Параметр	Описание
$\alpha(t)$	угол поворота тележки
$x(t), y(t)$	координаты цетра тележки в абсолютной системе координат
q	вектор обобщённых координат тележки
$A(q)$	матрица преобразования из абсолютной СК в СК тележки
R	радиус-вектор центра тележки в абсолютной СК
K	кинетическая энергия системы
L	лагранжиан системы
τ	вектор обобщённых сил, действующих на тележку
l	расстояние от центра тележки до колеса по оси Оу
r	радиус колёс тележки
τ_1, τ_2	моменты, развиваемые на колёсах тележки
T, F_1, F_2	момент и силы, действующие на тележку
E	матрица согласования τ_1, τ_2 с T, F_1, F_2

Выделим две системы координат: абсолютная СК, начало которой совпадает с краем рабочей области и СК тележки, начало которой находится в центре тележки.

Пусть угол поворота тележки, т.е. угол поворота между указанными двумя СК равен $\alpha(t)$, а координаты тележки равны $(x(t), y(t))$, обозначим вектор обобщённых координат тележки за $q(t) = [\alpha(t)\ x(t)\ y(t)]^T = q$. тогда указанные системы координат будут связаны следующей матрицей преобразования:

$$A(q) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) & x(t) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & y(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Пусть центр тяжести в СК тележки имеет координаты (c_x, c_y). Тогда центр масс тележки будет иметь в базовой СК следующие координаты:

$$R = A(q) \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \cos(\alpha(t)) - c_y \sin(\alpha(t)) + x(t) \\ c_x \sin(\alpha(t)) + c_y \cos(\alpha(t)) + y(t) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

При таком алгоритме подсчёта R расширяется до размерности 3x1. Нам нужны только первые две координаты, но т.к. при подсчёте кинетической энергии нам нужен квадрат производной, а третья координата $R_3 \equiv 1$, то $\dot{R}_3 \equiv 0$, что при возведении вектора $\dot{R}$ в квадрат $\dot{R}^T * \dot{R}$ не привнесёт никаких изменений. Поэтому не будем тратить время на редуцирование вектора R, а будем дальше использовать его таким, как он есть.

Т.к. потенциальна энергия постоянна (тележка всегда находится на одной высоте), то Лагранжиан системы $L = K - H$, где K - кинетическая, H - потенциальная энергия, принимает вид $L = K$.

$$L = K = \frac{1}{2}(m\dot{R}^T\dot{R} + I\dot{\alpha}^2) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \frac{\partial}{\partial t}(A(q) * [c_x\ c_y\ 1]^T) = \begin{bmatrix} \dot{x(t)} - c_y\cos(\alpha(t))\dot{\alpha(t)} - c_x\sin(\alpha(t))\dot{\alpha(t)} \\ \dot{y(t)} + c_x\cos(\alpha(t))\dot{\alpha(t)} - c_y\sin(\alpha(t))\dot{\alpha(t)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

После группировки:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \begin{bmatrix} \dot{x(t)} - \dot{\alpha(t)}(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ \dot{y(t)} - \dot{\alpha(t)}(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Тогда

$\dot{R}^T\dot{R} = (\dot{x(t)} - \dot{\alpha(t)}(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))))^2 + (\dot{y(t)} - \dot{\alpha(t)}(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))))^2$

Раскроем скобки:

$\dot{R}^T\dot{R} = \dot{x(t)}^2 + \dot{\alpha(t)}^2(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t)))^2 - 2\dot{x(t)}\dot{\alpha(t)}(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) + \dot{y(t)}^2 + \dot{\alpha(t)}^2(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t)))^2 - 2\dot{y(t)}\dot{\alpha(t)}(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t)))$

Сгруппируем слагаемые:

$\dot{R}^T\dot{R} = \dot{x(t)}^2 + \dot{y(t)}^2 + \dot{\alpha(t)}^2((c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t)))^2 + (c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t)))^2) - 2\dot{\alpha(t)}(\dot{x(t)}(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) + \dot{y(t)}(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))))$

В слагаемом при $\dot{\alpha(t)}^2$ несложно увидеть основное тригонометрическое тождество при раскрытии скобок:

$(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t)))^2 + (c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t)))^2 = c_y^2 + c_x^2$

Тогда исходное выражение можно представить в следующем виде:

$\dot{R}^T\dot{R} = \dot{x(t)}^2 + \dot{y(t)}^2 + \dot{\alpha(t)}^2(c_y^2 + c_x^2) - 2\dot{\alpha(t)}(\dot{x(t)}c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{x(t)}c_x\sin(\alpha(t)) + \dot{y(t)}c_y\sin(\alpha(t)) - \dot{y(t)}c_x\cos(\alpha(t)))$

Найдём отдельно производную $\dot{R}^T\dot{R}$ по q:

$$\frac{\partial(\dot{R}^T\dot{R})}{\partial q} = -2\dot{\alpha}(t)\begin{bmatrix} -\dot{x}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{x}(t)c_x\cos(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_y\cos(\alpha(t) + \dot{y}(t)c_x\sin(\alpha(t))) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -m\dot{\alpha}(t)\begin{bmatrix} \dot{x}(t)c_x\cos(\alpha(t)) - \dot{x}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_x\sin(\alpha(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Теперь найдём отдельно производную $\dot{R}^T\dot{R}$ по $\dot{q}$:

$$\frac{\partial(\dot{R}^T\dot{R})}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 2\dot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - 2(\dot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) - \dot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t))) \\ 2\dot{x}(t) - 2\dot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ 2\dot{y}(t) - 2\dot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\dot{R}^T\dot{R})}{\partial \dot{q}} = 2\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - \dot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) - \dot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) - \dot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t)) \\ \dot{x}(t) - \dot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ \dot{y}(t) - \dot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\dot{R}^T\dot{R})}{\partial \dot{q}} = 2\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - (\dot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) - \dot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t))) \\ \dot{x}(t) - \dot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ \dot{y}(t) - \dot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix}$$

Найдём для начала промежуточные значения выражений

$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - \dot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) - \dot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) - \dot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t)))) = \ddot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - \ddot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \ddot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) + \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)c_x\cos(\alpha(t)) - \ddot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) - \dot{y}(t)\dot{\alpha}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \ddot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t)) - \dot{y}(t)\dot{\alpha}(t)c_x\sin(\alpha(t))$

$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{x}(t) - \dot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t)))) = \ddot{x}(t) - \ddot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) - \dot{\alpha}(t)(-\dot{\alpha}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)c_x\cos(\alpha(t)))$

$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{y}(t) - \dot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t)))) = \ddot{y}(t) - \ddot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) - \dot{\alpha}(t)(\dot{\alpha}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)c_x\sin(\alpha(t)))$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\dot{R}^T\dot{R})}{\partial \dot{q}} = 2\begin{bmatrix} \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)c_x\cos(\alpha(t)) - \dot{y}(t)\dot{\alpha}(t)c_y\cos(\alpha(t)) - \dot{y}(t)\dot{\alpha}(t)c_x\sin(\alpha(t)) \\ -\dot{\alpha}(t)(-\dot{\alpha}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)c_x\cos(\alpha(t))) \\ -\dot{\alpha}(t)(\dot{\alpha}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)c_x\sin(\alpha(t))) \end{bmatrix} +$$

$$2\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - \ddot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \ddot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) - \ddot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \ddot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t)) \\ \ddot{x}(t) - \ddot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ \ddot{y}(t) - \ddot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = m\begin{bmatrix} \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)c_x\cos(\alpha(t)) - \dot{y}(t)\dot{\alpha}(t)c_y\cos(\alpha(t)) - \dot{y}(t)\dot{\alpha}(t)c_x\sin(\alpha(t)) \\ -\dot{\alpha}(t)(-\dot{\alpha}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)c_x\cos(\alpha(t))) \\ -c_x\cos(\alpha(t))) - \dot{\alpha}(t)(\dot{\alpha}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \dot{\alpha}(t)c_x\sin(\alpha(t))) \end{bmatrix} +$$

$$m\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(t)(c_y^2 + c_x^2) - \ddot{x}(t)c_y\cos(\alpha(t)) + \ddot{x}(t)c_x\sin(\alpha(t)) - \ddot{y}(t)c_y\sin(\alpha(t)) + \ddot{y}(t)c_x\cos(\alpha(t)) \\ \ddot{x}(t) - \ddot{\alpha}(t)(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ \ddot{y}(t) - \ddot{\alpha}(t)(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I\ddot{\alpha}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Итоговое динамическое уравнение тележки можно представить как:

$$\frac{\partial K}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = m\alpha\dot{(t)} \begin{bmatrix} x\dot{(t)}c_x\cos(\alpha(t)) - x\dot{(t)}c_y\sin(\alpha(t)) + y\dot{(t)}c_y\cos(\alpha(t)) + y\dot{(t)}c_x\sin(\alpha(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$m\begin{bmatrix} x\dot{(t)}\alpha\dot{(t)}c_y\sin(\alpha(t)) + x\dot{(t)}\alpha\dot{(t)}c_x\cos(\alpha(t)) - y\dot{(t)}\alpha\dot{(t)}c_y\cos(\alpha(t)) - y\dot{(t)}\alpha\dot{(t)}c_x\sin(\alpha(t)) \\ -\alpha\dot{(t)}^2(c_x\cos(\alpha(t)) - c_y\sin(\alpha(t))) \\ -\alpha\dot{(t)}^2(c_x\sin(\alpha(t)) + c_y\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix} +$$

$$m\begin{bmatrix} \alpha\ddot{(t)}(c_y^2 + c_x^2) - x\ddot{(t)}c_y\cos(\alpha(t)) + x\ddot{(t)}c_x\sin(\alpha(t)) - y\ddot{(t)}c_y\sin(\alpha(t)) + y\ddot{(t)}c_x\cos(\alpha(t)) \\ x\ddot{(t)} - \alpha\ddot{(t)}(c_y\cos(\alpha(t)) + c_x\sin(\alpha(t))) \\ y\ddot{(t)} - \alpha\ddot{(t)}(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I\alpha\ddot{(t)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Представим уравнение динамики тележки в форме:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{6}$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} m(c_x^2 + c_y^2) - I & m(c_x\sin(\alpha(t)) - c_y\cos(\alpha(t))) & m(c_x\cos(\alpha(t)) - c_y\sin(\alpha(t))) \\ m(-c_x\sin(\alpha(t)) - c_y\cos(\alpha(t))) & m & 0 \\ m(c_x\cos(\alpha(t)) - c_y\sin(\alpha(t))) & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$C = m\begin{bmatrix} 0 & c_x\cos(\alpha(t)) - c_y\sin(\alpha(t)) & c_x\sin(\alpha(t)) + c_y\cos(\alpha(t)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+m\begin{bmatrix} 0 & \alpha\dot{(t)}(c_x\cos(\alpha(t)) + c_y\sin(\alpha(t))) & -\alpha\dot{(t)}(-c_x\sin(\alpha(t)) - c_y\cos(\alpha(t))) \\ \alpha\dot{(t)}(-c_x\cos(\alpha(t)) + c_y\sin(\alpha(t))) & 0 & 0 \\ -\alpha\dot{(t)}(c_x\sin(\alpha(t)) + c_y\cos(\alpha(t))) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = m\begin{bmatrix} 0 & (\alpha\dot{(t)} + 1)c_x\cos(\alpha(t)) + (\alpha\dot{(t)} - 1)c_y\sin(\alpha(t)) & (\alpha\dot{(t)} + 1)(c_x\sin(\alpha(t)) + c_y\cos(\alpha(t))) \\ \alpha\dot{(t)}(c_y\sin(\alpha(t)) - c_x\cos(\alpha(t))) & 0 & 0 \\ -\alpha\dot{(t)}(c_x\sin(\alpha(t)) + c_y\cos(\alpha(t))) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для моделирования поведения системы, введём переменную состояния $X = [q^T\ \dot{q}^T]^T$. Тогда исходное уравнение динамики можно свести к аффинной системе вида $\dot{X} = f(X) + g(X)\tau$:

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0_{3x3} & I_{3x3} \\ 0_{3x3} & M(q)^{-1}C(q,\dot{q}) \end{bmatrix} X$$

$$g(X) = \begin{bmatrix} 0_{3x3} \\ M(q)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m\left(\mathrm{cx}^2+\mathrm{cy}^2\right)-I & -m\,(\mathrm{cy}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\sin(\mathrm{at})) & m\,(\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})) \\ -m\,(\mathrm{cy}\,\cos(\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\sin(\mathrm{at})) & m & 0 \\ m\,(\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})) & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})\,(\mathrm{dat}+1)+\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})\,(\mathrm{dat}-1) & (\mathrm{cy}\,\cos(\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\sin(\mathrm{at}))\,(\mathrm{dat}+1) \\ -\mathrm{dat}\,(\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})) & 0 & 0 \\ -\mathrm{dat}\,(\mathrm{cy}\,\cos(\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\sin(\mathrm{at})) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(q)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})} & -\frac{\mathrm{cy}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\sin(\mathrm{at})}{2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I} & \frac{\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})}{2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I} \\ -\frac{\mathrm{cy}\,\cos(\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\sin(\mathrm{at})}{2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I} & -\frac{\mathrm{cx}^2\,m-2\,I+\mathrm{cy}^2\,m-\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})+\mathrm{cy}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})+2\,\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})}{2\,m\left(I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})\right)} & \frac{\frac{\sin(2\,\mathrm{at})\,\mathrm{cx}^2}{2}+\cos(2\,\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}-\frac{\sin(2\,\mathrm{at})\,\mathrm{cy}^2}{2}}{I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})} \\ \frac{\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})}{2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I} & -\frac{\frac{\sin(2\,\mathrm{at})\,\mathrm{cx}^2}{2}-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}+\frac{\sin(2\,\mathrm{at})\,\mathrm{cy}^2}{2}}{I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})} & \frac{2\,I-3\,\mathrm{cx}^2\,m-\mathrm{cy}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})+\mathrm{cy}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})}{2\,m\left(I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})\right)} \end{pmatrix}$$

$$inv(curM) * curC = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{cx}\,\mathrm{dat}\,(\mathrm{cy}\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cy}+\mathrm{cx}\,\sin(2\,\mathrm{at}))}{I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})} & -\frac{\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\mathrm{dat}\,\cos(\mathrm{at})+\mathrm{cy}\,\mathrm{dat}\,\sin(\mathrm{at})}{2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I} & -\frac{(\mathrm{cy} \cdots}{2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at}) \cdots} \\ -\frac{I\,\mathrm{dat}\,(\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at}))}{m\left(2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I\right)} & -\frac{\frac{\mathrm{cx}^2\,\sin(2\,\mathrm{at})}{2}-\frac{\mathrm{cy}^2\,\sin(2\,\mathrm{at})}{2}+\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,\cos(2\,\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,\mathrm{dat}+\frac{\mathrm{cx}^2\,\mathrm{dat}\,\sin(2\,\mathrm{at})}{2}+\frac{\mathrm{cy}^2\,\mathrm{dat}\,\sin(2\,\mathrm{at})}{2}}{I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})} & -\frac{(\mathrm{dat}+1)\left(\frac{\mathrm{cy}^2\,\cos(2\,\mathrm{a} \cdots}{2} \cdots\right.}{I-\mathrm{cx}^2\,m \cdots} \\ \frac{\mathrm{dat}\left(2\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}^3+2\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}^2-I\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}-I\,\cos(\mathrm{at})\,\mathrm{cy}\right)}{m\left(2\,m\,\mathrm{cx}^2\cos(\mathrm{at})^2-2\,m\,\mathrm{cx}^2-2\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(\mathrm{at})\,\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})+I\right)} & \frac{(\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at}))\,(\mathrm{cx}\,\cos(\mathrm{at})-\mathrm{cy}\,\sin(\mathrm{at})+\mathrm{cx}\,\mathrm{dat}\,\cos(\mathrm{at})+\mathrm{cy}\,\mathrm{dat}\,\sin(\mathrm{at}))}{I-\mathrm{cx}^2\,m+\mathrm{cx}^2\,m\,\cos(2\,\mathrm{at})-\mathrm{cx}\,\mathrm{cy}\,m\,\sin(2\,\mathrm{at})} & \frac{(\mathrm{dat}+1)\left(\frac{\sin(2 \cdots}{} \cdots\right.}{I-\mathrm{cx}^2\,m+ \cdots} \end{pmatrix}$$