Física para Mates

Aníbal Olivera M.

Mayo 2025

Índice general

Capítulo 1

Resumen Problemas

Esta tabla resume los principales contenidos de las asignaturas de Matemáticas y Física abordados en cada problema del documento.

	Contenidos Matemáticos					Contenidos Físicos			Tipo de Problema			Asignatura
Problema	Trigonometría	Vectores	Geom. Analítica	Logaritmos	Cálc. Diferen.	Cinemática	Leyes Newton	Estática /Equilibrio	Hoja Cálculo	Prob. Pizarra	Simul. 3D	Sugerida
Distancias 1 (2.1)	X	X	X			X		X		X		1
Caída Libre 1 (2.2)					X	X	X			X		
Caída Libre 2 (2.3)					X	X	X			X		
HojaCálculo 1 (3.1)				X		X			X			1
HojaCálculo 2 (3.2)				X					X			1
HojaCálculo 3 (3.3)				X		X	X		X			1
Sólido Rev. 1 (4.1)	X	X	X			X	X	X			X	1
Sólido Rev. 2 (5.1)		X	X		X	X	X	X			X	3

Asignatura Sugerida:

1: Geometría

2: Introducción al Cálculo

3: Cálculo Diferencial

4: Cálculo Integral.

Capítulo 2

Problemas para la pizarra

2.1. Distancias 1: Estimación de distancia y altura de una montaña

Estás caminando ya cansado cerca de un volcán, y quieres estimar la altura del pico de una montaña distante y la distancia horizontal que hay que caminar hasta el pico. Desde el punto en que están, miden que el ángulo que forma con la horizontal la línea imaginaria que apunta hacia el pico es de $7,5°$ y que la misma línea está orientada $13°$ hacia el este.

Mientras que usted se queda en el punto de observación, su amigo camina en dirección oeste $1,5\ \mathrm{km}$. Desde la nueva posición su amigo sitúa el pico y observa que la línea imaginaria que apunta hacia el pico forma un ángulo de $15°$ con el norte. Calcule:

- (a) a qué distancia está la montaña de su posición,
- (b) cuál es la altura de la cima.

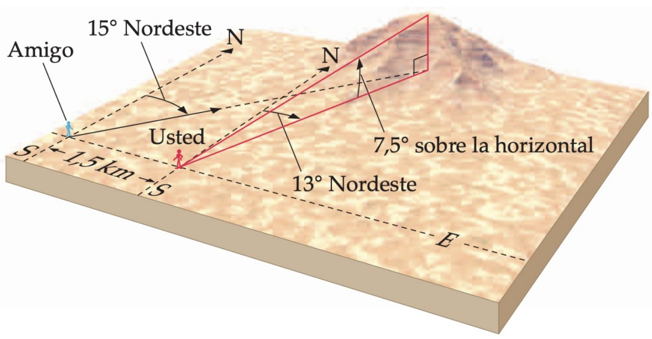


Figura 2.1: Esquema de distancias amigo y volcán.

2.1.1. (a) a qué distancia está la montaña de su posición

Ubicamos el observador inicial en el origen: $O = (0, 0)$. La dirección de la montaña está dada por $\theta_1 = 13°$ respecto al norte (sentido horario). El vector unitario en esa dirección es $\vec{d_1} = (\sin\theta_1, \cos\theta_1)$, por lo que el la cima de la montaña, en el plano cartesiano 2D, está en el punto

$$M = r(\sin\theta_1, \cos\theta_1).$$

El segundo observador está a:

$$A = (-1{,}5\,\mathrm{km}, 0)$$

La dirección del segundo vector es $\theta_2 = 15^\circ$, asumiendo que la distancia s es en km:

$$M = A + s(\sin\theta_2, \cos\theta_2) = (-1{,}5 + s\sin\theta_2, s\cos\theta_2).$$

Es decir, estas coordenadas deben ser iguales:

$$r\sin\theta_1 = -1{,}5 + s\sin\theta_2 \tag{1}$$
$$r\cos\theta_1 = s\cos\theta_2 \tag{2}$$

De (2):

$$s = \frac{r\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

Sustituyendo en (1):

$$r\sin\theta_1 = -1{,}5 + \frac{r\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 \Rightarrow r(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2) = -1{,}5\cos\theta_2$$

Usamos la **identidad trigonométrica** de la resta de ángulos para el seno:

$$\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

y obtenemos

$$r\sin(\theta_1 - \theta_2) = -1{,}5\cos\theta_2$$

Despejamos r. Dado $\theta_1 = 13^\circ$ y $\theta_2 = 15^\circ$, $\theta_1 - \theta_2 = -2^\circ$.

$$r = \frac{-1{,}5\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{-1{,}5\cos(15^\circ)}{\sin(-2^\circ)} = \frac{1{,}5\cos(15^\circ)}{\sin(2^\circ)}$$

$$r \approx \frac{1{,}5 \times 0{,}96593}{0{,}03490} \approx \frac{1{,}44889}{0{,}03490} \approx 41{,}51\,\mathrm{km}$$

2.1.2. (b) cuál es la altura de la cima.

Desde el punto original, el ángulo de elevación es $\alpha = 7{,}5^\circ$, y la distancia horizontal al pie del monte es r. Entonces, la altura h_{pico} es:

$$h_{\text{pico}} = r \cdot \tan(\alpha) \approx 41{,}51\,\mathrm{km} \cdot \tan(7{,}5^\circ) \approx 41{,}51\,\mathrm{km} \cdot 0{,}13165$$
$$h_{\text{pico}} \approx 5{,}465\,\mathrm{km}$$

2.2. Caída libre 1: Movimiento de un paracaidista con resistencia cuadrática

Cuando intentamos resolver el problema de caída libre, generalmente obviamos la resistencia que impone el aire. Esto puede llevarnos a obtener resultados erróneos en varios órdenes de magnitud. La resistencia del aire a los objetos aumenta con la velocidad de una manera poco trivial. La velocidad de caída alcanza una velocidad teórica terminal, o velocidad límite, que depende de la masa y del área transversal del objeto. A la velocidad terminal, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la resistencia del aire se igualan y, por lo tanto, la aceleración es cero.

Asumamos que la aceleración de una paracaidista que se lanza al vacío desde un avión viene dada, antes de abrir el paracaídas, por la expresión

$$a_y = g - bv_y^2$$

donde:

- g es la aceleración gravitacional,
- b es una constante que depende del área frontal y la densidad del aire,
- v_y es la velocidad en la dirección y.

La dirección $+y$ está dirigida hacia abajo.

- (a) Si su velocidad inicial en el momento del salto es 0 , demostrar que su velocidad en función del tiempo viene dada por la fórmula $v_y(t) = v_\mathrm{t} \tanh(t/T)$, donde v_t es la velocidad límite dada por $v_\mathrm{t} = \sqrt{g/b}$ y $T = v_\mathrm{t}/g$ es un parámetro de escala temporal.
- (b) ¿A qué fracción de velocidad terminal corresponde la velocidad en $t = T$?
- (c) Use un programa de una hoja de cálculo para representar $v_y(t)$ en función del tiempo, usando una velocidad terminal de $56\ \mathrm{m/s}$ (use este valor para calcular b y T). ¿Tiene sentido la curva resultante?

2.2.1. (a) Demostrar que $v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$

Se parte de la ecuación:

$$\frac{dv_y}{dt} = g - bv_y^2$$

Separando variables:

$$\frac{dv_y}{g - bv_y^2} = dt$$

Factorizamos el denominador para integrar:

$$\int \frac{dv_y}{g(1 - \frac{b}{g}v_y^2)} = \int dt$$

Sea $\alpha^2 = \frac{b}{g} \Rightarrow \frac{1}{g(1-\alpha^2 v_y^2)}$. Reconocemos una forma estándar:

$$\int \frac{1}{1-a^2x^2}dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}(ax)$$

Aplicamos:

$$\frac{1}{g}\int \frac{1}{1-\alpha^2 v_y^2}dv_y = \int dt \Rightarrow \frac{1}{g\alpha}\tanh^{-1}(\alpha v_y) = t + C$$

Imponiendo la condición inicial $v_y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, despejamos:

$$\tanh^{-1}(\alpha v_y) = g\alpha t \Rightarrow \alpha v_y = \tanh(g\alpha t)$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\alpha}\tanh(g\alpha t)$$

Ahora definimos la velocidad terminal $v_t = \sqrt{\frac{g}{b}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{v_t}$, y $T = \frac{v_t}{g} \Rightarrow g\alpha = \frac{1}{T}$. Entonces:

$$v_y(t) = v_t \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

2.2.2. (b) ¿Qué fracción de la velocidad terminal se alcanza en $t = T$?

$$v_y(T) = v_t \tanh(1) \approx v_t \cdot 0{,}7616$$

Entonces:

$$\frac{v_y(T)}{v_t} = \tanh(1) \approx 0{,}7616$$

2.2.3. (c) Representación gráfica con $v_t = 56\,\mathrm{m/s}$

Si $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$:

$$T = \frac{v_t}{g} = \frac{56\,\mathrm{m/s}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} \approx 5{,}71\,\mathrm{s}$$

Podemos usar una hoja de cálculo para graficar la función:

$$v_y(t) = 56 \cdot \tanh\left(\frac{t}{5{,}71}\right)$$

La curva resultante tiene la forma de crecimiento asintótico hacia la velocidad límite $v_t = 56\,\mathrm{m/s}$, lo cual es físicamente coherente con el modelo de resistencia del aire.

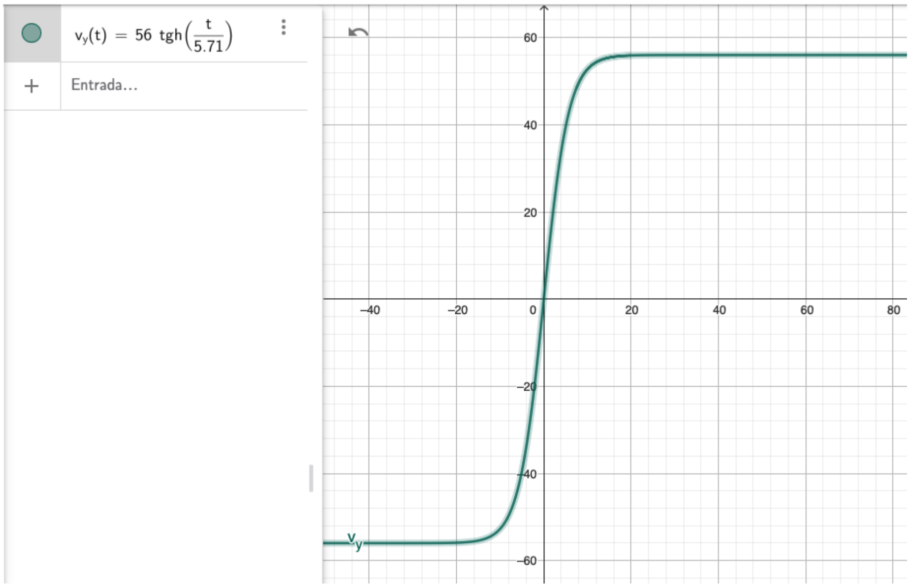


Figura 2.2: Gráfica de $v_y(t)$ con velocidad terminal.

2.3. Caída libre 2: Velocidad de Impacto en la Luna con Gravedad Variable

En un objeto celeste de radio R, la aceleración de la gravedad g a una distancia x del centro del objeto viene dada por $g(x) = g_0 R^2/x^2$, donde g_0 es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del objeto ($x = R$) y la fórmula es válida para $x \geq R$. Para la Luna, se tienen los siguientes valores:

- Aceleración en la superficie lunar: $g_0 = 1{,}63\,\mathrm{m/s^2}$
- Radio lunar: $R = 3200\,\mathrm{km}$

Se suelta una piedra a partir del reposo desde una altura de $4R$ por encima de la superficie lunar.

- (a) ¿Con qué velocidad impacta la piedra en la Luna?

2.3.1. (a) ¿Con qué velocidad impacta la piedra en la Luna?

Sea x la distancia medida desde el centro de la Luna. La piedra se suelta desde el reposo, por lo que su velocidad inicial $v_i = 0$. La altura inicial sobre la superficie es $h_i = 4R$. Por lo tanto, la distancia inicial desde el centro de la Luna es $x_i = R + h_i = R + 4R = 5R$. La piedra impacta la superficie lunar, por lo que su posición final es $x_f = R$. Queremos encontrar la velocidad final v_f.

Si definimos la dirección positiva como alejándose del centro de la Luna, entonces la aceleración gravitacional es hacia el centro (en la dirección de x decreciente), por lo tanto:

$$a(x) = -\frac{g_0 R^2}{x^2}$$

Usamos la relación cinemática

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

que es particularmente útil cuando la aceleración es una función explícita de la posición.

Partimos de la ecuación:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g_0 R^2}{x^2}$$

Separamos las variables para integrar:

$$v\,dv = -g_0 R^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

Integramos ambos lados. El lado izquierdo se integra desde la velocidad inicial $v_i = 0$ hasta la velocidad final v_f. El lado derecho se integra entre las posiciones correspondientes:

$$\int_0^{v_f} v\,dv = \int_{5R}^{R} -g_0 R^2 x^{-2}\,dx$$

Resolvemos las integrales definidas:

$$\left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^{v_f} = -g_0 R^2 \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{5R}^{R}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 - 0 = -g_0 R^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{5R}^{R}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 = g_0 R^2 \left[\frac{1}{x}\right]_{5R}^{R}$$

$$\frac{1}{2}v_f^2 = g_0 R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{5R}\right)$$

Simplificamos el término entre paréntesis:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{5R} = \frac{4}{5R}$$

Reemplazamos y despejamos para v_f^2:

$$v_f^2 = \frac{8}{5}g_0 R$$

Y finalmente, la velocidad de impacto v_f es:

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5}g_0 R}$$

Ahora podemos sustituir los valores proporcionados para la Luna: $g_0 = 1{,}63\,\mathrm{m/s^2}$ $R = 3200\,\mathrm{km} = 3\,200\,000\,\mathrm{m} = 3{,}2 \times 10^6$ m

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5} \times (1{,}63\,\mathrm{m/s^2}) \times (3{,}2 \times 10^6\,\mathrm{m})}$$

$$v_f = \sqrt{8{,}3456 \times 10^6\,\mathrm{m^2/s^2}}$$

$$v_f \approx 2888{,}875\,\mathrm{m/s}$$

Expresando el resultado con tres cifras significativas y en kilómetros por segundo:

$$v_f \approx 2890\,\mathrm{m/s} = 2{,}89\,\mathrm{km/s}$$

Por lo que derivamos la velocidad final para una aceleración gravitacional variable según la piedra se va acercando al centro del cuerpo celeste.

Capítulo 3

Problemas con hoja de cálculo

En este capítulo se presentan problemas para ser resueltos con el apoyo de una hoja de cálculo, y así analizar datos experimentales o evaluar modelos matemáticos que se benefician de la capacidad de cálculo y la realización de gráficas usando software especializado.

3.1. Hoja Cálculo 1: Caída de Objetos en la Luna

Usted es un astronauta que realiza experimentos de física en la Luna. En uno de estos experimentos analiza la caída de varios objetos, desde el reposo, y relaciona la distancia de caída y con el tiempo t. Para una moneda ha obtenido los siguientes resultados:

y (m)	10	20	30	40	50
t (s)	3,5	5,2	6,0	7,3	7,9

Asumiremos que la relación general entre la distancia y y el tiempo t es de la forma $y = Bt^C$, donde B y C son constantes que hay que determinar experimentalmente. Para ello,

(a) represente los datos en un gráfico logarítmico (log-log), es decir, representando $\log(y)$ (ordenadas) respecto $\log(t)$ (abscisas).

(b) Demuestre que si se toman logaritmos en la expresión $y = Bt^C$, se obtiene $\log(y) = \log(B) + C\log(t)$.

(c) Compare esta relación lineal con el gráfico de los datos y estime los valores de B y C.

(d) Si se deja caer una moneda desde 1,0 m de altura, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

(e) La verdadera relación entre y y t es $y = 1/2at^2$, donde a es la aceleración del objeto. Usando los valores de A y B derivados, ¿Cuál es la aceleración de los objetos que caen en la Luna?

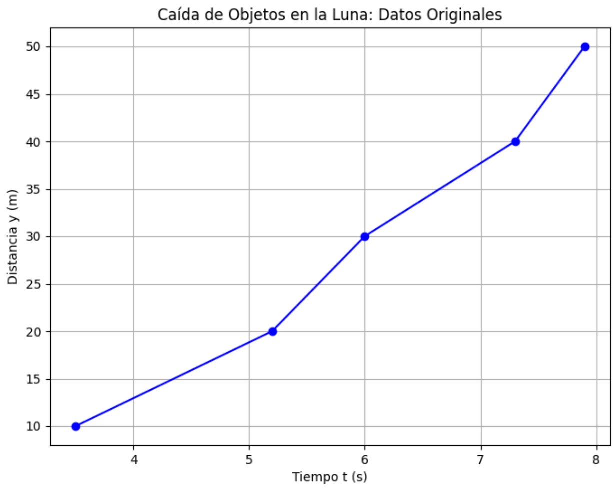
3.1.1. (a) Gráfico logarítmico y (b) Linealización de la ecuación

La relación propuesta es $y = Bt^C$. Si aplicamos logaritmos naturales (o cualquier base) a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\ln(y) = \ln(Bt^C)$$
$$\ln(y) = \ln(B) + \ln(t^C)$$
$$\ln(y) = \ln(B) + C\ln(t)$$

Esta ecuación tiene la forma de una recta $Y = mX + b$, donde $Y = \ln(y)$, $X = \ln(t)$.

La pendiente es $m = C$, y la ordenada al origen es $b = \ln(B)$. Para representar los datos en un gráfico logarítmico, primero calculamos los logaritmos naturales de los datos proporcionados:



y (m)	10	20	30	40	50
$\ln(y)$	2,303	2,996	3,401	3,689	3,912
t (s)	3,5	5,2	6,0	7,3	7,9
$\ln(t)$	1,253	1,649	1,792	1,988	2,067

Al graficar $\ln(y)$ versus $\ln(t)$ usando una hoja de cálculo, se observaría que los puntos tienden a alinearse a la relación lineal $Y = mX + b$.

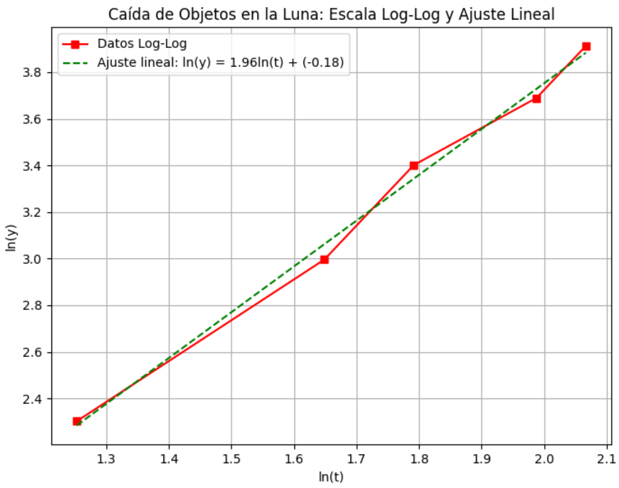
3.1.2. (c) Estimación de B y C

Utilizando la gráfica entregada en el paso anterior, podemos derivar las siguientes cantidades para A y B:

Pendiente: $C \approx 1,98$

Ordenada al origen: $\ln(B) \approx -0,154$

De estos valores, podemos estimar B: $B = e^{\ln(B)} = e^{-0,154} \approx 0,857$ Por lo tanto, la relación experimental es aproximadamente $y \approx 0,857t^{1,98}$.



3.1.3. (d) Tiempo de caída desde 1,0 m

Usamos la relación $y = 0,857t^{1,98}$.
Si $y = 1,0$, entonces:

$$1,0 = 0,857t^{1,98}$$

$$t^{1,98} = \frac{1,0}{0,857} \approx 1,167$$

$$t = (1,167)^{\frac{1}{1,98}} \approx (1,167)^{0,505} \approx 1,08\text{s}.$$

La moneda tardará aproximadamente 1,08 segundos en caer 1,0 m.

3.1.4. (e) Aceleración de los objetos en la Luna

La expresión para la caída libre es $y = \frac{1}{2}at^2$. Comparando esta ecuación con la forma experimental $y = Bt^C$, vemos que:

- C debería ser teóricamente igual a 2. Nuestro valor experimental $C \approx 1,98$ es muy cercano.
- B debería ser teóricamente igual a $\frac{1}{2}a$.
- Por lo tanto, $a = 2B \approx 2 \times 0,857 \approx 1,714$ m/s^2. La aceleración de los objetos que caen en la Luna es aproximadamente $1,71$ m/s^2.

  (El valor real es $1,62$ m/s^2).

3.2. Hoja Cálculo 2: Valor de Acciones

El valor de las acciones de una compañía puede ser muy impredecible, pero la gente a menudo intenta encontrar patrones del comportamiento en bolsa de los valores a partir de fórmulas matemáticas. El valor de las acciones de una compañía de ingeniería de materiales denominada Corning, situada en el estado de Nueva York, cada día 3 de agosto, cada cinco años en el periodo 1981 – 2001 evoluciona según la tabla.

(a) Precio (en dólares)	2,10	4,19	9,14	10,82	16,85
(b) Años desde 1980	1	6	11	16	21

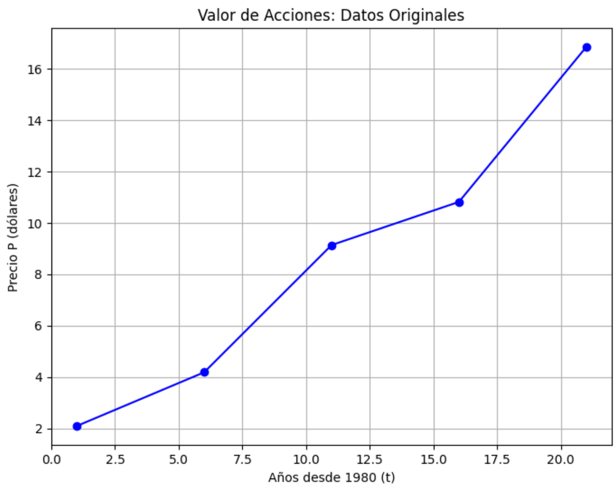
Supongamos que el precio P de las acciones (en dólares) sigue una ley de potencias $P = Bt^C$, donde t se expresa en años.

(a) Evalúe las constantes B y C.

(b) De acuerdo con esta ley de potencias, ¿cuál fue el precio de las acciones de la compañía el 3 de agosto del año 2000?

3.2.1. (a) Evaluación de las constantes B y C

La relación asumida es $P = Bt^C$. Similar al problema anterior, tomamos logaritmos naturales: $\ln(P) = \ln(B) + C\ln(t)$ Calculamos los logaritmos naturales de los datos:



P ($)	2,10	4,19	9,14	10,82	16,85
$\ln(P)$	0,742	1,433	2,213	2,381	2,824
t (años)	1	6	11	16	21
$\ln(t)$	0,000	1,792	2,398	2,773	3,045

A partir de la gráfica en escala log-log, con $\ln(P)$ como variable dependiente y $\ln(t)$ como variable independiente, obtendríamos aproximadamente:

Pendiente: $C \approx 0,673$

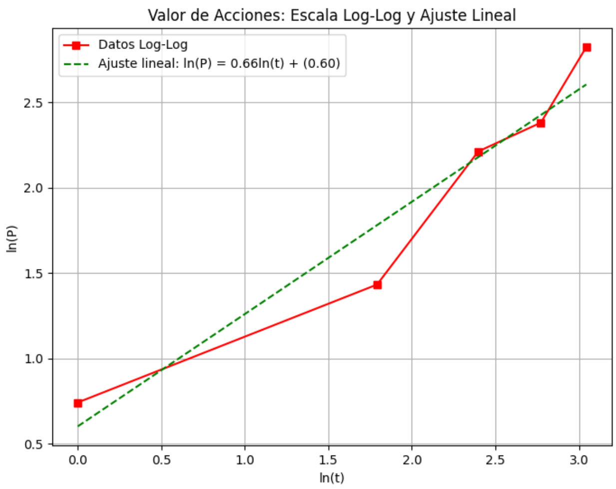
Ordenada al origen: $\ln(B) \approx 0,780$

De estos valores, estimamos B: $B = e^{\ln(B)} = e^{0{,}780} \approx 2,181$ Por lo tanto, la relación es aproximadamente $P \approx 2,181t^{0{,}673}$.

3.2.2. (b) Precio de las acciones el 3 de agosto del año 2000

El año 2000 corresponde a $t = 2000 - 1980 = 20$ años.

Usamos $P = 2,181t^{0{,}673}$ con $t = 20$. Entonces, $P \approx 2,181 \times 7,509 \approx 16,38$ dólares.

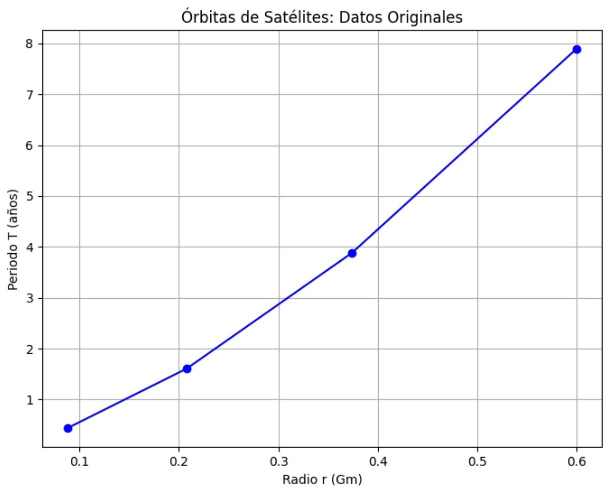


Según esta ley de potencias, el precio de las acciones el 3 de agosto del 2000 sería aproximadamente 16,38 \$. Este valor es significativamente diferente del precio real de 82,83 \$.

El modelo de ley de potencias **no** es un predictor fiable a largo plazo.

3.3. Hoja Cálculo: Órbitas de Satélites

La tabla adjunta da el periodo T y el radio r de las órbitas correspondientes a los movimientos de cuatro satélites que giran alrededor de un asteroide.



(a) Periodo T, años	0,44	1,61	3,88	7,89
(b) Radio r, Gm	0,088	0,208	0,374	0,600

Asumamos que estos datos se relacionan mediante la expresión $T = Cr^n$.

(a) Hallar C y n.

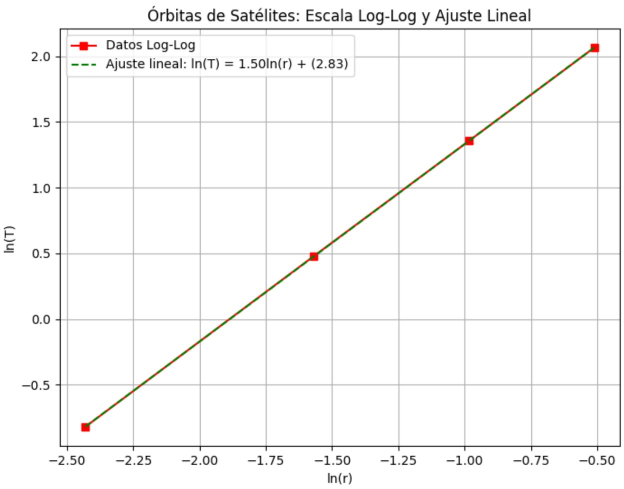
(b) Se descubre un quinto satélite que tiene un periodo de 6,20 años. Determinar la órbita de este satélite que se ajuste a la misma fórmula.

3.3.1. (a) Hallar C y n

La relación propuesta es $T = Cr^n$.

Tomamos logaritmos naturales: $\ln(T) = \ln(C) + n\ln(r)$.

Esta es una ecuación lineal donde $\ln(T)$ es la variable dependiente, $\ln(r)$ es la variable independiente, n es la pendiente y $\ln(C)$ es la ordenada al origen. Calculamos los logaritmos naturales de los datos:



T (años)	0,44	1,61	3,88	7,89
$\ln(T)$	-0,821	0,476	1,356	2,066
r (Gm)	0,088	0,208	0,374	0,600
$\ln(r)$	-2,430	-1,570	-0,984	-0,511

Inspeccionando la gráfica log-log, obtenemos valor aproximados:

Pendiente: $n \approx 1,5$

Ordenada al origen: $\ln(C) \approx 2,899$, por lo tanto $C = e^{\ln(C)} = e^{2,899} \approx 18,15$.

Por lo tanto, la relación es aproximadamente $T \approx 18,15r^{1,5}$.

(Este resultado es consistente con la tercera ley de Kepler, $T^2 \propto r^3$, o $T \propto r^{3/2}$).

3.3.2. (b) Órbita del quinto satélite

Se descubre un quinto satélite con un periodo $T_5 = 6,20$ años.

Usamos la relación encontrada para determinar su radio orbital r_5:

$$T_5 = Cr_5^n$$

$$6,20 = 18,15r_5^{1,5}$$

$$r_5^{1,5} = \frac{6,20}{18,15} \approx 0,3416 = 0,4883$$

El radio de la órbita del quinto satélite es aproximadamente $0,489$ Gm.

Capítulo 4

Simulaciones Computacionales

4.1. Sólido revolución 1: Calculando la velocidad en una pista cónica

Un bloque de masa m se mueve en el interior de un cono de revolución cuya superficie es perfectamente lisa. El vértice del cono apunta hacia abajo, y el cono tiene un ángulo θ entre el eje vertical del cono y su generatriz.

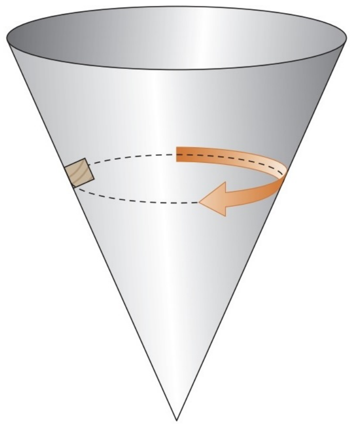


Figura 4.1: Cono con una canica en su interior a una altura h.

El bloque describe una trayectoria circular horizontal a una **altura** h **constante**, medida desde el vértice del cono. A partir de esta descripción,

- Parte A: Geometría del cono y la trayectoria

  1. Dibuje un corte transversal del cono. En este dibujo, represente:
     - El vértice del cono.
     - El eje de simetría vertical.
     - Una generatriz del cono.
     - El semiángulo vertical θ.
     - La posición del bloque a una altura h desde el vértice.
     - El radio r de la trayectoria circular que describe el bloque a esa altura h.

2. Utilizando trigonometría en el triángulo rectángulo formado por la altura h, el radio r y la generatriz del cono, encuentra una expresión para el radio r en función de h y θ.

- Parte B: Aplicando principios Físicos.

  Para que el bloque se mantenga en movimiento circular uniforme a una altura h constante, deben cumplirse ciertas condiciones físicas. Asumiremos como ciertas las siguientes relaciones, derivadas de las leyes de Newton:

  - Hay dos fuerzas principales sobre el bloque:
    - Su peso, $P = mg$ (dirigido verticalmente hacia abajo, donde g es la aceleración de la gravedad, aproximadamente $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$).
    - La fuerza normal N (ejercida por la superficie del cono, perpendicular a dicha superficie).
  - Para que la altura h sea constante, la componente vertical de la fuerza normal (N_{vertical}) debe equilibrar el peso:

    $$(1) \quad N_{\text{vertical}} = N\cos(\phi_{\text{normal}}) = mg$$

    Aquí, ϕ_{normal} es el ángulo que forma la normal con la vertical. Para un cono, este ángulo es igual al semiángulo vertical θ.
  - Para que el bloque describa un círculo de radio r a velocidad v, la componente horizontal de la fuerza normal ($N_{\text{horizontal}}$) debe proporcionar la fuerza centrípeta necesaria:

    $$(2) \quad N_{\text{horizontal}} = N\sin(\phi_{\text{normal}}) = \frac{mv^2}{r}$$

- Tu Tarea:

  Usando las ecuaciones (1) y (2) dadas en la Parte B (con $\phi_{\text{normal}} = \theta$), y tu resultado de la Parte A.2:

  1. Despeja la fuerza normal N de la ecuación (1).
  2. Sustituye esta expresión para N en la ecuación (2).
  3. En la ecuación resultante, sustituye la expresión para el radio r que encontraste en la Parte A.2.
  4. Finalmente, despeja la velocidad v en términos de g, h y θ.
  5. Una vez con la velocidad necesaria $v(g, h, \theta)$, responde:
     a) ¿Qué tipo de curva describe la trayectoria del bloque en el espacio tridimensional?
     b) Si el ángulo θ del cono fuera muy pequeño, casi un cilindro, ¿qué pasaría con la velocidad necesaria según tu fórmula? ¿Tiene sentido?
     c) Si el ángulo θ fuera cercano a 90 grados (un cono muy abierto, casi un plano), ¿qué pasaría? (Considera $\theta \to 90°$).

4.1.1. Detalles previos

Diagrama

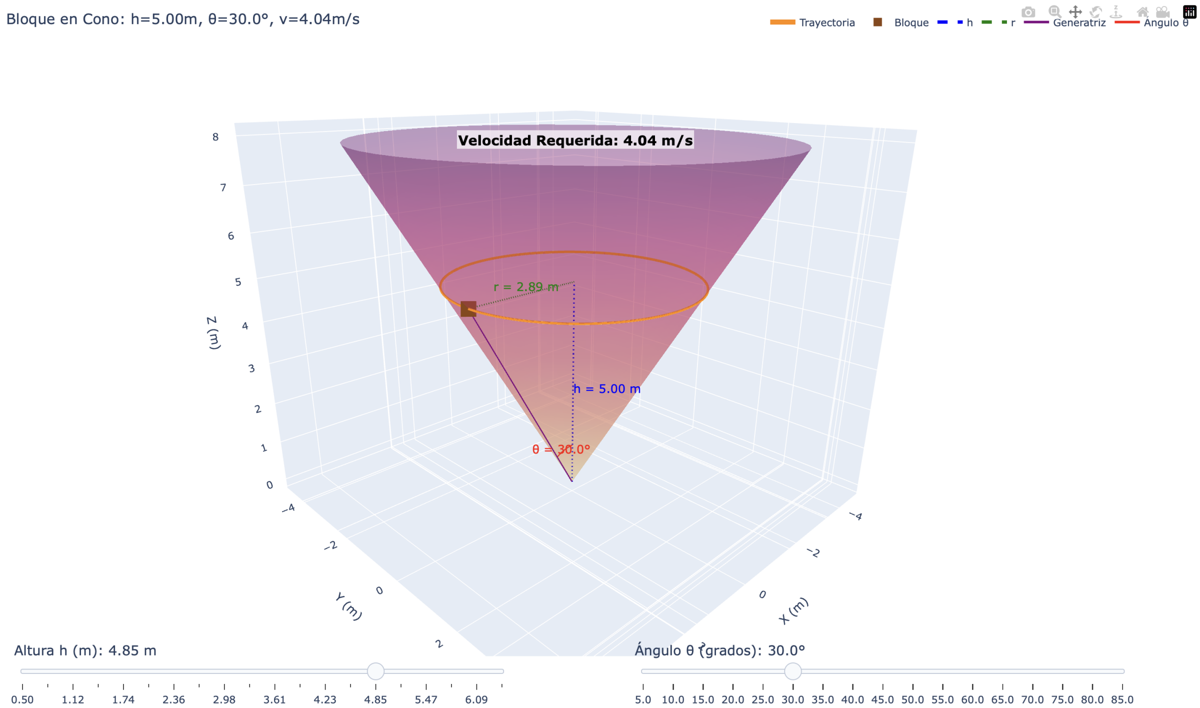


Figura 4.2: Visualización cono 3D usando Plotly con Python.

A) Parte Geométrica

El semiángulo vertical del cono es θ. Por trigonometría:

$$\tan\theta = \frac{r}{h}$$

Por lo que el radio de la trayectoria circular se expresa como:

$$r = h\tan\theta$$

La fuerza normal N es perpendicular a la superficie del cono. Si θ es el semiángulo vertical del cono, entonces el ángulo que forma la fuerza normal N con la vertical también es θ.

Descomponemos N en sus componentes vertical (N_y) y horizontal (N_x):

- Componente vertical: $N_y = N\cos\theta$
- Componente horizontal: $N_x = N\sin\theta$

B) Parte Física: Leyes de Newton

- Equilibrio en la componente y:

Como el bloque no se acelera verticalmente (se mantiene a altura h constante), la suma de las fuerzas en la dirección vertical debe ser cero.

$$\Sigma F_y = N_y - mg = 0 \Rightarrow N\cos\theta - mg = 0$$

Por lo tanto:

$$N\cos\theta = mg \quad \text{(Ecuación 1')}$$

- Movimiento circular en la componente horizontal x:

  La canica quiere seguir derecho, pero la superficie, en el eje-x, ejerce una fuerza centrípeta $F_c = ma_c$ (componente horizontal de la fuerza normal), donde $a_c = v^2/r$. Hay una fuerza neta no nula, por lo que la canica cambia constantemente su vector de velocidad.

$$\Sigma F_x = N_x = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow N\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad \text{(Ecuación 2')}$$

C) Desarrollo

De la Ec. 1', despejamos la fuerza normal N:

$$N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Sustituimos esta expresión para N en la Ec. 2':

$$\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

Simplificamos:

$$mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mg\tan\theta = m\frac{v^2}{r}$$

Cancelamos la masa m:

$$g\tan\theta = \frac{v^2}{r}$$

Sustituimos la expresión para $r = h\tan\theta$, obtenemos:

$$g\tan\theta = \frac{v^2}{h\tan\theta}$$

Despejamos v^2:

$$v^2 = gh\tan^2\theta$$

Finalmente, tomamos la raíz cuadrada para obtener la velocidad v:

$$v = \tan\theta\sqrt{gh}$$

D) Preguntas cierre

1) Un círculo horizontal.

2) Si $\theta \to 0$, $\tan\theta \to 0$, entonces $v \to 0$. Esto tiene sentido: un cilindro vertical no podría sostener un objeto en una órbita sin fricción a menos que el objeto no se mueva y esté en el fondo, o si la pared es horizontal, lo que no es el caso. Para $\theta = 0$ la superficie es vertical, la normal es horizontal y no puede equilibrar el peso.

3) Si $\theta \to 90°$, $\tan\theta \to \infty$, entonces $v \to \infty$. Esto también tiene sentido: para mantenerse a una altura h en una superficie casi plana, se necesitaría una velocidad extremadamente alta para que la pequeña componente vertical de una fuerza normal muy grande (inclinada casi horizontalmente) equilibre el peso.

4.2. Proyecto de Balística: El Rescate de la Pelota

Unos mecánicos juegan a la pelota en su tiempo libre, hasta que por desgracia se queda atascada en un rincón metálico, en de posición $P = (3 \text{ m}, 9 \text{ m})$. Para sacarla, solo deben darle un pequeño empujón a la pelota. Usando un compresor de aire que tenían disponible, fabrican un pequeño cañón que puede lanzar una roca para sacar la pelota. La velocidad a la que se dispara la roca es fija, y de magnitud $|v_0| = 15$ m/s. Lo único que pueden ajustar es el ángulo del cañón, ya que la posición del mismo es fija en $O = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$. Tu misión es lograr darle un pequeño empujón a la pelota. Asume que la aceleración de gravedad es constante $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ y desprecia la resistencia del aire.

Preámbulo

El primer paso es derivar una expresión general para la trayectoria del proyectil $y(x)$ que no dependa del tiempo sino solamente de la posición x, y de los parámetros v_0 y θ, y g.

En física, las ecuaciones paramétricas del movimiento siempre se pueden escribir como:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2$$

En este caso, como el proyectil comienza desde el origen, entonces $x_0 = y_0 = 0$. Además, la única aceleración que cuenta es la gravedad, que solo afecta al eje-*y*, por lo que $a_{0x} = 0$ y $a_{0y} = -g$. Así que, considerando que toda velocidad inicial se puede descomponer en componentes:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$$

Entonces tenemos dos ecuaciones que permiten saber dónde está el proyectil en todo momento:

$$(1) \quad x(t) = (v_0 \cos\theta)t$$

$$(2) \quad y(t) = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ahora, podemos combinar ambas ecuaciones: si despejamos t de la ecuación (1),

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta},$$

y sustituimos t en la ecuación (2), tenemos una expresión de la posición y del proyectil según la posición x:

$$y(x) = (v_0 \sin\theta)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

Si te fijas, la posición y en realidad depende de tres cosas: $y = y(x, \theta, v_0)$. A esta expresión la llamaremos **ecuación general de la trayectoria parabólica**:

$$y(x) = x\tan\theta - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

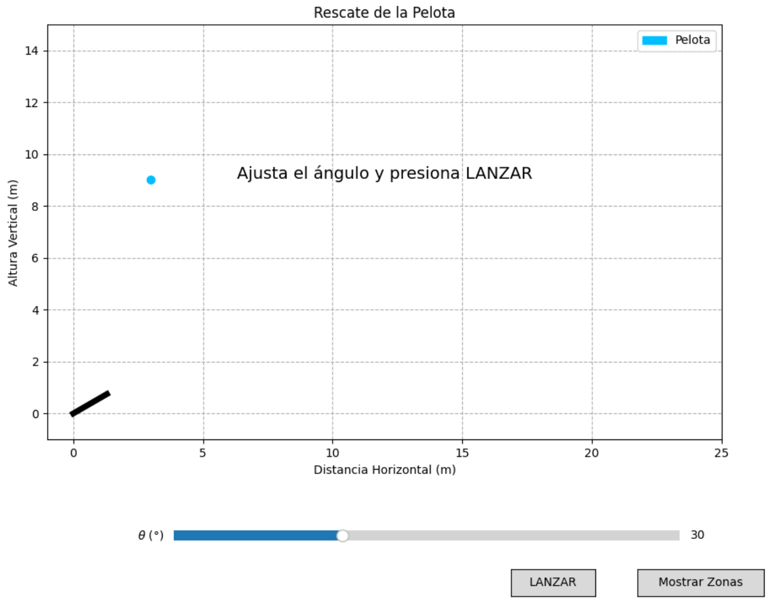


Figura 4.3: Simulación de proyectil para rescatar la pelota.

Tu Tarea:

1. Demuestra que la **ecuación general de la trayectoria** se puede transformar en una ecuación cuadrática para $u = \tan\theta$.

2. Resuelve la ecuación cuadrática para comprobar que

$$\tan\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha y - (\alpha x)^2}}{\alpha x}$$

es la expresión general que permite encontrar $\tan\theta$ en función de $\alpha = g/v_0^2$ y de la posición del objetivo,(x, y).

3. Reemplaza los valores del ejercicio para encontrar el ángulo específico en el que se debe lanar el cañón para mover la pelota. ¿El ángulo es único? Prueba en el **simulador**.

4. El cañón que inventaron solo puede lanzar hasta 15 m/s, así que existirán lugares donde donde la pelota es simplemente **inalcanzable** para el cañón, es decir, no hay $\theta \in \mathbb{R}$ que sirva. ¿Cómo crees que se relaciona la expresión 2 con esos lugares?

5. En física, se conoce como '**parábola de seguridad**' a aquella parábola que separa las regiones que son alcanzables por un proyectil, de aquellas que son inalcanzables por el proyectil. Usa el determinante de la expresión 2 para comprobar que la parábola de seguridad está dada por

$$y = \frac{1 - (\alpha x)^2}{2\alpha}.$$

¿Cuáles son los lugares donde la pelota es inalcanzable? Compara tu solución con la dada por el **simulador**.

4.2.1. Solución

1. Transformación a Ecuación Cuadrática

Nuestra primera tarea es tomar la ecuación general de la trayectoria y manipularla para que se parezca a una ecuación cuadrática, donde nuestra incógnita será $\tan\theta$.

Partimos de la ecuación de la trayectoria:

$$y = x\tan\theta - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

El problema es que tenemos $\tan\theta$ y $\cos^2\theta$. Para unificarlo todo en términos de $\tan\theta$, usamos la identidad trigonométrica fundamental: $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$, sabiendo que $\sec^2\theta = 1/\cos^2\theta$.

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)$$

Ahora, si llamamos a nuestra incógnita $u = \tan\theta$, la ecuación se ve mucho más simple:

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2)$$

Para que se vea como una ecuación cuadrática ($a\ u^2 + b\ u + c = 0$), distribuimos el término de la derecha y pasamos todo a un solo lado:

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2}u^2$$

$$\left(\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)u^2 - (x)u + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0$$

Hemos demostrado que la ecuación de la trayectoria es, en efecto, una ecuación cuadrática para la variable $u = \tan\theta$.

2. Solución General para $\tan\theta$

Ahora resolvemos esta ecuación cuadrática usando la fórmula general,

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Para simplificar la notación, definimos la constante $\alpha = g/v_0^2$. Entonces, los coeficientes son:

$$a = \frac{\alpha x^2}{2}$$

$$b = -x$$

$$c = y + \frac{\alpha x^2}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula cuadrática:

$$\tan\theta = \frac{-(-x) \pm \sqrt{(-x)^2 - 4\left(\frac{\alpha x^2}{2}\right)\left(y + \frac{\alpha x^2}{2}\right)}}{2\left(\frac{\alpha x^2}{2}\right)}$$

Simplificamos el denominador y el el discriminante:

$$\tan\theta = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2\alpha x^2 y - \alpha^2 x^4}}{\alpha x^2}$$

Finalmente, cancelamos una x del numerador y del denominador, lo que nos deja con la expresión general que queríamos comprobar:

$$\tan\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha y - (\alpha x)^2}}{\alpha x}.$$

3. Aplicación Numérica y Unicidad de la Solución

En nuestro caso, tenemos los siguientes valores:

- $x = 3$ m
- $y = 9$ m
- $v_0 = 15$ m/s
- $g = 9{,}8$ m/s^2

Primero, calculamos nuestra constante α:

$$\alpha = \frac{g}{v_0^2} = \frac{9{,}8}{(15)^2} = \frac{9{,}8}{225} \approx 0{,}04356$$

Reemplazamos los otros valores para encontrar $\tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(0{,}04356)(9) - (0{,}04356 \cdot 3)^2}}{0{,}04356 \cdot 3}$$

Calculamos los términos dentro de la raíz:

$$\tan\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}78408 - (0{,}13068)^2}}{0{,}13068}$$

$$\tan\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}78408 - 0{,}01708}}{0{,}13068} = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}19884}}{0{,}13068}$$

$$\tan\theta \approx \frac{1 \pm 0{,}4459}{0{,}13068}$$

Como el discriminante es positivo, entonces existen **dos soluciones reales**:

$$\tan(\theta_1) \approx \frac{1 + 0{,}4459}{0{,}13068} \approx 11{,}06$$

$$\tan(\theta_2) \approx \frac{1 - 0{,}4459}{0{,}13068} \approx 4{,}24$$

Finalmente, encontramos los dos ángulos usando la función arcotangente:

$$\theta_1 = \arctan(11{,}06) \approx 84{,}84°$$

$$\theta_2 = \arctan(4{,}24) \approx 76{,}73°$$

Esto significa que los mecánicos tienen dos opciones: un tiro muy alto (casi 85°) o un tiro un poco más bajo (casi 77°).

4. La Condición de Inalcanzable

Si la expresión para $\tan\theta$ nos da un resultado que no es un número real, significa que no hay un ángulo real que podamos ajustar en el cañón para que funcione. Esto ocurre cuando el término dentro de la raíz cuadrada es negativo.

$$1 - 2\alpha y - (\alpha x)^2 < 0$$

Por lo tanto, los lugares (x, y) donde la pelota es inalcanzable son todos aquellos puntos que hacen que esa expresión sea menor que cero.

5. La Parábola de Seguridad

La frontera exacta entre la zona alcanzable y la inalcanzable es el caso límite, es decir, donde justo existe una única solución para el ángulo.

$$1 - 2\alpha y - (\alpha x)^2 = 0$$

Para tener 'La Parábola de Seguridad', podemos despejar y para obtener la expresión $y(x)$ que define esa parábola:

$$2\alpha y = 1 - (\alpha x)^2$$
$$y = \frac{1 - (\alpha x)^2}{2\alpha}$$

Por lo que corroboramos la expresión del enunciado.

Para el cañón de los mecánicos, con $\alpha \approx 0{,}04356$, la frontera de lo posible está definida por la Parábola de Seguridad:

$$y(x) = \frac{1 - (0{,}04356x)^2}{2(0{,}04356)} =\approx 11{,}48 - 0{,}02178x^2$$

Cualquier pelota atascada en una posición (x, y) tal que $y > 11{,}48 - 0{,}02178x^2$ será **inalcanzable**.

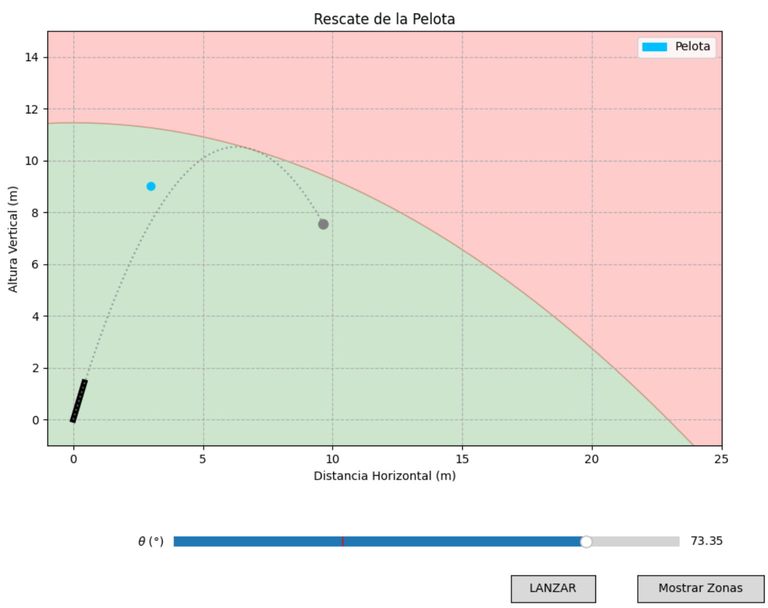


Figura 4.4: Simulación con región inalcanzable.

4.3. El Desafío del Arquero

Un arquero, situado en el origen (0,0), debe disparar una flecha para que esta pase a través de dos anillos circulares. El primer anillo, de radio R_1, está centrado en (x_{c1}, y_{c1}). El segundo anillo, también de radio R_2, está centrado en (x_{c2}, y_{c2}). El desafío es establecer las condiciones matemáticas que deben cumplir la velocidad de lanzamiento v_0 y el ángulo θ para que la hazaña sea posible.

Preámbulo

Como derivamos en el ejercicio del 'Rescate del Satélite', la ecuación de la trayectoria de un proyectil es:

$$y(x) = x \tan\theta - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \right) x^2$$

Tu Tarea:

1. Para el primer anillo, escribe la inecuación matemática que garantiza que la flecha pase por su interior.

   Haz lo mismo para el segundo anillo.

2. El problema se reduce a encontrar los pares de valores (v_0, θ) que satisfacen simultáneamente dos inecuaciones. Resolver este sistema analíticamente es extremadamente complejo. Seguiremos el siguiente procedimiento:

   2.1. Encuentra una combinación que logre pasar por ambas argollas.

   2.2. Una vez encontrada una combinación, mueve de a poco uno de los parámetros **hasta que ya no funcione**.

   2.3. Pinta la región donde sí funcionó. Usa la plantilla de más abajo.

   2.4. Vuelve a la primera combinación que funcionó. Ahora varía ligeramente el otro parámetro hasta que deje de funcionar. Dibuja la región donde funcionó.

   2.5. Repite este procedimiento hasta que creas que se agotaron las combinaciones.

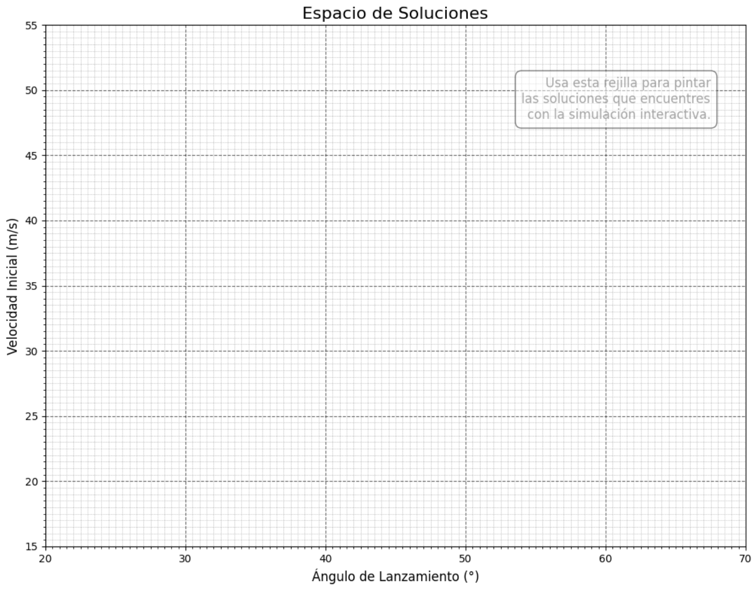


Figura 4.5: Plantilla espacio de soluciones Desafío del Arquero.

Lo que estamos haciendo es crucial en física de sistemas complejos, y es llamada **región de solución en el espacio de parámetros** (v_0, θ).

3. Crea un script de Python que resuelva el mismo problema, asegurándote que sí estudie todas las posibles combinaciones de (v_0, θ). ¿Habían regiones que no alcanzaste a explorar?

4.3.1. Solución

A) Sistema de Inecuaciones

Para que la flecha pase por el primer anillo, en la posición horizontal x_{c1}, su altura vertical $y(x_1)$ debe estar dentro del rango vertical del anillo. Es decir, la distancia entre el centro del anillo (x_{c1}, y_{c1}) y el punto de la trayectoria $(x_1, y(x_1))$ debe ser menor que el radio R.

$$\text{Condición para el Anillo 1:} \quad |y(x_1) - y_{c1}| < R_1$$

Sustituyendo la ecuación de la trayectoria, obtenemos la primera inecuación:

$$(1) \qquad \left| x_{c1} \tan\theta - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \right) x_{c1}^2 - y_{c1} \right| < R_1$$

De manera análoga, para el segundo anillo en la posición (x_{c2}, y_{c2}),

$$\text{Condición para el Anillo 2:} \quad |y(x_2) - y_{c2}| < R_2$$

Que se puede escribir como:

$$(2) \qquad \left| x_{c2} \tan\theta - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \right) x_{c2}^2 - y_{c2} \right| < R_2$$

B) Uso de Simulación

Aquí es donde una simulación computacional se vuelve indispensable. En este link se puede encontrar el script 'arquero_simulacion.py'.

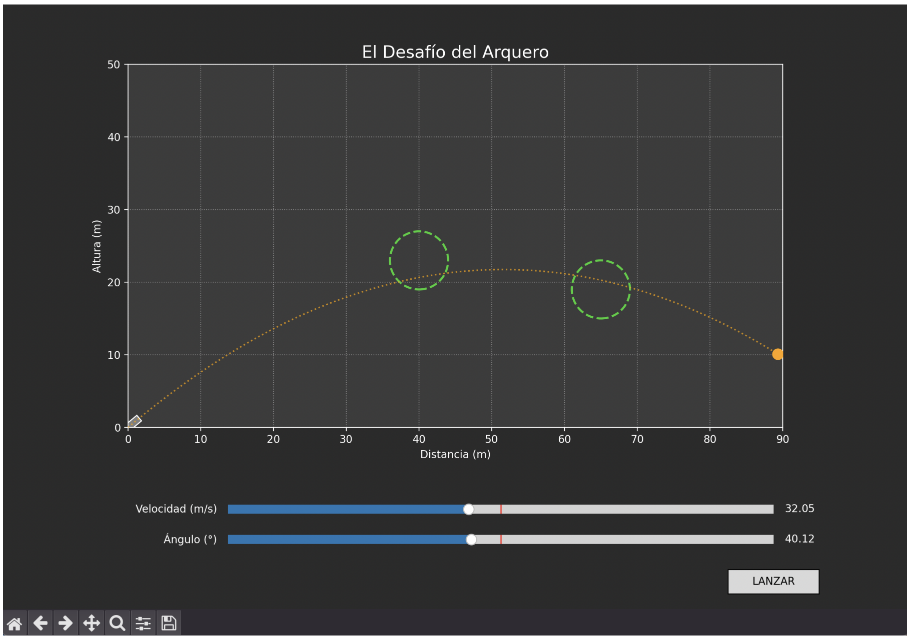


Figura 4.6: Captura de simulación arquero_simulacion.py.

C) Construcción script de Python

Para la verificación del espacio de soluciones, podemos usar el script en este link como una plantilla para que los alumnos terminen un código pre-armado que barre todas las configuraciones de parámetros que son exitosas.

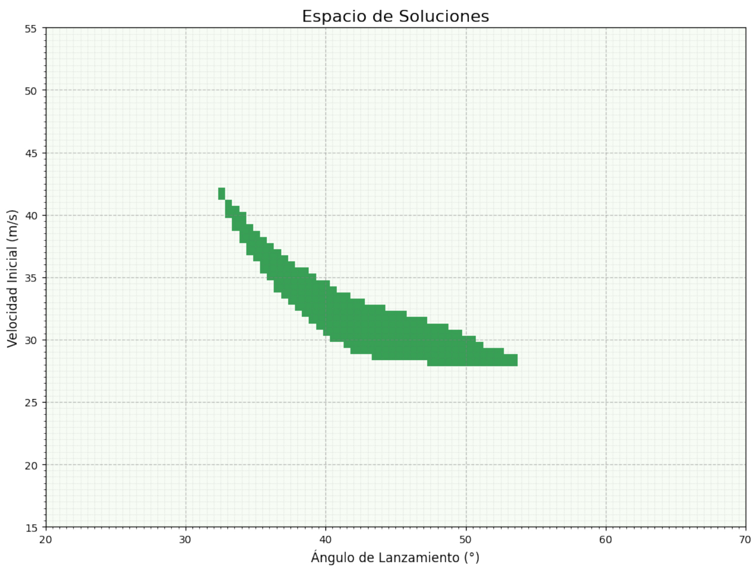


Figura 4.7: Captura de análisis espacio de soluciones para arquero_simulacion.py.

4.4. La Bola en la Escalera

Desde el borde superior donde comienza una escalera, se lanza **horizontalmente** una bola con velocidad inicial v_0. La escalera consiste en escalones idénticos de ancho w y alto h. El desafío es determinar en qué escalón, numerado como $n = 1, 2, 3, \ldots$, aterrizará la bola por primera vez.

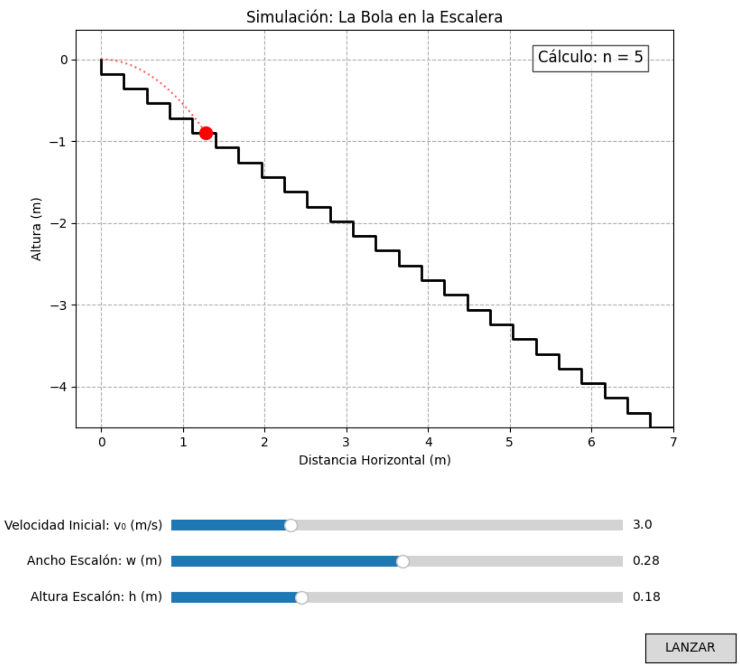


Figura 4.8: Configuración inicial de la simulación.

Colocamos el origen (0,0) en el punto de lanzamiento. Las direcciones de los ejes son las usuales: $+x$ hacia la derecha y la $+y$ hacia arriba. Así, las ecuaciones de movimiento son:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2,$$

donde $g = 9{,}8$ m/s^2. Las coordenadas del borde exterior del *n-ésimo* escalón son:

$$(x_n, y_n) = (n \cdot w, -n \cdot h).$$

Tu Tarea:

1. Usa la **simulación** del lanzamiento de la bola. Prueba lanzando la bola a una velocidad v_0 baja. Luego lánzala al doble de la velocidad. ¿En cuánto aumentó el n del escalón? ¿Cómo aumenta el número n en razón de la velocidad v_0?

2. Ya viste qué pasa al manipular v_0. Ahora, mantén $v_0 = 3$m/s constante y duplica el ancho w de los escalones. ¿Qué le pasa a n? ¿Y si duplicas la altura h? ¿A qué cambio es más sensible el resultado?

3. Construyamos una expresión para n.

   Si la bola aterriza en el escalón n, significa que su trayectoria pasa por encima del borde del escalón $n-1$. Calcula la posición vertical de la bola justo en el momento de pasar por el *n-ésimo* borde de escalón, es decir $y(t_n)$.

4. Para que la bola aterrice en el escalón n (y no en uno anterior), su distancia vertical $y(t_n)$ debe ser menor o igual a la altura de ese escalón, que es $-nh$. Formaliza una desigualdad entre ambas distancias verticales y despeja n. Esta expresión será función de v_0, w, h y g.

5. Usa estos valores para tener un valor numérico del escalón donde cae por primera vez: $h = 18$ cm, $w = 28$ cm, $v_0 = 3$ m/s.

4.4.1. Solución

A) n **vs** v_0

La simulación comienza con $h = 18$ cm, $w = 28$ cm, $v_0 = 3$ m/s.

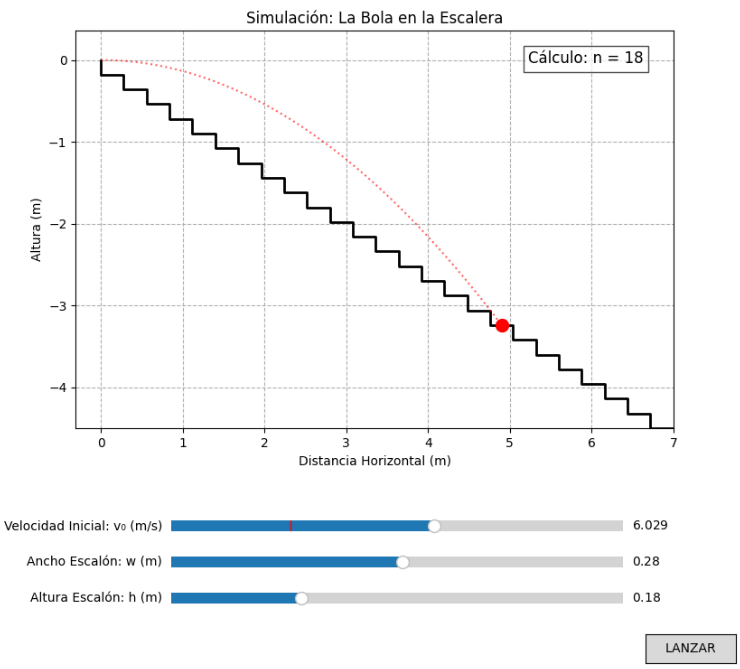


Figura 4.9: Configuración inicial de la simulación.

Al variar v_0, podremos tener una tabla del estilo:

v_0 [m/s]	n
3 $\sim 3 \times 1$	**5** $\sim 5 \times 1$
6.05 $\sim 3 \times 2$	**18** $\sim 5 \times 4$
9 $\sim 3 \times 3$	**38** $\sim 5 \times 8$
...	...

de donde se puede deducir un efecto cuadrático de v_0 en n.

B) n **vs** h **y** n **vs** w

Lo mismo se puede hacer al variar los parámetros h y w. Mantenemos $v_0 = 3$ m/s y $w = 0{,}28$ m constante, y variamos el valor de h:

h [m]		n	
0.18	$\sim h \times 1$	**5**	$\sim 5 \times 1$
0.36	$\sim h \times 2$	**9**	$\sim 5 \times 2$
0.54	$\sim h \times 3$	**13**	$\sim 5 \times 3$

Cuadro 4.1: Variación de n al aumentar h.

de donde se deduce un efecto lineal de h en n. Ahora mantenemos $v_0 = 3$ m/s y $h = 0{,}18$ m constante, y variamos el valor de w:

w [m]		n	
0.14	$\sim w \times 0{,}5$	**17**	$\sim 5 \times 4$
0.28	$\sim w \times 1$	**5**	$\sim 5 \times 1$
0.56	$\sim w \times 2$	**2**	$\sim 5 \times 0{,}5$

Cuadro 4.2: Variación de n al modificar w.

de donde se deduce un efecto cuadrático inverso de w en n.

C) Condición de Impacto y Solución

Consideremos el momento t_n en que la bola alcanza la distancia horizontal del borde del escalón n:

$$x(t_n) = n \cdot w \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{n \cdot w}{v_0}$$

En ese momento, la caída vertical de la bola es:

$$y(t_n) = -\frac{1}{2} g t_n^2 = -\frac{1}{2} g \left(\frac{nw}{v_0} \right)^2 .$$

D) Expresión para n

Para que la bola aterrice en el escalón n (y no en uno anterior), su distancia vertical $y(t_n)$ debe ser menor o igual a la altura de ese escalón, que es . Dicho de otro modo, si en el momento exacto en que la bola pasa por el *n-ésimo* vértice, t_n, la distancia $y(t_n)$ es mayor que el vértice de la escalera $-nh$, entonces es porque la bola pasa por arriba de ese escalón. Por lo tanto, $y(t_n)$ debe ser menor que $-nh$, que es la condición de impacto en escalón *n* o superior:

$$-\frac{1}{2} g \left(\frac{nw}{v_0} \right)^2 \leq -nh$$

Podemos simplificar esta desigualdad:

$$\frac{gnw^2}{2v_0^2} \geq h \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{2hv_0^2}{gw^2}$$

El número de escalón n en el que la bola aterriza será el **primer entero** que satisface esta condición (el entero más pequeño que es mayor o igual al valor del lado derecho). Esta operación matemática es la función "techo"(ceiling).

$$n = \left\lceil \frac{2hv_0^2}{gw^2} \right\rceil .$$

La forma funcional corrobora los hallazgos de las secciones 1 y 2 de este ejercicio.

E) Reemplazo de valores

Si reemplazamos los valores $h = 18$ cm, $w = 28$ cm, $v_0 = 3$ m/s, tenemos como resultado $n \approx 4{,}217$. El primer entero que satisface $n \geq 4{,}217$ es 5. La bola aterrizará en el 5º escalón.

4.5. Frenada de Emergencia

Este problema analiza la cinemática de una frenada para evitar una colisión. Hay dos autos, el auto A y el auto B, moviéndose con vectores de velocidad paralelos. El auto A viene a más rápido que el auto B, y de pronto se da cuenta que tiene que comenzar a frenar para evitar un accidente. El auto A comienza a frenar con una aceleración constante $-a < 0$, cuando están a una distancia D el uno del otro. En el problema unidimensional, podemos establecer las ecuaciones de posición de ambos autos:

- Posición del auto A: $x_A(t) = v_1 t - \frac{1}{2}at^2$
- Posición del auto B: $x_B(t) = D + v_2 t$

La colisión ocurre si la posición de ambos autos es la misma en algún momento, es decir, $x_A(t) = x_B(t)$ para algún tiempo $t > 0$. Buscaremos conocer en qué casos existe accidente.

Tu tarea:

1. Familiaridad con la dinámica.

   Haciendo uso de la **simulación**, ajusta varios escenarios con distintas combinaciones de a, D, y $\Delta v = v_1 - v_2$. En particular, fija una Δv y varía solo D. Después has lo contrario, fija D y varía solo Δv. ¿Es igual de sensible la variación de Δv en comparación a D?

   Para simular, solo presiona 'SIMULAR SETUP'. No presiones 'SOLUCIÓN COMPLETA' aún.

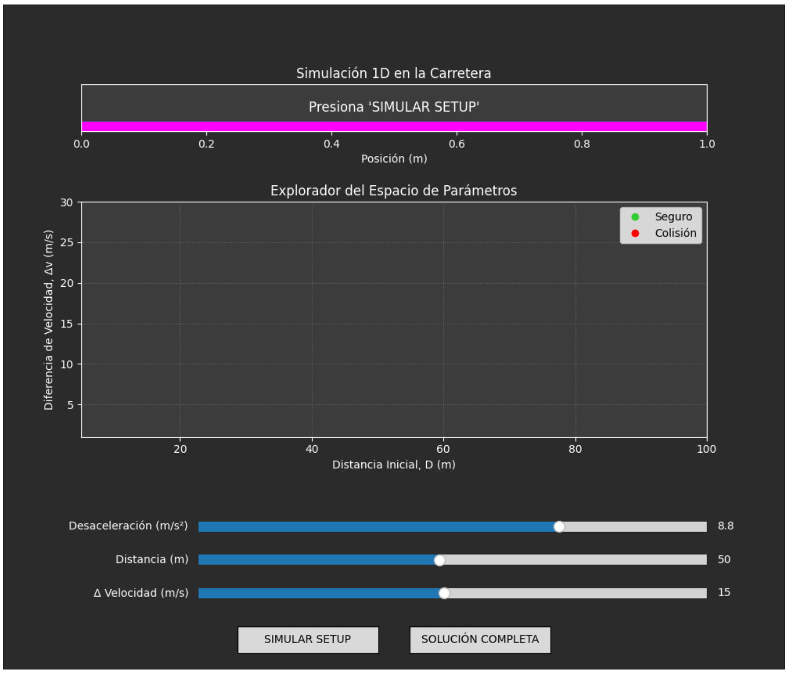


Figura 4.10: Simulación de Frenada de Emergencia, con representación en el espacio de soluciones del problema.

2. Modelo Matemático General:

   A partir de la condición de accidente $x_A(t) = x_B(t)$, encuentra una expresión general para saber si el choque es inevitable o no.

3. Cálculo de la Desaceleración Mínima:

   Un auto (A) viaja a $v_1 = 108\,\mathrm{km/h}$ y se encuentra a una distancia $D = 50$ m detrás de otro auto (B) que viaja en la misma dirección a $v_2 = 72\,\mathrm{km/h}$. ¿Cuál es la desaceleración constante mínima a_{min} que debe aplicar el auto A para evitar la colisión?

4. Cálculo de la Velocidad Máxima:

   Se sabe que un auto de pasajeros estándar, en asfalto seco, puede lograr una desaceleración máxima de $a = 8{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Si el conductor mantiene una distancia de seguridad de $D = 25$ m con el auto de adelante, ¿cuál es la diferencia de velocidad máxima $\Delta v_{max} = v_1 - v_2$ que puede haber entre ellos para que el accidente sea evitable? Exprese el resultado en km/h.

5. Haciendo uso de la **simulación**, verifica tus conclusiones de los ítems 2 y 3.

PD: Puedes usar las velocidades en m/s:
$v_1 = 108$ km/h $= 30$ m/s,
$v_2 = 72$ km/h $= 20$ m/s.

4.5.1. Solución

A) Familiaridad con la dinámica

Luego de seguir las indicaciones, los alumnos deberían tener varios puntos que capturan una dinámica no-lineal.

Al presionar 'SOLUCIÓN COMPLETA', verán que las regiones no están separadas por una línea recta, evidenciando la naturaleza no-lineal de la dinámica. El escenario es más sensible a los valores de Δv.

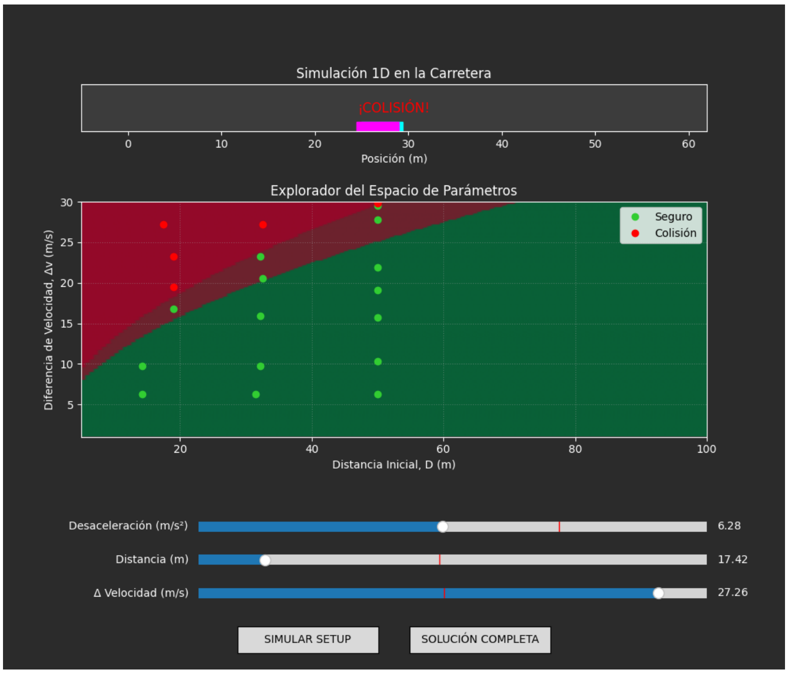


Figura 4.11: Simulación de Frenada de Emergencia, con representación en el espacio de soluciones del problema.

B) Modelo Matemático General

La colisión ocurre si la posición de ambos autos es la misma en algún momento, es decir, $x_A(t) = x_B(t)$ para algún tiempo $t > 0$:

$$v_1 t - \frac{1}{2}at^2 = D + v_2 t$$

Reordenando en la forma de una ecuación cuadrática $At^2 + Bt + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)t^2 + (v_2 - v_1)t + D = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática para **aquellos t donde existe colisión**. Como bien sabes, las soluciones de t pueden estar en $\mathbb{C}$. Existe colisión solo si existen valores $t \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, la colisión se evita si esta ecuación solo tiene soluciones del tipo $t \in \mathbb{C}$, lo que significa que su discriminante ($\Delta = B^2 - 4AC$) debe ser negativo. El caso límite (un "toque") es cuando el discriminante es cero.

$$\Delta = (v_2 - v_1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}a\right)(D) < 0$$

$$(v_1 - v_2)^2 - 2aD < 0$$

Esta nos da la condición de seguridad general:

$$(v_1 - v_2)^2 < 2aD$$

C) Cálculo de la Desaceleración Mínima

Usamos la condición límite para encontrar la aceleración mínima. Sea $\Delta v = v_1 - v_2 = 30 - 20 = 10$ m/s.

$$a > \frac{(\Delta v)^2}{2D}$$

$$a_{min} = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{2(50 \text{ m})} = \frac{100}{100} = 1 \text{ m/s}^2$$

El auto A debe desacelerar a un mínimo de $1{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ para evitar la colisión.

D) Cálculo de la Velocidad Máxima

Usamos la misma condición de seguridad, pero ahora la incógnita es Δv.

$$(\Delta v)^2 < 2aD$$

Buscamos la diferencia de velocidad máxima, que corresponde al caso límite:

$$\Delta v_{max} = \sqrt{2aD}$$

Sustituimos los valores dados: $a = 8{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ y $D = 25$ m.

$$\Delta v_{max} = \sqrt{2(8{,}8)(25)} = \sqrt{440} \approx 20{,}98 \text{ m/s}$$

Finalmente, convertimos este resultado a km/h:

$$20{,}98\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \approx 75{,}5 \text{ km/h}$$

Si el conductor mantiene una distancia de 25 metros, la diferencia de velocidad no debe superar los $75{,}5\,\mathrm{km/h}$ para que una frenada de emergencia sea efectiva.

Capítulo 5

Simulaciones Computacionales - Avanzado

5.1. Sólido revolución 2: Calculando la velocidad en variadas pistas

Extendiendo el análisis del Problema 4, investigaremos la velocidad v requerida para que un objeto de masa m describa una trayectoria circular horizontal de radio r a una altura constante h en el interior de **diferentes superficies de revolución** lisas, entre ellas:

A) Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)

B) Parábola en Rotación (Paraboloide)

C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)

D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

Para la siguente actividad, considera;

- **A) Parte Geométrica**

  En el caso **anterior**, teníamos la relación geométrica clave

$$\tan\theta = \frac{r}{h}$$

  En este caso, necesitaremos:

  1. Encontrar la relación geométrica entre el radio r y la altura h.
  2. Determinar $\tan(\phi)$ en función de la geometría de la superficie en el punto (r, h). El ángulo ϕ que la normal forma con la vertical es tal que

$$\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|.$$

  Asumiremos que h se mide desde el punto más bajo de la superficie de revolución (vértice), y el eje de simetría es vertical.

- **B) Parte Física: Leyes de Newton**

  Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de movimiento circular son las mismas que en el Problema 4. Sea ϕ el ángulo que forma la fuerza normal N (perpendicular a la superficie) con la vertical.

$$N\cos(\phi) = mg \qquad (A)$$
$$N\sin(\phi) = \frac{mv^2}{r} \qquad (B)$$

  Dividiendo (B) por (A), obtenemos:

$$\tan(\phi) = \frac{v^2}{gr} \implies v^2 = gr\tan(\phi) \implies \boxed{v = \sqrt{gr\tan(\phi)}}$$

- **Tu Tarea**

  Repitiendo los pasos del problema anterior, para

  A) Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)
  B) Parábola en Rotación (Paraboloide)
  C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)
  D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

  desarrolle:

  1. Despeja la velocidad v en términos de g, h y θ.
  2. Una vez con la velocidad necesaria $v(g, h, \theta)$, responde:
     a) ¿Qué tipo de curva describe la trayectoria del bloque en el espacio tridimensional?
     b) ¿De qué parámetros realmente depende la velocidad?.
     c) Entregue casos reales en los que esta superficie es pertinente.

5.1.1. A): Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)

Una circunferencia de radio de curvatura R_{curv} que rota alrededor de un diámetro vertical genera una esfera. Consideramos el movimiento en la **mitad inferior** de un tazón esférico de radio R_{curv}, con el vértice en $h = 0$.

Parte Geométrica (con cálculo diferencial)

La ecuación de la circunferencia generatriz (en el plano rh, con origen en el vértice inferior de la esfera) es

$$r^2 + (h - R_{\text{curv}})^2 = R_{\text{curv}}^2.$$

Esto se simplifica a

$$r^2 = 2hR_{\text{curv}} - h^2.$$

Entonces, el radio de la trayectoria circular es

$$r = \sqrt{2hR_{\text{curv}} - h^2}.$$

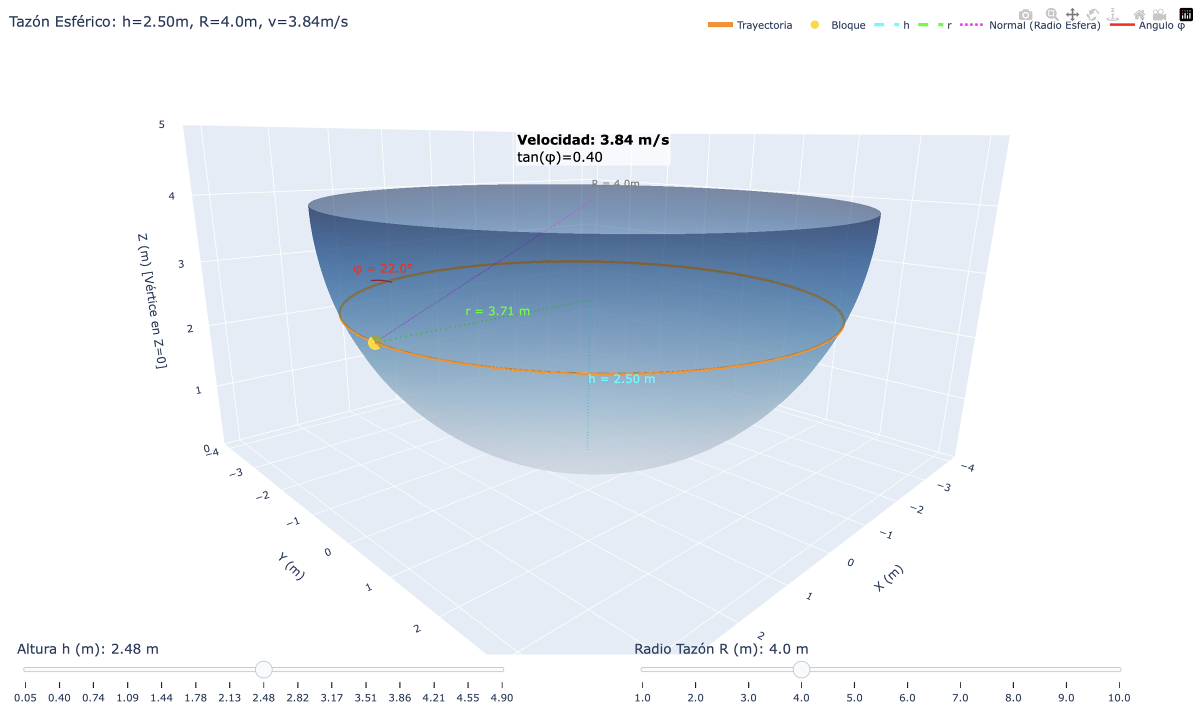


Figura 5.1: Visualización esfera 3D usando Plotly con Python.

Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = 2hR_{\text{curv}} - h^2$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = 2R_{\text{curv}} - 2h \implies \frac{dr}{dh} = \frac{R_{\text{curv}} - h}{r}.$$

Como $h < R_{\text{curv}}$ en la mitad inferior del tazón, $R_{\text{curv}} - h > 0$. Si $r > 0$, entonces

$$\tan(\phi) = \frac{R_{\text{curv}} - h}{r}.$$

Parte Física

Reemplazamos este valor en nuestra expresión para la velocidad,

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{R_{\text{curv}} - h}{r}\right) = g(R_{\text{curv}} - h)$$

$$\boxed{v = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}}$$

Respuestas

a) La curva que descrive es una circunferencia.

b) La velocidad depende de R_{curv} y h. Si $h \to R_{\text{curv}}$ (el ecuador del tazón), $v \to 0$. En este punto, la normal sería horizontal, lo que no permitiría equilibrio vertical (a menos que $g = 0$). Esta fórmula es válida para $h < R_{\text{curv}}$.

c)

- Una canica rodando en un tazón esférico de vidrio.
- Curvas peraltadas en pistas de bobsleigh o velódromos que tienen secciones esféricas.

5.1.2. B): Parábola en Rotación (Paraboloide)

Una parábola con vértice en el origen, $r^2 = kh$ (donde k es una constante relacionada con la distancia focal p a la parábola $x^2 = 4py$, y está dada por $k = 4p$), que rota alrededor de su eje vertical.

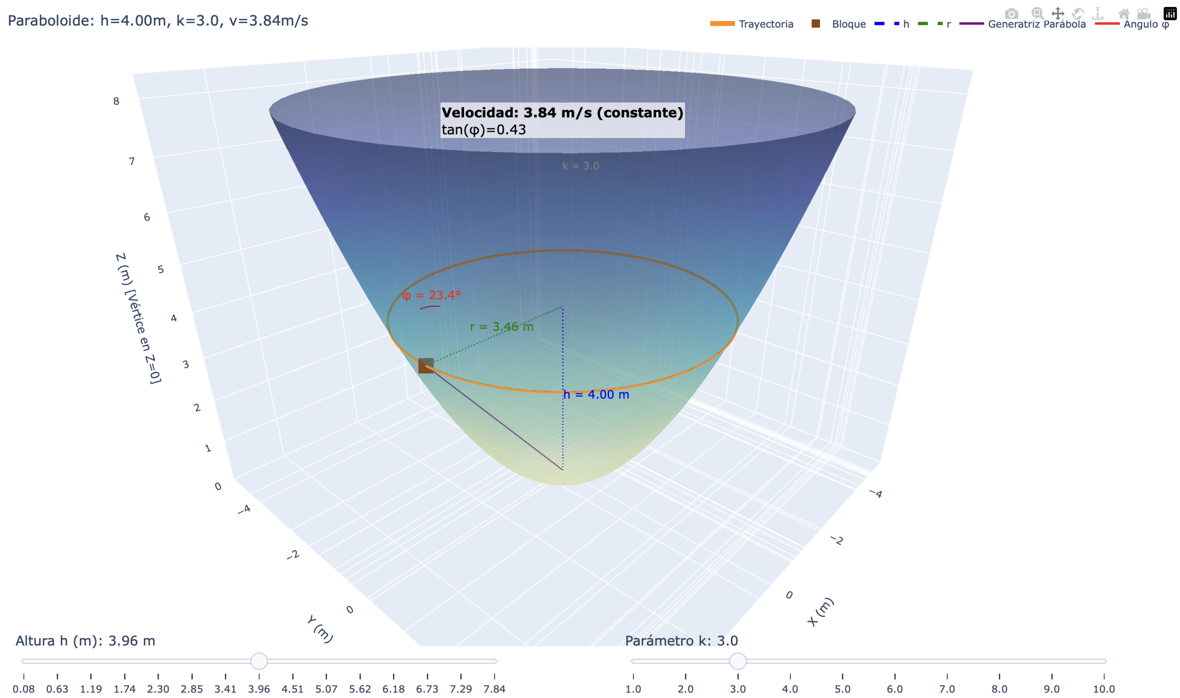


Figura 5.2: Visualización paraboloide 3D usando Plotly con Python.

Parte Geometría

Partimos de la ecuación $r = \sqrt{kh}$. Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = kh$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = k \implies \frac{dr}{dh} = \frac{k}{2r}.$$

Entonces, asumiendo $k > 0, r > 0$,

$$\tan(\phi) = \frac{k}{2r}.$$

Parte Física

Reemplazamos en la expresión para la velocidad,

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{k}{2r}\right) = \frac{gk}{2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gk}{2}}}$$

Respuestas

a) Una circunferencia.

b) La velocidad requerida es constante, independiente de la altura h y del radio r. Esto significa que si un objeto se mueve a esta velocidad específica, puede mantener una órbita circular a cualquier altura en el paraboloide.

c)

- La superficie de un líquido en un recipiente que rota a velocidad angular constante toma forma de paraboloide. Los telescopios de espejo líquido utilizan este principio.
- Algunas antenas parabólicas o reflectores solares podrían servir de “pista” si fueran lisos.

5.1.3. C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)

Consideramos una hipérbola $\frac{r^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$ rotando alrededor del eje h (su eje conjugado). Aquí, a es el radio mínimo (su garganta) en $h = 0$. El vértice para h es $h = 0$.

Parte Geometría

De la ecuación de la hipérbola, despejamos r^2.

$$r^2 = a^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right) = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + h^2).$$

Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + h^2)$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = \frac{a^2}{b^2}(2h) \implies \frac{dr}{dh} = \frac{a^2 h}{b^2 r}$$

. Entonces, para $h \geq 0$,

$$\tan(\phi) = \left|\frac{a^2 h}{b^2 r}\right|.$$

Parte Física

Reemplazamos en la expresión de velocidad:

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{a^2 h}{b^2 r}\right) = \frac{ga^2 h}{b^2}$$

$$\boxed{v = \frac{a}{b}\sqrt{gh}}$$

Respuestas

a) Una circunferencia

b) La velocidad sí depende de la altura h a la que esté la bola. Además, las características geométricas de la hipérbola son fundamentales: el parámetro a es lineal con la velocidad, y el parámetro b es inverso con la velocidad.

c)

- Las torres de enfriamiento de las centrales nucleares a menudo tienen forma de hiperboloide de una hoja por sus propiedades estructurales y de flujo de aire.
- Algunas esculturas o elementos arquitectónicos modernos.

5.1.4. D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

Consideramos una elipse $\frac{r^2}{a_e^2} + \frac{(h-b_e)^2}{b_e^2} = 1$ rotando alrededor de su eje vertical. Aquí, a_e es el semieje horizontal (radio en el ecuador para un esferoide oblato o radio máximo si $b_e > a_e$), y b_e es el semieje vertical. El centro de la elipse está en $(0, b_e)$ y el vértice inferior en $(0, 0)$ en el plano rh, por lo que $0 \leq h \leq 2b_e$.

Parte Geometría

La ecuación, una vez despejada V^2 y simplificando, es

$$r^2 = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2hb_e - h^2).$$

Para encontrar $\tan(\phi) = \left|\frac{dr}{dh}\right|$, diferenciamos $r^2 = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2hb_e - h^2)$ respecto a h:

$$2r\frac{dr}{dh} = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2b_e - 2h) \implies \frac{dr}{dh} = \frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}.$$

Entonces, para $h < b_e$ (mitad inferior), $b_e - h > 0$,

$$\tan(\phi) = \left|\frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}\right|.$$

Parte Física

Reemplazamos en la expresión de la velocidad,

$$v^2 = gr\tan(\phi) = gr\left(\frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}\right) = \frac{ga_e^2(b_e - h)}{b_e^2}$$

$$\boxed{v = \frac{a_e}{b_e}\sqrt{g(b_e - h)}}$$

Respuestas

a) Una circunferencia.

b) Si $a_e = b_e = R_{\text{curv}}$, el elipsoide es una esfera. La fórmula se convierte en $v = \frac{R_{\text{curv}}}{R_{\text{curv}}}\sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)} = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}$, que coincide nuestra respuesta anterior.

c)

- Un tazón con forma de "lenteja" (esferoide oblato si $a_e > b_e$).
- Las cúpulas de algunos edificios o tanques de almacenamiento pueden ser elipsoidales.

5.2. Conclusiones

- En el Problema 1, la función de velocidad del paracaidista bajo resistencia cuadrática es:

$$v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$$

y en $t = T$ alcanza aproximadamente el 76.16 % de su velocidad terminal.

- En el Problema 2, se calculó la velocidad de impacto de un objeto en la Luna, considerando una aceleración gravitacional variable $g(x) = g_0 R^2/x^2$. Si se suelta desde una altura de $4R$ sobre la superficie ($x_i = 5R$), la velocidad de impacto ($x_f = R$) es:

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5} g_0 R} \approx 2{,}89\,\mathrm{km/s}$$

Este problema ilustra la aplicación del cálculo integral para resolver problemas de cinemática con aceleración no constante.

- En el Problema 3, se determinó que la distancia horizontal al pie de la montaña es aproximadamente $41{,}5\,\mathrm{km}$ y su altura es de $5{,}47\,\mathrm{km}$, utilizando trigonometría y resolución de sistemas de ecuaciones.

- En el Problema 4, se encontró que la velocidad necesaria para que un bloque se mantenga en movimiento circular uniforme a una altura constante h dentro de un cono liso con semiángulo vertical θ está dada por:

$$v_{\text{cono}} = \tan\theta\sqrt{gh}$$

Esta velocidad depende de la aceleración gravitacional g, la altura h, y el ángulo del cono θ, pero es independiente de la masa del bloque.

- En el Problema 5, se generalizó el análisis para diversas superficies de revolución, obteniendo las velocidades para mantenerse en órbita circular horizontal:
  - Tazón Esférico (radio de curvatura R_{curv}): $v_{\text{esfera}} = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}$
  - Paraboloide ($r^2 = kh$): $v_{\text{paraboloide}} = \sqrt{gk/2}$ (constante)
  - Hiperboloide ($r^2/a^2 - h^2/b^2 = 1$, garganta a): $v_{\text{hiperboloide}} = \frac{a}{b}\sqrt{gh}$
  - Elipsoide (semiejes a_e, b_e, vértice en $h = 0$): $v_{\text{elipsoide}} = \frac{a_e}{b_e}\sqrt{g(b_e - h)}$

En todos estos casos, la velocidad requerida es independiente de la masa del objeto y depende de la geometría de la superficie y la altura h. El caso del paraboloide es particularmente interesante por resultar en una velocidad constante independientemente de la altura.