

# **Física para Mates**

Aníbal Olivera M.

Mayo 2025

# Índice general

<b>1. Resumen Problemas</b>	<b>2</b>
<b>2. Problemas para la pizarra</b>	<b>3</b>
2.1. Distancias 1: Estimación de distancia y altura de una montaña . . . . .	3
2.2. Caída libre 1: Movimiento de un paracaidista con resistencia cuadrática . . .	5
2.3. Caída libre 2: Velocidad de Impacto en la Luna con Gravedad Variable . . . .	7
<b>3. Problemas con hoja de cálculo</b>	<b>9</b>
3.1. Hoja Cálculo 1: Caída de Objetos en la Luna . . . . .	9
3.2. Hoja Cálculo 2: Valor de Acciones . . . . .	11
3.3. Hoja Cálculo: Órbitas de Satélites . . . . .	13
<b>4. Simulaciones Computacionales</b>	<b>15</b>
4.1. Sólido revolución 1: Calculando la velocidad en una pista cónica . . . . .	15
4.2. Proyecto de Balística: El Rescate del Satélite . . . . .	19
4.3. El Desafío del Arquero . . . . .	22
4.4. La Bola en la Escalera . . . . .	25
4.5. Frenada de Emergencia . . . . .	26
<b>5. Simulaciones Computacionales - Avanzado</b>	<b>29</b>
5.1. Sólido revolución 2: Calculando la velocidad en variadas pistas . . . . .	29
5.2. Conclusiones . . . . .	35

# Capítulo 1

## Resumen Problemas

Esta tabla resume los principales contenidos de las asignaturas de Matemáticas y Física abordados en cada problema del documento.

Problema	Contenidos Matemáticos					Contenidos Físicos		Tipo de Problema			Asignatura Sugerida
	Trigonometría	Vectores	Geom. Analítica	Logaritmos	Cálc. Diferen.	Cinemática Leyes Newton	Estática / Equilibrio	Hoja Cálculo Prob. Pizarra	Simul. 3D		
Distancias 1 (2.1)	X	X	X			X	X	X			1
Caída Libre 1 (2.2)					X	X	X	X			
Caída Libre 2 (2.3)					X	X	X	X			
HojaCálculo 1 (3.1)				X		X		X			1
HojaCálculo 2 (3.2)				X				X			1
HojaCálculo 3 (3.3)				X		X	X	X			1
Sólido Rev. 1 (4.1)	X	X	X			X	X		X		1
Sólido Rev. 2 (5.1)		X	X		X	X	X		X		3

### Asignatura Sugerida:

- 1: Geometría
- 2: Introducción al Cálculo
- 3: Cálculo Diferencial
- 4: Cálculo Integral.

## Capítulo 2

### Problemas para la pizarra

#### 2.1. Distancias 1: Estimación de distancia y altura de una montaña

Estás caminando ya cansado cerca de un volcán, y quieres estimar la altura del pico de una montaña distante y la distancia horizontal que hay que caminar hasta el pico. Desde el punto en que están, miden que el ángulo que forma con la horizontal la línea imaginaria que apunta hacia el pico es de  $7,5^\circ$  y que la misma línea está orientada  $13^\circ$  hacia el este.

Mientras que usted se queda en el punto de observación, su amigo camina en dirección oeste  $1,5$  km. Desde la nueva posición su amigo sitúa el pico y observa que la línea imaginaria que apunta hacia el pico forma un ángulo de  $15^\circ$  con el norte. Calcule:

- (a) a qué distancia está la montaña de su posición,
- (b) cuál es la altura de la cima.

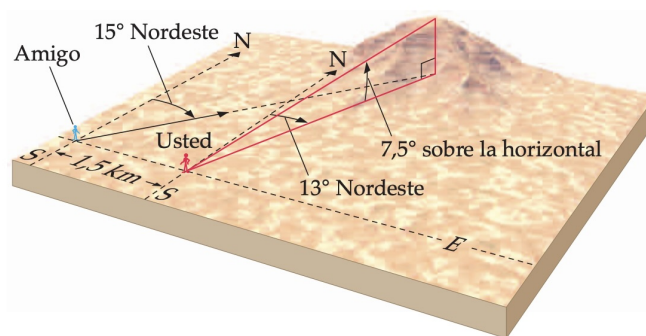


Figura 2.1: Esquema de distancias amigo y volcán.

##### 2.1.1. (a) a qué distancia está la montaña de su posición

Ubicamos el observador inicial en el origen:  $O = (0, 0)$ . La dirección de la montaña está dada por  $\theta_1 = 13^\circ$  respecto al norte (sentido horario). El vector unitario en esa dirección es  $\vec{d}_1 = (\sin \theta_1, \cos \theta_1)$ , por lo que el la cima de la montaña, en el plano cartesiano 2D, está en el punto

$$M = r(\sin \theta_1, \cos \theta_1).$$

El segundo observador está a:

$$A = (-1,5 \text{ km}, 0)$$

La dirección del segundo vector es  $\theta_2 = 15^\circ$ , asumiendo que la distancia  $s$  es en km:

$$M = A + s(\sin \theta_2, \cos \theta_2) = (-1,5 + s \sin \theta_2, s \cos \theta_2).$$

Es decir, estas coordenadas deben ser iguales:

$$r \sin \theta_1 = -1,5 + s \sin \theta_2 \quad (1)$$

$$r \cos \theta_1 = s \cos \theta_2 \quad (2)$$

De (2):

$$s = \frac{r \cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

Sustituyendo en (1):

$$r \sin \theta_1 = -1,5 + \frac{r \cos \theta_1}{\cos \theta_2} \sin \theta_2 \Rightarrow r(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) = -1,5 \cos \theta_2$$

Usamos la **identidad trigonométrica** de la resta de ángulos para el seno:

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

y obtenemos

$$r \sin(\theta_1 - \theta_2) = -1,5 \cos \theta_2$$

Despejamos  $r$ . Dado  $\theta_1 = 13^\circ$  y  $\theta_2 = 15^\circ$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = -2^\circ$ .

$$r = \frac{-1,5 \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{-1,5 \cos(15^\circ)}{\sin(-2^\circ)} = \frac{1,5 \cos(15^\circ)}{\sin(2^\circ)}$$

$$r \approx \frac{1,5 \times 0,96593}{0,03490} \approx \frac{1,44889}{0,03490} \approx 41,51 \text{ km}$$

### 2.1.2. (b) cuál es la altura de la cima.

Desde el punto original, el ángulo de elevación es  $\alpha = 7,5^\circ$ , y la distancia horizontal al pie del monte es  $r$ . Entonces, la altura  $h_{\text{pico}}$  es:

$$h_{\text{pico}} = r \cdot \tan(\alpha) \approx 41,51 \text{ km} \cdot \tan(7,5^\circ) \approx 41,51 \text{ km} \cdot 0,13165$$

$$h_{\text{pico}} \approx 5,465 \text{ km}$$

## 2.2. Caída libre 1: Movimiento de un paracaidista con resistencia cuadrática

Cuando intentamos resolver el problema de caída libre, generalmente obviamos la resistencia que impone el aire. Esto puede llevarnos a obtener resultados erróneos en varios órdenes de magnitud. La resistencia del aire a los objetos aumenta con la velocidad de una manera poco trivial. La velocidad de caída alcanza una velocidad teórica terminal, o velocidad límite, que depende de la masa y del área transversal del objeto. A la velocidad terminal, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la resistencia del aire se igualan y, por lo tanto, la aceleración es cero.

Asumamos que la aceleración de una paracaidista que se lanza al vacío desde un avión viene dada, antes de abrir el paracaídas, por la expresión

$$a_y = g - bv_y^2$$

donde:

- $g$  es la aceleración gravitacional,
- $b$  es una constante que depende del área frontal y la densidad del aire,
- $v_y$  es la velocidad en la dirección  $y$ .

La dirección  $+y$  está dirigida hacia abajo.

- (a) Si su velocidad inicial en el momento del salto es 0, demostrar que su velocidad en función del tiempo viene dada por la fórmula  $v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$ , donde  $v_t$  es la velocidad límite dada por  $v_t = \sqrt{g/b}$  y  $T = v_t/g$  es un parámetro de escala temporal.
- (b) ¿A qué fracción de velocidad terminal corresponde la velocidad en  $t = T$ ?
- (c) Use un programa de una hoja de cálculo para representar  $v_y(t)$  en función del tiempo, usando una velocidad terminal de 56 m/s (use este valor para calcular  $b$  y  $T$ ). ¿Tiene sentido la curva resultante?

### 2.2.1. (a) Demostrar que $v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$

Se parte de la ecuación:

$$\frac{dv_y}{dt} = g - bv_y^2$$

Separando variables:

$$\frac{dv_y}{g - bv_y^2} = dt$$

Factorizamos el denominador para integrar:

$$\int \frac{dv_y}{g(1 - \frac{b}{g}v_y^2)} = \int dt$$

Sea  $\alpha^2 = \frac{b}{g} \Rightarrow \frac{1}{g(1 - \alpha^2 v_y^2)}$ . Reconocemos una forma estándar:

$$\int \frac{1}{1-a^2x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1}(ax)$$

Aplicamos:

$$\frac{1}{g} \int \frac{1}{1-\alpha^2 v_y^2} dv_y = \int dt \Rightarrow \frac{1}{g\alpha} \tanh^{-1}(\alpha v_y) = t + C$$

Imponiendo la condición inicial  $v_y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ , despejamos:

$$\tanh^{-1}(\alpha v_y) = g\alpha t \Rightarrow \alpha v_y = \tanh(g\alpha t)$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\alpha} \tanh(g\alpha t)$$

Ahora definimos la velocidad terminal  $v_t = \sqrt{\frac{g}{b}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{v_t}$ , y  $T = \frac{v_t}{g} \Rightarrow g\alpha = \frac{1}{T}$ .  
Entonces:

$$v_y(t) = v_t \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

**2.2.2. (b) ¿Qué fracción de la velocidad terminal se alcanza en  $t = T$ ?**

$$v_y(T) = v_t \tanh(1) \approx v_t \cdot 0,7616$$

Entonces:

$$\frac{v_y(T)}{v_t} = \tanh(1) \approx 0,7616$$

**2.2.3. (c) Representación gráfica con  $v_t = 56 \text{ m/s}$**

Si  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ :

$$T = \frac{v_t}{g} = \frac{56 \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} \approx 5,71 \text{ s}$$

Podemos usar una hoja de cálculo para graficar la función:

$$v_y(t) = 56 \cdot \tanh\left(\frac{t}{5,71}\right)$$

La curva resultante tiene la forma de crecimiento asintótico hacia la velocidad límite  $v_t = 56 \text{ m/s}$ , lo cual es físicamente coherente con el modelo de resistencia del aire.

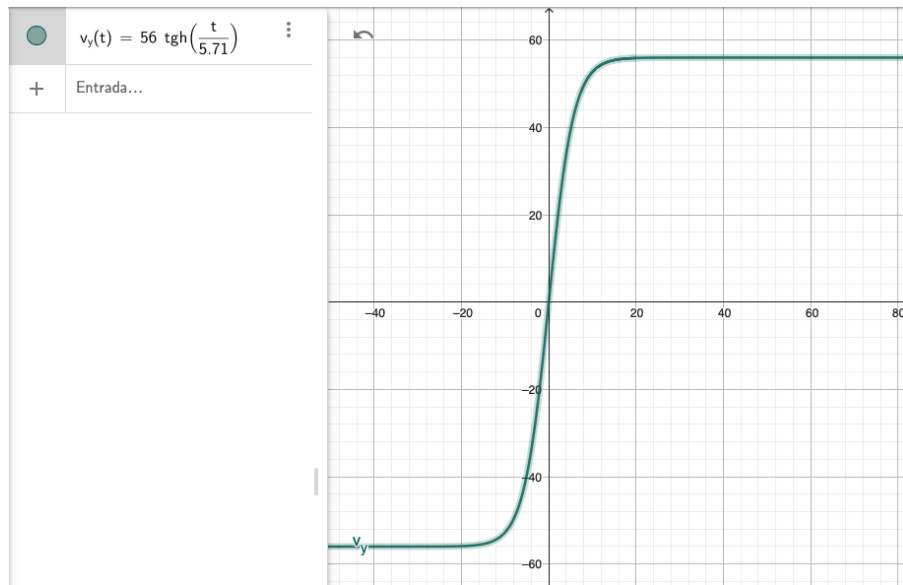


Figura 2.2: Gráfica de  $v_y(t)$  con velocidad terminal.

## 2.3. Caída libre 2: Velocidad de Impacto en la Luna con Gravedad Variable

En un objeto celeste de radio  $R$ , la aceleración de la gravedad  $g$  a una distancia  $x$  del centro del objeto viene dada por  $g(x) = g_0 R^2 / x^2$ , donde  $g_0$  es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del objeto ( $x = R$ ) y la fórmula es válida para  $x \geq R$ . Para la Luna, se tienen los siguientes valores:

- Aceleración en la superficie lunar:  $g_0 = 1,63 \text{ m/s}^2$
- Radio lunar:  $R = 3200 \text{ km}$

Se suelta una piedra a partir del reposo desde una altura de  $4R$  por encima de la superficie lunar.

- (a) ¿Con qué velocidad impacta la piedra en la Luna?

### 2.3.1. (a) ¿Con qué velocidad impacta la piedra en la Luna?

Sea  $x$  la distancia medida desde el centro de la Luna. La piedra se suelta desde el reposo, por lo que su velocidad inicial  $v_i = 0$ . La altura inicial sobre la superficie es  $h_i = 4R$ . Por lo tanto, la distancia inicial desde el centro de la Luna es  $x_i = R + h_i = R + 4R = 5R$ . La piedra impacta la superficie lunar, por lo que su posición final es  $x_f = R$ . Queremos encontrar la velocidad final  $v_f$ .

Si definimos la dirección positiva como alejándose del centro de la Luna, entonces la aceleración gravitacional es hacia el centro (en la dirección de  $x$  decreciente), por lo tanto:

$$a(x) = -\frac{g_0 R^2}{x^2}$$

Usamos la relación cinemática

$$a = v \frac{dv}{dx}$$



que es particularmente útil cuando la aceleración es una función explícita de la posición.

Partimos de la ecuación:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{g_0 R^2}{x^2}$$

Separamos las variables para integrar:

$$v dv = -g_0 R^2 \frac{1}{x^2} dx$$

Integramos ambos lados. El lado izquierdo se integra desde la velocidad inicial  $v_i = 0$  hasta la velocidad final  $v_f$ . El lado derecho se integra entre las posiciones correspondientes:

$$\int_0^{v_f} v dv = \int_{5R}^R -g_0 R^2 x^{-2} dx$$

Resolvemos las integrales definidas:

$$\left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_0^{v_f} = -g_0 R^2 \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{5R}^R$$

$$\frac{1}{2} v_f^2 - 0 = -g_0 R^2 \left[ -\frac{1}{x} \right]_{5R}^R$$

$$\frac{1}{2} v_f^2 = g_0 R^2 \left[ \frac{1}{x} \right]_{5R}^R$$

$$\frac{1}{2} v_f^2 = g_0 R^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{5R} \right)$$

Simplificamos el término entre paréntesis:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{5R} = \frac{4}{5R}$$

Reemplazamos y despejamos para  $v_f^2$ :

$$v_f^2 = \frac{8}{5} g_0 R$$

Y finalmente, la velocidad de impacto  $v_f$  es:

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5} g_0 R}$$

Ahora podemos sustituir los valores proporcionados para la Luna:  $g_0 = 1,63 \text{ m/s}^2$   $R = 3200 \text{ km} = 3\,200\,000 \text{ m} = 3,2 \times 10^6 \text{ m}$

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5} \times (1,63 \text{ m/s}^2) \times (3,2 \times 10^6 \text{ m})}$$

$$v_f = \sqrt{8,3456 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$v_f \approx 2888,875 \text{ m/s}$$

Expresando el resultado con tres cifras significativas y en kilómetros por segundo:

$$v_f \approx 2890 \text{ m/s} = 2,89 \text{ km/s}$$

Por lo que derivamos la velocidad final para una aceleración gravitacional variable según la piedra se va acercando al centro del cuerpo celeste.

# Capítulo 3

## Problemas con hoja de cálculo

En este capítulo se presentan problemas para ser resueltos con el apoyo de una hoja de cálculo, y así analizar datos experimentales o evaluar modelos matemáticos que se benefician de la capacidad de cálculo y la realización de gráficas usando software especializado.

### 3.1. Hoja Cálculo 1: Caída de Objetos en la Luna

Usted es un astronauta que realiza experimentos de física en la Luna. En uno de estos experimentos analiza la caída de varios objetos, desde el reposo, y relaciona la distancia de caída  $y$  con el tiempo  $t$ . Para una moneda ha obtenido los siguientes resultados:

$y$ (m)	10	20	30	40	50
$t$ (s)	3,5	5,2	6,0	7,3	7,9

Asumiremos que la relación general entre la distancia  $y$  y el tiempo  $t$  es de la forma  $y = Bt^C$ , donde  $B$  y  $C$  son constantes que hay que determinar experimentalmente. Para ello,

- represente los datos en un gráfico logarítmico (log-log), es decir, representando  $\log(y)$  (ordenadas) respecto  $\log(t)$  (abscisas).
- Demuestre que si se toman logaritmos en la expresión  $y = Bt^C$ , se obtiene  $\log(y) = \log(B) + C \log(t)$ .
- Compare esta relación lineal con el gráfico de los datos y estime los valores de  $B$  y  $C$ .
- Si se deja caer una moneda desde 1,0 m de altura, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?
- La verdadera relación entre  $y$  y  $t$  es  $y = 1/2at^2$ , donde  $a$  es la aceleración del objeto. Usando los valores de  $A$  y  $B$  derivados, ¿Cuál es la aceleración de los objetos que caen en la Luna?

### 3.1.1. (a) Gráfico logarítmico y (b) Linealización de la ecuación

La relación propuesta es  $y = Bt^C$ . Si aplicamos logaritmos naturales (o cualquier base) a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

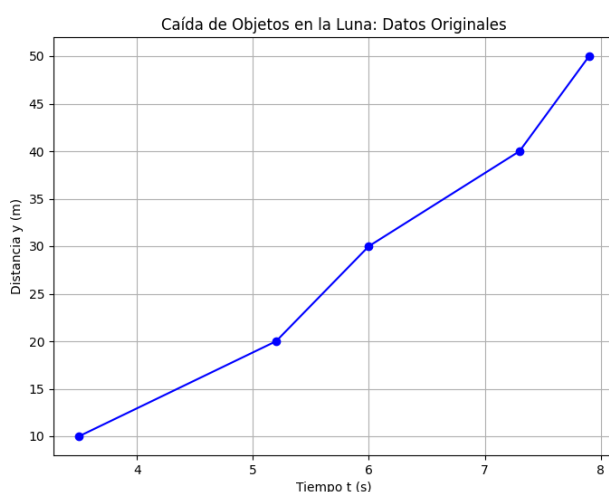
$$\ln(y) = \ln(Bt^C)$$

$$\ln(y) = \ln(B) + \ln(t^C)$$

$$\ln(y) = \ln(B) + C \ln(t)$$

Esta ecuación tiene la forma de una recta  $Y = mX + b$ , donde  $Y = \ln(y)$ ,  $X = \ln(t)$ .

La pendiente es  $m = C$ , y la ordenada al origen es  $b = \ln(B)$ . Para representar los datos en un gráfico logarítmico, primero calculamos los logaritmos naturales de los datos proporcionados:



$y$ (m)	10	20	30	40	50
$\ln(y)$	2,303	2,996	3,401	3,689	3,912
$t$ (s)	3,5	5,2	6,0	7,3	7,9
$\ln(t)$	1,253	1,649	1,792	1,988	2,067

Al graficar  $\ln(y)$  versus  $\ln(t)$  usando una hoja de cálculo, se observaría que los puntos tienden a alinearse a la relación lineal  $Y = mX + b$ .

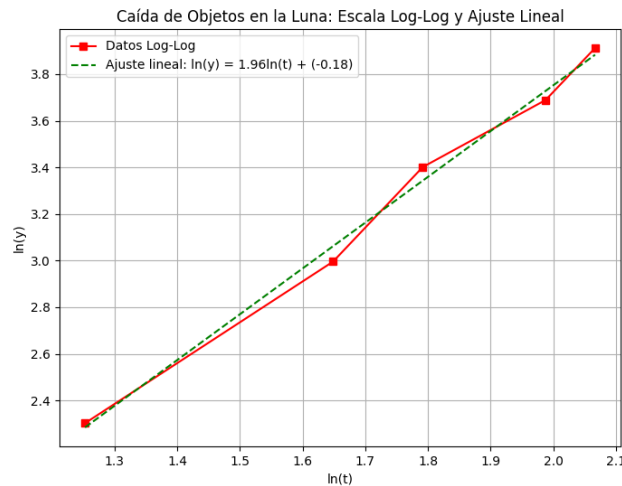
### 3.1.2. (c) Estimación de B y C

Utilizando la gráfica entregada en el paso anterior, podemos derivar las siguientes cantidades para  $A$  y  $B$ :

Pendiente:  $C \approx 1,98$

Ordenada al origen:  $\ln(B) \approx -0,154$

De estos valores, podemos estimar  $B$ :  $B = e^{\ln(B)} = e^{-0,154} \approx 0,857$  Por lo tanto, la relación experimental es aproximadamente  $y \approx 0,857t^{1,98}$ .



### 3.1.3. (d) Tiempo de caída desde 1,0 m

Usamos la relación  $y = 0,857t^{1,98}$ .

Si  $y = 1,0$ , entonces:

$$1,0 = 0,857t^{1,98}$$

$$t^{1,98} = \frac{1,0}{0,857} \approx 1,167$$

$$t = (1,167)^{\frac{1}{1,98}} \approx (1,167)^{0,505} \approx 1,08\text{s}.$$

La moneda tardará aproximadamente 1,08 segundos en caer 1,0 m.

### 3.1.4. (e) Aceleración de los objetos en la Luna

La expresión para la caída libre es  $y = \frac{1}{2}at^2$ . Comparando esta ecuación con la forma experimental  $y = Bt^C$ , vemos que:

- $C$  debería ser teóricamente igual a 2. Nuestro valor experimental  $C \approx 1,98$  es muy cercano.
- $B$  debería ser teóricamente igual a  $\frac{1}{2}a$ .
- Por lo tanto,  $a = 2B \approx 2 \times 0,857 \approx 1,714 \text{ m/s}^2$ . La aceleración de los objetos que caen en la Luna es aproximadamente  $1,71 \text{ m/s}^2$ .

(El valor real es  $1,62 \text{ m/s}^2$ ).

## 3.2. Hoja Cálculo 2: Valor de Acciones

El valor de las acciones de una compañía puede ser muy impredecible, pero la gente a menudo intenta encontrar patrones del comportamiento en bolsa de los valores a partir de fórmulas matemáticas. El valor de las acciones de una compañía de ingeniería de materiales denominada Corning, situada en el estado de Nueva York, cada día 3 de agosto, cada cinco años en el periodo 1981 – 2001 evoluciona según la tabla.

(a) Precio (en dólares)	2,10	4,19	9,14	10,82	16,85
(b) Años desde 1980	1	6	11	16	21

Supongamos que el precio  $P$  de las acciones (en dólares) sigue una ley de potencias  $P = Bt^C$ , donde  $t$  se expresa en años.

- Evalúe las constantes  $B$  y  $C$ .
- De acuerdo con esta ley de potencias, ¿cuál fue el precio de las acciones de la compañía el 3 de agosto del año 2000?

### 3.2.1. (a) Evaluación de las constantes B y C

La relación asumida es  $P = Bt^C$ . Similar al problema anterior, tomamos logaritmos naturales:  $\ln(P) = \ln(B) + C \ln(t)$ . Calculamos los logaritmos naturales de los datos:



$P$ (\$)	2,10	4,19	9,14	10,82	16,85
$\ln(P)$	0,742	1,433	2,213	2,381	2,824
$t$ (años)	1	6	11	16	21
$\ln(t)$	0,000	1,792	2,398	2,773	3,045

A partir de la gráfica en escala log-log, con  $\ln(P)$  como variable dependiente y  $\ln(t)$  como variable independiente, obtendríamos aproximadamente:

Pendiente:  $C \approx 0,673$

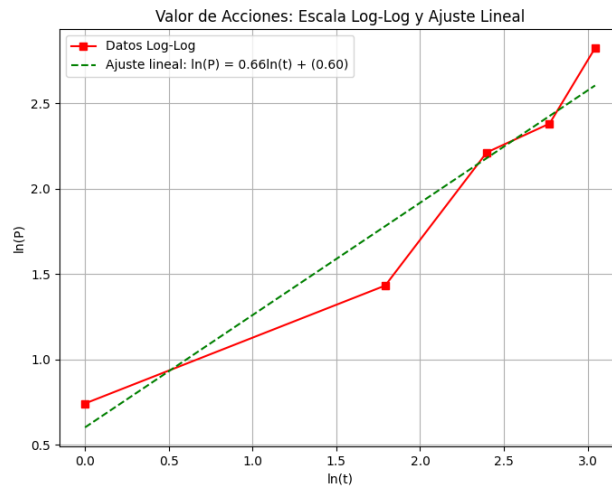
Ordenada al origen:  $\ln(B) \approx 0,780$

De estos valores, estimamos  $B$ :  $B = e^{\ln(B)} = e^{0,780} \approx 2,181$ . Por lo tanto, la relación es aproximadamente  $P \approx 2,181t^{0,673}$ .

### 3.2.2. (b) Precio de las acciones el 3 de agosto del año 2000

El año 2000 corresponde a  $t = 2000 - 1980 = 20$  años.

Usamos  $P = 2,181t^{0,673}$  con  $t = 20$ . Entonces,  $P \approx 2,181 \times 7,509 \approx 16,38$  dólares.

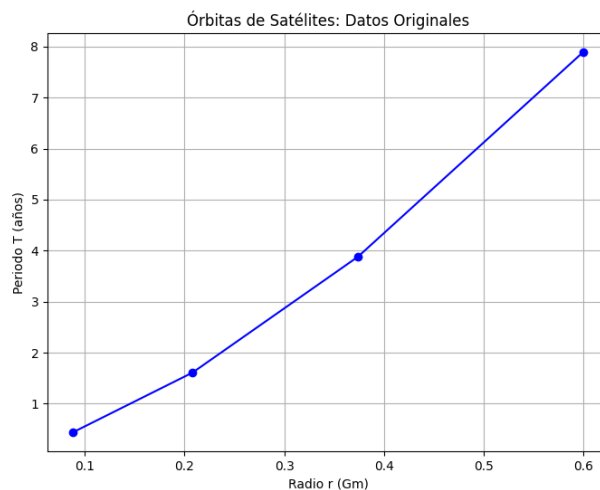


Según esta ley de potencias, el precio de las acciones el 3 de agosto del 2000 sería aproximadamente 16,38 \$. Este valor es significativamente diferente del precio real de 82,83 \$.

El modelo de ley de potencias **no** es un predictor fiable a largo plazo.

### 3.3. Hoja Cálculo: Órbitas de Satélites

La tabla adjunta da el periodo  $T$  y el radio  $r$  de las órbitas correspondientes a los movimientos de cuatro satélites que giran alrededor de un asteroide.



(a) Periodo $T$ , años	0,44	1,61	3,88	7,89
(b) Radio $r$ , Gm	0,088	0,208	0,374	0,600

Asumamos que estos datos se relacionan mediante la expresión  $T = Cr^n$ .

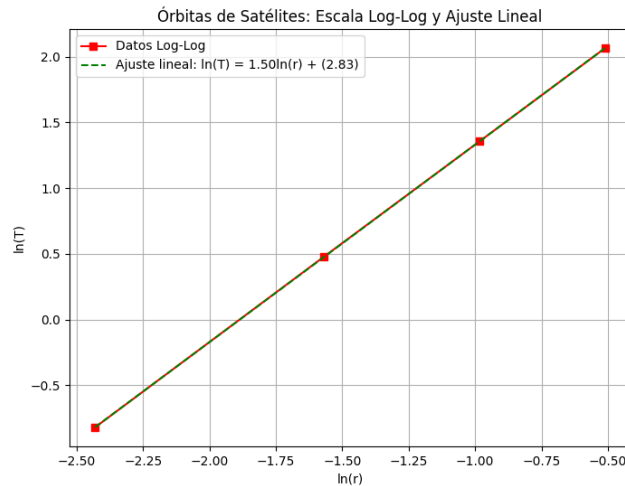
- Hallar  $C$  y  $n$ .
- Se descubre un quinto satélite que tiene un periodo de 6,20 años. Determinar la órbita de este satélite que se ajuste a la misma fórmula.

### 3.3.1. (a) Hallar C y n

La relación propuesta es  $T = Cr^n$ .

Tomamos logaritmos naturales:  $\ln(T) = \ln(C) + n \ln(r)$ .

Esta es una ecuación lineal donde  $\ln(T)$  es la variable dependiente,  $\ln(r)$  es la variable independiente,  $n$  es la pendiente y  $\ln(C)$  es la ordenada al origen. Calculamos los logaritmos naturales de los datos:



$T$ (años)	0,44	1,61	3,88	7,89
$\ln(T)$	-0,821	0,476	1,356	2,066
$r$ (Gm)	0,088	0,208	0,374	0,600
$\ln(r)$	-2,430	-1,570	-0,984	-0,511

Inspeccionando la gráfica log-log, obtenemos valor aproximados:

Pendiente:  $n \approx 1,5$

Ordenada al origen:  $\ln(C) \approx 2,899$ , por lo tanto  $C = e^{\ln(C)} = e^{2,899} \approx 18,15$ .

Por lo tanto, la relación es aproximadamente  $T \approx 18,15r^{1,5}$ .

(Este resultado es consistente con la tercera ley de Kepler,  $T^2 \propto r^3$ , o  $T \propto r^{3/2}$ ).

### 3.3.2. (b) Órbita del quinto satélite

Se descubre un quinto satélite con un periodo  $T_5 = 6,20$  años.

Usamos la relación encontrada para determinar su radio orbital  $r_5$ :

$$T_5 = Cr_5^n$$

$$6,20 = 18,15r_5^{1,5}$$

$$r_5^{1,5} = \frac{6,20}{18,15} \approx 0,3416 = 0,4883$$

El radio de la órbita del quinto satélite es aproximadamente 0,489 Gm.

# Capítulo 4

## Simulaciones Computacionales

### 4.1. Sólido revolución 1: Calculando la velocidad en una pista cónica

Un bloque de masa  $m$  se mueve en el interior de un cono de revolución cuya superficie es perfectamente lisa. El vértice del cono apunta hacia abajo, y el cono tiene un ángulo  $\theta$  entre el eje vertical del cono y su generatriz.

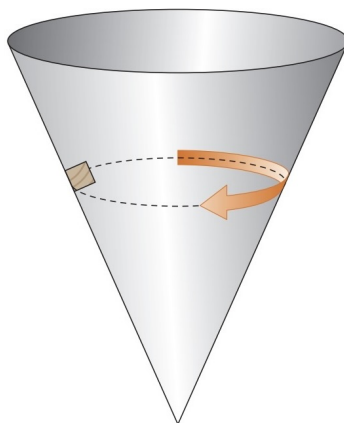


Figura 4.1: Cono con una canica en su interior a una altura  $h$ .

El bloque describe una trayectoria circular horizontal a una **altura  $h$  constante**, medida desde el vértice del cono. A partir de esta descripción,

■ Parte A: Geometría del cono y la trayectoria

1. Dibuje un corte transversal del cono. En este dibujo, represente:

- El vértice del cono.
- El eje de simetría vertical.
- Una generatriz del cono.
- El semiángulo vertical  $\theta$ .
- La posición del bloque a una altura  $h$  desde el vértice.
- El radio  $r$  de la trayectoria circular que describe el bloque a esa altura  $h$ .



2. Utilizando trigonometría en el triángulo rectángulo formado por la altura  $h$ , el radio  $r$  y la generatriz del cono, encuentra una expresión para el radio  $r$  en función de  $h$  y  $\theta$ .

■ Parte B: Aplicando principios Físicos.

Para que el bloque se mantenga en movimiento circular uniforme a una altura  $h$  constante, deben cumplirse ciertas condiciones físicas. Asumiremos como ciertas las siguientes relaciones, derivadas de las leyes de Newton:

- Hay dos fuerzas principales sobre el bloque:
  - Su peso,  $P = mg$  (dirigido verticalmente hacia abajo, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad, aproximadamente  $9,8 \text{ m/s}^2$ ).
  - La fuerza normal  $N$  (ejercida por la superficie del cono, perpendicular a dicha superficie).
- Para que la altura  $h$  sea constante, la componente vertical de la fuerza normal ( $N_{\text{vertical}}$ ) debe equilibrar el peso:

$$(1) \quad N_{\text{vertical}} = N \cos(\phi_{\text{normal}}) = mg$$

Aquí,  $\phi_{\text{normal}}$  es el ángulo que forma la normal con la vertical. Para un cono, este ángulo es igual al semiángulo vertical  $\theta$ .

- Para que el bloque describa un círculo de radio  $r$  a velocidad  $v$ , la componente horizontal de la fuerza normal ( $N_{\text{horizontal}}$ ) debe proporcionar la fuerza centrípeta necesaria:

$$(2) \quad N_{\text{horizontal}} = N \sin(\phi_{\text{normal}}) = \frac{mv^2}{r}$$

■ Tu Tarea:

Usando las ecuaciones (1) y (2) dadas en la Parte B (con  $\phi_{\text{normal}} = \theta$ ), y tu resultado de la Parte A.2:

1. Despeja la fuerza normal  $N$  de la ecuación (1).
2. Sustituye esta expresión para  $N$  en la ecuación (2).
3. En la ecuación resultante, sustituye la expresión para el radio  $r$  que encontraste en la Parte A.2.
4. Finalmente, despeja la velocidad  $v$  en términos de  $g$ ,  $h$  y  $\theta$ .
5. Una vez con la velocidad necesaria  $v(g, h, \theta)$ , responde:
  - a) ¿Qué tipo de curva describe la trayectoria del bloque en el espacio tridimensional?
  - b) Si el ángulo  $\theta$  del cono fuera muy pequeño, casi un cilindro, ¿qué pasaría con la velocidad necesaria según tu fórmula? ¿Tiene sentido?
  - c) Si el ángulo  $\theta$  fuera cercano a 90 grados (un cono muy abierto, casi un plano), ¿qué pasaría? (Considera  $\theta \rightarrow 90^\circ$ ).

### 4.1.1. Detalles previos

#### Diagrama

Bloque en Cono:  $h=5.00\text{m}$ ,  $\theta=30.0^\circ$ ,  $v=4.04\text{m/s}$

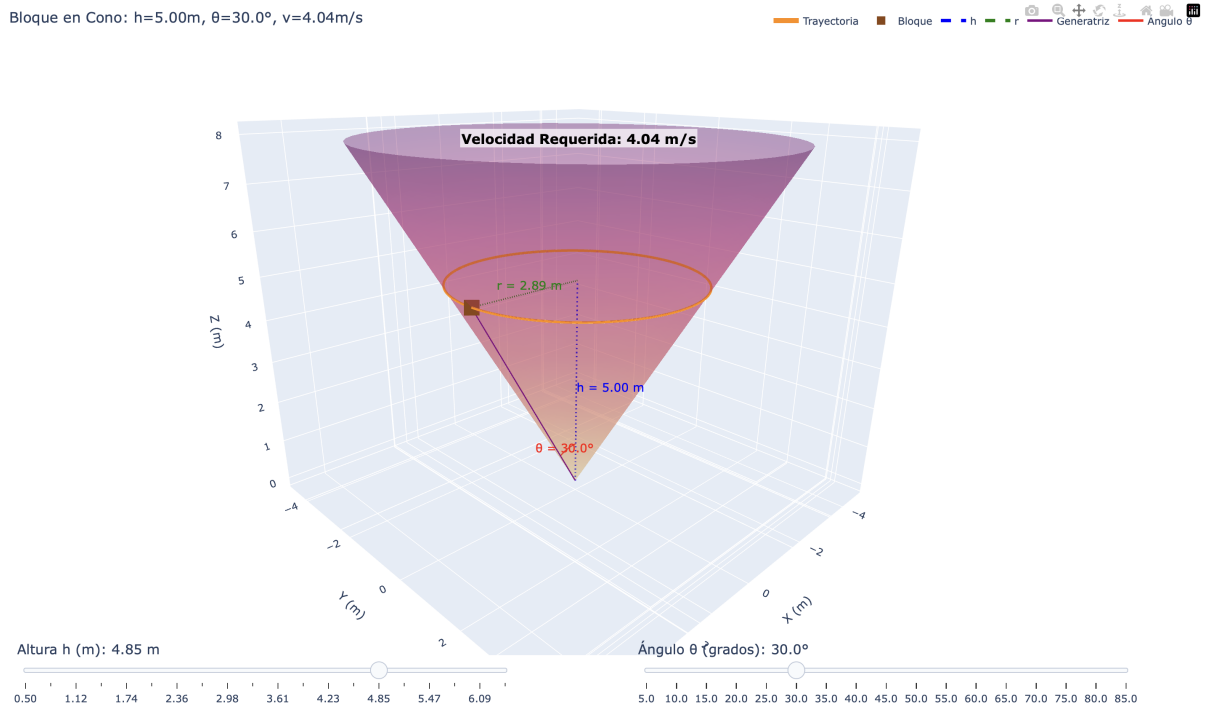


Figura 4.2: Visualización como 3D usando Plotly con Python.

#### A) Parte Geométrica

El semiángulo vertical del cono es  $\theta$ . Por trigonometría:

$$\tan \theta = \frac{r}{h}$$

Por lo que el radio de la trayectoria circular se expresa como:

$$r = h \tan \theta$$

La fuerza normal  $N$  es perpendicular a la superficie del cono. Si  $\theta$  es el semiángulo vertical del cono, entonces el ángulo que forma la fuerza normal  $N$  con la vertical también es  $\theta$ .

Descomponemos  $N$  en sus componentes vertical ( $N_y$ ) y horizontal ( $N_x$ ):

- Componente vertical:  $N_y = N \cos \theta$
- Componente horizontal:  $N_x = N \sin \theta$

#### B) Parte Física: Leyes de Newton

- Equilibrio en la componente  $y$ :

Como el bloque no se acelera verticalmente (se mantiene a altura  $h$  constante), la suma de las fuerzas en la dirección vertical debe ser cero.

$$\Sigma F_y = N_y - mg = 0 \Rightarrow N \cos \theta - mg = 0$$

Por lo tanto:

$$N \cos \theta = mg \quad (\text{Ecuación 1'})$$

- Movimiento circular en la componente horizontal  $x$ :

La canica quiere seguir derecho, pero la superficie, en el eje- $x$ , ejerce una fuerza centrípeta  $F_c = ma_c$  (componente horizontal de la fuerza normal), donde  $a_c = v^2/r$ . Hay una fuerza neta no nula, por lo que la canica cambia constantemente su vector de velocidad.

$$\Sigma F_x = N_x = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow N \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{Ecuación 2'})$$

### C) Desarrollo

De la Ec. 1', despejamos la fuerza normal  $N$ :

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

Sustituimos esta expresión para  $N$  en la Ec. 2':

$$\left( \frac{mg}{\cos \theta} \right) \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

Simplificamos:

$$mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow mg \tan \theta = m \frac{v^2}{r}$$

Cancelamos la masa  $m$ :

$$g \tan \theta = \frac{v^2}{r}$$

Sustituimos la expresión para  $r = h \tan \theta$ , obtenemos:

$$g \tan \theta = \frac{v^2}{h \tan \theta}$$

Despejamos  $v^2$ :

$$v^2 = gh \tan^2 \theta$$

Finalmente, tomamos la raíz cuadrada para obtener la velocidad  $v$ :

$$v = \tan \theta \sqrt{gh}$$

### D) Preguntas cierre

1) Un círculo horizontal.

2) Si  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\tan \theta \rightarrow 0$ , entonces  $v \rightarrow 0$ . Esto tiene sentido: un cilindro vertical no podría sostener un objeto en una órbita sin fricción a menos que el objeto no se mueva y esté en el fondo, o si la pared es horizontal, lo que no es el caso. Para  $\theta = 0$  la superficie es vertical, la normal es horizontal y no puede equilibrar el peso.

3) Si  $\theta \rightarrow 90^\circ$ ,  $\tan \theta \rightarrow \infty$ , entonces  $v \rightarrow \infty$ . Esto también tiene sentido: para mantenerse a una altura  $h$  en una superficie casi plana, se necesitaría una velocidad extremadamente alta para que la pequeña componente vertical de una fuerza normal muy grande (inclinada casi horizontalmente) equilibre el peso.

## 4.2. Proyecto de Balística: El Rescate del Satélite

Un satélite de comunicaciones ha quedado a la deriva en una órbita baja. Su última posición conocida es  $\mathbf{P} = (10.000 \text{ m}, 3.000 \text{ m})$ . Se debe lanzar una sonda de rescate desde nuestra base, ubicada en el origen  $\mathbf{O} = (0, 0)$ . La sonda puede ser lanzada con una velocidad inicial de magnitud  $|v_0| = 400 \text{ m/s}$ . Tu misión es calcular el ángulo o los ángulos de lanzamiento  $\theta$  necesarios para lograr una intercepción exitosa. Asume que la aceleración de gravedad es constante  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$  y desprecia la resistencia del aire.



Figura 4.3: Esquema del lanzamiento de la sonda para rescatar el satélite.

### Preámbulo

El primer paso es derivar una expresión general para la trayectoria del proyectil  $y(x)$  que no dependa del tiempo sino solamente de la posición  $x$ , y de los parámetros  $v_0$  y  $\theta$ , y  $g$ .

En física, las ecuaciones paramétricas del movimiento siempre se pueden escribir como:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2$$

En este caso, como el proyectil comienza desde el origen, entonces  $x_0 = y_0 = 0$ . Además, la única aceleración que cuenta es la gravedad, que solo afecta al eje- $y$ , por lo que  $a_{0x} = 0$  y  $a_{0y} = -g$ . Así que, considerando que toda velocidad inicial se puede descomponer en componentes:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$$

Entonces tenemos dos ecuaciones que permiten saber dónde está el proyectil en todo momento:

$$(1) \quad x(t) = (v_0 \cos \theta)t$$

$$(2) \quad y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ahora, podemos combinar ambas ecuaciones: si despejamos  $t$  de la ecuación (1),

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta},$$

y sustituimos  $t$  en la ecuación (2), tenemos una expresión de la posición  $y$  del proyectil según la posición  $x$ :

$$y(x) = (v_0 \sin \theta) \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

Si te fijas, la posición  $y$  en realidad depende de tres cosas:  $y = y(x, \theta, v_0)$ . A esta expresión la llamaremos **ecuación general de la trayectoria parabólica**:

$$y(x) = x \tan \theta - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

#### ■ Tu Tarea:

1. Utiliza la condición de que la trayectoria debe pasar por el punto  $P = (10,000\text{m}, 3,000\text{m})$  para encontrar una ecuación que solo contenga el ángulo  $\theta$  como incógnita.
2. Demuestra que esta ecuación se puede transformar en una ecuación cuadrática en términos de  $\tan \theta$ .
3. Resuelve la ecuación cuadrática para encontrar en qué ángulo(s) se debe enviar la sonda. ¿El ángulo es único? ¿Por qué no es único?

### 4.2.1. Solución Detallada

#### A) Ecuación solo con $\theta$

Ahora, aplicamos esta ecuación general al problema específico. Queremos que la trayectoria pase por el punto objetivo  $P = (10,000\text{m}, 3,000\text{m})$ , con  $v_0 = 400 \text{ m/s}$  y  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Sustituimos estos valores en la ecuación (4.2):

$$3000 = 10000 \tan \theta - \left( \frac{9,8}{2(400)^2 \cos^2 \theta} \right) (10000)^2$$

Primero, calculemos el término con los números grandes:

$$\frac{g}{2v_0^2} = \frac{9,8}{2(400)^2} = \frac{9,8}{320000} = 3,0625 \cdot 10^{-5}$$

## B) Transformar a ecuación cuadrática

Además, podemos usar la identidad  $\sec^2(\theta) = 1/\cos^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ . La ecuación se convierte en:

$$3000 = 10^4 \tan \theta - (3,0625 \cdot 10^{-5})(10^4)^2(1 + \tan^2 \theta)$$

$$3000 = 10^4 \tan \theta - 3062,5(1 + \tan^2 \theta)$$

$$3062,5 \tan^2 \theta - 10^4 \tan \theta + (3000 + 3062,5) = 0$$

$$3062,5 \tan^2 \theta - 10000 \tan \theta + 6062,5 = 0$$

Lo que tenemos es una ecuación cuadrática de la forma  $Au^2 + Bu + C = 0$ , donde  $u = \tan \theta$ . Usando la fórmula cuadrática  $u = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ :

$$\tan \theta = \frac{10000 \pm \sqrt{(-10000)^2 - 4(3062,5)(6062,5)}}{2(3062,5)}$$

$$\tan \theta = \frac{10000 \pm \sqrt{100,000,000 - 74,265,625}}{6125}$$

$$\tan \theta = \frac{10000 \pm \sqrt{25,734,375}}{6125}$$

$$\tan \theta \approx \frac{10000 \pm 5072,9}{6125}$$

## C) Ángulos de solución

Esto nos da dos soluciones para  $\tan \theta$ :

$$\tan(\theta_1) \approx \frac{15072,9}{6125} \approx 2,461$$

$$\tan(\theta_2) \approx \frac{4927,1}{6125} \approx 0,804$$

Finalmente, encontramos los ángulos usando la función arcotangente:

$$\theta_1 = \arctan(2,461) \approx 67,89^\circ$$

$$\theta_2 = \arctan(0,804) \approx 38,80^\circ$$

Existen dos ángulos de lanzamiento que permiten rescatar el satélite: uno con una trayectoria más alta y directa, y otro con una trayectoria más baja y lobulada.

### 4.3. El Desafío del Arquero

Un arquero, situado en el origen  $(0,0)$ , debe disparar una flecha para que esta pase a través de dos anillos circulares. El primer anillo, de radio  $R_1$ , está centrado en  $(x_{c1}, y_{c1})$ . El segundo anillo, también de radio  $R_2$ , está centrado en  $(x_{c2}, y_{c2})$ . El desafío es establecer las condiciones matemáticas que deben cumplir la velocidad de lanzamiento  $v_0$  y el ángulo  $\theta$  para que la hazaña sea posible.

#### Preámbulo

Como derivamos en el ejercicio del 'Rescate del Satélite', la ecuación de la trayectoria de un proyectil es:

$$y(x) = x \tan \theta - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

#### Tu Tarea:

1. Para el primer anillo, escribe la inecuación matemática que garantiza que la flecha pase por su interior.  
Haz lo mismo para el segundo anillo.
2. El problema se reduce a encontrar los pares de valores  $(v_0, \theta)$  que satisfacen simultáneamente dos inecuaciones. Resolver este sistema analíticamente es extremadamente complejo. Seguiremos el siguiente procedimiento:
  - 2.1. Encuentra una combinación que logre pasar por ambas argollas.
  - 2.2. Una vez encontrada una combinación, mueve de a poco uno de los parámetros **hasta que ya no funcione**.
  - 2.3. Pinta la región donde sí funcionó. Usa la plantilla de más abajo.
  - 2.4. Vuelve a la primera combinación que funcionó. Ahora varía ligeramente el otro parámetro hasta que deje de funcionar. Dibuja la región donde funcionó.
  - 2.5. Repite este procedimiento hasta que creas que se agotaron las combinaciones.

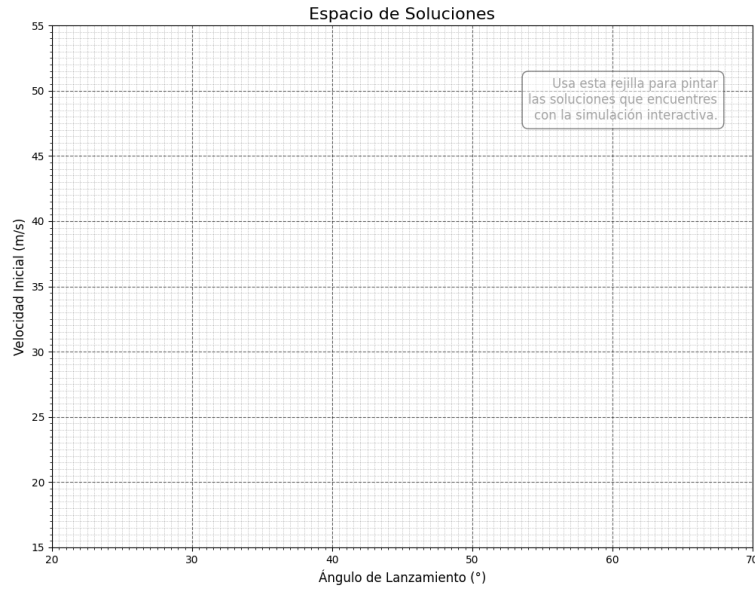


Figura 4.4: Plantilla espacio de soluciones Desafío del Arquero.

Lo que estamos haciendo es crucial en física de sistemas complejos, y es llamada **región de solución en el espacio de parámetros**  $(v_0, \theta)$ .

3. Crea un script de Python que resuelva el mismo problema, asegurándote que sí estudie todas las posibles combinaciones de  $(v_0, \theta)$ . ¿Habían regiones que no alcanzaste a explorar?

### 4.3.1. Solución Detallada

#### A) Sistema de Inecuaciones

Para que la flecha pase por el primer anillo, en la posición horizontal  $x_{c1}$ , su altura vertical  $y(x_1)$  debe estar dentro del rango vertical del anillo. Es decir, la distancia entre el centro del anillo  $(x_{c1}, y_{c1})$  y el punto de la trayectoria  $(x_1, y(x_1))$  debe ser menor que el radio  $R$ .

$$\text{Condición para el Anillo 1: } |y(x_1) - y_{c1}| < R_1$$

Sustituyendo la ecuación de la trayectoria, obtenemos la primera inecuación:

$$(1) \quad \left| x_{c1} \tan \theta - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x_{c1}^2 - y_{c1} \right| < R_1$$

De manera análoga, para el segundo anillo en la posición  $(x_{c2}, y_{c2})$ ,

$$\text{Condición para el Anillo 2: } |y(x_2) - y_{c2}| < R_2$$

Que se puede escribir como:

$$(2) \quad \left| x_{c2} \tan \theta - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x_{c2}^2 - y_{c2} \right| < R_2$$



## B) Uso de Simulación

Aquí es donde una simulación computacional se vuelve indispensable. En este link se puede encontrar el script 'arquero\_simulacion.py'.

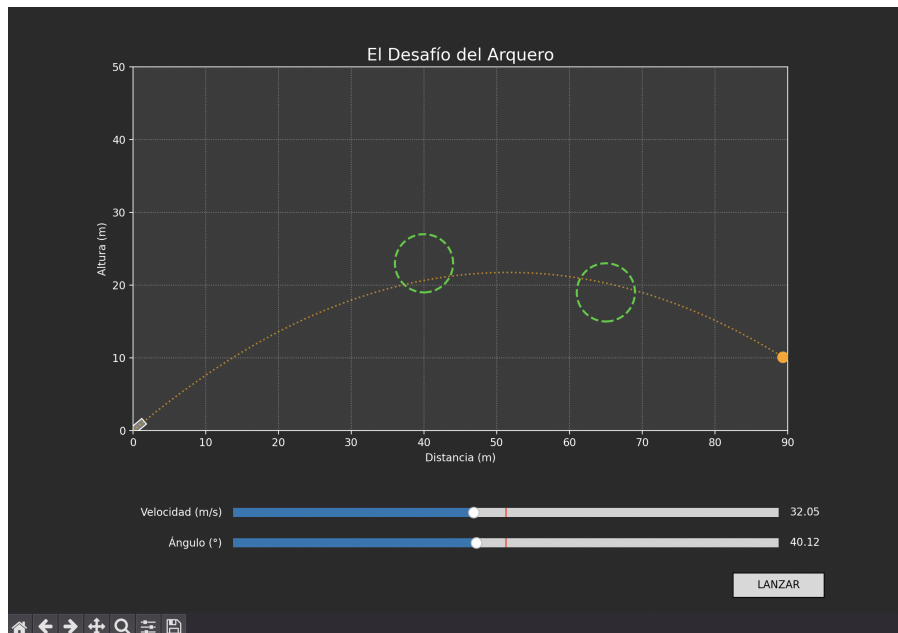


Figura 4.5: Captura de simulación arquero\_simulacion.py.

## C) Construcción script de Python

Para la verificación del espacio de soluciones, podemos usar el script en este link como una plantilla para que los alumnos terminen un código pre-armado que barre todas las configuraciones de parámetros que son exitosas.

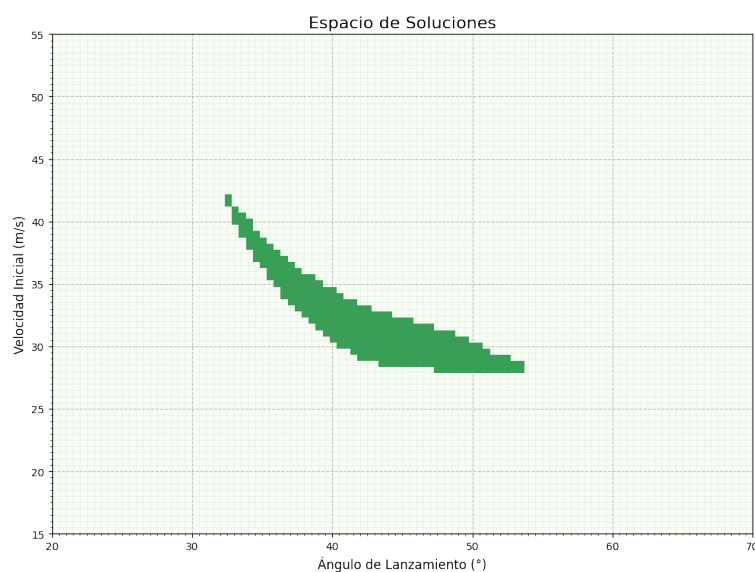


Figura 4.6: Captura de análisis espacio de soluciones para arquero\_simulacion.py.

## 4.4. La Bola en la Escalera

Desde el borde de un rellano superior, se lanza horizontalmente una bola con velocidad inicial  $v_0$ . La escalera consiste en escalones idénticos de ancho  $w$  y alto  $h$ . El desafío es determinar en qué escalón, numerado como  $n = 1, 2, 3, \dots$ , aterrizará la bola por primera vez.

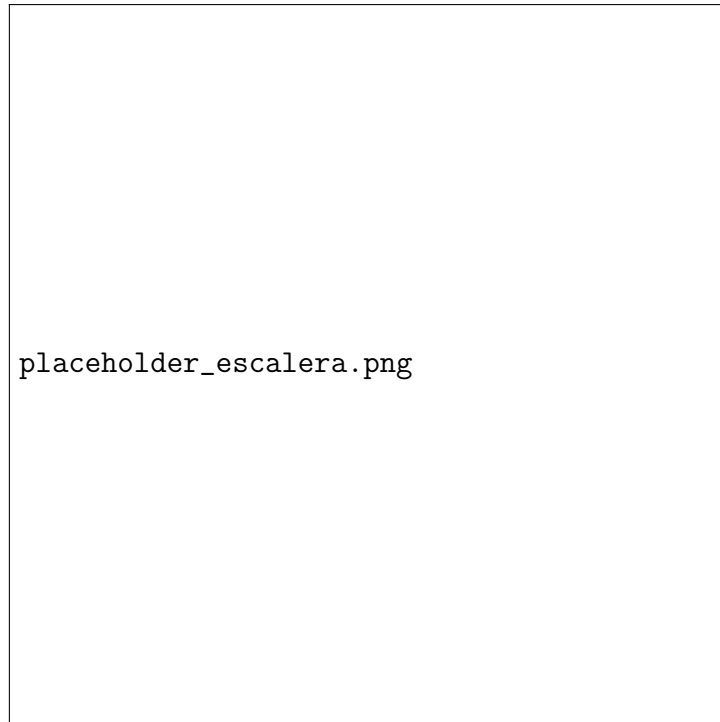


Figura 4.7: Una bola es lanzada horizontalmente sobre una escalera.

### ■ Tu Tarea:

1. Establece un sistema de coordenadas y escribe las ecuaciones de movimiento  $x(t)$  y  $y(t)$  para la bola.
2. Define las coordenadas del borde exterior del  $n$ -ésimo escalón.
3. El enfoque clave es determinar el número de escalones que la bola "despeja". La bola aterriza en el escalón  $n$  si despeja el escalón  $n - 1$  pero no logra despejar el escalón  $n$ .
4. Deriva una desigualdad que relacione  $v_0, w, h, g$  y  $n$  para que la bola aterrice en el escalón  $n$  o uno posterior.
5. A partir de la desigualdad, encuentra una fórmula para el escalón  $n$  en el que impactará.

### 4.4.1. Solución Detallada

#### A) Modelo del Problema

Colocamos el origen  $(0,0)$  en el punto de lanzamiento. La dirección  $+x$  es horizontal y la  $+y$  es vertical hacia arriba. Las ecuaciones de movimiento son:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

El borde exterior del escalón  $k$  se encuentra en la posición  $(x_k, y_k) = (k \cdot w, -k \cdot h)$ .

## B) Condición de Impacto y Solución

La bola aterriza en el escalón  $n$ . Esto significa que su trayectoria pasa por debajo del borde del escalón  $n$ , pero por encima del borde del escalón  $n - 1$ .

Consideremos el momento  $t_n$  en que la bola alcanza la distancia horizontal del borde del escalón  $n$ :

$$x(t_n) = n \cdot w \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{n \cdot w}{v_0}$$

En ese momento, la caída vertical de la bola es:

$$|y(t_n)| = \frac{1}{2}gt_n^2 = \frac{1}{2}g \left( \frac{nw}{v_0} \right)^2$$

Para que la bola aterrice en el escalón  $n$  (y no en uno anterior), su caída vertical en  $x = nw$  debe ser mayor o igual a la altura de ese escalón, que es  $nh$ .

$$\text{Condición de impacto en escalón } n \text{ o superior: } \frac{g(nw)^2}{2v_0^2} \geq nh$$

Podemos simplificar esta desigualdad (asumiendo  $n > 0$ ):

$$\frac{gnw^2}{2v_0^2} \geq h \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{2hv_0^2}{gw^2}$$

El número de escalón  $n$  en el que la bola aterriza será el **primer entero** que satisface esta condición. Por lo tanto,  $n$  es el entero más pequeño que es mayor o igual al valor del lado derecho. Esta operación matemática es la función "techo" (ceiling).

$$n = \left\lceil \frac{2hv_0^2}{gw^2} \right\rceil$$

Por ejemplo, si el cálculo da 4.3, el primer entero que satisface  $n \geq 4,3$  es 5. La bola aterrizará en el 5º escalón.

## 4.5. Frenada de Emergencia

Este problema analiza la cinemática de una frenada para evitar una colisión. Lo abordaremos en dos variantes complementarias.

### ■ Parte A: Cálculo de la Desaceleración Mínima

Un auto (A) viaja a  $v_1 = 108 \text{ km/h}$  y se encuentra a una distancia  $D = 50 \text{ m}$  detrás de otro auto (B) que viaja en la misma dirección a  $v_2 = 72 \text{ km/h}$ . ¿Cuál es la desaceleración constante mínima  $a_{\min}$  que debe aplicar el auto A para evitar la colisión?

### ■ Parte B: Cálculo de la Velocidad Máxima

Se sabe que un auto de pasajeros estándar, en asfalto seco, puede lograr una desaceleración máxima de  $a = 8,8 \text{ m/s}^2$ . Si el conductor mantiene una distancia de seguridad de  $D = 25 \text{ m}$  con el auto de adelante, ¿cuál es la diferencia de velocidad máxima  $\Delta v_{\max} = v_1 - v_2$  que puede haber entre ellos para que el accidente sea evitable? Exprese el resultado en km/h.

### 4.5.1. Solución Detallada

#### A) Modelo Matemático General

Primero, convertimos todas las velocidades a m/s:  $v_1 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$   $v_2 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$

Establecemos el origen en la posición inicial del auto A.

- Posición del auto A:  $x_A(t) = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2$

- Posición del auto B:  $x_B(t) = D + v_2 t$

La colisión ocurre si  $x_A(t) = x_B(t)$  para algún tiempo  $t > 0$ .

$$v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = D + v_2 t$$

Reordenando en la forma de una ecuación cuadrática  $At^2 + Bt + C = 0$ :

$$\left(\frac{1}{2}a\right)t^2 + (v_2 - v_1)t + D = 0$$

Para que la colisión se evite, esta ecuación no debe tener soluciones reales para el tiempo  $t$ , lo que significa que su discriminante ( $\Delta = B^2 - 4AC$ ) debe ser negativo. El caso límite (un "toque") es cuando el discriminante es cero.

$$\Delta = (v_2 - v_1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}a\right)(D) < 0$$

$$(v_1 - v_2)^2 - 2aD < 0$$

Esta nos da la condición de seguridad general:

$$(v_1 - v_2)^2 < 2aD$$

#### B) Solución a la Parte A

Usamos la condición límite para encontrar la aceleración mínima. Sea  $\Delta v = v_1 - v_2 = 30 - 20 = 10 \text{ m/s}$ .

$$a > \frac{(\Delta v)^2}{2D}$$
$$a_{min} = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{2(50 \text{ m})} = \frac{100}{100} = 1 \text{ m/s}^2$$

El auto A debe desacelerar a un mínimo de  $1,0 \text{ m/s}^2$  para evitar la colisión.

#### C) Solución a la Parte B

Usamos la misma condición de seguridad, pero ahora la incógnita es  $\Delta v$ .

$$(\Delta v)^2 < 2aD$$

Buscamos la diferencia de velocidad máxima, que corresponde al caso límite:

$$\Delta v_{max} = \sqrt{2aD}$$

Sustituimos los valores dados:  $a = 8,8 \text{ m/s}^2$  y  $D = 25 \text{ m}$ .

$$\Delta v_{max} = \sqrt{2(8,8)(25)} = \sqrt{440} \approx 20,98 \text{ m/s}$$

Finalmente, convertimos este resultado a km/h:

$$20,98 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \approx 75,5 \text{ km/h}$$

Si el conductor mantiene una distancia de 25 metros, la diferencia de velocidad no debe superar los 75,5 km/h para que una frenada de emergencia sea efectiva.

## Capítulo 5

# Simulaciones Computacionales - Avanzado

### 5.1. Sólido revolución 2: Calculando la velocidad en varias pistas

Extendiendo el análisis del Problema 4, investigaremos la velocidad  $v$  requerida para que un objeto de masa  $m$  describa una trayectoria circular horizontal de radio  $r$  a una altura constante  $h$  en el interior de **diferentes superficies de revolución** lisas, entre ellas:

- A) Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)
- B) Parábola en Rotación (Paraboloide)
- C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)
- D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

Para la siguiente actividad, considera;

#### ■ A) Parte Geométrica

En el caso **anterior**, teníamos la relación geométrica clave

$$\tan \theta = \frac{r}{h}$$

**En este caso**, necesitaremos:

1. Encontrar la relación geométrica entre el radio  $r$  y la altura  $h$ .
2. Determinar  $\tan(\phi)$  en función de la geometría de la superficie en el punto  $(r, h)$ .  
El ángulo  $\phi$  que la normal forma con la vertical es tal que

$$\tan(\phi) = \left| \frac{dr}{dh} \right|.$$

Asumiremos que  $h$  se mide desde el punto más bajo de la superficie de revolución (vértice), y el eje de simetría es vertical.

## ■ B) Parte Física: Leyes de Newton

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de movimiento circular son las mismas que en el Problema 4. Sea  $\phi$  el ángulo que forma la fuerza normal  $N$  (perpendicular a la superficie) con la vertical.

$$N \cos(\phi) = mg \quad (A)$$

$$N \sin(\phi) = \frac{mv^2}{r} \quad (B)$$

Dividiendo (B) por (A), obtenemos:

$$\tan(\phi) = \frac{v^2}{gr} \implies v^2 = gr \tan(\phi) \implies \boxed{v = \sqrt{gr \tan(\phi)}}$$

## ■ Tu Tarea

Repitiendo los pasos del problema anterior, para

- A) Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)
- B) Parábola en Rotación (Paraboloide)
- C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)
- D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

desarrolle:

1. Despeja la velocidad  $v$  en términos de  $g$ ,  $h$  y  $\theta$ .
2. Una vez con la velocidad necesaria  $v(g, h, \theta)$ , responde:
  - a) ¿Qué tipo de curva describe la trayectoria del bloque en el espacio tridimensional?
  - b) ¿De qué parámetros realmente depende la velocidad?
  - c) Entregue casos reales en los que esta superficie es pertinente.

### 5.1.1. A): Circunferencia en Rotación (Tazón Esférico)

Una circunferencia de radio de curvatura  $R_{\text{curv}}$  que rota alrededor de un diámetro vertical genera una esfera. Consideramos el movimiento en la **mitad inferior** de un tazón esférico de radio  $R_{\text{curv}}$ , con el vértice en  $h = 0$ .

#### Parte Geométrica (con cálculo diferencial)

La ecuación de la circunferencia generatriz (en el plano  $rh$ , con origen en el vértice inferior de la esfera) es

$$r^2 + (h - R_{\text{curv}})^2 = R_{\text{curv}}^2.$$

Esto se simplifica a

$$r^2 = 2hR_{\text{curv}} - h^2.$$

Entonces, el radio de la trayectoria circular es

$$r = \sqrt{2hR_{\text{curv}} - h^2}.$$

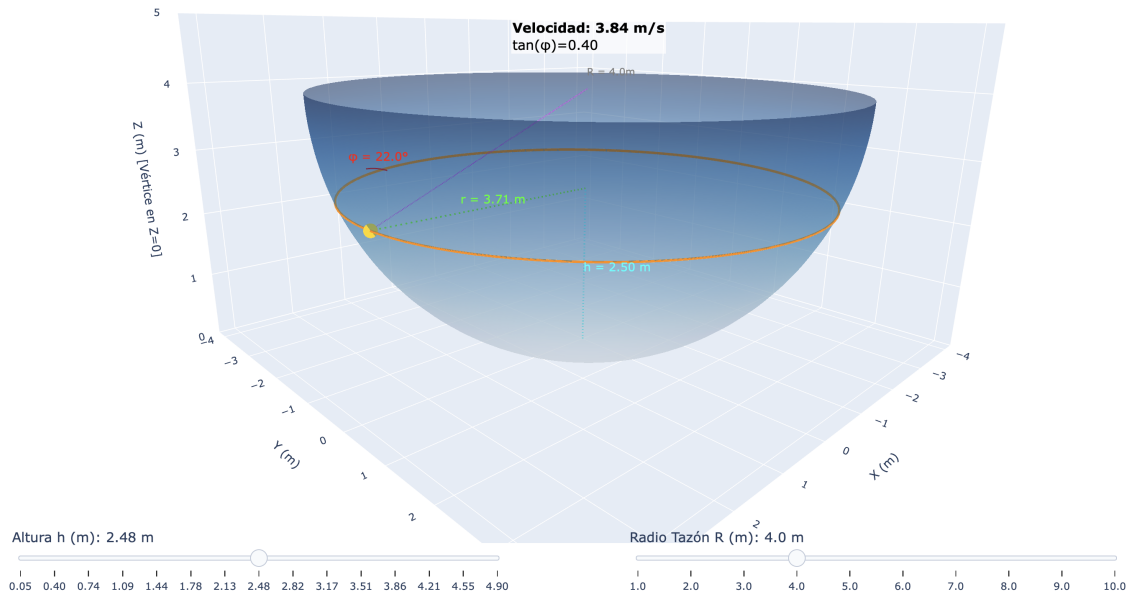


Figura 5.1: Visualización esfera 3D usando Plotly con Python.

Para encontrar  $\tan(\phi) = \left| \frac{dr}{dh} \right|$ , diferenciamos  $r^2 = 2hR_{\text{curv}} - h^2$  respecto a  $h$ :

$$2r \frac{dr}{dh} = 2R_{\text{curv}} - 2h \implies \frac{dr}{dh} = \frac{R_{\text{curv}} - h}{r}.$$

Como  $h < R_{\text{curv}}$  en la mitad inferior del tazón,  $R_{\text{curv}} - h > 0$ . Si  $r > 0$ , entonces

$$\tan(\phi) = \frac{R_{\text{curv}} - h}{r}.$$

## Parte Física

Reemplazamos este valor en nuestra expresión para la velocidad,

$$v^2 = gr \tan(\phi) = gr \left( \frac{R_{\text{curv}} - h}{r} \right) = g(R_{\text{curv}} - h)$$

$$\boxed{v = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}}$$

## Respuestas

- La curva que describe es una circunferencia.
- La velocidad depende de  $R_{\text{curv}}$  y  $h$ . Si  $h \rightarrow R_{\text{curv}}$  (el ecuador del tazón),  $v \rightarrow 0$ . En este punto, la normal sería horizontal, lo que no permitiría equilibrio vertical (a menos que  $g = 0$ ). Esta fórmula es válida para  $h < R_{\text{curv}}$ .

c)

- Una canica rodando en un tazón esférico de vidrio.
- Curvas peraltadas en pistas de bobsleigh o velódromos que tienen secciones esféricas.



### 5.1.2. B): Parábola en Rotación (Paraboloide)

Una parábola con vértice en el origen,  $r^2 = kh$  (donde  $k$  es una constante relacionada con la distancia focal  $p$  a la parábola  $x^2 = 4py$ , y está dada por  $k = 4p$ ), que rota alrededor de su eje vertical.

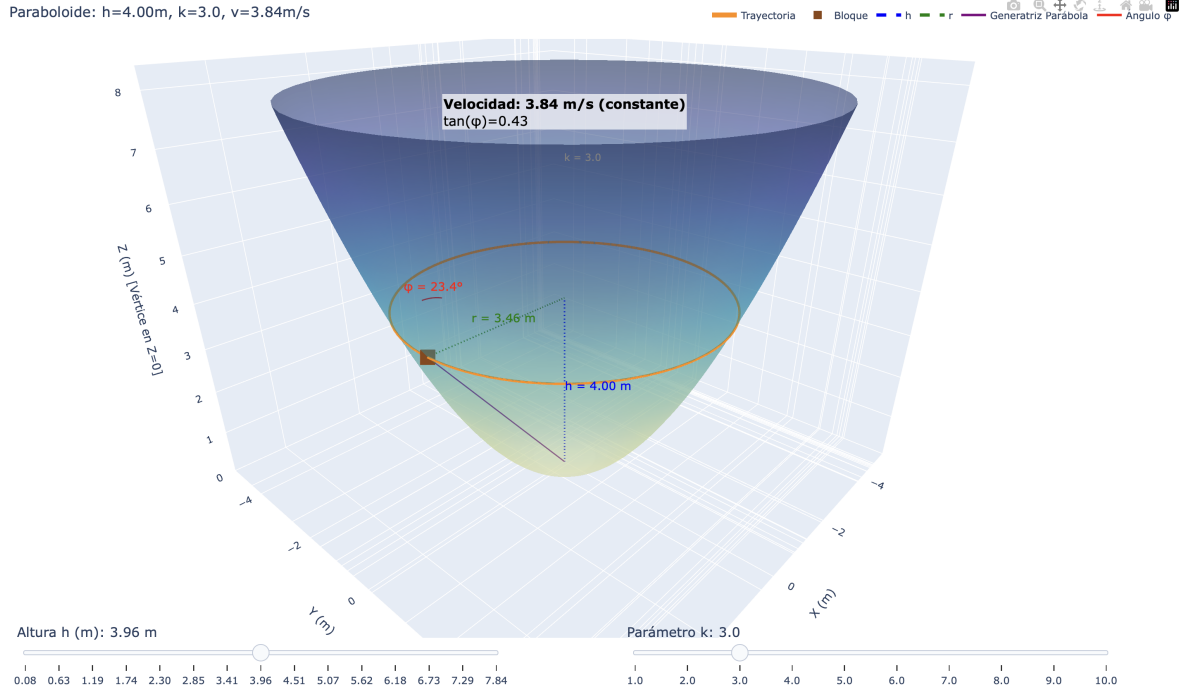


Figura 5.2: Visualización paraboloide 3D usando Plotly con Python.

#### Parte Geometría

Partimos de la ecuación  $r = \sqrt{kh}$ . Para encontrar  $\tan(\phi) = \left| \frac{dr}{dh} \right|$ , diferenciamos  $r^2 = kh$  respecto a  $h$ :

$$2r \frac{dr}{dh} = k \implies \frac{dr}{dh} = \frac{k}{2r}.$$

Entonces, asumiendo  $k > 0, r > 0$ ,

$$\tan(\phi) = \frac{k}{2r}.$$

#### Parte Física

Reemplazamos en la expresión para la velocidad,

$$v^2 = gr \tan(\phi) = gr \left( \frac{k}{2r} \right) = \frac{gk}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{gk}{2}}$$

## Respuestas

- a) Una circunferencia.
- b) La velocidad requerida es constante, independiente de la altura  $h$  y del radio  $r$ . Esto significa que si un objeto se mueve a esta velocidad específica, puede mantener una órbita circular a cualquier altura en el paraboloide.
- c)
  - La superficie de un líquido en un recipiente que rota a velocidad angular constante toma forma de paraboloide. Los telescopios de espejo líquido utilizan este principio.
  - Algunas antenas parabólicas o reflectores solares podrían servir de “pista” si fueran lisos.

### 5.1.3. C) Hipérbola en Rotación (Hiperboloide)

Consideramos una hipérbola  $\frac{r^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$  rotando alrededor del eje  $h$  (su eje conjugado). Aquí,  $a$  es el radio mínimo (su garganta) en  $h = 0$ . El vértice para  $h$  es  $h = 0$ .

#### Parte Geometría

De la ecuación de la hipérbola, despejamos  $r^2$ .

$$r^2 = a^2 \left( 1 + \frac{h^2}{b^2} \right) = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + h^2).$$

Para encontrar  $\tan(\phi) = \left| \frac{dr}{dh} \right|$ , diferenciamos  $r^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + h^2)$  respecto a  $h$ :

$$2r \frac{dr}{dh} = \frac{a^2}{b^2} (2h) \implies \frac{dr}{dh} = \frac{a^2 h}{b^2 r}$$

. Entonces, para  $h \geq 0$ ,

$$\tan(\phi) = \left| \frac{a^2 h}{b^2 r} \right|.$$

#### Parte Física

Reemplazamos en la expresión de velocidad:

$$v^2 = gr \tan(\phi) = gr \left( \frac{a^2 h}{b^2 r} \right) = \frac{ga^2 h}{b^2}$$

$$\boxed{v = \frac{a}{b} \sqrt{gh}}$$

## Respuestas

- a) Una circunferencia
- b) La velocidad sí depende de la altura  $h$  a la que esté la bola. Además, las características geométricas de la hipérbola son fundamentales: el parámetro  $a$  es lineal con la velocidad, y el parámetro  $b$  es inverso con la velocidad.
- c)
  - Las torres de enfriamiento de las centrales nucleares a menudo tienen forma de hiperboloide de una hoja por sus propiedades estructurales y de flujo de aire.
  - Algunas esculturas o elementos arquitectónicos modernos.

### 5.1.4. D) Elipse en Rotación (Elipsoide)

Consideramos una elipse  $\frac{r^2}{a_e^2} + \frac{(h-b_e)^2}{b_e^2} = 1$  rotando alrededor de su eje vertical. Aquí,  $a_e$  es el semieje horizontal (radio en el ecuador para un esferoide oblato o radio máximo si  $b_e > a_e$ ), y  $b_e$  es el semieje vertical. El centro de la elipse está en  $(0, b_e)$  y el vértice inferior en  $(0, 0)$  en el plano  $rh$ , por lo que  $0 \leq h \leq 2b_e$ .

#### Parte Geometría

La ecuación, una vez despejada  $V^2$  y simplificando, es

$$r^2 = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2hb_e - h^2).$$

Para encontrar  $\tan(\phi) = \left| \frac{dr}{dh} \right|$ , diferenciamos  $r^2 = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2hb_e - h^2)$  respecto a  $h$ :

$$2r \frac{dr}{dh} = \frac{a_e^2}{b_e^2}(2b_e - 2h) \implies \frac{dr}{dh} = \frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r}.$$

Entonces, para  $h < b_e$  (mitad inferior),  $b_e - h > 0$ ,

$$\tan(\phi) = \left| \frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r} \right|.$$

#### Parte Física

Reemplazamos en la expresión de la velocidad,

$$v^2 = gr \tan(\phi) = gr \left( \frac{a_e^2(b_e - h)}{b_e^2 r} \right) = \frac{ga_e^2(b_e - h)}{b_e^2}$$

$$\boxed{v = \frac{a_e}{b_e} \sqrt{g(b_e - h)}}$$

#### Respuestas

- a) Una circunferencia.
- b) Si  $a_e = b_e = R_{\text{curv}}$ , el elipsoide es una esfera. La fórmula se convierte en  $v = \frac{R_{\text{curv}}}{R_{\text{curv}}} \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)} = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}$ , que coincide nuestra respuesta anterior.
- c)

- Un tazón con forma de "lenteja" (esferoide oblato si  $a_e > b_e$ ).
- Las cúpulas de algunos edificios o tanques de almacenamiento pueden ser elipsoidales.

## 5.2. Conclusiones

- En el Problema 1, la función de velocidad del paracaidista bajo resistencia cuadrática es:

$$v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$$

y en  $t = T$  alcanza aproximadamente el 76.16 % de su velocidad terminal.

- En el Problema 2, se calculó la velocidad de impacto de un objeto en la Luna, considerando una aceleración gravitacional variable  $g(x) = g_0 R^2/x^2$ . Si se suelta desde una altura de  $4R$  sobre la superficie ( $x_i = 5R$ ), la velocidad de impacto ( $x_f = R$ ) es:

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{5}g_0 R} \approx 2,89 \text{ km/s}$$

Este problema ilustra la aplicación del cálculo integral para resolver problemas de cinemática con aceleración no constante.

- En el Problema 3, se determinó que la distancia horizontal al pie de la montaña es aproximadamente 41,5 km y su altura es de 5,47 km, utilizando trigonometría y resolución de sistemas de ecuaciones.
- En el Problema 4, se encontró que la velocidad necesaria para que un bloque se mantenga en movimiento circular uniforme a una altura constante  $h$  dentro de un cono liso con semiángulo vertical  $\theta$  está dada por:

$$v_{\text{cono}} = \tan \theta \sqrt{gh}$$

Esta velocidad depende de la aceleración gravitacional  $g$ , la altura  $h$ , y el ángulo del cono  $\theta$ , pero es independiente de la masa del bloque.

- En el Problema 5, se generalizó el análisis para diversas superficies de revolución, obteniendo las velocidades para mantenerse en órbita circular horizontal:

- Tazón Esférico (radio de curvatura  $R_{\text{curv}}$ ):  $v_{\text{esfera}} = \sqrt{g(R_{\text{curv}} - h)}$
- Paraboloide ( $r^2 = kh$ ):  $v_{\text{paraboloide}} = \sqrt{gk/2}$  (constante)
- Hiperboloide ( $r^2/a^2 - h^2/b^2 = 1$ , garganta  $a$ ):  $v_{\text{hiperboloide}} = \frac{a}{b} \sqrt{gh}$
- Elipsoide (semiejes  $a_e, b_e$ , vértice en  $h = 0$ ):  $v_{\text{elipsoide}} = \frac{a_e}{b_e} \sqrt{g(b_e - h)}$

En todos estos casos, la velocidad requerida es independiente de la masa del objeto y depende de la geometría de la superficie y la altura  $h$ . El caso del paraboloide es particularmente interesante por resultar en una velocidad constante independientemente de la altura.