6.2　J_2項による摂動

J_n $(n \geq 3)$ を無視して、J_2項のみを考える。

地球重力場を表すポテンシャルは、

$$U = -\frac{GM_E}{r}\left\{1 - J_2\left(\frac{a_E}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi)\right\}$$

$$= -\frac{GM_E}{r} + \underbrace{\frac{GM_E a_E^2}{r^3} J_2 P_2(\sin\varphi)}$$

となる

この項が摂動の原因

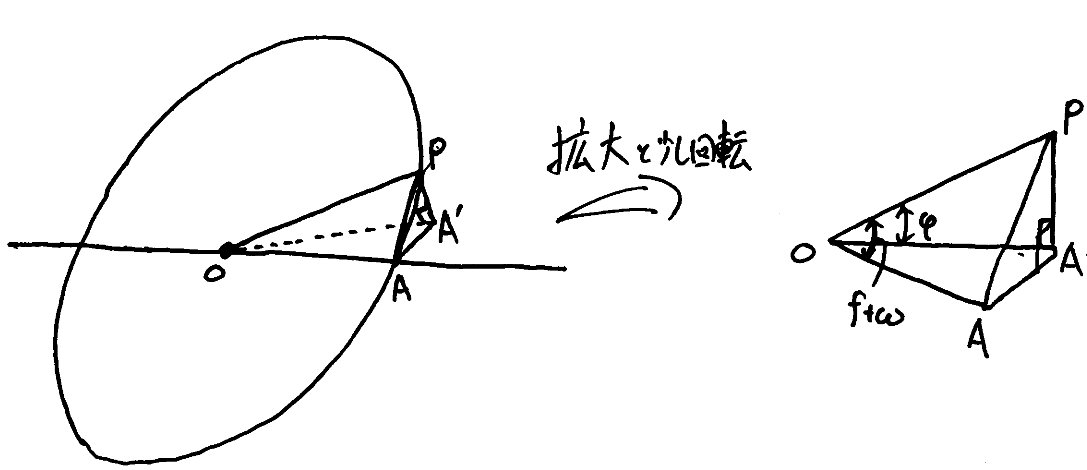
すなわち摂動関数Rは

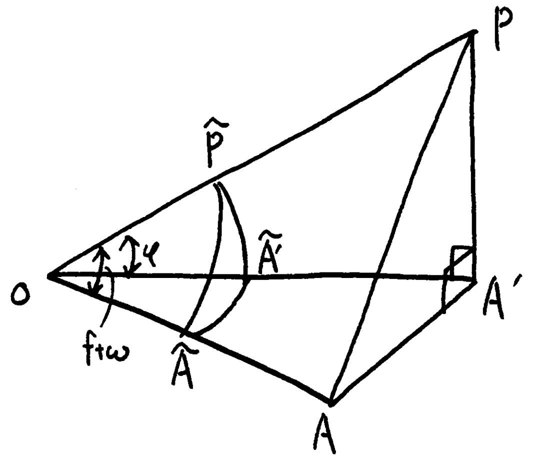
$$R = -\frac{GM_E a_E^2}{r^3} J_2 P_2(\sin\varphi)$$

符号注意 (cf. P.147下)

$$= -\frac{GM_E a_E^2}{r^3} J_2\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) \quad \cdots(6.2) \qquad (\because \text{P.243})$$

摂動論が適用できるようにするには、摂動関数Rを軌道要素で表現しなければならない。





球面三角の公式（D.2参照）より、

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\angle\hat{P}\hat{A}\hat{A}'} = \frac{\sin(f+\omega)}{\sin\angle\hat{P}\hat{A}'\hat{A}}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin I} = \frac{\sin(f+\omega)}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \sin\varphi = \sin I \sin(f+\omega) \qquad \cdots(6.3)$$

この(6.3)を(6.2)へ代入する

$$R = -\frac{GM_E a_E^2}{r^3} J_2\left\{\frac{3}{2}\sin^2 I \sin^2(f+\omega) - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{\mu a_E^2}{r^3} J_2 \underbrace{\left\{-\frac{3}{2}\sin^2 I \sin^2(f+\omega) + \frac{1}{2}\right\}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sin^2 I \cdot \frac{1}{2}\left[1-\cos 2(f+\omega)\right] + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{4}\sin^2 I + \frac{3}{4}\sin^2 I \cdot \cos 2(f+\omega) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-3\sin^2 I + 2\right) + \frac{3}{4}\sin^2 I \cdot \cos 2(f+\omega)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-3(1-\cos^2 I) + 2\right\} + \frac{3}{4}\sin^2 I \cdot \cos 2(f+\omega)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cos^2 I - 1\right) + \frac{3}{4}\sin^2 I \cdot \cos 2(f+\omega)$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$R = \frac{\mu a_E^2}{r^3} J_2 \left\{ \frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1) + \frac{3}{4}\sin^2 I \cos 2(f+\omega) \right\} \quad \cdots \quad (6.4)$$

$$\mu = G M_E$$

このRとケプラー要素を用いた運動方程式(5.123)~(5.128)を用いて、1次の周期摂動と1次の永年摂動を求めていく。

6.2.1 J_2項による永年摂動

まずは、摂動関数Rを (5.264)のように

$$R = \underbrace{R_s}_{\substack{\text{永年項} \\ \text{(定数項)}}} + \underbrace{R_p}_{\text{周期項}}$$

↑

時間に依存しない

(短時間で変化しない)

分けて、R_sについて求める。R_sを求めるにはRを時間について平均すればいい。

$$R_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R \, dl$$

$$= \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left\{ \frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1) + \frac{3}{4}\sin^2 I (\cos 2f \cos 2\omega - \sin 2f \sin 2\omega) \right\} dl \right]$$

$$\vdots$$

$\vdots$

$$R_S = \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 \left[\frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dl \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}\sin^2 I \left\{ \cos 2\omega \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f \, dl - \sin 2\omega \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f \, dl \right\} \right]$$
$$= \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 \left[\frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1)\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\rangle + \frac{3}{4}\sin^2 I \left\{ \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f \right\rangle \cos 2\omega \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f \right\rangle \sin 2\omega \right\} \right] \quad \cdots (6.11)$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 dl = \frac{1}{\eta^3} \quad (\because \text{1-1 2.6-2 [例 2.6C]})$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f \, dl$$

$\downarrow$ (∵ 1-1 2.6-2)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f \cdot \frac{r^2}{a^2 \eta} \, df$$

$\downarrow$ (∵ 2.561)

$$= \frac{1}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi} \frac{1 + e\cos f}{\eta^2} \cos 2f \, df$$
$$= \frac{1}{2\pi\eta^3}\int_0^{2\pi} (\cos 2f + e\cos f \cos 2f) \, df$$

$\downarrow$ いったんばらして3倍角

$$= \frac{1}{2\pi\eta^3}\int_0^{2\pi}\left(\cos 2f + \frac{e}{2}\cos 3f + \frac{e}{2}\cos f\right) df$$
$$= 0 \quad (\because \text{全部}\cos\text{だから})$$

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f \right\rangle = 0 \quad (\because \text{奇関数だから})$$

⋮

$$R_s = \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 \cdot \frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1)\cdot\frac{1}{\eta^3}$$

$$= \frac{\mu a_E^2}{4a^3\eta^3} J_2 (3\cos^2 I - 1) \qquad \cdots(6.12)$$

ここで、R_sにはσ, ω, Ωが含まれていないので

$$\frac{\partial R_s}{\partial \sigma}=0, \quad \frac{\partial R_s}{\partial \omega}=0, \quad \frac{\partial R_s}{\partial \Omega}=0 \qquad \cdots(6.13)$$

である。すなわちa, e, Iの時間微分は0となる。(6.5, 6.6, 6.7参照)
よって、a, e, Iに永年項はないことがわかる。

σについての方程式は(6.8)より

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R_s}{\partial a} - \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial R_s}{\partial e}$$

$$= -\frac{2}{na}\cdot\frac{\mu a_E^2}{4\eta^3} J_2 (3\cos^2 I - 1)(-3a^{-4})$$

$$- \frac{\eta^2}{na^2 e}\cdot\frac{\mu a_E^2}{4a^3} J_2 (3\cos^2 I - 1)\cdot\frac{d}{de}(\eta^{-3})$$

$$\frac{d(\eta^{-3})}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{de} = -3\eta^{-4}\cdot\frac{1}{2}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2e) = \frac{3e}{\eta^5}$$

$$= \frac{\mu a_E^2 J_2}{4}(3\cos^2 I - 1)\left(\frac{2}{na}\cdot\frac{3}{a^4\eta^3} - \frac{\eta^2}{na^2 e}\cdot\frac{3e}{a^3\eta^5}\right)$$

$$= \frac{\mu a_E^2 J_2}{4}(3\cos^2 I - 1)\cdot\frac{3}{na^5\eta^3}$$

$$= \frac{3}{4} J_2 (3\cos^2 I - 1)\cdot\frac{n a_E^2}{a^2\eta^3}$$

⋮

$\vdots$

$$\frac{da}{dt} = \frac{3}{4}J_2(3\cos^2 I - 1)\cdot n a_E^2 \cdot \frac{\eta}{p^2}$$

$$= \frac{3}{4}J_2\left(\frac{a_E}{p}\right)^2 n\eta(3\cos^2 I - 1) \equiv n_1 \quad \cdots (6.14)$$

同様にして、ω, Ω についての方程式は (6.9), (6.10) より

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{na^2e}\underbrace{\frac{\partial R_s}{\partial e}} - \frac{\cot I}{na^2\eta}\underbrace{\frac{\partial R_s}{\partial I}}$$

$\frac{\partial R_s}{\partial e}$ = ((6.14)の途中計算より $\frac{\mu a_E^2}{4a^3}J_2(3\cos^2 I - 1)\cdot\frac{3e}{\eta^5}$)

$$\frac{\partial R_s}{\partial I} = \frac{\mu a_E^2}{4a^3\eta^3}J_2\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{3}{2}\cos 2I + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\mu a_E^2}{4a^3\eta^3}J_2 \sin 2I$$

$$= \frac{\eta}{na^2e}\cdot\frac{3e\mu a_E^2}{4a^3\eta^5}J_2(3\cos^2 I - 1) - \frac{1}{na^2\eta}\cdot\frac{\cos I}{\sin I}\cdot\left(-\frac{3\mu a_E^2}{4a^3\eta^3}\right)J_2\cdot 2\sin I\cos I$$

$$= \frac{3\mu a_E^2}{4a^5 n\eta^4}J_2(3\cos^2 I - 1) + \frac{6\mu a_E^2}{4a^5 n\eta^4}J_2\cdot\cos^2 I$$

$$= \frac{3}{4}J_2\cdot\frac{\mu a_E^2}{a^5 n\eta^4}(5\cos^2 I - 1)$$

$$= \frac{3}{4}J_2\frac{n a_E^2}{a^2\eta^4}(5\cos^2 I - 1) \quad (\because \mu = n^2a^3)$$

$$= \frac{3}{4}J_2\left(\frac{a_E}{p}\right)^2 n(5\cos^2 I - 1) \equiv n_2 \quad \cdots (6.15) \quad (\because p = a\eta^2)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta\sin I}\frac{\partial R_s}{\partial I}$$

（$\frac{d\omega}{dt}$の計算過程より）

$$= \frac{1}{na^2\eta\sin I}\left(-\frac{3\mu a_E^2}{4a^3\eta^3}J_2\sin 2I\right)$$

$$= -\frac{3a_E^2(n^2a^3)}{4a^5\eta^4\cdot n}\cdot\frac{1}{\sin I}\cdot J_2\cdot 2\sin I\cos I$$

$$= -\frac{3}{2}J_2\frac{a_E^2 n}{a^2\eta^4}\cos I$$

$$= -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{p}\right)^2 n\cos I \equiv n_3 \quad \cdots(6.16)$$

以上で求めた(6.14)～(6.16)の右辺は定数であるので、σ, ω, Ωは時間について1次式で表される。

$$\sigma = n_1 t + \sigma_0 \quad \cdots(6.17)$$

$$\omega = n_2 t + \omega_0 \quad \cdots(6.18)$$

$$\Omega = n_3 t + \Omega_0 \quad \cdots(6.19)$$

6.2.2 周期摂動

摂動関数 R の周期成分 R_p は、既に摂動関数 R とその永年項 R_p の具体的な形がわかっているので、以下のように表せる。

$$
\begin{aligned}
R_p &= R - R_s \\
&= \frac{\mu a_E^2}{r^3} J_2 \left\{ \frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1) + \frac{3}{4}\sin^2 I \cos 2(f+\omega) \right\} \\
&\quad - \frac{\mu a_E^2}{4a^3\eta^3} J_2 (3\cos^2 I - 1) \qquad \cdots (\because 6.4,\ 6.12) \\
&= \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 \left\{ \underbrace{\left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{1}{\eta^3}\right)}_{= P_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}(3\cos^2 I - 1)}_{= C_1} + \underbrace{\frac{3}{4}\sin^2 I}_{= C_2} \cdot \underbrace{\frac{a^3}{r^3}\cos 2(f+\omega)}_{= P_2} \right\} \\
&= \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 C_1 P_1 + \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 C_2 P_2 \qquad \cdots (6.22) \\
&= n^2 a_E^2 J_2 C_1 P_1 + n^2 a_E^2 J_2 C_2 P_2 \qquad \cdots (6.22)' \\
&= \underbrace{\qquad}_{R_{p1}} + \underbrace{\qquad}_{R_{p2}}
\end{aligned}
$$

テキストでは μ が残ったままになっているが、ケプラーの第3法則 $\mu = n^2 a^3$ を用いて整理しておく。

今後の計算(特に 6.30)導出の際は (6.22) の形のまま残しておいた方が計算しやすいことがわかった。
(6.30) を計算する際に R_{p1} を a でビブンするが、
(6.22) だと $\mu a_E^2 J_2 C_1 P_1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a^3}\right)$, (6.22)' だと $\frac{\partial}{\partial a}(n^2) \cdot a_E^2 J_2 C_1 P_1$
となる。この計算は (6.22) の方が楽になる。

今回は、R_{p1}による摂動を詳しく取り扱い、R_{p2}による寄与は結果のみ与えることにする。

。まず、軌道長半径の摂動は　(5.259)と(6.5)より

$$\Delta_1 a = \int \frac{da}{dt} dt$$

$$= \frac{2}{na} \int \frac{\partial R_{p1}}{\partial a} dt \quad \cdots ①$$

(∵ 2.241)

$$= \frac{2}{na} \int \frac{\partial R_{p1}}{\partial l} dt \quad \cdots (6.25)$$

$$= \frac{2}{na} \int \frac{\partial R_{p1}}{\partial l} \cdot \frac{1}{n} dl$$

$$\left(\because l = nt + \alpha \Rightarrow \frac{dl}{dt} = n \Rightarrow dt = \frac{1}{n} dl \right)$$

$$= \frac{2}{n^2 a} R_{p1} \quad \cdots (6.26)$$

(∵ 6.22′)

$$= \frac{2}{n^2 a} \cdot n^2 a_E^2 J_2 \frac{1}{4} (3\cos^2 I - 1) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^3 - \frac{1}{\eta^3} \right\}$$

$$= J_2 \left(\frac{a_E}{a} \right)^2 a \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I \right) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^3 - \frac{1}{\eta^3} \right\} \quad \cdots (6.27)$$

。次に、離心率eについての摂動は、(5.259)と(6.6)より

$$\Delta_1 e = \int \frac{de}{dt} dt$$

$$= \int \left\{ \frac{\eta^2}{na^2 e} \frac{\partial R_{p1}}{\partial \alpha} - \frac{\eta}{na^2 e} \underbrace{\frac{\partial R_{p1}}{\partial \omega}}_{=0} \right\} dt$$

(∵ R_{p1}はωを含まない)

$$= \frac{\eta^2}{na^2 e} \int \frac{\partial R_{p1}}{\partial \alpha} dt$$

⋮

$\vdots$

$$\Delta_1 e = \frac{\eta^2}{na^2e}\cdot\frac{na}{2}\Delta_1 a \quad (\because ①)$$

$$= \frac{\eta^2}{2ae}\Delta_1 a \quad (\because 6.26)$$

$$= \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\frac{\eta^2}{e}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3-\frac{1}{\eta^3}\right\} \quad \cdots(6.28)$$

◦同様にして、軌道傾斜角 I についての摂動は、(5.259)と(6.7)より、

$$\Delta_1 I = \int\frac{dI}{dt}dt$$

$$= \int\left\{\frac{\cot I}{na^2\eta}\underbrace{\frac{\partial R_{p1}}{\partial\omega}}_{=0}-\frac{1}{na^2\eta\sin I}\underbrace{\frac{\partial R_{p1}}{\partial\Omega}}_{=0}\right\}dt \quad (\because R_{p1}\text{は}\omega\text{も}\Omega\text{も含まない})$$

$$= 0 \quad \cdots(6.29)$$

さらに、a, ω, Ω についても同様にして求めていくが、これらについては今までの a, e, I の計算と比べて少し面倒なので何ステップかに分けて考える。

◦まずは、(5.259)へ(6.8)〜(6.10)を代入して、$\Delta_1 a$, $\Delta_1\omega$, $\Delta_1\Omega$ の大まかな形を把握する。

$$\Delta_1 a = \int\frac{da}{dt}dt$$

$$= \int\left\{-\frac{2}{na}\underbrace{\frac{\partial R_{p1}}{\partial a}}_{②}-\frac{\eta^2}{na^2e}\underbrace{\frac{\partial R_{p1}}{\partial e}}_{③}\right\}dt$$

$\vdots$

⋮

ノート6.2-8にも書いたように、今回の計算だけは、(6.22)'ではなく(6.22)を使う。

$$② = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 C_1 P_1\right)$$

$$= \mu a_E^2 J_2 C_1 P_1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a^3}\right)$$

(P_1も $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ 部分にaを含んでいるようにもみえるが、

$r = \frac{a\eta^2}{1+e\cos f}$ …(2.56) を代入すれば、

$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \left(\frac{1+e\cos f}{\eta^2}\right)^3$ となり、aは含まれていないことがわかる。)

$$③ = \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 C_1 P_1\right)$$

$$= \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 C_1 \frac{\partial P_1}{\partial e}$$

⋮

$$\Delta_1 a = \int\left\{-\frac{2}{na}\mu a_E^2 J_2 C_1 P_1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a^3}\right) - \frac{\eta^2}{na^2 e}\cdot\frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 C_1 \frac{\partial P_1}{\partial e}\right\} dt$$

$$= -\mu a_E^2 J_2 C_1 \left\{\frac{\eta^2}{na^5 e}\int \frac{\partial P_1}{\partial e} dt + \frac{2}{na}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a^3}\right)\int P_1\, dt\right\}$$

…(6.30)

$$\Delta_1\omega = \int \frac{d\omega}{dt}\,dt$$

$$= \int \left\{ \frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial R_{p1}}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2\eta}\frac{\partial R_{p1}}{\partial I} \right\} dt$$

$$= \int \left\{ \frac{\eta}{na^2e} \underbrace{\left(n^2 a_E^2 J_2 C_1 \frac{\partial P_1}{\partial e}\right)}_{(\because ③)} - \frac{\cot I}{na^2\eta}\left(n^2 a_E^2 J_2 \frac{\partial C_1}{\partial I} P_1\right) \right\} dt$$

$$= nJ_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \left\{ -\frac{\cos I}{\eta \sin I}\frac{\partial C_1}{\partial I}\int P_1\,dt + \frac{\eta C_1}{e}\int \frac{\partial P_1}{\partial e}dt \right\} \quad \cdots(6.31)'$$

↓ テキストと同じ形に書き直すと

$$= \frac{\mu a_E^2}{a^3} J_2 \left(-\frac{\cos I}{na^2\eta \sin I}\frac{\partial C_1}{\partial I}\int P_1 dt + \frac{\eta}{na^2e} C_1 \int \frac{\partial P_1}{\partial e} dt \right)$$

$$\cdots(6.31)$$

$$\Delta_1\Omega = \int \frac{d\Omega}{dt}\,dt$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{na^2\eta \sin I}\frac{\partial R_{p1}}{\partial I} \right\} dt$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{na^2\eta \sin I} n^2 a_E^2 J_2 \frac{\partial C_1}{\partial I} P_1 \right\} dt$$

$$= \frac{n}{\eta \sin I}\left(\frac{a_E}{a}\right)^2 J_2 \frac{\partial C_1}{\partial I}\int P_1\,dt \quad \cdots(6.32)'$$

$$= \frac{\mu a_E^2}{na^5\eta \sin I} J_2 \frac{\partial C_1}{\partial I}\int P_1\,dt \quad \cdots(6.32)$$

。この(6.30)', (6.31)'(6.32)'について、さらに計算を進めていきたいわけだが、まずはこれらで共有している $\int P_1\,dt$ と $\int \frac{\partial P_1}{\partial e}dt$ 部分を先に計算しておく。

$$\int P_1\,dt = \int \left\{ \left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{\eta^3} \right\} dt$$

$$= \underbrace{\int \left(\frac{a}{r}\right)^3 dt}_{④} - \underbrace{\int \frac{1}{\eta^3}\,dt}_{⑤}$$

$$④ = \int \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \frac{r^2}{a^2 n \eta}\,df \quad \cdots (\because 2.74)$$

$$= \frac{1}{n\eta} \int \frac{a}{r}\,df$$

$$= \frac{1}{n\eta} \int \frac{1 + e\cos f}{\eta^2}\,df \quad \cdots (\because 2.56)$$

$$= \frac{1}{n\eta^3}(f + e\sin f) \quad \cdots (6.34)$$

$$⑤ = \int \frac{1}{\eta^3} \frac{1}{n}\,dl$$

$$= \frac{1}{n\eta^3}\,l$$

$$= \frac{1}{n\eta^3}(f - l + e\sin f) \quad \cdots (6.35)$$

$$= \frac{1}{n\eta^3} B$$

$$\int \frac{\partial P_1}{\partial e} dt = \int \underbrace{\frac{\partial}{\partial e}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{\eta^3}\right\}}_{⑥} dt$$

$$
\begin{aligned}
⑥ &= a^3(-3r^{-4})\frac{\partial r}{\partial e} + 3\eta^{-4}\frac{\partial \eta}{\partial e} \qquad (\because 2.103)\\
&= -3\frac{a^3}{r^4}(-a\cos f) + 3\frac{1}{\eta^4}\cdot\frac{1}{2}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}(-2e)\\
&= 3\frac{a^4}{r^4}\cos f - 3\frac{e}{\eta^5}\\
&= 3\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f - \frac{e}{\eta^5}\right\} \qquad \cdots (6.33)
\end{aligned}
$$

$$\int \frac{\partial P_1}{\partial e} dt = 3\left\{\underbrace{\int\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f\, dt}_{⑦} - \underbrace{\int \frac{e}{\eta^5} dt}_{⑧}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
⑦ &= \int\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f\, dt\\
&= \int\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f \cdot \frac{r^2}{a^2 n\eta}\, df\\
&= \frac{1}{n\eta}\int\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos f\, df \qquad (\because 2.74)\\
&= \frac{1}{n\eta}\int\left(\frac{1+e\cos f}{\eta^2}\right)^2 \cos f\, df\\
&= \frac{1}{n\eta^5}\int (1+e\cos f)^2 \cos f\, df\\
&= \frac{1}{n\eta^5}\int (1+2e\cos f + e^2\cos^2 f)\cos f\, df
\end{aligned}
$$

⋮

$$⑦ = \frac{1}{n\eta^5}\int (\cos f + 2e\cos^2 f + e^2\cos^3 f)\,df$$

$$= \frac{1}{n\eta^5}\int \left\{\cos f + 2e\cdot\frac{1}{2}(\cos 2f + 1) + e^2\cdot\frac{1}{4}(\cos 3f + 3\cos f)\right\} df$$

$$= \frac{1}{n\eta^5}\int \left\{e + \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\cos f + e\cos 2f + \frac{e^2}{4}\cos 3f\right\} df$$

$$= \frac{1}{n\eta^5}\left\{ef + \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\sin f + \frac{e}{2}\sin 2f + \frac{e^2}{12}\sin 3f\right\} \quad \cdots (6.37)$$

⋮

$$\int \frac{\partial P_1}{\partial e}dt = \frac{3}{n\eta^5}\left\{ef + \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\sin f + \frac{e}{2}\sin 2f + \frac{e^2}{12}\sin 3f - el\right\}$$

$$= \frac{3}{n\eta^5}\left\{e(\underbrace{f - l + e\sin f}_{B}) + \underbrace{\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\sin f + \frac{e}{2}\sin 2f + \frac{e^2}{12}\sin 3f}_{Q}\right\} \quad \cdots (6.39)$$

$$= \frac{3}{n\eta^5}(eB + Q) \quad \cdots (6.38)$$

。以上を(6.30)〜(6.32)へ代入して整理する。

((6.31),(6.32)については、(6.31)′,(6.32)′へ代入した方が効率がいい。)

$$\Delta_1 a = -\mu a_E^2 J_2 C_1\left\{\frac{\eta^2}{na^5 e}\cdot\frac{3}{n\eta^5}(eB+Q) + \frac{2}{na}(-3a^{-4})\cdot\frac{1}{n\eta^3}B\right\}$$

$$= -n^2 a^3 a_E^2 J_2 C_1\left\{\frac{3}{n^2 a^5\eta^3}\left(B + \frac{Q}{e}\right) - \frac{6}{n^2 a^5 \eta^3}B\right\}$$

$$= 3J_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\frac{C_1}{\eta^3}\left(B - \frac{Q}{e}\right) \quad \cdots (6.42)$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\omega &= nJ_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\left\{-\frac{\cos I}{\eta\sin I}\left(-\frac{3}{2}\cos I\sin I\right)\frac{1}{n\eta^3}B\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\eta}{e}C_1\cdot\frac{3}{n\eta^5}(eB+Q)\right\}\\
&= nJ_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\frac{3}{n\eta^4}\left\{\frac{1}{2}\cos^2 I\cdot B+C_1\left(B+\frac{Q}{e}\right)\right\}\\
&= 3J_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\frac{1}{\eta^4}\left\{\left(\frac{1}{2}\cos^2 I+C_1\right)B+\frac{C_1}{e}Q\right\}\\
&= 3J_2\left(\frac{a_E}{a\eta^2}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{2}\cos^2 I+\frac{3}{4}\cos^2 I-\frac{1}{4}\right)B+\frac{1}{4e}(3\cos^2 I-1)Q\right\}\\
&= 3J_2\left(\frac{a_E}{p}\right)^2\left\{\left(\frac{5}{4}\cos^2 I-\frac{1}{4}\right)B+\frac{3\cos^2 I-1}{4e}Q\right\}\\
&= 3J_2\left(\frac{a_E}{p}\right)^2\left\{\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 I\right)B+\frac{3\cos^2 I-1}{4e}Q\right\} \quad\cdots(6.41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\Omega &= \frac{n}{\eta\sin I}\left(\frac{a_E}{a}\right)^2 J_2\left(-\frac{3}{2}\cos I\sin I\right)\frac{1}{n\eta^3}B\\
&= -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{a\eta^2}\right)^2 B\cos I\\
&= -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{p}\right)^2 B\cos I \quad\cdots(6.40)
\end{aligned}
$$

一方、混合永年項が出てこないように惑星方程式を修正した

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial a_{i}} \quad \cdots (5.142)$$

を時間について2回積分すると、

$$\Delta_1\rho = -3J_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\frac{C_1}{\eta^3}B \quad \cdots (6.43)$$

となる。

○(5.142)を時間について1回積分

$$\frac{d\rho}{dt} = \int\frac{d^2\rho}{dt^2}dt$$

$$= \int\left(-\frac{3}{a^3}\frac{\partial R_{p1}}{\partial a_{i}}\right)dt$$

(∵ 5.141)

$$= \int\left(-\frac{3}{a^3}\frac{\partial R_{p1}}{\partial l}\right)dt$$

$$= -\frac{3}{a^3}\int\frac{\partial R_{p1}}{\partial l}dt$$

(∵ 6.25→6.26)

$$= -\frac{3}{na^3}R_{p1} \quad \cdots ⑧$$

○⑧をもう一度、時間について積分

$$\Delta_1\rho = \int\frac{d\rho}{dt}dt$$

$$= \int\left(-\frac{3}{na^2}R_{p1}\right)dt$$

$$= -\frac{3}{na^2}\int R_{p1}\,dt$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\Delta_1 \rho = -\frac{3}{na^2} n^2 a_E^2 J_2 C_1 \int P_1 \, dt$$

$$= -3n J_2 C_1 \left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{n\eta^3} B \quad (\because 6.35)$$

$$= -3J_2 \left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \frac{C_1}{\eta^3} B \quad \cdots (6.43)$$

であるから、平均近点離角の周期摂動は、

$$\Delta_1 l = \Delta_1 \sigma + \Delta_1 \rho \quad (\because 5.135,\ 5.136,\ 5.137)$$

$$= 3J_2 \left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \frac{C_1}{\eta^3}\left(B - \frac{Q}{e}\right) - 3J_2 \left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \frac{C_1}{\eta^3} B$$

$$= -3J_2 \left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \frac{C_1}{\eta^3 e} Q \quad \cdots (6.44)$$

である。

$l+\omega$ の周期摂動については、

$$\Delta_1 (l+\omega) = \Delta_1 l + \Delta_1 \omega$$

$$= -3J_2 \left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \frac{C_1}{\eta^3 e} Q + 3J_2 \left(\frac{a_E}{p}\right)^2 \left\{\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 I\right) B + \frac{3\cos^2 I - 1}{4e} Q\right\}$$

$$= 3J_2 \left(\frac{a_E}{p}\right)^2 \left\{\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 I\right) B + \left(\frac{3\cos^2 I - 1}{4e} - \frac{3\cos^2 I - 1}{4e}\eta\right) Q\right\}$$

$$= 3J_2 \left(\frac{a_E}{p}\right)^5 \left\{\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 I\right) B + \frac{3\cos^2 I - 1}{4} \underbrace{\frac{1-\eta}{e}}_{\downarrow \times \frac{1+\eta}{1+\eta}} Q\right\} \quad \cdots (6.45)$$

$$= 3J_2 \left(\frac{a_E}{p}\right)^5 \left\{\left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 I\right) B + \frac{3\cos^2 I - 1}{4} \frac{e}{1+\eta} Q\right\}$$

6.2.3 解析解を用いての位置の計算

known , a_0, e_0, I_0, σ_0, ω_0, Ω_0, t

(1) ケプラーの第3法則から n_0 を求める。

$$n_0^2 a_0^3 = \mu$$

$$\therefore\ n_0 = \mu^{\frac{1}{2}} a_0^{-\frac{3}{2}} \qquad \cdots(6.58)$$

(2) (6.17)~(6.19)を用いて、永年摂動を取り入れた平均近点離角、近点引数、昇交点経度を求める。

$$l^* = n_0 t + \sigma \quad \leftarrow (\because 2.241)$$

$$= n_0 t + n_1 t + \sigma_0$$

$$= \left\{1 + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 (3\cos^2 I_0 - 1)\right\} n_0 t + \sigma_0 \qquad \cdots(6.59)$$

$$\omega^* = n_2 t + \omega_0$$

$$= \left\{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 (5\cos^2 I_0 - 1)\right\} n_0 t + \sigma_0 \qquad \cdots(6.60)$$

$$\Omega^* = n_3 t + \Omega_0$$

$$= -\left\{\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \cos I_0\right\} n_0 t + \Omega_0 \qquad \cdots(6.61)$$

(3) 周期摂動を計算する

今回は(6.46)〜(6.57)で与えられている。

(4) 接触軌道要素を計算する

$$a = a_0 + \Delta_1 a + \Delta_2 a \quad \cdots (6.62)$$
$$e = e_0 + \Delta_1 e + \Delta_2 e \quad \cdots (6.63)$$
$$I = I_0 + \Delta_1 I + \Delta_2 I \quad \cdots (6.64)$$
$$l = l^* + \Delta_1 l + \Delta_2 l \quad \cdots (6.65)$$
$$\omega = \omega^* + \Delta_1 \omega + \Delta_2 \omega \quad \cdots (6.66)$$
$$\Omega = \Omega^* + \Delta_1 \Omega + \Delta_2 \Omega \quad \cdots (6.67)$$

ここのとりあつかいについてはテキスト$\boxed{注}$に記載あり

(5) ケプラー方程式　$u - e\sin u = l$　$\cdots (6.68)$　を解いて u (離心近点離角)を求める。
ケプラー方程式の解法は、2.7章でやった。様々な解き方があるが、すべて近似解法。

(6) uがわかれば、軌道面上での位置も求められる。
近点方向をx^*軸とすると、

$$x^* = a(\cos u - e), \quad y^* = a\sqrt{1-e^2}\sin u \quad \cdots (6.69)$$

(7) 慣性系での位置は、2.8.2を参考にして座標回転すればよい。

○動径、緯度、経度の摂動表現から、直接に位置を計算することもできる。

例として、動径 r に対する摂動表現を求めてみる。
(ちなみに r は a, e, l のみの関数)

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{a\eta}{1+e\cos f} \quad \cdots(2.56) \\ r &= a(1-e\cos u) \quad \cdots(2.59) \end{aligned}}$$

$$\Delta r = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial a}}_{\frac{r}{a}}\Delta a + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial e}}_{-a\cos f}\Delta e + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial l}}\Delta l$$

(2.56)でも(2.59)でも計算コストはかわらない

$(\because 2.103)$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial l} = \underbrace{\frac{e}{\eta} r\sin f}_{(\because 2.95)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-e\cos u}}_{\frac{a}{r}\ (\because 2.59)}$$

$\left(\because \text{ケプラー方程式}\ l = u - e\sin u\right)$

$$= \frac{ae}{\eta}\sin f$$

⋮

$$= \frac{r}{a}\Delta a - a\cos f\,\Delta e + \frac{ae}{\eta}\sin f\,\Delta l \quad \cdots(6.70)$$

この(6.70)へ(6.46), (6.47), (6.49), (6.52), (6.53), (6.55)を代入して、

$$\Delta r = \frac{r}{a}(\Delta_1 a + \Delta_2 a) - a\cos f(\Delta_1 e + \Delta_2 e) + \frac{ae}{\eta}\sin f(\Delta_1 l + \Delta_2 l)$$

⋮

と計算していけば r に対する摂動表現は求められるが、計算量が多いので今回はやめておく。

6.2.4 ケプラーの第3法則と積分定数

摂動を受けた平均運動は、

$$
\begin{aligned}
n^* &= n_0 + n_1 \\
&= n_0 + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 n_0 \eta_0 (3\cos^2 I_0 - 1) \\
&= n_0 + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 n_0 \eta_0 (2 - 3\sin^2 I_0) \\
&= n_0 \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I_0\right) \right\} \quad \cdots (6.72)
\end{aligned}
$$

摂動を受けている人工衛星のケプラーの第3法則は、

$$
\begin{aligned}
n^{*2} a_0^3 &= n_0^2 \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I\right) \right\}^2 a_0^3 \\
&= \mu \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I\right) \right\}^2 \quad (\because n_0^2 a_0^3 = \mu) \\
&\fallingdotseq \mu \left\{ 1 + 3 J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I\right) \right\} \quad (\because J_2 < 1 \text{ より } J_2^2 \text{ 小}) \quad \cdots (6.73)
\end{aligned}
$$

(6.71)で求めた動径 r の周期摂動の平均近点離角で平均をとると、

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta r \rangle &= \left\langle J_2 \frac{a_E^2}{p} \left[-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I\right)\left(1 + \frac{1-\eta}{e}\cos f + 2\frac{r}{a\eta}\right) + \frac{1}{4}\sin^2 I \cos 2l \right] \right\rangle \\
&= J_2 \frac{a_E^2}{p_0} \left\{ -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\left(1 + \frac{1-\eta_0}{e}\langle \cos f \rangle + \frac{2}{\eta_0}\left\langle \frac{r}{a} \right\rangle\right) + \frac{1}{4}\sin^2 I_0 \langle \cos 2l \rangle \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
&\langle \cos f \rangle = -e && (\because \text{問題}\,2.19) \\
&\left\langle \frac{r}{a} \right\rangle = 1 + \frac{1}{2} e^2 && (\because 2.212) \\
&\langle \cos 2l \rangle = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$\vdots$$

$$\langle \Delta r \rangle = J_2 \frac{a_E^2}{p_0}\left\{ -\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\left[1+\frac{1-\eta_0}{e}(-e)+\frac{2}{\eta_0}\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\right]+\frac{1}{4}\sin^2 I_0 \cdot 0 \right\}$$

$$= J_2 \frac{a_E^2}{p_0}\left\{ -\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\underbrace{\left(\eta_0+\frac{2}{\eta_0}+\frac{e^2}{\eta_0}\right)}_{=\frac{\eta_0^2+2+e^2}{\eta_0}=\frac{1-e^2+2+e^2}{\eta_0}=\frac{3}{\eta_0}} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} J_2 \frac{a_E^2}{p_0}\frac{1}{\eta_0}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)$$

$$= -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right) a_0 \qquad \cdots (6.74)$$

という定数項がでてくる。すなわち動径rにいつも定数項の摂動が加えられていることになり、これは、J_2からの摂動がないときの軌道からつねに一定値だけずれていることを意味する。この後の計算のことを考慮してaを以下のように補正しておく。（a_0のままでもおそらく理論をつくることはできるが、a^*の方が楽になるのだと思う。）

$$a^* = a_0 + \langle \Delta r \rangle$$

$$= a_0 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right) a_0$$

$$= a_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right) \right\} \qquad \cdots (6.75)$$

このa^*を使うと、ケプラーの第3法則は、

$$n^{*2} a^{*3} = n_0^2 \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right) \right\}^2 \cdot a_0^3 \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right) \right\}^3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$n^{*2}a^{*3} = n_0^2 a_0^3 \left\{1+3J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\right\}$$
$$\cdot \left\{1-\frac{9}{2}J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\right\} + O(J_2^2)$$
$$= \mu\left\{1+\left(3-\frac{9}{2}\right)J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\right\} + O(J_2^2)$$
$$= \mu\left\{1-\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 \left(1-\frac{3}{2}\sin^2 I_0\right)\right\} + O(J_2^2) \quad \cdots (6.76)$$

地球の赤道面内を円運動している衛星の運動を考える。
円運動の角速度 N は、

$$N = \left[\frac{d}{dt}(l+\omega+\Omega)\right]_{e_0=I_0=0}$$
$$= \left[\frac{dl^*}{dt}+\frac{d\omega^*}{dt}+\frac{d\Omega^*}{dt}\right]_{e_0=I_0=0}$$
$$= \left[\left\{1+\frac{3}{4}J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \eta_0 (3\cos^2 I_0-1)\right\}n_0 + \left\{\frac{3}{4}J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 (5\cos^2 I_0-1)\right\}n_0 \right.$$
$$\left. - \left\{\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{p_0}\right)^2 \cos I_0\right\}n_0\right]_{e_0=I_0=0}$$
$$= \left\{1+\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{a_0}\right)^2\right\}n_0 + \left\{3J_2\left(\frac{a_E}{a_0}\right)^2\right\}n_0 - \left\{\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{a_0}\right)^2\right\}n_0$$
$$= n_0\left\{1+3J_2\left(\frac{a_E}{a_0}\right)^2\right\} \quad \cdots (6.77)$$

円運動の半径Aは

$$A = [a^*]_{e_0 = I_0 = 0}$$
$$= a_0 \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right] \quad \cdots (6.78)$$

したがって赤道面内を円運動している衛星のケプラーの第3法則は、

$$N^2 A^3 = n_0^2 \left\{ 1 + 3J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right\}^2 a_0^3 \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right\}^3$$
$$= n_0^2 a_0^3 \left\{ 1 + 6J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{9}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right\} + O(J_2^2)$$
$$= \mu \left\{ 1 + \left(6 - \frac{9}{2} \right) J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right\} + O(J_2^2)$$
$$= \mu \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_E}{a_0} \right)^2 \right\} + O(J_2^2) \quad \cdots (6.79)$$

また、別の立場からも(6.79)を導いてみる。
赤道面上を運動する衛星の運動方程式は、

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu}{r^3} x + \dfrac{\partial R}{\partial x} & \cdots ⑨ \\ \ddot{y} = -\dfrac{\mu}{r^3} y + \dfrac{\partial R}{\partial y} & \cdots ⑩ \end{cases}$$

とかける。

摂動関数Rは(6.2)より

$$R = -\frac{\mu a_E^2}{r^3} J_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2\varphi - \frac{1}{2} \right)$$

とわかっているので、これに赤道面上での運動という条件($\varphi = 0$)を加えると、

$$R = -\frac{\mu a_E^2}{2r^3} J_2$$

よって、$\frac{\partial R}{\partial x}$ と $\frac{\partial R}{\partial y}$ の形は、

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -\frac{\mu a_E^2}{2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= -\frac{3\mu a_E^2}{2r^4} J_2 \cdot \frac{x}{r}$$

$$= -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu a_E^2}{r^5} x$$

同様にして、

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu a_E^2}{r^5} y$$

以上より、⑨、⑩は以下のようになる

$$\begin{cases} \ddot{x} = \mu \left\{ -\frac{1}{r^3} x - \frac{3}{2} J_2 \frac{a_E^2}{r^5} x \right\} & \cdots (6.80) \\ \ddot{y} = \mu \left\{ -\frac{1}{r^3} y - \frac{3}{2} J_2 \frac{a_E^2}{r^5} y \right\} & \cdots (6.81) \end{cases}$$

(6.80),(6.81)の平衡解である円運動を求める。

$$\begin{cases} x = A\cos\theta \\ y = A\sin\theta \end{cases}$$

を(6.80),(6.81)へ代入する

$(\ddot{\theta} = 0)$

$$\left(\begin{aligned} \ddot{x} &= A\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = A\frac{d}{dt}\left(-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right) = A\left(-\dot{\theta}^2\cos\theta - \ddot{\theta}\sin\theta\right) = -A\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{y} &= A\frac{d^2}{dt^2}(\sin\theta) = A\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right) = A\left(-\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{\theta}\cos\theta\right) = -A\dot{\theta}^2\sin\theta \end{aligned}\right)$$

$$\begin{cases} -A\dot{\theta}^2\cos\theta = -\mu\cos\theta\left\{\dfrac{1}{A^2} + \dfrac{3}{2}J_2\dfrac{a_E^2}{A^4}\right\} \\ -A\dot{\theta}^2\sin\theta = -\mu\sin\theta\left\{\dfrac{1}{A^2} + \dfrac{3}{2}J_2\dfrac{a_E^2}{A^4}\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 A^3 = \mu\left\{1 + \frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_E}{A}\right)^2\right\} \quad \cdots(6.82)$$