6.3 J_3による長周期摂動

地球ポテンシャル3次の項

$$R_3 = -\frac{\mu a_E^3}{r^4} J_3 P_3(\sin\varphi)$$

$$= -\frac{\mu a_E^3}{r^4} J_3 \cdot \frac{1}{2}(5\sin^3\varphi - 3\sin\varphi) \qquad (\because D.3)$$

$$= -\frac{\mu a_E^3}{2r^4} J_3 \sin\varphi(5\sin^2\varphi - 3) \qquad \cdots (6.83)$$

による摂動を考える。この項を軌道要素で表現するために

$$\sin\varphi = \sin I \sin(f+\omega) \qquad \cdots (6.3)$$

を用いて、(6.83)を変形する。

$$R_3 = -\frac{\mu a_E^3}{2r^4} J_3 \left\{5\sin^3 I \sin^3(f+\omega) - 3\sin I \sin(f+\omega)\right\}$$

$\vdots$

（この後、R_3の永年部分をだしていくので、R_3を時間で積分することを考えて整理していく。つまり、fに注目して整理する。）

$\vdots$

$$= -\frac{\mu a_E^3}{2r^4} J_3 \left\{5\sin^3 I \cdot \frac{1}{4}\left(3\sin(f+\omega) - \sin 3(f+\omega)\right) - 3\sin I \cdot \sin(f+\omega)\right\}$$

$$= -\frac{\mu a_E^3}{2r^4} J_3 \left\{\left(\frac{15}{4}\sin^3 I - 3\sin I\right)\sin(f+\omega) - \frac{5}{4}\sin^3 I \sin 3(f+\omega)\right\}$$

$$= -\frac{\mu a_E^3}{2r^4} J_3 \left\{\frac{3}{4}\sin I(5\sin^2 I - 4)\sin(f+\omega) - \frac{5}{4}\sin^3 I \sin 3(f+\omega)\right\}$$

$$= -\frac{\mu a_E^3}{2r^4} J_3 \left\{\frac{3}{4}\sin I(1 - 5\cos^2 I)\sin(f+\omega) - \frac{5}{4}\sin^3 I \sin 3(f+\omega)\right\}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$R_3 = \frac{\mu a_E^3}{r^4} J_3 \left\{ \frac{3}{8} \sin I \, (5\cos^2 I - 1) \sin(f+\omega) + \frac{5}{8} \sin^3 I \sin 3(f+\omega) \right\} \quad \cdots (6.84)$$

R_3を永年部分(定数部分)と周期成分に分ける。

永年部分 R_{3s} は

$$R_{3s} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_3 \, dl \quad \left(= \langle R_3 \rangle \right)$$

(時間 (or l) とともに変動する文字は f だけ)

$$\left(\begin{aligned} &\sin(f+\omega) = \sin f \cos\omega + \cos f \sin\omega \\ &\sin 3(f+\omega) = \sin 3f \cos 3\omega + \cos 3f \sin 3\omega \quad \text{より、} \end{aligned} \right)$$

$\vdots$

$$= \frac{\mu a_E^3}{a^4} J_3 \left\{ \frac{3}{8} \sin I \, (5\cos^2 I - 1) \left[\cos\omega \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin f \, dl}_{=0} + \sin\omega \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f \, dl}_{=\frac{e}{\eta^5}} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{5}{8} \sin^3 I \left[\cos 3\omega \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 3f \, dl}_{=0} + \sin 3\omega \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 3f \, dl}_{=0} \right] \right\}$$

$$= \frac{\mu a_E^3}{a^4} J_3 \cdot \frac{3}{8} \sin I \, (5\cos^2 I - 1) \cdot \sin\omega \cdot \frac{e}{\eta^5}$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{3}{8} \frac{\mu a_E^3}{a^4 \eta^5} J_3 \, e \sin I \, (5\cos^2 I - 1) \sin\omega \\ &= P(a, e, I) \sin\omega \end{aligned} \right) \cdots \begin{pmatrix} 6.85 \\ 6.86 \end{pmatrix}$$

このR$_{3s}$からは、J$_2$について1次の摂動がでてくる。
R$_{3s}$からの寄与を正しく求めるには2次のポテンシャルとの相互作用を考慮しなければならない。

J$_2$項の永年部分R$_{2s}$は(6.12)より、

$$R_{2s} = \frac{\mu a_E^2}{4a^3\eta^3} J_2 (3\cos^2 I - 1)$$

と求められている。
J$_3$項の永年部分R$_{3s}$は(6.85),(6.86)より

$$R_{3s} = \frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4\eta^5} J_3\, e \sin I (5\cos^2 I - 1) \sin\omega$$

と求められている。

R$_{2s}$+R$_{3s}$は共に時間(l)で平均をとって導出した永年項である。
つまり、元期近点離角σは、この$\underbrace{\text{過程}}_{\text{時間平均をとる}}$で消えてしまう。
よって(6.5)より、軌道長半径は定数a_0となる。
残りの軌道要素e, I, ω, Ωについても方程式(6.6),(6.7),(6.9),(6.10)より求めていく。

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$= -\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial}{\partial\omega} R_{3s}$$

($\because$ R$_{2s}$, R$_{3s}$はσを含んでいない、R$_{2s}$はωを含んでいない)

$$= -\frac{\eta}{na^2e}\frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4\eta^5} J_3\, e \sin I (5\cos^2 I - 1)\cos\omega$$

$$= -\frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{na^6\eta^4} J_3 \sin I (5\cos^2 I - 1)\cos\omega \quad \cdots (6.87)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{\partial}{\partial \omega} R_{3s}$$

$$= \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{3}{8} \frac{\mu a_E^3}{a^4 \eta^5} J_3 e \sin I (5\cos^2 I - 1) \cos\omega$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\mu a_E^3}{na^6\eta^6} J_3 e \cos I (5\cos^2 I - 1) \cos\omega \quad \cdots (6.88)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial}{\partial e}\left(R_{2s} + R_{3s}\right) - \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{\partial}{\partial I}\left(R_{2s} + R_{3s}\right)$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ (\because 6.15)}}{n_2} + \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial}{\partial e} R_{3s} - \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{\partial}{\partial I} R_{3s}$$

$$= n_2(a, e, I) + \left(\frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial P}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{\partial P}{\partial I}\right) \sin\omega \quad \cdots (6.89)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial}{\partial I}(R_{2s} + R_{3s})$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ (\because 6.16)}}{n_3} + \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial}{\partial I} R_{3s}$$

$$= n_3(a, e, I) + \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial P}{\partial I} \sin\omega \quad \cdots (6.90)$$

(6.87)から(6.90)を方程式を逐次近似法で解いていく。

今回、(6.89)と(6.90)の右辺の第1項はJ_2の大きさであり、第2項はJ_3 ($\doteqdot J_2^2$)の大きさの微小量であることに注意。

まず最初に、J_3の項がないとき(J_2項のみ働いているとき)の解を求める。

このとき離心率と軌道傾斜角(あと軌道長半径も)は定数e_0, I_0, (a_0)となることは、P.184よりすでにわかっている。← a_0については、6.3-3ページで記

したがって$n_2(a, e, I)$, $n_3(a, e, I)$も定数になることがわかる。
よって、

$$\omega = n_2(a_0, e_0, I_0)\,t + \omega_0 = \omega^* \quad \cdots (6.93)$$
$$\Omega = n_3(a_0, e_0, I_0)\,t + \Omega_0 = \Omega^* \quad \cdots (6.94)$$

が得られる。

これについで、J_3による摂動を考える。

まずは、J_3による離心率の摂動δe ($e = e_0 + \delta e$)を求める。
(6.87)より、

$$\frac{d\delta e}{dt} = \frac{d}{dt}(e - e_0)$$

$$= \frac{de}{dt} \quad (\because e_0 : \mathrm{const})$$

$$= -\frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^4} J_3 \sin I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)\cos\omega^* \quad \cdots (6.95)$$

これを積分すると、

$$\underbrace{\int \frac{d\delta e}{dt}\,dt}_{=\,\delta e} = \int \frac{d\delta e}{dt}\,\frac{dt}{d\omega^*}\,d\omega^*$$

$$\frac{d\omega^*}{dt} = n_2(a_0, e_0, I_0) \quad (\because 6.93)$$

$$\delta e = \frac{1}{n_2(a_0, e_0, I_0)} \int \frac{d\delta e}{dt}\,d\omega^*$$

$$= -\frac{3}{8}\,\frac{\mu a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^4} J_3 \,\frac{\sin I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)}{n_2(a_0, e_0, I_0)} \sin\omega^*$$

$$= -\frac{3}{8}\,\frac{n_0^2 a_0^3 a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^4} J_3 \,\frac{\sin I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)}{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 n_0 (5\cos^2 I_0 - 1)} \sin\omega^*$$

$$= -\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{J_3}{J_2}\,\frac{n_0^2 a_0^5 \eta_0^4 a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^4 a_E^2} \sin I_0 \sin\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2 J_2 a_0} \sin I_0 \sin\omega^* \qquad \cdots (6.96)$$

同様にして、J_3による軌道傾斜角の摂動δI $(I=I_0+\delta I)$を求める。

(6.88)より、

$$\frac{d\delta I}{dt}=\frac{d}{dt}(I-I_0)$$

$$=\frac{dI}{dt} \qquad (\because I_0 : \mathrm{const})$$

$$=\frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^6} J_3 e_0 \cos I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)\cos\omega^*$$

これを積分すると、

$$\int \frac{d\delta I}{dt} dt = \int \frac{d\delta I}{dt}\frac{dt}{d\omega^*} d\omega^*$$

$$\delta I = \frac{1}{n_2(a_0, e_0, I_0)}\int \frac{d\delta I}{dt} d\omega^*$$

$$=\frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^6} J_3 e_0 \frac{\cos I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)}{n_2(a_0, e_0, I_0)} \sin\omega^*$$

$$=\frac{3}{8}\frac{\underset{n_0^2 a_0^3}{\mu} a_E^3}{n_0 a_0^6 \eta_0^6} J_3 e_0 \frac{\cos I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)}{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{\underset{(a_0\eta_0^2)^2}{p_0}}\right)^2 n_0 (5\cos^2 I_0 - 1)} \sin\omega^*$$

$$=\frac{3}{8}\frac{4}{3}\frac{J_3}{J_2}\frac{\mu a_E^3 p_0^2 e_0}{n_0^2 a_0^6 \eta_0^6 a_E^2}\cos I_0 \sin\omega^*$$

$$=\frac{J_3}{2J_2}\frac{n_0^2 a_0^5 \eta_0^4 e_0 a_E^3}{n_0^2 a_0^6 \eta_0^6 a_E^2}\cos I_0 \sin\omega^*$$

$$=\frac{J_3 a_E}{2J_2 a_0 \eta_0^2} e_0 \cos I_0 \sin\omega^*$$

$$=\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0} e_0 \cos I_0 \sin\omega^* \qquad \cdots (6.97)$$

次に、J_3による近点引数の摂動$\delta\omega$を求める。($\omega=\omega^*+\delta\omega$)

δeとδIを求めたときと同様にして、$\delta\omega$も(6.89)から求めていく。
しかし、(6.89)にはn_2が含まれており、これはJ_2について1次であるので、
同じくJ_2について1次である摂動δe, δIを考慮しなければならない。

n_2をe_0, I_0周りでδe, δIについてテイラー展開する。

$$n_2(a,e,I)=n_2(a_0,e_0,I_0)+\frac{\partial n_2(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}\delta e+\frac{\partial n_2(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\delta I \quad \cdots(6.98)$$

以上を用いて$\delta\omega$の方程式を(6.89)より求めると、

$$\frac{d\delta\omega}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega-\omega^*)$$

$$=\underset{\sim\sim}{\frac{d\omega}{dt}}-\underline{\underline{\frac{d\omega^*}{dt}}}$$

$$=\underset{\sim\sim}{n_2(a_0,e_0,I_0)+\frac{\partial n_2(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}\delta e+\frac{\partial n_2(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\delta I}$$

$$\underset{\sim\sim}{+\left\{\frac{\eta_0}{n_0a_0^2e_0}\frac{\partial P(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}-\frac{\cot I_0}{n_0a_0^2\eta_0}\frac{\partial P(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\right\}\sin\omega^*}$$

$$\underline{\underline{-n_2(a_0,e_0,I_0)}}$$

$$=\frac{\partial n_2(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}\delta e+\frac{\partial n_2(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\delta I$$

$$+\left\{\frac{\eta_0}{n_0a_0^2e_0}\frac{\partial P(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}-\frac{\cot I_0}{n_0a_0^2\eta_0}\frac{\partial P(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\right\}\sin\omega^* \quad \cdots(6.99)$$

(6.99)の右辺の計算に必要なn_2, P の e, I に関する偏微分を求めていく。 ($p = a\eta^2 = a(1-e^2)$ に注意)

$$\frac{\partial n_2}{\partial e} = \frac{\partial n_2}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial e}$$

$$= \frac{3}{4} J_2 a_E^2 (-2p^{-3}) n (5\cos^2 I - 1)(-2ae)$$

$$= 3J_2 \frac{a_E^2 n a e}{p^3} (5\cos^2 I - 1)$$

$$= 3J_2 \frac{a_E^2 e n}{a^2 \eta^6} (5\cos^2 I - 1) \quad \cdots (6.100)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial I} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{p}\right)^2 n \cdot 10 \cos I(-\sin I)$$

$$= -\frac{15}{2} J_2 \frac{a_E^2 n \sin I \cos I}{p^2}$$

$$= -\frac{15}{2} J_2 \frac{a_E^2 n \sin I \cos I}{a^2 \eta^4} \quad \cdots (6.101)$$

$$\frac{\partial P}{\partial e} = \left(\frac{\partial P}{\partial e}\right)_\eta + \left(\frac{\partial P}{\partial \eta^2}\right)_e \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial e}$$

$$= \frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4 \eta^5} J_3 \sin I (5\cos^2 I - 1) + \frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4}\left(-\frac{5}{2}\eta^{-7}\right) J_3 e \sin I (5\cos^2 I - 1)(-2e)$$

$$= \frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4 \eta^7} J_3 \sin I (5\cos^2 I - 1) \cdot (\eta^2 + 5e^2)$$

$$= \frac{3}{8}\frac{n^2 a^3 a_E^3}{a^4 \eta^7} J_3 \sin I (5\cos^2 I - 1)(1 - e^2 + 5e^2)$$

$$= \frac{3}{8} J_3 \frac{a_E^3 n^2}{a \eta^7}(1 + 4e^2) \sin I (5\cos^2 I - 1) \quad \cdots (6.102)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = \frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4\eta^5} J_3 e\left\{\cos I(5\cos^2 I - 1) + \sin I \cdot 10\cos I(-\sin I)\right\}$$

$$= \frac{3}{8} J_3 \frac{a_E^3 e n^2}{a\eta^5}\cos I(15\cos^2 I - 11) \quad \cdots (6.103)$$

これら(6.100)~(6.103)と(6.96),(6.97)を(6.99)へ代入して整理すると、

$$\frac{d\delta\omega}{dt} = \left\{3J_2\frac{a_E^2 e_0 n_0}{a_0^2\eta_0^6}(5\cos^2 I_0 - 1)\right\}\left\{-\frac{J_3 a_E}{2J_2 a_0}\sin I_0 \sin\omega^*\right\}$$

$$+ \left\{-\frac{15}{2}J_2\frac{a_E^2 n_0 \sin I_0 \cos I_0}{a_0^2\eta_0^4}\right\}\left\{\frac{J_3 a_E}{2J_2 P_0}e_0\cos I_0 \sin\omega^*\right\}$$

$$+ \left\{\frac{\eta_0}{n_0 a_0^2 e_0}\cdot\frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 n_0^2}{a_0\eta_0^7}(1+4e_0^2)\sin I_0(5\cos^2 I_0 - 1)\right.$$

$$\left. - \frac{\cot I_0}{n_0 a_0^2\eta_0}\cdot\frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0^2}{a_0\eta_0^5}\cos I_0(15\cos^2 I_0 - 11)\right\}\sin\omega^*$$

$$= -\frac{3}{2}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3\eta_0^6}(5\cos^2 I_0 - 1)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$- \frac{15}{4}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\sin I_0 \cos^2 I_0 \sin\omega^*$$

$$+ \frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\frac{1+4e_0^2}{e_0}\sin I_0(5\cos^2 I_0 - 1)\sin\omega^*$$

$$- \frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\frac{\cos^2 I_0}{\sin I_0}(15\cos^2 I_0 - 11)\sin\omega^*$$

$$= J_3\frac{a_E^3 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\left\{-\frac{3}{2}e_0(5\cos^2 I_0 - 1)\sin I_0 - \frac{15}{4}e_0\sin I_0\cos^2 I_0\right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}\frac{1+4e_0^2}{e_0}\sin I_0(5\cos^2 I_0 - 1) - \frac{3}{8}e_0\frac{\cos^2 I_0}{\sin I_0}(15\cos^2 I_0 - 11)\right\}\sin\omega^*$$

⋮

$$\frac{d\delta\omega}{dt} = J_3 \frac{a_E^3 n_0}{a_0^3 \eta_0^6} \frac{1}{8 e_0 \sin I_0} \left\{ -12 e_0^2 \sin^2 I_0 (5\cos^2 I_0 - 1) - 30 e_0^2 \sin^2 I_0 \cos^2 I_0 \right.$$

$$\left. + 3(1+4e_0^2) \sin^2 I_0 (5\cos^2 I_0 - 1) - 3 e_0^2 \cos^2 I_0 (15\cos^2 I_0 - 11) \right\} \sin\omega^*$$

$$= J_3 \frac{a_E^3 n_0}{a_0^3 \eta_0^6} \frac{1}{8 e_0 \sin I_0} \left\{ 3\sin^2 I_0 (5\cos^2 I_0 - 1) \underbrace{- e_0^2 \cos^2 I_0 (30 \sin^2 I_0 + 45\cos^2 I_0 - 33)}_{\substack{= -e_0^2 \cos^2 I_0 (15\cos^2 I_0 - 3) \\ = -3e_0^2 \cos^2 I_0 (5\cos^2 I_0 - 1)}} \right\} \sin\omega^*$$

$$= \frac{3}{8} J_3 \frac{a_E^3 n_0}{a_0^3 \eta_0^6} \frac{(5\cos^2 I_0 - 1)(\sin^2 I_0 - e_0^2 \cos^2 I_0)}{e_0 \sin I_0} \sin\omega^* \quad \cdots (6.104)$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2 J_2 p_0} n_2(a_0, e_0, I_0) \cdot \frac{\sin^2 I_0 - e_0^2 \cos^2 I_0}{e_0 \sin I_0} \sin\omega^* \quad (\because 6.91)$$

これを時間積分して、

$$\int \frac{d\delta\omega}{dt} dt = \int \frac{d\delta\omega}{dt} \underbrace{\frac{dt}{d\omega^*}}_{= \frac{1}{n_2(a_0, e_0, I_0)} \ (\because 6.93)} d\omega^*$$

$$\delta\omega = \int \frac{J_3 a_E}{2 J_2 p_0} \frac{\sin^2 I_0 - e_0^2 \cos^2 I_0}{e_0 \sin I_0} \sin\omega^* \, d\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2 J_2 p_0} \frac{\sin^2 I_0 - e_0^2 \cos^2 I_0}{e_0 \sin I_0} \cos\omega^* \quad \cdots (6.105)$$

同様にして、昇交点経度の J_3 による摂動 $\delta\Omega$ $(\Omega = \Omega^* + \delta\Omega)$ を求める。

n_3 を e_0, I_0 周りで $\delta e, \delta I$ についてテイラー展開する。

$$n_3(a,e,I) = n_3(a_0,e_0,I_0) + \frac{\partial n_3(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}\delta e + \frac{\partial n_3(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\delta I$$

以上を用いて、$\delta\Omega$ の方程式を (6.90) より求めると、

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\Omega}{dt} &= \frac{d}{dt}(\Omega - \Omega^*) \\
&= \frac{d\Omega}{dt} - \frac{d\Omega^*}{dt} \\
&= n_3(a_0,e_0,I_0) + \frac{\partial n_3(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}\delta e + \frac{\partial n_3(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\delta I \\
&\quad + \frac{1}{n_0 a_0^2 \eta_0 \sin I_0}\frac{\partial P(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\sin\omega^* \\
&\quad - n_3(a_0,e_0,I_0) \\
&= \frac{\partial n_3(a_0,e_0,I_0)}{\partial e}\delta e + \frac{\partial n_3(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\delta I + \frac{1}{n_0 a_0^2 \eta_0 \sin I_0}\frac{\partial P(a_0,e_0,I_0)}{\partial I}\sin\omega^*
\end{aligned}$$

この式を展開するために、n_3 と P の e と I に関する偏微分した形が必要である。P に関する偏微分はすでに (6.102), (6.103) で求めてあるので、n_3 に関してだけ、ここで求める。

$$\frac{\partial n_3}{\partial e} = \frac{\partial n_3}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial e}$$

$$= -\frac{3}{2} J_2\, a_E^2 \left(-2p^{-3}\right) n \cos I \cdot (-2ae)$$

$$= -6 J_2 \frac{a_E^2 n a e}{p^3} \cos I$$

$$= -6 J_2 \frac{a_E^2 e n}{a^2 \eta^6} \cos I$$

$$\frac{\partial n_3}{\partial I} = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p}\right)^2 n \sin I$$

$$= \frac{3}{2} J_2 \frac{a_E^2 n}{a^2 \eta^4} \sin I$$

これらを用いて $\dfrac{d\delta\Omega}{dt}$ を整理する。

$$\frac{d\delta\Omega}{dt} = \left(-6 J_2 \frac{a_E^2 e_0 n_0}{a_0^2 \eta_0^6} \cos I_0\right)\left(-\frac{J_3 a_E}{2 J_2 a_0} \sin I_0 \sin\omega^*\right)$$

$$+ \left(\frac{3}{2} J_2 \frac{a_E^2 n_0}{a_0^2 \eta_0^4} \sin I_0\right)\left(\frac{J_3 a_E}{2 J_2 a_0 \eta_0^2} e_0 \cos I_0 \sin\omega^*\right)$$

$$+ \frac{1}{n_0 a_0^2 \eta_0 \sin I_0} \cdot \frac{3}{8} J_3 \frac{a_E^3 e_0 n_0^2}{a_0 \eta_0^5} \cos I_0 \left(15\cos^2 I_0 - 11\right) \sin\omega^*$$

$$= 3 J_3 \frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3 \eta_0^6} \sin I_0 \cos I_0 \sin\omega^* + \frac{3}{4} J_3 \frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3 \eta_0^6} \sin I_0 \cos I_0 \sin\omega^*$$

$$+ \frac{3}{8} J_3 \frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3 \eta_0^6} \cdot \frac{\cos I_0}{\sin I_0} \left(15\cos^2 I_0 - 11\right) \sin\omega^*$$

$$\vdots$$

⋮

$$\frac{d\delta\Omega}{dt} = \frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\frac{1}{\sin I_0}\left\{8\sin^2 I_0\cos I_0 + 2\sin^2 I_0\cos I_0 + \cos I_0(15\cos^2 I_0 - 11)\right\}\sin\omega^*$$

$$= \frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\frac{1}{\sin I_0}\left(\underbrace{10\sin^2 I_0\cos I_0 + 15\cos^3 I_0 - 11\cos I_0}\right)\sin\omega^*$$

$$\shortparallel$$

$$10(\sin^2 I_0 + \cos^2 I_0)\cos I_0 + 5\cos^3 I_0 - 11\cos I_0$$

$$= 5\cos^3 I_0 - \cos I_0$$

$$= \frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 e_0 n_0}{a_0^3\eta_0^6}\frac{(5\cos^2 I_0 - 1)\cos I_0}{\sin I_0}\sin\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}n_2(a_0, e_0, I_0)\frac{e_0\cos I_0}{\sin I_0}\sin\omega^* \qquad (\because 6.91)$$

これを時間積分して、

$$\int\frac{d\delta\Omega}{dt}dt = \int\frac{d\delta\Omega}{dt}\underbrace{\frac{dt}{d\omega^*}}d\omega^*$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{n_2(a_0, e_0, I_0)} \quad (\because 6.93)$$

$$\delta\Omega = \int\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{e_0\cos I_0}{\sin I_0}\sin\omega^* d\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{e_0\cos I_0}{\sin I_0}\cos\omega^* \qquad \cdots (6.106)$$

平均近点離角のJ_3による摂動δlを求める。 $(l = l^* + \delta l)$

・δlの方程式を求める

$$\frac{d\delta l}{dt} = \frac{d}{dt}(l - l^*)$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{(nt+\alpha) - (nt+\alpha^*)\right\}$$

$$= \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\alpha^*}{dt} \quad \cdots ①$$

(∵J_3による摂動を加えても、軌道長半径の値は変化しないことがわかっている。よってケプラーの第3法則($\mu = n^2a^3$)よりnも定数であることがわかる。)

・J_3を考慮したときのαについての方程式は(6.8)より

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial}{\partial a}(R_{2s}+R_{3s}) - \frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial}{\partial e}(R_{2s}+R_{3s})$$

$$= n_1(a,e,I) - \frac{2}{na}\frac{\partial R_{3s}}{\partial a} - \frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial R_{3s}}{\partial e}$$

$$= n_1(a,e,I) - \frac{2}{na}\frac{\partial P}{\partial a}\sin\omega - \frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial P}{\partial e}\sin\omega \quad \cdots ②$$

・上式を展開するために$\frac{\partial P}{\partial a}$と$\left(\frac{\partial P}{\partial e}\right)$を求める。 すでに求めてある

また、n_1に関しても内包するe, IはJ_3の摂動によって変化しているので、それも考慮しなければいけない。

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{3}{8}\frac{\mu a_E^3}{a^4\eta^5}J_3 e\sin I(5\cos^2 I - 1)\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\mu a_E^3}{a^5\eta^5}J_3 e\sin I(5\cos^2 I - 1)$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{n^2 a_E^3}{a^2\eta^5}J_3 e\sin I(5\cos^2 I - 1) \quad \cdots ③$$

$$\frac{\partial P}{\partial e} = \frac{3}{8} J_3 \frac{a_E^3 n^2}{a \eta^7} (1+4e^2) \sin I (5\cos^2 I - 1) \qquad \cdots (\because 6.103)$$

n_1については、e_0, I_0 周りでテイラー展開する

$$n_1(a,e,I) = n_1(a_0,e_0,I_0) + \frac{\partial n_1(a_0,e_0,I_0)}{\partial e} \delta e + \frac{\partial n_1(a_0,e_0,I_0)}{\partial I} \delta I \qquad \cdots ④$$

$\vdots$

$$\frac{\partial n_1}{\partial e} = \frac{\partial n_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta^2}{\partial e}$$
$$= \frac{3}{4} J_2 \frac{a_E^2 n}{a^2} \left\{ -\frac{3}{2} (\eta^2)^{-\frac{5}{2}} \right\} (3\cos^2 I - 1)(-2e)$$
$$= \frac{9}{4} J_2 \frac{a_E^2 n e}{a^2 \eta^5} (3\cos^2 I - 1) \qquad \cdots ⑤$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial I} = \frac{3}{4} J_2 \frac{a_E^2 n}{a^2 \eta^3} 6\cos I (-\sin I)$$
$$= -\frac{9}{2} J_2 \frac{a_E^2 n}{a^2 \eta^3} \sin I \cos I \qquad \cdots ⑥$$

$\vdots$

$$= n_1(a_0,e_0,I_0) + \frac{9}{4} J_2 \frac{a_E^2 n_0 e_0}{a_0^2 \eta_0^5} (3\cos^2 I_0 - 1) \left(-\frac{J_3 a_E}{2 J_2 a_0} \sin I_0 \sin \omega^* \right)$$
$$- \frac{9}{2} J_2 \frac{a_E^2 n_0}{a_0^2 \eta_0^3} \sin I_0 \cos I_0 \cdot \frac{J_3 a_E}{2 J_2 a_0 \eta_0^2} e_0 \cos I_0 \sin \omega^*$$

$$= n_1(a_0,e_0,I_0) - \frac{9}{8} J_3 \frac{a_E^3 n_0 e_0}{a_0^3 \eta_0^5} (3\cos^2 I_0 - 1) \sin I_0 \sin \omega^*$$
$$- \frac{9}{4} J_3 \frac{a_E^3 n_0 e_0}{a_0^3 \eta_0^5} \sin I_0 \cos^2 I_0 \sin \omega^*$$

$$= n_1(a_0,e_0,I_0) - \frac{9}{8} J_3 \frac{a_E^3 n_0 e_0}{a_0^3 \eta_0^5} \left\{ (3\cos^2 I_0 - 1) + 2\cos^2 I_0 \right\} \sin I_0 \sin \omega^*$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$n_1(a,e,I) = n_1(a_0,e_0,I_0) - \frac{9}{8}J_3\frac{a_E^3 n_0 e_0}{a_0^3\eta_0^5}(5\cos^2 I_0 - 1)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$= n_1(a_0,e_0,I_0) - \frac{3}{2}\frac{J_3 a_E e_0}{J_2 a_0 \eta_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^* \quad \cdots ⑦$$

$(\because 6.91)$

以上で求めた②,③,(6.103),⑦ を①へ代入して整理する。

$$\frac{dl}{dt} = n_1(a_0,e_0,I_0) - \frac{3}{2}\frac{J_3 a_E e_0}{J_2 a_0 \eta_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$-\frac{2}{n_0 a_0}\left\{-\frac{3}{2}\frac{n_0^2 a_E^3}{a_0^2\eta_0^5}J_3 e_0 \sin I_0(5\cos^2 I_0 - 1)\right\}\sin\omega^*$$

$$-\frac{\eta_0^2}{n_0 a_0^2 e_0}\left\{\frac{3}{8}J_3\frac{a_E^3 n_0^2}{a_0\eta_0^7}(1+4e_0^2)\sin I_0(5\cos^2 I_0 - 1)\right\}\sin\omega^*$$

$$- n_1(a_0,e_0,I_0)$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{J_3 a_E e_0}{J_2 a_0 \eta_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$+\frac{3}{8}\frac{a_E^3 n_0}{a_0^3\eta_0^5}J_3\frac{8e_0^2-(1+4e_0^2)}{e_0}\sin I_0(5\cos^2 I_0 - 1)\sin\omega^*$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{J_3 a_E}{J_2 a_0 \eta_0}\frac{e_0^2}{e_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$+\frac{1}{2}\frac{J_3 a_E}{J_2 a_0 \eta_0}\frac{4e_0^2-1}{e_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 a_0 \eta_0}\frac{1-e_0^2}{e_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 a_0}\frac{\eta_0}{e_0} n_2(a_0,e_0,I_0)\sin I_0 \sin\omega^* \quad \cdots ⑧$$

○ ⑧を時間積分する

$$\int \frac{d\delta l}{dt}\,dt = \int \frac{d\delta l}{dt}\underbrace{\frac{dt}{d\omega^*}}_{=\frac{1}{n_2(a_0,e_0,I_0)}\ (\because 6.93)}\,d\omega^*$$

$$\delta l = \frac{J_3 a_E}{2J_2 a_0}\frac{\eta_0}{e_0}\sin I_0\cos\omega^* \qquad \cdots(6.107)$$

lやωは$e_0=0$のとき定義できないが、$l+\omega$であれば定義できる。
この$l+\omega$の長周期摂動を求めてみると、

$$\delta(l+\omega) = \delta l + \delta\omega$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 a_0}\frac{\eta_0}{e_0}\sin I_0\cos\omega^* - \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{(\sin^2 I_0 - e_0^2\cos^2 I_0)}{e_0\sin I_0}\cos\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{\frac{\eta_0^3}{e_0}\sin I_0 - \frac{\sin I_0}{e_0} + \frac{e_0\cos^2 I_0}{\sin I_0}\right\}\cos\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{\frac{\eta_0^3-1}{e_0^2}\sin I_0 + \frac{\cos^2 I_0}{\sin I_0}\right\}e_0\cos\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{\underbrace{\frac{(\eta_0-1)(\eta_0^2+\eta_0+1)}{e_0^2}}\sin I_0 + \frac{\cos^2 I_0}{\sin I_0}\right\}e_0\cos\omega^*$$

$$= \frac{\overbrace{\eta_0^2-1}^{-e_0^2}(\eta_0^2+\eta_0+1)}{e_0^2(\eta_0+1)} = -\frac{1+\eta_0+\eta_0^2}{1+\eta_0}$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{-\frac{1+\eta_0+\eta_0^2}{1+\eta_0}\sin I_0 + \frac{\cos^2 I_0}{\sin I_0}\right\}e_0\cos\omega^* \qquad \cdots(6.113)$$

次に、$I_0=0$ のとき昇交点が定義できないことの反映である $\omega+\Omega$ の長周期摂動を計算すると、

$$\delta(\omega+\Omega) = \delta\omega + \delta\Omega$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{\sin^2 I_0 - e_0^2\cos^2 I_0}{e_0 \sin I_0}\cos\omega^*$$

$$-\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{e_0 \cos I_0}{\sin I_0}\cos\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{\sin^2 I_0 - e_0^2\cos^2 I_0 + e_0^2\cos^2 I_0}{e_0 \sin I_0}\cos\omega^*$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left(\underbrace{\frac{\sin I_0}{e_0}}_{\substack{\| \\ \frac{2\sin\frac{I_0}{2}\cos\frac{I_0}{2}}{e_0} \\ = \frac{2\cos\frac{I_0}{2}}{e_0}\sin\frac{I_0}{2}}} + e_0\underbrace{\frac{\cos I_0(1-\cos I_0)}{\sin I_0}}_{\substack{\| \\ \frac{2\cos I_0 \sin^2\frac{I_0}{2}}{2\sin\frac{I_0}{2}\cos\frac{I_0}{2}} \\ = \frac{\cos I_0}{\cos\frac{I_0}{2}}\sin\frac{I_0}{2}}}\right)\cos\omega^*$$

$$\left(\begin{aligned}&\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta\\ &\therefore \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\end{aligned}\right)$$

$$= -\frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left(\frac{2\cos\frac{I_0}{2}}{e_0} + e_0\frac{\cos I_0}{\cos\frac{I_0}{2}}\right)\sin\frac{I_0}{2}\cos\omega^* \quad \cdots(6.114)$$

e_0, I_0が共に小さいときには、幾何学的に定義できる経度$(l+\omega+\Omega)$の長周期摂動を求める。

(6.113)を利用

$$\delta(l+\omega+\Omega) = (\delta l+\delta\omega)+\delta\Omega$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{-\frac{1+\eta_0+\eta_0^2}{1+\eta_0}\sin I_0 + \frac{\cos^2 I_0}{\sin I_0}\right\} e_0 \cos\omega^*$$

$$- \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\frac{e_0\cos I_0}{\sin I_0}\cos\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{-\frac{1+\eta_0+\eta_0^2}{1+\eta_0}\sin I_0 + \frac{\cos I_0(\cos I_0-1)}{\sin I_0}\right\} e_0 \cos\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{-\frac{1+\eta_0+\eta_0^2}{1+\eta_0}2\sin\frac{I_0}{2}\cos\frac{I_0}{2} + \frac{\cos I_0(2\sin^2\frac{I_0}{2})}{2\sin\frac{I_0}{2}\cos\frac{I_0}{2}}\right\} e_0 \cos\omega^*$$

$$= \frac{J_3 a_E}{2J_2 p_0}\left\{-2\frac{1+\eta_0+\eta_0^2}{1+\eta_0}\cos\frac{I_0}{2} + \frac{\cos I_0}{\cos\frac{I_0}{2}}\right\} e_0 \sin\frac{I_0}{2}\cos\omega^* \quad \cdots (6.115)$$