Física para Mates

Aníbal Olivera M.

Mayo 2025

Índice general

Capítulo 1

Resumen: Problemas para la pizarra

Problema	Columnas Álgebra	Columnas Geometría	Cálculo Diferencial	Cálculo
Distancias 1	something..	something..	something..	somet
Caída libre 1	something..	something..	something..	somet
Caída libre 2	something..	something..	something..	somet
Problema 4	something..	something..	something..	somet
Problema 5	something..	something..	something..	somet

Capítulo 2

Problemas para la pizarra

2.1. Distancias 1: Estimación de distancia y altura de una montaña

Estás caminando ya cansado cerca de un volcán, y quieres estimar la altura del pico de una montaña distante y la distancia horizontal que hay que caminar hasta el pico. Desde el punto en que están, miden que el ángulo que forma con la horizontal la línea imaginaria que apunta hacia el pico es de $7,5°$ y que la misma línea está orientada $13°$ hacia el este.

Mientras que usted se queda en el punto de observación, su amigo camina en dirección oeste $1,5$ km. Desde la nueva posición su amigo sitúa el pico y observa que la línea imaginaria que apunta hacia el pico forma un ángulo de $15°$ con el norte. Calcule:

- (a) a qué distancia está la montaña de su posición,
- (b) cuál es la altura de la cima.

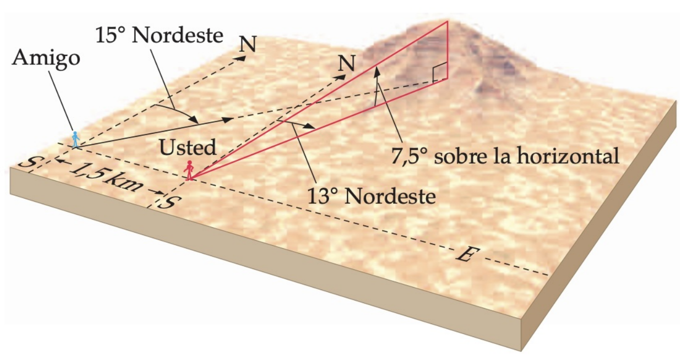

Figura 2.1: Esquema de distancias amigo y volcán.

2.1.1. (a) a qué distancia está la montaña de su posición

Ubicamos el observador inicial en el origen: $O = (0, 0)$. La dirección de la montaña está dada por $\theta_1 = 13°$ respecto al norte (sentido horario). El vector unitario en esa dirección es

$\vec{d_1} = (\sin\theta_1, \cos\theta_1)$, por lo que el la cima de la montaña, en el plano cartesiano 2D, está en el punto

$$M = r(\sin\theta_1, \cos\theta_1).$$

El segundo observador está a:

$$A = (-1{,}5\,\text{km}, 0)$$

La dirección del segundo vector es $\theta_2 = 15°$, asumiendo que la distancia s es en km:

$$M = A + s(\sin\theta_2, \cos\theta_2) = (-1{,}5 + s\sin\theta_2, s\cos\theta_2).$$

Es decir, estas coordenadas deben ser iguales:

$$r\sin\theta_1 = -1{,}5 + s\sin\theta_2 \tag{1}$$
$$r\cos\theta_1 = s\cos\theta_2 \tag{2}$$

De (2):

$$s = \frac{r\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

Sustituyendo en (1):

$$r\sin\theta_1 = -1{,}5 + \frac{r\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 \Rightarrow r(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2) = -1{,}5\cos\theta_2$$

Usamos la **identidad trigonométrica** de la resta de ángulos para el seno:

$$\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

y obtenemos

$$r\sin(\theta_1 - \theta_2) = -1{,}5\cos\theta_2$$

Despejamos r. Dado $\theta_1 = 13°$ y $\theta_2 = 15°$, $\theta_1 - \theta_2 = -2°$.

$$r = \frac{-1{,}5\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{-1{,}5\cos(15°)}{\sin(-2°)} = \frac{1{,}5\cos(15°)}{\sin(2°)}$$

$$r \approx \frac{1{,}5 \times 0{,}96593}{0{,}03490} \approx \frac{1{,}44889}{0{,}03490} \approx 41{,}51\,\text{km}$$

2.1.2. (b) cuál es la altura de la cima.

Desde el punto original, el ángulo de elevación es $\alpha = 7{,}5°$, y la distancia horizontal al pie del monte es r. Entonces, la altura h_{pico} es:

$$h_{\text{pico}} = r \cdot \tan(\alpha) \approx 41{,}51\,\text{km} \cdot \tan(7{,}5°) \approx 41{,}51\,\text{km} \cdot 0{,}13165$$

$$h_{\text{pico}} \approx 5{,}465\,\text{km}$$

2.2. Caída libre 1: Movimiento de un paracaidista con resistencia cuadrática

Cuando intentamos resolver el problema de caída libre, generalmente obviamos la resistencia que impone el aire. Esto puede llevarnos a obtener resultados erróneos en varios órdenes de magnitud. La resistencia del aire a los objetos aumenta con la velocidad de una manera poco trivial. La velocidad de caída alcanza una velocidad teórica terminal, o velocidad límite, que depende de la masa y del área transversal del objeto. A la velocidad terminal, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la resistencia del aire se igualan y, por lo tanto, la aceleración es cero.

Asumamos que la aceleración de una paracaidista que se lanza al vacío desde un avión viene dada, antes de abrir el paracaídas, por la expresión

$$a_y = g - bv_y^2$$

donde:

- g es la aceleración gravitacional,
- b es una constante que depende del área frontal y la densidad del aire,
- v_y es la velocidad en la dirección y.

La dirección $+y$ está dirigida hacia abajo.

- (a) Si su velocidad inicial en el momento del salto es 0 , demostrar que su velocidad en función del tiempo viene dada por la fórmula $v_y(t) = v_\mathrm{t} \tanh(t/T)$, donde v_t es la velocidad límite dada por $v_\mathrm{t} = \sqrt{g/b}$ y $T = v_\mathrm{t}/g$ es un parámetro de escala temporal.
- (b) ¿A qué fracción de velocidad terminal corresponde la velocidad en $t = T$?
- (c) Use un programa de una hoja de cálculo para representar $v_y(t)$ en función del tiempo, usando una velocidad terminal de 56 m/s (use este valor para calcular b y T). ¿Tiene sentido la curva resultante?

2.2.1. (a) Demostrar que $v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$

Se parte de la ecuación:

$$\frac{dv_y}{dt} = g - bv_y^2$$

Separando variables:

$$\frac{dv_y}{g - bv_y^2} = dt$$

Factorizamos el denominador para integrar:

$$\int \frac{dv_y}{g(1-\frac{b}{g}v_y^2)} = \int dt$$

Sea $\alpha^2 = \frac{b}{g} \Rightarrow \frac{1}{g(1-\alpha^2 v_y^2)}$. Reconocemos una forma estándar:

$$\int \frac{1}{1-a^2x^2}dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}(ax)$$

Aplicamos:

$$\frac{1}{g}\int \frac{1}{1-\alpha^2 v_y^2}dv_y = \int dt \Rightarrow \frac{1}{g\alpha}\tanh^{-1}(\alpha v_y) = t + C$$

Imponiendo la condición inicial $v_y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, despejamos:

$$\tanh^{-1}(\alpha v_y) = g\alpha t \Rightarrow \alpha v_y = \tanh(g\alpha t)$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\alpha}\tanh(g\alpha t)$$

Ahora definimos la velocidad terminal $v_t = \sqrt{\frac{g}{b}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{v_t}$, y $T = \frac{v_t}{g} \Rightarrow g\alpha = \frac{1}{T}$. Entonces:

$$v_y(t) = v_t \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

2.2.2. (b) ¿Qué fracción de la velocidad terminal se alcanza en $t = T$?

$$v_y(T) = v_t \tanh(1) \approx v_t \cdot 0{,}7616$$

Entonces:

$$\frac{v_y(T)}{v_t} = \tanh(1) \approx 0{,}7616$$

2.2.3. (c) Representación gráfica con $v_t = 56\,\mathrm{m/s}$

Si $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$:

$$T = \frac{v_t}{g} = \frac{56\,\mathrm{m/s}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} \approx 5{,}71\,\mathrm{s}$$

Podemos usar una hoja de cálculo para graficar la función:

$$v_y(t) = 56 \cdot \tanh\left(\frac{t}{5{,}71}\right)$$

La curva resultante tiene la forma de crecimiento asintótico hacia la velocidad límite $v_t = 56\,\mathrm{m/s}$, lo cual es físicamente coherente con el modelo de resistencia del aire.

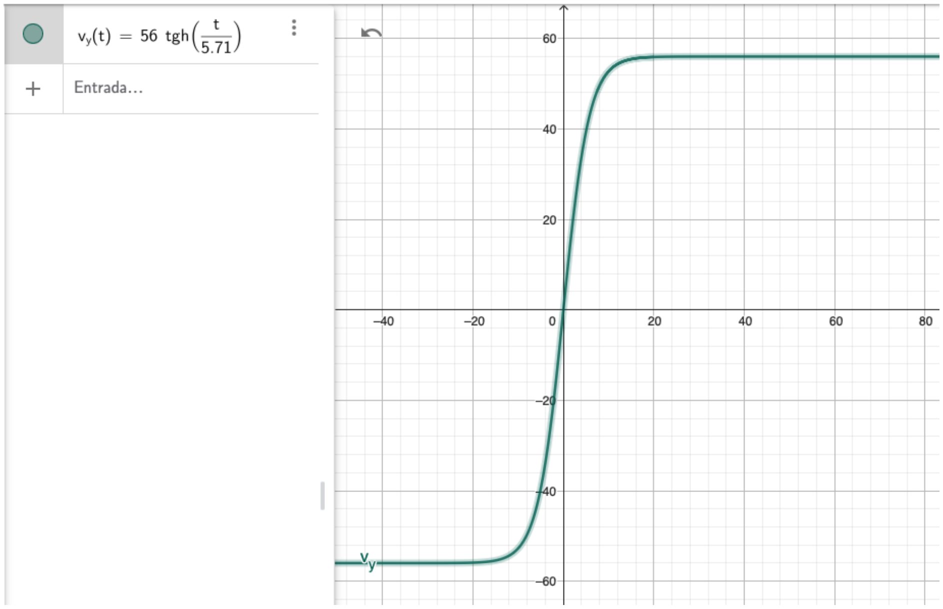

Figura 2.2: Gráfica de $v_y(t)$ con velocidad terminal.

2.3. Caída libre 2: Velocidad de Impacto en la Luna con Gravedad Variable

En un objeto celeste de radio R, la aceleración de la gravedad g a una distancia x del centro del objeto viene dada por $g(x) = g_0 R^2/x^2$, donde g_0 es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del objeto ($x = R$) y la fórmula es válida para $x \geq R$. Para la Luna, se tienen los siguientes valores:

- Aceleración en la superficie lunar: $g_0 = 1{,}63\,\mathrm{m/s^2}$
- Radio lunar: $R = 3200\,\mathrm{km}$

Se suelta una piedra a partir del reposo desde una altura de $4R$ por encima de la superficie lunar.

- (a) ¿Con qué velocidad impacta la piedra en la Luna?

2.3.1. (a) ¿Con qué velocidad impacta la piedra en la Luna?

Sea x la distancia medida desde el centro de la Luna. La piedra se suelta desde el reposo, por lo que su velocidad inicial $v_i = 0$. La altura inicial sobre la superficie es $h_i = 4R$. Por lo tanto, la distancia inicial desde el centro de la Luna es $x_i = R + h_i = R + 4R = 5R$. La piedra impacta la superficie lunar, por lo que su posición final es $x_f = R$. Queremos encontrar la velocidad final v_f.

Si definimos la dirección positiva como alejándose del centro de la Luna, entonces la aceleración gravitacional es hacia el centro (en la dirección de x decreciente), por lo tanto:

$$a(x) = -\frac{g_0 R^2}{x^2}$$

Usamos la relación cinemática

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

que es particularmente útil cuando la aceleración es una función explícita de la posición.

Partimos de la ecuación:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g_0 R^2}{x^2}$$

Separamos las variables para integrar:

$$v\,dv = -g_0 R^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

Integramos ambos lados. El lado izquierdo se integra desde la velocidad inicial $v_i = 0$ hasta la velocidad final v_f. El lado derecho se integra entre las posiciones correspondientes:

$$\int_0^{v_f} v\,dv = \int_{5R}^{R} -g_0 R^2 x^{-2}\,dx$$

Resolvemos las integrales definidas:

$$\left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^{v_f} = -g_0 R^2 \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{5R}^{R}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 - 0 = -g_0 R^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{5R}^{R}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 = g_0 R^2 \left[\frac{1}{x}\right]_{5R}^{R}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 = g_0 R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{5R}\right)$$

Simplificamos el término entre paréntesis:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{5R} = \frac{4}{5R}$$

Reemplazamos y despejamos para v_f^2:

$$v_f^2 = \frac{8}{5}g_0 R$$

Y finalmente, la velocidad de impacto v_f es:

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5}g_0 R}$$

Ahora podemos sustituir los valores proporcionados para la Luna: $g_0 = 1{,}63\,\mathrm{m/s^2}$ $R = 3200\,\mathrm{km} = 3\,200\,000\,\mathrm{m} = 3{,}2 \times 10^6\,\mathrm{m}$

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5} \times (1{,}63\,\mathrm{m/s^2}) \times (3{,}2 \times 10^6\,\mathrm{m})}$$

$$v_f = \sqrt{8{,}3456 \times 10^6\,\mathrm{m^2/s^2}}$$

$$v_f \approx 2888{,}875\,\mathrm{m/s}$$

Expresando el resultado con tres cifras significativas y en kilómetros por segundo:

$$v_f \approx 2890\,\mathrm{m/s} = 2{,}89\,\mathrm{km/s}$$

Por lo que derivamos la velocidad final para una aceleración gravitacional variable según la piedra se va acercando al centro del cuerpo celeste.

Capítulo 3

Simulaciones Computacionales

3.1. Sólido revolución 1: Calculando la velocidad en una pista cónica

Un bloque de masa m se mueve en el interior de un cono de revolución cuya superficie es perfectamente lisa. El vértice del cono apunta hacia abajo, y el cono tiene un ángulo θ entre el eje vertical del cono y su generatriz.

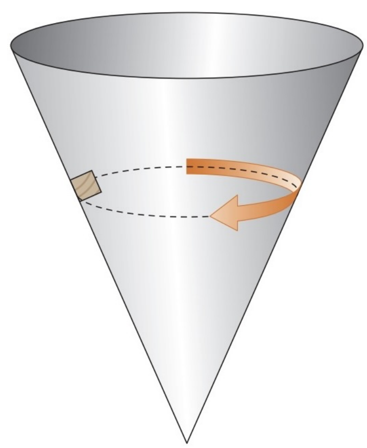

Figura 3.1: Cono con una canica en su interior a una altura h.

El bloque describe una trayectoria circular horizontal a una **altura** h **constante**, medida desde el vértice del cono. A partir de esta descripción,

- Parte A: Geometría del cono y la trayectoria

  1. Dibuje un corte transversal del cono. En este dibujo, represente:
     - El vértice del cono.
     - El eje de simetría vertical.
     - Una generatriz del cono.

- El semiángulo vertical θ.
- La posición del bloque a una altura h desde el vértice.
- El radio r de la trayectoria circular que describe el bloque a esa altura h.

2. Utilizando trigonometría en el triángulo rectángulo formado por la altura h, el radio r y la generatriz del cono, encuentra una expresión para el radio r en función de h y θ.

- Parte B: Aplicando principios Físicos.

  Para que el bloque se mantenga en movimiento circular uniforme a una altura h constante, deben cumplirse ciertas condiciones físicas. Asumiremos como ciertas las siguientes relaciones, derivadas de las leyes de Newton:

  - Hay dos fuerzas principales sobre el bloque:
    - Su peso, $P = mg$ (dirigido verticalmente hacia abajo, donde g es la aceleración de la gravedad, aproximadamente $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$).
    - La fuerza normal N (ejercida por la superficie del cono, perpendicular a dicha superficie).
  - Para que la altura h sea constante, la componente vertical de la fuerza normal (N_{vertical}) debe equilibrar el peso:

    $$(1) \quad N_{\text{vertical}} = N\cos(\phi_{\text{normal}}) = mg$$

    Aquí, ϕ_{normal} es el ángulo que forma la normal con la vertical. Para un cono, este ángulo es igual al semiángulo vertical θ.
  - Para que el bloque describa un círculo de radio r a velocidad v, la componente horizontal de la fuerza normal ($N_{\text{horizontal}}$) debe proporcionar la fuerza centrípeta necesaria:

    $$(2) \quad N_{\text{horizontal}} = N\sin(\phi_{\text{normal}}) = \frac{mv^2}{r}$$

- Tu Tarea:

  Usando las ecuaciones (1) y (2) dadas en la Parte B (con $\phi_{\text{normal}} = \theta$), y tu resultado de la Parte A.2:

  1. Despeja la fuerza normal N de la ecuación (1).
  2. Sustituye esta expresión para N en la ecuación (2).
  3. En la ecuación resultante, sustituye la expresión para el radio r que encontraste en la Parte A.2.
  4. Finalmente, despeja la velocidad v en términos de g, h y θ.
  5. Una vez con la velocidad necesaria $v(g, h, \theta)$, responde:

     a) ¿Qué tipo de curva describe la trayectoria del bloque en el espacio tridimensional?

b) Si el ángulo θ del cono fuera muy pequeño, casi un cilindro, ¿qué pasaría con la velocidad necesaria según tu fórmula? ¿Tiene sentido?

c) Si el ángulo θ fuera cercano a 90 grados (un cono muy abierto, casi un plano), ¿qué pasaría? (Considera $\theta \to 90°$).

3.1.1. Detalles previos

Diagrama

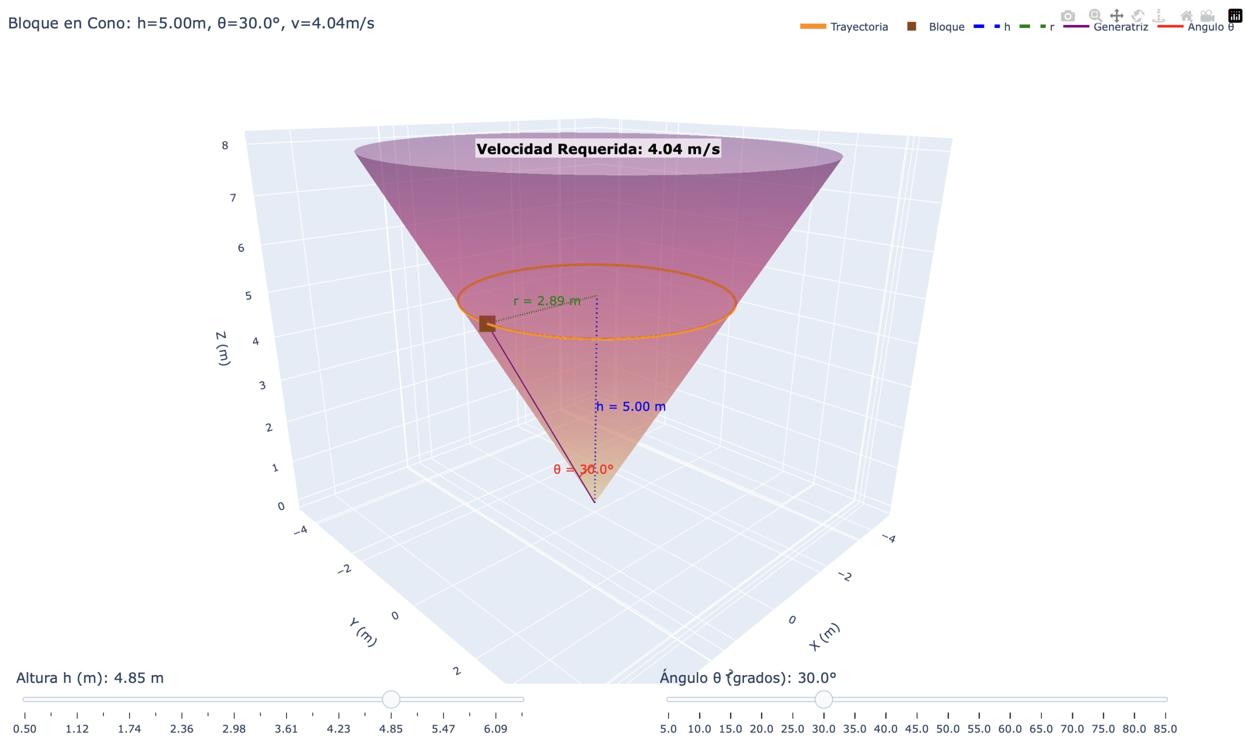

Figura 3.2: Visualización cono 3D usando Plotly con Python.

A) Parte Geométrica

El semiángulo vertical del cono es θ. Por trigonometría:

$$\tan(\theta) = \frac{r}{h}$$

Por lo que el radio de la trayectoria circular se expresa como:

$$r = h \tan(\theta)$$

La fuerza normal N es perpendicular a la superficie del cono. Si θ es el semiángulo vertical del cono, entonces el ángulo que forma la fuerza normal N con la vertical también es θ.

Descomponemos N en sus componentes vertical (N_y) y horizontal (N_x):

- Componente vertical: $N_y = N\cos(\theta)$
- Componente horizontal: $N_x = N\sin(\theta)$

B) Parte Física: Leyes de Newton

- Equilibrio en la componente y:

  Como el bloque no se acelera verticalmente (se mantiene a altura h constante), la suma de las fuerzas en la dirección vertical debe ser cero.

  $$\Sigma F_y = N_y - mg = 0 \Rightarrow N\cos(\theta) - mg = 0$$

  Por lo tanto:

  $$N\cos(\theta) = mg \quad \text{(Ecuación 1')}$$

- Movimiento circular en la componente horizontal x:

  La canica quiere seguir derecho, pero la superficie, en el eje-x, ejerce una fuerza centrípeta $F_c = ma_c$ (componente horizontal de la fuerza normal), donde $a_c = v^2/r$. Hay una fuerza neta no nula, por lo que la canica cambia constantemente su vector de velocidad.

  $$\Sigma F_x = N_x = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow N\sin(\theta) = m\frac{v^2}{r} \quad \text{(Ecuación 2')}$$

C) Desarrollo

De la Ec. 1', despejamos la fuerza normal N:

$$N = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

Sustituimos esta expresión para N en la Ec. 2':

$$\left(\frac{mg}{\cos(\theta)}\right)\sin(\theta) = m\frac{v^2}{r}$$

Simplificamos:

$$mg\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mg\tan(\theta) = m\frac{v^2}{r}$$

Cancelamos la masa m:

$$g\tan(\theta) = \frac{v^2}{r}$$

Sustituimos la expresión para $r = h\tan(\theta)$, obtenemos:

$$g\tan(\theta) = \frac{v^2}{h\tan(\theta)}$$

Despejamos v^2:

$$v^2 = gh\tan^2(\theta)$$

Finalmente, tomamos la raíz cuadrada para obtener la velocidad v:

$$v = \tan(\theta)\sqrt{gh}$$

D) Preguntas cierre

1) Un círculo horizontal.

2) Si $\theta \to 0$, $\tan(\theta) \to 0$, entonces $v \to 0$. Esto tiene sentido: un cilindro vertical no podría sostener un objeto en una órbita sin fricción a menos que el objeto no se mueva y esté en el fondo, o si la pared es horizontal, lo que no es el caso. Para $\theta = 0$ la superficie es vertical, la normal es horizontal y no puede equilibrar el peso.

3) Si $\theta \to 90^\circ$, $\tan(\theta) \to \infty$, entonces $v \to \infty$. Esto también tiene sentido: para mantenerse a una altura h en una superficie casi plana, se necesitaría una velocidad extremadamente alta para que la pequeña componente vertical de una fuerza normal muy grande (inclinada casi horizontalmente) equilibre el peso.

3.2. Problema 5: Movimiento Circular en Diversas Superficies de Revolución

Extendiendo el análisis del Problema 4, investigaremos la velocidad v requerida para que un objeto de masa m describa una trayectoria circular horizontal de radio r a una altura constante h en el interior de **diferentes superficies de revolución** lisas, entre ellas:

A) Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)

B) Parábola en Rotación (Paraboloide)

C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)

D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

Para la siguente actividad, considera;

- **A) Parte Geométrica**

  En el caso **anterior**, teníamos la relación geométrica clave

  $$\tan(\theta) = \frac{r}{h}$$

  En este caso, necesitaremos:

  1. Encontrar la relación geométrica entre el radio r y la altura h.
  2. Determinar $\tan(\phi)$ en función de la geometría de la superficie en el punto (r, h). El ángulo ϕ que la normal forma con la vertical es tal que

  $$\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|.$$

  Asumiremos que h se mide desde el punto más bajo de la superficie de revolución (vértice), y el eje de simetría es vertical.

- **B) Parte Física: Leyes de Newton**

  Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de movimiento circular son las mismas que en el Problema 4. Sea ϕ el ángulo que forma la fuerza normal N (perpendicular a la superficie) con la vertical.

  $$N\cos(\phi) = mg \qquad (A)$$
  $$N\sin(\phi) = \frac{mv^2}{r} \qquad (B)$$

  Dividiendo (B) por (A), obtenemos:

  $$\tan(\phi) = \frac{v^2}{gr} \implies v^2 = gr\tan(\phi) \implies \boxed{v = \sqrt{gr\tan(\phi)}}$$

- **Tu Tarea**

  Repitiendo los pasos del problema anterior, para

  A) Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)
  B) Parábola en Rotación (Paraboloide)
  C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)
  D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

  desarrolle:

  1. Despeja la velocidad v en términos de g, h y θ.
  2. Una vez con la velocidad necesaria $v(g, h, \theta)$, responde:
     a) ¿Qué tipo de curva describe la trayectoria del bloque en el espacio tridimensional?
     b) ¿De qué parámetros realmente depende la velocidad?.
     c) Entregue casos reales en los que esta superficie es pertinente.

3.2.1. A): Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)

Una circunferencia de radio de curvatura R_{curv} que rota alrededor de un diámetro vertical genera una esfera. Consideramos el movimiento en la **mitad inferior** de un tazón esférico de radio R_{curv}, con el vértice en $h = 0$.

Parte Geométrica (con cálculo diferencial)

La ecuación de la circunferencia generatriz (en el plano rh, con origen en el vértice inferior de la esfera) es

$$r^2 + (h - R_{\text{curv}})^2 = R_{\text{curv}}^2.$$

Esto se simplifica a

$$r^2 = 2hR_{\text{curv}} - h^2.$$

Entonces, el radio de la trayectoria circular es

$$r = \sqrt{2hR_{\text{curv}} - h^2}.$$

Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = 2hR_{\text{curv}} - h^2$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = 2R_{\text{curv}} - 2h \implies \frac{dr}{dh} = \frac{R_{\text{curv}} - h}{r}.$$

Como $h < R_{\text{curv}}$ en la mitad inferior del tazón, $R_{\text{curv}} - h > 0$. Si $r > 0$, entonces

$$\tan(\phi) = \frac{R_{\text{curv}} - h}{r}.$$

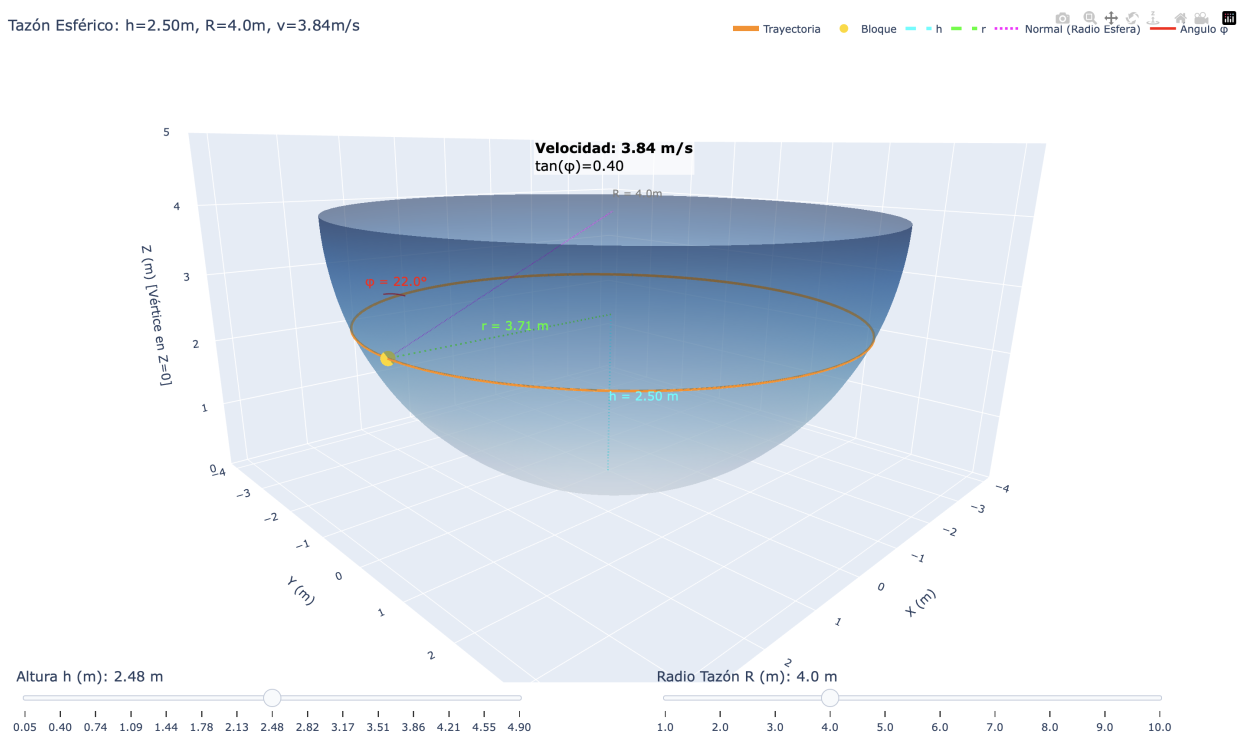

Figura 3.3: Visualización esfera 3D usando Plotly con Python.

Parte Física

Reemplazamos este valor en nuestra expresión para la velocidad,

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{R_{\text{curv}} - h}{r}\right) = g(R_{\text{curv}} - h)$$

$$\boxed{v = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}}$$

Respuestas

a) La curva que describe es una circunferencia.

b) La velocidad depende de R_{curv} y h. Si $h \to R_{\text{curv}}$ (el ecuador del tazón), $v \to 0$. En este punto, la normal sería horizontal, lo que no permitiría equilibrio vertical (a menos que $g = 0$). Esta fórmula es válida para $h < R_{\text{curv}}$.

c)

- Una canica rodando en un tazón esférico de vidrio.
- Curvas peraltadas en pistas de bobsleigh o velódromos que tienen secciones esféricas.

3.2.2. B): Parábola en Rotación (Paraboloide)

Una parábola con vértice en el origen, $r^2 = kh$ (donde k es una constante relacionada con la distancia focal p a la parábola $x^2 = 4py$, y está dada por $k = 4p$), que rota alrededor de su eje vertical.

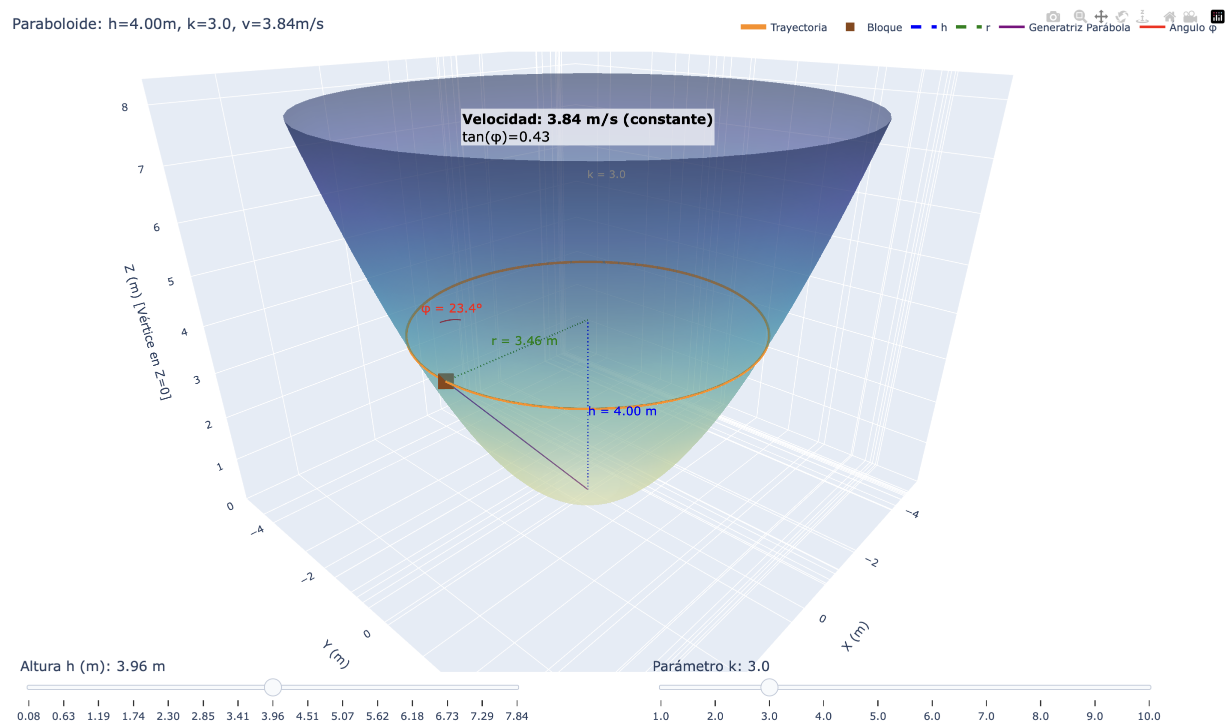

Figura 3.4: Visualización paraboloide 3D usando Plotly con Python.

Parte Geometría

Partimos de la ecuación $r = \sqrt{kh}$. Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = kh$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = k \implies \frac{dr}{dh} = \frac{k}{2r}.$$

Entonces, asumiendo $k > 0, r > 0$,

$$\tan(\phi) = \frac{k}{2r}.$$

Parte Física

Reemplazamos en la expresión para la velocidad,

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{k}{2r}\right) = \frac{gk}{2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gk}{2}}}$$

Respuestas

a) Una circunferencia.
b) La velocidad requerida es constante, independiente de la altura h y del radio r. Esto significa que si un objeto se mueve a esta velocidad específica, puede mantener una órbita circular a cualquier altura en el paraboloide.
c)

- La superficie de un líquido en un recipiente que rota a velocidad angular constante toma forma de paraboloide. Los telescopios de espejo líquido utilizan este principio.
- Algunas antenas parabólicas o reflectores solares podrían servir de "pista" si fueran lisos.

3.2.3. C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)

Consideramos una hipérbola $\frac{r^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$ rotando alrededor del eje h (su eje conjugado). Aquí, a es el radio mínimo (su garganta) en $h = 0$. El vértice para h es $h = 0$.

Parte Geometría

De la ecuación de la hipérbola, despejamos r^2.

$$r^2 = a^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right) = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + h^2).$$

Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + h^2)$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = \frac{a^2}{b^2}(2h) \implies \frac{dr}{dh} = \frac{a^2 h}{b^2 r}$$

. Entonces, para $h \geq 0$,

$$\tan(\phi) = \left|\frac{a^2 h}{b^2 r}\right|.$$

Parte Física

Reemplazamos en la expresión de velocidad:

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{a^2 h}{b^2 r}\right) = \frac{ga^2 h}{b^2}$$

$$\boxed{v = \frac{a}{b}\sqrt{gh}}$$

Respuestas

a) Una circunferencia

b) La velocidad sí depende de la altura h a la que esté la bola. Además, las características geométricas de la hipérbola son fundamentales: el parámetro a es lineal con la velocidad, y el parámetro b es inverso con la velocidad.

c)

- Las torres de enfriamiento de las centrales nucleares a menudo tienen forma de hiperboloide de una hoja por sus propiedades estructurales y de flujo de aire.
- Algunas esculturas o elementos arquitectónicos modernos.

3.2.4. D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

Consideramos una elipse $\frac{r^2}{a_e^2} + \frac{(h-b_e)^2}{b_e^2} = 1$ rotando alrededor de su eje vertical. Aquí, a_e es el semieje horizontal (radio en el ecuador para un esferoide oblato o radio máximo si $b_e > a_e$), y b_e es el semieje vertical. El centro de la elipse está en $(0, b_e)$ y el vértice inferior en $(0, 0)$ en el plano rh, por lo que $0 \leq h \leq 2b_e$.

Parte Geometría

La ecuación, una vez despejada V^2 y simplificando, es

$$r^2 = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2hb_e - h^2).$$

Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2hb_e - h^2)$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2b_e - 2h) \implies \frac{dr}{dh} = \frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}.$$

Entonces, para $h < b_e$ (mitad inferior), $b_e - h > 0$,

$$\tan(\phi) = \left|\frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}\right|.$$

Parte Física

Reemplazamos en la expresión de la velocidad,

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}\right) = \frac{ga_e^2(b_e - h)}{b_e^2}$$

$$\boxed{v = \frac{a_e}{b_e}\sqrt{g(b_e - h)}}$$

Respuestas

a) Una circunferencia.

b) Si $a_e = b_e = R_{\text{curv}}$, el elipsoide es una esfera. La fórmula se convierte en $v = \frac{R_{\text{curv}}}{R_{\text{curv}}}\sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)} = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}$, que coincide nuestra respuesta anterior.

c)

- Un tazón con forma de "lenteja" (esferoide oblato si $a_e > b_e$).
- Las cúpulas de algunos edificios o tanques de almacenamiento pueden ser elipsoidales.

3.3. Conclusiones

- En el Problema 1, la función de velocidad del paracaidista bajo resistencia cuadrática es:

$$v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$$

y en $t = T$ alcanza aproximadamente el 76.16 % de su velocidad terminal.

- En el Problema 2, se calculó la velocidad de impacto de un objeto en la Luna, considerando una aceleración gravitacional variable $g(x) = g_0 R^2/x^2$. Si se suelta desde una altura de $4R$ sobre la superficie ($x_i = 5R$), la velocidad de impacto ($x_f = R$) es:

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5} g_0 R} \approx 2{,}89\,\mathrm{km/s}$$

Este problema ilustra la aplicación del cálculo integral para resolver problemas de cinemática con aceleración no constante.

- En el Problema 3, se determinó que la distancia horizontal al pie de la montaña es aproximadamente 41,5 km y su altura es de 5,47 km, utilizando trigonometría y resolución de sistemas de ecuaciones.

- En el Problema 4, se encontró que la velocidad necesaria para que un bloque se mantenga en movimiento circular uniforme a una altura constante h dentro de un cono liso con semiángulo vertical θ está dada por:

$$v_{\text{cono}} = \tan(\theta)\sqrt{gh}$$

Esta velocidad depende de la aceleración gravitacional g, la altura h, y el ángulo del cono θ, pero es independiente de la masa del bloque.

- En el Problema 5, se generalizó el análisis para diversas superficies de revolución, obteniendo las velocidades para mantenerse en órbita circular horizontal:
  - Tazón Esférico (radio de curvatura R_{curv}): $v_{\text{esfera}} = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}$
  - Paraboloide ($r^2 = kh$): $v_{\text{paraboloide}} = \sqrt{gk/2}$ (constante)
  - Hiperboloide ($r^2/a^2 - h^2/b^2 = 1$, garganta a): $v_{\text{hiperboloide}} = \frac{a}{b}\sqrt{gh}$
  - Elipsoide (semiejes a_e, b_e, vértice en $h = 0$): $v_{\text{elipsoide}} = \frac{a_e}{b_e}\sqrt{g(b_e - h)}$

En todos estos casos, la velocidad requerida es independiente de la masa del objeto y depende de la geometría de la superficie y la altura h. El caso del paraboloide es particularmente interesante por resultar en una velocidad constante independientemente de la altura.