紫晶-微分要义

本书为紫晶-铀石计划的内容汇编，目的是通俗、高效、系统化地记录微分学的重点与解题技巧。

Sion Tine

2022 年 10 月 10 日

前言[1]

学学半。

—「兑命」

2022/10/10 更新：版本 0.1「天体制圧用最終兵器」发布。

① 添加章节：中值定理

[1]本书采用 **署名-非商业性使用-禁止演绎 3.0 知识共享协议授权**。

目录

第一章
中值定理

1.1 定义

微分中值定理是罗尔定理、拉格郎日中值定理和柯西中值定理的统称。其中拉格朗日中值定理是微分中值定理的核心，它给出了导数值与函数值之间的某种定理关系，可以应用它来证明一些等式或不等式。罗尔定理可看成特殊情况下的拉格朗日中值定理，它可以证明等式，还有重要应用是可以解决某些方程根的存在性问题。柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广，它可以用来证明等式或不等式。微分中值定理是导数应用的理论基础，是应用导数的局部性质研究函数全局性质 的重要工具。它使得导数理论用于函数形态的研究成为可能，显示了导数理论、微分学的强大功能和广泛的应用性。

— 陈阳、王涛「浅谈微分中值定理证明及应用题目」

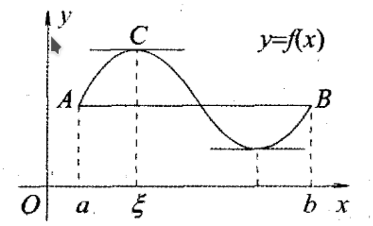

图 1.1: 罗尔定理的几何解释

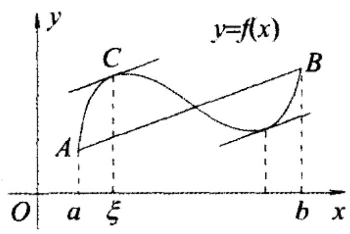

图 1.2: 拉格朗日定理的几何解释

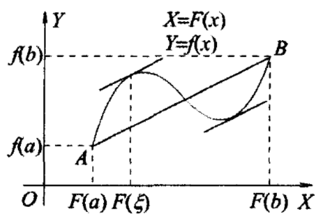

图 1.3: 柯西定理的几何解释

1.1.1 小定理

- **最值定理** 若函数 $f(x)$ 满足:在闭区间 $[a,b]$ 连续,则有:$m \le f(x) \le M$（m,M 分别为区间内的最小值、最大值）
- **介值定理** 若函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 连续，m,M 分别为区间内的最小值、最大值，当 $m \le C \le M$，则有：$\exists \xi \in [a,b], f(\xi) = C$
- **平均值原理** 当 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 时,在 $[x_1,x_n]$ 上至少存在一点 ξ,使 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$
- **零点定理** 若函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 连续，当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时,存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi) = 0$
- **费马定理** 若函数 $f(X)$ 在点 x_0 处可导，取极值，则 $f'(x_0) = 0$

1.1.2 罗尔定理

若函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，端点值相等 $f(a) = f(b)$，则：$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

推广: 把端点取值范围进行推广，可以得到更为宽泛的罗尔定理。

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$, A 可以为常数、$\pm\infty \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), f'(\xi) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A \Longrightarrow \exists \xi \in (-\infty,+\infty), f'(\xi) = 0$

1.1.3 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，则：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(a)-f(b)=f^{'}(\xi)(b-a)$

1.1.4 柯西中值定理

若函数 $f(x)$ 满足：在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，$g^{'}(x)\neq 0$ 则：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}$

隐含

拿到题目以后，我们首先要会去分辨信息，下面列出了常见的信息以及其背后隐藏的含义。

1. 可导必连续，连续不一定可导。

1.2 策略

1.2.1 辅助函数 F(x)

辅助函数是极其重要的，毫不夸张地说，这一步就是所有策略的关键。一般的没有特征的情形我们可以直接把题设上移项直接转化成 $F(x)$，其他类型的解决策略如下：

- 见到 $f(x)f'(x)$, 令 $F(x)=f^2(x)$
- 见到 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$, 令 $F(x)=f(x)f'(x)$
- 见到 $f'(x)+f(x)\varphi'(x)$, 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$
- 见到 $f'(x)x-f(x), x\neq 0$, 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$
- 见到 $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2, f(x)\neq 0$, 令 $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

1.3 应用

1.3.1 极限的计算

练习 1.1 用拉格朗日中值定理与柯西中值定理来计算下面的极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解 柯西中值定理：$x=\sin(\arcsin x)$，构造来两个辅助函数 $\sin x, e^{\sin x}$

1.3.2 证明题

这是中值定理主要发力的地方，一般来讲，证明题三步走

1. 构造辅助函数
2. 确定区间
3. 验证定理的条件

类型一 欲证：至少存在一点 ξ，满足关于 $f^{(n)}$ 与 $f^{(n-1)}$ 的关系式，且不含区间端点 a,b.

利用复合函数的导数 $[\ln f^{'}(x)]=\dfrac{f^{'}(x)}{f(x)}$,

1. 代换：用 x 代换掉 ξ

2. 变形：化成 $f(x)=0$ 的形式
3. 还原：对各个式子求积分
4. 合并：把所有项组合到一个式子里
5. 构造：写出来辅助函数

✍ **练习 1.2** $f(x)\in 0,1$, 且在 $(0,1)$ 内二阶可导, $f(0)=f(1)$, 证明：$\exists\xi\in(0,1),\mathrm{s,t}f''(\xi)=2\frac{f'(\xi)}{1-\xi}$

解 (1) 代换: 将 ξ 用 x 代换得 $f''(x)=2\frac{f'(x)}{1-x}$

(2) 变形: $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}+\dfrac{2}{x-1}=0$

(3) 还原: $\left[\ln f'(x)\right]'+\left[\ln(x-1)^2\right]'=0$

(4) 合并: $\left[\ln f'(x)(x-1)^2\right]'=0$

(5) 构造辅助函数: $F(x)=f'(x)(x-1)^2$