$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS\frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0$$

$$C(S,X) = Se^{-\delta t}N(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

N(.) cumulative normal distribution

금융공학 소개

AORC URP 프로그램

AORC

서승석

산업수학?

Applied and pure mathematics

'A pure mathematician, when stuck on the problem under study, often decides to narrow the problem further and so avoid the obstruction.

An applied mathematician interprets being stuck as an indication that it is time to learn more mathematics and find **better tools**'

Ingrid Daubechies, *Big Data's Mathematical Mysteries*,
Quanta magazine, Dec 2015

주관적인 산업수학의 정의:
응용수학에서 산업계의 응용을 더욱 강조한 말이 '산업수학 '

금융과 수학의 만남: financial engineering

- 금융에 수학이론을 적용한 사례는 프랑스의 Bachelier (Théorie de la speculation, Gauthier-Villars, Paris, 1900, Thesis)가 있으나 오랫동안 잊혀졌을 정도로 주목을 받지 못함

- 경제학 문제를 수학의 방법론으로 이해하는 경향은 Markowitz가 최적화 방법론을 통하여 위험자산에 대한 portfolio 이론을 수립하는 1950년대 중반이후 매우 활발해 짐

- Bachelier의 업적을 재발굴한 Paul Samuelson은 주식의 시계열 모델링에 geometric Brownian motion을 도입하여 이후 블랙 숄즈의 옵션 이론 등의 발전에 기여함

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \qquad d(\ln S) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dX.$$

- Geometric Brownian motion

- Black Scholes의 파생상품 가치 산정에 대한 논문이 금융공학 발전에 크게 기여

  Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy, 81 (May/June 1973): 637-59.

파생상품의 정의

- 파생상품
    - 기초자산의 가격에 연동하여 가치가 결정되는 금융상품

- 파생상품은 기초자산, 발행 기준일, 만기일, 만기 수익구조(payoff) 등 계약조건에 의해 거래가격이 결정된다

- 파생상품 시장
    - 선도계약 (forward contracts) 형태의 파생상품의 역사는 매우 오래됨
    - Chicago Board of Trade (CBOT)는 1848년 설립
    - Chicago Mercantile Exchange (CME) 1919년 설립
    - Chicago Board Options Exchange (CBOE) stock call option 1973년부터 거래
    - 본격적인 파생상품 시장의 활성화는 전자 거래가 도입된 90년대 이후

- 현재 파생상품 시장은 규격화된 상품은 물론 OTC(over the counter) 방식으로 양자간 계약에 의해 다양한 맞춤형 상품을 거래하고 있음

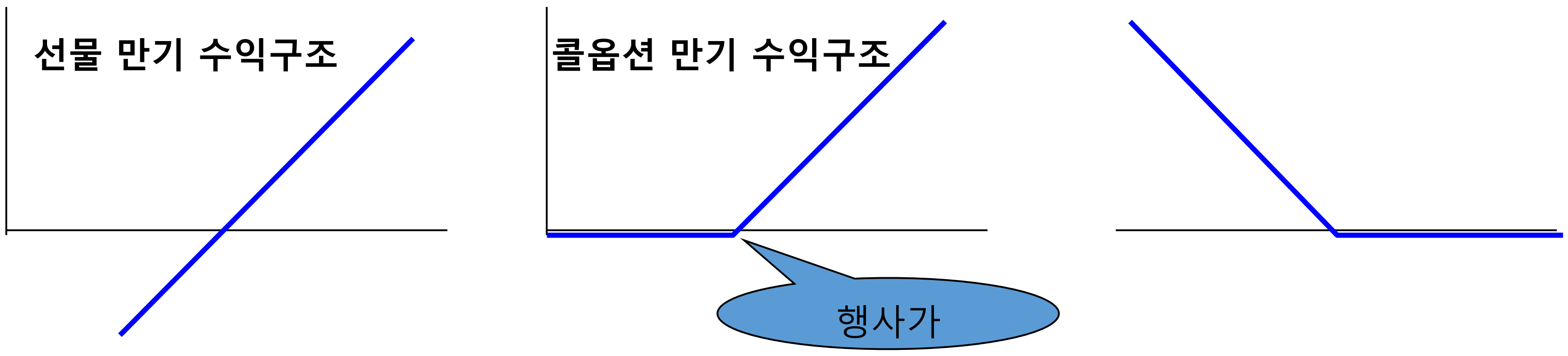
파생상품의 종류

□ **선물 (futures)**

- ✓ 미래 특정 시점에 미리 정한 가격(행사가)로 기초자산을 매매할 것을 약속하는 계약
- ✓ 장내 거래되는 것이 일반적으로 KOSPI 200 지수 선물이 대표적인 상품임

□ **옵션 (options)**

- ✓ 미래 특정 시점에 미리 정한 가격(행사가)로 기초자산을 매수/매도할 수 있는 권리
- ✓ 매수할 수 있는 권리를 콜옵션(call option)이라 부름
- ✓ 매도할 수 있는 권리를 풋옵션(put option)이라 부름
- ✓ 장내 거래되는 것이 일반적으로 KOSPI 200 지수 옵션이 대표적인 상품임



파생상품의 종류

- 장내 거래 주식 관련 파생상품
  - 장내 지수 선물: KOSPI 200 지수를 기초자산으로 하는 선물 (3,6,9,12월 만기물)
  - 장내 지수 옵션: KOSPI 200 지수를 기초자산으로 하는 옵션 (매월 만기물 거래)
  - 주식 선물: 삼성전자, POSCO, 하이닉스 등 현재 25개 개별주식을 기초자산으로
  - 지수선물과 마찬가지로 3,6,9,12월물이 거래됨
  - 개별 주식 옵션: 삼성전자 등 개별주식을 기초자산으로 하는 옵션
    현재 거의 거래량이 없음
  - ELW: 장외파생상품인가를 가진 증권사가 발행하고 유동성을 공급하는 상장된 파생상품

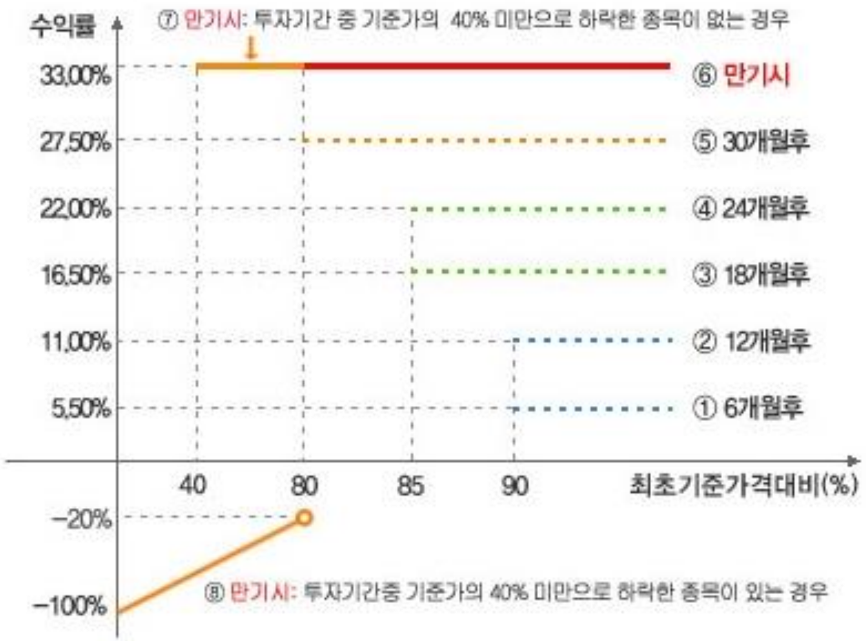
- 장외 계약 주식 관련 파생상품
  - ELS(Equity Linked Securities): 주가 및 지수에 연동된 파생결합증권
  - Equity swap: 통상 주식의 performance와 CD등 변동금리를 swap하는 계약

장내 파생상품 예시


[0501] 선물옵션 현재가(I)
선물옵션 현재가(I)
선물옵션 복수현재가
선물옵션 종합시세(I)
선물옵션 종합시세(II)
201G10 262
C 201210 262.5
[단위:계약,백만]
주문
차트
현재가 3.05 ▲ 0.45 (17.31 %)
거래량(전일) 9,030 (160,107)
거래금액(전일) 14,447 (197,322)
미결제(변동) 15,231 (-262)
매도호가 3.05
매수호가 3.00
이 론 가 2.79
상한가/하한가 38.85 / 0.01
KOSPI 200 262.81 ▲ 0.89 (0.34 %)
KODEX 200 26,360 ▲ 120 (0.46 %)
건수 매도 09:46:16 매수 건수
48 195 3.25
48 256 3.20
46 286 3.15
54 262 3.10
19 57 3.05
시 가 3.15 3.00 123 38
고 가 3.60 2.99 75 20
저 가 2.94 2.98 186 19
시가대비 ▼ 0.10 2.97 236 14
2.96 74 17
619 3,807 1,002 4,809 462
잔량체크
기본 매매동향 손익구조 시가총액 관심종목
전일종가 2.60 내재변동성 21.14
델 타 0.5300 역사적변동 19.24
감 마 0.0600 내재가치 0.28
세 타 -0.2300 시간가치 2.77
베 가 0.1300 괴리도/괴리율 0.26 / 9.13
로 0.0200 잔 존 일 7
거래기간최고 7.60 거래개시일 2012/08/01
거래기간최저 0.90 거래종료일 2012/10/11
0.00 0.00 (0.00 %)
0.00 0.00 (0.00 %)
체결 틱/분 호가차트 1분차트 옵션종합
시간 체결가 대비 체결량 거래량
09:46:13 3.05 ▲ 0.45 8 9,030
09:46:12 3.05 ▲ 0.45 2 9,022
09:46:11 3.05 ▲ 0.45 4 9,020
09:46:11 3.05 ▲ 0.45 1 9,016
09:46:07 3.05 ▲ 0.45 1 9,015
09:46:03 3.05 ▲ 0.45 4 9,014
09:46:03 3.05 ▲ 0.45 1 9,010
09:46:03 3.05 ▲ 0.45 5 9,009
09:46:03 3.05 ▲ 0.45 1 9,004
[MCA00000] 정상처리 되었습니다.
09:17:15

장외 파생상품 예시

상품개요



구분	내용
모집한도	100 억원
청약기간	2010.11.26-2010.11.30(13시30분)
상품유형	원금비보장 / 자동조기상환형
	Step down형(90-90-85-85-80-80/40)
기초자산	KOSPI200 지수, HSCEI 지수
최고수익률	33.00% (연11.00%)
더미	33.00% (연11.00%)
만기/상환주기	3년/6개월
최초기준가결정일	2010.11.30

상품특징

- KOSPI200 지수, HSCEI 지수를 기초자산으로, 3년 만기,6개월 단위 Step down형 자동조기상환, 원금비보장형 상품으로,
- 만기까지 최초 기준가 대비 40% 미만으로 하락하지 않으면 연 11.00%의 수익률을 지급합니다!

금융공학의 역사: short history

- Bachelier 에 의해서 자산의 가격에 확률적인 개념을 적용하여 수학적으로 모델링 할 수 있다는 결과가 발표됨

  Louis Bachelier: Théorie de la Spéculation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17 (1900) 21-86

- Samuelson 이 Bachelier 의 자산 가격 모델의 결함을 보완한 geometric Brownian motion 을 도입

  P.A. Samuelson: Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. Industrial Management Review 6 (1965) 41-50

- Fisher Black 과 Myron Scholes 가 geometric Brownian motion 및 dynamic hedging 개념을 통하여 option 가격 결정 방정식을 완성

  F.Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities. J. Political Econom. 81 (1973) 637-654

- Black 과 Scholes 의 개념을 Merton 이 수학적으로 이론을 확립하고 확장 시킴

  R.C. Merton: The rational theory of option pricing. Bell J. Econ. Manag. Sci. 4 (1973) 141-183

- 1973년 CBOE(Chicago Board Options Exchange) 에서 처음 option trading 이 시작됨

금융수학의 발전

- Einstein 이 입자의 확산 과정을 수학적으로 설명하여 Brownian motion 의 수학적 기반을 마련함
  A. Einstein: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Annalen der Physik 17 (1905) 549-560

- Wiener 가 Brownian motion 을 엄밀하게 수학적으로 정의함

  N. Wiener: Differential space. J. Math. Phys. 2 (1923) 131-174

- Kolmogorov 가 확률론의 axiom 기반 이론을 완성
  A. N. Kolmogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnesse der Mathematik. Vol. 2, no. 3, 1933

- Ito 가 Brownian motion 같은 stochastic process 에 대한 미분적분학 개념을 도입

  K. Ito: Stochastic integral. Proc. Imperial Acad. Tokyo 20 (1944) 519-52

Origin of all the stories

- Bachelier, Théorie de la speculation, Gauthier-Villars, Paris, 1900, Thesis
- Adopt Brownian motion to economy (price of contingent claim)

$$\mathrm{Prob}\{X_{t+T} \leq x_T | X_0 = x_0\} = F(x_T - x_0; T).$$

$$F(x;t) \equiv F\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}};1\right) \equiv N\left[\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right], \qquad N[y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

- Bachelier's model has defects
  ① As the running period of a warrant increases, its value grows indefinitely, exceeding any bound.
  ② A random walk of price will result in price becoming negative with a probability that goes to ½ as $T \to \infty$.

- Samuelson, Paul A. (1965). *"Rational theory of warrant pricing",* Industrial Management Review, 6, 13-31.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \qquad d(\ln S) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dX.$$

- Geometric Brownian motion
- Stock price never becomes negative

Closed form solutions of european options

- Black F., Scholes M. "*The pricing of options and corporate liabilities* "
  The journal of Political Economy, Vol 81. No. 3, 1973, pp 637-654.
- Closed form solutions by no arbitrage argument
- Ito's lemma & fundamental solution of heat equation plays important role

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX \quad \xrightarrow{\text{Ito's lemma}} \quad d(\ln S) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dX.$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad \xrightarrow{\text{Transformations}} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \Delta V \quad \text{type}$$

- Solve initial value problem of parabolic equations from heat kernal K

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \qquad u(x, t) = \int K(x, y, t) f(y) dy = \frac{1}{4\pi t} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

- u(x,t) solves heat equation with initial value f(y).

Closed form solutions of european options

- Black Scholes formulas

$$C(S,t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$P(S,t) = N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S$$

where $N(\cdot)$ is the cumulative distribution function.

$T-t$ the time to maturity, S the spot price, K the strike price

r is the risk free rate, σ is the volatility.

C a call option price, P a put option price.

Risk neutral valuations of european options

- Cox, Ross, Rubinstein (1979) developed a simplified tree approach of risk neutral valuation
- Harrison & Kreps (1979) developed a continuous version
  - equivalent martingale measure (risk neutral measure)
- Risk neutral valuation makes simulation methods works for option pricing

$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_T)$ where V_0 is the price of the derivative, V_T the final payoff.

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}V_T\right) \quad \text{where } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ is the Radon-Nikodym derivative.}$$

$dS_t = rSdt + \sigma SdW_t$. where W_t is Brownian motion with measure $\mathbb{P}$.

Introduce a new equivalent martingale measure $\mathbb{Q}$ such that

$$\tilde{W_t} = W_t + \eta t, \qquad \text{where } \eta = (\mu - r)/\sigma.$$

$\mathbb{Q}$ exits from Girsanov's theorem.

Risk neutral valuations of european options

- Fundamental theorem of asset pricing
  Consider a financial market modeled by a price process S on an underlying probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. The following two statements are equivalent:
  ① S does not allow for arbitrage.
  ② There exists a probability measure $\mathbb{Q}$ on the underlying probability space$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, which is equivalent to $\mathbb{P}$ and under which the process is a martingale.

- Harrison, J. M. & Kreps, D. M. (1979). *"Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets"*, Journal of Economic Theory, 20, 381-408.
- Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981). *"Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading"*, Stochastic Processes and their Applications, 11, 215-260.
- Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1983). *"A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets"*, Stochastic Processes and their Applications, 15, 313-316.

Numerical solutions of options

- Closed form solutions in various options
  - Rubinstein M. *"Barrier options",* Journal of Finance, 32, 16
  - Reflection principle of probability theory
- Tree methods
  - Cox, J.C. & Ross S.(1976). *"The valuation of options for alternative stochastic processes"*, Journal of Financial Economics, 3, 145-166.
  - Cox, J. C. & Ross S. and Rubinstein M. (1979). *"Option Pricing: A Simplified Approach",* Journal of Financial Economics 7, 229-263.
- Brennan M.J., Schwartz E.S. *"Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion",* Journal of Finance, 32, 1699-1715.
  - Finite difference methods for parabolic equations
- Schwartz E.S. *"The Valuation of Warrants: Implementing a new approach"*, Journal of Financial Economics 4 (1977) pp79-93.
  - Finite difference methods for parabolic equations
  - Pricing an option on a stock which pays discrete dividends.
  - Derive the optimal strategy for exercising American options

Application of mathematical ideas to finance: inverse problems

Ideas from inverse problems

- R. Lagnado and S. Osher , "A technique for calibrating derivative security pricing models : numerical solution of an inverse problem",
  Journal of computational finance, 1997, no 1, vol 1

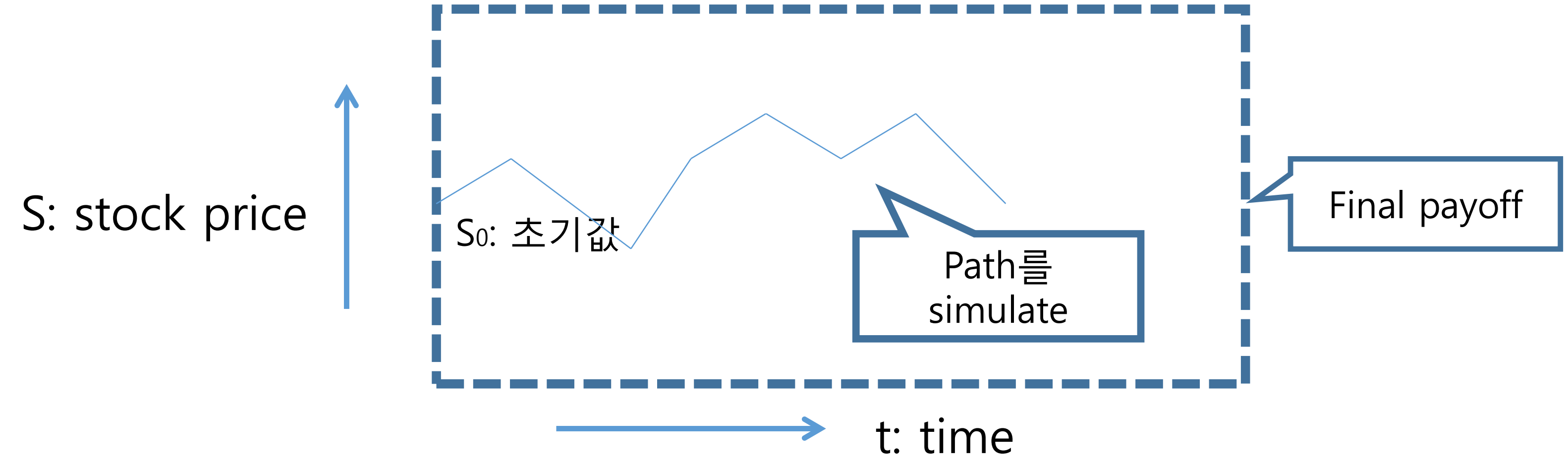
Ideas from geometry

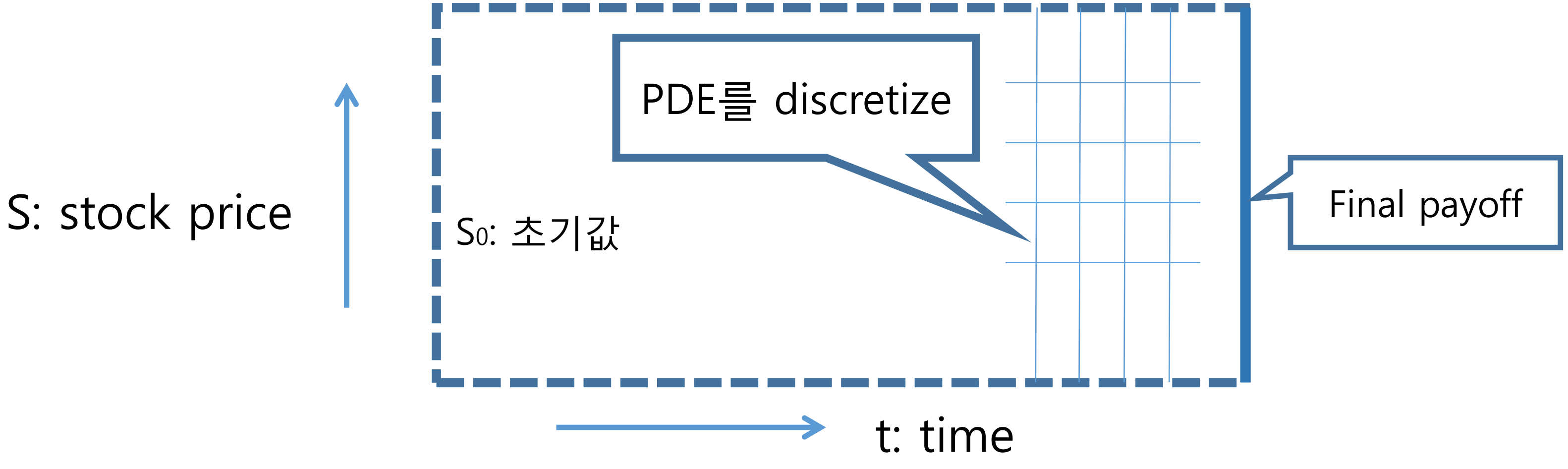
- Pierre Henry-Labordere,
  "Analysis, Geometry and Modeling in Finance. Advanced methods in
  option pricing", CRC press 2008.

- Volatility surface and hyperbolic geometry

Numerical solutions of options

- Closed form을 사용하지 않는 경우 simulation과 PDE를 사용하는 방법이 있음





Volatility models

- Black & Scholes assumed volatility is constant, which contradicts to the market data.
- Dupire and Derman & Kani developed non constant models of volatility
- It is called 'Local volatility model'
- Dupire developed in continuous setting, while Derman & Kani did in discrete setting (or tree)

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \qquad \text{where } \mu \text{ and } \sigma \text{ are constants.}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dS}{S} = \mu_t dt + \sigma(S_t, t) dW \quad \Rightarrow \quad \sigma^2(K, T, S_0) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

where C is European option prices, K is strike, T is expiration.

Hedge practice: ELS

I. 상품의 개요

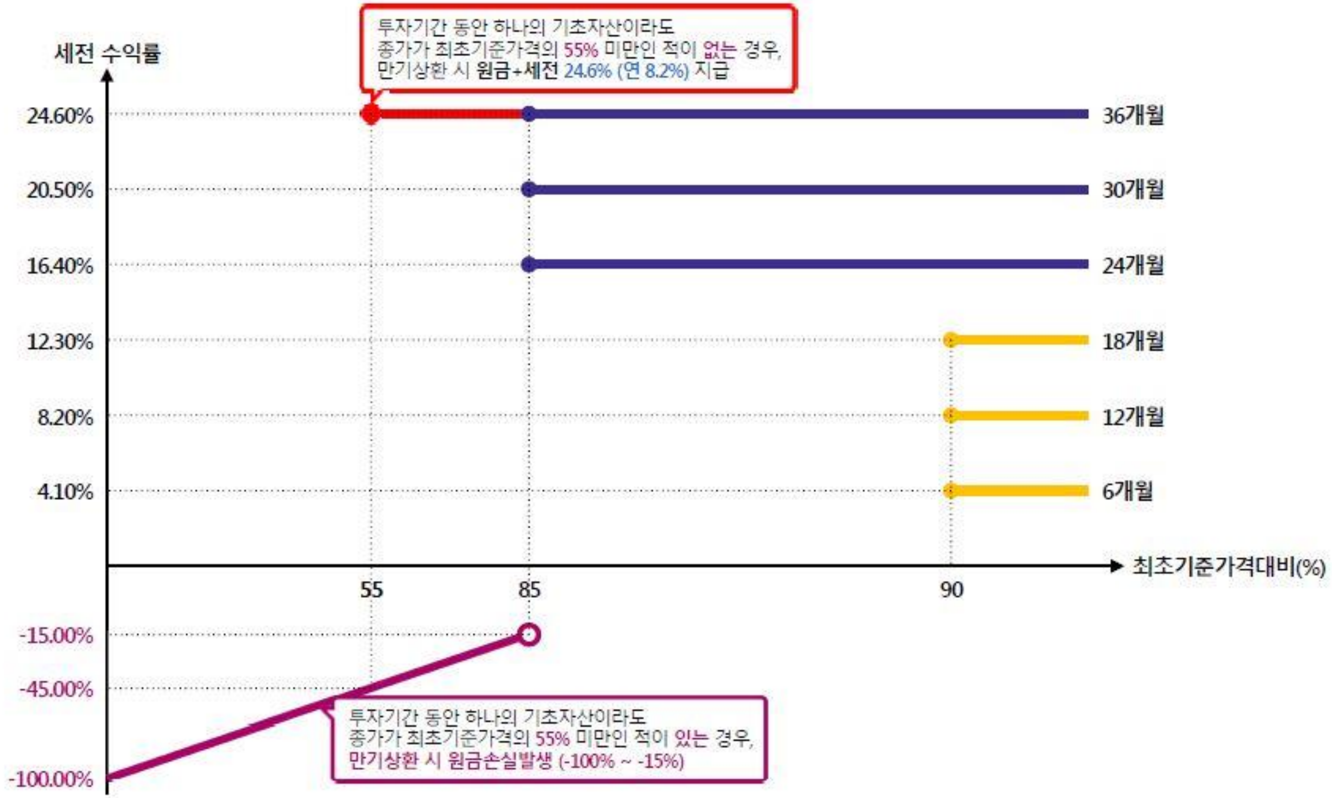
상 품 종 류	2Star Step-down 6Chance
위 험 등 급	고위험
고 객 투 자 성 향	고위험투자형이상이면서 파생상품 투자경험 1년 이상인 고객(만 65세 이상은 3년 이상)
기 초 자 산	EUROSTOXX50 지수, HSCEI 지수
판 매 예 정 한 도	100억원 (예정)
최 저 가 입 금 액	10만원 이상, 1만원 단위
청 약 기 간	2015년 04월 17일(금) ~ 2015년 04월 23일(목)
만 기 일(예정)	2018년 04월 24일(화)

■ 상환조건 및 수익률

구 분	상 환 조 건	수 익 률 (세전)
자동조기상환	각 중간기준가격 결정일에 각 기초자산의 종가가 모두 행사가격 이상인 경우	연 8.2%
만기상환	각 기초자산의 최종기준가격이 모두 최초기준가격의 85% 이상인 경우	24.6% (연 8.2%)
	하나의 기초자산이라도 종가가 최초기준가격의 55% 미만인 적이 없는 경우	24.6% (연 8.2%)
	하나의 기초자산이라도 종가가 최초기준가격의 55% 미만인 적이 있으며, 하나의 기초자산이라도 최종기준가격이 최초기준가격의 85% 미만인 경우	원금 × [하락률이 가장 큰 기초자산의 최종기준가격/최초기준가격] 지급 (원금손실발생: -100% ~ -15%)

Hedge practice: ELS

II. 상품구조의 이해 (2)

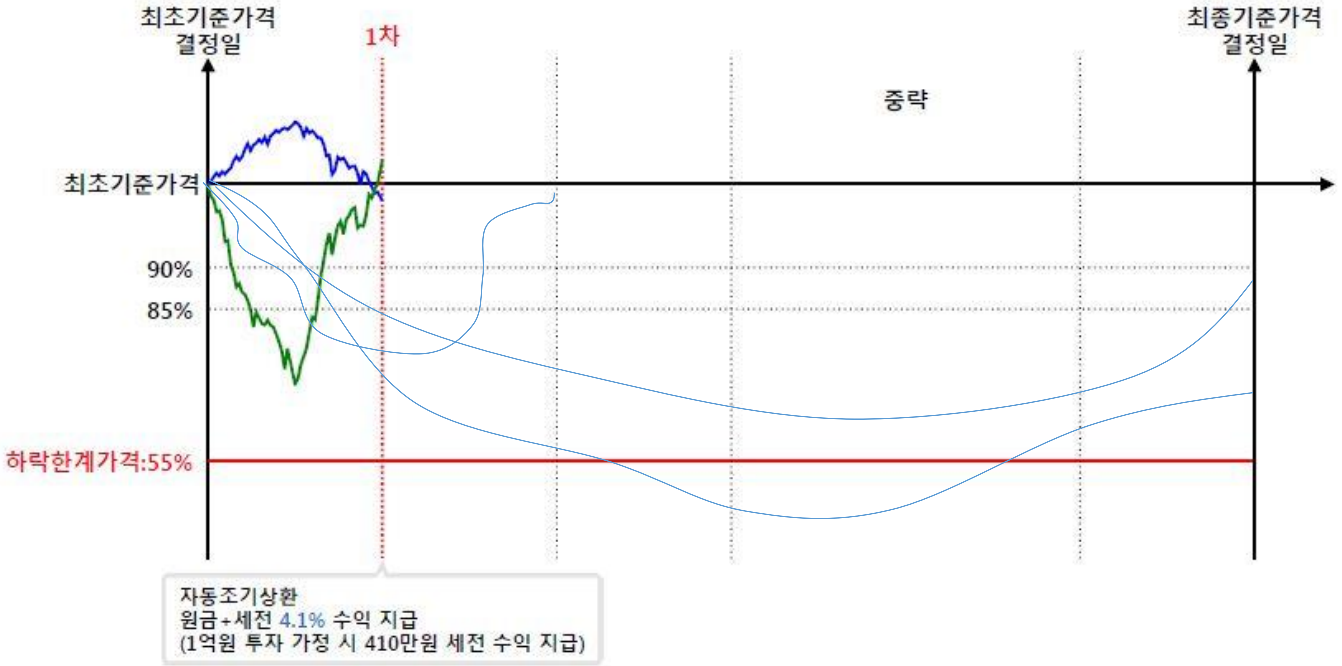


Hedge practice: ELS

상품 수익률 예시 (1) : 자동조기상환

1차 중간기준가격 결정일에 각 기초자산의 중간기준가격이 모두 행사가격[최초기준가격의 90%] 이상인 경우

→ 원금 + 세전 4.1% 수익 지급

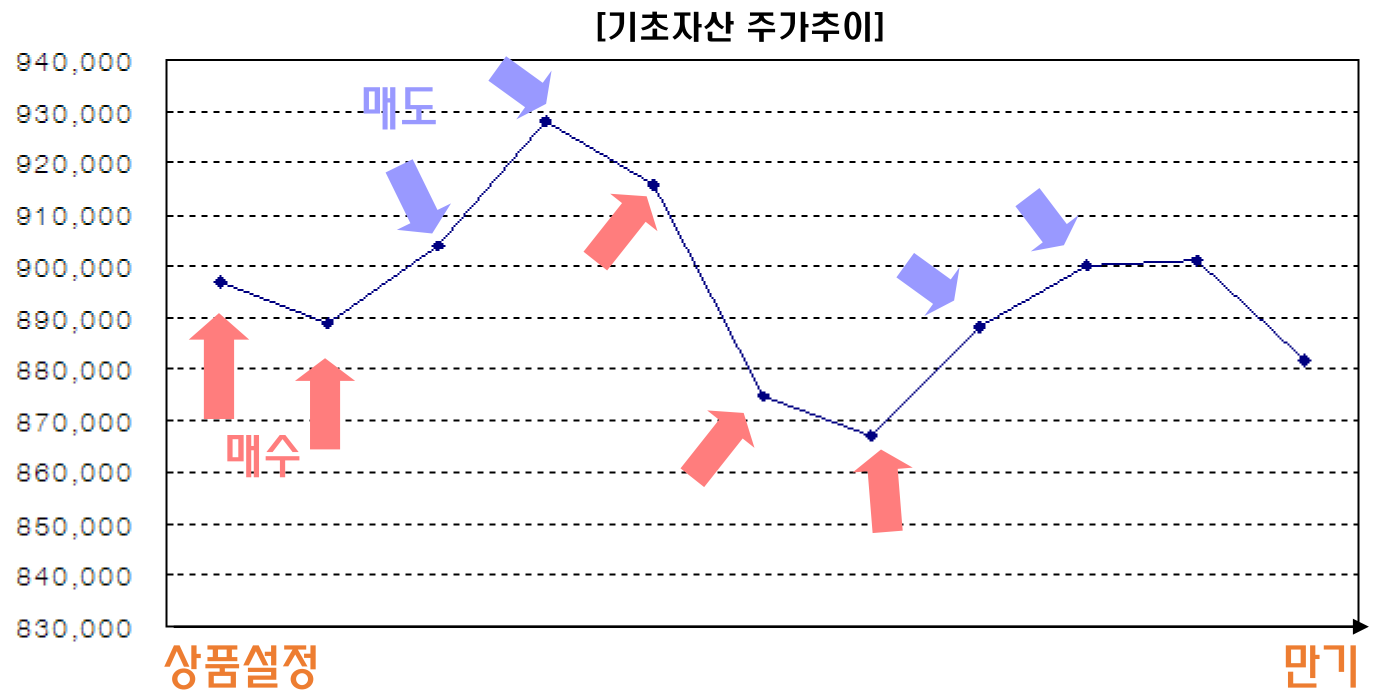


※ 하락한계가격 관찰 기간 : 최초기준가격결정일(불포함) 이후 최종기준가격결정일(포함) 동안

ELS 헤지 트레이딩 원리

❖ 구조화 상품은 사전에 수익 달성 조건과 그 조건이 만족되었을 때의 수익률 정해져 있음

❖ 이렇게 수익 달성 조건과 수익률이 미리 정해지는 부분은 상품 운용사가 투자자와 약속한 수익을 지급하기 위해 위험관리(헤지)를 하면서 만들어지는 부분으로 금융공학기법에 따라 이뤄짐

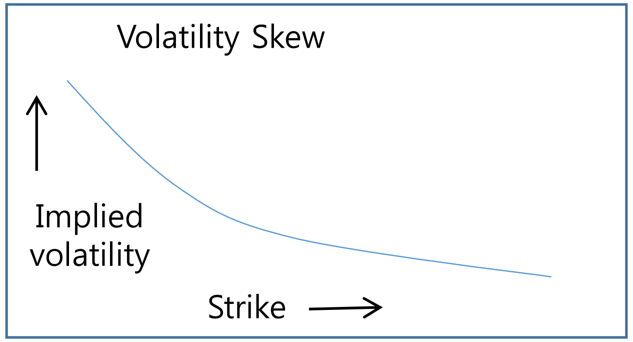


● 상품 설정 후, 해당 기초자산을 매수하며, 주가가 하락할 때 매수하고 상승할 때 매도하는 전략을 반복함.
즉 변동성이 클수록 더 많은 매매수익을 낼 수 있음.

→ 이것이 바로 변동성이 높은 주식을 기초자산으로 하는 ELS가 더 많은 수익을 지급하는 이유

Hedge practice: ELS

- ELS essentially long gamma product.
- Delta: long hedge, Gamma, Vega: Sell options
- Sell put option: help delta position (long delta effects)
- Volatility skew from lower strike improves ELS price
    - Increase possibility of knock-in



퀀트의 역할

- 트레이딩: 퀀트 전략 (시계열 분석이나 모델을 통한 분석 등)을 통한 운용의 경우 퀀트 트레이더가 전략 개발에 직접 관여함
- 세일즈: 상품 개발 혹은 구조화(structuring) 업무에 금융공학 지식을 갖춘 퀀트 (혹은 structurer) 인력 필요
- 프론트 퀀트: 가장 일반적인 퀀트 인력으로 금융상품(주로 구조화된 파생상품)의 가격을 결정하고 헤지 트레이더가 운용하기 위한 헤지 모형을 개발
- 리스크관리 퀀트: 금융회사의 영업 활동에 따른 위험을 측정 (VaR 등)하고 관리하기 위한 수리적 지원 업무
- 금융감독기구 퀀트: 은행의 stress test나 시장 상황 변화에 따른 시나리오 분석 등의 업무 및 파생상품 관련 exposure 관리 등 전 금융권을 대상으로 한 리스크 관리 업무 지원

퀀트의 업무

- Quant modelling
  - 전통적인 퀀트의 역할
  - 파생상품의 가격을 결정하는 모델 개발, 헤지 트레이딩을 위한 모델 개발
  - 리스크 관리를 위한 모델 개발
  - 증권사의 업무는 front, middle, back 업무로 이루어짐
  - Front와 middle에서 quant 인력이 필요함
  - Front quant는 트레이더의 요청에 따라서 모델을 개발하고 운용에 필요한 지원을 수행
  - Middle quant (리스크 관리)는 전사 리스크 관리를 위한 모델 개발
    - Front의 모델을 검증하고 위험도를 측정하는 업무 (VaR 계산 등)

- Quant trading
  - 투자은행의 prop trading (자기자본 매매) 업무가 강화되면서 금융상품 판매에 따른 헤지 매매가 아닌 퀀트 전략을 통한 자기자본 매매에 퀀트 인력이 필요하게 됨
  - 고빈도 매매 전략(High frequency trading), 시스템 매매 등 헤지펀드 전략을 개발하고 수행함
  - 전략을 수행하는 portfolio manager와 전략 개발 quant가 나누어지는 경우도 있음