
Exercici 3: Comprensió d'imatges

Álvaro Ortiz Villa

Àlgebra Lineal Numèrica (G. Matemàtiques, FME). Abril 2021

1. Comparació de mètodes amb imatges en blanc i negre

L'exercici usarà la imatge en color titulada `OrtizAlvaro.jpg`. Primer passem la imatge a blanc i negre mitjançant la funció `rgb2gray(A_rgb)` i després realitzem les descomposicions QR, LU i SVD a través de la llibreria `linalg` de `scipy`. Demanem un valor k qualsevol entre 1 i el mínim de les dimensions de la matriu: $\min(1080, 1920)$. Aquest serà el rang de la matriu comprimida i és menor o igual que el rang de la matriu diagonal obtinguda de la descomposició SVD. Amb aquesta informació i per aquest rang, calculem les matrius `ALU`, `AQR` i `ASVD` tal com s'indica.

Ara podem calcular els errors relatius de les diferents aproximacions en norma 2 seguint les indicacions. En primer lloc, sabem de teoria que la norma 2 de la matriu és el valor singular més gran: $\|A\|_2 = \sigma_1$. Així, observem que per a un rang de 500, per exemple, els errors relatius de les aproximacions per LU i QR són de 0.48 i de 0.25 respectivament, mentre que l'error relatiu de l'aproximació per SVD és notablement inferior, de 0.0002. Alternativament, sigui A_k l'aproximació d' A de rang k per la descomposició SVD. Seguint el Teorema 3, l'error comès és: $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. Així doncs, obtenim una expressió de l'error relatiu utilitzant només valors singulars:

$$\text{eSVD} = \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_1} = \frac{\|A - A_k\|_2}{\|A\|_2}$$

La figura 1 il·lustra –per a diferents valors de k – el comportament de la comprensió de la imatge mitjançant les tres aproximacions. Comprovem doncs que la descomposició SVD proporciona la millor aproximació de la matriu A . Tal com estableix el Teorema 3, l'error de SVD en norma 2 és en efecte el mínim.

2. Comprensió mitjançant SVD d'imatges en blanc i negre

Les funcions `eSVD_long(Abw)` i `eSVD_rank(S, k)` retornen l'error relatiu de la descomposició en valors singulars. La primera funció calcula l'eSVD de les dues maneres que s'han mencionat abans i per a un rang k a indicar, mentre que la segona és una versió abreujada que pren com a input la matriu diagonal de la SVD i un rang k .

D'altra banda, sabem que el cost d'emmagatzemar la imatge original representada per $m \times n$ píxels és $64 \times m \times n$. La funció `cost_short(Abw)` retorna el cost de guardar la imatge original, el cost màxim d'emmagatzemar la imatge comprimida amb SVD (és a dir, $64 \times k \times (m + n)$ on k és el rang màxim) i el percentatge de comprensió de l'aproximació. La funció `cost_long(Abw)` també calcula el cost

Figura 1 – Comportament de les aproximacions per LU, QR i SVD per a diferents rangs de la matriu comprimida

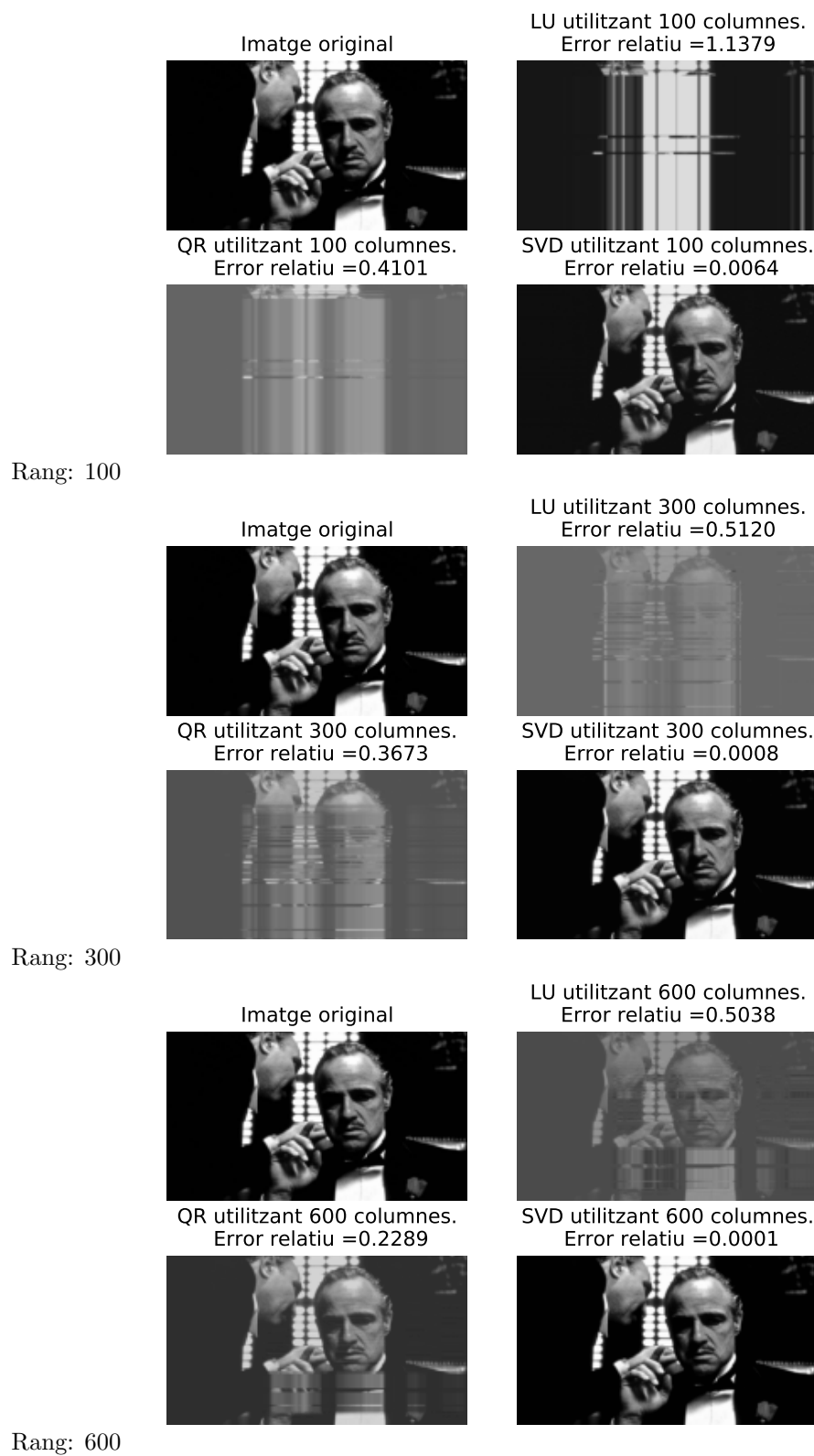
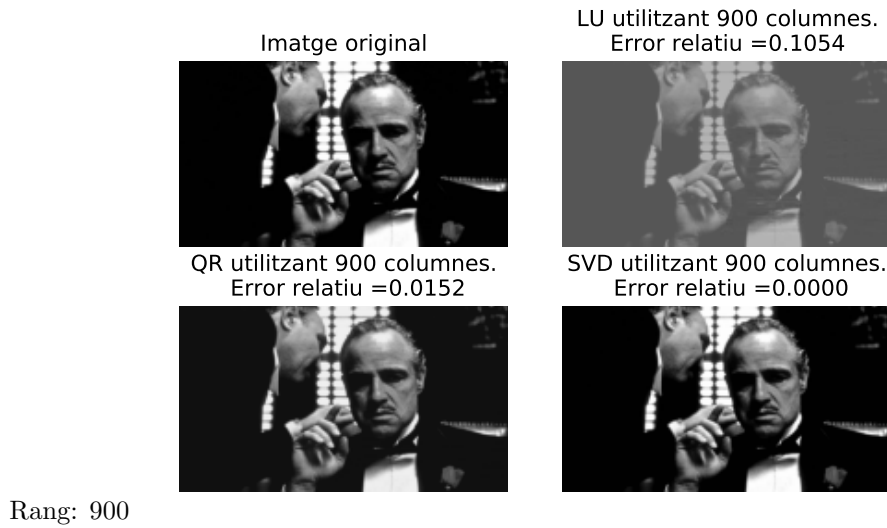


Figura 1 – Comportament de les aproximacions per LU, QR i SVD per a diferents rangs de la matriu comprimida



d'emmagatzemar la imatge original, però ara el cost de la compressió és adaptat pels k valors singulars més grans, amb el rang k de la matriu comprimida a indicar.

Finalment, la funció `compress(Abw, percentatge)` calcula les compressions SVD per a un cert percentatge de compressió ν . La idea és trobar el rang reduït de la compressió per a un cert ν , que el trobem de la següent manera:

$$k = \left\lceil \frac{\nu \times m \times n}{100 \times (m + n)} \right\rceil$$

Així, podem calcular les aproximacions amb SVD que proporcionen una compressió del 25%, 50% i 75% i observem que tenen un error relatiu de 0.0024, 0.0006 i 0.0002 respectivament (figura 2).

3. Compressió mitjançant SVD d'imatges en color (RGB)

El tercer programa comprimeix cada capa de la imatge en color (RGB) per separat. Primer trobem amb la funció `cost_short(A)` el nombre de valors singulars de la imatge, el cost d'emmagatzemar la imatge original, i el cost màxim de guardar la imatge comprimida. Després el codi inicialitza un bucle per tal de donar l'aproximació per a tres percentatges de compressió a indicar. La figura 3 mostra la compressió de la imatge RGB per a tres percentatges de compressió, 10%, 25% i el demanat, 50%. Observant els errors relatius globals de cada aproximació veiem que el salt qualitatiu es produeix entre una aproximació de 10% i 25%.

Un cop s'ha introduït un percentatge de compressió, per exemple 50%, donem l'aproximació SVD per a les tres capes RGB. És a dir, prenem la matriu corresponent a cada capa, realitzem mitjançant la funció `compress(Abw, percentatge)` la descomposició SVD per a aquesta matriu i pel percentatge indicat. Per a aquesta

Figura 2 – Aproximacions amb percentatge de compressió del 25%, 50% i 75%

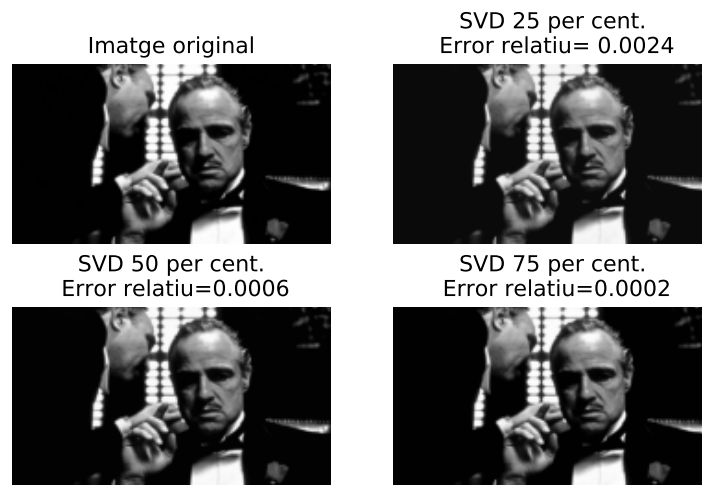
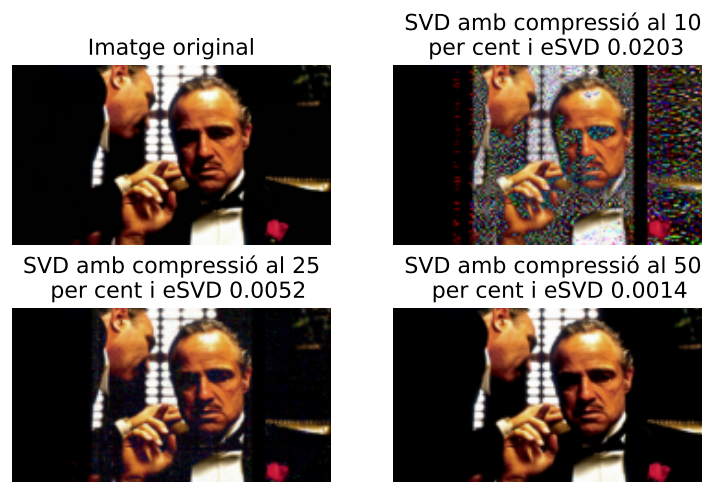


Figura 3 – Compressió imatge RGB a diferents percentatges de compressió



capa, a més, podem calcular l'error relatiu en norma 2 de la descomposició. Finalment, reconstruïm la descomposició SVD a partir de les tres capes comprimides i podem calcular l'error global de la compressió de la imatge com s'ha indicat. Per al 50% s'han utilitzat 346 valors singulars dels 1080 que en té la imatge. Els errors relatius de les tres capes són 0.0006, 0.0007 i 0.0010 respectivament, i l'error global és 0.014.