5.7 逐次近似法による惑星方程式の解

前節までで、摂動関数 または 摂動力を与える 2つのパターンの(定数変化法に基づく)運動方程式を扱ってきたが、より一般的に書けば、

$$\frac{dE_i}{dt} = f_i(E_1, \cdots, E_n, t) \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad \cdots (5.252)$$

となる。

この(5.252)の解を微小パラメタで展開する

$$E_i = E_{0,i} + \Delta_1 E_i + \Delta_2 E_i + \cdots \qquad \cdots (5.253)$$

($\Delta_n \cdot E_i$ ではなく $\Delta_n E_i$ で1つの文字)

(5.253)を(5.252)へ代入する

$$\frac{d}{dt}\left(E_{0,i} + \Delta_1 E_i + \Delta_2 E_i + \cdots\right) = f_i(E_{0,1} + \Delta E_1 + \cdots, \cdots, E_{0,n} + \Delta E_n + \cdots)$$

微小量について マクローリン展開

$$\underbrace{\frac{dE_{0,i}}{dt}}_{0次} + \underbrace{\frac{d\Delta_1 E_i}{dt}}_{1次} + \underbrace{\frac{d\Delta_2 E_i}{dt}}_{2次} + \cdots = \underbrace{(f_i)_0}_{1次} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial E_j}\right)_0 \Delta_1 E_j}_{2次} + \cdots \qquad \cdots (5.254)$$

(5.254)の両辺を比較すると、

$$\frac{dE_{0,i}}{dt} = 0 \qquad \cdots (5.255)$$

$$\frac{d\Delta_1 E_i}{dt} = (f_i)_0 \qquad \cdots (5.256)$$

$$\frac{d\Delta_2 E_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial E_j}\right)_0 \Delta_1 E_j \qquad \cdots (5.257)$$

(5.255)より、

$$E_{0,i} = const \qquad \cdots (5.258)$$

である。

(2.256)の右辺は 定数である$E_{0,i}$と時間tの既知の関数であるから、
ΔE_iについては単に時間積分すれば求められる。

$$\Delta_1 E_i = \int (f_i)_0 \, dt \qquad \cdots (5.259)$$

1次の解(5.259)を(5.257)に代入すると、

$$\Delta_2 E_i = \sum_j \int \left(\frac{\partial f_i}{\partial E_j}\right)_0 \Delta_1 E_j \, dt \qquad \cdots (5.260)$$

として、2次の摂動が求められる

ここで木星によって運動が乱されている小惑星の運動を取り上げる。
木星による摂動関数Rを周期級数で展開すると、

$$R = \sum C_{j_1 j_2 j_3 j_1' j_2' j_3'}(a, e, I, a', e', I') \cos\theta \qquad \cdots (5.261)$$

$$\theta = j_1 \lambda + j_2 \varpi + j_3 \Omega + j_1' \lambda' + j_2' \varpi' + j_3' \Omega' \qquad \cdots (5.262)$$

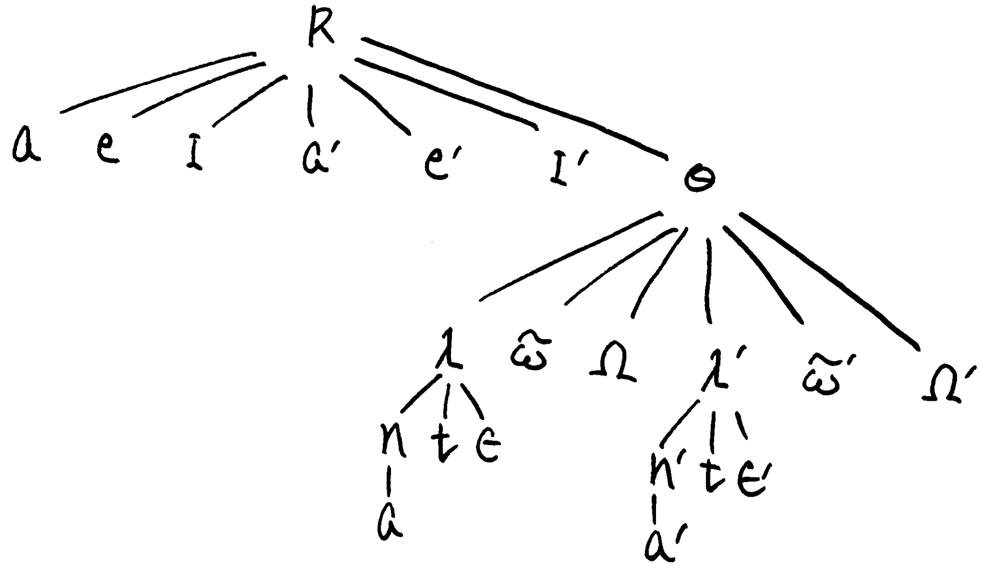
となる。

(5.261)に正弦項がないことに~~異~~違和感があったが、これはRが$R(\theta) = R(-\theta)$
となる偶関数だからである。これは$-\theta = -j_1\lambda - j_2\varpi - j_3\Omega - j_1'\lambda' - j_2'\varpi' - j_3'\Omega'$
となる場合を図で考えてみるとイメージがつかみやすいと思う。
または軌道要素を用いて、天体の位置をデカルト座標上で表すと、
(天体力学入門 上 P.155)(6.120)式のようになるので、$\theta \to -\theta$の
変化がただの座標回転にすぎないことがこの式からも表せる。

(5.261)の摂動関数Rにどの文字が含まれているかわかりやすく書き直すと、

$$R = \sum C(a, e, I, a', e', I') \cos\Theta(\lambda, \tilde{\omega}, \Omega, \lambda', \tilde{\omega}', \Omega') \quad \cdots ①$$

となる。
また、(5.263)とケプラーの第3法則($n^2a^3 = \mu = GM_s$)をふまえて、各文字同士の依存関係を図で表すと以下のようになる。



以上より、軌道要素の運動方程式(5.165)~(5.170)の右辺がそれぞれ余弦級数となるのか、正弦級数となるのかを知ることができる。
以下にて詳細説明。

・(5.165)~(5.170)を直接いじる前に、摂動関数数を各軌道要素で偏微分した形を先に求めておく。(上図参考)

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{\partial R}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} = -i_1 \sum C \sin\Theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial R}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\omega}} = -i_2 \sum C \sin\Theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \Omega} = -i_3 \sum C \sin\Theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \sum \frac{\partial C}{\partial a} \cos\theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \sum \frac{\partial C}{\partial e} \cos\theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \sum \frac{\partial C}{\partial I} \cos\theta$$

・以上を(5.165)〜(5.170)へ代入すると、

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\lambda_1}{na} \sum C \sin\theta$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{na^2 e}\left\{(1-\eta)\lambda_1 + \lambda_2\right\} \sum C \sin\theta$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{na^2\eta}\left\{\frac{\tan\frac{I}{2}}{e}(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{1}{\sin I}\lambda_3\right\} \sum C \sin\theta$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \sum\left[\left\{-\frac{2}{na}\frac{\partial C}{\partial a} + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2 e}\frac{\partial C}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial C}{\partial I}\right\}\cos\theta\right]$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \sum\left[\left\{\frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial C}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial C}{\partial I}\right\}\cos\theta\right]$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta\sin I} \sum \frac{\partial C}{\partial I}\cos\theta$$

以上より、$\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{dI}{dt}$ は正弦級数、$\frac{d\epsilon}{dt}, \frac{d\hat{\omega}}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}$ は余弦級数となることがわかったので、各軌道要素を級数展開したときの1次の項(5.259)はそれぞれ、a, e, I は余弦級数、$\epsilon, \hat{\omega}, \Omega$ は正弦級数となることがわかる。

ここで、摂動関数Rを2つの部分に分ける。
$i_1 = i_1' = 0$ である項をまとめた部分をR_s，残りの部分をR_pとする。

$$\left.\begin{aligned} R &= R_s + R_p \\ R_s &= \sum_{i_1=i_1'=0} C_s \cos\Theta_s \quad \leftarrow \text{時間に依存しない定数：永年項} \\ R_p &= \sum_{i_1\neq 0,\, i_1'\neq 0} C_p \cos\Theta_p \quad \leftarrow \text{周期項} \end{aligned}\right\} \quad \cdots(5.264)$$

これから、1次の摂動解の具体的な形を求める。
まず軌道長半径 a の摂動を考える。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (\because 5.165)$$

$$= \frac{2}{n_0 a_0}\frac{\partial R_p}{\partial \epsilon} \quad (\because R_s \text{に}\epsilon\text{は含まれない})$$

$$= \frac{2}{n_0 a_0}\sum_{i_1\neq 0,\, i_1'\neq 0} C_p \frac{\partial(\cos\Theta_p)}{\partial\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\epsilon}$$

$$= -\frac{2}{n_0 a_0}\sum_{i_1\neq 0,\, i_1'\neq 0} i_1 C_p \sin\Theta_p \quad \cdots(5.265)$$

であり、これを積分して、

$$\Delta_1 a = \int \frac{da}{dt}\, dt \quad (\because 5.259)$$

$$\left(\begin{aligned} &\Theta = i_1\lambda + i_2\tilde{\omega} + i_3\Omega + i_1'\lambda' + i_2'\tilde{\omega}' + i_3'\Omega' \quad (\because 5.262) \\ &\text{であるから、} \\ &\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda'}\frac{\partial\lambda'}{\partial t} \\ &\qquad = i_1 n + i_1' n' \\ &\therefore dt = \frac{d\Theta}{i_1 n + i_1' n'} \end{aligned}\right)$$

$$\Delta_1 a \;\vdots= \int \left(-\frac{2}{n_0 a_0} \sum_{j_1 \neq 0, j_1' \neq 0} j_1 C_p \sin\theta_p \right) \cdot \frac{1}{j_1 n_0 + j_1' n'} \, d\theta_p$$

$$= \frac{2}{n_0 a_0} \sum_{j_1 \neq 0, j_1' \neq 0} \frac{j_1 C_p}{j_1 n_0 + j_1' n'} \cos\theta_p$$

$$= a_0 + (\text{余弦級数}) \qquad \cdots (5.266)$$

次に、昇交点経度Ωについての方程式は(5.170)より、

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2 \eta_0 \sin I_0} \frac{\partial R}{\partial I}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n_0 a_0^2 \eta_0 \sin I_0} \Bigg(\sum_{j_1 = j_1' = 0} \frac{\partial C_s}{\partial I} \cos\theta_s}_{=\ \Omega_1 \text{ とおく (const)}} + \sum_{j_1 \neq 0, j_1' \neq 0} \frac{\partial C_p}{\partial I} \cos\theta_p \Bigg) \qquad \cdots (5.267)$$

以上より、Ωは、(計算の仕方はaのときと同じなので省略)

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 t + \frac{1}{n_0 a_0^2 \eta_0 \sin I_0} \sum_{j_1 \neq 0, j_1' \neq 0} \frac{1}{j_1 n_0 + j_1' n'} \frac{\partial C_p}{\partial I} \sin\theta_p$$

$$= \Omega_0 + \Omega_1 t + (\text{正弦級数}) \qquad \cdots (5.268)$$

Ω_1は定数なので、時間とともに一方向に変化する。
つまり軌道面が木星の作用によって回転する。

e, I, ϖ, ϵ の1次の摂動解は、Ωと同じように永年項と周期項の和として求められるらしいが、今回は実際に求めることはしない。(めんどうだから)

次に、(5.137)で定義されたρについての方程式は(5.174)より

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a_0^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = -\frac{3}{a_0^2}\frac{\partial R_p}{\partial \epsilon} \quad \cdots (5.269)$$

であるから、

$$\rho = -\frac{3}{a_0^2}\sum_{j_1\neq 0,\, j_1'\neq 0} \frac{j_1 C_p}{(j_1 n_0 + j_1' n')^2} \sin\theta_p \quad \cdots (5.270)$$

1次の摂動の結果をまとめると、

$$\left.\begin{aligned}
a &= a_0 + (\text{余弦級数})\\
e &= e_0 + e_1 t + (\text{余弦級数})\\
I &= I_0 + I_1 t + (\text{余弦級数})\\
\lambda &= (n_0 + \epsilon_1) t + \epsilon_0 + (\text{正弦級数})\\
\tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 t + (\text{正弦級数})\\
\Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 t + (\text{正弦級数})
\end{aligned}\right\} \quad \cdots (5.271)$$