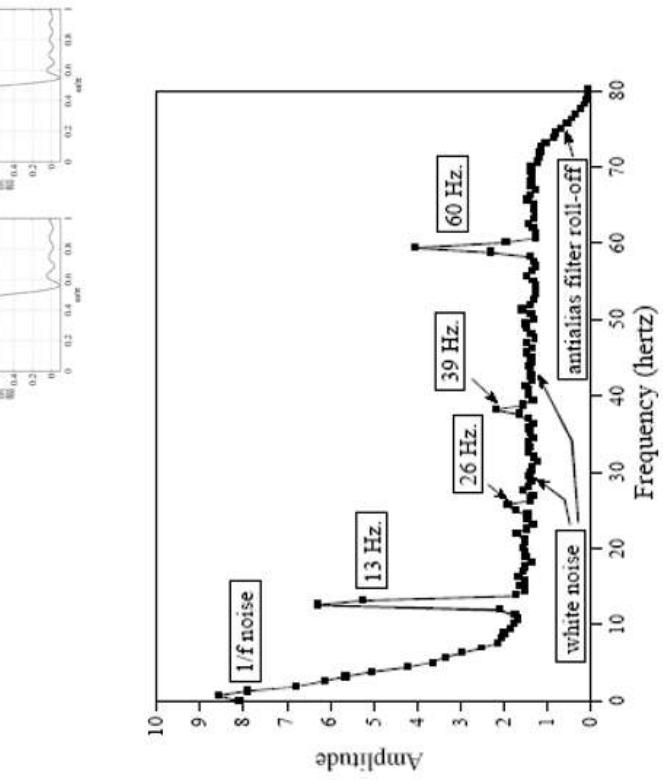
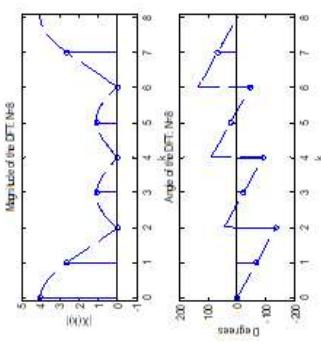
- 应该是  $k=30$  ( $100-70$ ) 对应的频率3000hz 放大2倍

- 注：同理，想想负频率的认知

2024/12/17

# 频谱分布

## ■ 傅立叶变换的几种频域表示法



2024/12/17

## 频谱分布

- 分辨率（子带带宽）
- 假定取样频率保持不变，当取样点数量越大时，DFT 效果就会越好，可获得频谱的许多细节。
- 从滤波器组的角度看，分辨率好的 DFT 是由大量非常窄的带通滤波器构成的。

2024/12/17

## 频谱分布

### ■ 滤波器的中心频率

■ DFT 分量  $X(k)$  位于以下频率处:  $f = k \frac{f_s}{N}$

■ 如果画出对频率  $f$  (Hz) 而不是对  $k$  的频谱，则更容易从实际角度解释 DFT 频谱。

■ 当  $k = N/2$  时,  $f$  到达了  $f_s/2$  奈奎斯特频率。因而， **$k = 0$  到  $k = N/2$  的DFT 点携带了 DFT 全部必要的幅度和相位信息。**其余点只是基带重要信号频率的镜像副本，是取样的人为结果。即幅度频谱是周期性的偶对称。

## 频谱分布

■ 例：为了体会 DFT 的滤波器组解释， $x(t)$  由两个余弦信号和随机噪声构成：

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{16}\right) + \cos\left(\frac{2\pi 3t}{8}\right) + Rand(t)$$

■ 取样频率  $f_s = 6.4Hz$ 。请分析其频谱。

□ 解：  $x(t)$  包含两个频率  $1/16Hz$  和  $3/8Hz$ ，以  $6.4Hz$  取样后，相应的数字频率由  $\omega = \Omega T = 2\pi f/f_s$ ，分别为  $\omega_1 = 2\pi/102.4$  和  $\omega_2 = 6\pi/51.2$  弧度。

□ 则在  $40$  秒内以  $6.4Hz$  进行取样，共得  $40 \times 6.4 = 256$  个取样点。

$$x(n) = \cos(nw_1) + \cos(nw_2) + Rand(n)$$

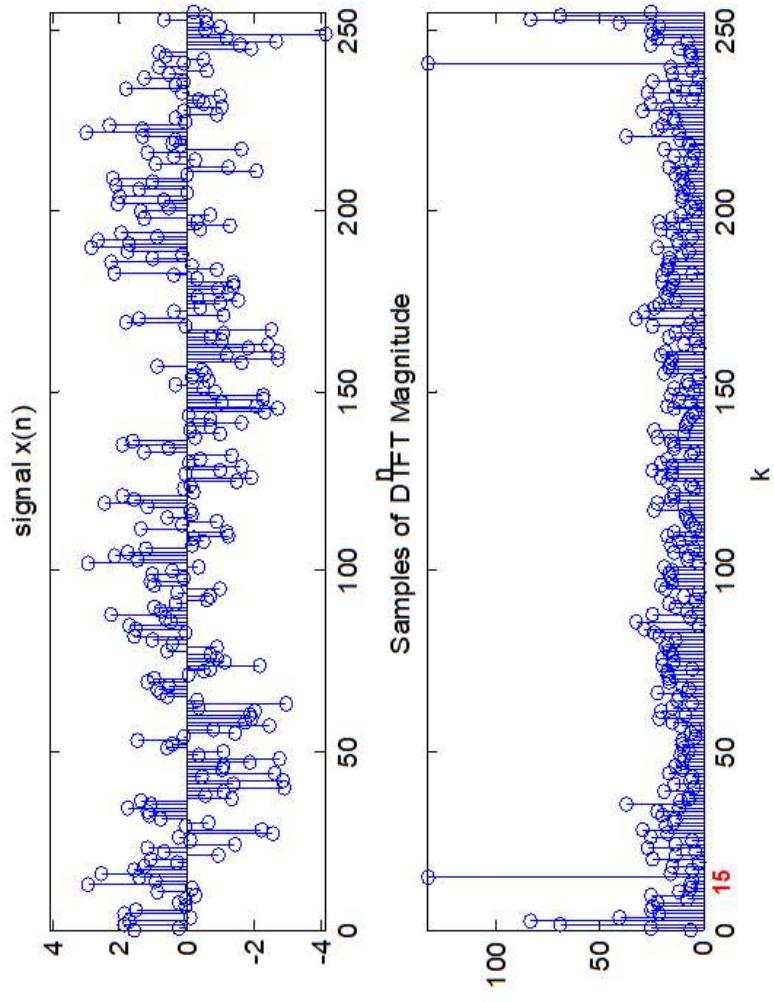
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{102.4}n\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{51.2}n\right) + Rand(n)$$

2024/12/17

## 频谱分布

- 在上图中随机噪声采用的是正态分布的高斯白噪声 (`randn` 函数) , 由于白噪声信号中所有频率的贡献均相等, 所以白噪声频谱近似平坦。
- 对于  $N = 256$  点DFT, 每个标号  $k$  对应于数字频率  $2\pi k / 256$  弧度。
  - 由于 DFT 可以看作一组相邻窄带滤波器构成, 每个滤波器以数字频率  $2\pi k / 256$  弧度为重心。
  - 因而频谱峰值应位于  $2\pi k / 256 = 2\pi / 102.4$  和  $2\pi k / 256 = 6\pi / 51.2$ , 即  $k = 2.5$  (非整数) 和  $k = 15$  (整数) 处。由于  $k$  必须是整数,  $k = 2.5$  处的峰值又分成  $k=2$  和  $k=3$  处的两个小峰。

## DFT 定义：DFT 频谱



2024/12/17

26

## 频谱分布

- 当 DFT 变换的长度  $N$  是多个数字频率公倍数的整数倍时，即数字频率正好位于子带滤波器的中心频率上时，则得到理想的谱线。
- DFT 是在频谱中对连续频谱进行取样 (DTFT->DFT)，因此DFT 不能超过 DFT 频率分辨率所允许的范围而去准确定位频率。
- 即当信号谱线所在位置与 DFT 频率分辨率位置保持一致时，则能准确定位此谱线；当DFT 中没有频率与所分析信号的重要频率相符时，DFT 就将导致真实频谱的模糊。

2024/12/17

## 频谱分布

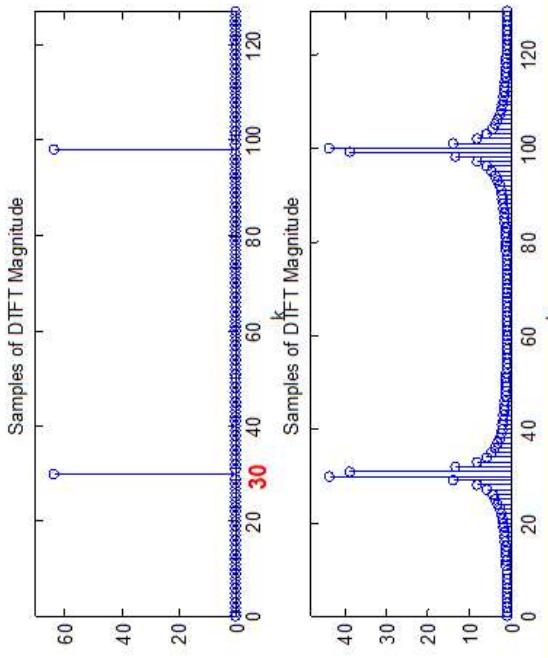
例：以  $256\text{Hz}$  取样频率对信号  $x(t) = \sin(120\pi t)$  取样，得到离散信号  $x(n)$ ，计算其频谱。

解：

- 数字频率： $\omega = \frac{2\pi f}{f_s} = \frac{2\pi \times 60}{256}$
- 数字信号： $x(n) = \sin(\frac{2\pi \times 60}{256}n)$
- 数字周期： $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{256}{60} = \frac{64}{15}$
- 数字周期为 64，覆盖了 15 个模拟信号周期。

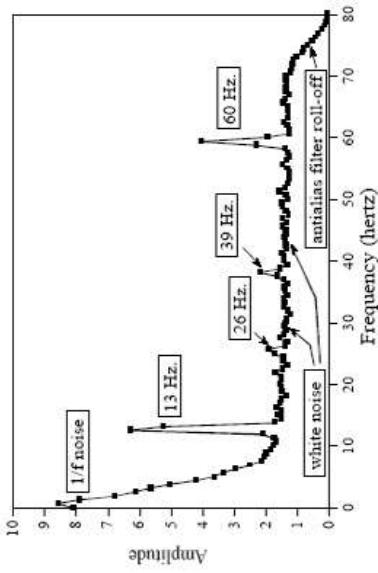
2824/12/17

## 频谱分布



- 对上述离散信号进行  $N=128$  和  $N=130$  点DFT，因为  $128$  是  $64$  的整数倍（ $2$ 倍），从图中看， $128$ 点DFT 的幅度频谱中有两个理想尖峰，第二个尖峰是第一个的镜像，频谱中的理想尖峰就标志着正弦的频率。
- 而当  $N=130$  不是该数字信号的数字周期 $64$ 的整数倍，尖峰变宽并变小了，这就是频谱模糊现象。

## 频谱分布



- 关于白噪声，它包含了等量的不同频率的波，就好像均匀合成的白光一样。这就导致了这个噪声，在时间域，对于各个样本点之间是无关的（正交）。故此，了解到当前样本上的噪音，对于分析下一个样本上的噪音毫无帮助。
- 现实中关于白噪声的例子：移动电话给喇叭带来的干扰。

2024/12/17

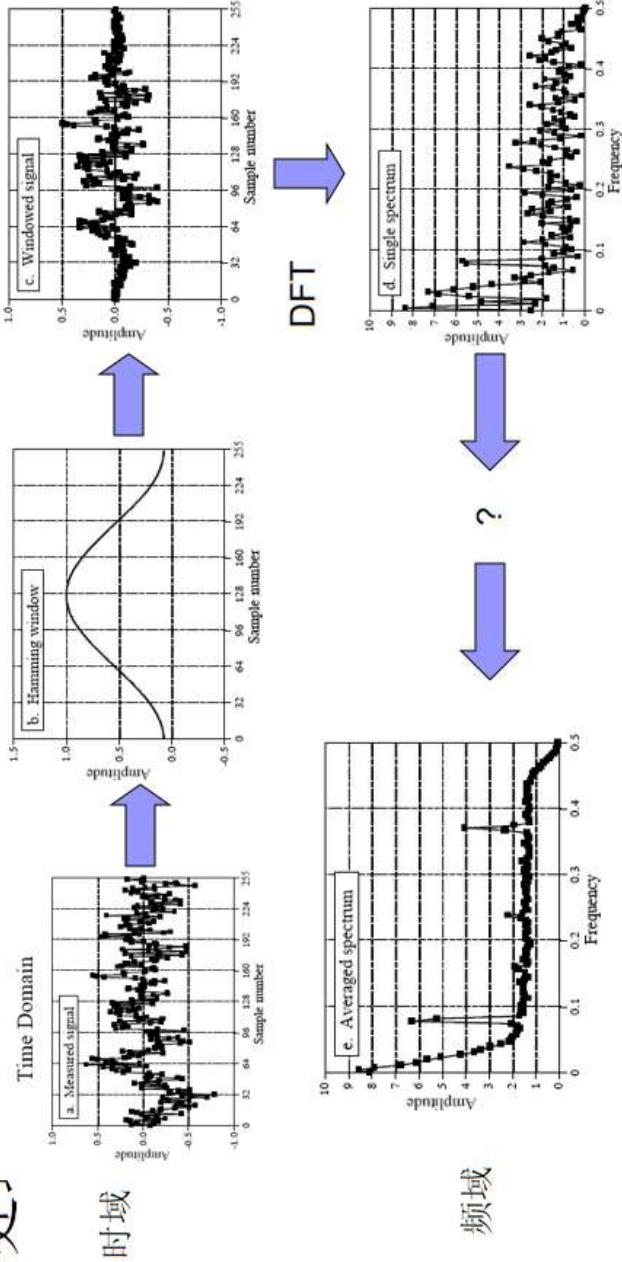
## 频谱分布

- 频域系数的处理。
- 频域上的系数，也可以使用时域方法来进行处理。
- 我们来分析几个例子：
- 频域上的加减法，数乘法，（可不可调制？），时移，卷积。

2024/12/17

## 频谱分布

### ■ 应用处的布



2024/12/17

## 频谱分布

■ 可以应用的实际练习（推荐）

■ 1) 语音的频谱分析

□ 基于语音分析的频谱识别

■ 2) 对于图像高频噪声分析

□ 基于图像高频噪声的相机指纹认定

■ 在应用上，我们会有静态数据的滤波（加强）与实时滤波（动态的）。

□ 图像属于静态的，我们可以通过频域处理来实现滤波

□ 而语音等，属于动态的，我们必须通过实时的操作来进行滤波。故而在频域上使用低通、高通，带通滤波器就不再可行了。

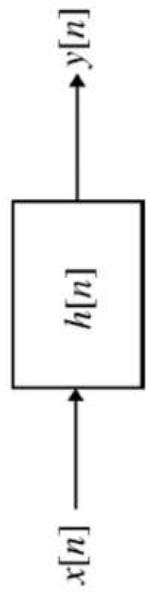
## 频率响应(Frequency response)-1

- 实际上，多数离散时间讯号可以表示成许多不同角频率离散弦波讯号的线性组合。
- 因此，若知道单一弦波讯号的  $LTI$  系统输出响应，则我们可以利用系统的重迭性质(*superposition property*)来得到系统对更复杂讯号的输出响应。
- **结论1：**  $LTI$  系统的一个重要性质是：可以找到某种输入讯号，我们称为特征函数(*eigenfunction*)，其输出讯号为输入讯号乘上一个复数常数。
- 在此，我们考虑一个特征函数作为输入。

2024/12/17

## 频率响应-2

■ 考虑一个具备脉冲响应  $h[n]$  的离散时间 LTI 系统，如下所示：



■ 其时域上的输入-输出关系可以藉由卷积来描述，如下所示：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

## 频率响应-3

■假设**LTI** 系统输入是如下形式的一个复数指数组序列  $x[n] = e^{j\omega n}$ ,  $-\infty < n < \infty$

■其输出为:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}$$

令

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

则

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = H(e^{j\omega})x[n|\omega]$$

2624/12/17

## 频率响应-4

- 对于一个复数指数的输入讯号  $e^{j\omega n}$ , 离散时间 LTI 系统的输出亦是一个相同频率的复数指数讯号, 乘上一个复数常数  $H(e^{j\omega})$ 。即  $e^{j\omega n}$  是此系统的一个特征函数。
- $H(e^{j\omega})$  被称为离散时间 LTI 系统的频率响应 (frequency response)。
- $H(e^{j\omega})$  提供系统在频域的表示法。
- $H(e^{j\omega})$  是此系统脉冲响应  $\{h[n]\}$  的 DTFT。

2024/12/17

## 频率响应-5

- 一般而言， $H(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的复数周期函数，周期为  $2\pi$ 。可以被表示成实部和虚部

$$H(e^{j\omega}) = H_{re}(e^{j\omega}) + jH_{im}(e^{j\omega})$$

- 或者被表示成强度与相位
- $$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$
- 其中  $\theta(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$

3824/12/17

## 频率响应)应-6

■ 频响说明： $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$

- 1. 由公式可以看到，频响来自LTI系统的 $h(k)$ ，所以是系统特定的。
- 2. 频响是LTI系统的特性，但是是由 $h(k)$ 的DTFT计算得来的。
- 3.  $h(k)$ 是一个序列，而 $H(e^{j\omega})$ 也是一个序列，横轴是 $\omega$ ，表明当LTI系统接收到一个角速度为 $\omega$ 的信号时，该给出什么样的处理。
- 4. 由 $H(e^{j\omega})$ 的定义可知，对于输入 $e^{j\omega n}$ ，输出时 $|H(e^{j\omega})|e^{j(\omega n + \theta_{\omega,h})}$ ，所以LTI系统对于一个正弦信号，会放大 $|H(e^{j\omega})|$ ，会平移 $\phi_{\omega,h}$ ，但不会改变输入信号的频率！

3924/12/17

## 频率响应-7

- 相比较卷积表示法，

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- 使用频率响应表示法，更能表现系统的整体性和目的性

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- 但是：脉冲响应卷积表示法对所有信号适用，而频响表示法要求输入信号必须是正余弦信号

2024/12/17

## 频率响应-7

■ 相比较卷积表示法，

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

■ 使用频率响应表示法，更能表现系统的整体性和目的性

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

■ 但是：脉冲响应卷积表示法对所有信号适用，而频响表示法只适用于正弦信号

## 频率响应-8

- 函数  $|H(e^{j\omega})|$  被称为离散时间 LTI 系统的强度响应 (magnitude response), 函数  $\theta(\omega)$  则被称为离散时间 LTI 系统的相位响应 (phase response)。
- 在许多应用中, 离散时间系统的设计规格可以表示在强度响应、相位响应或是两者。

2024/12/17

## 频率响应-9

- 在一些情形下，强度函数会以分贝 (decibel) 来详加规范，其定义如下：

$$G(\omega) = 20\log_{10} |H(e^{j\omega})| \quad dB$$

- 其中， $G(\omega)$  被称为增益函数 (gain function)

- 增益函数的负值

$$A(\omega) = -G(\omega)$$

- 被称为衰减 (attenuation) 或损失函数 (loss function)。

## 频率响应-10

- 注意：强度和相位函数是  $\omega$  的实数函数，而频率响应则为  $\omega$  的复数函数。
- 对于以实数脉冲响应  $h[n]$  来表示的离散时间系统，从表 3.2 可知，强度函数是  $\omega$  的偶函数，也就是：

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

- 而相位函数则是  $\omega$  的奇函数，也就是：  $\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$

2024/12/17

## 频率响应-11

■ 计算下列系统的脉冲响应：

1)  $h(n) = [1, 0, 1], n = -1:1$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = h(-1) \cdot e^{-j\omega(-1)} + h(1) \cdot e^{-j\omega 1} = 2\cos\omega$$

2)  $h(n) = [1, 0, -1], n = -1:1$

$$H(e^{j\omega}) = h(-1) \cdot e^{-j\omega(-1)} + h(1) \cdot e^{-j\omega 1} = 2j\sin\omega$$

3) 已知系统  $H(e^{j\omega}) = 2\cos 2\omega, \求 h(n)$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j2\omega(1)} \cdot 1 + e^{j2\omega(-1)} \cdot 1$$

所以  $h(n) = [1, 0, 0, 0, 1], n = -2:2$

## 频率响应-12

- 同样地，对于实数脉冲响应  $h[n]$ ,  $H_{re}(e^{j\omega})$  是偶函数，而  $H_{im}(e^{j\omega})$  是奇函数。
- 范例 - 我们把M点移动平均滤波器当做-一个系统来分析，其脉冲响应如下：

$$h[n] = \begin{cases} 1/M, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 1) 理解脉冲响应
- 2) 频域上的M点移动滤波器又被称为低通滤波器，为什么？

## 频率响应-13

■ M 点移动平均滤波器，

$$h[n] = \begin{cases} 1/M, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

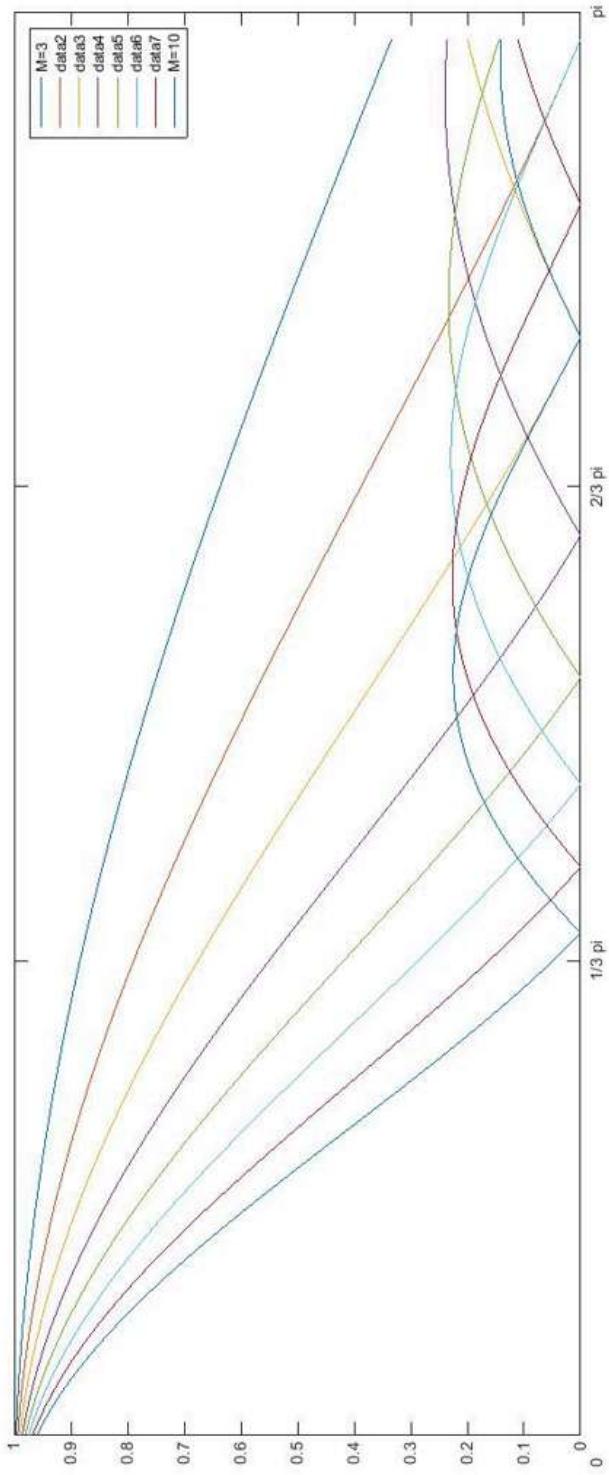
■ 其频率响应如下：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jn\omega}$$

2024/12/17

## 频率响应-14

■ 小小的数学变换:  $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} - \sum_{n=M}^{\infty} e^{-j\omega n} \right)$



2024/12/17

## 频谱分析

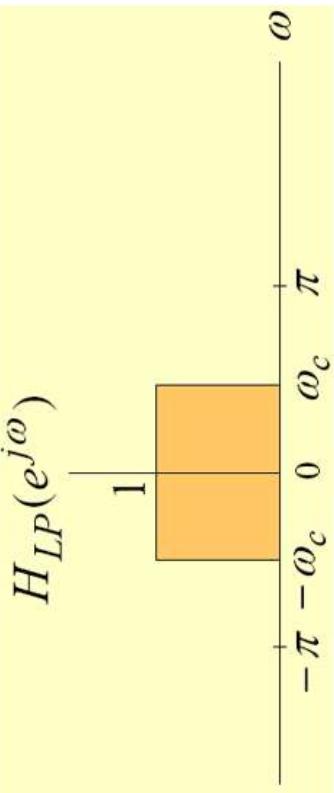
- 之前的学习中，我们都是先拿到一个时域信号 $x[n]$ ，再讨论他的傅立叶变换（频率变换）
- 这次，我们直接先拿到一个频率上的信号，然后观察他的时域表现。
  - 原因：频率滤波=一个特定的信号在频率相乘=对应时域信号卷积→实时处理（无限长）信号
- 换而言之，我们需掌握从频率信号认知时间序列的能力

4924/12/17

## 频率上的信号1

- 范例 - 考虑下列 DTFT: 这是一个理想的低通滤波器: 原因:

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



2024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛

- $H_{LP}(e^{j\omega})$ 对应的反向 DTFT 为:

$$\begin{aligned} h_{LP}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{j\omega_c n}}{jn} - \frac{e^{-j\omega_c n}}{jn} \right) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

- $h_{LP}[n]$ 的能量值为  $\omega_c/\pi$ 。因此,  $h_{LP}[n]$ 是一个有限能量的序列, 但它却不是绝对可加成的。

- 这句话的意思是说,  $h_{LP}[n]$ 做不了傅立叶变换, 尽管它是由  $H_{LP}(e^{j\omega})$ 逆变换而来; 即:

- 我们想找到  $H_{LP}(e^{j\omega})$ 对应的时域信号, 用来做时域卷积;
- 我们通过逆变换公式找到了  $h_{LP}[n]$ , 但是发现这个信号不能变成我们最初想要的  $H_{LP}(e^{j\omega})$

$$H_{LP}(e^{j\omega}) \Rightarrow h_{LP}[n] \not\Rightarrow H_{LP}(e^{j\omega})$$

2024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛

■ 其结果为：

$$\sum_{n=-K}^K h_{LP}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-K}^K \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

- $H_{LP}(e^{j\omega})$  不会对所有的  $\omega$  「均匀」 收敛到  $H_{LP}(e^{j\omega})$ ，但却会「均方」收敛到。
- 序列  $h_{LP}[n]$  的均方收敛性质可以透过以下函数在各种  $K$  值的图形做更进一步的阐述：

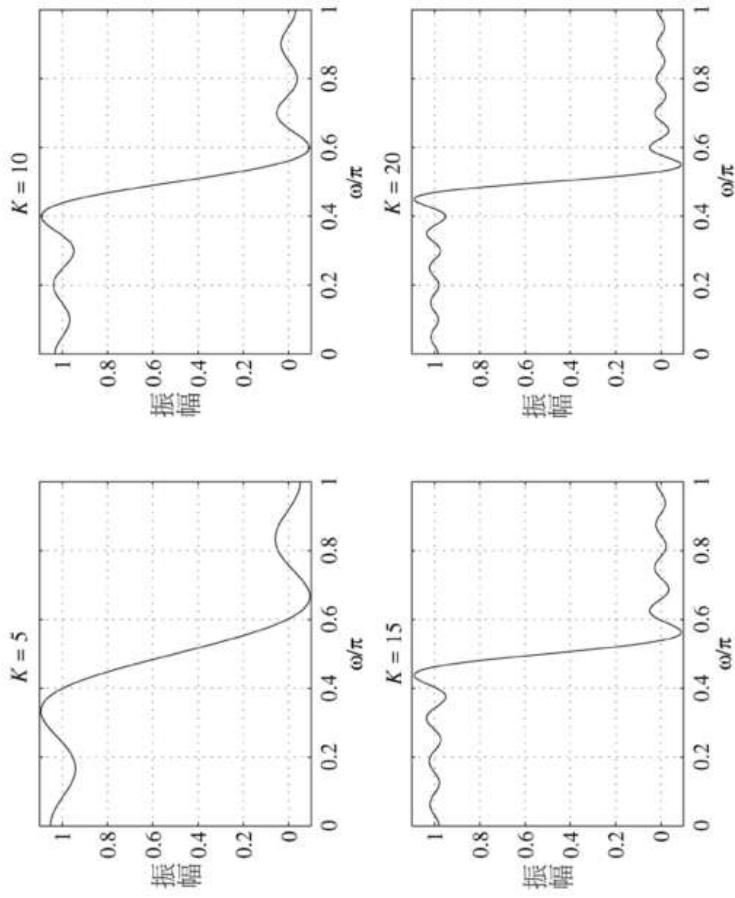
$$H_{LP,K}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-K}^K \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

2024/12/17

# 离散时间傅立叶变换的收敛

请注意，在这个研究里面， $K$ 是什么？

回答： $K$ 是**时域**窗口长度， $K$ 增加就是我们做的那个窗口傅立叶变换包含的序列变长了



2024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛-涟波

- 从前图中可以看出，不管 K 值多少， $H_{LP,K}(e^{j\omega})$  的图中在  $\omega = \omega_c$  点的两边都有涟波 (ripple) 的现象。
- 当 K 值增加，涟波数目也增加；不管 K 值是多少，涟波的最大高度还是维持不变。
- 当 K 趋近于  $\infty$  时，条件： $\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{LP}(e^{j\omega}) - H_{LP,K}(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$
- 被满足，代表  $H_{LP,K}(e^{j\omega})$  收敛到  $H_{LP}(e^{j\omega})$ 。
- 这种  $H_{LP,K}(e^{j\omega})$  在非连续点以均方方式逼近到  $H_{LP}(e^{j\omega})$  的震荡现象，通常被称为 Gibbs 现象 (Gibbs phenomenon)。

2024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛-涟波

- 当 K 趋近于  $\infty$  时，条件：

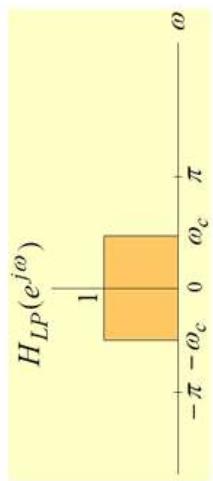
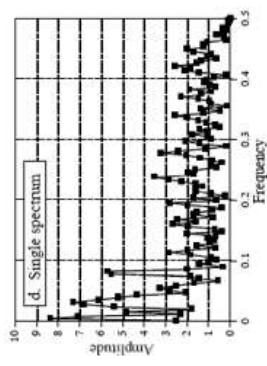
$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{LP}(e^{j\omega}) - H_{LP,K}(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

- 被满足，代表  $H_{LP,K}(e^{j\omega})$  收敛到  $H_{LP}(e^{j\omega})$ 。

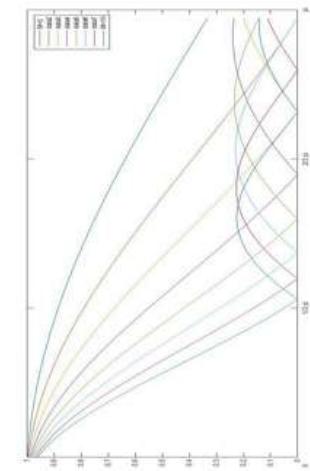
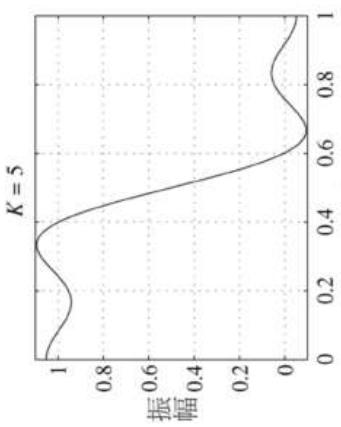
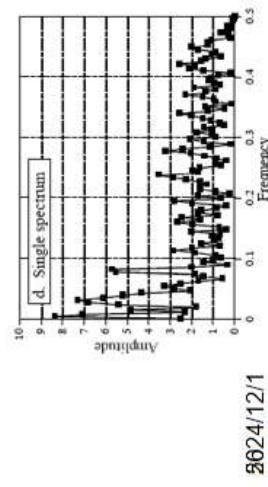
- 这种  $H_{LP,K}(e^{j\omega})$  在非连续点以均方方式逼近到  $H_{LP}(e^{j\omega})$  的震荡现象，通常被称为 **Gibbs 现象 (Gibbs phenomenon)**。

## 现实中的滤波器截止频率

### ■ 理想中的滤波



### ■ 现实中的滤波



## -3dB截止频率-1

- 我们认为当能量通过过滤器就剩下一半时，则称为滤波器对某个频率“禁止通行”，即为“截止频率”，此时频率响应应为 $|H(e^{j\omega})|^2 = 1/2$ ； $H(e^{j\omega}) = \sqrt{2}/2$
- 此时，对于任意输入信号 $e^{j\omega n}$

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

- 以前面例题为例：

$$h(n) = [1/2, 0, -1/2], n = -1:1$$

$$H(e^{j\omega}) = h(-1) \cdot e^{-j\omega(-1)} + h(1) \cdot e^{-j\omega 1} = j \sin \omega$$

对于输入信号为 $e^{j\omega n}$ ；输出为 $j \sin \omega \cdot e^{j\omega n}$ ,强度变化为 $|\sin \omega|$

例如输入信号为 $e^{jn\frac{\pi}{2}}$ ，输出信号就变成 $y[n] = \sin \frac{\pi}{2} \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}} = 0$

- 那么我们估算这个系统的截止频率，就有 $|H(e^{j\omega})| = |\sin \omega| = \sqrt{2}/2$ ;  $\omega = \frac{\pi}{4}$
- 这意味着：当输入信号的角速度小于 $\frac{\pi}{4}$ ；则可以通过这个滤波器，否则截止

## -3dB截止频率-2

- 最后，我们按照强度变化公式，即衰减强度为

$$G(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 * (-0.15) = -3$$

所以截止频率又称为-3dB截止频率

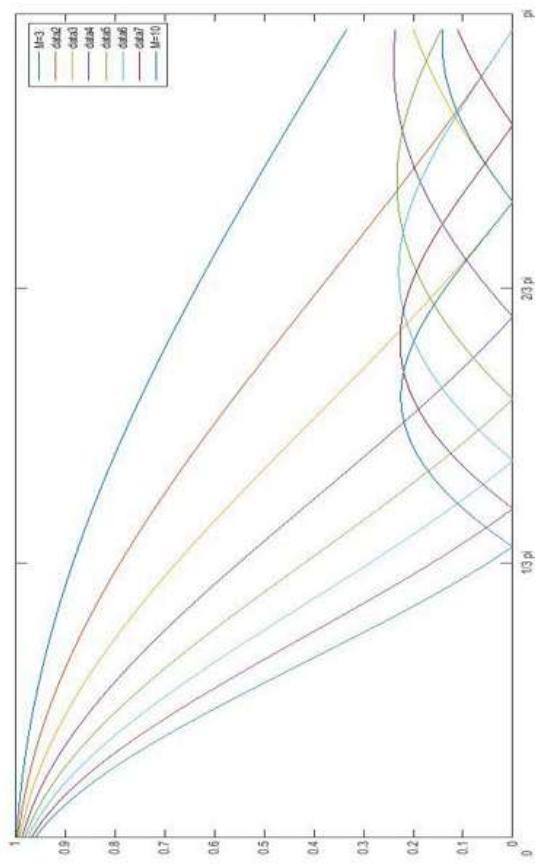
**例题：**线性系统为  $h(n) = [0.5, 0, 0, 0, 0.5]$ ，计算其对应的 - 3dB 截止频率

$$h(n) = [0.5, 0, 0, 0, 0.5], |H(e^{j\omega})| = \cos 2\omega; \text{ 则 } \cos 2\omega = \sqrt{2}/2; \quad \omega = \pi/8$$

2024/12/17

## -3dB截止频率-3

- 例2：在下图中标注-3dB截止频率



2024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛\*

- 对于有一些序列，它们既不是绝对可加成，也不是平方可加成 (square summable) 的，我们也可以定义它们的 DTFT。
- 这种类型的例子有单位步阶序列  $\mu[n]$ 、弦波序列  $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ 、及复数指数序列  $A\alpha^n$ 。
- 这类型序列可以透过 Dirac delta 函数  $\delta(\omega)$  来定义它们的 DTFT。

0024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛

- 范例 - 考虑下列复数指数组列:  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$
- 它的 DTFT 为:  $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
- 其中,  $\delta(\omega)$  是一个  $\omega$  的脉冲函数, 且  $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ 
  - 请注意1: 这个  $\delta(\omega)$  在频率上只是一条线
  - 这个结论展示了傅立叶变换上的正交性
  - 对于  $\omega_0$  的信号, 只有  $\omega = \omega_0$  对应的正弦频率才有一个 “1”, 其他的频率系数都是0

0024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的正交性！

- 当 $\omega_0 \neq -\omega$ 时， $e^{j\omega_0 n}$ 与  $e^{j\omega n}$  正交（内积为0，此处不是傅立叶变换）

- 证明：
$$\langle e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 + \omega)n}$$
$$\langle e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega n} \rangle = \frac{1}{N} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 + \omega)n + i \sin(\omega_0 + \omega)n \right)$$

- 当 $\omega_0 = -\omega$ 时， $\langle e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos 0n + i \sin 0n = 1$

- 当 $\omega_0 \neq -\omega$ 时， $\langle e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \omega_{\neq 0} n + i \sin \omega_{\neq 0} n = 0$

- 这个内积定位为“正交”。

- 正交的重要意义在于：？？？

0024/12/17

## 变换的正交性

- 正交性质是绝大部分变换都会保证的必要要求。
- 正交保证了当我们对与某一个分量进行操作时，例如置为零（滤波），其他分量不受影响。
- 所以通常所有的变换都是在正交基上进行的。

0024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛

- 函数  $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
- 是一个  $\omega$  的周期函数，周期为  $2\pi$ ，因此称为周期脉冲列 (periodic impulse train)。

■ 为了证明上述结果确是  $x[n] = e^{j\omega_0 n}$  的 DTFT，我们计算  $X(e^{j\omega})$  的反向 DTFT。

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) e^{j\omega_0 n} d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega_0 n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

0024/12/17

## 离散时间傅立叶变换的收敛对

序列	DTFT
$\delta[n]$	$\leftrightarrow 1$
$1$	$\leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\mu[n]$	$\leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$\mu[n], ( \alpha  < 1)$	$\leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$\alpha^n \cdot u[n], ( \alpha  < 1)$	

2024/12/17

65

## 两种滤波方法（掌握概念！）

- 对于一个（有限长/无限长）序列，我们可以使用了两种滤波方法
  - 时域滤波（基于脉冲响应设计的频率滤波器）
  - 频率滤波（将序列转到频率进行滤波）
- 其中：基于频率的实时时域滤波：
  - 基于频率指的是我们滤波的出发点是过滤掉不同频率的信号
  - 实时指的是我们不可能预先获取完整信号，只能边获取信号，边进行滤波
  - 时域指的是由于运算量，数据完整度，数据特性等特点，我们无法预先进行频域过滤。
    - 频率滤波
      - 我们要解决无限长序列如何进行傅里叶变换（窗口化）
      - 带来的三个问题（理论掌握）

0624/12/17

## 时域滤波的概念-1

- 离散时间 LTI 系统的一个应用是：一方面让输入讯号中特定频率成分无失真地通过，另一方面阻隔其它频率成分。
- 这样的系统被称为数字滤波器 (digital filter)，是本课程欲讨论的主题之一。
- 滤波过程的重点是

$$x'[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X'(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega; X'(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_{filter}$$

- 藉由适当地选择 LTI 数字滤波器在对应于输入弦波频率的强度函数值  $|H(e^{j\omega})|$ ，这些弦波序列的某些成分可以被选择性地衰减或滤除。
- 滤波分为窗口化滤波（卷积） 和带宽滤波（频域乘法）
- 我们主要讨论窗口化滤波（卷积）

0024/12/17

## 时域滤波的概念-2

- 为了解设计此种系统的机制，我们考虑一个实数系数 LTI 离散时间系统如下：

$$|H(e^{j\omega})| \cong \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

从理想方砖滤波器开始

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

之前的例子

频响定义

0824/12/17

## 时域滤波的概念-3

- 输入下列讯号到系统中

$$x[n] = A \cos \omega_1 n + B \cos \omega_2 n, \quad 0 < \omega_1 < \omega_c < \omega_2 < \pi$$

- 因为线性特性，此系统之输出为：

$$\begin{aligned} y[n] = & A |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1)) \\ & + B |H(e^{j\omega_2})| \cos(\omega_2 n + \theta(\omega_2)) \end{aligned}$$

0924/12/17

## 时域滤波的概念-6

- 因为  $|H(e^{j\omega_1})| \approx 1$      $|H(e^{j\omega_2})| \approx 0$
- 故输出为:  
$$y[n] \approx A |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1))$$
- 这表示该 LTI 离散时间系统扮演如一个低通滤波器。
- 具体怎么做？来看一个简单的例子

2024/12/17

## 时域滤波的概念-7

- 范例 - 输入讯号包含两个角频率分别等于 0.1 和 0.4 弧度/取样的余弦序列的和。 $x(n) = \cos(0.1n) + \cos(0.4n)$
- 我们需要设计一个高通滤波器，使得输入讯号中较高频者能够通过，但是阻隔较低频者。

$$y(n) = \cos(0.4n)$$

- 为了简化，我们假设滤波器是一个**长度为 3**的 FIR 滤波器。其脉冲响应为：

$$h[0] = h[2] = \alpha, \quad h[1] = \beta$$

2024/12/17

## 时域滤波的概念-8

- 因此，可以滤波器的旋积和描述法：

$$\begin{aligned}y[n] &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] \\&= \alpha x[n] + \beta x[n-1] + \alpha x[n-2]\end{aligned}$$

- $y[n]$  和  $x[n]$  分别表示输出和输入序列。
- 设计目标是选择适当的滤波器参数 ( $\alpha$  和  $\beta$ ) 使得滤波器的输出为角频率 0.4 强度/取样的余弦序列。

2024/12/17

## 时域滤波的概念-9

- 现在，上述 FIR 滤波器的频率响应应为：

套频响应计算公式，核心知识点！

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega} \\ &= \alpha(1 + e^{-j2\omega}) + \beta e^{-j\omega} \\ &= 2\alpha \left( \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right) e^{-j\omega} + \beta e^{-j\omega} \\ &= (2\alpha \cos \omega + \beta)e^{-j\omega} \end{aligned}$$

## 时域滤波的概念-10

- 滤波器的强度和相位响应为：

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})| &= 2\alpha \cos \omega + \beta \\ \theta(\omega) &= -\omega\end{aligned}$$

- 为了阻绝低频成分，使其不出现在滤波器的输出，在  $\omega = 0.1$  处的强度函数值必须为零。
- 同样地，为了让高频成分无失真地出现在滤波器的输出，我们需要确保在  $\omega = 0.4$  处的强度函数值等于 1。

2024/12/17

## 时域滤波的概念-11

- 因此，必须满足下列两个条件：
$$H(e^{j0.1}) = 2\alpha \cos(0.1) + \beta = 0$$
$$H(e^{j0.4}) = 2\alpha \cos(0.4) + \beta = 1$$
- 求解上述两方程式，可以得到：
$$\alpha = -6.76195$$
$$\beta = 13.456335$$

2624/12/17

## 时域滤波的概念-12

- 滤波器输出和输入间的关系如下：

$$y[n] = -6.76195(x[n] + x[n-2]) + 13.456335x[n-1]$$

- 其中，输入为：

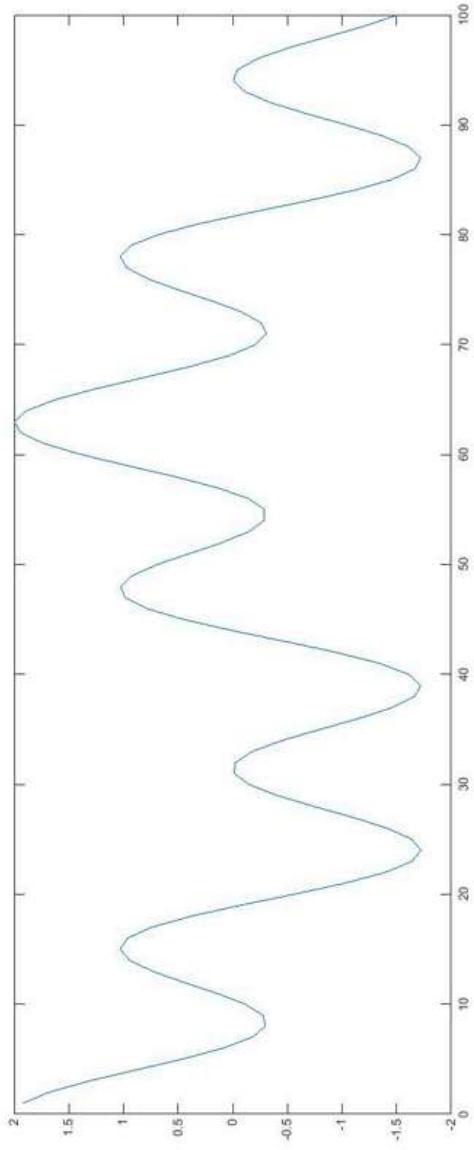
$$x[n] = \{\cos(0.1n) + \cos(0.4n)\}\mu[n]$$

- 尝试用编程的方法验证这个工作。

2624/12/17

## 时域滤波的概念-13

- 下图显示出程序执行的结果。



2024/12/17

## 时域滤波的概念-14

- 输出的前七个样本如下：

$n$	$\cos(0.1n)$	$\cos(0.4n)$	$x[n]$	$y[n]$
0	1.0	1.0	2.0	-13.52390
1	0.9950041	0.9210609	1.9160652	13.956333
2	0.9800665	0.6967067	1.6767733	0.9210616
3	0.9553364	0.3623577	1.3176942	0.6967064
4	0.9210609	-0.0291995	0.8918614	0.3623572
5	0.8775825	-0.4161468	0.4614357	-0.0292002
6	0.8253356	-0.7373937	0.0879419	-0.4161467

2024/12/17

## 时域滤波的概念-15

- 由此表可以看出，忽略最小位数后可得到：

$$y[n] = \cos(0.4(n-1)) \quad \text{for } n \geq 2$$

要计算目前的输出值必须先知道目前及前两个输入取样值。

- 因此，前两个输出值  $y[0]$  与  $y[1]$  是在假设  $n = -1$  及  $n = -2$  时为零输入值的情况下所得到的结果。
- 因此，前两个输出样本构成输出的瞬时部分。
- 由于脉冲响应的长度为 3，因此系统在  $n=N=2$  时达到稳态输出。
- 注意：该输出为输入中高频成分  $\cos(0.4n)$  的延迟版本，并且延迟为一个样本周期。

## 频域滤波的概念-1

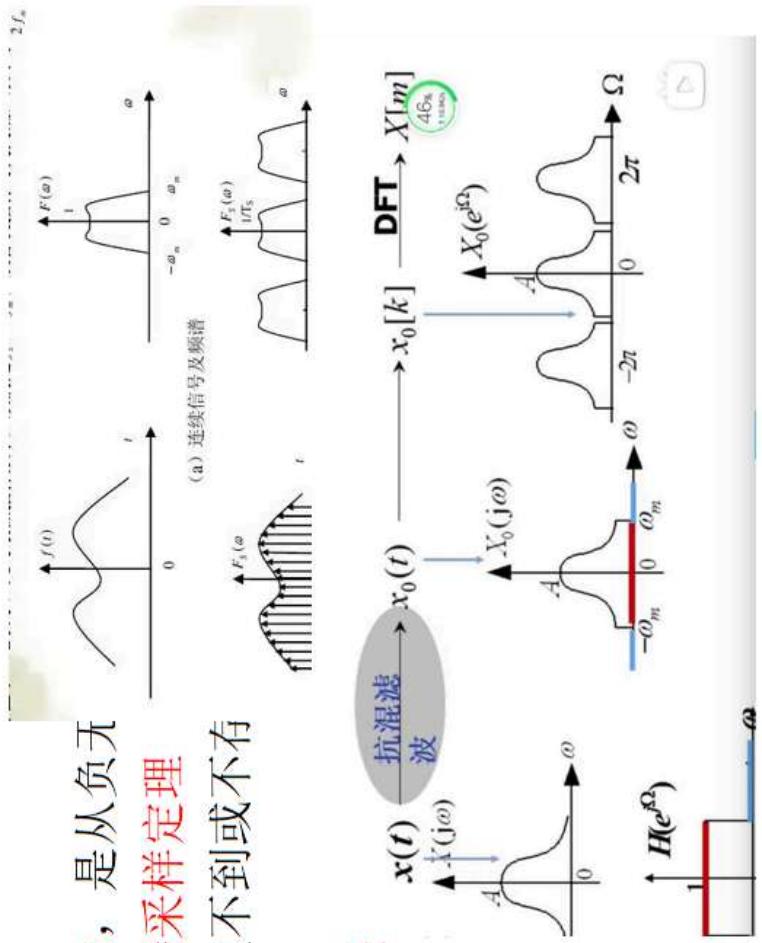
- 滤波过程的重点是
$$x'[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X'(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega ; X'(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_{filter}$$
- 可以看到如果对于一个序列进行傅里叶变换，然后进行频域调制（乘法），也可以达到
- 此时如何处理无限长序列的问题：**加窗**
- 造成3个问题（掌握概念和成因，基本解决思路）
- 频域混叠/频谱泄漏/栅栏化

8024/12/17

## 频域滤波的概念-2

### ■ 混叠：

1. 无限长**连续信号**的频谱是**非周期的**，是从负无穷进行离散化采样需要遵从**奈奎斯特定理**
2. 对于无限频率（未知）的信号，找不到或没有我们学习过时域上，混叠的效果
3. 频域的混叠表现为各个**周期的堆叠**
4. **解决办法**（加密=加大采样率），

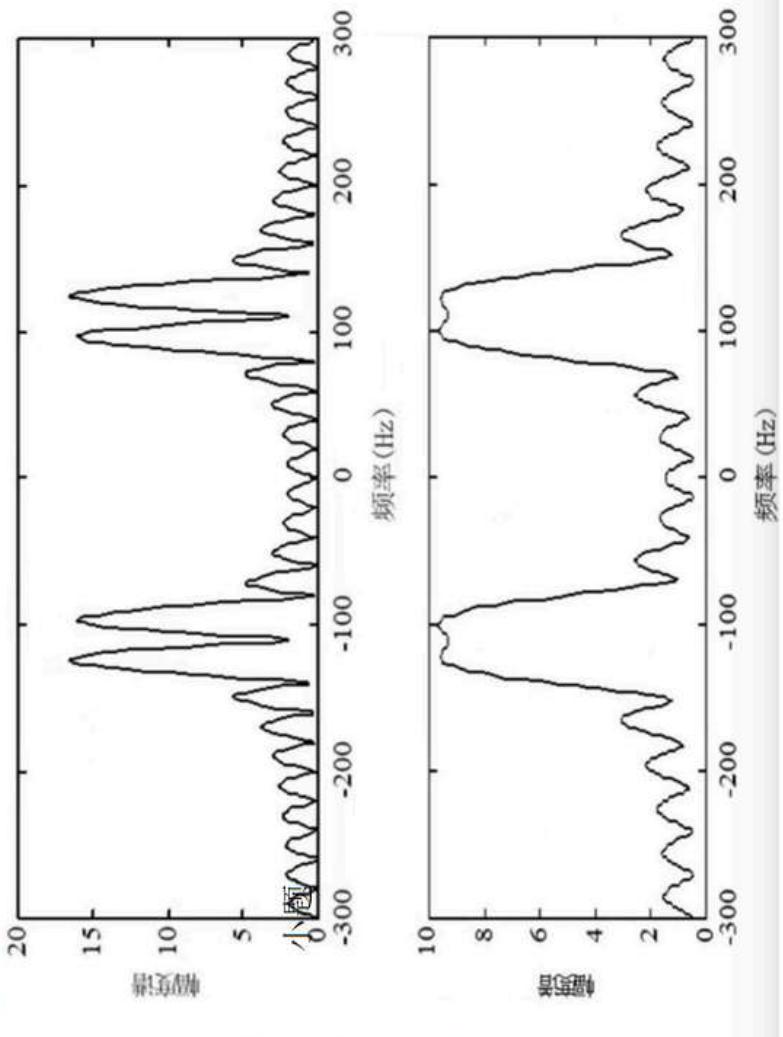


2024/12/17

## 频域滤波的概念-2

加矩形窗

- 泄露：
  1. 无限长序列我们需要去截取会导至他分为有限步
  2. 截取会导至他分为有限步
  3. 对于无限步
  4. 处理：选择栅栏化：
  1. 对应频谱



2024/12/17