5.3 ケプラー要素 $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$ を用いた運動方程式

積分定数 c_i としてケプラー要素 $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$ を用いた場合の定数変化の運動方程式を求める。

5.3.1 ケプラー要素 $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$ を用いた運動方程式の導出

ラグランジュ括弧式 (5.111) ～ (5.116) は付録Aで計算してある。

この (5.111) ～ (5.116) を基本方程式 (5.100)

$$\sum_{i=1}^{6} [c_l, c_i] \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_l}$$

へ代入すると運動方程式 (5.117) ～ (5.122) を導ける。

この (5.117) ～ (5.122) へラグランジュ括弧式の具体的表現 (5.111) ～ (5.116) を代入すると、ケプラー要素の運動方程式 (5.123) ～ (5.128) が導出される。

計算はとても簡単

でも書く量が多いから概要だけ

5.3.2 惑星方程式の修正

αについての方程式 (5.126)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}$$

の右辺の第1項について考える。

この$\dfrac{\partial R}{\partial a}$は (5.120)

$$\frac{\partial R}{\partial a} = [a,\alpha]\frac{d\alpha}{dt} + [a,\omega]\frac{d\omega}{dt} + [a,\Omega]\frac{d\Omega}{dt}$$

からきているので、正確に記述すれば、

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{\alpha,\omega,\Omega,e,I,t}$$

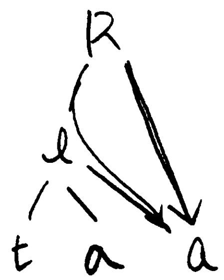
← a以外の軌道要素を固定 + tも固定

これらは今回あまり関係してこないので

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{\alpha,t}$$ と今後は書く

また、摂動関数は、$R(a,e,I,\Omega,\omega,\alpha,t)$であるが、平均近点離角を$l = nt+\alpha$と書けることから、$\alpha$と$t$はセットで動くと考えることができる。

どの文字がどの文字に含まれているのかを図で表すと、



← Rからaへ到る道は2通り

つまり、

図でいうと 右の道 左

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{\sigma,t}=\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{l}+\left(\frac{\partial R}{\partial l}\right)_{a}\left(\frac{\partial l}{\partial a}\right)_{\sigma,t}$$

tを固定してたら lもσも一緒

$$\left(\frac{\partial R}{\partial l}\right)_{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma}\right)_{a,t}$$

$$\left(\frac{\partial l}{\partial a}\right)_{\sigma,t}=\left(\frac{\partial l}{\partial n}\right)_{a,t}\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_{\sigma,t}=t\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_{\sigma,t}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{l}+\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma}\right)_{a,t}t\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_{\sigma,t}$$

この両辺に $\times -\frac{2}{na}$ をして形を整えると

$$-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{\sigma,t}=-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_{l}\underbrace{-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma}\right)_{a,t}t\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)_{\sigma,t}}_{\text{混合永年項が現れる}}\quad\cdots(5.129)$$

[ここからは、混合永年項が方程式に現れないようにするための工夫について述べる。]

平均運動 n の時間微分は

$$\frac{dn}{dt}=\frac{dn}{da}\frac{da}{dt}$$

$$=\frac{2}{na}\frac{dn}{da}\frac{\partial R}{\partial \sigma}\quad\cdots(5.130)\qquad(\because 5.123)$$

この(5.130)を(5.129)へ代入する

$$-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - t\frac{dn}{dt} \quad \cdots(5.131)$$

この(5.131)を(5.126)へ代入する

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - t\frac{dn}{dt} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} \quad \cdots(5.132)$$

ここで新たな変数 σ^I を導入する

$$\frac{d\sigma^I}{dt} \equiv \frac{d\sigma}{dt} + t\frac{dn}{dt} \quad \cdots(5.133)$$

で定義する。

この(5.133)を(5.132)へ代入して、σについての方程式をσ^Iについての方程式へ変更する。

$$\frac{d\sigma^I}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} \quad \cdots(5.134)$$

↑

ここには混合永年項はない

σ^Iの定義式である(5.133)は

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^I}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d}{dt}(nt) - n \\ &= \frac{d}{dt}(nt+\sigma) - n \\ &= \frac{d}{dt}l - n \quad \cdots(5.135)\end{aligned}$$

(5.135)を積分すると、

$$l = \underbrace{\int n\,dt}_{\rho} + \sigma^{1} \quad (= nt + \sigma) \quad \cdots(5.136)$$

ρ とおく $\cdots$(5.137)

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\int n\,dt\right)$$

$$= \frac{dn}{dt} \quad \cdots(5.138)$$

であり、ケプラーの第3法則 $n^2a^3 = \mu$ より、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\mu a^{-3})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mu^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}}\right)\frac{da}{dt}$$

$$= \left(na^{\frac{3}{2}}\right)\left(-\frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}}\right)\frac{da}{dt}$$

$$= -\frac{3n}{2a}\cdot\frac{da}{dt} \quad \cdots(5.139)$$

さらに、ここで(5.123)を使うと、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3n}{2a}\cdot\frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial\sigma}$$

$$= -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial\sigma} \quad \cdots(5.140)$$

σ と σ^{I} は (5.136) の形からわかるように、l を通してしか R に入ってこないので、

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma}\right)_{\hat{n}} = \left(\frac{\partial R}{\partial \sigma^{\mathrm{I}}}\right)_{\hat{n}} = \frac{\partial R}{\partial l} \qquad \cdots (5.141)$$

もちろん他の軌道要素もすべて固定されている

この (5.141) を (5.140) へ代入すると、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \sigma^{\mathrm{I}}} \qquad \cdots (5.142)$$

となる。