时域数字信号处理（5）

数字信号学习

2024-10-22

1

本章要点

- 信号的表示
- 信号的基本运算
- 信号分类
- 基本信号
- 信号的抽样
- 信号系统

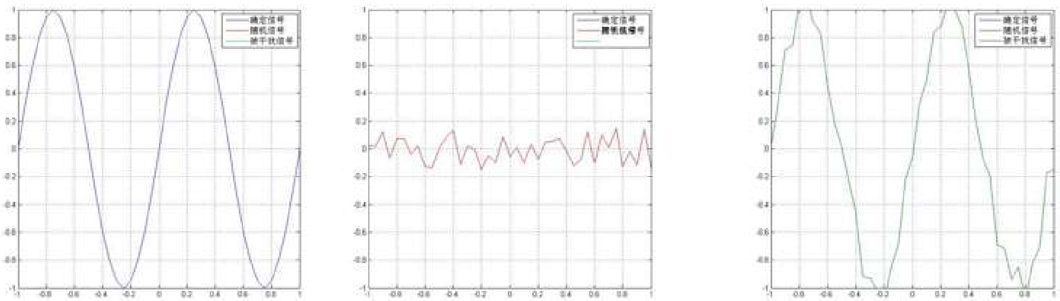
几种基本的信号分类

- 连续信号与离散信号
- 确定信号与随机信号
- 周期信号与非周期信号
- 功率信号与能量信号

2024-10-22

确定信号与随机信号（书目2.3.3）

- 确定信号多为我们需要研究的对象
  - 此处的确定信号实际上有两种，一种是可以使用公式表示的（这是我们后面本节课要学习的）；另一种确实无法公式表示（如某人的语音输入，却是确定的）
- 随机信号在我们这节课的研究中，多为干扰噪音
- 所以：评估一个信号是确定信号还是随机信号，不是看是否公式表示，而是讨论其是否具有实际意义。

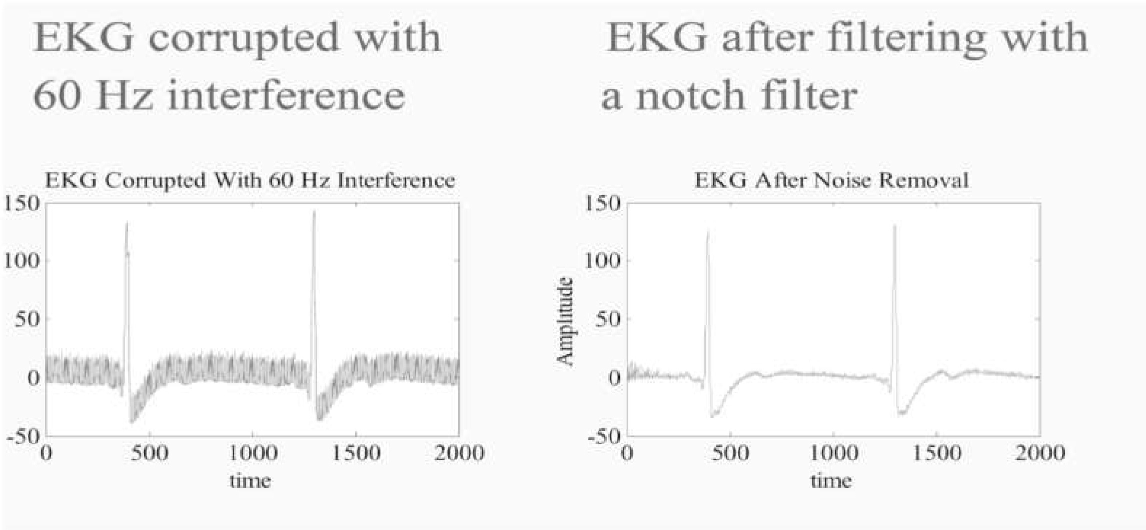


2024-10-22

4

确定信号与随机信号（2）

- 现实中，去噪的例子



- 在应用中，随机信号除非在特定情况下，基本都被视为干扰。
- 因为我们无法确定下一刻是什么信号。

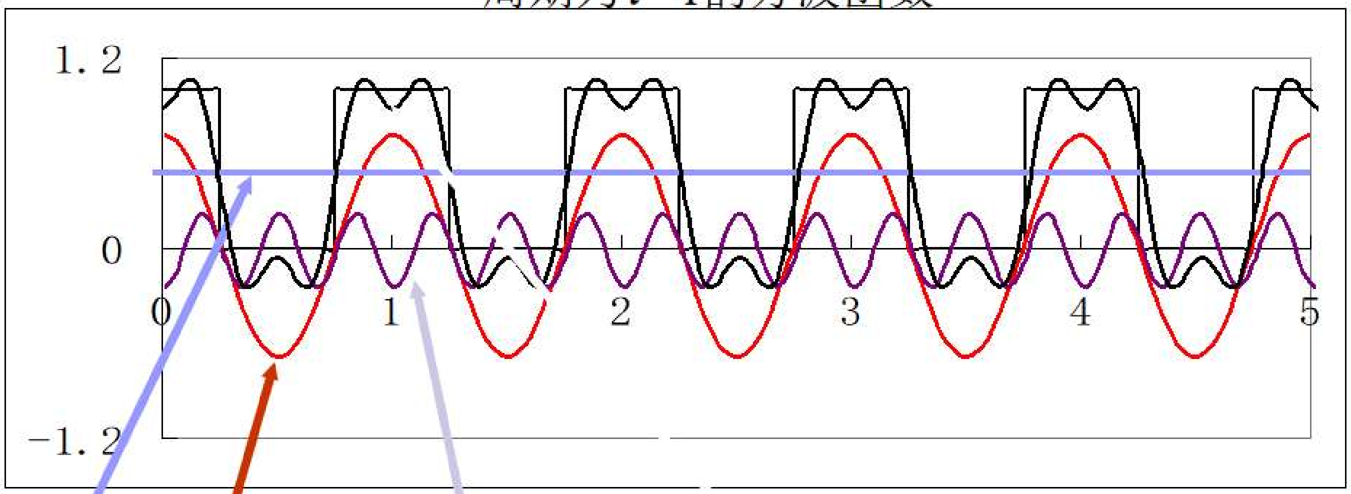
2024-10-22

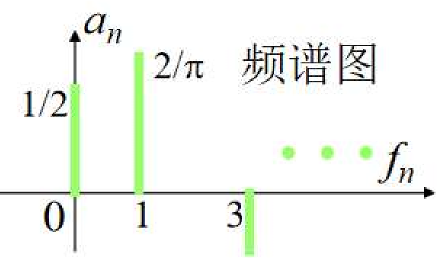
周期信号与非周期信号（1）

- 周期信号可以用一个周期函数表示。且周期信号是DSP学习中最重要的2-3种信号之一：
  - DSP研究的是时间轴上的信号变化，那么周期函数（信号）是最容易研究的—周期信号是最简单且“优美”的信号。
  - 当我们把一个函数变成多个函数的表示，那么周期函数就可以被当做工具（分解的概念）
  - 例：使用周期信号分析任意一个信号：方波信号

用周期信号进行分析一个信号

周期为τ=1的方波函数



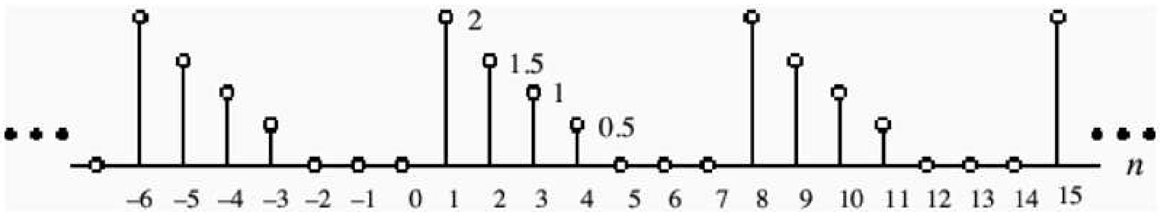


$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(2\pi x)-\frac{2}{3\pi}\cos(6\pi x)+\ldots\ldots$$

2024-10-22

周期信号2：定义

- 对于连续函数（信号）的周期，我们有时$f(t) = f(t + k \cdot T)$，T 为周期，通常T可以为任意值,而k为任意整数。
- 离散信号：满足$x[n] = x[n + kN]$的序列,被称为具有周期 N 的周期序列，其中 N 是一个正整数，而 k 是任意整数。
  - 满足$x[n] = x[n + kN]$的最小 N 值称为基本周期。



- 序列不满足周期性的条件即被称为非周期性序列。

2024-10-22

序列分类：能量与功率信号-1

- 一个序列 x[n] 的总能量可定义 如下：

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

  - 一个无限长度但取样值为有限的序列，其能量可能为无限或有限的值。
  - 一个有限长度且取样值为有限的序列，其能量为有限的值。

- 一个非周期序列 x[n] 的**平均功率**定义为：

$$P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} |x[n]|^2$$

  - 从公式上看到，1：该公式处理的无限长序列；2：为了处理无限长序列，我们定义了窗口的概念

序列分类：能量与功率信号-2

- 定义一个序列 x[n] 在窗口，宽度为$2K+1$,并定义区间 $-K \le n \le K$ 的能量如下

$$\mathcal{E}_{x,K} = \sum_{n=-K}^{K} |x[n]|^2$$

- 因此可得

$$P_x = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{2K+1} \mathcal{E}_{x,K}$$

  - 注意：DSP研究中，很大一部分研究对象是无限长序列。所以如何定义无限长序列上的操作是一个核心问题。
  - 处理无限长序列方法之一是设定一个窗口，长度为$2K+1$，再另这个窗口双向扩展至无穷
  - 另一个方法是令这个窗口滑动起来

2024-10-22

多选题 1分

下面那些操作需要定义额外定义“窗口”，并延展窗口至“无限”才能处理无限长序列?

- A 加法、乘法
- B 差分
- C 求和
- D 相似性比对
- E 延迟
- F 卷积

2024-10-22 11

序列分类：能量与功率信号-3

- 一个周期为 N 的周期性序列，其平均功率为：

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=K}^{N-K} |x[n]|^2$$

- 周期序列显然是无限长的，但是研究他的功率，只需要计算一个周期内的功率就可以了
  - 此时周期信号的窗口就是他的一个周期
- 一个无限长度序列的平均功率可以是无限或有限的值。
- 问题：能量和功率信号有什么用？

序列分类：能量与功率信号-4

- 一个无限能量的信号，若是具备有限的平均功率，则称为功率信号 (power signal)。
  - 范例：周期序列是一个功率信号的例子，因其平均功率为有限但其能量却为无限。
  - 功率信号是指在一个窗口周期内能量是有限的，只是由于窗口的拓展（例如周期信号）才具有无限的能量。
- 一个有限能量信号若具有零平均功率，则称为能量信号 (energy signal)。
  - 范例－有限长度序列（的拓展）是一个能量信号的例子，因其能量为有限但平均功率为零。

因果序列

- 物理可实现信号即 因果信号

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0, t < 0 \\ f(t) \neq 0, t > 0 \end{cases}$$

- 这类信号关注了n=0点的现实意义。
- N=0表明某个物理意义上的“开关”启动了，例如机器开始记录，某个事情开始（或者瞬间）发生了，所以我们在此之后获取了信号。
- 那个“开关”就是序列0点之后有实际信号的原因—因果信号
  - 如果机器记录之前就有记录信号，这句话显然是矛盾的，所以不是物理可实现的。

因果序列与能量信号

- 范例 — 考虑下面一个因果性序列

$$\begin{cases} x[n] = 0, n < 0 \\ x[n] = 3(-1)^n, n \geq 0 \end{cases}$$

  - 首先：这是一个无限长序列
  - 其次：他是一个因果序列
  - 再次：他的能量为$\sum_{n=0}^{\infty} |3(-1)^n|^2 = 9 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$
  - 他的平均功率为：
  - 定义窗口$-K \leq n \leq K$,他的功率为$P_x = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1}\left(9\sum_{n=0}^{K} 1\right) = \lim_{K\to\infty} \frac{9K+1}{2K+1} = 4.5$

其他分类

- 对称信号与共轭信号（复数信号）
- 有界信号与可加信号（系统部分讲）

- 小总结：
- 信号分类部分的核心知识点：多种不同类型的信号，都会在后面的学习反复用到。
- 核心任务是：认知、概念性了解 无限长序列的概念。

2024-10-22

16

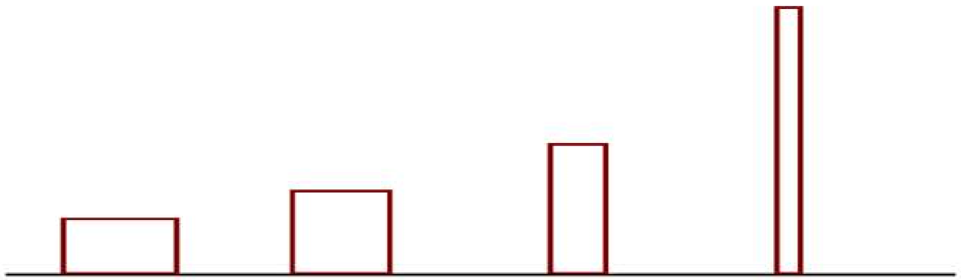
本章要点

- 信号的表示
- 信号的基本运算
- 信号分类
- 基本连续信号
- 信号的抽样
- 信号系统介绍

基本序列-脉冲信号1（章节2.4）

- 单位取样 (unit sample) 序列
  - 这个信号有许多的名字，脉冲信号（Impulse Signal）；冲击信号（一个意思，翻译方法不同）；狄利克雷函数；delta函数等等
- 这个信号的连续型数学表达为

$$f(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases},\ s.t.\ \lim_{T\to 0}\int_{-T}^{T} f(t)dt=1$$



2024-10-22

18

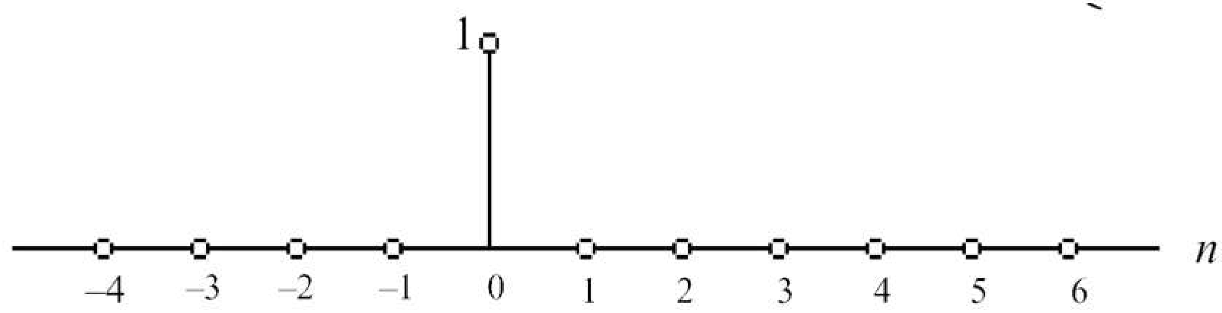
基本序列-脉冲信号2

- 连续型的脉冲信号在现实中非常常见：
  - 他模拟了在电路中瞬间出现一个能量有限，但是短时间强度非常非常大的冲击电流。
  - 这种情况在现实中很常见：
    - 当一个插线板开着台灯的同时，并入大功率电器的瞬间；
    - EMP Ready(EMP 炸弹 Electric Magnetic Pulse)
- 在数字电路中，这个信号被规范化，且泛用化了
  - 得益于A/D的屏蔽效果

基本序列-脉冲信号3

- 对于离散型的脉冲信号：$\lim\limits_{T\to 0}\int_{-T}^{T} f(t)dt = 1 \Rightarrow \sum_{n=0} x(n) = 1 \Rightarrow$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



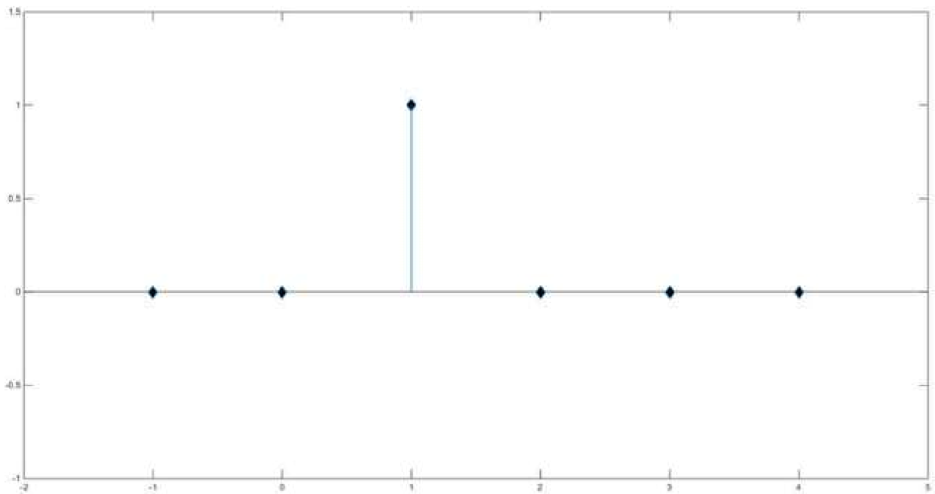
脉冲信号4：从连续的脉冲信号到离散脉冲信号

- 不仅仅是 $f(t=0)=\infty$ 变成了 $x(n=0)=1$这样的数量变化，而是整个信号的性质发成了质的变化。
  - 对于连续性信号，尽管在一些情况下连续的狄利克雷函数也可用作很多研究工具，但本质上 $f(t)$ 上是一种需要克服、屏蔽的干扰，是“坏的信号”；
  - 在DSP中，A/D屏蔽了$f(t)$ 在单位时间无限大的“缺点”；保留了 他只在0时刻有值，值累计为1 这两个优点，并整合成了一个规范化的函数：
  - 只在0这个标准时刻发生一次，发生强度为规范化的1的最简单的标准信号，即信号中的单位1。
  - 由于这个和其他附属性质，脉冲信号成了表述其他信号及测试系统信号的一个基础工具。

2024-10-22 21

基本序列-脉冲信号5

- 理解$\delta[m-1]$，$m=1$时，有$\delta[1-1]=\delta[0]=1$
- 在这个描述中，$\delta[m]$并不是一个“光秃秃”的柱子“1”，而是一个[..., 0,0,1,0,0, ...]的序列



2024-10-22

22

基本序列-脉冲信号7

- 任一序列在时域中可以被表示成基本序列及其延迟序列（或超前序列）的加权总和。

- 通过时移组合的方法，表示任意一个序列

$$x[m] = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\} \qquad 0 \le m \le n$$
$$= x_0 \cdot \delta[m] + x_1 \cdot \delta[m-1] + \ldots + x_n \cdot \delta[m-n]$$

- 概念：上图不是很多根“柱子”叠加，而是很多个0,0,1,0,0 的信号叠加

基本序列-脉冲信号8

- 脉冲信号的作用：

1）鉴于上述表示，我们可以把特定连续/离散信号对不同时刻的脉冲函数进行乘法，得到不同时间点信号值，这个过程叫做取样！

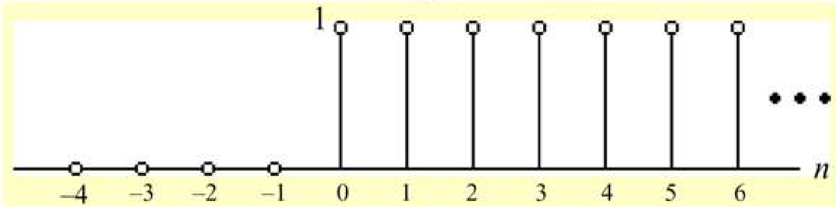
2）脉冲信号就是我们数字信号里面的“1”，复杂信号变成多个简单信号的和！

3）研究一个未知的系统时，我们就可以把这个系统想象成为一个不知深浅的“水潭”，而想里面丢一个“石块”，这个“石块”就是脉冲信号。

基本序列-阶跃信号

- 单位步阶 (unit step) 序列 –

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



- 阶跃信号是对$f(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$取样而来，可以看做是多个脉冲信号组合而来，也叫单位步阶信号
- 应用：

  1）相当于一个平稳输出

  2）如果和一个连续信号做乘法，相当于直接对该信号取样

2024-10-22

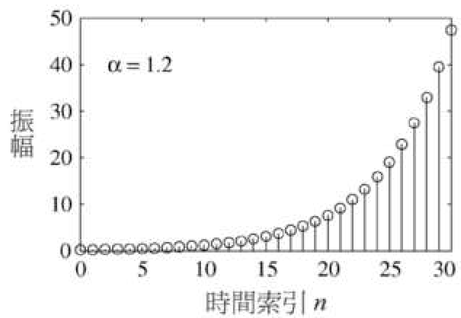
25

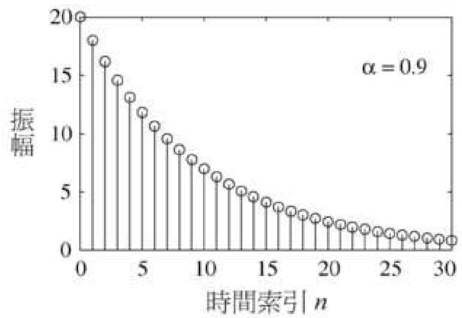
基本序列-指数信号

- 实数指数序列 –

$$f(t) = A\alpha^t,\ x[n] = A\alpha^n,\ -\infty < n < \infty$$

其中 A 和 α皆为实数





- 应用
- 一个好的单调渐变函数

基本序列-指数信号2

- 应用:
- 通常衰减的指数信号比增加的指数信号应用要广一些

- 衰减的序列可以用来做平滑
- 而增加的信号可以在有限长度下做放大配全
- 实践1：练习使用指数序列完成两个图像（声音）的无缝连接

2024-10-22

27

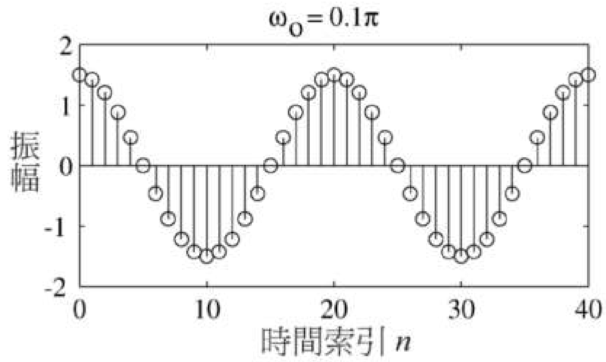
基本序列-正（余）弦信号

- 正弦波序列：

$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi), x[n] = A\cos(\omega n + \phi)$$

其中 A, ω, φ为实数，分别被称为弦波序列 x[n] 的振幅、角频率及相位。

范例 -



2024-10-22

正余弦信号与复数表示信号1

- 复指数序列 可以写成正余弦展开—复数基本知识
  - 复数的常规表示$A = a + jb$
- 复数可以展成模*相位角, $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi(A) = \arctan(\frac{b}{a})$
  - 复数可以写成 $A = |A|(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$
- 欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsin(\varphi)$
  - 欧拉公式来自上面三部分各自的泰勒展开
  - 世界上最美公式 no. 1: $e^{j\pi} + 1 = 0$

2024-10-22

复指数信号与正余弦信号的互相转化

- 复指数信号 $x[n]=Ae^{j\theta n}$ 转化成正余弦信号的方法：

$$x[n]=Ae^{j\theta n}=A(\cos(\theta n)+j\sin(\theta n))$$

- 正弦信号转化成复指数信号的方法：

$$\cos(\theta n)=\frac{1}{2}[(\cos(\theta n)+j\sin(\theta n))+(\cos(\theta n)-j\sin(\theta n))]=\frac{1}{2}e^{j\theta n}+e^{-j\theta n}$$

$$\sin(\theta n)=\frac{1}{2j}(e^{j\theta n}-e^{-j\theta n})$$

复指数信号中虚部“j”的意义

- 复指数信号 $x[n] = Ae^{j\theta n}$ 存在实部和虚部
  - 我们在初中学习复数时就听说过，虚数在DSP中找到了对应的意义
  - 实际上：DSP中也不存在“想象中 imaginary-i”的信号
- 但是，我们如果观测到两个信号，
  - 1. 具有同一个周期性；
  - 2. 且具有明确的转化关系：例如推迟半个周期就可以变成另一半（$sin(\theta n) = \cos\left(\theta n + \frac{\pi}{2}\right)$）；
  - 3. 同时两个信号没有叠加成一个；
  - 4. 我们想要使用一个符号同时表示这两个信号
- 不妨将这两个信号记做 $A(\cos(\theta n) + j\sin(\theta n))$

2024-10-22

31

复指数信号中虚部“j”的意义2

- $A(\cos(\theta n) + j\sin(\theta n))$并不是指真的有虚数信号，$j$是一个分隔符，表示同一个式子中的两个信号不能直接做加法，却又可以通过虚数运算方法进行运算。
- 将上述信号进行拓展：
  - 拓展1：$a + bj = |A|(\cos(\theta) + j\sin(\theta)), \theta = \arctan\frac{b}{a}$
  - 拓展2：对于任意指数信号有 $A\alpha^n, \alpha = |\alpha|(\cos(\omega_\alpha) + j\sin(\omega_\alpha)) = e^{\ln|\alpha|}e^{j\omega_\alpha}$，为书写简便，令$\ln|\alpha| = \beta$，则$\alpha = e^{\beta + j\omega_\alpha}$同理，有$A = |A|e^{j\varphi}$

则有

$$A\alpha^n = |A|e^{j\varphi}\left(e^{\beta + j\omega_\alpha}\right)^n = |A|e^{j\varphi}e^{n\beta + jn\omega_\alpha} = |A|e^{n\beta}e^{j\varphi + jn\omega_\alpha} = |A|e^{n\beta}\ e^{j(n\omega_\alpha + \varphi)}$$

2024-10-22

复指数信号中虚部“j”的意义3

- $A\alpha^n = |A|e^{n\beta}\, e^{j(n\omega_\alpha+\varphi)}$中，将后半部分展开
  - 实部$|A|e^{n\beta}\cos(\omega_\alpha n+\varphi)$，虚部为$|A|e^{n\beta}\sin(\omega_\alpha n+\varphi)$
- 指数信号可以用正余弦信号表示：

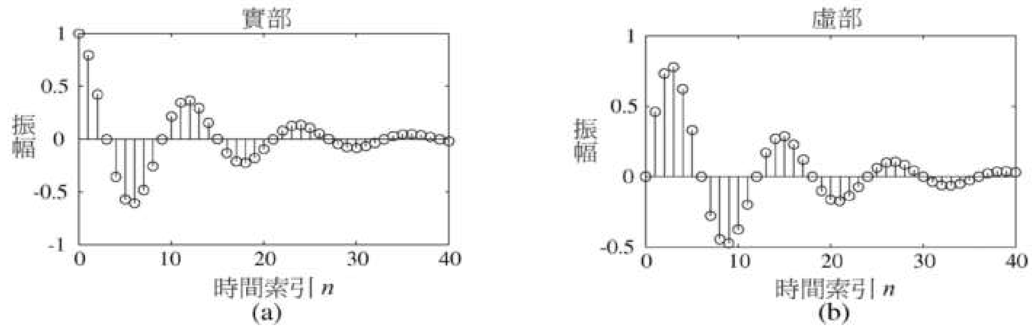


圖 2.17 一個複數指數序列 $x[n]=e^{(-1/12+j\pi/6)n}$：(a) 實數部分；(b) 虛數部分。

2024-10-22

单选题 1分

等等：所有指数信号可以由正余弦信号表示？怎么可能，正余弦信号是“周期的”，而指数信号是单增的，这是为什么？

$$A\alpha^n = |A|e^{n\beta}\, e^{j(n\omega_\alpha + \varphi)}$$

- A 由于$|A|e^{n\beta}$
- B 由于$n\omega_\alpha$
- C 由于φ
- D 我也不知道，要不不能?
- E 我没看懂题

2024-10-22

34

复指数信号与正余弦信号

- 不要忘记，我们观察信号的“变化”，看的是n。在$A\alpha^n = |A|e^{n\beta}\, e^{j(n\omega_\alpha + \varphi)}$中，有两部分含有$n$
  - $e^{j(n\omega_\alpha + \varphi)}$，正余弦对应的，“周期的”
  - $|A|e^{n\beta}$含有n，单增的。
- 结论：

由于指数信号$e^{j\theta n}$和正余弦信号的简单对应关系，我们今后在学习周期性、运算讨论时，会（很多情况下）不加区分三者，而在写法上有一定互换

2024-10-22

35

正弦信号的周期（1）-基本概念复习

- 基本概念：
  - 角速度ω，频率f 与周期T
- 换算关系
  - $T \cdot f = 1; T = \frac{1}{f}; f = \frac{1}{t}$
  - $\omega = \frac{2\pi}{T}; T = \frac{2\pi}{\omega}$
  - $\omega = 2\pi f; f = \frac{\omega}{2\pi}$

基本序列-正弦信号的周期（1）

- 弦波序列$A\cos(\omega n+\phi)$与复数指数序列$Be^{j\omega n}$ 都是周期为 N 的周期性序列，我们能够找到N，满足$A\cos(\omega(n+N)+\phi)=A\cos(\omega n+N\omega+\phi)$,对任意$n$都成立
- 显然上述公式成立的条件时，$\omega N=2\pi r$,其中r是任意正整数。我们需要找到一个N（以及一个r）能够满足上述条件即可。
- 满足条件的最小N 值称为序列的基本周期。
- 证明见下一页

基本序列-正弦信号的周期（2）

- 对于$x[n] = \cos(\omega n + \phi), x_2[n] = \cos(\omega(n+N) + \phi)$

$$x_2[n] = \cos(\omega(n+N) + \phi) = \cos(\omega n + \phi)\cos(\omega N) - \sin(\omega n + \phi)\sin(\omega N)$$

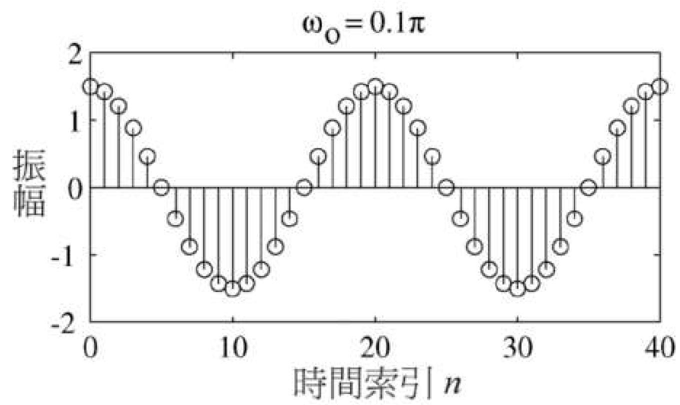
$$= \cos(\omega n + \phi) = x[n]$$

- 当且仅当， 对任何n 有$\cos(\omega N) = 1$且$sin(\omega N) = 0$
  - 注：是找到一个N保持上式成立可以成立，则

$$\omega N = 2\pi r, \frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{r}$$

- 或者$\frac{N}{r}$ ω 是2π 的整倍数。

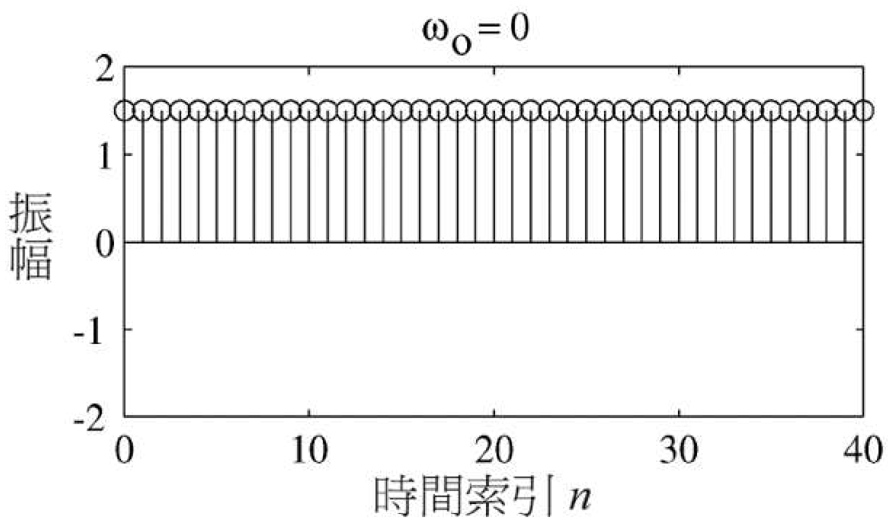
基本序列-正弦信号的周期（3）



- 此处$\omega = 0.1\pi$, 考虑公式$\omega N = 2\pi r$, $N = \frac{2\pi}{\omega} r$
- 因此，对 $r = 1$ 而言，周期为$N = \frac{2\pi}{0.1\pi} r = 20r = 20 * 1 = 20$
- 总结方法：找到满足N为整数的最小r，然后找到相应的N

2024-10-22

基本序列-正弦信号的周期（4）



- 此处$\omega = 0$, $\cos 0n = 1$，因此，对 $r = 0$ 而言，周期为

$$N = \frac{2\pi r}{0} = \frac{0}{0} \to 1$$

多选题 1分

$y[n] = cos\left(\frac{13}{7}\pi n + 0.2\pi\right)$的周期是

- A 7
- B 13
- C 14
- D 26
- E 28
- F 52
- G 没算出来

2024-10-22

多选题 1分

$y[n] = \sin(\frac{17}{9}n + 0.4\pi)$ 的周期是

- A 17
- B 18
- C 34
- D 36
- E 我没算出来

2024-10-22

42

基本序列-正弦信号的周期（5）

- $y[n] = \sin(13/7n + 0.2\pi)$，或者 $y[n] = \sin(\sqrt{3}n + 0.2\pi)$ 是非周期的！

在DSP中，正余弦信号可能是非周期的！！！

周期的必要条件时 $\frac{2\pi}{\omega}$是有理数

（有理数总是可以化作整数的分子/分母的形式，令r =分母，可以求出周期）

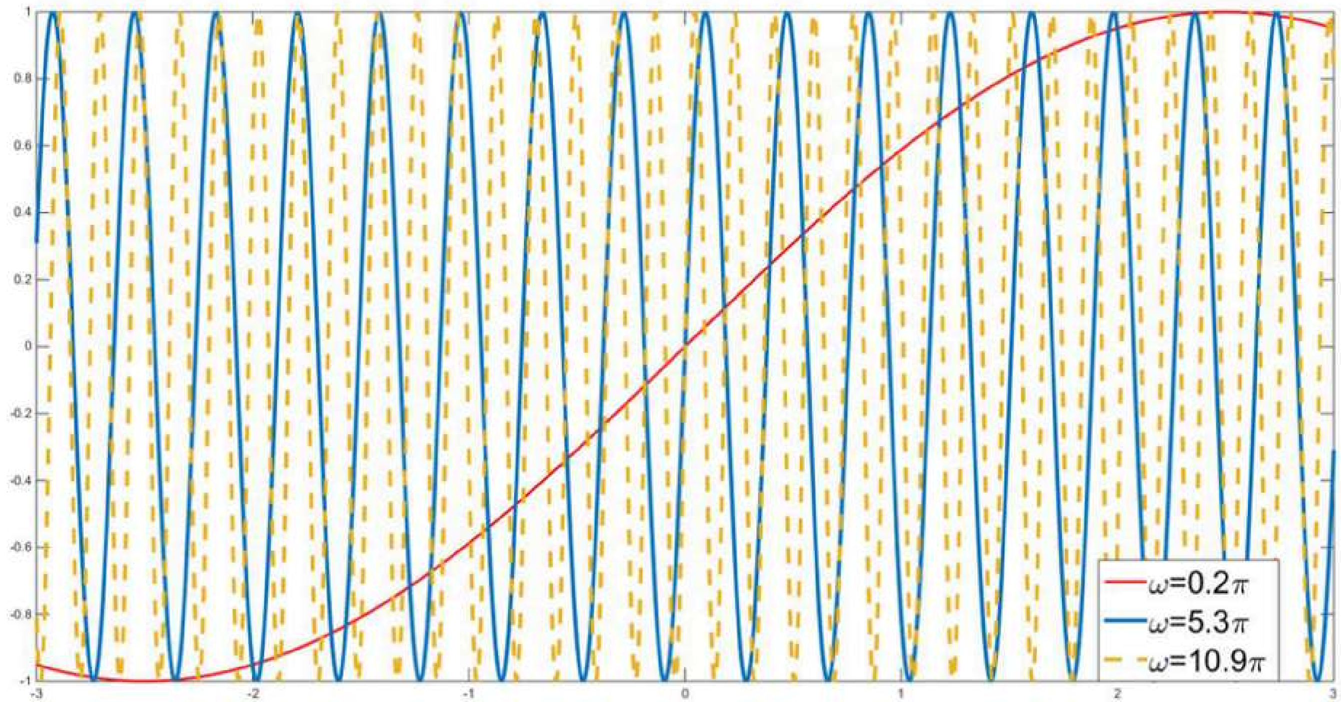
2024-10-22

43

基本序列-正弦信号的周期（7）

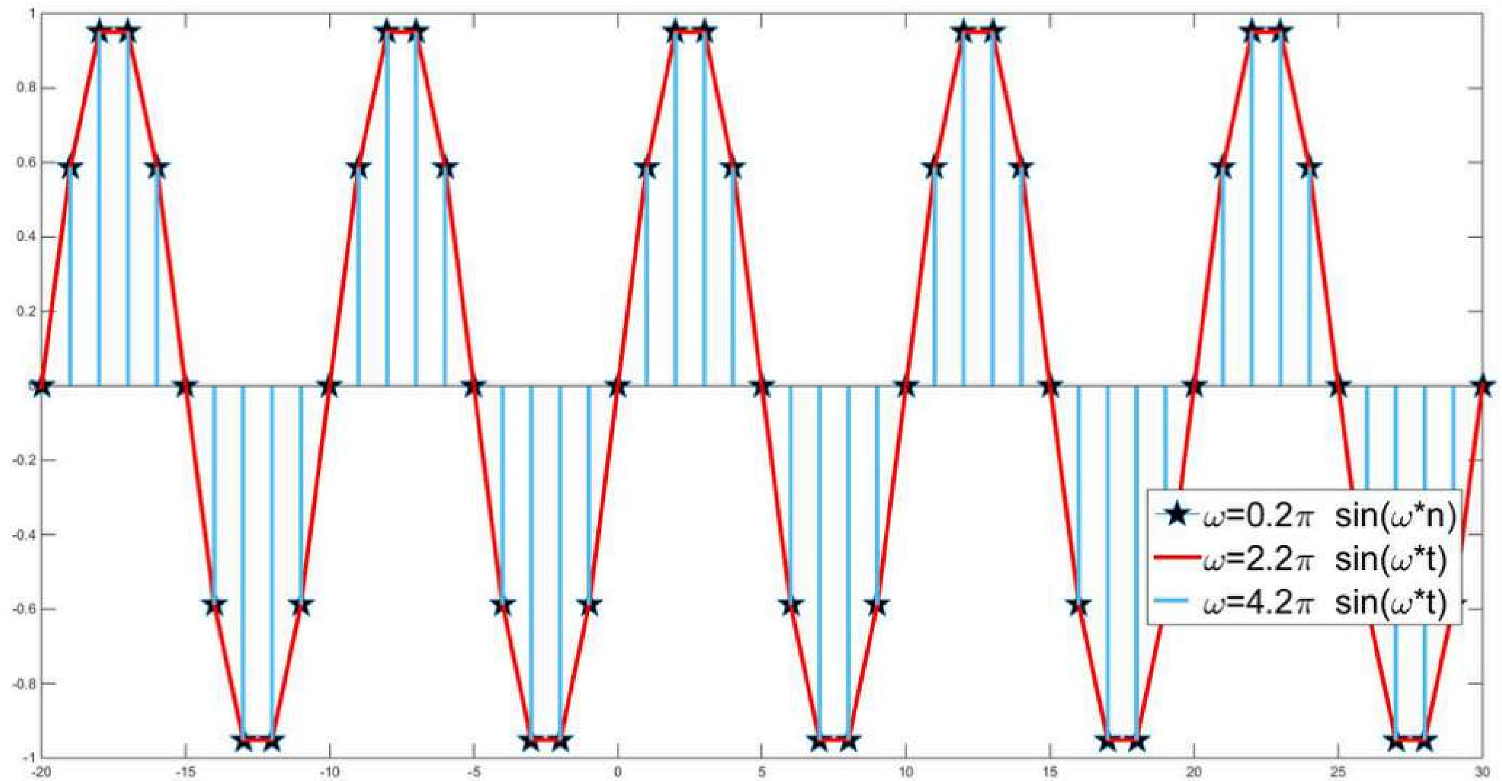
- 深入讨论：为何DSP中正余弦信号有可能是非周期的？
  - 在连续信号中，$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$,我们总可以找到一个 T，令$T = \frac{2\pi}{\omega}$, 那怕此时T是无理数，

    例如$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$，此时我们仍然可以找到一个周期，保证$f(t)$周期性重复
  - 在离散型号中，N必须为一个整数，所以当$\frac{2\pi}{\omega}$是无理数时，$x[n] = \sin(\omega n + \varphi)$是非周期的
- 第一个特点：DSP中正弦信号不一定是周期的！



2024-10-22

45



2024-10-22

基本序列-正弦信号中的ω（3）

- 第二个特点：DSP中的正弦信号关于ω是周期的！！
- 问1：为什么离散正弦信号关于ω是周期？
  - 如前面讨论：

$$e^{j\omega_2 n} = e^{j(\omega_1+2\pi k)n} = e^{j\omega_1 n}e^{j2k\pi n}$$

  - n是整数，k是整数，所以有 $2\pi(kn)$，是2π的整倍数
- 问2：为什么连续正弦信号关于ω不是周期？

$$e^{j\omega_2 t} = e^{j(\omega_1+2\pi k)t} = e^{j\omega_1 n}e^{j2k\pi t}$$

  - 不论k多大，总有一个区间 $D = (0, \frac{1}{k})$, 任意时间片段 $t \in D$, $s.t.\ \ kt < 1$, $\therefore 2\pi kt < 2\pi$
  - 对于$t \in D$，$e^{j\omega_2 t} = e^{j(\omega_1+2\pi k)t} = e^{j\omega_1 n}e^{j2k\pi t} \neq e^{j\omega_1 n}$

2024-10-22

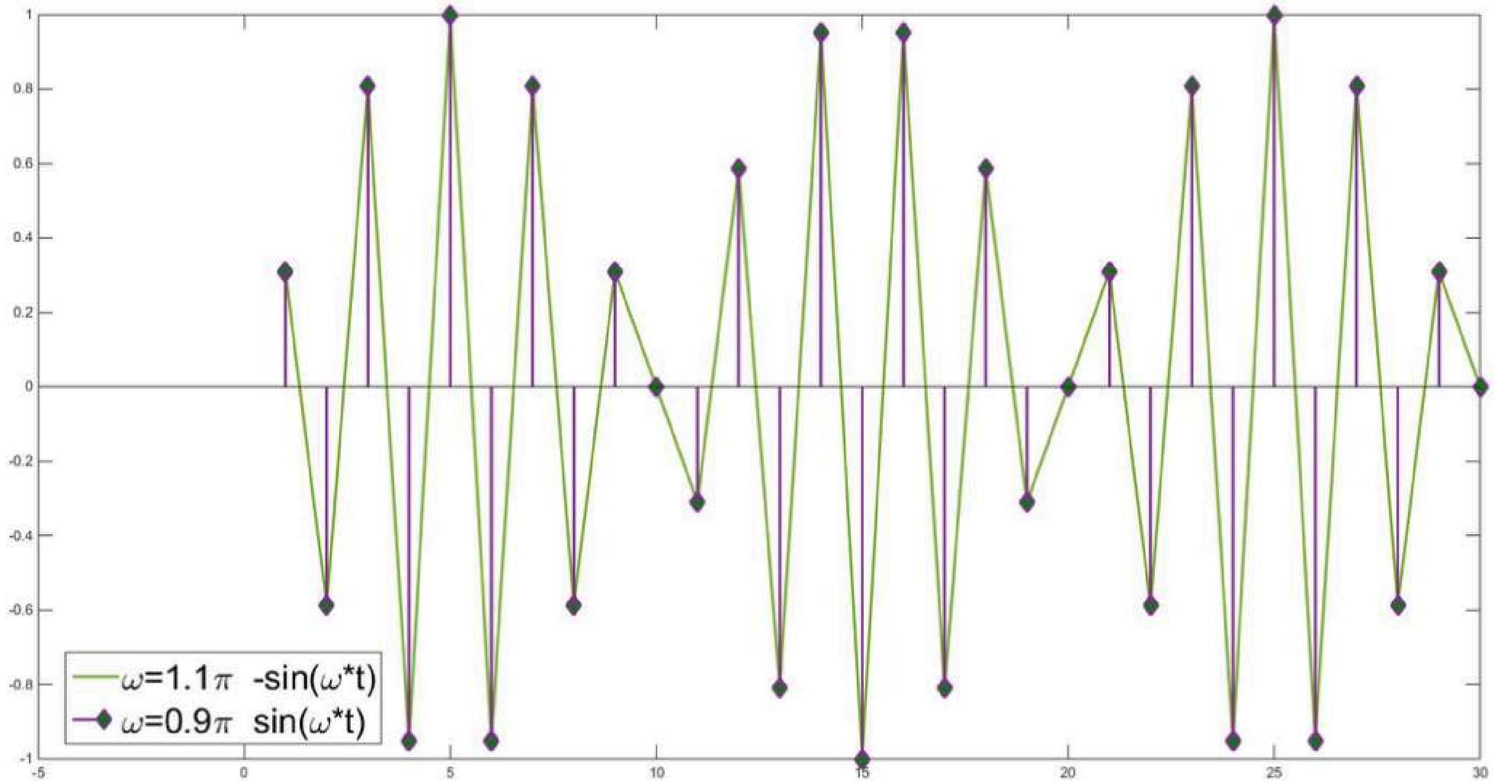
基本序列-正弦信号中的ω（4）

- 问3：离散正弦信号关于ω是周期，此时对ω 有没有要求？
  - 讨论n的周期性，对ω有要求，要求$\frac{2\pi}{\omega}$是有理数
  - 讨论ω 自己的时候呢？见下面例子：
  - $\omega = \sqrt{3}$，此时$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$，是无理数，所以不论$r$取什么值，都找不到$N$满足周期性
  - 但是对于ω自身，令$\omega_2 = \omega + 2\pi = \sqrt{3} + 2\pi$

$$e^{j\omega_2 n} = e^{j(\sqrt{3}+2\pi)n} = e^{j\sqrt{3}n}e^{j2\pi n} = e^{j\sqrt{3}n}$$

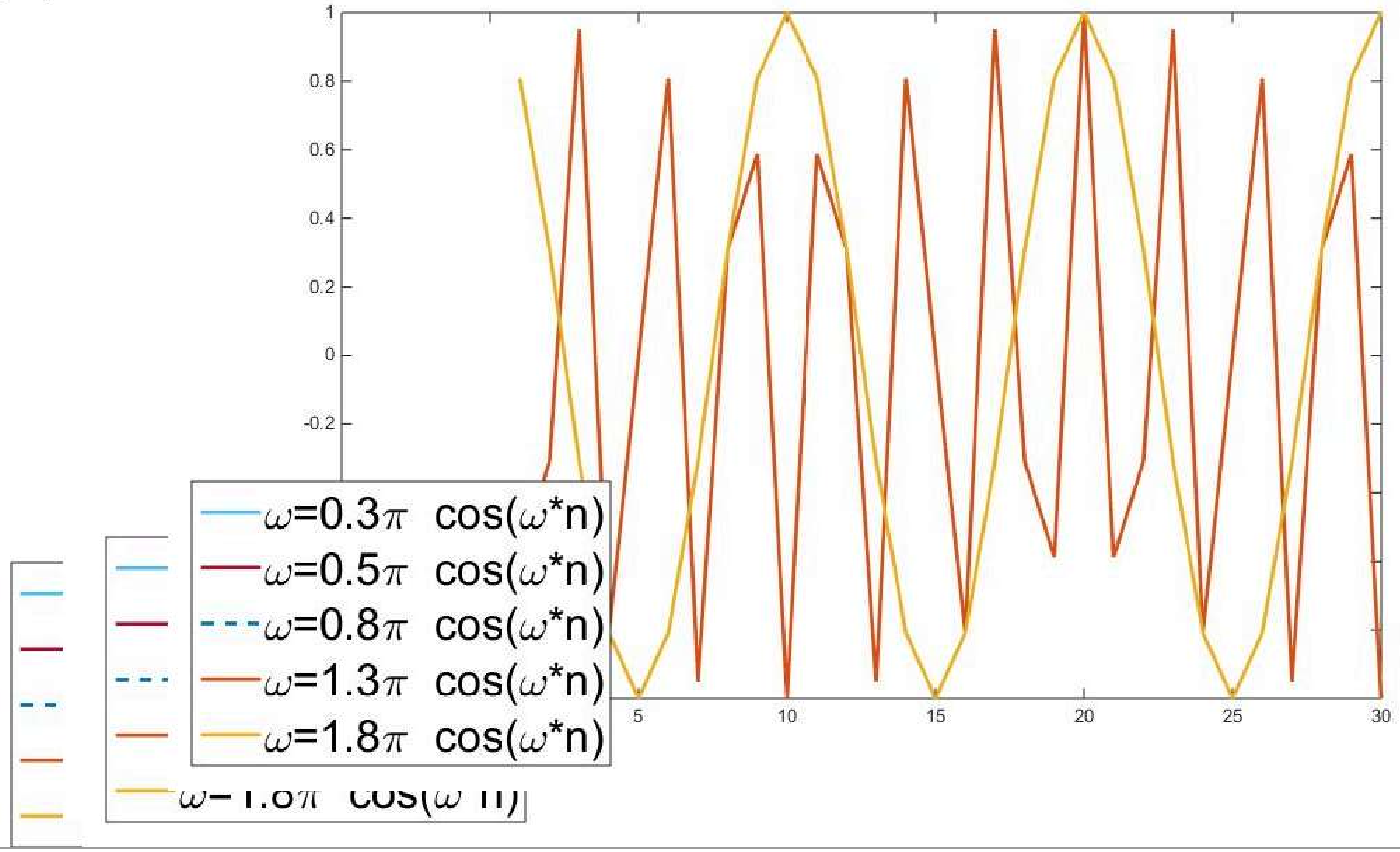
  - ω使正弦函数本身非周期，但是ω自身却永远具有周期性

2024-10-22



2024-10-22

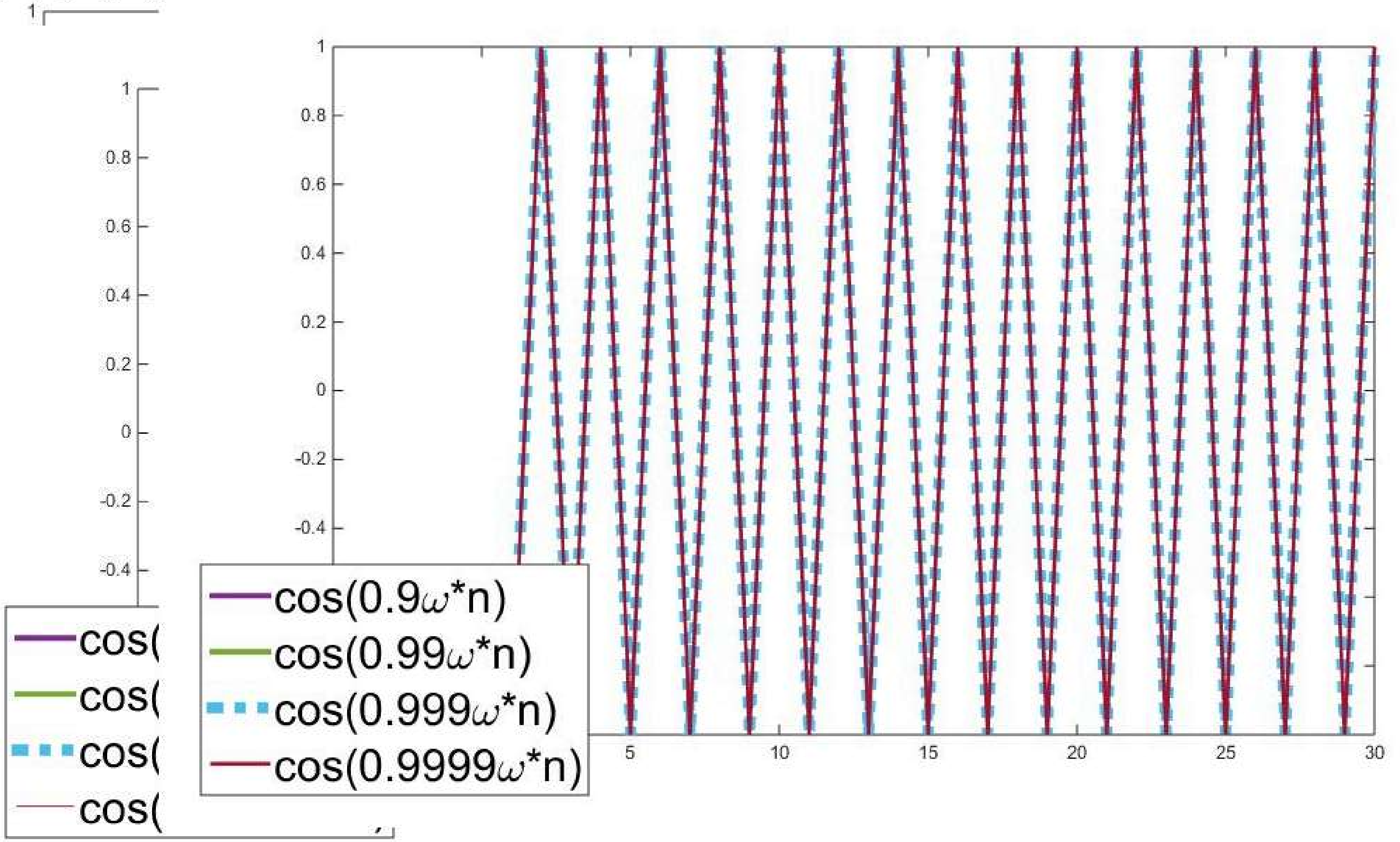
基本序列



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
5
10
15
20
25
30
ω=0.3π cos(ω*n)
ω=0.5π cos(ω*n)
ω=0.8π cos(ω*n)
ω=1.3π cos(ω*n)
ω=1.8π cos(ω*n)

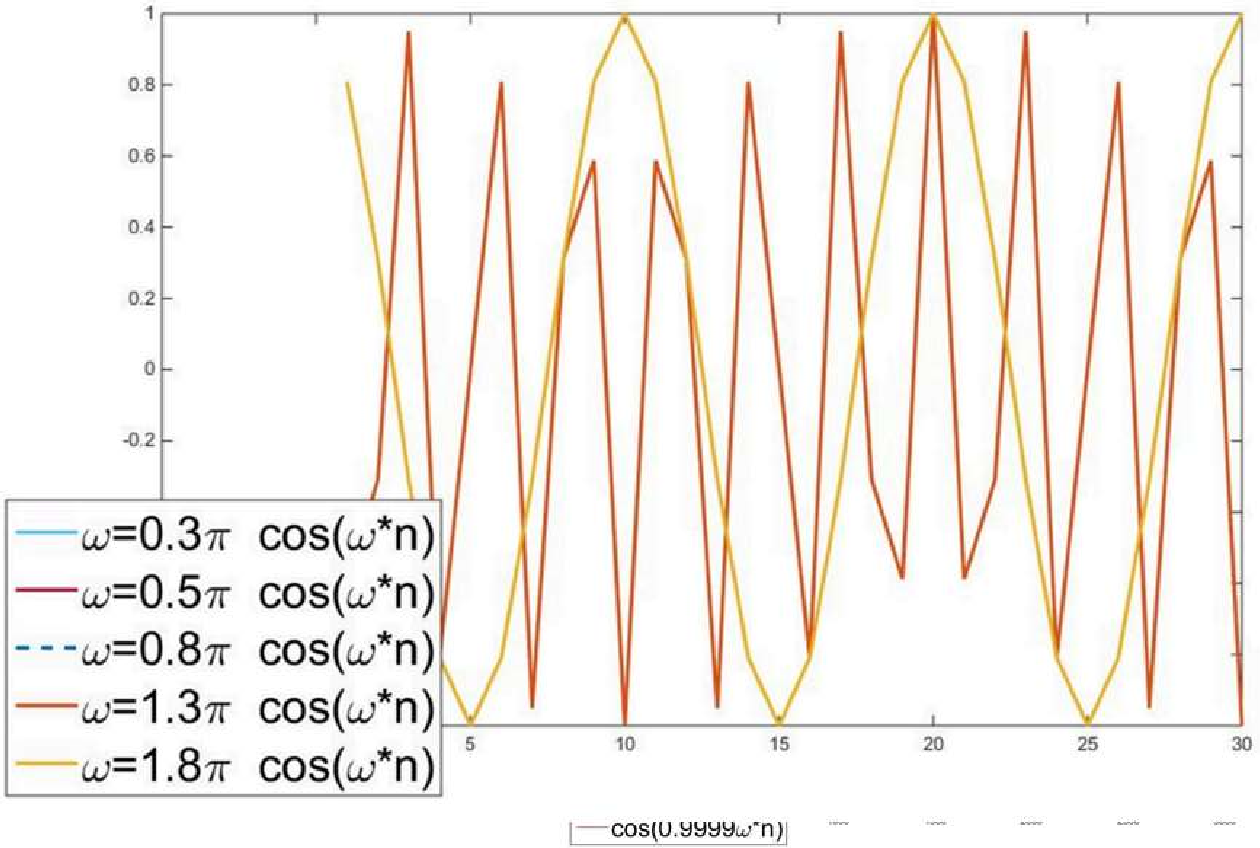
从π到

基本序列-正弦信号中的ω（7）



基本序列-正

- 性质4：DSP中的
- 问2：频率有上限
  - 采样定理部分回
- 问3*：震荡周期
- 所以我们本处讨i
- 定义、区分留作i



2024-10-22

基本序列-正弦信号的性质回顾

- 性质1：正余弦信号不一定是周期的，要满足$\frac{2\pi}{\omega}$为有理数
- 性质2：正余弦信号关于ω一定是周期的。
- 性质3：正弦信号不同的曲线ω 关于$\omega=\pi$ 分别轴对称（余弦）和点对称（正弦）--此处对称：指的是两条曲线看起来一样！
- 性质4：高频部分在$\omega=\pi$出现；低频部分在$\omega=0$出现
- 未解决问题1：频率有上限，不能表达所有的信号
- 未解决问题2：震荡频率与数学的频率，定义于推导。

2024-10-22

练习：尝试证明一下的性质

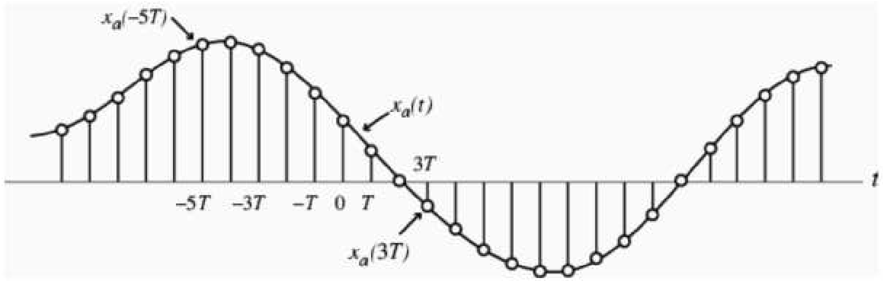
- $e^{-j\theta} = \left(e^{j\theta}\right)^*$,$*$ 为共轭
- 令$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$，$N$，$k$为自取的正整数，$n$为信号的$index$，$n \le N, k \le N$
  - 对称性 $(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{n(N-k)}$
  - 周期性 $W_N^{nk} = W_N^{(N+n)k} = W_N^{n(N+k)}$
  - 可约性 $W_N^{nk} = W_{mN}^{mnk}$，$W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$
  - 特殊点： $W_N^0 = 1$ $W_N^{N/2} =-1$ $W_N^{(k+N/2)} =- W_N^k$

本章要点

- 信号的表示
- 信号的基本运算
- 信号分类
- 基本信号
- 信号的抽样
- 信号系统介绍

离散时间取样-1

- 在一些应用中，离散时间序列 {x[n]} 可藉由对一连续时间信号 $x_a(t)$ 以一等距时间间隔周期性地取样而产生。



- 连续与离散信号之间的关系是：

$$x[n] = x_a(t)|t = nT = x_a(nT), n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

  - 两个连续取样点间的时间间隔称为「取样区间」或「取样周期」。
  - 取样周期的倒数称为取样频率 FT ： $F_T = \frac{1}{T}$
  - 取样频率的单位为次/秒。当取样周期的单位为秒时，取样频率的单位为赫兹 (hertz , Hz)。

基本序列-角速度，频率与周期

- 基本知识复习
  - T, f, ω
  - $T \cdot f = 1, T = 1/f, f = 1/T;$
  - $\omega = 2\pi/T; T = 2\pi/\omega;$
  - $\omega = 2\pi f; f = \omega/2\pi;$
- 以上定义对于信号取样过程同样适用
  - 尽管我们在取样时实际上只会使用f，T的概念，但是（为了后续的研究）方便，我们仍然会定义采样的角速度这个概念。

离散时间取样-习题

- 练习1：对下列序列进行取样，计算相应离散序列（取样频率 $2Hz$）

$$x(t) = 2.5t^2;\qquad x(t) = 2.5\tan t + \operatorname{sgn} t$$

- 练习2：已知对应的连续信号与离散信号，求相应的取样周期

$$x(t) = 2.5t^2 \Leftrightarrow x[n] = 25n^2$$

- 练习3：求下列取样过程中，a，b的值为？

$$x(t) = 2.5t^2 + 5t \Leftrightarrow x[n] = 10n^2 + an$$

$$x(t) = 5t^3 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow x[n] = 40n^3 + \frac{b}{n}$$

离散时间取样-2

- 采样周期、频率是采样的性质，他和
  - 正弦函数频率无关！！！
  - 也与$x(t)$原函数的周期频率无关（例如方波、阶梯等任意周期函数）！！！

- 但是：任何连续函数无论是否是周期函数（有没有自己的频率），采样结果都包含取样频率的影响。尤其
  - 当取样函数和周期函数复合起来，问题就会复杂化
  - 还记得我们讨论的，DSP中离散正弦信号的周期上限吗？

2024-10-22　　59

取样周期与周期函数1

- 我们来研究获取余弦函数$x[n] = \cos(\omega n + \varphi)$的过程：
- 对于$x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \varphi)$进行采样

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 nT + \varphi) = A\cos\left(\frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_T} n + \varphi\right) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

- 其中$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi\frac{\Omega_0}{\Omega_T} = \Omega_0 T = 2\pi\frac{F_0}{F_t}$
  - 用大写的Ω_0, F_0及角标0 来表示原连续三角函数信号的特性
  - 用小写的ω_0, f_0及角标0 来表示采样的离散三角函数信号的特性
  - 用大写的Ω_T, F_T及角标T,以及周期T来表示采样的特性

取样周期与周期函数-2

- 考虑三个连续时间讯号

$$g_1(t) = \cos(6\pi t)\,;\, g_2(t) = \cos(14\pi t)\,;\, g_3(t) = \cos(26\pi t)\,;$$

  - 其频率分别为 3 Hz, 7 Hz, 13 Hz，

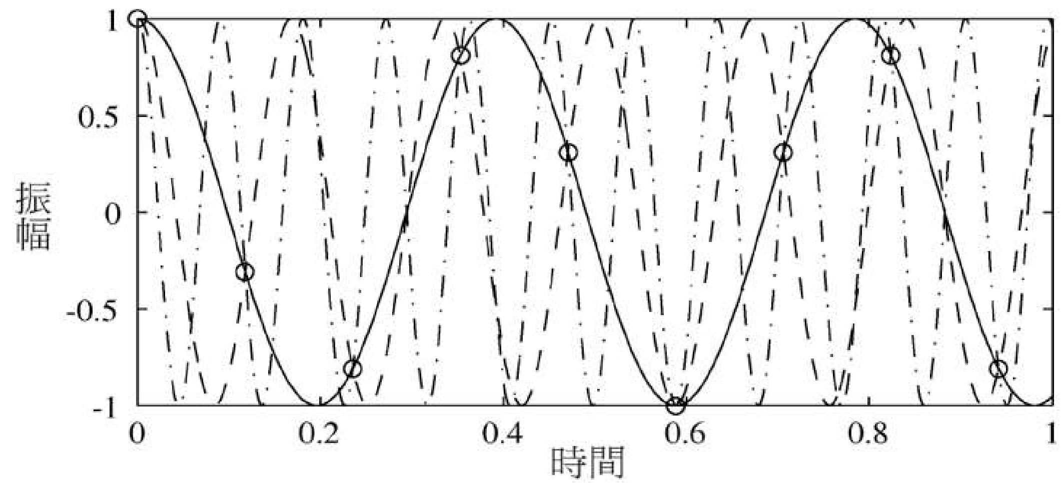
- 我们以 10 Hz 的频率取样 ($T = 0.1$ sec) 后产生以下三个序列

$$g_1[n] = \cos(0.6\pi n)\,;\, g_2[n] = \cos(1.4\pi n)\,;\, g_3[n] = \cos(2.6\pi n)\,;$$

  - 看出问题了吗？

取样与周期函数复合-3

- 这些取样后序列的图形（用圆圈表示）和它们原来的时间函数一起绘于下图：



- 从这些图形我们可以观察到，对每一个 n 值，每一个序列都有相同的取样值。

取样与周期函数复合-4

- 藉由观察下式亦可证明上述观点

$$g_2[n] = \cos(1.4\pi n) = \cos\big((2\pi - 0.6\pi)n\big) = \cos(0.6\pi n) = g_1[n];$$

$$g_3[n] = \cos(2.6\pi n) = \cos\big((2\pi + 0.6\pi)n\big) = \cos(0.6\pi n) = g_1[n]$$

- 此时:所有上述三个序列基本上是相同的，我们很难对任一个序列去对应一个唯一的连续时间函数。
- 较高频率的连续时间弦波讯号在取样后得到一个较低频率的弦波序列,从而无法分辨，这种现象称为

混迭 (aliasing)

取样与周期函数复合-5

- 在经过周期性取样后，有无限组连续时间函数会得到相同的离散序列，因此必须有额外的条件（采样频率）来让序列$\{x[n]\} = \{x_a(nT)\}$.能够唯一代表其原来的连续时间函数 $x_a(t)$。
  - 这也就是为什么我们看到音频文件都会带有采样率这个属性的原因。
- 另一个方面理解：$x[n]$中n是没有单位的，所以必须配上周期T我们才能知道Δn代表多少时间间隔，n对应什么时间信息。

2024-10-22

取样与周期函数复合-6

- 范例 — 对一个包含五种频率 (30 Hz、150 Hz、170 Hz、250 Hz 及 330 Hz) 弦波信号加权组合的连续时间讯号以 200 Hz 的取样频率进行均匀取样，试决定取样后的离散时间讯号 $v[n]$。该连续时间讯号 $v_a(t)$ 如下：

$$v_a(t) = 6\cos(60\pi t) + 3\sin(300\pi t) + 2\cos(340\pi t) + 4\cos(500\pi t) + 10\sin(660\pi t)$$

- 取样周期 $T = \frac{1}{200} = 0.005s$
- 得到的$v[n]$为

$$v_a(t) = 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin(1.5\pi n) + 2\cos(1.7\pi n) + 4\cos(2.5\pi n) + 10\sin(3.3\pi n)$$

$$= 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin\big((2\pi - 0.5\pi)n\big) + 2\cos\big((2\pi - 0.3\,\pi)n\big) + 4\cos\big((2\pi + 0.5\pi)n\big)$$

$$+ 10\sin\big((4\pi - 0.7\pi)n\big)$$

2024-10-22

65

取样与周期函数复合-7

$$v(n) = 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin(1.5\pi n) + 2\cos(1.7\pi n) + 4\cos(2.5\pi n) + 10\sin(3.3\pi n)$$

$$= 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin\big((2\pi - 0.5\pi)n\big) + 2\cos\big((2\pi - 0.3\,\pi)n\big) + 4\cos\big((2\pi + 0.5\pi)n\big)$$

$$+ 10\sin\big((4\pi - 0.7\pi)n\big)$$

$$= 6\cos(0.3\pi n) - 3\sin(0.5\pi n) + 2\cos(0.3\pi n) + 4\cos(0.5\pi n) - 10\sin(0.7\pi n)$$

$$= 8\cos(0.3\pi n) + 5\cos(0.5\pi n + 0.6435) - 10\sin(0.7\pi n)$$

- 注意：v[n] 仅包含 3 个正规化角频率： $0.3\pi, 0.5\pi, 0.7\pi$
- 丢失了2个组成信号，再也找不到了

2024-10-22

66

取样与周期函数复合-8

- 注意：以200 Hz 的取样频率对下列讯号进行均匀取样，亦可以得到如上相同的离散时间讯号：

$$w_a(t) = 8\cos(60\pi t) + 5\cos(100\pi t + 0.6435) - 10\sin(140\pi t)$$

$$g_a(t) = 2\cos(60\pi t) + 4\cos(100\pi t) + 10\sin(260\pi t) + 6\cos(460\pi t) + 3\sin(700\pi t)$$

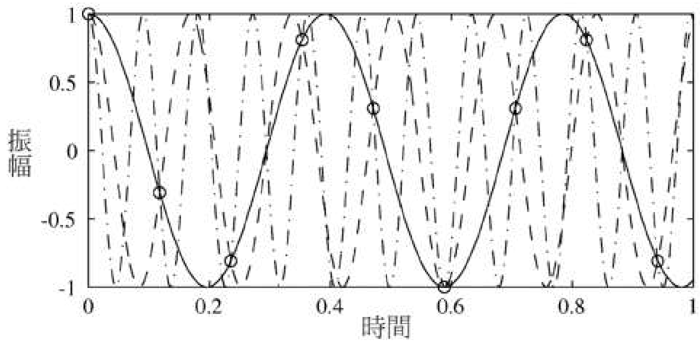
- 比对

$$v_a(t) = 6\cos(60\pi t) + 3\sin(300\pi t) + 2\cos(340\pi t) + 4\cos(500\pi t) + 10\sin(660\pi t)$$

2024-10-22

取样与周期函数复合-9

- 为什么会发生混叠？？？



- 那么相应的应该怎么办？

2024-10-22

单选题 1分

回顾 $\omega_0 = 2\pi\frac{\Omega_0}{\Omega_T}$， 其中$\Omega_0$是连续信号的周期，对于频率是单增的，但是采样后，结果落入了ω的对称区间。如果我们调整Ω_T，让所有的ω都落入一个不产生对称的区间，那么就不会有混叠了。

这个不会产生对称-混叠的区间是下面哪一个？（不关注开闭区间的问题）

- A $[0,2\pi]$
- B $[-\pi,\pi]$
- C $[0,\pi]$

2024-10-22

取样与周期函数复合-10

- 让每一个ω_0都落入$[0,\pi]$区间，而$\sin\omega n$在这个区间频率是单增的，不存在混叠。
- 问题：如何选取Ω_T让ω_0落入$[0,\pi]$?
- $\omega_0=\frac{\Omega_0}{\Omega_T}$,则需要令$\Omega_T>2\Omega_0$,才不会有混迭的现象发生
  - 注:此时的Ω_0是对于所有分量说的
- 考虑一个可以表示成数个弦波讯号加权和的任意连续时间讯号$x_a(t)$,如果取样频率Ω_T被选取为$x_a(t)$中最大频率的2倍以上，则$x_a(t)$可以其取样值$\{x[n]\}$来唯一表示---- 采样定理

  - 采样定理的形象解释

取样速率的转换-1

- 它通常被用来产生另一个取样速率较原序列高或低的序列。
- 假设 $x[n]$ 是一个取样速率为 $F_T^{\square} Hz$ 的序列，被用来产生另一个取样速率为 $F'_T Hz$ 的序列 $y[n]$，则定义取样速率转换比例为：

$$R = \frac{F_T^{\square}}{F_T'}$$

- 如果 $R > 1$，该程序被称为内插 (interpolation)。
- 如果 $R < 1$，则该程序被称为间取 (decimation)。

取样速率的转换-2

- 若以整数因子L>1来进行上取样，则 L-1 个等距的零点会被上取样器插入到原输入序列 x[n] 的任两个连续取样点之间。

$$x_u[n]=\begin{cases} x[n/L], & n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow x_u[n]$$

取样速率的转换-4

- 相反地，若以一个整数因子 $M>1$ 来进行下取样，则每第 M 个 x[n] 的取样值将被保留，而其间 M-1 个取样值将被移除。

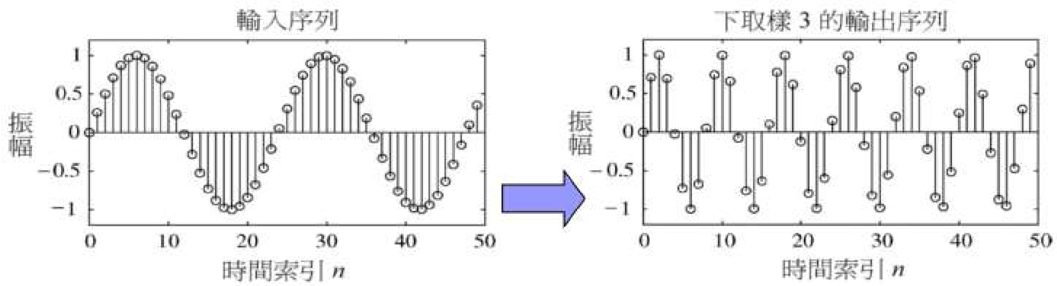
$$y[n]=x[nM]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$

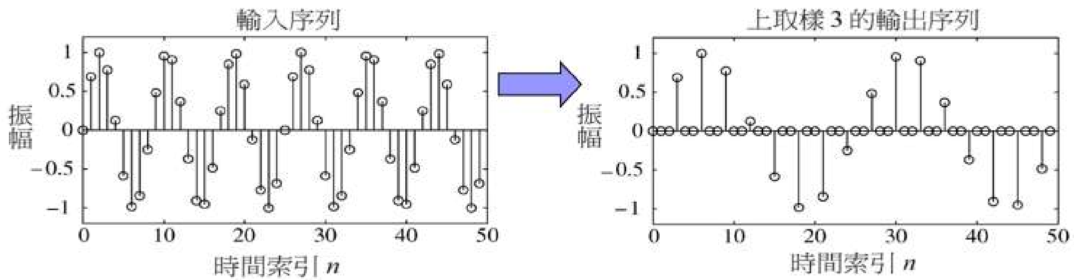
2024-10-22

上下取样比较

- 下取样



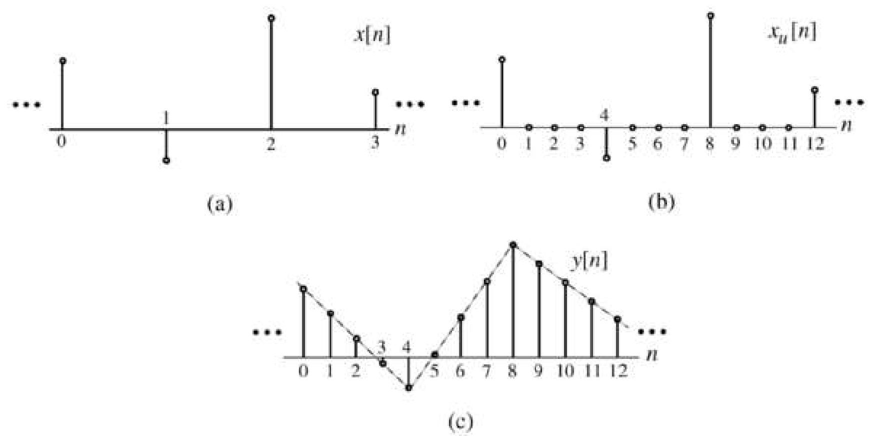
- 上取样



2024-10-22

离散时间系统：取样和插值

- 线性内插器 - 常被用来估算一个离散序列中相邻两个取样点之间的取样值。
- 4-因子 (factor-of-4) 内插



2024-10-22

离散时间系统：取样和插值

- 2-因子 (factor-of-2) 内插

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{2}(x_u[n-1] + x_u[n+1]$$

- 3-因子 (factor-of-3) 内插

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{3}(x_u[n+2] + x_u[n-2]) + \frac{2}{3}(x_u[n+1] + x_u[n-1])$$

3-因子插值的理解

- 当我们希望插值判断一个数据时：我们按照如下方法接受序列中的数据对我们的影响
  - 坐标相同的点$x_u[n] \leftrightarrow y[n]$　　100%接受他的信息（系数为1）
  - 相距1个点位的点 $x_u[n \pm 1] \leftrightarrow y[n]$　　67%接受他的信息（系数为2/3）
  - 相距2个点位的点 $x_u[n \pm 2] \leftrightarrow y[n]$　　33%接受他的信息（系数为1/3）
  - 再远的点，　　0%接受他的信息
- 这个观点我们在下一节课会学到

离散时间系统：取样和插值-练习

- 计算下列序列$x[n] = \{2,13,0,7,3,8,61\}$
  $$\uparrow$$

- 经过为3的上取样后，分别经过2/3因子内插的结果

离散时间系统：取样和插值

- **2-因子内插**

原始影像(512 × 512)
Original (512×512)

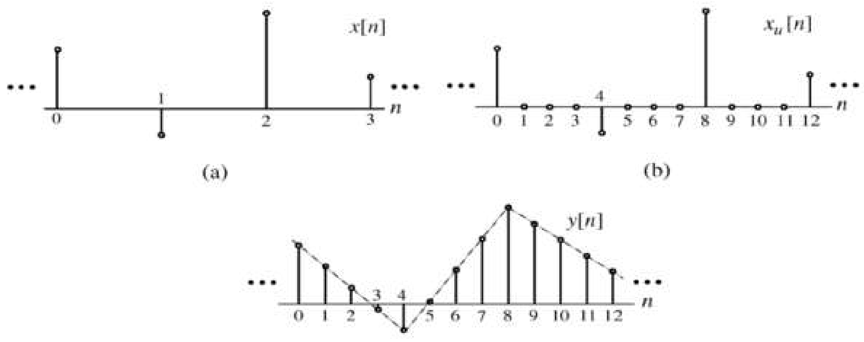
下取样影像
(256 × 256)
(256×256)

双线性内插影像(512 × 512)
Interpolated (512 × 512)

2024-10-22

离散时间系统：其他的内插器

- 思考题：
- 你能设计描述一个其他类型的内插器，数学表示，并描述他的性质吗？



(a) (b) (c)

2024-10-22

离散时间系统：内插的变换

- 思考题2：
- 关于编程：总所周知（就算不知道，编程了也应该理解了）电脑无法真正表示连续信号，只能通过很密集很密集的离散信号模拟稠密信号。假设我用 $t =- 100: 0.01: 100$ 序列模拟了连续信号，事实证明，也模拟的很好，其中$step = 0.01$。我们计算 $\sin(\omega t)$,也观察到ω对于函数频率是“单增”。对比$n =- 100: 1: 100$ 序列模拟了离散信号， $\sin(\omega n)$ 呈周期性。
- 一切都很完美
- 但是仔细观察，用 $t =- 100: 0.01: 100$ 也是一个离散序列，所以此时ω也应该在一个范围呈周期性，只是我们没有找到，请找到这个周期范围，并给出他和$step$的对应关系通式。

2024-10-22

81