

# Transición de fase de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless

Tópicos II

Aníbal Olivera Morales

Enero 2021



## A vuelo de pájaro

El presente trabajo es un popurrí de temas interesantes que bien podrían valer un texto completo por su propia cuenta. Comenzamos por una introducción a la **teoría estadística de campos**, incluida una sumersión a las integrales de camino y una pequeña comparación con la teoría cuántica de campos, pasando por la teoría del **Grupo de Renormalización**, que varios chismean debe ser una de los desarrollos más importantes de la física del siglo XX, hasta arribar a las **transiciones de fase de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless**, que surgió como una manera de explicar la existencia de películas dos dimensionales de superconductores, y que de paso fue la primera inserción de la **topología** en la física de materiales. Eso no es todo, solo adelantaré que la teoría de Landau-Ginzburg para las transiciones de fase no pudieron explicar este fenómeno de las películas superconductoras, así que se tuvo que esperar a la llegada de Berezinskii..

¿Qué tienen que ver todos esos temas? Simple: un superconductor bidimensional comparte andamiaje con un sistema de espines continuo, por lo que necesitamos un parámetro de orden continuo, cuya rama de estudio es llamada teoría estadística de campos, que hace uso de integrales de camino para llegar a las funciones de correlación. Por otro lado, el Grupo de Renormalización brinda una manera recursiva de ir desde la física microscópica a una macroscópica, fundamentalmente a través de las llamadas funciones beta. Como intuimos que la transición Berezinskii–Kosterlitz–Thouless se debe a los pormenores ocurridos a defectos topológicos microscópicos, entonces aplicando el Grupo de Renormalización podemos estudiar la macro-física, y *Voilà* terminamos desarrollando una manera de comprender transiciones de fase que no abarca la teoría de Landau-Ginzburg.



# Índice general

<b>A vuelo de pájaro</b>	<b>i</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría estadística de campos</b>	<b>3</b>
2.1. Resolviendo la integral de camino. . . . .	4
2.2. Integral de camino Gaussiana y correlación de Ornstein-Zernicke . . . . .	6
2.2.1. La longitud de correlación . . . . .	9
2.3. La analogía con Teoría Cuántica de Campos . . . . .	10
<b>3. Renormalización</b>	<b>13</b>
3.1. Breve discusión de Contratérminos . . . . .	13
3.2. El Grupo de Renormalización . . . . .	16
3.2.1. Construyendo GR, ¿cuál es la gran idea? . . . . .	16
3.3. Funciones Beta . . . . .	19
<b>4. Transición de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless</b>	<b>23</b>
4.1. Teoría de Landau, o la importancia de la simetría . . . . .	23
4.2. Bosones de Goldstone en el modelo XY . . . . .	24
4.3. Teorema de Mermin-Wagner . . . . .	25
4.4. Transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless . . . . .	26
4.4.1. Vórtices . . . . .	27
4.4.2. Transición BKT en simple . . . . .	28
4.4.3. Funciones beta . . . . .	30
4.5. Vanguardia en BKT . . . . .	34
<b>5. Referencias</b>	<b>37</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Gracias a la teoría de Landau, podemos conectar las transiciones de fase con las simetrías. Cuando enfriamos un líquido hasta congelarlo, lo que hacemos es romper la simetría rotacional y traslacional del líquido. Aunque esto suene un poco confuso, ya que un sólido con todos los átomos alineados en una red regular 'se ve' más simétrico que un líquido en el cuál los átomos van de aquí para allá por todo lugar, enfriar un líquido cambia el conjunto de transformaciones bajo la cual el sistema es simétrico: por ejemplo la traslación pasa de ser una simetría continua a una discreta.

No todas las transiciones de fase involucran un cambio de simetría, por ejemplo la transición líquido-gas. Se podría decir que no hay ninguna diferencia fundamental entre un gas muy denso y un líquido, por lo que la frontera entre un líquido y un gas está determinado por un punto crítico. Esto significa que podemos 'engañar' al sistema y amagar la transición de fase tomando el circuito ABCD (ver la figura 1.1). Por otro lado, puedes cruzar directamente la frontera de la fase e ir de A a D en línea recta, y observarás una aguda discontinuidad en las propiedades del agua que tienes en tu hervidor.

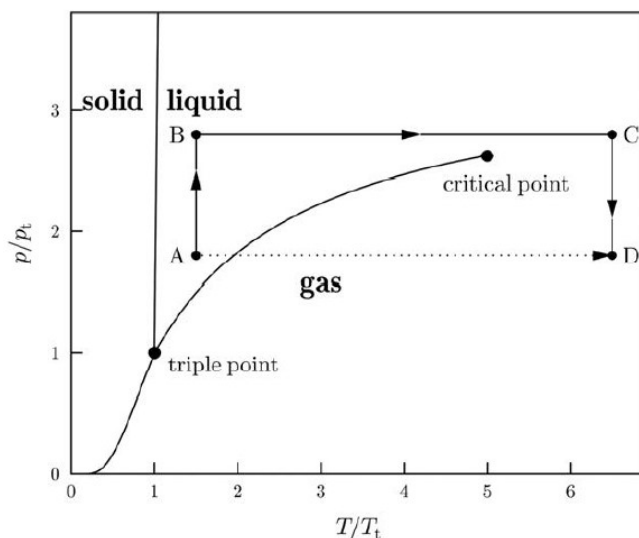


Figura 1.1: Diagrama de fase para una sustancia. Para evitar la transición de fase uno puede comenzar con presión y temperatura baja (A), presurizarlo (B), luego calentarlo (C) y finalmente despresurizarlo (D). Por otro lado puede comenzar en A y solo calentarlo hasta llegar a D a través de una transición de fase.

Sin embargo, en la transición sólido-líquido no se puede hacer el mismo truco, por lo que un cambio en la

simetría será una huella imborrable de la transición. En este sentido, la sustancia simplemente cuenta con aquella simetría que la caracteriza o **no** la tiene. Esto tiene su ventaja, especialmente en bajas temperaturas, donde sabemos que cualquier intento de cambiar la simetría de algún material implica una transición de fase violenta.

Genial, se podría pensar, con la teoría de Landau ya sabemos cómo estudiar cualquier fase (ya sea sólido, líquido, plasma, condensado de Bose-Einstein, etc.) de cualquier sistema en particular, ¿o no? Veremos que, debido al teorema de Mermin-Wagner, no deberíamos esperarnos materiales superfluidos en  $d = 2$  dimensiones. Sin embargo, los hay. ¿Cómo es esto posible? La respuesta involucra adentrarnos en el Grupo de Renormalización hasta arribar al premio Nobel de Física de 2016, otorgado a quienes detallaron un nuevo tipo de transición de fase, llamada **transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless** (o transición BKT), que ya no es caracterizada por la simetría sino por otro tipo de ingrediente: topología.

Por su parte, la naturaleza también es organizada por escalas. Las cosas pequeñas determinan el compartamiento de las cosas grandes, y no al revés. Pero un aspecto de la frase anterior rara vez es enfatizado: las cosas pequeñas afectan a las cosas grandes, pero no afectan a las realmente grandes. En cambio, solo afectan a las cosas un poco más grandes. Para terminar describiendo cosas realmente grandes se deberá repetir el proceso con todas las escalas predecesoras, y en cada escalón se perderá la información del escalón anterior. En física, este formalismo es conocido como **Grupo de Renormalización**, y aunque no acapara muchos artículos de divulgación científica, se puede argumentar que es uno de los avances más significativos de la física teórica en los últimos 50 años.

Estos dos conceptos -simetría y escala- fueron ejes para pensar los fundamentos de la física. Veremos..

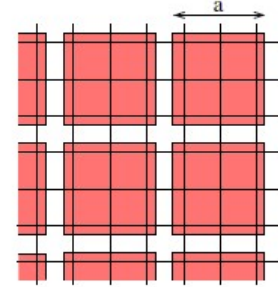


## Capítulo 2

# Teoría estadística de campos

La aproximación de Landau (en la que la configuración del modelo de Ising es reducida a un solo número  $m$ ) es demasiado simplificada, ya que no considera variaciones espaciales en el sistema y lo trata como homogéneo. La teoría de Landau-Ginzburg sí lo hace. La idea es simple: tomar el parámetro de orden  $m$  de la teoría de Landau y promoverlo a un *campo*  $m(\vec{x})$ , también llamado *parámetro de orden local*.

Para esbozar brevemente la idea detrás de este tratamiento, comencemos con una red. Dividimos esta red en varias cajas más grandes, de lado  $a$ , en un proceso que llamaremos **granulado**. En cada una de estas cajas grandes caben  $N'$  sitios en la red, por lo que podemos definir la magnetización promedio (que es comúnmente el parámetro de orden para el modelo de Ising) en cada caja:  $m(\vec{x}) = \frac{\sum s_i}{N'}$ , donde  $\vec{x}$  apunta al centro de cada caja. Naturalmente, para que  $m(\vec{x})$  sea efectivamente un campo, debemos suponer que el número de cajas  $N/N'$  es lo suficientemente grande como para considerar  $\vec{x}$  como un 'continuo'. Sin embargo,  $m(\vec{x})$  sigue careciendo de sentido en distancias sumamente pequeñas. De este modo, escribimos la función de partición como



$$Z = \sum_{\text{estados}} = \sum_{m(\mathbf{x})} \sum_{\{s_i\} | m(\mathbf{x})} e^{-\beta E[s_i]} := \sum_{m(\mathbf{x})} e^{-\beta F[m(\mathbf{x})]}$$

donde la notación  $\{s_i\} | m(\mathbf{x})$  significa que sumamos sobre todas las configuraciones de espines tal que respete la magnetización promedio  $m(\mathbf{x})$ . Esto nos permite definir una energía libre  $F[m(\mathbf{x})]$ , llamada **energía libre de Landau-Ginzburg** que es un *funcional*, es decir, devuelve un número por cada función  $m(\mathbf{x})$  que se ingresa. Una observación notable es que la función de partición suma sobre todas las posibles configuraciones de  $m(\mathbf{x})$ , el cual, si lo consideramos un *campo* auténtico, nos debería dar más bien una integral funcional, también conocida como **integral de camino** (o *path integral*, en inglés):

$$\sum_{m(\mathbf{x})} e^{-\beta F[m(\mathbf{x})]} \longrightarrow Z = \int \mathcal{D}m(\mathbf{x}) e^{-\beta F[m(\mathbf{x})]}$$

Esto nos dice que hay una integral por cada punto del espacio, es decir, debemos resolver infinitas integrales! La integral de camino no es más que la función de partición usual, pero que nos hace recordar conceptos de otras áreas de la física como teoría cuántica de campos, solo que esta vez sin las familiares variables como posición y momento, sino que con el campo  $m(\mathbf{x})$ . Esto nos hace pensar que estamos haciendo

mecánica estadística de campos.

Genial. Ahora, ¿qué es  $F[m(\mathbf{x})]$ ? o mejor, ¿qué podría ser? Desde un punto de vista microscópico, debemos exigir:

- Localidad: Un espín no puede afectar directamente a un espín en el otro lado de la muestra. Lo mismo debe ser cierto para  $m(\mathbf{x})$ , por lo que la energía libre debe ser de la forma

$$F[m(\mathbf{x})] = \int d^d x f[m(\mathbf{x}), \nabla m(\mathbf{x})] \quad (2.1)$$

donde  $f[m(\mathbf{x}), \nabla m(\mathbf{x})]$  es una función local.

- Simetría  $\mathbf{Z}_2$ : El modelo de Ising original respeta esta simetría para  $B = 0$ , por lo que es inherente en la descripción de *granulado*, de manera que  $f$  debería ser invariante bajo

$$m(\mathbf{x}) \rightarrow -m(\mathbf{x})$$

- Analiticidad: la energía libre debe ser una función analítica de  $m(\mathbf{x})$  y de sus derivadas. De esta manera podemos expandirlo en series de Taylor y atender solo a las primeras potencias de  $m$ .

Además, solo nos enfocaremos a situaciones donde  $m(\mathbf{x})$  varía lentamente en el espacio, en particular variará solo *entre* las cajas de largo  $a$ . Esto significa que los términos  $\nabla m$  son más importantes que los términos  $a\nabla^2 m$ .

Con esas consideraciones atendidas, podemos escribir una forma general para la energía libre<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} F[m(\mathbf{x})] &= \int d^d x f[m(\mathbf{x}), \nabla m(\mathbf{x})] \\ &= \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \alpha_2(T) m^2 + \frac{1}{4} \alpha_4(T) m^4 + \frac{1}{2} \gamma(T) (\nabla m)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Planteadas así las cosas, solo nos resta resolver la integral funcional. Se ve difícil, y lastimosamente la realidad no es mucho mejor que la apariencia.

## 2.1. Resolviendo la integral de camino.

Debemos resolver

$$Z = \int \mathcal{D}m(\mathbf{x}) e^{-\beta F[m(\mathbf{x})]}, \quad (2.2)$$

donde

$$F[m(\mathbf{x})] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \alpha_2(T) m^2 + \frac{1}{4} \alpha_4(T) m^4 + \frac{1}{2} \gamma(T) (\nabla m)^2 + \dots \right]. \quad (2.3)$$

Para acercarnos aún más a la notación común de integrales de camino, haremos las sustituciones

$$m(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

$$\alpha_2(T) \rightarrow \mu^2(T) \quad (2.5)$$

$$\alpha_4(T) \rightarrow g(T), \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Notar que se comienza con términos cuadráticos en el gradiente, de lo contrario se violaría la simetría rotacional del sistema.

por lo que entonces la energía libre 2.3 pasa a ser

$$F[\phi(x)] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \gamma(T) (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2(T) \phi^2 + \frac{1}{4} g(T) \phi^4(T) + \dots \right]. \quad (2.7)$$

En términos generales, la integral de camino es *sencilla* de hacer si  $F[\phi(x)]$  es cuadrática en  $\phi$ , es *posible* de hacer si  $F[\phi(x)]$  solo representa pequeñas correcciones al campo medio, y típicamente *imposible* de hacer sin métodos numéricos si aquellas correcciones son importantes. Esbozaremos su solución sencilla y, luego de dar un paseo por el grupo de Renormalización, veremos cómo luce la solución posible.

Por ahora quedémonos solo hasta orden cuadrado en  $\phi$ , es decir

$$F[\phi(x)] = \frac{1}{2} \int d^d x (\gamma \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \mu^2 \phi^2), \quad (2.8)$$

pero no hay que perder de vista que a medida que bajamos la temperatura<sup>2</sup>,  $\mu^2 \rightarrow 0$ , por lo que no podemos despreciar términos de mayor orden al acercarnos al punto crítico. Es decir, resolver 2.8 no dirá nada acerca del comportamiento cerca del punto crítico. Para obtener la función de partición de la energía libre 2.8 utilizamos un viejo truco: trabajar en el espacio de Fourier. Escribimos la transformada de Fourier de la magnetización como

$$\phi_{\mathbf{k}} = \int d^d x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

Como  $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ , entonces los modos de Fourier obedecen  $\phi_{\mathbf{k}}^* = \phi_{-\mathbf{k}}$ . Debemos recordar que, aunque estamos pensando a  $\phi$  como un campo continuo, él emerge de una red, por lo que no puede variar en distancias arbitrarias. Esto significa que los modos de Fourier deben anularse para algún valor de momentum  $\mathbf{k}$  lo suficientemente alto

$$\phi_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{for } |\mathbf{k}| > \Lambda = \frac{\pi}{a},$$

donde  $\Lambda$  es llamado el *cut-off* ultravioleta. Para traer de vuelta al campo original, establecemos un volumen  $V = L^d$  y cuantizamos los modos, por lo que tenemos

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \quad \longrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}$$

Notar que como cuantizamos  $\mathbf{k}$ , no hay integral en la expresión para  $\phi(\mathbf{x})$ . Sin embargo, si hacemos  $V \rightarrow \infty$ , entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}} \quad (2.10)$$

De esta manera, la energía libre a orden cuadrático queda

$$F[\phi_{\mathbf{k}}] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int d^d x (-\gamma \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} (-\gamma \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \int d^d x e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} (-\gamma \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\gamma k^2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} \quad (2.14)$$

<sup>2</sup>Recordemos que en el texto anterior establecimos  $\alpha_2 \sim (T - T_c)$ .

Pero  $\phi_{\mathbf{k}}^* = \phi_{-\mathbf{k}}$ , por lo que

$$F[\phi_{\mathbf{k}}] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\gamma k^2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}^* \quad (2.15)$$

La gracia de trabajar en el espacio de Fourier es que trabajamos cada modo individualmente, es decir diagonalizamos el operador  $-\gamma \nabla^2 + \mu^2$ .

Por último, para trabajar completamente en el espacio de Fourier debemos cambiar la manera en que integramos. Originalmente había una integral sobre  $\phi(\mathbf{x})$  por cada valor de  $\mathbf{x}$ . Ahora integraremos sobre los modos de Fourier  $\phi_{\mathbf{k}}$  y  $\phi_{\mathbf{k}}^*$ , multiplicando la contribución de cada  $\mathbf{k}$ . Entonces,

$$\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{N} \prod_{\mathbf{k}} \int d\phi_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}}^*, \quad (2.16)$$

donde  $\mathcal{N}$  es solo una constante de normalización que puede echarse al bolsillo.

Genial, por ahora, a orden cuadrado, tenemos

$$Z = \int \mathcal{D}m(\mathbf{x}) e^{-\beta F[m(\mathbf{x})]} \rightarrow Z = \prod_{\mathbf{k}} \mathcal{N} \int d\phi_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}}^* \exp\left(-\frac{\beta}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\gamma k^2 + \mu^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2\right) \quad (2.17)$$

## 2.2. Integral de camino Gaussiana y correlación de Ornstein-Zernicke

Hasta ahora tenemos la energía libre a orden cuadrado 2.8 escrito en el espacio de Fourier, como se ve en 2.15. Recordemos que una manera sencilla de afrontarnos a una integral de camino es mediante una teoría similar a la del campo medio, es decir, sin comportamientos críticos. A esto le llamamos Integral de camino Gaussiana. Al involucrar un campo magnético  $B(\mathbf{x})$ , podemos estudiar qué grado de correlación tiene el sistema de acuerdo a una separación  $\mathbf{r}$ , ya que el campo perturba el sistema y solo entonces podemos ver cómo éste reacciona. Como solo trabajamos (en el espacio de Fourier) a orden cuadrado, las funciones de correlación serán válidas lejos del punto crítico. La forma funcional de la función de correlación dirá mucho acerca del sistema: si bajo distintos límites la función de correlación cambia, hay indicios suficientes como para suponer fases distintas en aquellos límites. Por estos motivos, es interesante añadir el campo magnético  $B(\mathbf{x})$  y trabajar con una generalización de 2.15, la cual solo es la energía libre de Landau-Ginzburg con un campo externo<sup>3</sup> en el espacio de Fourier:

$$F[\phi_{\mathbf{k}}] = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (\gamma k^2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} - B_{-\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \right].$$

Haciendo el cambio

$$\hat{\phi}_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}} - \frac{B_{\mathbf{k}}}{\gamma k^2 + \mu^2}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} &= \left( \hat{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{B_{\mathbf{k}}}{\gamma k^2 + \mu^2} \right) \left( \hat{\phi}_{-\mathbf{k}} + \frac{B_{-\mathbf{k}}}{\gamma k^2 + \mu^2} \right) = |\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{2B_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}}{\gamma k^2 + \mu^2} + \frac{|B_{\mathbf{k}}|^2}{(\gamma k^2 + \mu^2)^2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (\gamma k^2 + \mu^2) \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}} - B_{-\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (\gamma k^2 + \mu^2) |\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 + B_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \frac{|B_{\mathbf{k}}|^2}{(\gamma k^2 + \mu^2)} - B_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}} - \frac{|B_{\mathbf{k}}|^2}{(\gamma k^2 + \mu^2)} \\ &= \frac{1}{2} (\gamma k^2 + \mu^2) |\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{1}{2} \frac{|B_{\mathbf{k}}|^2}{\gamma k^2 + \mu^2}, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Por lo que no hay rompimiento espontáneo de simetría, como sí lo había en la sección 2.3. de las notas de Tópicos I, en donde  $B(\mathbf{x}) = 0$

por lo que podemos escribir la energía libre como

$$F[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}] = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{2} (\gamma k^2 + \mu^2) \hat{\phi}_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|B_{\mathbf{k}}|^2}{\gamma k^2 + \mu^2} \right],$$

que es bastante similar a 2.15, solo que ahora da cuenta del campo magnético de una manera cómoda. La primera parte es equivalente a 2.17, por lo que podemos escribir la función de partición con dos pedazos, y uno será independiente de la magnetización, por lo que no contribuirá a la función de correlación. En efecto, si consideramos la función de correlación dada por la expresión<sup>45</sup>

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta^2 \log Z}{\delta B(\mathbf{x}) \delta B(\mathbf{y})} \Big|_{B=0}$$

entonces, la parte  $e^{-\beta F_{\text{thermo}}}$  de la energía libre

$$\begin{aligned} Z[B(\mathbf{x})] &= \prod_{\mathbf{k}} \int d\hat{\phi}_{\mathbf{k}} d\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^* e^{-\beta F[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}]} \\ &= e^{-\beta F_{\text{thermo}}} \exp \left( \frac{\beta}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{|B_{\mathbf{k}}|^2}{\gamma k^2 + \mu^2} \right) \end{aligned}$$

no contribuirá, pues obtendremos  $\frac{e^{-\beta F_{\text{thermo}}}}{e^{-\beta F_{\text{thermo}}}}$  al derivar  $\log Z$ . Para volver al espacio real, aplicamos una transformación de Fourier inversa,

$$Z[B(\mathbf{x})] = e^{-\beta F_{\text{thermo}}} \exp \left( \frac{\beta}{2} \int d^d x d^d y B(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) B(\mathbf{y}) \right)$$

donde

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\gamma k^2 + \mu^2} \quad (2.18)$$

por lo que la función de correlación de dos puntos es

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{\beta^2} \frac{\beta}{2} \frac{\delta^2}{\delta B(\mathbf{x}) \delta B(\mathbf{y})} \int d^d x d^d y B(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) B(\mathbf{y}) \Big|_{B=0} = \frac{G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\beta}$$

Un punto a tomar en cuenta es que la función de correlación *es* una función de Green. Ahora solo debemos calcular la integral 2.18 para conocer la correlación. Lo primero a tomar en cuenta es la simetría rotacional,  $G(\mathbf{x}) = G(|\mathbf{x}|) = G(r)$ . Por otro lado, podemos introducir una escala de longitud,

$$\xi^2 = \frac{\gamma}{\mu^2}$$

llamada **longitud de correlación**, de la que hablaremos más adelante. Por lo tanto la integral a resolver es

$$G(r) = \frac{1}{\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 + 1/\xi^2}$$

<sup>4</sup>ver página 40, *Statistical Field Theory, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos*, David Tong.

<sup>5</sup>Para comprenderla de mejor manera, bastará mencionar que el valor de expectación de  $\phi$  viene dado en última instancia por una derivada funcional (es decir, que deriva el argumento de la integral) del logaritmo de  $Z$ :

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle_B = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(\mathbf{x}) e^{-\beta F} = \frac{1}{\beta Z} \frac{\delta Z}{\delta B(\mathbf{x})} = \frac{1}{\beta} \frac{\delta \log Z}{\delta B(\mathbf{x})}.$$

Obtener una solución analítica de esta integral es complicado e innecesario. Solo nos interesa su comportamiento en casos límite. Para estudiarlos, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + 1/\xi^2} &= \int_0^\infty dt e^{-t(k^2 + 1/\xi^2)} \\ \rightarrow G(r) &= \frac{1}{\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikr} \int_0^\infty dt e^{-t(k^2 + 1/\xi^2)} \\ &= \frac{1}{\gamma} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dt e^{-t(k^2 + 1/\xi^2)} e^{-r^2/4t - t/\xi^2} \\ &= \frac{1}{\gamma(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-d/2} e^{-r^2/4t - t/\xi^2} \end{aligned}$$

La expresión integral para la función de Green tiene la forma funcional de una función de Bessel, por lo que podemos importar los comportamientos límite. Hasta ahora sabemos que

$$G(r) \sim \int_0^\infty dt e^{-S(t)} \quad \text{donde} \quad S(t) = \frac{r^2}{4t} + \frac{t}{\xi^2} + \frac{d}{2} \log t$$

es decir, depende de la distancia a la que miremos  $r$ , de la longitud de correlación  $\xi$  y de la dimensión en la que trabajemos  $d$ . En particular, nos interesa ver cómo se comporta esta integral para distintos valores de  $r$ . Para ello, expandimos  $S(t)$  en Taylor y proponemos un punto de silla  $t_\star$  tal que  $S'(t_\star) = 0$ .

$$S'(t_\star) = 0 \Rightarrow t_\star = \frac{\xi^2}{2} \left( -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{r^2}{\xi^2}} \right)$$

Finalmente, la integral se reduce a

$$G(r) \sim \int_0^\infty dt e^{-S(t_\star) + S'(t_\star)(t - t_\star) + \frac{1}{2} S''(t_\star)(t - t_\star)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2S''(t_\star)}} e^{-S(t_\star)}$$

por lo que podemos averiguar su comportamiento para valores interesantes de  $r$ :

■  $r \ll \xi$ :

$$\begin{aligned} t_\star &\approx r^2/2d \\ \rightarrow S(t_\star) &\approx d + (d/2) \log(r^2/2d) \\ S''(t_\star) &\approx 2d^3/r^4 \end{aligned}$$

Por lo que la función de correlación decae algebraicamente

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2}}$$

■  $r \gg \xi$ :

$$\begin{aligned} t_\star &\approx r\xi/2 \\ \rightarrow S(t_\star) &\approx r/\xi + (d/2) \log(r\xi/2) \\ \rightarrow S''(t_\star) &\approx 2/r\xi^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de correlación cae exponencialmente:

$$G(r) \sim \frac{1}{\xi^{d/2-3/2}} \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d/2-1/2}}$$

Es importante notar que la función de correlación cambia su forma a la escala  $r \sim \xi$ , y en casos límites tenemos

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \sim \begin{cases} \frac{1}{r^{d-2}} & r \ll \xi \\ \frac{e^{-r/\xi}}{r^{(d-1)/2}} & r \gg \xi \end{cases} \quad (2.19)$$

conocida como la correlación de **Ornstein-Zernicke**.

### 2.2.1. La longitud de correlación

Como vimos en 2.19, las correlaciones se pierden rápidamente si  $r \gg \xi$ , y de manera mucho más lenta si  $r \ll \xi$ . Es decir,  $\xi$  nos separa regiones que están más correlacionadas. En este sentido,  $\xi$  provee una longitud característica para las fluctuaciones. En un ensamble termal habrán zonas donde la magnetización es ligeramente superior o ligeramente inferior que el valor de la magnetización promedio  $\langle m \rangle$ . El tamaño de esas regiones no serán más grandes que  $\xi$ .

Recordemos que  $\xi^2 = \gamma/\mu^2$ , y como  $\mu^2 \sim |T - T_c|$ , entonces esperamos

$$\xi \sim \frac{1}{|T - T_c|^\nu} \quad \nu = \frac{1}{2}$$

por lo que a medida que nos aproximamos a una temperatura crítica  $T_c$ , nos esperamos fluctuaciones de un largo arbitrariamente grande.

Por supuesto, es más fácil visualizar un sistema de espines. Comencemos con  $T > T_c$ . En la siguiente imagen hay dos recuadros. El de la derecha tiene **mayor** temperatura que el de la izquierda. Como el de la derecha tiene un graneado más fino, entonces las zonas que se escapan de la magnetización promedio son más pequeñas.

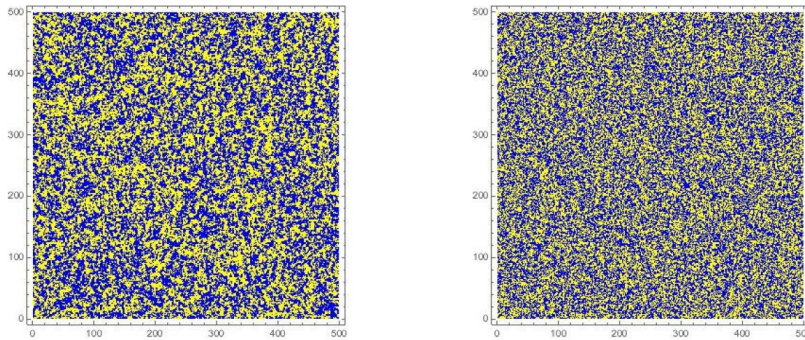


Figura 2.1: Tamaño  $\xi$ :



$$T > T_c$$



$$T \gg T_c$$

Opuestamente, cuando  $T < T_c$  la longitud de correlación es mayor a más altas temperaturas. En la siguiente figura, el recuadro de la derecha está a **menor** temperatura que el de la izquierda. Vemos que el tamaño

de las fluctuaciones alrededor de la fase ordenada se vuelve más pequeño mientras más nos movemos del punto crítico.

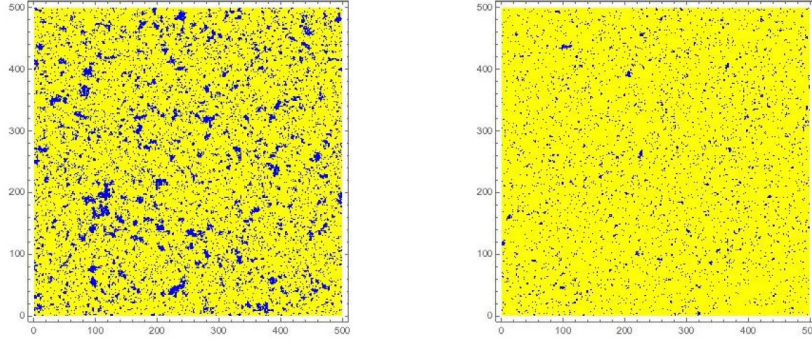


Figura 2.2: Tamaño  $\xi$ :

$$\longleftrightarrow$$

$$T < T_c$$

$$\longleftrightarrow$$

$$T \ll T_c$$

Ahora, ¿qué ocurre a la temperatura crítica  $T = T_c$ ? Una simulación se muestra en la figura de abajo. A esta temperatura, no hay una longitud característica para las fluctuaciones. En su lugar, pueden ocurrir fluctuaciones pequeñas o grandes. De cierta manera, el sistema se comporta como un todo.

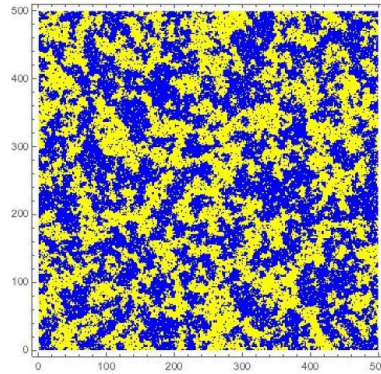


Figura 2.3: Tamaño  $\xi$ :

$$\xi \longrightarrow \infty$$

### 2.3. La analogía con Teoría Cuántica de Campos

Las similitudes entre ambas disciplinas, Física Estadística y Teoría Cuántica de Campos (QFT) no es solo superficial, sino que son bastante fundamentales. La función de Green en QFT está relacionada con un operador de evolución que es del tipo  $e^{-iEt/\hbar}$ , mientras que las probabilidades y matrices densidad en Física Estadística están basadas en el factor de Boltzmann  $e^{E/k_B T}$ . Los elementos fundamentales de ambas teorías son exponenciales, aunque una real y otra compleja. Esta similitud se puede explotar al hacer la sustitución

$$\frac{it}{\hbar} \rightarrow \frac{1}{k_B T}$$



que mapea una teoría a la otra. Además, las funciones de correlación son calculadas a partir de funciones de partición en ambas teorías:

$$\begin{aligned} \text{Teoría Estadística de Campo: } Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta \int d^d x \mathcal{F}(\phi)} \\ \text{Teoría Cuántica de Campos: } Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^d x \mathcal{L}(\phi)} \end{aligned}$$

Las similitudes son patentes. Sin embargo, en Física Estadística se describe un sistema en  $d$  dimensiones espaciales, en QFT se describe uno en  $d - 1$  dimensiones espaciales.

Volvamos al punto anterior: la inversa de la temperatura en Física Estadística se comporta como un tiempo imaginario en QFT. Usualmente se utilizan unidades naturales, donde  $k_B = \hbar = 1$ , por lo que  $\beta = 1/T = it$ . Para ajustar ambos mundos, se rota el contorno de integración en un ángulo  $-\pi/2$  y se trabaja en un tiempo Euclidiano

$$\tau = \beta = it.$$

Esto es llamado **rotación de Wick**. De alguna manera, cambiamos la métrica de Minkowski  $(+, -, -, -)$  por una Euclidiana  $(+, +, +, +)$ , por lo que todas las componentes de un cuadri-vector son tratadas de igual manera, en el clásico estilo Euclidiano. De este modo la acción Lagrangiana  $S(\phi)$  pasa a ser una acción Euclidiana  $S_E(\phi)$  (análoga a la energía libre  $F$ ), y las funciones de partición cuánticas y estadísticas son matemáticamente equivalentes

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]} \xrightarrow{\tau=it} Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}$$

Si la acción original  $S(\phi)$  era invariante de Lorentz, la acción Euclidiana  $S_E(\phi)$  será invariante bajo rotaciones espaciales. Por último, notar que una transición de fase de segundo orden ocurre cuando el coeficiente que acompaña al término de orden cuadrado se anula  $\mu^2 = 0$ . Desde una perspectiva QFT, una transición de fase de segundo orden describe una partícula sin masa.



## Capítulo 3

# Renormalización

Renormalizar es una manera de olvidarse de los problemas de divergencia de una teoría. El primer acercamiento<sup>1</sup> consiste en un sistema magnético de  $N \times N = N^2$  espines en una red. La transformación de Kadanoff nos dice que nos olvidemos de soluciones exactas a ese nivel (contando cada uno de los espines) y en su lugar consideremos pequeños subconjuntos de  $n \times n = n^2$  sitios que interactúan entre sí. La antigua red  $N \times N$  es reemplazada por una  $(N/n) \times (N/n)$  que está compuesta de 'bloques de espines', cada uno representando el comportamiento promedio del conjunto. Esta transformación reduce la información del sistema y solo preserva la estructura a grandes escalas.

La idea clave es ver cómo se comporta el modelo cuando la escala cambia. Típicamente, el procedimiento resulta en la misma física ('mismo Lagrangiano') pero con constantes de acoplamiento alteradas. Entonces, cuando se aplica reiteradamente el procedimiento, podemos concentrarnos en cómo cambian aquellas constantes de acoplamiento, es decir, cómo ellas *fluyen*. Las constantes de acoplamiento  $g_i$  describen un punto en un espacio multidimensional (que no hay que tratarlo con la misma seriedad que al espacio de fase o el espacio de configuración), y la aplicación sucesiva de renormalización resulta en una trayectoria a lo largo de este espacio, conocido como **flujo**. En algunas ocasiones el punto es lanzado al infinito y en otras ocasiones converge a un **punto fijo**. Al llegar a un punto fijo, las constantes de acoplamiento ya no cambiarán bajo re-escalamientos adicionales.

Pero antes de hablar propiamente del Grupo de Renormalización, introduzcamos su espíritu, que se hace patente en la manera de evitar divergencias en una teoría de campos escalar.

### 3.1. Breve discusión de Contratérminos

A la hora de calcular amplitudes y propagadores en Teoría Cuántica de Campos, nos encontramos con integrales que nos arruinan el día, pues en su mayoría son divergentes:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty dx x^n &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^\infty && \text{diverge cuando } n \geq 0 \\ \int_a^\infty \frac{dx}{x} &= [\ln x]_a^\infty && \text{diverge} \\ \int_a^\infty \frac{dx}{x^m} &= \left[ \frac{x^{-m+1}}{-m+1} \right]_a^\infty = \frac{a^{-m+1}}{m-1} \text{ for } m > 1 && \text{converge} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>que puede encontrarse en cualquier libro estándar de Física Estadística.

donde  $a$  es finito y positivo. Este problema se repite en una gran variedad de teorías. Consideremos la teoría interactuante  $\phi^4$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

¿Qué nos interesa calcular sabiendo esto? Si un cuanto del campo escalar  $\phi$  representa una partícula, nos gustaría saber cosas como la probabilidad de tener la partícula en las coordenadas  $(\mathbf{r}_B, t_B)$  dado que sabemos que estuvo en las coordenadas  $(\mathbf{r}_A, t_A)$  y ocurrió un proceso de *scattering* con alguna otra partícula (en una teoría libre  $\phi^2$  esto no podría ocurrir, pero en una teoría interactuante  $\phi^4$  sí puede ocurrir). Feynman ideó una manera gráfica de calcular esta probabilidad, que en adelante se entenderá por **amplitudes** de *scattering*. A primer orden, las reglas de Feynman se pueden resumir en la siguiente figura,

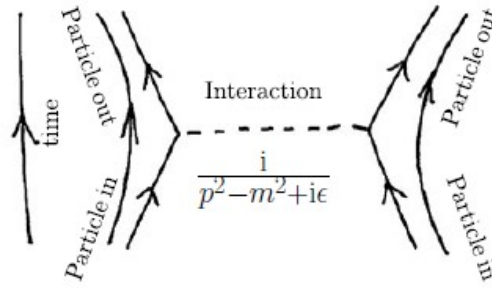


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para el *scattering* de dos partículas. La probabilidad de que ocurra el suceso viene dado por la **amplitud**.

donde la cantidad  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$  es conocido como el propagador para una campo escalar  $\phi^2$ . Para calcular amplitudes hasta segundo orden en la expansión, necesitamos considerar cuatro diagramas de Feynman, que corresponden a los mostrados en la siguiente figura:

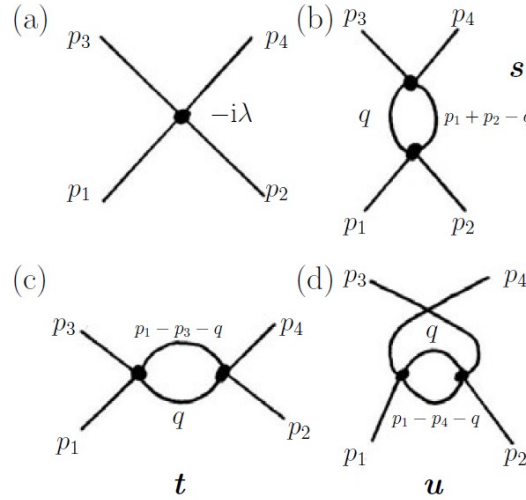


Figura 3.2: Diagramas de Feynman con una o dos vórtices de interacción (segundo orden en la expansión) para el *scattering* de dos partículas. Los diagramas (b)-(d) definen los procesos  $s$ ,  $t$  y  $u$  respectivamente.

<sup>2</sup>Por ejemplo, si queremos saber la probabilidad de encontrar en  $y$  una partícula que estaba en  $x$ , podemos utilizar el propagador

$$\Delta(x, y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

El primero de ellos es bastante simple: si queremos saber la amplitud de *scattering*  $\mathcal{M}$  simplemente debemos saber la intensidad de la constante de acoplamiento  $\lambda$ , es decir

$$i\mathcal{M}_a = -i\lambda.$$

El problema es que los diagramas con *loops* son divergentes, es decir (b)-(d) presentan problemas. En efecto, la integral que necesitamos para (b)-(d) es de la forma

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} = -4ia \ln\left(\frac{\Lambda}{p}\right).$$

En específico, para cada diagrama tenemos las amplitudes:

$$(a) \rightarrow i\mathcal{M}_b = ia\lambda^2 \left\{ \ln \Lambda^2 - \ln \left[ (p_1 + p_2)^2 \right] \right\} = ia\lambda^2 \left\{ \ln \Lambda^2 - \ln s \right\}$$

$$(b) \rightarrow i\mathcal{M}_c = ia\lambda^2 \left\{ \ln \Lambda^2 - \ln \left[ (p_1 - p_3)^2 \right] \right\} = ia\lambda^2 \left\{ \ln \Lambda^2 - \ln t \right\}$$

$$(c) \rightarrow i\mathcal{M}_d = ia\lambda^2 \left\{ \ln \Lambda^2 - \ln \left[ (p_1 - p_4)^2 \right] \right\} = ia\lambda^2 \left\{ \ln \Lambda^2 - \ln u \right\}$$

Naturalmente, quisiéramos  $\Lambda \rightarrow \infty$  (que la teoría sea válida en un rango de energía arbitrario), pero es fácil vislumbrar el problema que esto supone. En suma tenemos que lidiar con el problema de la amplitud total de los cuatro diagramas,

$$i\mathcal{M} = i(\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b + \mathcal{M}_c + \mathcal{M}_d) = -i\lambda + ia\lambda^2 \left\{ 3 \ln \Lambda^2 - \ln s - \ln t - \ln u \right\}.$$

que presenta divergencia logarítmica. La manera aburrida de evitar problemas es mantener finito  $\Lambda$ , pero no es intelectualmente satisfactorio que una teoría que pretenda modelar las leyes fundamentales se detenga por debajo de una escala  $\approx 1/\Lambda$ . Además, si no imponemos un valor para  $\Lambda$  entonces las amplitudes serían una función de  $\Lambda$ , que es una constante arbitraria. La solución es agregar términos que anulen la contribución  $\propto \log \Lambda$ .

Los términos que son añadidos al Lagrangiano para remover la dependencia en  $\Lambda$ , y por tanto su divergencia, son llamados **contratérminos**. Vimos que para la expansión de la teoría  $\phi^4$  a segundo orden teníamos una divergencia en la amplitud que va como  $3ia\lambda^2 \ln \Lambda^2$ . Un Lagrangiano corregido con contratérmino sería

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} - \left( \frac{6a\lambda^2 \ln \Lambda}{4!} \right) \phi^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{C^{(2)}}{4!} \phi^4 \end{aligned}$$

donde  $C^{(2)} = -6a\lambda^2 \ln \Lambda$  lleva el super-índice (2) para recordarnos que solo nos hacemos cargo de la divergencia a segundo orden. Como el contratérmino es proporcional a  $\phi^4$ , entonces tendremos un nuevo vértice que, en vez de tener un factor  $-i\lambda$ , tiene un factor  $iC^{(2)}$ . Para calcular amplitudes solo debemos considerar ese vértice adicional. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{(2)} &= -i\lambda + ia\lambda^2 \left[ 3 \ln \Lambda^2 - \ln s - \ln t - \ln u \right] + iC^{(2)} \\ &= -i\lambda + ia\lambda^2 \left[ -\ln s - \ln t - \ln u \right] + 3ia\lambda^2 \ln \Lambda^2 - 3ia\lambda^2 \ln \Lambda^2 \\ &= -i\lambda - ia\lambda^2 (\ln s + \ln t + \ln u) \end{aligned}$$

Ahora nuestra teoría no depende de  $\Lambda$ , por lo que estará bien definida hasta segundo orden. La lección es

que para tener amplitudes sensatas debemos reemplazar la constante de interacción  $\lambda$  por  $\lambda - C^{(2)}$ . Esta constante se verá transformada según aumenta el orden, que en lenguaje de renormalización representa un flujo en el espacio de parámetros de la teoría.

El proceso nos lleva a cambiar los parámetros desde unos ficticios a unos más realistas, removiéndolos infinitos simultáneamente y forzando a que teoría describa la naturaleza tal como es<sup>3</sup>.

## 3.2. El Grupo de Renormalización

Lo divertido del juego comienza al aproximarnos a los comportamientos críticos. Como se discutió en 2.8, la integral Gaussiana no es un buen punto de partida para estudiar fenómenos críticos. Necesitamos tomar en cuenta las interacciones.

El apartado anterior motivó un cambio de perspectiva al tratar teorías interactuantes: una más próxima a lo esperado en la vida real involucra partir de un Lagrangiano ficticio y arribar a uno más sensato y creíble. En Física Estadística las cosas son parecidas en aspecto, pero distintas en lo fundamental. Aquí se comienza de una energía libre escrita según la teoría Landau-Ginzburg (ver 2.7), con parámetros  $\gamma(T)$ ,  $\mu^2(T)$  y  $g(T)$  no representativos de la física a macro-escala, y aplicar el procedimiento del Grupo de Renormalización (desde ahora **GR**), que conlleva cambios en los parámetros de la teoría, logramos representar fielmente el comportamiento a escalas propias de la experiencia cotidiana.

Por tanto, para estudiar transiciones de fase primero debemos desarrollar el marco de trabajo en el que pensar la física a varias escalas. Este conjunto de ideas fueron desarrolladas en las décadas de 1960s y 1970s por físicos como Leo Kadanoff, Michael Fisher y Kenneth Wilson, y es considerado como uno de las contribuciones a la física más importantes del siglo pasado.

### 3.2.1. Construyendo GR, ¿cuál es la gran idea?

Consideremos de momento el conjunto de teorías basadas en un campo escalar  $\phi(\mathbf{x})$  en  $d$  dimensiones, es decir 2.7, aunque mantendremos una normalización estándar, que significa  $\gamma = 1$ ,

$$F[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + g \phi^4 + \dots \right], \quad (3.1)$$

por lo que parte importante de la dependencia en la temperatura vendrá del término cuadrático  $\mu^2 \sim T - T_c$ , donde  $\mu^2$  puede ser positivo o negativo, pues estamos interesados en el comportamiento crítico. Este hecho indica que podemos escribir  $e^{-F}$  en vez de  $e^{-\beta F}$  en la función de partición, pues  $\beta \approx 1/T_c$  cerca del punto crítico.

Como la red de espines fue simplificada a cajas de tamaño  $a$ , entonces habrá un *cut-off* en los modos de Fourier del campo  $\phi$ , dado por  $\Lambda \sim 1/a$ ,

$$\rightarrow \phi_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{para} \quad k > \Lambda.$$

En última instancia,  $\Lambda$  determina la escala en la que trabajamos, por lo que  $\Lambda$  ayudará a construir el flujo en el espacio de parámetros de la teoría.

Supongamos que estamos interesados solo en la física a una gran escala  $L$ , por lo que no estamos interesados

---

<sup>3</sup>Para más detalles de contraterminos (incluida las reglas de Feynman para una teoría  $\phi^4$  renormalizada), ver capítulo 32 de Tom Lancaster, Stephen J. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur*

en los modos con  $k \gg 1/L$ . Esto sugiere que podemos escribir una teoría diferente<sup>4</sup>, con un *cut-off* más pequeño (i.e mayor escala)

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{\zeta}$$

donde  $\zeta$  es solo un parámetro de escalamiento. Mientras  $\Lambda' \gg L^{-1}$ , nuestra teoría nos dirá todo lo que queremos saber a la escala de interés  $L$ . Para construir tal teoría, escribimos es los modos de Fourier del campo como

$$\phi_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}}^- + \phi_{\mathbf{k}}^+$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}}^- &= \phi_{\mathbf{k}} \quad \text{cuando} \quad k < \Lambda' \\ \phi_{\mathbf{k}}^+ &= \phi_{\mathbf{k}} \quad \text{cuando} \quad \Lambda' < k < \Lambda \end{aligned}$$

$\phi_{\mathbf{k}}^-$  describe los modos de onda largos y  $\phi_{\mathbf{k}}^+$  los de onda cortos. El proceso de renormalización implica aproximar la contribución de  $\phi_{\mathbf{k}}^+$  y trabajar de manera más minuciosa solo con  $\phi_{\mathbf{k}}^-$ . En ese sentido, podemos descomponer la energía libre en el espacio de Fourier como

$$F[\phi_{\mathbf{k}}] = F_0[\phi_{\mathbf{k}}^-] + F_0[\phi_{\mathbf{k}}^+] + F_I[\phi_{\mathbf{k}}^-, \phi_{\mathbf{k}}^+]$$

donde  $F_I[\phi_{\mathbf{k}}^-, \phi_{\mathbf{k}}^+]$  mezcla los modos de onda corta y larga. Por lo tanto, la función de partición queda

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{-F[\phi]} \rightarrow Z = \int \prod_{k < \Lambda} d\phi_{\mathbf{k}} e^{-F} \\ &= \int \prod_{k < \Lambda'} d\phi_{\mathbf{k}}^- e^{-F_0[\phi_{\mathbf{k}}^-]} \int \prod_{\Lambda' < k < \Lambda} d\phi_{\mathbf{k}}^+ e^{-F_0[\phi_{\mathbf{k}}^+]} e^{-F_I[\phi_{\mathbf{k}}^-, \phi_{\mathbf{k}}^+]} \end{aligned}$$

Como solo  $\phi_{\mathbf{k}}^-$  nos interesa, podemos escribirlo de una manera más cómoda visualmente

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-F[\phi]} \rightarrow Z^- = \int \mathcal{D}\phi^- e^{-F'[\phi^-]}$$

donde  $F'[\phi^-]$  es conocida como la *energía libre efectiva Wilsoniana*:

$$e^{-F'[\phi^-]} = e^{-F_0[\phi_{\mathbf{k}}^-]} \underbrace{\int \prod_{\Lambda' < k < \Lambda} d\phi_{\mathbf{k}}^+ e^{-F_0[\phi_{\mathbf{k}}^+]} e^{-F_I[\phi_{\mathbf{k}}^-, \phi_{\mathbf{k}}^+]}}_{\text{Efectos de onda corta.}} \quad (3.2)$$

Lo importante es que  $Z^-$  tiene la misma forma que  $Z$ , por lo que nos deberíamos esperar la misma forma funcional 2.7 para la energía libre  $F'[\phi^-]$ , solo que con constantes de acoplamiento distintas

$$F'[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \gamma' \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} \mu'^2 \phi^2 + g' \phi^4 + \dots \right],$$

aunque en el fondo son dos teorías distintas (distinto *cut-off*,  $\Lambda'$  para uno,  $\Lambda$  para el otro), donde  $F[\phi]$  puede describir cosas que  $F'[\phi^-]$  no. Para hacer una comparación más directa entre ambas, podemos reescalar también el momento en la nueva teoría

$$\mathbf{k}' = \zeta \mathbf{k},$$

por lo que ahora  $k'$  toma valores hasta el *cut-off* original  $\Lambda$ . Por último, podemos reescalar nuestro campo

<sup>4</sup>Recordar que una *teoría* está descrita tanto por la forma funcional como por el valor las constantes de acoplamiento. Al variar  $\Lambda$  cambia la constante, por lo que una teoría también depende del valor del *cut-off*  $\Lambda$

para volver a la normalización  $\gamma' = 1$ , definiendo

$$\phi'_{\mathbf{k}'} = \sqrt{\gamma'} \phi_{\mathbf{k}}^-.$$

Esta receta nos devuelve la energía libre en el espacio real

$$F_{\zeta}[\phi'] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \nabla \phi' \cdot \nabla \phi' + \frac{1}{2} \mu^2(\zeta) \phi'^2 + g(\zeta) \phi'^4 + \dots \right] \quad (3.3)$$

la cual ha sido renormalizada. Este procedimiento induce un mapeo continuo de  $\zeta \in [1, \infty)$  al espacio multi-dimensional de parámetros de la teoría. Las constantes originales 2.7 corresponden a  $\zeta = 1$ . Mientras crece  $\zeta$ , se trazan curvas en el espacio de parámetros. Las ecuaciones que describen esas curvas (o flujos), son llamadas **funciones beta**.

Para resumir, el procedimiento de GR consiste de tres pasos:

- Separa los modos en los lentos  $\phi^-$  y rápidos  $\phi^+$ , para integrar los modos rápidos  $\Lambda/\zeta < k < \Lambda$  y quedarnos solo con  $k < \Lambda' = \Lambda/\zeta$ .
- Reescala el momento  $\mathbf{k}' = \zeta, \mathbf{k}$ .
- Reescala los campos para mantener la normalización  $\gamma = 1$ .

Hasta ahora solo hemos trabajado en el espacio de Fourier, ¿qué ocurre en el espacio **real**? Una versión intuitiva nos dice qué es lo que hay que cambiar en el segundo paso. La contraparte en el espacio real sería

$$x' = \frac{x}{\zeta}$$

por lo que las longitudes son ahora más pequeñas y más *cosas* nos caben en la descripción. Esto es equivalente a alejarnos y observar el sistema desde 'más afuera'. El procedimiento GR representa entonces un escalamiento en las longitudes en el espacio real. Pero ¿cómo saber si es más fácil trabajar en el espacio de Fourier o en el Real? La clave está en averiguar qué cosa es discreta y qué es continua. Si el campo es continuo en el espacio real pero discreto en el de momento, entonces es más conveniente trabajar en el de momento. Por ejemplo una red de Ising es discreta (como vimos al principio del capítulo 2), por lo que es más conveniente trabajarla en el espacio real.

Es importante hacer notar que el nombre Grupo de Renormalización debería ser reemplazado por el de Semigrupo. Si bien es verdad que un escalamiento generado por  $\zeta_1$  seguido de un segundo escalamiento  $\zeta_2$  da el mismo resultado que un escalamiento  $\zeta_1 \zeta_2$ , este procedimiento no se puede hacer en sentido inverso: la información de lo muy pequeño se integró y se perdieron las particularidades a esta escala. La falta de una inversa hace que el nombre de GR sea casi irrisorio, aunque las terminologías opuestas tienen más fuerza (como Groucho Marx bromeó, pensando en la 'inteligencia militar').

Por último, debemos adelantar que luego de reescalar los campos para mantener  $\gamma = 1$  se inducirán cambios en las constantes de acoplamiento. Como ya se dijo, si tenemos una teoría cuyas constantes *no cambian bajo escalamiento*, hablaremos de un **punto fijo**. Pero es útil caracterizar las propiedades de los puntos fijos al pensar en las teorías de su alrededor en el espacio de parámetros. Por supuesto, hay infinitas formas de movernos al rededor de un punto fijo. Aquellas deformaciones a la energía libre que terminan por describir la misma física de distancias largas son llamadas **irrelevantes**, ya que nos quedamos en el mismo punto fijo. En contraste, si bajo esas deformaciones logramos salir del punto fijo, serán llamadas **relevantes**. Por último, si el sistema termina en un punto fijo distinto al original, la deformación es llamada **marginal**.



### 3.3. Funciones Beta

Comencemos con la energía libre

$$F[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 + g_0 \phi^4 \right]$$

que puede ser escrita como

$$\begin{aligned} F[\phi] &= \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 \right] + \int d^d x g_0 \phi^4 \\ &= F_0[\phi] + F_I[\phi] \end{aligned}$$

El primer paso en el procedimiento del Grupo de Renormalización es dividir los modos de Fourier, por lo que en el espacio de Fourier la energía libre queda

$$\phi_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}}^- + \phi_{\mathbf{k}}^+ \rightarrow F[\phi] = F_0[\phi^-] + F_0[\phi^+] + F_I[\phi^-, \phi^+].$$

Como  $F_0[\phi]$  es cuadrático en  $\phi$ , entonces las componentes  $\phi_{\mathbf{k}}^-$  no se mezclan con  $\phi_{\mathbf{k}}^+$ , al contrario del término  $\phi^4$ . Además, sabemos que en una teoría sin interacciones (es Física Estadística = sin transiciones de fase), la parte libre se escribe en el espacio de Fourier como

$$\int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} (k^2 + \mu_0^2) \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}}$$

Así que debemos buscar correcciones de primer y segundo orden para acercarnos más al  $F[\phi]$  completo. A primer orden en  $g_0$ , se puede llegar a<sup>5</sup>

$$F_I^{(1)} = 6g_0 \int_0^{\Lambda/\zeta} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_{\mathbf{k}}^- \phi_{-\mathbf{k}}^- \int_{\Lambda/\zeta}^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + \mu_0^2},$$

por lo que la corrección afecta al término cuadrático reemplazando el coeficiente

$$\mu_0^2 \rightarrow \mu'^2 = \mu_0^2 + 12g_0 \int_{\Lambda/\zeta}^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + \mu_0^2}$$

donde la integral del segundo término integra los modos rápidos (que no nos interesan). Sin embargo aún no tenemos listo el procedimiento: falta reescalar

$$\mathbf{k}' = \zeta \mathbf{k} \quad , \quad \phi'_{\mathbf{k}} = \frac{\phi_{\mathbf{k}/\zeta}^-}{\zeta^w}$$

con  $w = \frac{d+2}{2}$ . Además, estudiando el escalamiento en el espacio real

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/\zeta \quad , \quad \phi'(\mathbf{x}') = \zeta^{\Delta_\phi} \phi(\mathbf{x}),$$

donde  $\Delta_\phi$  es una dimensión de escalamiento para restaurar la normalización canónica de los términos gradientes, podemos reescribir la energía libre como

$$F[\phi'] = \int d^d x' \zeta^d \left[ \frac{1}{2} \zeta^{-2-2\Delta_\phi} \nabla' \phi' \cdot \nabla' \phi' + \frac{1}{2} \mu_0^2 \zeta^{-2\Delta_\phi} \phi'^2 + g_0 \zeta^{-4\Delta_\phi} \phi'^4 \right].$$

<sup>5</sup>Para detalle ver secciones 3.4.1 y 3.4.2 David Tong, *Statistical Field Theory*.

Para mantener  $\gamma = 1$ , escogemos

$$\Delta_\phi = \frac{d-2}{2} \Rightarrow g_4(\zeta) = \zeta^{d-4\Delta_\phi} g_0 = \zeta^{(1-4/2)d+4} g_0 = \zeta^{4-d} g_0$$

Cómo cambia esta constante de acoplamiento depende de la dimensión en que se trabaje. Para  $d < 4$  el cambio en  $g_4(\zeta)$  nos da un aporte irrelevante. Para  $d > 4$  sí es relevante. Cuando  $d = 4$  tenemos  $g_4(\zeta) = g_0$ , por lo que el acoplamiento es marginal. Esto nos da un indicio de por qué la aproximación de campo medio da buenos frutos en  $d = 4$  (y cercanas pero no exactas en  $d > 4$ ), y por qué falla para  $d < 4$ .

Para segundo orden, es más simple copiar el resultado y comentarlo. En el espacio real, solo el término  $\phi^4$  recibe una corrección:

$$g_0 \rightarrow g'_0 = g_0 - 36g_0^2 \int_{\Lambda/\zeta}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \mu_0^2)^2}$$

Es interesante notar que en  $d = 4$  esta corrección no es nula, solo leve (a diferencia de la corrección a primer orden, que es nula en  $d = 4$ ). Por este motivo se dice que  $g$  es una constante de acoplamiento **marginalmente** irrelevante, ya que  $g_0$  se acopla con  $\mu^2$ , hecho que se puede ver en un diagrama cuyos ejes sean las constante  $g$  y  $\mu^2$ . Si queremos apagar las interacciones ( $g'_0 = 0$ ), debemos escoger un valor particular de  $\mu_0^2$  y  $g_0$ . De aquí surge la pregunta: ¿Qué ente me indica el flujo de las constantes de acoplamiento en el diagrama a medida que aplico el procedimiento del Grupo de Renormalización? Aún no definimos ese objeto y ya es tiempo. Se llaman **funciones beta**.

Será conveniente parametrizar el cambio del *cut-off* como

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{\zeta} = \Lambda e^{-s} \rightarrow \zeta = e^s$$

por lo que ahora  $g = g(s)$ . Así, cuando  $s \rightarrow \infty$ , se hablará del infrarrojo de la teoría,  $\Lambda' \rightarrow 0$ . Para este caso, una definición de la función beta es:

$$\frac{dg}{ds} = \beta(g). \quad (3.4)$$

Una función  $\beta(g) > 0$  nos indica que el acoplamiento  $g$  se vuelve más fuerte en IR, mientras que  $\beta(g) < 0$  significa acoplamiento más débil en IR. Vimos que hasta segundo orden las constantes  $\mu_0^2$  y  $g_0^2$  renormalizadas seguían las ecuaciones

$$\mu^2(\zeta) = \zeta^2 (\mu_0^2 + ag_0) \quad \text{y} \quad g(\zeta) = \zeta^{4-d} (g_0 - bg_0^2), \quad (3.5)$$

donde

$$a = 12 \int_{\Lambda/\zeta}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + \mu_0^2} \quad \text{and} \quad b = 36 \int_{\Lambda/\zeta}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \mu_0^2)^2}.$$

Por lo tanto, para obtener las funciones beta para  $\mu^2(s)$  y  $g^2(s)$  necesitamos derivarlas con respecto a  $s$ . Habrán dos tipos de contribuciones: el primero directo de reemplazar  $\zeta \rightarrow e^s$  en 3.5 y es consecuencia directa del escalamiento; el segundo viene de las integrales  $a$  y  $b$ , las que hay que derivar. Para  $s$  pequeño, se obtiene

$$\int_{\Lambda e^{-s}}^{\Lambda} dq f(q) \approx [\Lambda - \Lambda e^{-s}] f(\Lambda) \approx \Lambda f(\Lambda) s \Rightarrow \frac{d}{ds} \int_{\Lambda e^{-s}}^{\Lambda} dq f(q) = \Lambda f(\Lambda)$$

por lo que en  $d = 4$  dimensiones obtenemos las funciones beta

$$\frac{d\mu^2}{ds} = 2\mu^2 + \frac{3g}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 + \mu^2} \quad \text{y} \quad \frac{dg}{ds} = -\frac{9}{2\pi^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \mu^2)^2} g^2. \quad (3.6)$$

Hagamos unos comentarios. Primero, la función beta para  $\mu^2$  tiene dos términos: el primero viene del segundo y tercer paso en GR (escalamiento), mientras que el segundo viene del primer paso en GR (integración de los detalles microscópicos). Por otro lado, la función beta para  $g$  tiene solo un término no lineal, ya que  $g$  es una constante marginal bajo escalamiento. Solo recibe una contribución a orden  $g^2$  cuando se integra en el primer paso. Esta contribución es negativa, lo que nos dice que el acoplamiento es marginalmente irrelevante, es decir, su flujo en el espacio de parámetros es mucho más pausado que las demás constantes.



## Capítulo 4

# Transición de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless

Hasta ahora, en ningún momento le hemos dado importancia a la estructura del espacio en el que planteamos alguna teoría. Sin embargo, al escudriñar la geometría de largas escalas nos podemos topar con inconvenientes hasta ahora insospechados: tenemos que considerar la **topología** del espacio del campo. Este es el objetivo de este capítulo, además de mostrar la física subyacente.

### 4.1. Teoría de Landau, o la importancia de la simetría

Las fases de la materia están caracterizadas por simetrías. Más precisamente, las fases de la materia están caracterizadas por dos grupos de simetría: el primero, que llamaremos  $G$ , es la simetría de la energía libre del sistema, y la segunda, que llamaremos  $H$ , es la simetría del estado basal.

Por ejemplo, el modelo de Ising para  $B = 0$  nos dice que da igual si damos vuelta todos los espines al mismo tiempo, por lo que  $G = \mathbb{Z}_2$ . El estado basal en altas temperaturas también es el mismo de damos vuelta todos los espines, por lo que  $H = \mathbb{Z}_2$ . Sin embargo, a bajas temperaturas esta simetría se rompe y el sistema debe elegir uno de los estados basales posibles, por lo que  $H = \emptyset$ . Concluimos que ambos estados basales (ordenado y desordenado), están caracterizados por distintas elecciones de  $H$ .

A *grosso modo*, de esto se trata la teoría de Landau. Cada vez que cambia  $H$ , deberíamos esperar una transición de fase. Sin embargo, esto no es lo único para lo que ayuda la simetría. Veremos que el conocimiento de  $G$  y de  $H$  nos brindan propiedades del sistema a bajas energías, a través del teorema de Goldstone y de consideraciones topológicas que veremos más adelante.

Por ahora, veamos qué ocurre al considerar solo fases de la materia con una simetría interna  $G$  continua. Este es el caso de una red de espines en dos dimensiones con libertad para rotar. También es el caso de un condensado de Bose Einstein o superfluidos o superconductores.

Los modelos más simples para estudiar simetrías continuas son los modelos  $O(N)$ , es decir, aquellos modelos que contienen  $N$  campos escalares reales en la expresión de la energía libre  $F$ . Podemos escribir los  $N$  campos escalares reales como un vector

$$\vec{\phi}(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x}))$$

y la aplicación de una rotación  $O(N)$  como

$$\phi_a(\mathbf{x}) \rightarrow R_a^b \phi_b(\mathbf{x})$$

donde  $R \in O(N)$ , por lo que  $R^T R = I$ . La forma más general de escribir una energía libre invariante bajo  $O(N)$  se ve como

$$F[\vec{\phi}(\mathbf{x})] = \int d^d x \left[ \frac{\gamma}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + \frac{\mu^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + g(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 + \dots \right].$$

Nos enfocaremos en el caso  $N = 2$ . Es decir en sistemas que pueden ser descritos utilizando dos campos escalares reales. En ese caso tendremos  $\phi_1(\mathbf{x})$  y  $\phi_2(\mathbf{x})$ , sin embargo es conveniente escribirlo como un solo campo complejo

$$\psi(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) + i\phi_2(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

por lo que ahora la energía libre consiste solo de términos que son invariantes bajo rotaciones de fase  $U(1)$ . La energía libre nos queda

$$F[\psi(\mathbf{x})] = \int d^d r \left[ \frac{\gamma}{2} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \frac{\mu^2}{2} |\psi|^2 + g|\psi|^4 + \dots \right], \quad (4.2)$$

el cual es invariante bajo  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ . La expresión 4.2 es conocida como el modelo XY, ya que describe una red de espines que pueden rotar en un plano 'X-Y'. En ese sentido es una generalización del modelo Ising, en donde el espín era *up* o era *down*:

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \quad \rightarrow \quad E = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j),$$

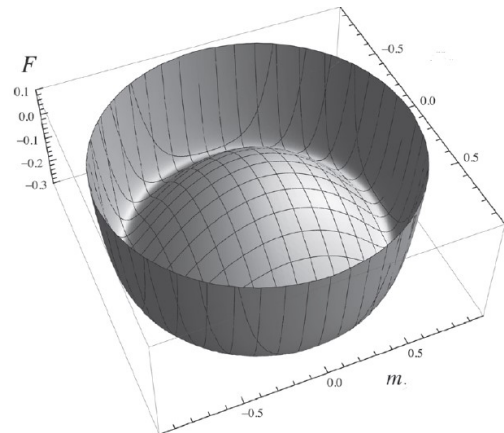
donde  $\theta_i$  es el ángulo entre el espín  $s_i$  y alguna dirección fija. Cabe destacar que los condensados de Bose Einstein se hayan en la misma clase de universalidad (también su contraparte con acoplamiento fuerte, el superfluido). La expresión 4.2 nos conduciría a la ecuación de Gross-Pitaevskii

$$\gamma \nabla^2 \psi = \mu^2 \psi + 4g|\psi|^2 \psi + \dots,$$

también conocida como ecuación de Shrödinger no-lineal.

## 4.2. Bosones de Goldstone en el modelo XY

Sabemos que al minimizar la energía libre obtendremos aún así un continuo de posibilidades. Generalmente basta ver el mínimo como el valle del sombrero mexicano. Esto nos dice que minimizar la energía libre solo nos da una idea de la magnitud  $|\psi|$ , pero no su dirección, dejándonos una libertad en el estado basal. Naturalmente,  $H = U(1)$ . Más generalmente, solo nos dice la magnitud  $|\vec{\phi}|$ , manteniendo aún un espacio para el estado basal que es la esfera  $\mathbf{S}^{N-1}$ . Esta degeneración infinita nos permite enfocar la atención a las contribuciones del término gradiente  $|\nabla \vec{\phi}|^2$ , manteniendo minimizada la contribución  $\frac{\mu^2}{2} |\phi|^2 + g|\phi|^4 + \dots$ . De esta manera prestaremos atención a los llamados **bosones de Goldstone**. Pero veamos más de cerca a qué nos referimos, atendiéndonos solo al modelo XY.



De la imagen del sombrero mexicano vemos que hay un espacio de mínimo equivalente a un círculo  $S^1$ . Para el modelo XY es útil trabajar el campo complejo 4.1 como  $\psi(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})e^{i\theta(\mathbf{x})}$ . Sabemos que en estado basal  $M_0 = \sqrt{-\mu^2/4g}$ , mientras que  $\theta$  es arbitrario. Si escribimos

$$M(\mathbf{x}) = M_0 + \tilde{M}(\mathbf{x}),$$

entonces la energía libre se expande como

$$F[M, \theta] = \int d^d x \left[ \frac{\gamma}{2} \nabla \psi^\star \cdot \nabla \psi + \frac{\mu^2}{2} |\psi|^2 + g |\psi|^4 + \dots \right] \quad (4.3)$$

$$= \int d^d x \left[ \frac{\gamma}{2} \nabla ([\tilde{M}(\mathbf{x}) + M_0] e^{i\theta(\mathbf{x})})^\star \cdot \nabla ([\tilde{M}(\mathbf{x}) + M_0] e^{i\theta(\mathbf{x})}) \right. \quad (4.4)$$

$$\left. + \frac{\mu^2}{2} |([\tilde{M}(\mathbf{x}) + M_0] e^{i\theta(\mathbf{x})})|^2 + g |([\tilde{M}(\mathbf{x}) + M_0] e^{i\theta(\mathbf{x})})|^4 + \dots \right] \quad (4.5)$$

$$= \int d^d x \left[ \frac{\gamma}{2} (\nabla \tilde{M})^2 + \gamma M_0 \tilde{M} (\nabla \theta)^2 + \frac{\gamma}{2} M_0^2 (\nabla \theta)^2 + |\mu^2| \tilde{M}^2 + g \tilde{M}^4 + \dots \right] \quad (4.6)$$

$$= \int d^d x \left[ \left( \frac{\gamma}{2} (\nabla \tilde{M})^2 + |\mu^2| \tilde{M}^2 + g \tilde{M}^4 \right) + \frac{\gamma}{2} M_0^2 (\nabla \theta)^2 + \gamma M_0 \tilde{M} (\nabla \theta)^2 + \dots \right] \quad (4.7)$$

Lo que está entre paréntesis es la expresión 4.2. Las contribuciones adicionales son debidas a la variación del mínimo. Para el modelo XY el bosón de Goldstone es  $\theta(\mathbf{x})$ . Se puede pensar estas pequeñas perturbaciones en la dirección angular del sombrero mexicano.

### 4.3. Teorema de Mermin-Wagner

El bosón de Goldstone juega un rol crucial si consideramos la energía libre como

$$F[\theta] = \int d^d x \frac{\gamma}{2} M_0^2 (\nabla \theta)^2 + \dots$$

donde los ordenes superiores son todos derivadas y no afectarán la discusión. Para calcular la función de correlación  $\langle \theta(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{y}) \rangle$ , simplemente podemos importar el resultado 2.18 y obtener el comportamiento a largas distancias

$$\langle \theta(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{\gamma M_0^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{k^2}. \quad (4.8)$$

Para brindar una comparación, es sabido que la función de correlación de dos puntos Euclidiana es

$$G(x, y) = \langle \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi \psi(x) \psi^\dagger(y) e^{-S_E[\psi]} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 + m^2},$$

por lo que la expresión 4.8 es análoga a partículas de Goldstone **sin** masa en teoría cuántica de campos. En el contexto presente, se dice '*massless=gapless*'. El valor de 4.8 varía según la dimensión en que se trabaje:

$$\langle \theta(\mathbf{x}) \theta(0) \rangle = \frac{1}{\gamma M_0^2} \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2} \sim \begin{cases} \Lambda^{d-2} - r^{2-d} & d > 2 \\ \log(\Lambda r) & d = 2 \\ r - \Lambda^{-1} & d = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

con  $r = |\mathbf{x}|$ . Basta notar que para  $d > 2$ , la correlación de dos puntos decae a una constante para  $r \rightarrow \infty$ . Los casos notables son para  $d \leq 2$ , donde las fluctuaciones crecen indefinidamente a medida que aumentamos la distancia. Por supuesto, esto carece de sentido físico, por lo que no puede haber bosones de Goldstone

en  $d = 2$  dimensiones.

Este resultado es conocido como **Teorema de Mermin-Wagner**: una simetría continua no puede ser quebrada espontáneamente en  $d = 2$  dimensiones a cualquier temperatura finita  $T$  (al restaurar las constantes, veríamos que un quiebre de simetría sólo es posible a  $T = 0K$ ); no hay bosones de Goldstone cuando  $d = 2$ .

El poder de un teorema es indudable. Sin embargo, sí hay superfluido<sup>1</sup> en  $d = 2$ ... Esto involucra una transición de fase en  $d = 2$  dimensiones, pero como acabamos de ver, no puede corresponder a una del tipo visto hasta ahora: no se puede quebrar una simetría continua. ¿Qué mecanismo explica este fenomenal hecho?

#### 4.4. Transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless

El teorema de Mermin-Wagner nos dice que cualquier sistema con una simetría continua no tiene una fase ordenada en  $d = 2$  dimensiones. Sin embargo el modelo XY en  $d=2$  sí atraviesa una transición de fase al bajar la temperatura, pero que no es una transición de fase que hemos visto hasta ahora: no es una transición de fase que involucre un quiebre de simetría. Esto se apoya en un apartado anterior en el que mostramos que no puede haber un quiebre espontáneo de simetría en  $d = 2$  dimensiones, por lo que no hay un parámetro de orden local que distinga aquellas dos fases. Solo queda fiarnos de la función de correlación.

Recordemos que para el modelo XY (es decir,  $O(N)$ , con  $N = 2$ ), la energía libre tiene un término cuadrático  $\mu^2|\psi|^2$ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) + i\phi_2(\mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad F[\psi(\mathbf{x})] = \int d^d r \left[ \frac{\gamma}{2} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \frac{\mu^2}{2} |\psi|^2 + g|\psi|^4 + \dots \right]$$

de donde derivamos 2.19, por lo que en  $d = 2$  tenemos una función de correlación que decae exponencialmente

$$\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(0) \rangle = \frac{e^{-r/\xi}}{\sqrt{r}} \quad \xi = \frac{\gamma}{\mu^2}$$

para temperaturas en las que  $\mu^2 > 0$ . Además, vimos que podemos escribir  $\psi(x) = M(x)e^{i\theta(x)}$ , con el comportamiento de largas distancias dado por  $\langle \theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{y}) \rangle$ , y con una energía libre que a primer orden

$$F[\theta] = \int d^d x \frac{\gamma}{2} M_0^2 (\nabla \theta)^2 + \dots = \frac{1}{2e^2} \int d^d x (\nabla \theta)^2, \quad e^2 = (\gamma M_0)^{-1} = \frac{T}{J}.$$

La función de correlación exhibe una divergencia logarítmica,

$$\langle \theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{0}) \rangle = \frac{1}{\gamma M_0^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{0})}}{k^2} = -\frac{e^2}{2\pi} \log(\Lambda r),$$

por lo que para temperaturas bajas, con  $\mu^2 < 0$ , tenemos una función de correlación para  $\psi$  que no cae exponencialmente, sino que algebraicamente:

$$\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(0) \rangle \sim \langle e^{-i\theta(\mathbf{x})} e^{i\theta(0)} \rangle = \langle e^{-i(\theta(\mathbf{x})-\theta(0))} \rangle = e^{-\langle (\theta(\mathbf{x})-\theta(0))^2 \rangle / 2} \sim \frac{1}{r^{e^2/2\pi}} = \frac{1}{r^\eta},$$

donde utilizamos el hecho que en dos dimensiones, las fluctuaciones gaussianas crecen logarítmicamente,  $\langle (\theta(0) - \theta(r))^2 \rangle / 2 = \ln(|r|/a)/2\pi J$ , y donde la dimensión anómala está dada por  $\eta = \frac{e^2}{2\pi} = \frac{T}{J} \frac{1}{2\pi}$ , por lo que incrementar la temperatura equivale a incrementar la dimensión anómala. Las correlaciones de este tipo, con decaimiento algebraico, son llamadas **quasi-long-range order**. La diferencia del comportamiento en

<sup>1</sup> Hecho que es mostrado con una derivación histórica en una charla del físico francés Jean Dalibard: <https://www.youtube.com/watch?v=pd6nW7vPQik&t=740s>



la función de correlación para temperaturas altas y temperaturas bajas nos indica que debe haber una transición de fase escondido por ahí. Además, ¿cuál es el mecanismo por el cual se destruye la correlación algebraica para altas temperaturas? Se puede mostrar que aplicar RG perturbativamente en términos de mayor orden solo dará términos no relevantes, por lo que se debe buscar en otros tipos de operadores relevantes, como pueden ser los vórtices.

#### 4.4.1. Vórtices

A diferencia del campo  $\phi(\mathbf{x})$ , el campo  $\theta(\mathbf{x})$  es periódico. En particular, habrán ciertos puntos en los que se cumplirá

$$\oint \nabla \theta \cdot d\mathbf{x} = 2\pi n,$$

con  $n \in \mathbb{Z}$ , lo que nos dice que  $\theta$  vuelve a su valor salvo un cambio de  $2\pi n$ . Cuando  $n = 1$  se dice que hay un **vórtice**, y cuando  $n = -1$  se le llama **anti-vórtice**, y son objetos comunes en el campo de la **topología**. En general, se dirá que hay defectos topológicos si un campo continuo (en este caso  $\theta(\mathbf{x})$ ) vive en distintos vacíos de la teoría en el infinito espacial.

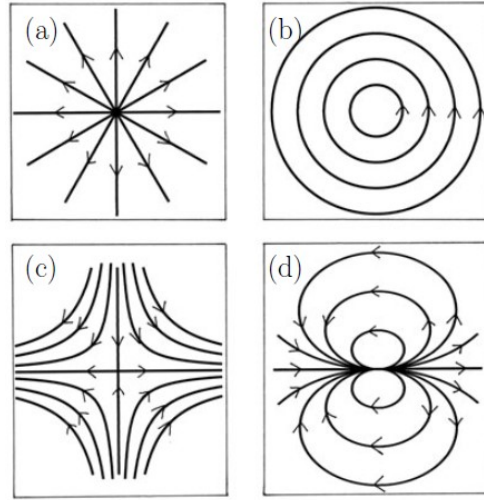


Figura 4.1: Ejemplos de vórtices con (a)  $n=1$ , (b)  $n=1$ , (c)  $n=-1$ , (d)  $n=2$ . La estrategia es arrastrar una 'flecha' por los bordes de cada figura. Si al llegar al punto de partida la flecha está intacta, entonces  $n = 1$ . Si la flecha llega apuntando en dirección opuesta, entonces  $n = -1$ .

En este punto bien vale detenerse y analizar el coste energético de un solo vórtice. Los vórtices están descritos por un campo que en el infinito espacial adoptan la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = Ae^{i(n\theta(\mathbf{x})+\varphi)},$$

donde  $\varphi$  es una fase arbitraria. Para una configuración de campo estática, el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + U(\phi).$$

Escogemos  $U(\phi)$  tal que  $U(\phi) \rightarrow 0$  en el borde en el infinito, y calculamos el gradiente del campo

$$\nabla \phi = \frac{1}{r} (inAe^{in\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Naturalmente el núcleo del vórtice es un gran problema. Una manera sencilla de quitarnos este problema es asumir que presenta un costo energético  $E_{\text{core}}(a)$ , donde  $a$  es el tamaño del núcleo. Evaluamos la energía del resto del espacio, hallando

$$E = E_{\text{core}} + \int_0^{2\pi} \int_a^\infty r H dr d\theta = E_{\text{core}} + \pi n^2 |A|^2 \int_a^\infty dr \frac{1}{r}, \quad (4.10)$$

que es una divergencia logarítmica. Notar que la energía debido a múltiples vórtices escala como  $\propto n^2$ , así que energéticamente es muy desfavorable tener más de un vórtice o un anti-vórtice aislado. De hecho, solo un vórtice ya no es un objeto estable a temperatura  $T = 0$ . Sin embargo la historia es distinta para temperaturas  $T > 0$ . Esto se debe a que, en vez de minimizar la energía para encontrar el equilibrio termodinámico del sistema, debemos minimizar la energía libre  $F = E - TS$ , por lo que a altas temperaturas debemos maximizar la entropía.

En efecto, la presencia de vórtices le da al sistema una gran cantidad de entropía, ya que su vórtice puede estar localizado en cualquier lugar de la muestra. Sin embargo, la proliferación de estos vórtices está más incentivada a altas temperaturas, ya que el término entrópico está multiplicado por la temperatura.

Pero, ¿qué ocurre a bajas temperaturas?

#### 4.4.2. Transición BKT en simple

El físico ruso Vadim Berezinskii fue el primero que se percató de la posibilidad que la transición de fase que se presenciaba en tales sistemas bidimensionales se podía deber al rol de los vórtices, aunque no dió con todos los detalles. Los británicos Michael Kosterlitz y David Thouless decidieron darle un tratamiento desde el Grupo de Renormalización. Funcionó, por lo que fueron galardonados con el premio Nobel de física del 2016.

Consideremos un momento a la ecuación (4.10). El Hamiltoniano para un modelo XY bidimensional consiste de espines fijos en una red, aunque libres de rotar,

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j).$$

Si asumimos que la dirección de los rotores varía suavemente de un sitio a otro, podemos aproximar  $\cos(\theta_i - \theta_j)$  mediante Taylor,  $1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$ . Además, la diferencia en el valor de dos espines cercanos se puede pensar como el valor de cambio infinitesimal,  $\theta_i - \theta_j = \partial_x \theta$ . Finalmente, el Hamiltoniano en el continuo se reduce a

$$H = E_0 + \frac{J}{2} \int d\mathbf{r} (\nabla \theta)^2 \quad (4.11)$$

Integremos una muestra de tamaño  $L$ . Obtendremos que el costo energético de un solo vórtice crece logarítmicamente con el tamaño de la muestra:

$$\begin{aligned} E - E_{\text{core}} &= \frac{J}{2} \int d\mathbf{r} [\nabla \theta(\mathbf{r})]^2 \\ &= \frac{J n^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^L r dr \frac{1}{r^2} \\ &= \pi n^2 J \ln\left(\frac{L}{a}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos colocar un núcleo de tamaño  $a$  en una muestra de tamaño  $L$  de  $L^2/a^2$  maneras

distintas, lo que nos da una entropía

$$S = k_B \log(\Omega) = 2k_B \log(L/a). \quad (4.12)$$

Debemos minimizar la energía libre  $F = E - TS$ , por lo que hay una competencia entre  $E$  y la entropía  $S$ . La energía libre de un vórtice es entonces

$$\Rightarrow F = (\pi J - 2k_B T) \log(L/a). \quad (4.13)$$

Tanto la entropía como la energía del vórtice crecen logarítmicamente, por lo que la energía libre está dominada por uno o por el otro. Si la parte entrópica " $-2k_B T$ " gobierna, es decir para altas temperaturas  $T > \frac{J\pi}{2k_B}$ , el sistema es estable y pueden proliferar vórtices. Pero, ¿qué ocurre debajo de  $T \approx J\pi/2k_B$ ? Si gana la contribución de energía potencial es por que debe haber gran cantidad de energía almacenada en el 'gas'. Esto hace suponer la existencia de pares vórtices-antivórtices en cuya configuración yace una gran cantidad de energía.

Por otro lado, si pensamos nuevamente al modelo XY como un arreglo de espines con libertad  $U(1)$  local, entonces  $J$  representa cuánto *cuesta* girar un espín en presencia del resto del sistema ordenado. A altas temperaturas esperamos  $J$  bajo, ya que los espines apuntan aleatoriamente de por sí. A bajas temperaturas,  $J$  crece.

En resumen, esperamos la proliferación de vórtices para altas temperaturas y la retención de pares vórtice-antivórtice para bajas temperaturas. Este argumento es a grandes rasgos la fenomenología implicada en la transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT). Naturalmente,  $T \approx J\pi/2k_B$  parece ser la temperatura de transición. Tal cuestión se puede zanjar al traer la maquinaria del Grupo de Renormalización y estudiar en detalle un par vórtice y antivórtice, como el que se muestra en la figura (4.2).

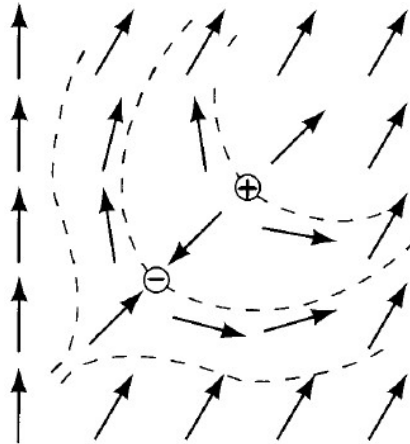


Figura 4.2: Par vórtice-antivórtice contenido en un arreglo 5x5 de espines. El espaciado entre cada punto de la red es  $b$ . La rigidez  $K$  del sistema varía según la escala en la que lo estudiamos. La rigidez efectiva de mayor escala  $K(5b)$  se ve reducida debido a los vórtices.

El método consistió en lo siguiente: ¿qué le ocurre al sistema de vórtices si miramos a escalas de longitud cada vez más grandes? Esto es equivalente a preguntarse qué ocurre con las constantes de acoplamiento del sistema a medida que aplicamos el GR.

#### 4.4.3. Funciones beta

La aproximación de Kosterlitz para el proceso de renormalización se enfoca en el estudio de cómo cambia la rigidez de las onda de espines<sup>2</sup> a medida que cambia el *cut-off* relacionado con la 'zona a pasar por alto'. Siguiendo el planteamiento hasta ahora visto, la zona que uno pasa por alto es el *núcleo*  $a$ . Ahora pasaremos cada vez más por alto, para así dar cuenta del comportamiento en escalas cada vez mayores  $a \rightarrow e^{\delta l} a$ , es decir, eliminando las fluctuaciones a distancias cortas. Más importantemente,  $a$  puede corresponder a la distancia mínima entre dos vórtices, por lo que al incrementar  $a$  excluimos configuraciones con pequeñas separaciones.

Para preparar la aplicación de GR, debemos reconocer y enfatizar los dos tipos de canales de fluctuación. Para un modelo XY bidimensional, es sencillo visualizar<sup>3</sup> una analogía de la distorsión del campo  $\nabla\theta$  con la velocidad de un fluido  $\mathbf{u}$ . En ausencia de vórtices, el fluido es irrotacional  $\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0$ , por lo que es puramente potencial  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \nabla\phi$ . La carga topológica puede relacionarse con la vorticidad  $\nabla \times \mathbf{u}$  al notar que, para cualquier integral cerrada,

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = \int d^2r \nabla \times \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

donde la segunda integral es sobre el **área** encerrada por el camino. Como el lado izquierdo es un múltiplo entero de  $2\pi$ , uno puede establecer

$$\nabla \times \mathbf{u} = 2\pi \sum_i n_i \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \hat{\mathbf{z}},$$

que describe una colección de vórtices de carga  $n_i$  en los sitios  $\mathbf{r}_i$ . Si establecemos ahora

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 = \underbrace{\mathbf{u}_0}_{\text{irrotacional}} - \underbrace{\nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_z \psi)}_{\text{relacionado a cargas topológicas}}$$

y aplicando rotor,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{e}}_z \nabla^2 \psi \\ \Rightarrow \nabla^2 \psi &= 2\pi \sum_i n_i \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

Como se dijo con anterioridad, energéticamente solo es permitido  $n = -1, 0, 1$ . Al volver a ver la ecuación para  $\nabla^2 \psi$ , es claro que hay una clara analogía entre vórtices (cargas topológicas) y un **gas de Coulomb** (cargas eléctricas)!

De manera similar al Hamiltoniano 4.11, podemos escribir una acción para el sistema

$$S(\mathbf{u}) = \frac{J}{2} \int d^2r \left[ (\nabla\phi)^2 - 2\nabla\phi \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{z}}\psi) + (\nabla \times \hat{\mathbf{z}}\psi)^2 \right]$$

Una integración por partes muestra que el segundo término se anula ( $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$ ), mientras que el tercer término puede ser simplificado al notar que  $\nabla\psi$  y  $\nabla \times (\hat{\mathbf{z}}\psi)$  son ortogonales. Nos queda,

$$S_t \equiv \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla \times \hat{\mathbf{e}}_z \psi)^2 = -\frac{J}{2} \int d^2r \psi \nabla^2 \psi = -2\pi^2 J \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j C(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

donde tenemos el potencial Coulombiano  $C(x) = \ln|x|/2\pi$ , y agregamos el subíndice  $t$  para indicar la presencia de cargas topológicas. Pero, ¿qué ocurre cuando a la distancia vemos el centro de un vórtice  $|x| = 0$ ?

<sup>2</sup>que se explicarán en breve.

<sup>3</sup>ver <https://www.youtube.com/watch?v=e7U6mVbHCoo>.

Lógicamente, debe ser regularizada identificando la energía asociada al núcleo:

$$S_t = \sum_i E_i^{\text{core}} - 4\pi^2 J \sum_{i < j} \sigma_i \sigma_j C(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (4.14)$$

La función de partición puede ser dividida en dos:

- La primera refleja las excitaciones de las ondas de espines (asociado con el campo  $\phi(\mathbf{r})$ ),

$$Z_{\text{s.w.}} = \int D\phi \exp \left[ -\frac{J}{2} \int d^2 r (\nabla \phi)^2 \right].$$

- La segunda dará cuenta de los grados de libertad asociados a las cargas,

$$\begin{aligned} Z_t &= \int D\phi_t \exp[-H_t] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^{2N} d^2 r_i \right) \exp[-H_t] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{y_0^{2N}}{(N!)^2} \int \left( \prod_{i=1}^{2N} d^2 r_i \right) \exp \left[ 4\pi^2 J \sum_{i < j} \sigma_i \sigma_j C(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \end{aligned}$$

donde la variable de integración en la primera integral es  $r_i = x_i/a$ , siendo  $x_i$  es la posición del centro del vórtice, y donde definimos la **fugacidad** de los vórtices como

$$y_0 \equiv e^{-S^{\text{core}}}, \quad (4.15)$$

que nos dice cómo siente el sistema la presencia de los vórtices. Una fugacidad pequeña nos indica una configuración con vórtices energéticos compactos, por lo que su presencia no se advierte en largas escalas<sup>4</sup>. Por el contrario, si la fugacidad es grande, tenemos menos energía condensada en el núcleo y un costo energético significativo del campo 'arremolinado' a grandes distancias de los **vórtices libres**.

Como ambas partes son independientes, pueden ser tratadas independientemente, con  $Z_{\text{tot}} \approx Z_{\text{s.w.}} Z_t$ . Como la función de partición Gaussiana  $Z_{\text{s.w.}}$  es completamente analítica, cualquier transición de fase debe venir de la otra contribución,  $Z_t$ .

Recordemos que dedujimos heurísticamente que a bajas temperaturas esperamos la unión de vórtices con antivórtices, que en el gas de Coulomb no son más que dipolos), mientras que a altas temperaturas la asociación se rompe, se disocian los dipolos y forman plasma. Las dos fases pueden ser distinguidas al examinar la interacción entre dos cargas de prueba con una gran separación  $X$ . En ausencia de cargas internas, ambas partículas interactúan mediante una interacción Coulombiana común  $C(X)$ . Por otro lado, si la muestra está a una temperatura suficiente para disociar los vórtices de los antivórtices, la interacción entre las cargas se verá apantallada, es decir interactuarán vía  $C(X)/\epsilon$ , siendo  $\epsilon$  una constante dieléctrica efectiva.

Para cuantificar este apantallamiento, podemos computar la interacción efectiva entre ambas cargas ubicadas en  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  de manera perturbativa en la fugacidad  $y_0$ . A orden cuarto, es posible obtener una fugacidad efectiva

$$e^{-S_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = e^{-4\pi^2 J C(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \left[ 1 + 16\pi^5 J^2 y_0^2 C(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \int_1^{\infty} dx x^3 e^{-2\pi J \ln x} + \mathcal{O}(y_0^4) \right]$$

donde la variable  $x$  debe ser reescalada para absorber las distancias cortas al cambiar el *cut-off*. La integral

<sup>4</sup>Una forma de pensarlo es que si hay vórtices y al mirar de lejos no nos damos cuenta, entonces  $y_0 \ll 1$ .

comienza en  $x = 1$ , que es una manera de decir que no se integra el núcleo. Como indica la expansión  $e^x = 1 + x + \dots$  podemos reescribir la ecuación anterior como

$$e^{-S_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = e^{-4\pi^2 J C(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \cdot \exp \left[ 16\pi^5 J^2 y_0^2 C(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \int_1^\infty dx \underbrace{x^3 e^{-2\pi J \ln x}}_{=x^{3-2\pi J}} + \mathcal{O}(y_0^4) \right].$$

Si aceptamos  $S_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \simeq 4\pi^2 J_{\text{eff}} C(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , entonces encontramos una rigidez efectiva

$$J_{\text{eff}} = J - 4\pi^3 J^2 y_0^2 \int_1^\infty dx x^{3-2\pi J} + \mathcal{O}(y_0^4) \quad (4.16)$$

con lo que podemos inferir la constante dieléctrica del medio  $\epsilon = \frac{J}{J_{\text{eff}}}$ . Sin embargo, ¿dónde está el cambio de comportamiento que razonamos fuera cerca de  $J_c = 2/\pi$ ? Para ver con más detalle el procedimiento de renormalización, se seguirá una manera similar a la empleada por José, Kadanoff, *et al*<sup>5</sup>, que consiste en dividir la integral de 4.16 en dos partes,

$$\int_1^\infty \rightarrow \int_1^b + \int_b^\infty.$$

La contribución no singular de distancias cortas puede ser evaluada e incorporada a  $J$ . Recordando que los valores efectivos de  $J$  vienen del argumento de exponenciales, podemos reescribir 4.16 con los signos

$$\begin{aligned} J_{\text{eff}}^{-1} &= J^{-1} + 4\pi^3 y_0^2 \int_1^\infty dx x^{3-2\pi J} \\ &= \underbrace{J^{-1} + 4\pi^3 y_0^2 \int_1^b dx x^{3-2\pi J}}_{\tilde{J}^{-1}} + 4\pi^3 y_0^2 \int_b^\infty dx x^{3-2\pi J} \end{aligned}$$

Ahora viene el viejo truco: reescalar ( $x \rightarrow x/b$ ). Mientras hacemos esto, la integral cambia

$$\int_b^\infty dx x^{3-2\pi J} \rightarrow \int_1^\infty dx \frac{1}{b} \left( \frac{x}{b} \right)^{3-2\pi J}$$

donde el término  $b^{4-2\pi J}$  puede ser absorbido por  $y_0^2$  para convertirse en su versión renormalizada  $\tilde{y}_0 = b^{2-\pi J} y$ . De esta manera, encontramos una ecuación para  $\tilde{J}^{-1}$  equivalente a 4.16, pero con los parámetros  $J$  y  $y_0$  reescalados

$$J_{\text{eff}}^{-1} = \tilde{J}^{-1} + 4\pi^3 \tilde{y}_0^2 \int_1^\infty dx x^{3-2\pi J} + \mathcal{O}(y_0^4)$$

Siguiendo la definición de las funciones beta 3.4, definimos  $b = e^\ell \approx 1 + \ell$ , obteniendo las funciones beta para una transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless

$$\begin{aligned} \frac{dJ^{-1}}{d\ell} &= 4\pi^3 y_0^2 + \mathcal{O}(y_0^4) \\ \frac{dy_0}{d\ell} &= (2 - \pi J) y_0 + \mathcal{O}(y_0^3) \end{aligned} \quad (4.17)$$

las cuales nos ayudan a esbozar las trayectorias de la constante de acoplamiento (inversa)  $J^{-1}$  y de la fugacidad  $y_0$ . Podemos notar que  $J^{-1}$  aumenta monótonamente con  $\ell$ , mientras que la relación de recursión para

<sup>5</sup>J. V. José, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, and D. R. Nelson, Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model, *Phys. Rev. B* **16**(1977), 1217-41 .

$y_0$  cambia de signo en  $J_c^{-1} = \pi/2$ . El flujo de GR separa el espacio de parámetros en dos regiones (ver figura 4.3). Uno corresponde a temperaturas bajas (región sombreada) y el otro a temperaturas altas  $T > T_c$ . Antes de entrar en detalle, es preciso explicar qué diantres significan esas líneas.

Primero, recordemos que el procedimiento GR consiste en comenzar estudiando el comportamiento del sistema en una región muy pequeña, para ir escalando sucesivamente y terminar con el comportamiento a macro-escala (o escala humana). Este proceso es unidireccional, ya que para aumentar la escala debo integrar las pequeñas longitudes, por lo que pierdo el detalle. Al faltar información, no puedo volver a una escala menor. Las líneas con flechas en la figura 4.3 nos dice que si queremos ver la física en escala humana debemos seguir el flujo hacia la derecha. Mientras más a la derecha, mayor es la escala de trabajo. ¿Qué ocurre entonces con aquellas líneas que *mueren* en  $y_0 = 0$ ? Simple: desde ese punto, el sistema es invariante de escala. Por otro lado, el flujo debe comenzar en algún sector del diagrama. El punto de inicio del flujo nos dice cuál es la escala mínima en la cuál podemos trabajar adecuadamente con alguna teoría. Así, a lo largo de toda la línea continua en 4.3 el sistema es el **mismo**, solo varía la escala. La línea discontinua representa sistemas **distintos**, cada uno con temperaturas (y por tanto constantes de acoplamiento) distintas.

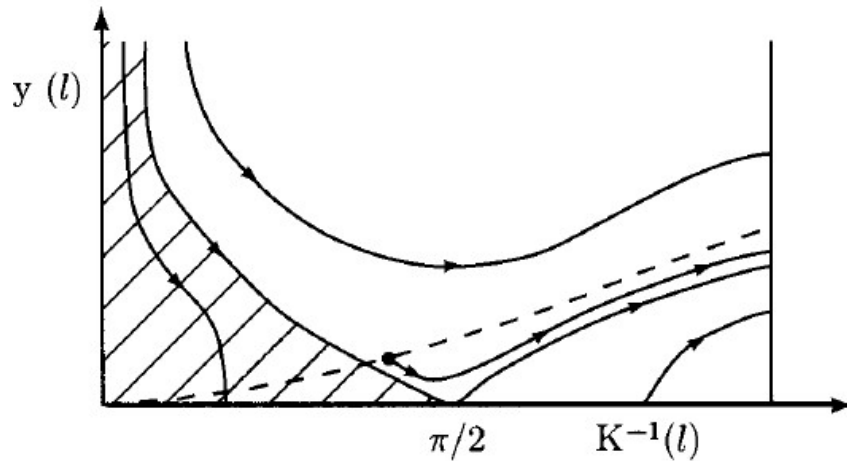


Figura 4.3: Flujo de Renormalización para las relaciones 4.17, donde la notación es  $y_0 \rightarrow y$ ,  $J^{-1} \rightarrow K^{-1}$ . La región sombreada corresponde a temperaturas  $T < T_c$ . El punto sobre la línea discontinua demarca el origen del flujo para un sistema con temperatura  $T > T_c$ . La línea discontinua es solo una línea de condiciones iniciales como función de  $T$ .

Con esto claro, vamos a los detalles del diagrama. Comenzar por las temperaturas altas es más sencillo. Si recordamos la discusión de la sección 4.4.2, en altas temperaturas esperábamos la proliferación de vórtices **no unidos** con antivórtices. En la analogía con un gas de Coulomb, eso es equivalente a un plasma con cargas libres. Esto es justamente lo que nos dice el diagrama de flujo. Si nos concentramos en la línea superior de 4.3, a medida que aumentamos la escala la constante de acoplamiento  $J$  se hace más pequeña y la fugacidad  $y_0$  más grande, por lo que el desequilibrio entre la cantidad de vórtices y antivórtices es notorio incluso en grandes escalas.

A bajas temperaturas (es decir, la región sombreada), el flujo termina irrevocablemente en una línea de **puntos fijos** con  $y_0 = 0$  y obtenemos una constante de acoplamiento efectiva  $J_{\text{eff}} \geq 2/\pi$ . La fuerza del acoplamiento es dado por el punto en la cuál el flujo acaba. Esto se puede pensar como un estado aislante, en la cual los vórtices son de tamaño pequeño, por lo que no afectan a la macro-física. Dicho de otra manera, cuando la presencia de vórtices es imperceptible a gran escala ( $y_0 = 0$ ), esperamos una gran constante de acoplamiento  $J_{\text{eff}} \geq 2/\pi$ , hecho que se explica por la presencia de **pares** de vórtices-antivórtices, tal como se supuso en 4.4.2.

## 4.5. Vanguardia en BKT

Los temas que desarrollan la relación entre la materia y los defectos topológicos han disfrutado de un gran interés en el último tiempo, especialmente debido al premio Nobel del año 2016 y al interés en los aislantes topológicos para la computación cuántica.

En lo que resta, se detallará los pormenores de un trabajo de vanguardia en el área:

- Hu, Z., Ma, Z., Liao, YD. et al. **Evidence of the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase in a frustrated magnet.** Nat Commun 11, 5631 (2020).

Primero, desmenucemos el título. ¿Qué es un magneto frustrado? En pocas palabras, es la incapacidad para establecerse en un mínimo energético cómodo. Por ejemplo, si en una red triangular fijamos el espín de dos vértices, entonces el sistema no puede ser ni ferromagnético ni antiferromagnético. Otros ejemplos de frustración se pueden encontrar en redes hexagonales<sup>6</sup>.

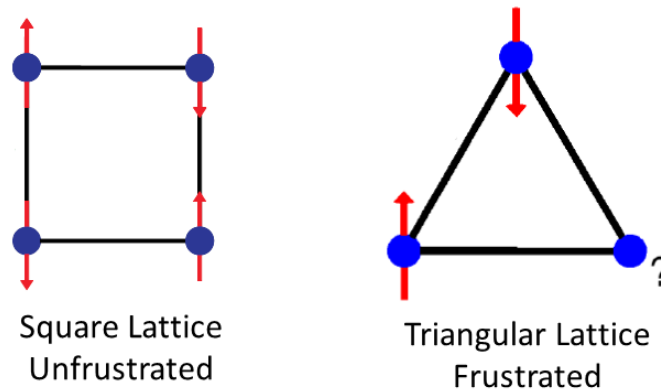


Figura 4.4: Ejemplo de una red sin frustración y con frustración. ¿Qué espín debería tener el tercer vértice para minimizar la energía?

Segundo, ¿no es trivial preguntar por evidencias? después de todo, así se construye la ciencia. La respuesta es sí y no. En películas superconductoras, la evidencia está hace 40 años<sup>7</sup>, pero en materiales magnéticos no es tan sencillo. La no trivialidad viene de la detección de los pares vórtices-antivórtices utilizando campos magnéticos que no interfieran en la proliferación ni unión de los vórtices en el sistema dos dimensional. La detección directa y sin ambigüedades es algo sumamente escurridizo.

Tercero, ¿no que la transición BKT está reservada para sistemas con continuos, y por tanto no es aplicable a una red de Ising como la de la derecha de 4.4? En general, esto es cierto, pero no para un modelo de Ising frustrado en una red triangular. La extrañeza no se queda allí, sino que está bien establecido teóricamente<sup>8</sup> que el modelo hospeda una fase BKT encerrado por dos transiciones BKT sucesivas. Lo único que faltaba es la realización material y la detección experimental con campos magnéticos débiles. Justamente esta es la contribución de la investigación.

<sup>6</sup>Recomiendo fuertemente el video <https://www.youtube.com/watch?v=Y9KZTCVvJ0g> en donde quedará claro el concepto en 90 segundos.

<sup>7</sup>Hebard, A. F. Fiory, A. T. **Evidence for the Kosterlitz-Thouless transition in thin superconducting aluminum films.** Phys. Rev. Lett. 44, 291–294 (1980).

<sup>8</sup>Ver: Li, H. et al. **Kosterlitz-Thouless melting of magnetic order in the triangular quantum Ising material TmMgGaO<sub>4</sub>.** Nat. Commun. 11, 1111 (2020).



Por tanto, el secreto para realizar la fase BKT en la red de Ising es justamente la frustración magnética, y de esta manera emerge un modelo XY efectivo en el modelo TLI (*triangular lattice Ising model*), por lo que esperamos que el parámetro de orden complejo  $\psi$  se pueda expresar como una combinación de las componentes de la red de Ising  $m_{A,B,C}^z$ . En efecto, solo por mencionar, sí se puede:

$$|\psi|e^{i\theta} = \psi = m_A^z + e^{i2\pi/3}m_B^z + e^{i4\pi/3}m_C^z.$$

El material usado es el compuesto  $\text{TmMgGaO}_4$ , que ha demostrado replicar el modelo ideal TLI. Además, es posible obtener tajados dos dimensionales y que por tanto no muestran signos de transiciones de fase  $d = 3$  dimensional en la capacidad calorífica ni en la susceptibilidad magnética. Este nuevo material se comporta como un material antiferromagnético en bajas temperaturas (por debajo de  $\sim 1$  K) con simetría discreta  $\mathbb{Z}^6$ . A mayores temperaturas, emerge el modelo XY efectivo, por lo que puede actuar el mecanismo BKT.

En el trabajo se utilizó resonancia magnética nuclear (NMR), una sonda sensible de baja energía, para detectar la fase BKT. Aplicaron un campo de 3T para coleccionar las señales de  $^{69}\text{Ga}$  bajo NMR. Como se muestra en la figura 4.5, de las medidas NMR de la tasa de relajación  $1/T_1$  de la red de espines (que es una manera muy sensible de detectar fluctuaciones de espines), identificaron las dos temperaturas de transición BKT propias **para este en específico**,  $T_U \simeq 1.9$  K y  $T_L \simeq 0.9$  K, que corresponden a las transiciones BKT alta (U) y baja (L), donde una reside una **fase BKT** entre las dos temperaturas.

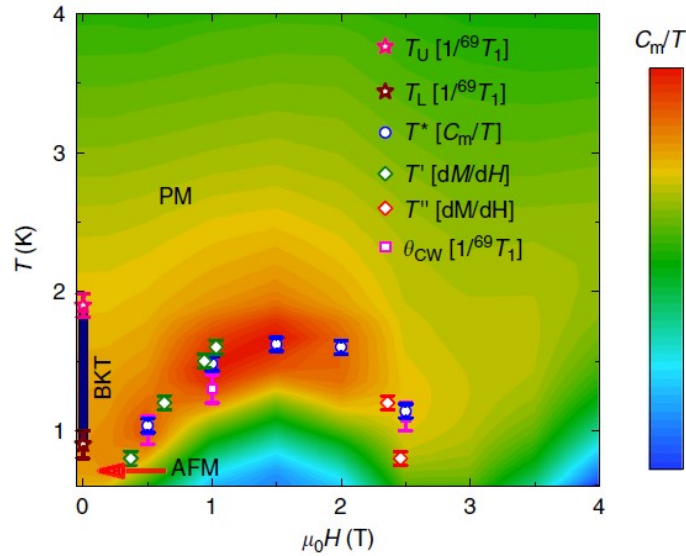


Figura 4.5: Diagrama de fase de  $\text{TmMgGaO}_4$ . Cuando el campo es nulo, el sistema puede estar en un estado paramagnético (PM), antiferromagnético (AFM), o en fase BKT, delimitado por las temperaturas  $T_L$  y  $T_U$ . El contorno de fondo representa el calor específico  $C_m/T$  para varios valores de campo y temperatura.

En la siguiente figura, se muestra la tasa de relajación  $1/T_1$  bajo campos  $\mu_0 H = 3 \text{ T}$  y  $1 \text{ T}$ , que reflejan las fluctuaciones de los espines.

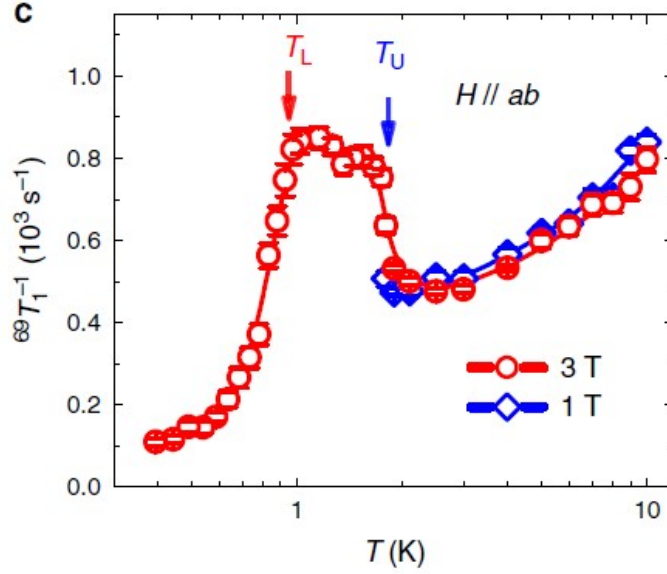


Figura 4.6: Gráfico de la tasa de relajación  $1/T_1$  versus la temperatura medida bajo campos a 3T y 4T. La meseta entre las temperaturas  $T_U \approx 1.9 \text{ K}$  y  $T_L \approx 0.9 \text{ K}$  es una característica de las fluctuaciones magnéticas fuertes en una fase BKT.

Cuando  $\mu_0 H = 3 \text{ T}$ , la tasa  $1/T_1$  primero decrece al enfriarlo desde los 10K, pero luego incrementa repentinamente en la temperatura  $T_U \approx 1.9 \text{ K}$ , indicando fluctuaciones de espín bastante fuertes. Por debajo de  $T_L \approx 0.9 \text{ K}$ , la tasa  $1/T_1$  decrece empinadamente. Notablemente, entre las temperaturas  $T_L$  y  $T_U$ , el nivel de fluctuaciones se mantiene alto, indicando la existencia de una fase altamente fluctuante con correlaciones de espín divergente, pese a no ser un caso con parámetro de orden de largo alcance (*long-range order*), que es la característica principal de un estado BKT. Esta es la primera vez que se observa aquella fase sin ambigüedad en un material magnético cristalino dos dimensional, encerrada entre dos transiciones de fase BKT.

## Capítulo 5

# Referencias

Para tener una buena intuición física previa de los conceptos de transición de fase, quiebre de simetría y el Grupo de Renormalización recomiendo leer

- **Sophie Gibb, Robin Hendry, Tom Lancaster - The Routledge Handbook of Emergence (2019, Routledge), Capítulo 19: Phase transitions, Broken Symmetry and the Renormalization Group, Stephen J. Blundell,**

lectura que seguí para la primera parte del texto. Los capítulos correspondiente a la teoría estadística de campos se pueden leer con un poco más de detalles en

- **David Tong - Statistical Field Theory (2017, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos).**

donde además se pueden obtener una visión acabada de GR y de la transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless. Sin embargo, para la transición BKT recomiendo seguir

- **Tom Lancaster, Stephen J. Blundell - Quantum field theory for the gifted amateur (2014, Oxford University Press), Capítulos 25, 29, 32, 34.**

para tener una primera impresión comprensible. Luego, recomendaría leer el trabajo de resumen disponible en internet,

- **Henrik Jeldtoft Jensen - The Kosterlitz-Thouless Transition (Department of Mathematics, Imperial College), disponible pinchando Aquí.**

Finalmente, para adentrarse en más detalles de la transición BKT y sus funciones beta, los libros

- **Chaikin P.M., Lubensky T.C. - Principles of Condensed Matter Physics (2000, Cambridge University Press), Capítulo 9.4**
- **Altland A., Simons B.D. - Condensed Matter Field Theory (2010, Cambridge University Press), Capítulo 8.**

fueron las bases para la última parte del trabajo.