Difusión en redes: Modelos epidemiológicos

Aníbal Olivera Morales

1. Modelamiento con matemática continua
    1. Las dos hipótesis
    2. SI Model
    3. Tiempo característico
    4. SIS Model
    5. Estado endémico y número reproductivo básico
    6. SIR Model

2. Modelamiento con matemática discreta
    1. *Degree block approximation*
    2. Predicciones para redes libres de escala
    3. Tasa de difusión
    4. Redes de contacto

Modelamiento con matemática continua

Modelación epidemiológica

- Hay una variada paleta de fenómenos que comúnmente son descritos como procesos de difusión en redes:

PHENOMENA	AGENT	NETWORK
Venereal Disease	Pathogens	Sexual Network
Rumor Spreading	Information, Memes	Communication Network
Diffusion of Innovations	Ideas, Knowledge	Communication Network
Computer Viruses	Malwares, Digital viruses	Internet
Mobile Phone Virus	Mobile Viruses	Social Network/Proximity Network
Bedbugs	Parasitic Insects	Hotel - Traveler Network
Malaria	Plasmodium	Mosquito - Human network

Modelación epidemiológica

- La representación matemática típica de una contagio se basa en cambios en *estados* básicos. **(Compartmentalization)**

  $S(t)$: individuos *susceptibles* en tiempo t.
  $I(t)$: individuos *infectados* en tiempo t.
  $R(t)$: individuos *recuperados* en tiempo t.

- Asumamos que cada individuo tiene la misma probabilidad de interactuar con persona infectada **(Homogenous mixing)**

SI Model

- Usemos como variables a la *proporción* de personas en cada estado

$$s(t) = S(t)/N, \quad i(t) = I(t)/N$$

- Por lo que la proporción de nuevos infectados es

$$\frac{di}{dt} = \beta \langle k \rangle s i$$

- Pero $s + i = 1$:

$$\frac{di}{dt} = \beta \langle k \rangle (1 - i) i$$ → Queremos la solución $i(t)$

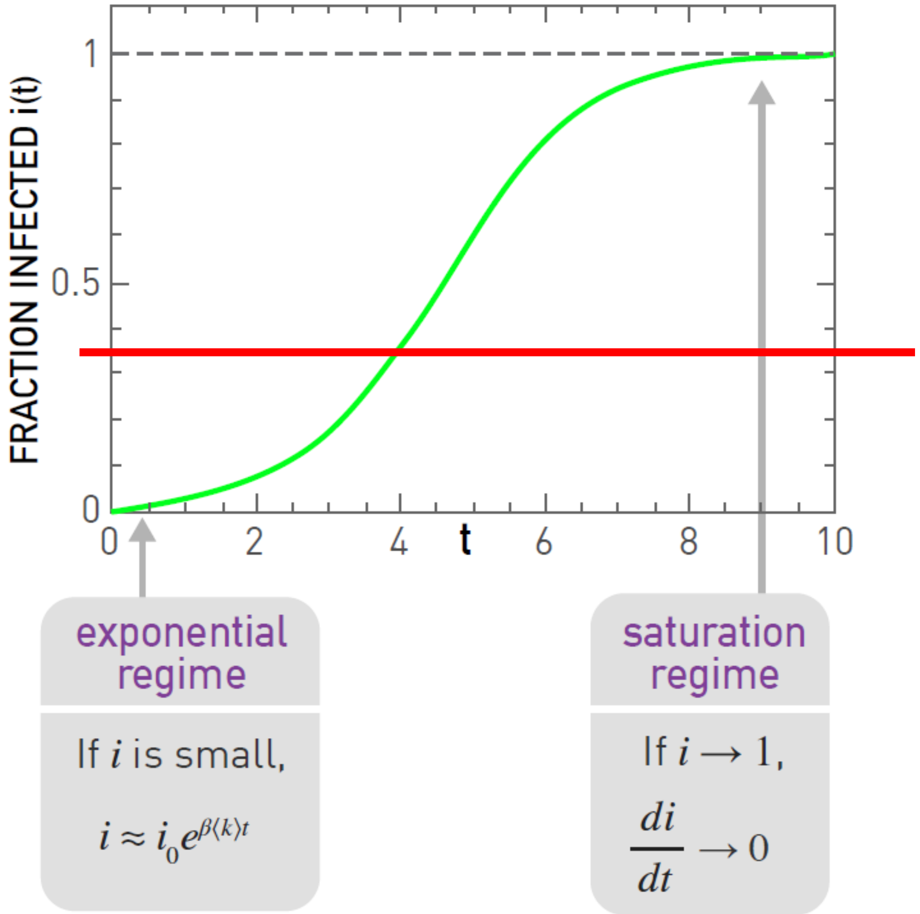
SI Model

- Solución del modelo SI

$$i(t) = \frac{i_0 e^{\beta \langle k \rangle t}}{1 - i_0 + i_0 e^{\beta \langle k \rangle t}}$$

- Existe un valor de *t* para el cual $i(t) \approx 1/e$, y lo llamamos *tiempo característico*

$$\tau = \frac{1}{\beta \langle k \rangle}$$



SIS Model

- Ya sea por el sistema inmune o por tratamiento, por lo general la gente se recupera. Vuelven al estado *S*.
- Supongamos que se recuperan a una tasa fija μ.
- El número de infectados en el tiempo *t*

$$\frac{di}{dt} = \underbrace{\beta\langle k\rangle i(1-i)}_{\text{Nuevos infectado}} - \underbrace{\mu i}_{\text{Vuelven a ser susceptibles}}$$

- Esta ecuación tiene solución

$$i = \left(1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}{1+Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}$$

SIS Model

- Solución del modelo SIS

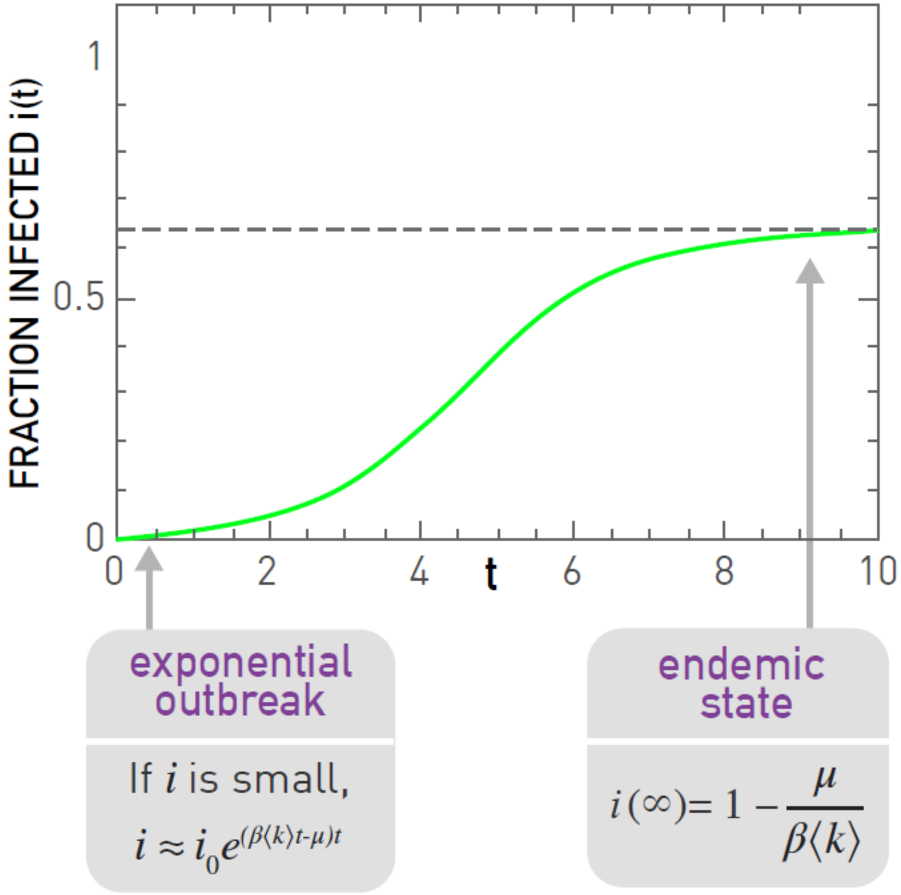
$$i = \left(1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}{1+Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}$$

- Estado **endémico** $\mu < \beta\langle k\rangle$

  El número de nuevos infectados es igual al de nuevos recuperados.

- Estado **libre de infección** $\mu > \beta\langle k\rangle$

  Exponencial negativa, no infección.



SIS Model

- Es decir que solo algunas infecciones son exitosas. ¿Qué gobierna esta diferencia?

$$\tau = \frac{1}{\beta\langle k\rangle - \mu} \longrightarrow \tau = \frac{1}{\mu\,(R_0 - 1)}$$

- Donde definimos el *basic reproductive number*

$$R_0 = \frac{\beta\langle k\rangle}{\mu}$$

- Si $R_0 > 1$, hay estado **endémico**.
- Si $R_0 < 0$, la infección muere.

DISEASE	TRANSMISSION	R_0
Measles	Airborne	12-18
Pertussis	Airborne droplet	12-17
Diptheria	Saliva	6-7
Smallpox	Social contact	5-7
Polio	Fecal-oral route	5-7
Rubella	Airborne droplet	5-7
Mumps	Airborne droplet	4-7
HIV/AIDS	Sexual contact	2-5
SARS	Airborne droplet	2-5
Influenza (1918 strain)	Airborne droplet	2-3

SIR Model

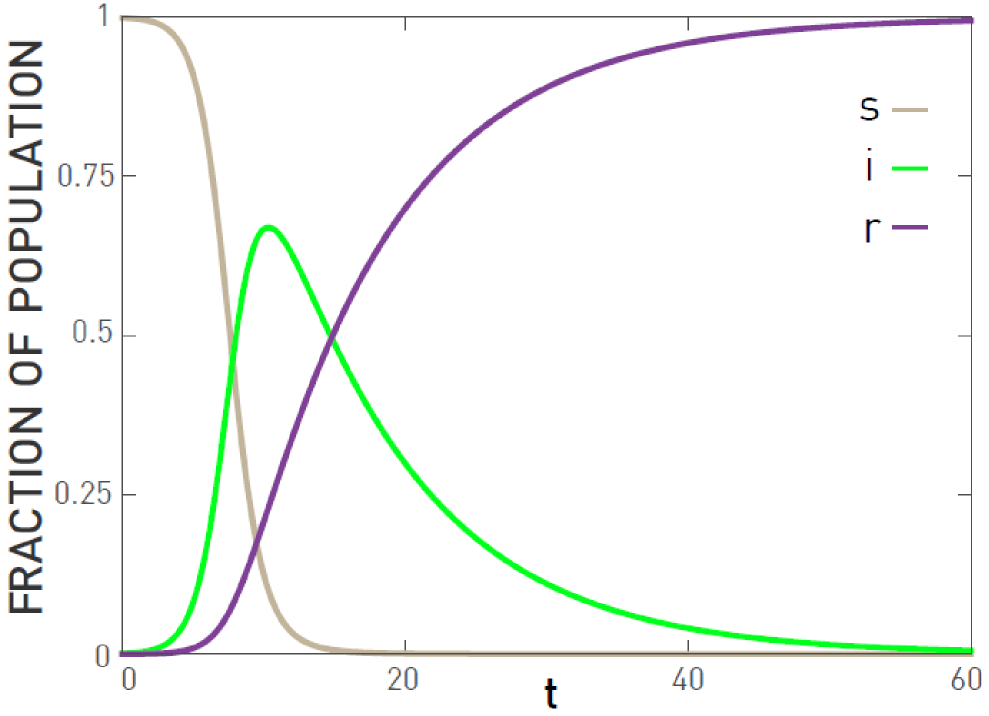
- Ahora hay recuperación. ~~O muerte.~~
- Supongamos que la tasa de recuperación promedio es μ.

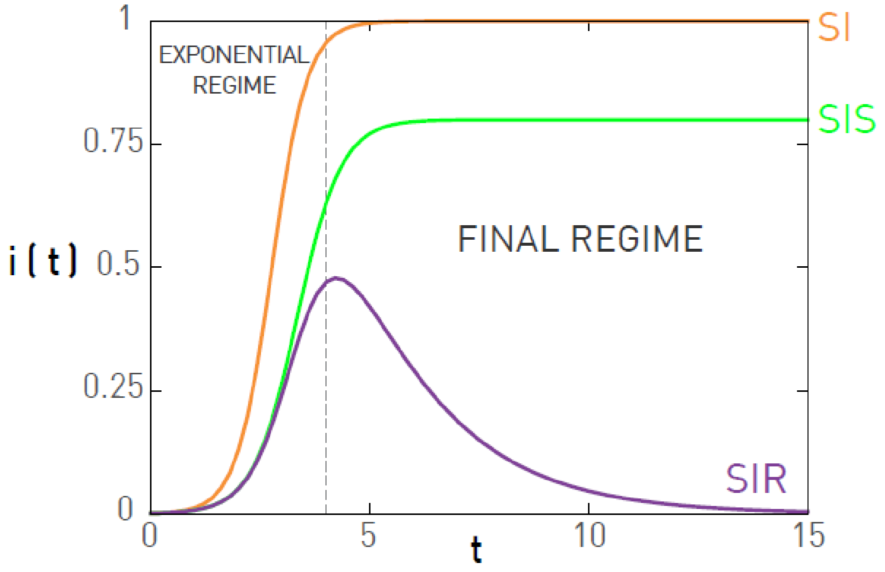
$$\frac{ds}{dt} = -\beta\langle k\rangle i(1-i-r)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta\langle k\rangle i(1-i-r) - \mu i$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu i$$

Recuperados





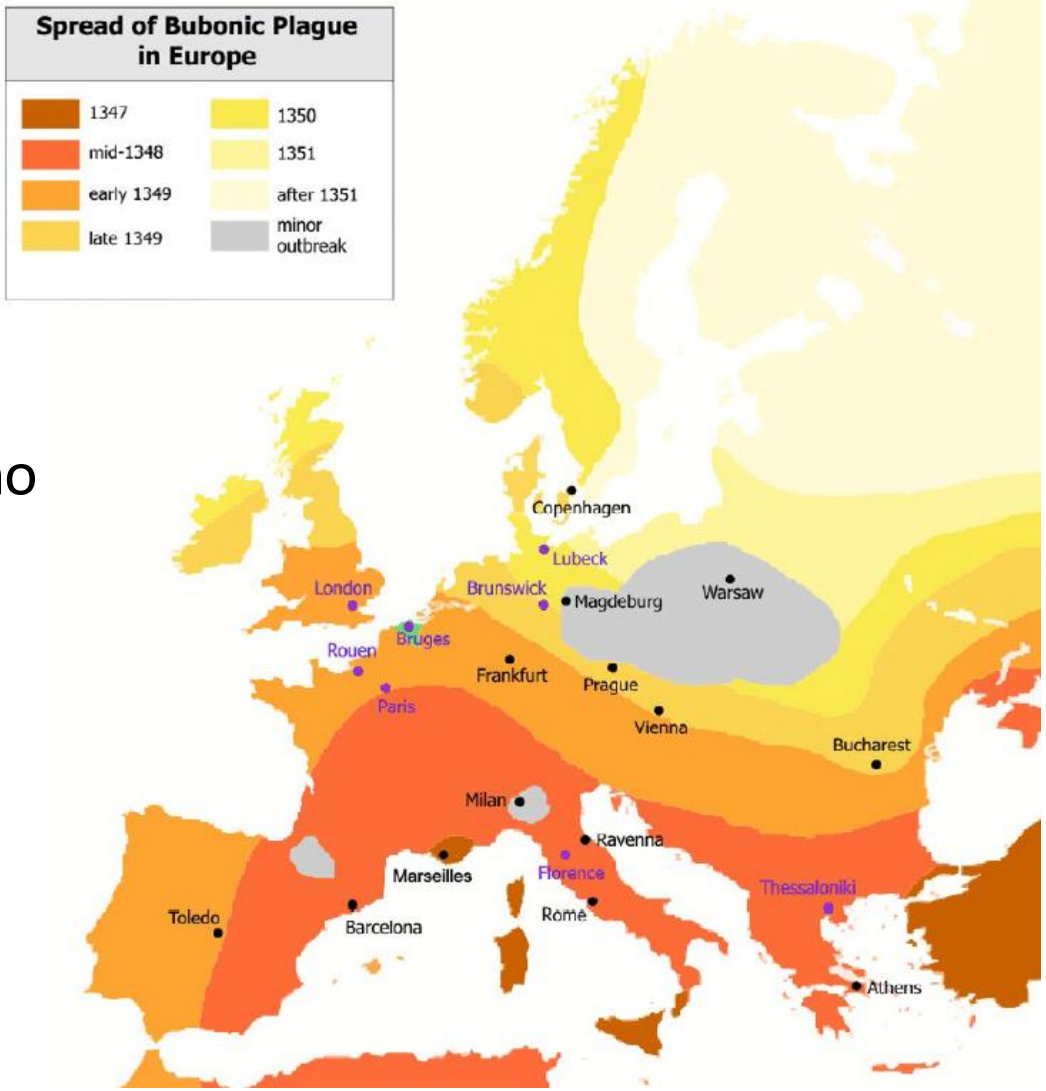
	SI	SIS	SIR
Exponential Regime: Number of infected individ-uals grows exponentially	$i = \frac{i_0 e^{\beta\langle k\rangle t}}{1-i_0+i_0 e^{\beta\langle k\rangle t}}$	$i = \left(1-\frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}{1+Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}$	No closed solution
Final Regime: Saturation at t→ =∞	$i(\infty)=1$	$i(\infty)=1-\frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$	$i(\infty)=0$
Epidemic Threshold: Disease does not always spread	No threshold	$R_0=1$	$R_0=1$

Modelamiento con matemática discreta

Difusión en redes

- Las suposiciones con las que estábamos trabajando son falsas:

  Un individuo puede transmitir un patógeno **solo a aquellos** con quienes entra en contacto, por lo tanto, los patógenos se propagan en una red compleja.



Difusión en redes

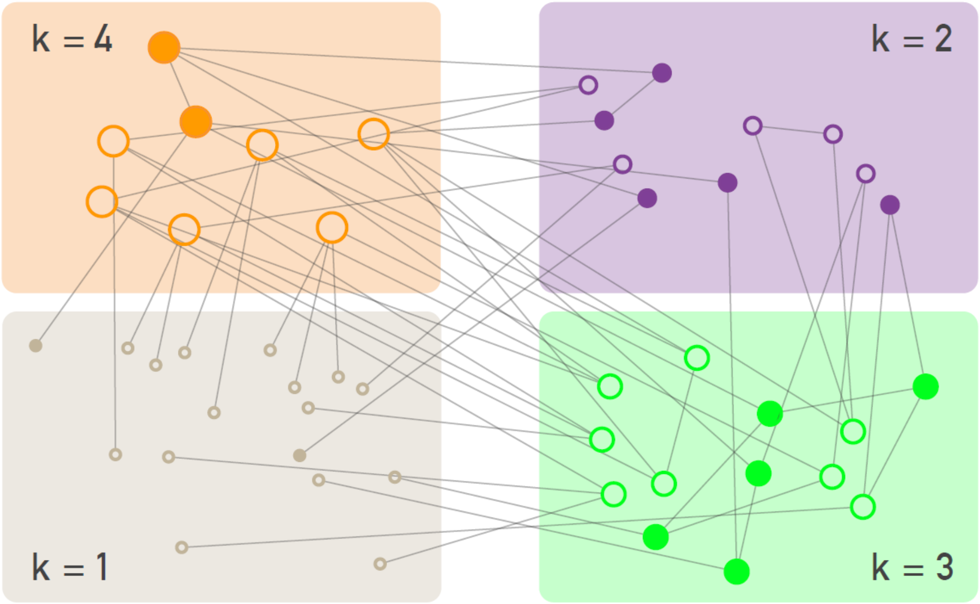
- En 2001, Pastor-Satorrás y Vestignani publicaron en *PRL* una forma de dar cuenta de la estructura de red, llamada *degree block approximation*

$$\frac{di}{dt} = \beta\langle k\rangle(1-i)i$$

$$\downarrow$$

$$\frac{di_k}{dt} = \beta k\,(1-i_k)\Theta_k$$

Fracción de vecinos infectados de un nodo con grado *k* susceptible



- Antes: 1 ecuación diferencial.
  Ahora: k_{max} ecuaciones diferenciales acopladas.

SI model – *degree block approximation*

$$\frac{di_k}{dt} = \beta k\,(1 - i_k)\Theta_k$$

- Para etapas tempranas → $$\frac{di_k}{dt} \approx \beta k \Theta_k$$
- Para redes sin correlación de grado → $$\frac{di_k}{dt} \approx \beta k i_0 \frac{\langle k \rangle - 1}{\langle k \rangle} e^{t/\tau^{\mathrm{SI}}},$$
- Donde

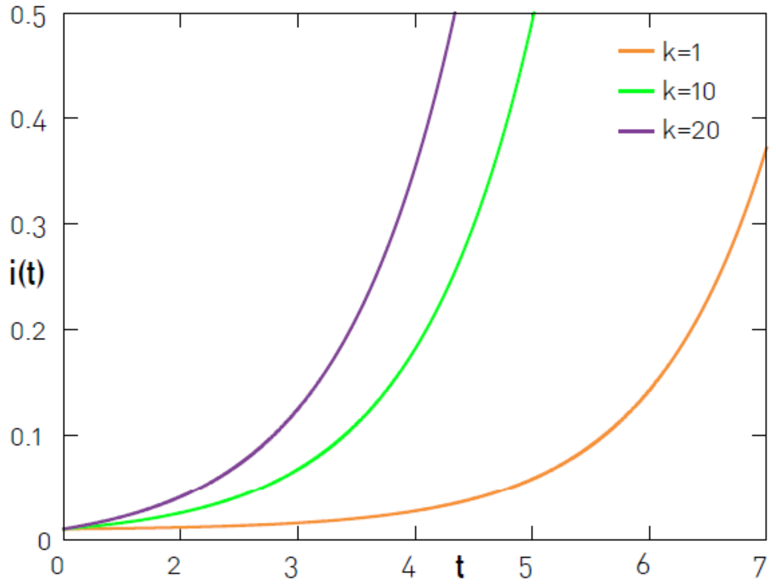
$$\tau^{\mathrm{SI}} = \frac{\langle k \rangle}{\beta\left(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle\right)}$$

Tiempo característico

SI model – *degree block approximation*

- La solución analítica tiene dependencia explícita en *k*

$$\frac{di_k}{dt} \approx \beta k i_0 \frac{\langle k \rangle - 1}{\langle k \rangle} e^{t/\tau^{\mathrm{SI}}}, \longrightarrow i_k = i_0 \left[1 + \frac{k(\langle k \rangle - 1)}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}\left(e^{t/\tau^{\mathrm{SI}}} - 1\right)\right]$$



Los *hubs* se enteran antes de las noticias

Redes libres de escala – *significado* de libre de escala

- Para una red con distribución *power-law*, su *n*-ésimo momento:

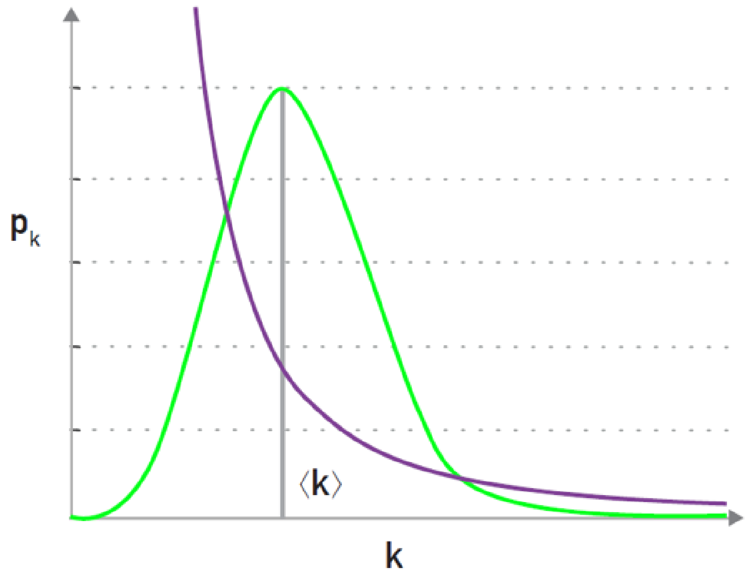
$$\langle k^n \rangle = C \frac{k_{\max}^{n-\gamma+1} - k_{\min}^{n-\gamma+1}}{n-\gamma+1}$$

- Queremos ver el comportamiento para $k_{max} \rightarrow \infty$

    - Todos los momentos con $n < \gamma - 1$ son finitos.
    - Todos los momentos con $n > \gamma - 1$ son infinitos.

- La desviación estándar corresponde al momento $n=2$.
- Típicamente, estas redes tienen $2 < \gamma < 3$.
- Por lo tanto, el grado de un nodo seleccionado aleatoriamente

$$k = \langle k \rangle \pm \sigma_k \in [^{-}\infty, ^{+}\infty]$$



Random Network
Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$
Scale: $\langle k \rangle$

Más pequeño que <*k*>

Scale-Free Network
Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$
Scale: none

SI model – *degree block approximation*

- Veamos el tiempo característico según topología de red

$$\tau^{\mathrm{SI}} = \frac{\langle k \rangle}{\beta\left(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle\right)}$$

- Para red Erdös-Rényi

$$\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle(\langle k \rangle + 1) \longrightarrow \tau_{\mathrm{ER}}^{\mathrm{SI}} = \frac{1}{\beta \langle k \rangle}$$

Exactamente lo que teníamos sin estructura de red!

- Para red Albert-Barábasi

$$\langle k^2 \rangle \to \infty \longrightarrow \tau_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{SI}} \to 0$$

La infección se difunde *instantáneamente!!!!*

- Otras redes inhomogéneas

$$\langle k^2 \rangle > \langle k \rangle(\langle k \rangle + 1) \longrightarrow \tau_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{SI}} \to \mathrm{Faster}$$

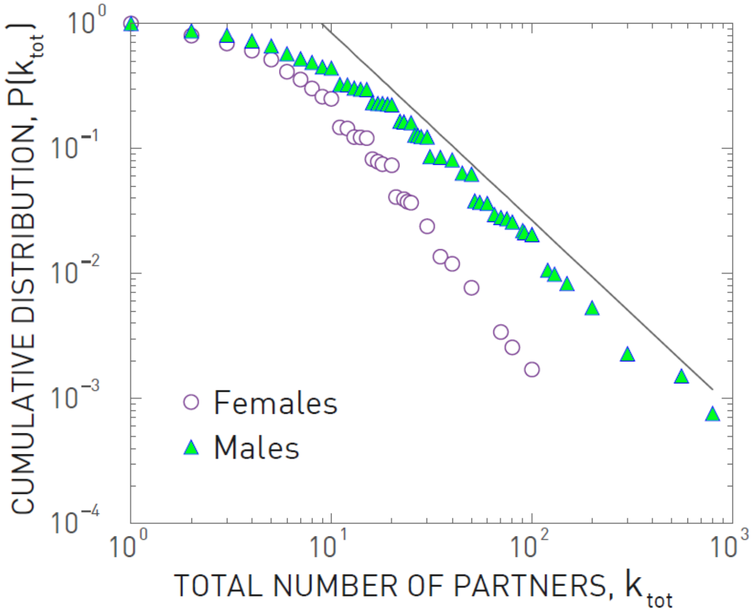
A mayor inhomogeneidad, mayor rapidez

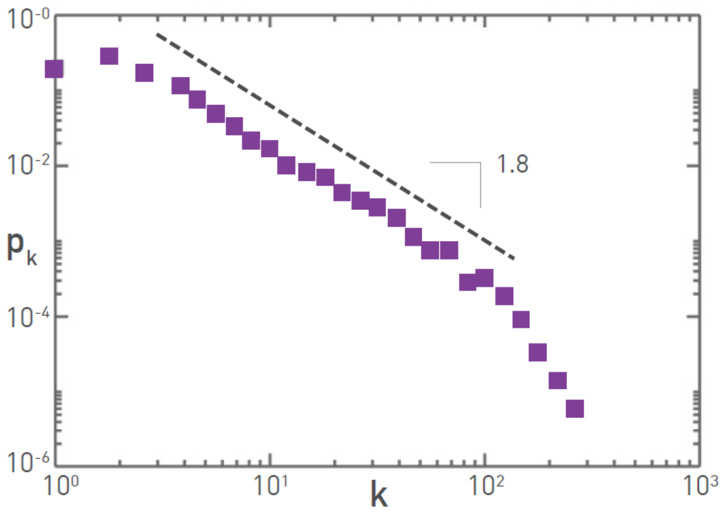
Dispersión redes aleatorias

Redes de contacto

NETWORK	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	γ_{in}	γ_{out}	γ
Internet	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
Power Grid	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
Mobile Phone Calls	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
Email	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-

Contactos sexuales





Contactos entre aeropuertos

Resumen – *degree block approximation*

MODEL	CONTINUUM EQUATION	τ	λ_c
SI	$\frac{di_k}{dt} = \beta[1-i_k]k\theta_k$	$\frac{\langle k\rangle}{\beta(\langle k^2\rangle - \langle k\rangle)}$	0
SIS	$\frac{di_k}{dt} = \beta[1-i_k]k\theta_k - \mu i_k$	$\frac{\langle k\rangle}{\beta\langle k^2\rangle - \mu\langle k\rangle}$	$\frac{\langle k\rangle}{\langle k^2\rangle}$
SIR	$\frac{di_k}{dt} = \beta s_k\theta_k - \mu i_k$ $s_k = 1 - i_l - r_k$	$\frac{\langle k\rangle}{\beta\langle k^2\rangle - (\mu+\beta)\langle k\rangle}$	$\frac{1}{\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} - 1}$

- Para red Albert-Barábasi

$$\lambda_c = 0$$

$$\tau = 0$$

- <*k*> no es suficiente para caracterizar el comportamiento.

- A mayor variedad de grados, mayor rapidez en la difusión.

Fin