

北京交通大学 2022-2023 学年暑期学期

计算机与信息技术学院 硕士研究生《智能计算数学基础》试题

出题教师：《智能计算数学基础》课程组

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 上课教师：_____

注意：1. 试卷共 50 道题，每题 2 分，满分 100 分。2. 题目排序与难度无关。3. 判断题请回答“是”或“否”。

1. 计算序列极限： $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n \log n} \right)$ 。

答案：+∞

2. 计算函数极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2}$ 。

答案：0

3. 计算二元函数 $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy + x - 2$ 在点 $(1, 0)$ 处的 Hessian 矩阵。

答案： $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

4. 判断题：定义在 \mathbb{R}^n 上的 Lipschitz 函数一定是连续函数。

备注：我们称 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 函数，若存在常数 $K > 0$ 使得 $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq K\|x - y\|_2$ 对任何 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都成立。

答案：对

5. 计算二元函数 $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ 在约束条件 $|x + y| \leq 1$ 以及 $|x - y| \leq 2$ 下的极大值。

答案： $\frac{19}{4}$

6. 计算平面点集 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$ 的面积。

答案：4

7. 计算二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^t P x + q^t x + r$ 的梯度和 Hessian 矩阵，其中 $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ ， $q \in \mathbb{R}^n$ ， $r \in \mathbb{R}$ 。

答案： $Px+q$ P

8. 判断题：对于任何 $P \in \mathbb{S}_{++}^n$ ，二次函数 $f(x) = x^t P x$ 在约束条件 $\|x\|_2 \leq 1$ 下有唯一的极小值点。

答案：对

9. 求出下述优化问题的极小值 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2 + yz \\ \text{subject to} & x + y - z = 1 \end{cases}$ 。

答案: $z=-18/7$ $y=-6/7$ $x=-5/7$

10. 设 $f(A) = \|X - AY\|^2$, 其中 A 、 X 和 Y 分别是维度为 $n \times m$ 、 $n \times k$ 和 $m \times k$ 的矩阵, 计算 $Df(A)$ 。

答案: $2AYY^t + 2XY^t$

11. 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 是否存在实数解? 若存在, 解空间的维数是多少?
存在 1

答案:

12. 判断题: 矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ 是正交方阵。

答案: 错误

13. 设 W 是三维欧氏空间中由 $(1, 1, 1)$ 和 $(1, 0, 2)$ 所生成的二维子空间, 计算向量 $(1, -1, 0)$ 在 W 上的投影向量。

答案: 法向量 $(2, -1, -1)$ 投影 $(0, -1/2, 1/2)$

14. 对于实矩阵 $A_{m \times n}$ 和 $B_{n \times m}$, 若存在非零向量 α 以及 $c \neq 0$ 满足 $AB\alpha = c\alpha$, 请写出矩阵 BA 的特征值为 c 的一个特征向量。

答案: Ba

15. 计算向量 $(1, -2, 3)$ 的 ℓ_1 范数。

答案: 6

16. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 计算函数 $f(x) = \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ 的最大值。

答案: 根号15

17. 判断题: 假设矩阵 A 的行向量线性无关, 请问 AA^t 是否是可逆方阵?

答案: 是

18. 利用奇异值分解计算矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的 rank 1 逼近。

答案:

19. 请用简洁的语言解释大数定理。

大量重复实验中，随机事件重复出现的频率向某个常数收敛，这个常数就是概率。

答案：.....

20. 请用简洁的语言解释中心极限定理。

足够多的独立同分布的随机变量之和趋于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

答案：.....

21. 对于何种被估计量，最大似然估计和最大后验估计是一致的。

先验等概率

答案：.....

22. 假设随机变量 x 和 y 的联合概率密度为 $f(x, y) = 1/4$ ，其中 $-1 \leq x, y \leq 1$ 。请问 x 和 y 是否正交？是否独立？是否相关？

正交、独立、不相关

答案：.....

23. 已知随机变量 $w = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10000} z_i$ ，其中 z_i 是相互独立的均匀分布随机变量， $z_i \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ 。请写出随机变量 w 的近似概率密度函数。

$N(0, 1/3)$

答案：.....

24. 假设 $y_1 = x_1 + w_1$ 和 $y_2 = x_2 + w_2$ ，其中 $w_1 \sim \mathcal{N}(a, M_1)$ 和 $w_2 \sim \mathcal{N}(b, M_2)$ 是独立的高斯噪声信号，注意， a, b, M_1, M_2 都是已知常数。计算似然函数 $p(y_1|x_1)$ 。

$$y[n] = h x[n] + w[n],$$

$$p(x(n) = +A) = p(x(n) = -A) = 0.5$$

$$p(x(n) = +A) = 0.8, \quad p(x(n) = -A) = 0.2$$

$$\{y(n)|x(n)\} \sim \mathcal{N}(h x(n), \sigma^2)$$

$$p(y(n)|x(n)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y(n)-hx(n))^2}{2\sigma^2}}$$

答案：.....

25. 接上题，定义2个向量， $y = [y_1, y_2]^t$ 和 $x = [x_1, x_2]^t$ ，计算似然函数 $p(y|x)$ 。

答案：.....

26. 接上题，当满足什么条件时，最大似然函数等价于最小距离 $\|y - x\|^2$ 。

答案：.....

27. 对于通信系统来说，传输的是信号，信号承载着消息，消息中的不确定成份是什么？

信息

答案：.....

28. 信息传输系统模型包括信源、编码器、___?___、译码器和信宿五个部分。请问“?”指的是什么？

信道

答案：.....

29. 盒子里有4个不同颜色的小球，随机选取一个小球并确定颜色，计算该事件提供的信息量。

$$-\log(1/4) = \log 4 = 2$$

答案：.....

30. 判断题：信源发出消息 x ，信宿收到消息 y ，则公式 $I(x; y) = I(x) - I(y|x)$ 是否正确？

错误

答案:

31. 已知两个信源分别为 $\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} Y \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$, 则在信源熵 $H(X)$ 和 $H(Y)$ 中, 较大的是 $H(Y)$, 其值为多少 bit/符号?

HX=1

HY=1/4*2*4=2

答案:

32. 联合熵公式 $H(XY) = H(X) + H(Y)$ 成立的条件是什么?

X、Y独立

HXY=HX+HY | X

故HY | X=HY=E (I (Y | X)) =E ((Y))

答案:

33. 判断题: 对于固定的信源 X 和信宿 Y , 平均互信息 $I(X; Y)$ 具有凸状性, 是信源概率分布 $P(X)$ 的上凸函数。

对

答案:

34. 判断题: 假设 p 和 q 是同一概率空间上的两种分布, 则 $D(p||q) = D(q||p)$ 。

错误

答案:

35. 判断题: 博弈问题中的帕雷托最优只是各种理想态标准中的最低标准。

正确

答案:

36. 判断题: 不完全信息博弈中的不确定性比不完美信息博弈中的不确定性要低。

错误、无法比较

答案:

37. 判断题: 如下图的博弈矩阵中, 策略组合 (E,E) 是一个纳什均衡解。

		Player 2	
		E	S
Player 1	E	2, 2	-1, 3
	S	3, -1	0, 0

错误

答案:

38. 判断题: 斯塔克伯格博弈是多智能体强化学习的理论基础。

错误

答案:

39. 判断题: 在一个完美回忆的不完美信息博弈中, 行为策略与混合策略等价。

对

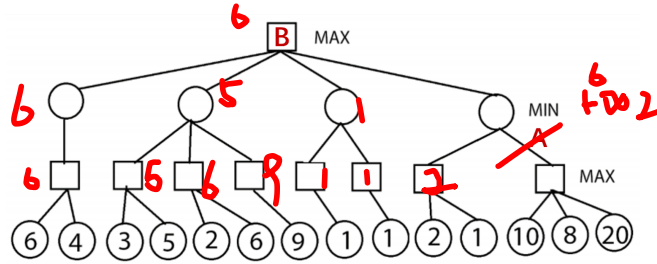
答案:

40. 一个正则型博弈可以等价转化为一个带有__?__的不完美信息扩展型博弈。请问“?”指的是什么?

信息集

答案:

41. 判断题: 下图的博弈树中, A 处可以进行 α - β 剪枝。



答案:

42. 上图的博弈树中, B 处的值是多少?

6

答案:

43. 判断题: 已知 L 问题是NP-complete问题, 如果 S 可以规约到 L 即 $S \leq L$, 则 S 是NP-hard问题。

错误

答案:

44. 判断题: NP-complete问题一定是NP-hard问题。

对

答案:

45. 判断题: 如果 $P \subseteq NP$, 则 $P=NP$ 。

错误

答案:

46. 判断题: 近似算法的近似度一定大于等于1。

错误

答案:

47. 判断题: 如果一个NP-complete问题有多项式时间复杂度的解法, 则所有NP-complete问题均有多项式时间复杂度的解法。

正确

答案:

48. 判断题: NP问题的补问题也是NP问题。

错误

答案:

49. 请将作业调度问题“已知 m 个性能相同的处理器和 n 个作业单核执行的时间记为 J_i , $1 \leq i \leq n$, 求最小的时间 t 使得在 t 时间内 m 核完成 n 个作业的调度”, 将其转化为判断问题。

T 时间内是否完成 m 核 n 个作业的调度

答案:

50. 接上题, 将其转化为语言描述。

J, m, t : 给定一个执行时间组合 J ($0-m-1$), 可以在 t 时间内完成 m 核 n 个作业的调度

答案: