紫晶-积分要義

本书为紫晶-铁石计划的衍生作品，系统全面的介绍了积分的诸多求解方法。

Sion Tine

2022 年 5 月 8 日

目录

楔子

方法完全在于对我们必须加以注意的事物给以适当的整理、分类，使之条理化。

—笛卡尔

近来复习了积分，才发现，原来积分的计算方法竟然如此庞杂，实在令人头疼。感觉比极限还难多了，究其原因，是因为在之前求极限、判断连续、求导、求微分时，都有针对函数的四则运算和复合的相应的运算法则。而到了求积分时，只有针对加、减运算的被积函数的积分法则，却没有专门处理乘积、商和复合形式的被积函数的积分法则，所以从一开始，积分学就不简单，如果学过《数值分析》就会知道，数值积分也是比数值微分复杂的，公式简直到了变态的地步。扯远了，为何要写这样一本书呢？我发现在中文互联网上苦于找不到一个全面的教材能把积分的解法讲清楚的，良莠不齐，鱼龙混杂。为了整合出积分学的核心要义，形成一个知识体系，此书由此问世！

本书主要分为三大部分，第一部分是从定积分开始，先介绍定义性质之类的基础，然后推广到不定积分，主要参考华章数学译丛的《University Calculus》（托马斯大学微积分）；第二部分通过介绍各种计算方法来寻找解题的要义，参考了中文期刊上的一些文章；最后一部分是进行延伸及总结。另外，本书中的一些内容是直接拷贝期刊里的（旁边有标注来源），但往往进行了一定程度的修改，如有冒犯，诸位作者，欢迎顺着网线爬过来打我。

第一章　基础

1.1　定积分

积分起源自对曲边梯形面积的计算，是一种对一个曲面进行无限分割来求面积的计算方法。简要的说就是：把区间细分为子区间，在每个子区间上把相应的函数 $f(x)$ 看作常数，然后计算每个小区间的面积（该区间的函数值乘以区间宽度），最后进行加和，就可以近似的到曲面的面积。[1]当区间无限细分成 n 个相等的子区间时，可以得到：$S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x$，另一种表示是区间的最大宽度趋于零[2]时，有 $S=\lim\limits_{||P||\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x$，由此，我们可以得到定积分的定义式：

$$\int_a^b f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x \tag{1.1}$$

其中 a b 为区间宽度，Δx 为区间宽度，ξ_k 为在每个区间上的函数值（一般取区间左端或右端）。

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

解：不用想夹逼定理了，既然放在这里，肯定是要用定积分定义式(1.1)来计算的。

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n} \qquad \text{根据 } \frac{1}{n} \text{ 可以判断出来是 } (0,1) \text{ 区间}\\
&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\
&=\arcsin 1
\end{aligned}$$

另外需要注意的是，定积分有方向性，从不同方向求得的积分值是相反的：$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$，当从两端求得的积分相等时，积分值为零。

[1]这同时也是机械求积法的基本思想。

[2]亦即黎曼和极限的表示，$||P||$ 即范数，表示一个几何里的最大值，此处表示所有子区间里宽度最大的区间。

1.1.1 定积分的性质

> 有一池湖水，风吹水面，泛起层层浪。有浪荡子，泛舟其上，见波光流影，湖色喜人，但不知深浅，为求其深，立竿于湖中。然湖面起伏不定，湖底高低不平，无可奈何，遂立万竿于湖中，欲均诸值以求之。随从者或立竿试深，或俯刻测浅，湖上万竿千人，竟成奇观。湖面摇摆，一刻不止，不可许多人一瞬而测之，测浅者苦不堪言，怨声载道。终感动风神，于是大风止歇，湖面如镜。众人小心勘测，细细汇集，终于成事。浪荡子喜不自胜，大赏诸随从，趁月色归去。
>
> —《西昂笔谈》

这些冠冕堂皇、大而无当的性质，在实战时实在不值一提，但为了内容的完整性，以便日后查阅复习，权且放在此处，参考了同济大学的《高等数学上》。

1. 可提：$\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. 可加：$\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. 可分[3]：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. 可比：设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 则有:
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
如果在区间 $[a, b]$ $f(x) \geq 0$, 则有 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$，推论：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.
5. 可夹：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m, 则有:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

1.1.2 基本定理

所谓的基本，就是那些不可不知却又无甚味道的东西。微积分的基本定理从历史上来讲很伟大，揭示了导数与积分之间的秘密，可以说开创了一个新纪元，但在 21 世纪，早已人尽皆知。

微积分第一基本定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \tag{1.2}$$

微积分第二基本定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.3}$$

[3]注：即使 c 不在 a, b 之间, 上述性质依然成立。

1.1.3 积分中值定理

我们都知道微分中有三个中值定理[4]，作为微分之逆的积分，它也有两个中值定理：

积分第一中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \tag{1.4}$$

用此定理也可以推导出拉格朗日中值定理的积分形式：$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

积分第二中值定理 若 $g(x), f(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $[a,b]$ 上的点 ξ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx \tag{1.5}$$

1.1.4 变限积分

这是一种介于不定积分与定积分之间的一种积分，可以看作不定积分的一个子集，定义如下：如果 $f(x)$在$[a,b]$ 上可积，那么 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数为：

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1.6}$$

这个函数就成为在区间上的变限积分，而且有：$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

1.1.5 反常积分

如果积分区间为无穷区间，则积分称为无穷限的反常积分，也称为第一类反常积分，这类积分可以与求极限结合起来解答：

$$\begin{aligned}
&\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
&\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.7}$$

如果函数在点的任意有定义的邻域内都无界，则称点为函数的瑕点. 无界函数的反常积分也称为瑕积分，或第二类反常积分. 类似有如下定义和牛顿-莱布尼兹公式的描述形式.

如果 a 为瑕点，则：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F\left(a^+\right)$

求解思路：通过将无穷限的反常积分转换为有限区间上的定积分和将无界函数的反常积分转换为有界函数的定积分计算；对积分结果求极限；根据极限的存在性和极限值来计算得到反常积分的值或者直接判定反常积分的敛散性.

[4]罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理

1.2　不定积分

从计算法上而言，不定积分应归结于导数中的反导数[5]；但从定义上而言，不定积分又从属于积分学，牛顿揭示了这种关系。简而言之，不定积分就是彻底的微分逆运算。定义如下：

在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分

$$dF(x) = f(x)dx$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

另外，不定积分的原函数存在定理是：

1. 若函数 $f(x)$ 在区间上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数.
2. 如果在区间 I 上函数有第一类间断点和第二类无穷间断点，则函数在该区间 I 上没有原函数；如果函数在区间 I 上仅仅具有第二类振荡间断点，则有可能存在有原函数.

1.2.1　不定积分的性质

求导、微分与积分的互逆　（常数 C 千万不能忘记）

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$
$$\int f'(x)dx = f(x) + C \qquad \int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$$

线性运算　如果 $f(x), g(x)$ 的原函数存在，则：

$$\int [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x \pm \beta \int g(x)\mathrm{d}x$$

当然，只会这几个性质远远不够，基本积分表[21]是必须要全掌握的

[5] 如果区间 I 上，$F^{'}(x) = f(X)$ 那么 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个反导数，反导数的集合就是不定积分

第二章　积分计算方法

本书的主要部分，***Sion*** 呕心沥血所作也！以不定积分为主，穿插了定积分的计算。

关于不定积分的计算，主要有换元法与分部积分法，技巧性比较强。定积分与不定积分基本一样，在本章我会先介绍定积分计算时要注意的点，随后的篇幅以不定积分计算为主。

2.1　定积分计算要点

2.1.1　Newton-Leibniz 公式

该公式作为微积分基本定理，给出了计算连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上定积分的一个简单可行的好方法: 通过 $f(x)$ 的一个原函数在积分区间的增量来计算定积分。即 $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$, 其中, $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数。这可能是定积分计算中最常用的方法了。但在使用过程中要注意一下奇偶性：奇函数则消去之，偶函数则加倍之。

计算定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

解：由于区间关于原点对称，所以考虑使用奇偶性来求解，令 $f(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 计算后发现：$f(-x)=-f(X)$，即 $f(x)$ 为奇函数，根据定积分奇偶性的性质，我们可以直接得到：

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = 0$$

点火（*Wallis*）公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2k \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n=2k+1 \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2　换元积分法

从这里开始，主要以不定积分的计算为主，穿插着一小部分的定积分计算题。

换元积分法，顾名思义，这种方法是通过替换变量（中国古代数学家把变量称作“元”）来求解的，其本质为复合函数微分法的逆向应用。值得一提的是，此计算法是除了上述的定义法之外最最最基础的方法，大多数其他计算法大都要转化成这种形式才能求解，所以，基础要先打牢。

先回忆一下，复合函数的微分公式：$dF[u(x)]dx = f[\varphi(x)]d(\varphi(x)) = f[\varphi(x)]\varphi^{'}(x)dx$，再根据不定积分的定义进行反推：$\int f(x)\varphi^{'}(x)dx = \int f(x)d(\varphi^{'}(x)) = F[\varphi(x)] + C$，看起来是不是很简单、很基础，但是越是简单的形式，往往越是重要，从这个式子中我们可以有两种思路，即：第一类换元法与第二类换元法。

2.2.1　第一类换元法

此方法又称为凑微分法，定义为：设函数 $f(u)$ 在区间 I 内有原函数（可积）具有连续导数，且 $\varphi(x)$ 的值域在 I 上，则有换元公式：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi^{'}(x)dx = [f(u)du]_{u=\varphi(x)} \tag{2.2}$$

适用于第一类换元法的常见题目类型如下[1]

类型一：一次多项式

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

当被积函数为 $f(\frac{1}{ax+b})$，分子简单而分母复杂的情况下，我们往往通过拼凑来使分子与分母的形式相近（倒数、相同、平方、立方等），以及部分分式法来进行化简 (此方法可适用于一般的有理多项式求积分)，比如：

类型二：指数函数

$$\int f\left(x^{\mu+1}\right)x^{\mu}dx = \frac{1}{\mu+1}\int f\left(x^{\mu+1}\right)dx^{\mu+1} \quad (\mu \neq -1)$$

提示：如果被积函数的分母出现 $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{f(x)}}}\mathrm{dx}$ 的形式时，应注意考察能否凑成 $\frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}}$ 的形式. 如果能，则利用 $\int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\int d\sqrt{\mathrm{f(x)}} = 2\sqrt{\mathrm{f(x)}} + \mathrm{C}$

类型三：幂函数

$$\int f(a^x)a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)d(a^x)$$

可以推广到：$\int f(e^x)e^x dx = f(e^x)d(e^x)$，对于包含多个 e^x 的被积函数，往往可以利用 $1 = e^{-x}\cdot e^x$ 来化简（分子分母同时乘或同除）

类型四：对数函数

$$\int f(\log_a x)\frac{1}{x}dx = \ln a\int f(\log_a x)d(\log_a x)$$

[1]程建玲, 郭汉东. 不定积分的换元积分法常见类型 [J]. 赤峰学院学报：自然科学版,2012(21):9-10

可以推广到：$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)$

提示：被积函数为 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 的形式时，则可利用 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$

类型五：三角函数

不知道单独拿出来好不好，实际上，这些都是积分的定义式，算是基本功。

$$\int f(\sin x)\cdot\cos xdx=f(\sin x)d(\sin x) \qquad \int f(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=f(\arcsin x)d(\arcsin x)$$

$$\int f(\cos x)\cdot(-\sin x)dx=f(\cos x)d(\cos x) \qquad \int f(\arccos x)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx=f(\arccos x)d(\arccos x)$$

$$\int f(\tan x)\cdot\sec^2 xdx=f(\tan x)d(\tan x) \qquad \int f(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=f(\arctan x)d(\arctan x)$$

$$\int f(\cot x)\cdot(-\csc^2 x)dx=f(\cot x)d(\cot x) \qquad \int f(\mathrm{arccot}x)\cdot(-\frac{1}{1+x^2})dx=f(\mathrm{arccot}x)d(\mathrm{arccot}x)$$

熟悉了第一类换元法后我们会发现，能直接或间接用第一类换元法来求解的不定积分少之又少，因为它的形式必须为 $f(u)u^{'}(x)$，显然这个方法可以解决的题目很少，那么在不绞尽脑汁想新方法的前提下，如何来求解更多形式的积分呢？

欢迎来到第二类换元法的世界！

提示：两类方法之间的关系如下：[2]

$$\text{不能直接积分} \xrightarrow{\text{第一类换元法}} \text{可以直接积分}$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \underset{let\ \varphi(x)=u}{\overset{let\ u=\varphi(x)}{\rightleftarrows}} \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$\text{可以直接积分} \xleftarrow{\text{第二类换元法}} \text{不能直接积分}$$

2.2.2 第二类换元法

The second method of transformation is an important but not-easy-to-mater calculus method.

–Zhang Peng qiong

同为换元积分法，但第二类换元法看起来却是个更像嫡出的庶出，而第一类却是像庶出的嫡出。此话怎讲？因为第二类主要的步骤就是换元，但最终总是要转化成第一类的形式。定义如下：设函数 $f(u)$ 在区间 I 内有原函数（可积）具有连续导数，且 $\varphi(x)$ 的值域在 I 上，则有换元公式：

$$f(x)dx\xrightarrow{x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]\varphi^{'}(t)dt=[f(u)du]_{u=\varphi(x)} \tag{2.3}$$

如果你有一定的基础, 就会知道这种方法其实是最有弹性的最难掌握的，与其漫无目的列举例子，我将会针对特定的题目对特定的换元法进行解释，要这样做，以及为何要这样做（知其然，知其所以然。）

[2]朱张兴. 关于不定积分中第二类换元法思想的探讨 [J]. 数学之友,2008(21):56-57.

类型一：根式代换

常规思路就是令根号及下面的函数为 t：$\int f(\sqrt[n]{ax+b}) \to let\ t=\sqrt[n]{ax+b}$，稍微拓展一下，当被积函数为 $\int f(\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})$ 时，为了同时消去这两项的根号，不妨记 m,n 的最小公倍数为 p，令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$。

求不定积分： $\int \cos\sqrt{3u+1}du$

解： 令 $\sqrt{3u+1}=x$，则 $u=\frac{1}{3}(x^2-1)$，$du=\frac{2}{3}sdx$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ 原积分 &= \int(\cos x)\cdot\frac{2}{3}x\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int x\cos x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int x\ \mathrm{d}\sin x=\frac{2}{3}\left(x\sin x-\int\sin x\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{3}x\sin x+\frac{2}{3}\cos x+c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3u+1}\sin\sqrt{3u+1}+\frac{2}{3}\cos\sqrt{3u+1}+c
\end{aligned}
$$

类型二：三角函数代换

当被积函数中含有因式 $\sqrt{z^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$ 时，为了去掉根式，我们可以利用三角函数公式的平方关系式：常见的变量代换有以下三种：

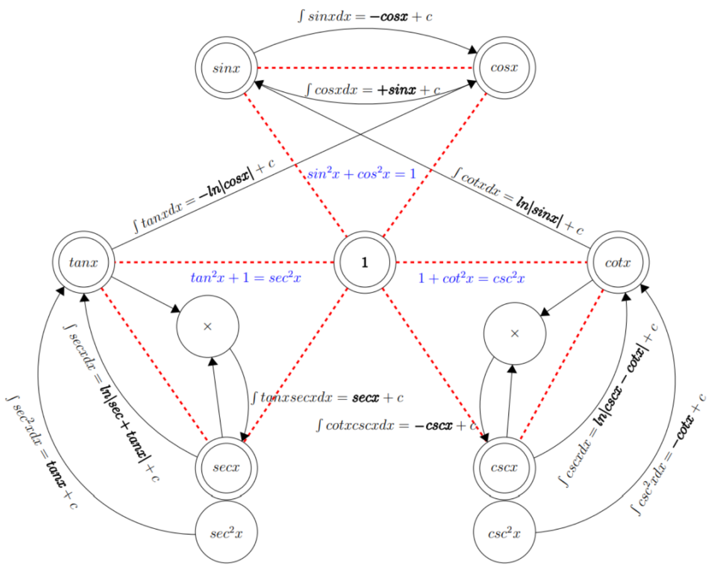


图 2.1: 三角函数积分关系图

提示：当被积函数中三角函数的次幂为较高、或者百思不得其解之时，可以使用“1”的代换，这这种操作往往会使情况突然柳暗花明。

$$
1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^n=(\sec^2 x-\tan^2 x)^n=(\csc^2 x-\cot^2 x)^n
$$

当然，此法很多时候是作为“坑”的形式出来的，对于一般的函数还可以这样代换：

$$1 = 1 \pm f(x)^n \mp f(x)^n = 1 \cdot f(x)^n / f(x)^n = e^{-x} \cdot e^x$$

尤其是对于包含 e^x 的式子，这种代换很重要

求积分： $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}
&\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \\
=&\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}-1}\,\mathrm{d}x \\
=&\int \frac{e^{x}+e^{-x}}{(e^{x}-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x \\
=&\int \frac{1}{(e^{x}-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \\
=&-\frac{1}{e^{x}-e^{-x}}+\ \mathrm{C}
\end{aligned}$$

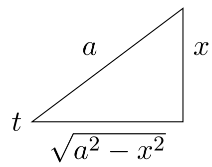
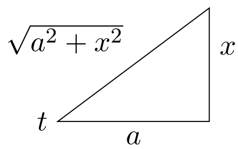
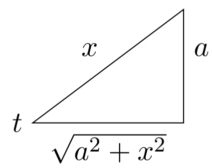
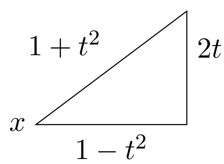
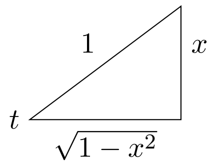
被积函数	代换	被积变量	示意图
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$	$dx = a\cos t dt$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$	$dx = a\sec^2 t dt$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$	$dx =$ $a\tan t\sec t dt$	
通杀	$t = \tan\frac{x}{2}$	$dx = \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$	

表 2.1: 三角函数换元法

求积分： $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

解： 很典型的三角代换题，我们令 $x=\sin t$，则 $\sqrt{1-x^2}=|\cos t|, dx=\cos t$，则有：

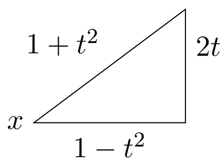
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{|\cos t|}dt \\
&= \int \sin^2 t dt \\
&= \int -\frac{1-2\sin^2 t}{2}+\frac{1}{2}dt \\
&= -\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}+C \\
&= -\frac{2\sin t\cdot\cos t}{2}+\frac{t}{2}+C \\
&= -\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}+C
\end{aligned}$$



求积分： $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$

解： 被积函数为较简单的三角函数，在不能凑微分时可考虑先变形再积分，此时可运用万能代换法进行变形：令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $x=2\arctan t$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+2t+1}{2t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int\left(t+2+t^{-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}t^2+t+\frac{1}{2}\ln|t|+C \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}$$



类型三：倒代换

被积函数中, 如果既有变量因子 u, 又有变量 u 的因子根号时, 我们有两种解题思想供选择. 第一种是想方设法去掉根号, 如第二类解题方法. 第二种是想方设法去掉变量因子 u. 有时, 运用所谓的变量倒代换 $u=\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 就能起到这样的作用，值得注意的是：倒代换适用于分子分母阶数相差一阶以上的情况。

求积分： $\int \frac{dx}{x^8\left(1+x^2\right)}$

解： 令 $x=\frac{1}{t}$ 则：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^8\left(1+x^2\right)}=-\int \frac{t^8\ \mathrm{d}t}{t^2+1}=-\int \frac{t^8-1+1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right) + C \\
&= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x} + C
\end{aligned}
$$

类型四：泛代换

当被积函数中没有常见类型的因式、难以化简、或者不能使用上述三种变换的任何一种来换元的，我们可以使用泛代换。思路就是：把被积函数往乘积类型的有理函数上简化，

2.3　分部积分法

此节引述自[3]

对乘积的求导公式两端取不定积分可以得到分部积分公式，定理如下：设函数 $u(x), v(x)$ 均为连续可导函数，则：

$$
\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x) \tag{2.4}
$$

使用分部积分法的关键是将被积函数整理成 2 个函数的乘积, 其中一个记 $u(x)$, 余下因子记为 $v'(x)$. 使用公式 (3.3) 时, 将 $u(x)$ 转化成求导形式 $u'(x)$, 将 $v'(x)$ 转化为原函数 $v(x)$. 可见, $v'(x)$ 能积分是使用分部积分法的先决条件.

不难发现, 分部积分法主要适用于求 $\int u(x)\mathrm{d}v(x)$ 比较困难, 而 $\int v(x)\mathrm{d}u(x)$ 容易计算的情形. 当被积函数为基本初等函数乘积形式时, 选取的一般原则是:

(1) 被积函数形如 $P_n(x)\mathrm{e}^{kx}, P_n(x)\sin(ax), P_n(x)\cos(ax)$ 时, 一般取 $u(x) = P_n(x)$，其中 $P_n(x)$; 为 x 的多项式。

(2) 被积函数形如 $P_n(x)\ln x, P_n(x)\arcsin(x), P_n(x)\arctan(x)$ 时, 一般选 $v(x) = P_n(x)$；

(3) 被积函数形如 $\mathrm{e}^{ax}\sin(bx), \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ 时, $u(x)$ 可任选其一, 此时需要 2 次分部积分, *2 次积分的 $u(x)$ 选同一类函数*, 最后通过“解方程”间接求出。

这些原则可以整理为分部积分口诀：*反对幂三指，后者凑微分；幂角若相遇，两次同样凑*. 一般地，不定积分计算时最先考虑换元积分法，换元积分法不能计算时改用分部积分法. 如果被积函数有三角函数或指数函数，将三角函数或指数函数凑微分，通过分部积分公式的降幂作用完成计算. 如果被积函数含对数函数和反三角函数，将对数函数或反三角函数之外的函数凑微分后再用分部积分公式，利用消去作用去掉对数与反三角函数. 当被积函数为指数函数乘正弦函数或指数函数乘余弦函数等形式时，可以通过 2 次分部积分将待求积分循环出来.

[3]张磊, 王利岩, 吴玉斌, 王辉. 分部积分法的解题技巧 [J]. 高师理科学刊,2022,42(2):88-91

已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，求 $\int xf^{'}(x)dx$

解：这道题自己就暴露了分部积分法的特征，解法如下：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int xd(f(x)) \\
&= xf(x) - \int f(x)dx \\
&= -2x^2e^{-2x^2} - e^{-2x^2} \\
&= -(2x^2+1)e^{-2x^2} + C
\end{aligned}$$

2.3.1 表格法

当我们对被积函数进行多次分部积分可以得到：

$$\int f(x)g(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j f^j(x)g^{-(j+1)}(x) + (-1)^n\int f^n(x)g^{-n}(x)dx \tag{2.5}$$

由此可以列出表2.2：

正负号	D（导数）	I（积分）	代表的积分
+	$f(x)$	$g(x)$	$\int f^(x)g(x)dx$
-	$f^{(1)}$	$g^{(-1)}$	$-1\cdot\int f^{(1)}(x)g^{-1}(x)dx$
+	$f^{(2)}$	$g^{(-2)}$	$\int f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)dx$
-	$f^{(3)}$	$g^{(-3)}$	$\int f^{(3)}(x)g^{(-3)}(x)dx$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(-1)^{(n-1)}$	$f^{(n-1)}$	$g^{(-(n-1))}$	$(-1)^{(n-1)}\int f^{n-1}(x)g^{-n+1}(x)dx$
$(-1)^{(n)}$	$f^{(n)}$	$g^{(-n)}$	$(-1)^n\int f^n(x)g^{-n}(x)dx$

表 2.2: 表格法

表格法虽好，但不是万能的，有些时候越算反而会越来越难。它的条件如下：表格法常用于被积函数为 $P_n(x)\mathrm{e}^{ax}, P_n(x)\sin(ax), P_n(x)\cos(bx)$ 型的积分计算, 这里 $P_n(x)$ 表示自变量为 x 的 n 次多项式. 利用不定积分的降幂作用, 令 $u = P_n(x)$, 则 $u^{(n+1)} = 0$, 此类积分的计算可以构造表格, 通过观察表格元素得到原函数.

事实上, 表格法的用途并不仅限于 $P_n(x)\mathrm{e}^{ax}$, $P_n(x)\sin(ax), P_n(x)\cos(bx)$ 型的积分计算, 形如 $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x, \int x^2\cdot\sqrt[3]{x-1}\ \mathrm{d}x$ 及 $\int x^3f'''(x)\mathrm{d}x$ 的不定积分问题, 表格法同样有效.

求积分（2018 年数一[a]）：$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

[a]数三稍微简单点，可以先试下这个：$\int \mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}dx$

解：感动，这是我迄今为止遇到的，最精彩一道**表格法/分部积分法**积分题，用了两次分部积分，但用表格法更形象！

正负号	D（导数）	I（积分）	代表的积分
+	$\arctan\sqrt{e^x-1}$	e^{2x}	$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$
-	$\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}$	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$-\int\frac{e^{2x}}{4\sqrt{e^x-1}}$

通过这一步可以得到：原式 $=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$ 接下来对后半部分再进行表格法分部积分！（后半部分正好可以凑出来 $\sqrt{e^x-1}$ 的导数）

正负号	D（导数）	I（积分）	代表的积分
+	$\arctan\frac{1}{2}e^x$	$\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$	$-\int\frac{e^{2x}}{4\sqrt{e^x-1}}$
-	$\frac{1}{2}e^x$	$\sqrt{e^x-1}$	$-\int\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^x-1}$

通过第二步可以计算出来后半部分为：$\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+\frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$

$$\therefore\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x+2\right)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$

2.4　杂法刍议

国内现行的高数教材里通常会给出三类典型的积分法，包括凑微分、第二类换元和分部积分。初学不定积分的时候，要注意把握每种积分法各自的特点，看它们都适合处理什么样的被积函数。比如凑微分法和分部积分法都可以用来尝试处理一些乘积形式的被积函数，也都有把被积函数的一部分拿进来凑微分的步骤，不过使用凑微分技巧时对被积函数的要求比较高：即需要凑完微分以后剩余的被积函数是某个容易积出来的函数和微分符号“d”后面的那个函数的复合形式，而分部积分法对被积函数的要求则没这么高。一般来讲，分部积分技巧可以处理被积函数为“反对幂三指”五类函数中的两类相乘的情形。至于第二类换元，其基本思想是去根号，容易总结出一些很典型的代换：三角代换、根式代换和倒代换等。[4]

然而考题上往往不会让你轻轻松松就拿到分，有些时候，典型方法就根本做不了。这一部分是除了上述的典型的方法之外的“偏方”。这类方法往往仅能适用于某一类积分，有一定的局限性，不如典型方法那样具有“通吃”的能力，然而，有些时候偏方治病更快。

[4]邢秀侠. 不定积分的一题多解 [J]. 教育教学论坛,2016(15):245-246. DOI:10.3969/j.issn.1674-9324.2016.15.116.

2.4.1　有理函数积分

有理函数是高等数学中的一类重要研究对象，高等数学中的很多问题，比如不定积分、定积分的计算，泰勒公式及幂级数的展开等一般都牵涉到有理函数的部分分式的分解，将有理函数分解成部分分式是求解这些问题的基础。

部分分式法

作为课本上的方法，虽然它用起来很笨，但也很有效。部分分式法主要适用于：$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$，其中 $P_n(x),Q_m(x)$ 分别为 n,m 次多项式。

当分子多项式的次数 n 小于分母多项式的次数 m 时，即 n<m 时，则称该有理分式为真分式；当 n m 时，则称为假分式。此法的原理是：对于假分式，总可以转化成一个多项式和一个真分式的和，且这种表示是唯一的。而且根据多项式的因式分解理论，一般多项式在实数范围内都可以分解成为若干个一次因式或二次因式的乘积。这样，有理真分式就可以分解成由这些因式最高次幂到 1 次幂作为分母的，分子的次数比因式低一次的真分式之和：

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\sum_k\left[\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_kx+C_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}\right],k\in\mathbf{Z}^* \tag{2.6}$$

我们就把这样的一个分解过程就称之为有理分式的部分分式分解，式2.6中 A_k,B_k,C_k 为一组系数，式中的每项都称为有理分式的部分分式。

分解的原则[5]如下:

(1) $Q(x)$ 中形如 $(x-a)^k$ 的因式, 在 $R(x)$ 的部分分式分解式中应出现如下 k 项之和: $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$, 其中 $A_1,A_2\cdots,A_k$ 为待定系数。

(2) $Q(x)$ 中形如 $\left(x^2+px+q\right)^1$, $\left(p^2-4q<0\right)$ 的因式, 在 $R(x)$ 的部分分式分解式中应出现如下 l 项之和: $\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{B_1x+D_1}{\left(x^2+px+q\right)^1}$, 其中 $B_1,D_1,B_2,D_2,\cdots B_l,D_1$ 为待定系数。

部分分式法示例

常规思路（无坑）:

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

能化简尽量化简:

$$\frac{x^2-1}{x(x+1)^3}=\frac{x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

对于有理假分式要化简成有理真分式再拆:

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)\left(x^3+2\right)}{x^2\left(x^2-x+1\right)}&=\frac{x^4-x^3+2x-2}{x^4-x^3+x^2}=1-\frac{x^2-2x+2}{x^2\left(x^2-x+1\right)}\\&=1-\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2\left(x^2-x+1\right)}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}\end{aligned}$$

[5]赵晓艾. 不定积分中有理函数的分解 [J]. 贵阳学院学报：自然科学版,2008,3(2):6-8

分解之后，可以得到一个方程，一边系数已知，一边未知，我们可以采用如下技巧进行处理：

1. 待定系数解方程组方法：最常规的方法，拆项，合并，对应相等解方程。
2. 待定系数数值代入法：通过取一些特定的，可以简化恒等式的数值来得到各待定的常数；或者通过变形两端等式，取特定的值，不经过复杂的通分与合并同类项的过程直接得到有关于待定系数的方程组。（说白了就是碰运气，可能会出现两端相等的情形。）
3. 待定系数求导数值代入法借助原等式，以及导数恒等式，然后借助特殊函数值相等的方法来得到一些相关的待定系数的等式。

屑金碎玉

这一小节是求解有理函数积分时的一些小的技巧，可能实用性不大，但希望可以启发一些思路吧。

对称幂[6] 如果有理式的幂次是对称的，除以中间的幂次。

转化平方差 当分母出现 ax^2+bx+c 的项时，要注意能否转化成平方差 $(Ax+B)^2-C^2$ 的形式。

分式の根母倍之 当分母带根号，分子为多项式，不能直接看出来导数关系时，上下同时乘以 x。

求积分： $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{3+2x}}\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1+x}{\sqrt{3+2x}}\,\mathrm{d}x \\
=&\int \frac{x+x^2}{\sqrt{3x^2+2x^3}}\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+2x^3}}\,\mathrm{d}\left(3x^2+2x^3\right) \\
=&\frac{1}{3}x\sqrt{3+2x}+\text{ Constant}
\end{aligned}
$$

1 の代换 不得不说“1”真是个神奇的数字，它既可以不见首尾，又可以千变万化，但不可亵渎，有些时候肆意的亵渎（代换）往往会适得其反，变得越加混乱。这里总结了一些常见的技巧，希望能给予读者启发：

- 1 是 x 的导数，分部积分法时可以劈空凑出来这一项，比如 $\int \ln x dx = \ln x \cdot x \int x dx$
- 常见的替换，主要是 $1 = 1 \pm f(x)^n \mp f(x)^n = 1 \cdot f(x)^n / f(x)^n = e^{-x} \cdot e^x$，在2.2.2节已有论述。

[6]来自微信里的这篇文章 不定积分 (四)

2.4.2 欧拉代换

对形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 这类函数[7]，可以通过欧拉代换或者双曲三角代换来求解，后者可把无理式化为三角有理式, 后者则将无理式化为代数有理式由于三角有理式的不定积分并非总能表示为有限形式 (俗称积出来)，往往还要通过变量代换 (如万能代换) 化为代数有理式才能积出来. 因此，欧拉代换就显得相当重要。

欧拉代换的一般形式为[8]：

(1)（欧拉第一、二代换）当 ax^2+bx+c 无实根时设：

$$\sqrt{\mathrm{ax^2+bx+c}} = \mathrm{xt} \pm \mathrm{c}\text{或设}\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

(2)（欧拉第三代换）当 ax^2+bx+c 有相异实根 x_1, x_2，且 $x_1 \neq x_2$ 时, 设：

$$\sqrt{\mathrm{ax^2 \times bx + c}} = \mathrm{t}\left(\mathrm{x} - \mathrm{x_1}\right)$$

(*)（推广的欧拉代换 ）对于当 ax^2+bx+c，任意找一点 x_0, 使 $\Delta = ax_0^2 + bx_0 + c \geqslant 0$, 由此作代换：

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x - x_0\right) \pm \sqrt{\Delta}$$

这种方法略显繁琐，但有时候又不失为一件法宝，更多细节参见下面文献，在此不过多举例。

求积分： $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$

解: 令 $\sqrt{4-x^2} = xt + 2$ 两边平方, 得

$$x = \frac{-4t}{t^2+1}$$

$$\sqrt{4-x^2} = \frac{-4t}{t^2+1} + 2$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{\frac{4t^2-4}{(t^2+1)^2}}{\frac{-4t}{t^2+1}\left(\frac{-4t^2}{t^2+1}+2\right)} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right| + C$$

2.4.3 待定系数法

此处所说的待定系数法，利用了线性代数的思想，是指寻找子积分 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 使得原积分 I 一定能被这些积分构成的“基”线性表出，即对某一类积分大类中间任意的 I 都有 $I = C_1I_1 + C_2I_2 + \ldots + C_nI_n$、成立. 从而通过这些子积分得到其中任何一种原积分 I 法。这样将复杂性大、技巧性强的不定积分的求解转化为容易进行的求导问题，大大降低了解题的难度。

[7]张丽娟, 何珊珊. 不定积分计算中一类有用的变量代换 [J]. 数学学习与研究,2013,0(17):110-111

[8]李淑娟. 欧拉代换及其推广 [J]. 杭州师范大学学报：自然科学版,1994,0(2):1-2

$I=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$

解：（1）确定“基”：

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = x + C \\
I_2 &= \int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx \\
&= \int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x} = \ln|\sin x+\cos x| + C
\end{aligned}$$

（2）线性表出 I：

$$\begin{aligned}
&\text{设} I = C_1 I_1 + C_2 I_2 \\
&= \int \frac{(C_1-C_2)\sin x+(C_1+C_2)\cos x}{\sin x+\cos x}dx \\
&\text{则} \begin{cases} C_1-C_2=1 \\ C_1+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{2} \\ C_1=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2
\end{aligned}$$

(3) 写出结果:

$$I=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$$

对于此法在三角函数有理式积分中的更多内容参见[9], 关于这个方法更广泛应用参见[10]：

2.4.4 综合法

综合法作为所有方法与技巧的综合，无疑是最强大的，同时最不可琢磨的。我感觉，与其说这是是方法，倒不如说是一种综合运用能力，一种统筹兼顾的数学素养。取长补短，步步为营。

求积分：$\int \mathrm{e}^x \frac{x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}\, \mathrm{d}x$

解：先利用部分分式法来化简，再用分部积分法求解。

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \frac{x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}\, \mathrm{d}x - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{(x^2-1)}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x^2-1}\, \mathrm{d}\mathrm{e}^x - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{(x^2-x)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1} - \int \mathrm{e}^x \frac{-2x}{(x^2-1)^2}\, \mathrm{d}x - \int \frac{2x\mathrm{e}^x}{(x^2-1)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1} + C
\end{aligned}$$

---

[9]朱琳. 三角函数有理式的不定积分的待定系数法 [J]. 中国科技信息,2009(1):264-265

[10]童春. 待定系数法在不定积分求解中的研究 [J]. 智库时代,2019,0(41):268-269

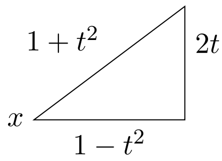
求积分：$\displaystyle\int \frac{\cos x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}\ \mathrm{d}x$

解： 跟上一题解法相似，先利用部分分式法，再用分部积分法。

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\cos x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{(x+\cos x) - (1-\sin x)x}{(x+\cos x)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\cos x} + \int x\ \mathrm{d}\frac{1}{x+\cos x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\cos x} + \frac{x}{x+\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\cos x} \\
&= \frac{x}{x+\cos x} + C
\end{aligned}
$$

求积分：$\displaystyle\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

$$
\begin{aligned}
&\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx \\
&= \int e^x \frac{1+x^2-2x}{(1+x)^2} dx \\
&= \int e^x \frac{dx}{(1+x^2)} + \int e^x \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \\
&= \int e^x \frac{dx}{(1+x^2)} + \int e^x d\frac{1}{(1+x^2)} \\
&= \int e^x \frac{dx}{(1+x^2)} + \frac{e^x}{(1+x^2)} - \int e^x \frac{1}{(1+x^2)} dx + C \\
&= \frac{e^x}{1+x^2+C}
\end{aligned}
$$



第三章　应用与总结

做题没有捷径，只有不断练习，不断追寻更好的方法，才能立于不败之地。

所知甚少，无甚么可总结之处。就用最后一道题的多种解法来收尾吧：

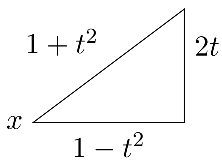
$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \tag{1.001^{365}}$$

万能公式法：

解：不带根式的三角函数原函数的求解，一般我们采用“万能公式”，来把三角函数积分转化成有理函数积分，这种方法简单易上手，对于有理函数的积分都可解

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \xLeftrightarrow[dx=\frac{2}{1+t^2}]{\sin x=\frac{2t}{1+t^2}} \int \frac{1}{(\frac{2t}{1+t^2})^3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{4t^3} dt \\
&= \frac{1}{4} \int \left(t + 2t^{-1} + t^{-3}\right) dt \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2\ln t - \frac{1}{2} t^{-2}\right) + C \\
&= \frac{1}{8} \left(\tan^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2}}\right) + \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C \\
&= -\frac{\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}}{8 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C \\
&= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}$$



凑微分法

对于一个三角函数而言，这道题的 $\sin x$ 是奇数次方，我们可以来凑 $\cos x$ 的导数。

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{-d\cos x}{\sin^4 x} = \int \frac{-d\cos x}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} \xlongequal{t=\cos x}$$

接下来使用部分分式法来解决：

$$
\begin{aligned}
&-\int \frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2}\\
&=-\int \frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}dt\\
&=-\frac{1}{4}\int -\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}dt\\
&=\frac{1}{4}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C\\
&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{t}{2\left(t^2-1\right)}+C\\
&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}+C\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2\sin x\tan x}+C
\end{aligned}
$$

利用三角函数之间的关系

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sin^3 x}dx\\
&=\int \frac{1}{\sin x}\csc^2 x dx\\
&=\int \frac{-d^2\cot x}{\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}}\\
&=-\int \sqrt{1+\cot^2 x d}\cot x\\
&=-\frac{1}{2}\cos x\sqrt{1+\cot^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\cot t+\sqrt{1+\cot^2 x}\right|+C\\
&=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\tan x\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}\right|+C\\
&=-\frac{1}{2\tan x\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\right|+C\\
&=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\tan x\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}
$$

附录 A　尾注

必背・基本积分表

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, \quad a > 0, a \neq 1$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$