

# **Física para Mates: Implementación Piloto**

Aníbal Olivera M.  
an.oliveram@udd.cl

Viviana Solano P.  
vsolano@udd.cl

Enero 2026

# Índice general

<b>1. Contexto y objetivos generales</b>	<b>2</b>
1.1. Contexto . . . . .	2
1.2. Objetivos generales del proyecto . . . . .	2
1.3. Objetivos específicos del proyecto . . . . .	3
1.4. Resumen de problemas disponibles . . . . .	3
<b>2. Diseño general de la implementación</b>	<b>4</b>
2.1. Cursos involucrados y carga horaria . . . . .	4
2.2. Esquema versiones de implementación . . . . .	5
<b>3. Estructura de una sesión tipo</b>	<b>7</b>
3.1. Fases de la sesión . . . . .	7
3.2. Distribución de tiempos . . . . .	8
<b>4. Evaluación y articulación con la nota de curso</b>	<b>9</b>
4.1. Productos evaluados en cada sesión . . . . .	9
4.2. Integración en cursos de Matemática . . . . .	9
4.3. Integración en Taller de Física I . . . . .	10
<b>5. Medición de motivación y estrategias de aprendizaje</b>	<b>11</b>
5.1. Aplicación pre-post . . . . .	11
5.2. Herramienta para medir Motivación . . . . .	12
<b>6. Requerimientos logísticos</b>	<b>15</b>
6.1. Infraestructura . . . . .	15
<b>7. Banco de Ítems para Mini-Evaluaciones</b>	<b>16</b>
7.1. Cinemática 1 — Frenada de emergencia . . . . .	16
7.2. Balística 1 — Rescate de la pelota . . . . .	17
7.3. Balística 2 — Desafío del arquero . . . . .	18
7.4. Balística 3 — La bola en la escalera . . . . .	19
7.5. Sólido de Revolución 1 — Cono . . . . .	20
7.6. Sólido de Revolución 2 — Superficies generales . . . . .	22

# Capítulo 1

## Contexto y objetivos generales

### 1.1. Contexto

La presente propuesta describe una implementación piloto factible del proyecto *Física para Mates* en los cursos de Geometría y Taller de Física I de la carrera Ingeniería Civil Plan Común de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Desarrollo. La presente implementación:

- utiliza problemas ya diseñados y acompañados de simulaciones computacionales;
- se integra a la estructura de evaluación existente sin modificar sus ponderaciones;
- incorpora mediciones pre-post de motivación y estrategias de aprendizaje;
- requiere infraestructura ya disponible en la universidad (salas de computación) y un esfuerzo acotado de coordinación entre las cátedras de Matemática y Física.

Este documento está pensado para ser leído por académicos y autoridades que no han participado en la discusión previa, por lo que se explicitan los objetivos, la estructura de las sesiones, la articulación con la malla y el sistema de evaluación.

En una primera etapa, el proyecto se ha concretado en el diseño de una serie de problemas aplicados acompañados de simulaciones computacionales interactivas. Estos problemas ya se encuentran detallados en el documento *Física para Mates\_AO\_v2.pdf*, y tienen en común 1) hacer uso de conceptos de Física mínimos —cinemática y ecuación de la trayectoria— y 2) ser no triviales en su desarrollo, enfatizando el rol de las simulaciones como 'bombas de intuición'.

En este informe se propone una implementación piloto de dichos problemas en dos asignaturas del Plan Común: **Geometría** (bimestre 2, con clases diarias de 140 minutos) y **Taller de Física I** (semestre 2, con 3 clases semanales de 70 minutos más una ayudantía).

Dependiendo de la evaluación de esta primera experiencia, el proyecto puede escalarse en cursos posteriores (por ejemplo, Introducción al Cálculo y Cálculo Diferencial), incorporando nuevos problemas y ampliando el uso de simulaciones en la formación básica de los estudiantes de Ingeniería.

### 1.2. Objetivos generales del proyecto

1. Conectar explícitamente contenidos de Matemática (ecuaciones de segundo grado, funciones reales, geometría analítica, trigonometría) con escenarios de problemas de Física estándar, aunque revisitados y visto desde nuevas ópticas.

2. Integrar **simulaciones computacionales** como herramienta de exploración (bombas de intuición), modelación y verificación de resultados matemáticos.
3. Desarrollar habilidades de resolución de **problemas no triviales**, donde los estudiantes deban interpretar, modelar y analizar situaciones con parámetros múltiples.
4. **Evaluar el impacto** de esta intervención en variables de motivación y estrategias de aprendizaje mediante un cuestionario estandarizado aplicado en modalidad pre–post.

### 1.3. Objetivos específicos del proyecto

- Diseñar e implementar un conjunto acotado de sesiones de trabajo en grupos de tres estudiantes, utilizando simulaciones computacionales en salas de computadores de la universidad.
- Integrar estas sesiones dentro de la estructura de evaluación de los cursos de Geometría y Taller de Física I, sin alterar sus ponderaciones globales.
- Recoger datos de desempeño (productos escritos, mini-evaluaciones) y datos de percepción y motivación mediante un cuestionario tipo **MSLQ** (Motivated Strategies for Learning Questionnaire) adaptado a estudiantes de ingeniería de primer año.

### 1.4. Resumen de problemas disponibles

Problema	Contenidos Matemáticos					Contenidos Físicos			Tipo de Problema			Asignatura		
	Trigonometría	Vectores	Geom.	Analítica	Ecuac. de segundo gr.	Cálc.	Diferen.	Cinemática	Leyes Newton	Estática /Equilibrio	Hoja Cálculo	Prob. Pizarra	Simul. 3D	Sugerida
Cinemática 1 (4.1)					X			X				X	X	0
Balística 1 (4.2)	X	X	X					X				X	X	0
Balística 2 (4.3)	X	X	X					X				X	X	1
Balística 3 (4.4)		X	X					X				X	X	1
Sólido Rev. 1 (4.5)	X	X	X					X	X	X		X	X	1
Sólido Rev. 2 (5.1)		X	X			X		X	X	X			X	2

#### Asignatura sugerida:

- 0: Álgebra
- 1: Geometría
- 2: Taller de Física I o Introducción al Cálculo

En este documento nos centraremos en los problemas 4.1–4.5 y 5.1, articulados entre Geometría y Taller de Física I.

# Capítulo 2

## Diseño general de la implementación

### 2.1. Cursos involucrados y carga horaria

#### Álgebra

- Curso del de primer año, bimestral, entre marzo y abril.
- Clases de 140 minutos, de lunes a viernes, durante 8 semanas.
- Para esta propuesta se utilizarán sesiones de 140 minutos, agendadas al final del **primer módulo** del curso (de un total de 2).

#### Geometría

- Curso del de primer año, bimestral, entre mediados de mayo y principio de julio.
- Clases de 140 minutos, de lunes a viernes, durante 8 semanas.
- Para esta propuesta se utilizarán sesiones de 140 minutos, agendadas en las **últimas semanas** del bimestre.

#### Taller de Física I (por confirmar\*)

- Curso de primer año, articulado con Introducción al Cálculo.
- Clases de 70 minutos, 3 veces por semana + 1 ayudantía.
- Para esta propuesta se utilizarán sesiones de 140 minutos, agendadas en las **primeras semanas** del semestre en que se dicta el Taller (inmediatamente después de Geometría).

#### Estructura M / F

Definiremos como sesiones de **140 minutos obligatorias**:

- **Mk**: sesiones realizadas en el área de **Matemática** (Álgebra o Geometría) (ej.: M1, M2, M3, M4).
- **Fk**: sesiones realizadas en **Taller de Física I** (ej.: F1, F2, F3).

## 2.2. Esquema versiones de implementación

Con el propósito de aumentar la cartera de posibilidades para ejecutar el presente proyecto, se proponen dos versiones de implementación con distinta intensidad, ambas utilizando la misma infraestructura y estructura básica de sesión. Esto es un esquema de ambas versiones —versión mínima y versión completa.

### 2.2.1. Versión mínima (4 sesiones)

Pensada como piloto de baja carga, con una sesión en Álgebra, dos sesiones en Geometría y una en Física.

- **Álgebra (M1):**
  - Aplicación de cuestionario de motivación y estrategias de estudio (**pre-test**).
  - Problema **Cinemática 1: frenada de emergencia**.
  - Mini-evaluación individual.
- **Geometría (M2):**
  - Problema **Balística 2: el desafío del arquero**.
  - Mini-evaluación individual.
- **Geometría (M3):**
  - Problema **Balística 3: la bola en la escalera**.
  - Mini-evaluación individual.
- **Taller de Física I (F1):**
  - Breve repaso de proyectiles y conexión con las sesiones de Geometría.
  - Problema **Sólido de revolución 1 (cono)**.
  - Mini-evaluación individual.
  - Aplicación de cuestionario (**post-test**).

### 2.2.2. Versión completa (7 sesiones)

Versión extendida, con todos los problemas disponibles y una sesión de cierre.

- **Álgebra (M1):**
  - Cuestionario pre-test.
  - **Cinemática 1**.
  - Mini-evaluación individual.
- **Álgebra (M2):**
  - **Balística 1: rescate de la pelota**.
  - Mini-evaluación individual.

- **Geometría (M3):**
  - **Balística 2: desafío del arquero.**
  - Mini-evaluación individual.
- **Geometría (M4):**
  - **Balística 3: bola en la escalera.**
  - Mini-evaluación individual.
- **Taller de Física I (F1):**
  - Conexión entre proyectiles y movimiento circular.
  - **Sólido de revolución 1 (cono).**
  - Mini-evaluación individual.
- **Taller de Física I (F2):**
  - **Sólido de revolución 2:** superficies de revolución (paraboloide, esfera, hipérbola, elipse).
  - Mini-evaluación individual.
- **Taller de Física I (F3):**
  - Cierre del proyecto: revisión integradora de todos los problemas.
  - Mini-evaluación integradora.
  - Cuestionario post-test.

# Capítulo 3

## Estructura de una sesión tipo

Todas las sesiones especiales se imparten como **clases dobles de 140 minutos**, con estudiantes trabajando en grupos de tres, cada grupo con acceso a un computador con conexión a las simulaciones.

A continuación se describen las fases de una sesión tipo Mk/Fk (exceptuando las partes de pre/post-test, que se detallan más adelante):

### 3.1. Fases de la sesión

1. **Introducción y contexto (15–20 min)** El profesor presenta brevemente el contexto físico y el objetivo matemático del problema. Se explican las reglas de trabajo en grupo y los productos que se esperan: *hoja de desarrollo* y mini-evaluación individual.
2. **Exploración inicial con simulación (10–15 min)** Los estudiantes exploran libremente la simulación asociada al problema, modificando parámetros y observando comportamientos cualitativos. El objetivo es familiarizarse con el sistema y generar hipótesis (por ejemplo, parámetros para evitar una colisión, combinaciones de ángulo y velocidad que permiten pasar por dos anillos, etc.).
3. **Desarrollo de actividades (50–65 min)** Esta es la fase central de la sesión. Los grupos desarrollan, sobre la base de una guía impresa o digital, una serie de actividades que combinan:
  - formulación de ecuaciones (de posición, trayectorias, condiciones de impacto);
  - manipulación algebraica y trigonométrica;
  - resolución de inecuaciones y análisis de discriminantes;
  - comparación de resultados analíticos con la simulación.

Las respuestas y procedimientos se registran en la **hoja de desarrollo grupal**, que se entrega al final de la sesión.

4. **Verificación y cierre grupal (10–15 min)** El profesor conduce una discusión rápida donde se contrastan los resultados de los grupos con las predicciones teóricas y con la simulación. Esta fase suele corresponder a los numerales finales de cada guía (interpretación de la condición de seguridad en cinemática, descripción de la región de soluciones en balística, análisis de cómo cambia el peldaño de impacto con la velocidad inicial, comparación entre distintas superficies de revolución, etc.).



5. **Mini-evaluación individual (15–20 min)** Cada estudiante responde un breve cuestionario individual (3–5 ítems) relacionado con el problema trabajado. La mini-evaluación puede incluir:

- un ejercicio numérico directo;
- una pregunta conceptual sobre el modelo;
- una pregunta de interpretación gráfica o de parámetros.

Esta mini-evaluación se corrige individualmente y forma parte de la nota de la sesión.

## 3.2. Distribución de tiempos

En términos de minutos, una sesión tipo puede ser esquematizada siguiendo esta distribución de tiempos:

Fase	Tiempo estimado
Introducción y contexto	15–20 min
Exploración con simulación	10–15 min
Desarrollo de actividades	50–65 min
Verificación y cierre grupal	10–15 min
Mini-evaluación individual	15–20 min
<b>Total</b>	<b>100 - 135 min</b>

El profesor a cargo debe cronometrar cada etapa y ser riguroso con los minutos asignados, toda sesión debe terminar con la entrega de la mini-evaluación individual.

## Capítulo 4

# Evaluación y articulación con la nota de curso

### 4.1. Productos evaluados en cada sesión

Cada sesión Mk o Fk genera dos productos evaluados (pueden ver la hoja de ejercicios que verán los alumnos en el archivo *Fisica\_para\_Mates\_A0\_v2-alumnos.pdf*, además de ver el banco de ejercicios para la mini-evaluación en la sección 7):

#### 1. Hoja de desarrollo grupal (50 % de la sesión)

- Elaborada en grupos de tres estudiantes.
- Contiene el desarrollo completo de las actividades de la guía correspondiente.
- Se evalúa mediante una rúbrica simple (corrección matemática, claridad de procedimientos, interpretación de resultados).

#### 2. Mini-evaluación individual (50 % de la sesión)

- Aproximadamente 5 ítems cortos relacionados a los ejercicios de la sesión.
- Garantiza responsabilidad individual dentro del trabajo grupal.

La nota de la sesión es el promedio de ambos entregables.

### 4.2. Integración en cursos de Matemática

La ponderación oficial de los cursos de Matemática (Álgebra y Geometría) contempla:

Prueba	Ponderación
Certamen N°1	35 %
Certamen N°2	35 %
Controles	20 %
Tareas	10 %
Nota de presentación	70 %
Examen	30 %

En esta propuesta, la nota de **Tareas (10 %)** se reemplaza por el promedio de las notas de sesiones Mk. No se modifica la ponderación global del curso, sólo se redefine el contenido de la categoría "Tareas".

### 4.3. Integración en Taller de Física I

La ponderación oficial de Taller de Física I contempla:

Prueba	Ponderación
Certamen N°1	30 %
Certamen N°2	30 %
Controles	25 %
Laboratorios	15 %
Nota de presentación	70 %
Examen	30 %

En esta propuesta, el proyecto *Física para Mates* se integra dentro de la categoría **Laboratorios (15 %)**, donde cada sesión Fk reemplaza 5 puntos de esa categoría. En este sentido, la sección Laboratorio estaría compuesto por:

- F1 (5 %) y Laboratorio usual (10 %).
- F1-F2-F3 (15 %) y Laboratorio usual (0 %).

## Capítulo 5

# Medición de motivación y estrategias de aprendizaje

Para medir el impacto de la intervención en variables de motivación y estrategias de aprendizaje se utilizará la versión del cuestionario **MSLQ** presentado por Inzunza et al. (2018), validado en estudiantes universitarios chilenos de primer año. Este instrumento no mide contenidos específicos de una asignatura, sino constructos generales de motivación para el aprendizaje (valoración de la tarea, expectativas/autoeficacia y componente afectivo como ansiedad ante evaluaciones). Eso lo hace portable: basta con contextualizar la redacción (“este curso”, “esta asignatura”) a Física para Mates y mantener el formato de respuesta.

En su versión completa, el instrumento contiene alrededor de 80 ítems tipo Likert. Sin embargo, el módulo de *motivación* de Inzunza et al. (2018) consta solo de 28 ítems. En adelante, se detalla el plan de aplicación y el banco de ítems seleccionado.

### 5.1. Aplicación pre–post

#### Versión mínima

- **Pre–test:** al inicio de la sesión M1 (primeros 15–20 minutos), o durante la clase anterior.
- **Consentimiento:** al inicio de la sesión M1, se les presentará consentimiento informado dando a conocer los alcances de la actividad (primeros 15–20 minutos).
- **Post–test:** al final de la sesión F1 (últimos 15–20 minutos).

#### Versión completa

- **Pre–test:** al inicio de la sesión M1 (primeros 15–20 minutos), o durante la clase anterior.
- **Consentimiento:** al inicio de la sesión M1, se les presentará consentimiento informado dando a conocer los alcances de la actividad (primeros 15–20 minutos).
- **Post–test:** durante la sesión F3 (parte inicial o final), en conjunto con la mini–evaluación integradora.

Los resultados del cuestionario no afectan la nota de los estudiantes en ningún caso. Esta información se utilizará para monitorear cambios en la **motivación y estrategias de estu-**

dio frente al uso de simulaciones y problemas contextualizados; y alimentar investigaciones posteriores sobre enseñanza de Matemática y Física en Ingeniería.

## 5.2. Herramienta para medir Motivación

El objetivo es construir una medida breve de “motivación académica” usando solo los ítems que, en la adaptación chilena reportada por Inzunza et al. (2018), conforman los 3 factores motivacionales (valoración, expectativas y afecto/ansiedad), y luego validar internamente esa estructura en la muestra. Siguiendo esta estrategia, seleccionamos los factores e ítems que se detallan a continuación.

Usaremos los factores motivacionales identificados por Inzunza:

- **F1:** Valor de la tarea (valoración).
- **F3:** Expectativas.
- **F8:** Ansiedad (afecto).

El total de ítems a aplicar es de 28 ítems (F1=9, F3=14, F8=5), a ser medidos usando una escala Likert de 1 a 5 (total desacuerdo a total acuerdo), manteniendo el período de referencia “este curso”. En cuanto a tiempos de aplicación, se estiman los siguientes:

- 28 ítems  $\times$  20 segundos por ítem  $\approx$  10 minutos.
- + instrucciones iniciales (30–60 s)  $\approx$  5 a 8 minutos total.

### Referencias:

- Inzunza, B., Pérez, C., Márquez, C., Ortiz, L., Marcellini, S., & Duk, S. (2018). Estructura factorial y confiabilidad del Cuestionario de Motivación y Estrategias de Aprendizaje (MSLQ) en estudiantes universitarios chilenos de primer año. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación*, 47(2), 21–35. <https://doi.org/10.21865/RIDEP47.2.02>
- Pintrich, P. R., Smith, D. A. F., Garcia, T., & McKeachie, W. J. (1991). *A manual for the use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ)*. National Center for Research to Improve Postsecondary Teaching and Learning, University of Michigan.

### 5.2.1. Banco de ítems

#### A) Motivación — F1. Valor de la tarea (9 ítems)

Ítems: 27, 17, 26, 23, 10, 4, 22, 7, 24.

- 27. Entender las materias de este curso es muy importante para mí.
- 17. Estoy muy interesado en el contenido de este curso.
- 26. Me gustan los temas de este curso.
- 23. Pienso que para mí es útil aprender las materias de este curso.
- 10. Es importante para mí aprender las materias de este curso.
- 4. Creo que sacaré una excelente nota en este curso.
- 22. Lo más satisfactorio para mí en este curso es tratar de entender el contenido tan profundamente como sea posible.
- 7. Obtener una buena nota en este curso es una de las cosas más satisfactorias para mí en este momento.
- 24. Cuando tengo la oportunidad en este curso elijo tareas de las cuales puedo aprender aun cuando no me aseguren una buena nota.

#### B) Motivación — F3. Expectativas (14 ítems)

Ítems: 15, 18, 20, 13, 6, 12, 29, 9, 25, 1, 2, 31, 16, 5.

- 15. Tengo confianza en que entenderé los materiales más complejos presentados por el profesor.
- 18. Si me esfuerzo lo suficiente entenderé los contenidos de este curso.
- 20. Tengo confianza que puedo hacer un excelente trabajo en las tareas y pruebas de este curso.
- 13. Si puedo quiero obtener mejores notas en esta clase que la mayoría de los estudiantes.
- 6. Estoy seguro que puedo entender las materias más difíciles que se presentan en las lecturas para este curso.
- 12. Tengo confianza en que puedo aprender los conceptos básicos enseñados en este curso.
- 29. Estoy seguro de que puedo dominar las habilidades que se enseñan en esta clase.
- 9. Si no aprendo las materias de este curso es mi propia responsabilidad.
- 25. Si no entiendo la materia de este curso es porque no intento lo suficiente.
- 1. En este curso prefiero materiales que me desafíen y de este modo aprender nuevas cosas.
- 2. Si estudio en la forma apropiada podré aprender el material o contenido de esta asignatura.

31. Considerando la dificultad de este curso, el (la) profesor(a) y mis habilidades pienso que me irá bien.
16. En un curso como este prefiero materiales que estimulen mi curiosidad aun cuando sean difíciles de aprender.
5. Creo que sacaré una excelente nota en este curso.

### **C) Motivación — F8. Ansiedad (5 ítems)**

Ítems: 28, 19, 14, 3, 11.

28. Siento que mi corazón se acelera cuando doy una prueba.
19. Tengo una sensación de ansiedad y malestar cuando doy una prueba.
14. Cuando doy una prueba pienso en las consecuencias de que me vaya mal.
11. Lo más importante para mí ahora es subir mi promedio general de manera que mi principal interés en este curso es obtener una buena nota.

### **5.2.2. Validación interna y estimación de tiempo**

Para tener evidencia de validez y confiabilidad en la muestra del curso, se hará el siguiente análisis. En la muestra, ejecutar:

1. Revisión de calidad de datos: faltantes, distribuciones, piso/techo por ítem.
2. Consistencia interna por factor: alfa/omega + correlaciones ítem-total.
3. CFA (Análisis Factorial Confirmatorio):
  - Modelo 3 factores: F1, F3, F8.
  - Revisar cargas y correlaciones entre factores.
4. Reporte: (i) versión final, (ii) evidencia de fiabilidad, (iii) evidencia de estructura interna.

# Capítulo 6

## Requerimientos logísticos

### 6.1. Infraestructura

- **Salas de computación:**
  - Capacidad para al menos 14 computadores por sección (grupos de tres estudiantes, hasta 40 estudiantes por curso).
  - Conexión a Internet estable para acceder a las simulaciones alojadas en un servidor externo.
- **Software:** navegador web actualizado; no se requiere instalación de software adicional en los equipos de los estudiantes dado que las simulaciones estarán sincronizadas en un Cloud de Computación.
- **Materiales impresos:** guías de actividades y hojas de desarrollo por sesión; copias del cuestionario pre–post.
- **Profesor del curso:** responsable de la conducción de la sesión, explicación de objetivos y discusión final.
- Los estudiantes trabajarán en **grupos de tres** (o máximo cuatro, en caso que el número de alumnos no sea un múltiplo de tres).
- Cada grupo tendrá asignado un computador durante la sesión.
- Se espera que las sesiones Gk y Fk serean anunciadas como **actividades obligatorias** y parte integrante de la evaluación de Tareas/Laboratorios del curso.



# Capítulo 7

## Banco de Ítems para Mini-Evaluaciones

Este capítulo recoge los ítems propuestos para las mini-evaluaciones. Cada conjunto de ítems puede ser utilizado de manera flexible según necesidad de la sesión correspondiente.

### 7.1. Cinemática 1 — Frenada de emergencia

1. El auto A viaja a  $v_A = 30 \text{ m/s}$  y el auto B a  $v_B = 20 \text{ m/s}$ . La distancia inicial es  $D = 40 \text{ m}$  y la aceleración de frenado es  $a = 3 \text{ m/s}^2$ . Usando la condición de seguridad  $(v_A - v_B)^2 < 2aD$ , determina si habrá colisión.

#### Solución esperada

se calcula  $\Delta v = v_A - v_B = 10 \text{ m/s}$  y  $(\Delta v)^2 = 100$ . Luego se evalúa  $2aD = 2 \cdot 3 \cdot 40 = 240$ . Como  $100 < 240$ , se cumple la condición de seguridad y no hay colisión.

2. Dos autos se mueven con  $v_A = 27 \text{ m/s}$  y  $v_B = 18 \text{ m/s}$ , separados por  $D = 35 \text{ m}$ . Encuentra la aceleración mínima  $a_{\text{mín}}$  que asegura que no haya colisión.

#### Solución esperada

se usa la frontera  $(v_A - v_B)^2 = 2a_{\text{mín}}D$ . Con  $\Delta v = 9 \text{ m/s}$ , se tiene  $81 = 2a_{\text{mín}} \cdot 35$ . De aquí,  $a_{\text{mín}} = 81/70 \text{ m/s}^2$ .

3. Con  $v_A = 32 \text{ m/s}$ ,  $v_B = 24 \text{ m/s}$  y aceleración  $a = 4 \text{ m/s}^2$ : (a) Calcula la distancia mínima  $D_{\text{mín}}$ . (b) Evalúa si la situación es segura cuando  $D = 20 \text{ m}$ .

#### Solución esperada

(a) se calcula  $\Delta v = 8 \text{ m/s}$  y se usa  $(\Delta v)^2 = 2aD_{\text{mín}}$ , de modo que  $64 = 2 \cdot 4 \cdot D_{\text{mín}}$  y  $D_{\text{mín}} = 8 \text{ m}$ . (b) se compara  $D = 20 \text{ m}$  con  $D_{\text{mín}}$ : como  $20 > 8$ , la situación es segura.

4. Recordando que en la simulación trabajaste en el plano  $(D, \Delta v)$ , donde la frontera está dada por  $\Delta v = \sqrt{2aD}$ , indica si la región segura se encuentra por encima o por debajo de la curva. Justifica usando la desigualdad de seguridad.

### Solución esperada

la frontera viene dada por la igualdad  $(\Delta v)^2 = 2aD$ . La condición de seguridad es  $(\Delta v)^2 < 2aD$ , es decir,  $\Delta v < \sqrt{2aD}$ . Por tanto, la región segura corresponde a los puntos que quedan **por debajo** de la curva  $\Delta v = \sqrt{2aD}$  en el plano  $(D, \Delta v)$ .

5. Sabiendo que  $(\Delta v_1, D_1)$  es seguro, analiza si el par  $(2\Delta v_1, 2D_1)$  es necesariamente seguro, necesariamente peligroso o depende del caso.

### Solución esperada

la condición de seguridad  $(\Delta v)^2 < 2aD$  aplicada a  $(\Delta v_1, D_1)$  da  $(\Delta v_1)^2 < 2aD_1$ . Para el par  $(2\Delta v_1, 2D_1)$  la desigualdad se transforma en  $4(\Delta v_1)^2 < 4aD_1$ , equivalente a  $(\Delta v_1)^2 < aD_1$ , que es *más exigente* que la condición original. Por tanto, no es cierto en general que  $(2\Delta v_1, 2D_1)$  sea seguro: depende de cuán lejos del borde estaba el punto original.

## 7.2. Balística 1 — Rescate de la pelota

1. Para  $v_0 = 20$  m/s, calcula  $\alpha = g/v_0^2$ . Luego decide si el punto  $P_1 = (6 \text{ m}, 9 \text{ m})$  es alcanzable comparando con la parábola de seguridad.

### Solución esperada

se calcula  $\alpha = g/v_0^2 \approx 9,8/400 = 0,0245 \text{ m}^{-1}$ . La parábola de seguridad viene dada por  $y_{\text{seg}}(x) = \frac{1-(\alpha x)^2}{2\alpha}$ . Evaluando en  $x = 6$ , se obtiene  $y_{\text{seg}}(6) \approx 19,97 \text{ m}$ . Como  $9 < 19,97$ , el punto es alcanzable.

2. Para  $v_0 = 20$  m/s: (a) Decide si el punto  $P_2 = (4 \text{ m}, 10 \text{ m})$  es alcanzable. (b) Repite para  $P_3 = (10 \text{ m}, 5 \text{ m})$ . (c) Indica cuál está más cerca del límite de lo alcanzable.

### Solución esperada

para cada punto  $P_2, P_3$  se evalúa  $y_{\text{seg}}(x)$  en la abscisa correspondiente y se compara la ordenada del punto con el valor de la parábola de seguridad. Un punto está “en el límite” cuando su altura es muy próxima a  $y_{\text{seg}}(x)$ ; si la altura es claramente menor, está bien dentro de la región alcanzable.

3. Escribe  $\alpha = g/v_0^2$ . Si reemplazas  $v_0$  por  $2v_0$ , expresa  $\alpha_{\text{nuevo}}$  en términos de  $\alpha$  y discute cómo cambia la región alcanzable.

### Solución esperada

al reemplazar  $v_0$  por  $2v_0$  se tiene  $\alpha_{\text{nuevo}} = g/(2v_0)^2 = g/(4v_0^2) = \alpha/4$ . Como la altura máxima de la parábola es proporcional a  $1/\alpha$ , al disminuir  $\alpha$  a la cuarta parte, la región alcanzable se hace cuatro veces “más alta” y, en general, más amplia.

4. Explica por qué, cuando un punto  $(x, y)$  es alcanzable, suelen existir dos soluciones de ángulo: un ángulo bajo y un ángulo alto.

#### Solución esperada

la ecuación de la trayectoria para un proyectil permite, para un mismo punto alcanzable, dos soluciones de ángulo  $\theta$ : una con  $\theta$  pequeño (arco bajo) y otra con  $\theta$  grande (arco alto). Esto se ve al resolver en  $\theta$  la ecuación  $y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$ , que lleva a una ecuación cuadrática en  $\tan \theta$  con dos raíces reales cuando el punto está debajo de la parábola de seguridad.

### 7.3. Balística 2 — Desafío del arquero

1. Usando  $y_f(x_c) = x_c \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_c^2$ , calcula la altura al pasar por  $x = x_c$ .

#### Solución esperada

se reemplaza el valor de  $x_c$  en la expresión dada para obtener  $y_f(x_c)$  en función de  $v_0$  y  $\theta$ ; si se dan valores numéricos de  $v_0$  y  $\theta$ , se calcula directamente la altura correspondiente en ese punto.

2. Dados dos anillos con centros  $(x_{c1}, y_{c1})$ ,  $(x_{c2}, y_{c2})$  y radios  $R_1, R_2$ , evalúa para un disparo  $(v_0, \theta)$  si pasa por ambos verificando:  $-R_i < y_f(x_{ci}) - y_{ci} < R_i$ .

#### Solución esperada

primero se calculan  $y_f(x_{c1})$  y  $y_f(x_{c2})$  usando la fórmula del ítem anterior. Luego se verifican las dos inecuaciones  $-R_1 < y_f(x_{c1}) - y_{c1} < R_1$  y  $-R_2 < y_f(x_{c2}) - y_{c2} < R_2$ . Si ambas se cumplen, el disparo pasa por los dos anillos; si una falla, no pasa por ese anillo.

3. Da dos modificaciones en los anillos que siempre reducen el espacio de soluciones  $(\theta, v_0)$ . Explica por qué.

#### Solución esperada

ejemplos típicos son: (i) disminuir el radio de uno o ambos anillos, lo que estrecha el intervalo  $y_c - R < y_f < y_c + R$  y reduce el conjunto de  $(\theta, v_0)$  que lo satisfacen; (ii) aumentar la distancia entre los centros de los anillos, de modo que la trayectoria deba ajustar dos condiciones más separadas, lo que también reduce el espacio de soluciones.

4. El tiempo total de vuelo es  $T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ . Explica por qué la componente vertical  $v_0 \sin \theta$  es la que más afecta el tiempo de vuelo, y cuál de las dos soluciones (arco alto o bajo) tendrá mayor tiempo de vuelo.

### Solución esperada

se observa que  $T$  depende linealmente de  $v_0 \sin \theta$ , es decir, del componente vertical de la velocidad inicial. Para un mismo  $v_0$ , el arco alto tiene  $\sin \theta$  mayor que el arco bajo, por lo que su tiempo de vuelo es mayor. En consecuencia, la trayectoria de arco alto es más “alta y lenta” que la de arco bajo.

5. Explica por qué la solución de arco alto tiende a facilitar el paso por dos anillos consecutivos, relacionándolo con el tiempo de vuelo y la altura máxima.

### Solución esperada

el arco alto tiene un tiempo de vuelo mayor y alcanza alturas más elevadas, lo que facilita satisfacer simultáneamente dos condiciones de paso (dos anillos) ubicadas a distintas posiciones. La trayectoria permanece más tiempo en el aire, permitiendo ajustar mejor la altura en ambos puntos  $x_{c1}$  y  $x_{c2}$ .

6. Considera el caso en que los dos anillos tienen el mismo centro y radio. Muestra cómo se reduce el sistema  $-R_i < y_f(x_{ci}) - y_{ci} < R_i$  y por qué no cambia la región de soluciones respecto al caso de un solo anillo.

### Solución esperada

al tener  $(x_{c1}, y_{c1}, R_1) = (x_{c2}, y_{c2}, R_2)$ , las dos condiciones  $-R_1 < y_f(x_{c1}) - y_{c1} < R_1$  y  $-R_2 < y_f(x_{c2}) - y_{c2} < R_2$  se reducen a una sola inequación. Por tanto, el conjunto de soluciones  $(\theta, v_0)$  es exactamente el mismo que en el caso de un solo anillo en esa posición.

## 7.4. Balística 3 — La bola en la escalera

1. Usando que el movimiento es horizontal con rapidez constante, escribe la ecuación  $x(t) = v_0 t$  y deduce el tiempo en que la bola alcanza el borde horizontal del escalón  $n$ , ubicado en  $x_n = nw$ .

### Solución esperada

se usa  $x(t) = v_0 t$  y se iguala a  $x_n = nw$ , de modo que  $v_0 t_n = nw$ . Por tanto, el tiempo en que la bola llega al escalón  $n$  es  $t_n = x_n / v_0 = nw / v_0$ .

2. Usando la ecuación vertical  $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$  y la expresión del tiempo obtenida en el ítem anterior, escribe la altura  $y_n$  de la bola al llegar a la posición  $x_n = nw$ .

### Solución esperada

se reemplaza  $t_n = nw / v_0$  en  $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ , obteniendo  $y_n = -\frac{1}{2}g(nw/v_0)^2$ . Esta es la altura (negativa) de la bola al llegar a la posición  $x_n$ .

3. Explica la condición que debe cumplir  $y_n$  para que la bola impacte el escalón  $n$  y no el escalón anterior. Es decir, expresa una condición del tipo “la bola llega entre la parte

superior del escalón  $n$  y la parte superior del escalón  $n - 1$ ".

#### Solución esperada

si los escalones tienen altura  $h$ , la parte superior del escalón  $n$  está a  $y = -nh$  y la del escalón anterior a  $y = -(n - 1)h$ . La condición típica de impacto es que  $y_n$  quede entre ambos niveles, por ejemplo  $-nh \leq y_n < -(n - 1)h$ , o una desigualdad equivalente según la convención usada en la guía.

4. Recordando que, en el desarrollo de la guía, se obtuvo que el número de escalón de impacto viene dado por

$$n = \left\lceil \frac{2hv_0^2}{gw^2} \right\rceil,$$

discute qué ocurre con  $n$  si se reemplaza  $v_0$  por  $2v_0$ , manteniendo fijos  $h, g$  y  $w$ .

#### Solución esperada

la expresión  $n = \lceil 2hv_0^2/(gw^2) \rceil$  muestra que  $n$  crece proporcionalmente a  $v_0^2$ . Si se reemplaza  $v_0$  por  $2v_0$ , el factor  $v_0^2$  se multiplica por 4 y, en consecuencia, el valor dentro del techo se multiplica aproximadamente por 4. Esto significa que el escalón de impacto se desplaza a valores de  $n$  mucho mayores (aproximadamente cuatro veces más adelante, salvo ajustes por el techo).

5. Usando la expresión

$$n = \left\lceil \frac{2hv_0^2}{gw^2} \right\rceil,$$

discute el efecto de aumentar  $w$  o de aumentar  $h$  (manteniendo  $v_0$  fijo) sobre el número de escalón de impacto. ¿Qué cambio produce cada modificación sobre  $n$ ?

#### Solución esperada

en  $n = \lceil 2hv_0^2/(gw^2) \rceil$ , si  $w$  aumenta, el denominador  $w^2$  crece y el cociente disminuye, por lo que  $n$  tiende a disminuir (la bola golpea un escalón más cercano). Si  $h$  aumenta, el numerador crece y el cociente aumenta, por lo que  $n$  tiende a aumentar (la bola impacta un escalón más lejano).

## 7.5. Sólido de Revolución 1 — Cono

1. Para un cono recto cuyo eje es vertical y cuyo ángulo con la vertical es  $\theta$ , muestra que la distancia radial al eje a una altura  $h$  cumple

$$r(h) = h \tan \theta.$$

#### Solución esperada

al considerar el triángulo rectángulo formado por la altura  $h$  y el radio  $r$ , se tiene  $\tan \theta = r/h$ . Despejando, se obtiene  $r(h) = h \tan \theta$ .

2. Considera una masa que describe un movimiento circular uniforme de radio  $r$  en el interior del cono. A partir de las proyecciones de fuerzas (peso y normal), muestra que la condición de giro estable viene dada por

$$\frac{v^2}{r} = g \tan \theta.$$

#### Solución esperada

se descompone la fuerza normal  $N$  en componentes:  $N \cos \theta = mg$  (equilibrio vertical) y  $N \sin \theta = mv^2/r$  (centrípeta). Dividiendo la segunda por la primera se obtiene  $\tan \theta = v^2/(rg)$ , es decir,  $v^2/r = g \tan \theta$ .

3. Usando las expresiones anteriores, reemplaza  $r(h) = h \tan \theta$  en la condición de giro estable y obtiene una expresión explícita para  $v(h)$ .

#### Solución esperada

sustituyendo  $r = h \tan \theta$  en  $v^2/r = g \tan \theta$  se obtiene  $v^2 = gr \tan \theta = g(h \tan \theta) \tan \theta = gh \tan^2 \theta$ . Por tanto,  $v(h) = \tan \theta \sqrt{gh}$ .

4. Compara las velocidades de giro  $v(h_1)$  y  $v(h_2)$  para dos alturas tales que  $0 < h_1 < h_2$ . ¿Qué implicancia tiene esto sobre cómo cambia la velocidad requerida para un giro estable al aumentar la altura en el cono?

#### Solución esperada

como  $v(h) = \tan \theta \sqrt{gh}$ , para un mismo  $\theta$  la velocidad crece con  $\sqrt{h}$ . Si  $0 < h_1 < h_2$ , entonces  $v(h_1) < v(h_2)$ : a mayor altura en el cono, mayor velocidad de giro requerida.

5. Considera ahora dos conos con ángulos  $\theta_1 < \theta_2$ . Para una misma altura  $h$ , usa la expresión de  $v(h)$  para decidir en cuál de los dos conos se requiere una mayor velocidad de giro para mantener la órbita estable.

#### Solución esperada

para una altura fija  $h$ , se tiene  $v(h) = \tan \theta \sqrt{gh}$ . Si  $\theta_1 < \theta_2$ , entonces  $\tan \theta_1 < \tan \theta_2$ , por lo que  $v_1(h) < v_2(h)$ . El cono más abierto (mayor  $\theta$ ) requiere una velocidad de giro mayor para mantener la órbita estable.

6. Analiza el límite de la expresión  $v(h) = \tan \theta \sqrt{gh}$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ . ¿Qué ocurre con la velocidad de giro estable en ese límite y qué interpretación física tiene este resultado?

#### Solución esperada

en  $v(h) = \tan \theta \sqrt{gh}$ , al tomar el límite  $\theta \rightarrow 0$  se tiene  $\tan \theta \rightarrow 0$  y, por tanto,  $v(h) \rightarrow 0$ . Esto indica que, en el límite de un cono muy angosto ( $\theta$  casi cero), no es posible mantener un giro estable con velocidad finita: la partícula tendería a deslizarse hacia el vértice.

## 7.6. Sólido de Revolución 2 — Superficies generales

1. Explica por qué, para una superficie de revolución descrita por  $r(h)$ , el ángulo local  $\varphi$  entre la superficie y la horizontal cumple

$$\tan \varphi = \left| \frac{dr}{dh} \right|.$$

Interpreta geoméricamente esta relación en términos de la pendiente de la curva meridiana  $r(h)$ .

### Solución esperada

en el corte meridiano, la superficie se describe por la curva  $r(h)$ . La pendiente de esta curva respecto de la horizontal es  $dr/dh$ , que geoméricamente corresponde a  $\tan \varphi$ . El valor absoluto aparece porque sólo interesa el ángulo con la horizontal, no si la pendiente es positiva o negativa.

2. Usando las expresiones generales

$$\frac{v^2}{r} = g \tan \varphi, \quad \tan \varphi = \left| \frac{dr}{dh} \right|,$$

muestra que la velocidad de giro estable satisface, en general,

$$v^2(h) = g r(h) \left| \frac{dr}{dh} \right|.$$

### Solución esperada

a partir de  $v^2/r = g \tan \varphi$  y  $\tan \varphi = |dr/dh|$ , se sustituye en la primera ecuación para obtener  $v^2/r = g|dr/dh|$ . Multiplicando ambos lados por  $r$  se llega a  $v^2(h) = g r(h) |dr/dh|$ .

3. Considera ahora dos superficies de revolución:

- Superficie A (cono):  $r(h) = kh$ ;
- Superficie B (cuadrática simple):  $r(h) = kh^2$ ,

con  $k > 0$ . Calcula  $v(h)$  en cada caso usando la expresión general del ítem anterior y compara cómo crece la velocidad de giro requerida con la altura en ambas superficies.

### Solución esperada

para el cono  $r(h) = kh$ , se tiene  $dr/dh = k$  y, por tanto,  $v^2(h) = g(kh)k = gk^2h$ , de donde  $v(h) \propto h^{1/2}$ . Para la superficie cuadrática  $r(h) = kh^2$ , se tiene  $dr/dh = 2kh$  y  $v^2(h) = g(kh^2)(2kh) = 2gk^2h^3$ , de modo que  $v(h) \propto h^{3/2}$ . Así, en la superficie cuadrática la velocidad crece mucho más rápido con la altura que en el cono.

4. Discute, en términos de la fórmula general  $v^2(h) = g r(h) |dr/dh|$ , por qué en superficies donde  $r(h)$  y  $|dr/dh|$  crecen rápidamente con la altura, la velocidad requerida para el giro estable aumenta de manera marcada al subir en la superficie.

**Solución esperada**

la expresión  $v^2(h) = g r(h) |dr/dh|$  muestra que, si tanto  $r(h)$  como  $|dr/dh|$  aumentan fuertemente con  $h$ , su producto crece y, en consecuencia, también lo hace  $v^2(h)$ . Esto implica que la velocidad requerida para mantener el giro estable se vuelve mucho mayor al subir en la superficie.

5. Considera la superficie de revolución paraboloidal definida por

$$r(h) = k\sqrt{h},$$

con  $k > 0$ . Calcula  $\frac{dr}{dh}$  y luego usa la fórmula general  $v^2(h) = g r(h) |dr/dh|$  para mostrar que la velocidad de giro estable  $v(h)$  no depende de la altura. Explica por qué, en este sentido, esta superficie puede considerarse aproximadamente isócrona.

**Solución esperada**

para  $r(h) = k\sqrt{h}$  se tiene  $dr/dh = k/(2\sqrt{h})$ . Entonces  $v^2(h) = g(k\sqrt{h})(k/(2\sqrt{h})) = gk^2/2$ , que es constante. Por tanto,  $v(h)$  no depende de  $h$  y la superficie se comporta como isócrona: a distintas alturas se requiere prácticamente la misma velocidad de giro.