4.4

$$U^* = U - \frac{1}{2}n'^2(X^2+Y^2) \quad (\because 4.23)$$

$$= -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{1}{2}n'^2(X^2+Y^2)$$

(∵4.17)　(∵ $n'^2a'^3 = G(m_1+m_2)$)

$$= -\frac{n'^2a'^3}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1}{r_1} - \frac{n'^2a'^3}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_2}{r_2} - \frac{1}{2}n'^2(X^2+Y^2)$$

$\frac{\partial U^*}{\partial X} = 0$ より

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}a'^3(-r_1^{-2})\frac{\partial r_1}{\partial X}n'^2 - \frac{m_2}{m_1+m_2}a'^3(-r_2^{-2})\frac{\partial r_2}{\partial X}n'^2 - n'^2X = 0$$

$n'^2 \neq 0$ より.

$$X - \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_1^2}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial X} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_2^2}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial X} = 0 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial X} = \frac{1}{2}\left\{\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right)^2+Y^2+Z^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right) \quad (\because 4.18)$$

$$= \frac{1}{r_1}\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right) \quad \cdots ②$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial X} = \frac{1}{2}\left\{\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right)^2+Y^2+Z^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right) \quad (\because 4.19)$$

$$= \frac{1}{r_2}\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right) \quad \cdots ③$$

①へ②.③へ代入

$$X - \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_1^3}\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_2^3}\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right) = 0$$

$$\therefore X\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_1^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_2^3}\right) + \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}a'\left(\frac{a'^3}{r_2^3}-\frac{a'^3}{r_1^3}\right) = 0 \quad \cdots (4.35)$$

$\frac{\partial U^*}{\partial Y} = 0$ より

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} a'^3(-r_1^{-2})\frac{\partial r_1}{\partial Y} n'^2 - \frac{m_2}{m_1+m_2} a'^3(-r_2^{-2})\frac{\partial r_2}{\partial Y} n'^2 - n'^2 Y = 0$$

$n'^2 \neq 0$ より

$$Y - \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_1^2}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial Y} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_2^2}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial Y} = 0 \quad \cdots ④$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial Y} = \frac{1}{2}\left\{\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right)^2 + Y^2 + Z^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot 2Y \qquad (\because 4.18)$$

$$= \frac{Y}{r_1} \cdots ⑤$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial Y} = \frac{Y}{r_2} \cdots ⑥ \quad (\because 4.19)$$

④へ⑤.⑥を代入

$$Y - \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_1^3}\cdot Y - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_2^3}\cdot Y = 0$$

$$\therefore Y\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_1^3} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{a'^3}{r_2^3}\right) = 0 \quad \cdots (4.36)$$

$\frac{\partial U^*}{\partial Z} = 0$ より

$$\frac{\partial U^*}{\partial Z} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} a'^3(-r_1^{-2})\frac{\partial r_1}{\partial Z} n'^2 - \frac{m_2}{m_1+m_2} a'^3(-r_2^{-2})\frac{\partial r_2}{\partial Z} n'^2 \cdots ⑦$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial Z} = \frac{Z}{r_1} \cdots ⑧$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial Z} = \frac{Z}{r_2} \cdots ⑨$$

⑦へ⑧,⑨を代入

$$\underbrace{\left(\frac{m_1}{r_1^3}+\frac{m_2}{r_2^3}\right)}_{\neq 0}z=0$$

より

$$\therefore z=0 \quad \cdots (4.37)$$

4.4.1 正三角形平衡解

(4.39)が成立する場合を考える

$$1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a'^3}{r_1^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a'^3}{r_2^3}=0 \quad \cdots (4.39)$$

(4.39)を(4.35)へ代入

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}a'\left(\frac{a'^3}{r_2^3}-\frac{a'^3}{r_1^3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{a'^3}{r_2^3}=\frac{a'^3}{r_1^3}$$

$$\therefore r_1=r_2 \quad \cdots ⑩$$

⑩を(4.39)へ代入

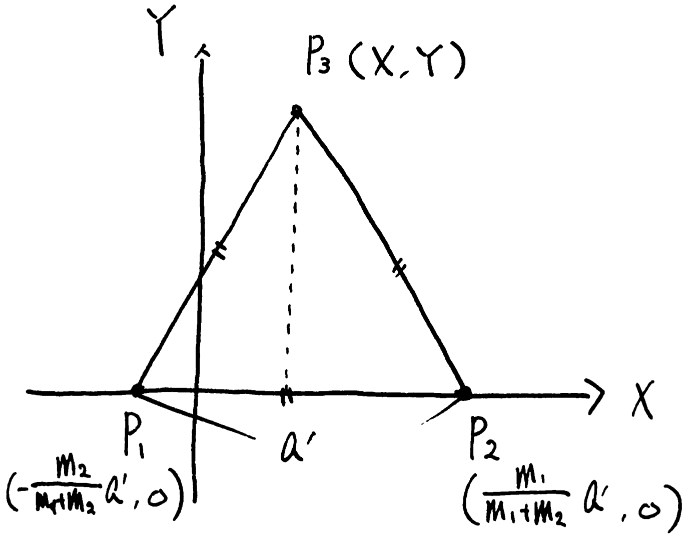
$$1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a'^3}{r_1^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a'^3}{r_1^3}=0$$

$$1-\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}\frac{a'^3}{r_1^3}=0$$

$$\therefore r_1=a' \quad \cdots ⑪$$

⑩,⑪より

$$r_1=r_2=a' \quad \cdots ⑫$$



上図より

$$X = \frac{1}{2}a' - \frac{m_2}{m_1+m_2}a' = \left(\frac{1}{2} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right)a'$$

$$Y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a' \qquad \cdots (4.40)$$

4.4.2 直線平衡解

$Y=0$ (かつ $Z=0$) となるX軸上の平衡解をみつける

$$\nu = \frac{m_2}{m_1+m_2} \quad \cdots (4.42) \quad \text{より} \quad \frac{m_1}{m_1+m_2} = 1-\nu \quad \cdots (4.42)'$$

また、$Y=0, Z=0$ と (4.42), (4.42)' を (4.18), (4.19)へ代入して

$$r_1 = |X+\nu a'|, \quad r_2 = |X-(1-\nu)a'|$$

ここで、計算をやりやすくするためにP_1P_2間のきょりであるa'を1とする

$$r_1 = |X+\nu|, \quad r_2 = |X-(1-\nu)|$$

$$= |X-1+\nu|$$

これらを(4.35)へ代入

$$X\left\{1-(1-\nu)\frac{1}{|X+\nu|^3}-\nu\frac{1}{|X-1+\nu|^3}\right\}+\nu(1-\nu)\left(\frac{1}{|X-1+\nu|^3}-\frac{1}{|X+\nu|^3}\right)=0$$

$$X+\frac{1}{|X+\nu|^3}\left\{-(1-\nu)X-\nu(1-\nu)\right\}+\frac{1}{|X-1+\nu|^3}\left[-\nu X+\nu(1-\nu)\right]=0$$

$$X-\frac{(1-\nu)(X+\nu)}{|X+\nu|^3}-\frac{\nu(X-1+\nu)}{|X-1+\nu|^3}=0 \quad \cdots (4.41)$$

a) $X>1-\nu$: L_2

(4.41)より

$$X-\frac{(1-\nu)(X+\nu)}{(X+\nu)^3}-\frac{\nu(X-1+\nu)}{(X-1+\nu)^3}=0$$

$$X-\frac{1-\nu}{(X+\nu)^2}-\frac{\nu}{(X-1+\nu)^2}=0 \quad \cdots (4.44)$$

座標原点を P_2 へ移す

$$X=1-\nu+x^* \quad \cdots (4.45)$$

(4.45)を(4.44)へ代入

$$x^*+1-\nu-\frac{1-\nu}{(1+x^*)^2}-\frac{\nu}{x^{*2}}=0 \quad \cdots (4.46)$$

(4.46)の分母を払って x^* についての方程式を求める

$$(x^*+1-\nu)x^{*2}(1+x^*)^2-(1-\nu)x^{*2}-\nu(1+x^*)^2=0$$

$$(x^*+1-\nu)(x^{*4}+2x^{*3}+x^{*2})-(1-\nu)x^{*2}-\nu(x^{*2}+2x^*+1)=0$$

$$x^{*5}+2x^{*4}+x^{*3}+(1-\nu)x^{*4}+2(1-\nu)x^{*3}+(1-\nu)x^{*2}-(1-\nu)x^{*2}$$
$$-\nu x^{*2}-2\nu x^*-\nu=0$$

$$x^{*5}+(2+1-\nu)x^{*4}+(1+2-2\nu)x^{*3}-\nu x^{*2}-2\nu x^*-\nu=0$$

$$x^{*5}+(3-\nu)x^{*4}+(3-2\nu)x^{*3}-\nu x^{*2}-2\nu x^*-\nu=0 \quad \cdots (4.47)$$

5次方程式はふつう解けない。

しかし、(4.47)はデカルトの符号法則より、唯一の正根をもつことがわかる。

この平衡点を L_2 と名づけ、一般的には解けないので近似解を求める。

ここからはパラメタ ν の代わりに P_1, P_2 の質量比 m を用いる

$$m=\frac{m_2}{m_1} \quad \cdots (4.48)$$

この(4.48)と(4.42), (4.42)′より

$$\nu=\frac{m m_1}{m_1+m m_1}=\frac{m}{1+m}, \quad 1-\nu=\frac{1}{1+m} \quad \cdots (4.49)$$

(4.49)を(4.47)へ代入して m を x^* で表す

$$x^{*5}+\left(2+\frac{1}{1+m}\right)x^{*4}+\left(1+\frac{2}{1+m}\right)x^{*3}-\frac{m}{1+m}x^{*2}-\frac{2m}{1+m}x^*-\frac{m}{1+m}=0$$

$$x^{*5}+\frac{3+2m}{1+m}x^{*4}+\frac{3+m}{1+m}x^{*3}-\frac{m}{1+m}x^{*2}-\frac{2m}{1+m}x^*-\frac{m}{1+m}=0$$

⋮

$$m(x^{*5}+2x^{*4}+x^{*3}-x^{*2}-2x^{*}-1)+(x^{*5}+3x^{*4}+3x^{*3})=0$$

$$m\{x^{*3}(x^{*2}+2x^{*}+1)-(x^{*2}+2x^{*}+1)\}+x^{*3}(x^{*2}+3x^{*}+3)=0$$

$$m=-\frac{x^{*3}(x^{*2}+3x^{*}+3)}{(x^{*3}-1)(x^{*}+1)^2}$$

$$\therefore m=\frac{x^{*3}(3+3x^{*}+x^{*2})}{(1-x^{*3})(1+x^{*})^2} \quad \cdots (4.50)$$

mは正であるから $1-x^{*3}>0$ よって $x^{*}<1$
この条件を使って(4.50)を x^{*} について展開する

$$m=x^{*3}(3+3x^{*}+x^{*2})\underbrace{(1-x^{*3})^{-1}}_{f_1(x^{*})}\underbrace{(1+x^{*})^{-2}}_{f_2(x^{*})} \quad \cdots ⑬$$

f_1, f_2 をそれぞれマクローリン展開

$$f_1(x^{*})=(1-x^{*3})^{-1}$$

$$f_1'(x^{*})=-(1-x^{*3})^{-2}\cdot(-3x^{*2})=\frac{3x^{*2}}{(1-x^{*3})^2}$$

$$f_1''(x^{*})=\frac{(1-x^{*3})^2\cdot 6x^{*}-2(1-x^{*3})\cdot(-3x^{*2})\cdot 3x^{*2}}{(1-x^{*3})^4}=\frac{6x^{*}}{(1-x^{*3})^2}+\frac{18x^{*4}}{(1-x^{*3})^3}$$

$$f_1'''(x^{*})=\frac{(1-x^{*3})^2\cdot 6-6x^{*}\cdot 2(1-x^{*3})(-3x^{*2})}{(1-x^{*3})^4}$$

$$+\frac{(1-x^{*3})^3\cdot 72x^{*3}-18x^{*4}\{3(1-x^{*3})^2(-3x^{*2})\}}{(1-x^{*3})^6}$$

$$=\frac{6}{(1-x^{*3})^2}+\frac{36x^{*3}}{(1-x^{*3})^3}+\sim$$

以上より

$$f_1(x^*) = f_1(0) + f_1'(0)x^* + \frac{1}{2!}f_1''(0)x^{*2} + \frac{1}{3!}f_1'''(0)x^{*3} + O(x^{*4})$$

$$= 1 + x^{*3} + O(x^{*4}) \quad \cdots ⑭$$

また、

$$f_2(x^*) = (1+x^*)^{-2}$$

$$f_2'(x^*) = -2(1+x^*)^{-3}$$

$$f_2''(x^*) = 6(1+x^*)^{-4}$$

$$f_2'''(x^*) = -24(1+x^*)^{-5}$$

以上より、

$$f_2(x^*) = f_2(0) + f_2'(0)x^* + \frac{1}{2!}f_2''(0)x^{*2} + \frac{1}{3!}f_2'''(0)x^{*3} + O(x^{*4})$$

$$= 1 - 2x^* + 3x^{*2} - 4x^{*3} + O(x^{*4}) \quad \cdots ⑮$$

⑬へ⑭,⑮を代入

$$m = x^{*3}\{(3+3x^*+x^{*2})(1+x^{*3})(1-2x^*+3x^{*2}-4x^{*3}) + O(x^{*4})\}$$

$$= x^{*3}\{(3+3x^*+x^{*2})(1-2x^*+3x^{*2}-4x^{*3}+x^{*3}) + O(x^{*4})\}$$

$$= x^{*3}\{3-3x^*+4x^{*2}-2x^{*3} + O(x^{*4})\}$$

$$= 3x^{*3}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}+\cdots\right)$$

$$\therefore \frac{m}{3} = x^{*3}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}+\cdots\right) \quad \cdots (4.51)$$

(4.51)の両辺を$\frac{1}{3}$乗して、$\alpha=\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$とおくと、

$$\alpha = x^*\underbrace{\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}+\cdots\right)^{\frac{1}{3}}}_{=\ g(x^*)\ \text{とおく}}$$

$g(x^*)$をマクローリン展開

$$g(x^*) = \left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$g'(x^*) = \frac{1}{3}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-1+\frac{8}{3}x^*-2x^{*2}\right)$$

$$g''(x^*) = -\frac{2}{9}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{5}{3}}\left(-1+\frac{8}{3}x^*-2x^{*2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{3}-4x\right)$$

$$\begin{aligned} g'''(x^*) = &\frac{10}{27}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{8}{3}}\cdot\left(-1+\frac{8}{3}x^*-2x^{*2}\right)^3 \\ &-\frac{2}{9}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot 2\left(-1+\frac{8}{3}x^*-2x^{*2}\right)\left(\frac{8}{3}-4x^*\right) \\ &-\frac{2}{9}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot\left(-1+\frac{8}{3}x^*-2x^{*2}\right)\left(\frac{8}{3}-4x^*\right) \\ &+\frac{1}{3}\left(1-x^*+\frac{4}{3}x^{*2}-\frac{2}{3}x^{*3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-4) \end{aligned}$$

よって、

$$g(0) = 1$$

$$g'(0) = -\frac{1}{3}$$

$$g''(0) = -\frac{2}{9}+\frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

$$g'''(0) = -\frac{10}{27}+\frac{32}{27}+\frac{16}{27}-\frac{4}{3} = \frac{2}{27}$$

以上より、

$$\begin{aligned} g(x^*) &= g(0)+g'(0)x^*+\frac{1}{2!}g''(0)x^{*2}+\frac{1}{3!}g'''(0)x^{*3}+\cdots \\ &= 1-\frac{1}{3}x^*+\frac{1}{3}x^{*2}+\frac{1}{81}x^{*3}+\cdots \end{aligned}$$

これより、

$$\alpha = x^*\left(1-\frac{1}{3}x^*+\frac{1}{3}x^{*2}+\frac{1}{81}x^{*3}+\cdots\right) \quad \cdots (4.52)$$

x^*をαで表現するためには、陰関数の定理(P.44)を用いる

(4.52)よりαをx^*の関数とすると、(2.157)のように

$$x^* = b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots$$

と、x^*をαの関数として展開することができる

ここで、この展開係数b_nは(2.158)より

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{*n-1}}\left\{\frac{x^*}{x^*(1-\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}x^{*2} + \frac{1}{81}x^{*3})}\right\}^n\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{*n-1}}\left(1-\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}x^{*2} + \frac{1}{81}x^{*3}\right)^{-n}\right]_{x^*=0}$$

これより、$b_1, b_2, b_3 \cdots$と計算していくわけだが、この後の計算が見やすくなるように、$h(x^*) = 1-\frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}x^{*2} + \frac{1}{81}x^{*3}$ とおき、$h'(x^*), h''(x^*), h'''(x^*)$について計算しておく。

$$h'(x^*) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^* + \frac{1}{27}x^{*2}$$

$$h''(x^*) = \frac{2}{3} + \frac{2}{27}x^*$$

$$h'''(x^*) = \frac{2}{27}$$

これより、

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d}{dx^*}h(x^*)^{-2}\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[-2h(x^*)^{-3}\cdot h'(x^*)\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\left[-2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$b_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^2}{dx^{*2}} h(x^*)^{-3}\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\left[\frac{d}{dx^*}\left(-3h(x^*)^{-4}\cdot h'(x^*)\right)\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\left[12h(x^*)\cdot h'^2(x^*) - 3h(x^*)^{-4}\cdot h''(x^*)\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{3!}\left\{12\cdot 1\cdot \frac{1}{9} - 3\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{4}{3} - 2\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{9}$$

$$b_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^3}{dx^{*3}} h(x^*)^{-4}\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{4!}\left[\frac{d^2}{dx^{*2}}\left(-4h(x^*)^{-5}\cdot h'(x^*)\right)\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{4!}\left[\frac{d}{dx^*}\left(20h(x^*)^{-6}\cdot h'^2(x^*) - 4h(x^*)^{-5}\cdot h''(x^*)\right)\right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{4!}\Big[-120h(x^*)^{-7}\cdot h'^3(x^*) + 40h(x^*)^{-6}\cdot h'(x^*)\cdot h''(x^*)$$
$$+20h(x^*)^{-6}\cdot h'(x^*)\cdot h''(x^*) - 4h(x^*)^{-5}\cdot h'''(x^*)\Big]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{4!}\left\{-120\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{27}\right) + 40\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 20\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} - 4\cdot 1\cdot\frac{2}{27}\right\}$$

$$= \frac{1}{4!}\left\{\frac{120}{27} - \frac{80}{9} - \frac{40}{9} - \frac{8}{27}\right\}$$

$$= -\frac{31}{81}$$

以上より、

$$x^* = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + \cdots$$

$$= \alpha\left(1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{31}{81}\alpha^3 + \cdots\right) \quad \cdots \quad (4.53)$$

b) $-\nu < X < 1-\nu$ の場合 : L_1

(4.41)より.

$$X - \frac{(1-\nu)(X+\nu)}{(X+\nu)^3} - \frac{\nu(X-1+\nu)}{-(X-1+\nu)^3} = 0$$

$$\therefore X - \frac{1-\nu}{(X+\nu)^2} + \frac{\nu}{(X-1+\nu)^2} = 0 \quad \cdots (4.54)$$

ここで:

$$X^* = \frac{1-\nu-X}{X+\nu} \quad \cdots (4.55)$$

という変数を導入する

$-\nu < X < 1-\nu$ の範囲で X^*のとりうる値は $0 < X^* < \infty$ である

この(4.55)をXについて.とくと、

$$X^*(X+\nu) = 1-\nu-X$$

$$(X^*+1)X = 1-\nu-\nu X^*$$

$$X = \frac{1-\nu-\nu X^*}{1+X^*} \quad \cdots (4.56)$$

これより、

$$X = \frac{1-\nu(1+X^*)}{1+X^*}$$

$$= \frac{1}{1+X^*} - \nu$$

$$X+\nu = \frac{1}{1+X^*}$$

$$1-\nu-X = 1-(X+\nu)$$

$$= 1 - \frac{1}{1+X^*}$$

$$= \frac{X^*}{1+X^*}$$

(4.57)

(4.56)(4.57)を(4.54)へ代入

$$\frac{1-\nu-\nu X^*}{1+X^*} - (1-\nu)(1+X^*)^2 + \nu\left(\frac{1+X^*}{X^*}\right)^2 = 0$$

両辺に $X^{*2}(1+X^*)$ をかける

$$X^{*2}(1-\nu-\nu X^*) - (1-\nu)X^{*2}(1+X^*)^3 + \nu(1+X^*)^3 = 0$$

$$X^{*2}(1-\nu) - \nu X^{*3} - (1-\nu)X^{*2}(1+X^*)^3 + \nu(1+X^*)^3 = 0$$

$$(1-\nu)\left[X^{*2} - X^{*2}(1+X^*)^3\right] + \nu\left\{-X^{*3} + (1+X^*)^3\right\} = 0$$

$$(1-\nu)\left[X^{*2}\left\{1-(1+3X^*+3X^{*2}+X^{*3})\right\}\right] + \nu\left\{-X^{*3}+1+3X^*+3X^{*2}+X^{*3}\right\} = 0$$

$$(1-\nu)(-X^{*5}-3X^{*4}-3X^{*3}) + \nu(1+3X^*+3X^{*2}) = 0$$

$$(1-\nu)(X^{*5}+3X^{*4}+3X^{*3}) - \nu(3X^{*2}+3X^*+1) = 0 \quad \cdots (4.58)$$

(4.58)はデカルトの符号法則より正根をただ1つもつ（P_1とP_2の中間に）ことがわかる。νとX^*の範囲は $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$, $0 < X^* < \infty$ であることはわかっているので、この範囲で(4.58)をみてみると、

$$(1-\nu)\underbrace{(X^{*2}+3X^*+3)}_{>0}X^{*3} - \nu\underbrace{(3X^{*2}+3X^*+1)}_{>0} = 0$$

となり、$\nu \to 0$ とすれば

$$\underbrace{(X^{*2}+3X^*+3)}_{>0}X^{*3} = 0 \Rightarrow X^* \to 0 \quad \text{となる}$$

すなわち、$\nu \to 0$ とすれば $X^* \to 0$ となり (4.56)より $X \to 1$

つまり平衡点がP_2近傍となる　（今回はP_1, P_2間のきょりを1で規格化している）

(4.54)の近似解を求めるために、

$$X = 1-\nu-x^* \quad \cdots (4.59)$$

と置く。（X：回転座標系原点からL_1までの距離
x^*：P_2からL_1までの距離）

x^*とX^*の関係式は(4.56)と(4.59)より

$$\frac{1-\nu-\nu X^*}{1+X^*} = 1-\nu-x^*$$

$$1-\nu-\nu X^* = 1-\nu-x^* + (1-\nu-x^*)X^*$$

$$(1-\nu-x^*+\nu)X^* = 1-\nu-1+\nu+x^*$$

$$\therefore \quad X^* = \frac{x^*}{1-x^*} \quad \cdots (4.60)$$

次にmをx^*で表す。

$$m = \frac{m}{1+m}\cdot\frac{1+m}{1} = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (\because 4.49)$$

$$= X^{*3}\cdot\frac{X^{*2}+3X^*+3}{3X^{*2}+3X^*+1} \qquad (\because 4.58)$$

$$= \left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)^3\cdot\frac{\left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)^2+3\left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)+3}{3\left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)^2+3\left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)+1}$$

$$= \left(\frac{x^*}{1-x^*}\right)^3\cdot\frac{x^{*2}+3x^*(1-x^*)+3(1-x^*)^2}{3x^{*2}+3x^*(1-x^*)+(1-x^*)^2}$$

$$= \frac{x^{*3}(3-3x^*+x^{*2})}{(1-x^*)^3(1+x^*+x^{*2})} \quad \cdots (4.61)$$

(4.61)の右辺をx^*について テイラー展開する
((4.50) → (4.51) への方法と同じ)

まずは、

$$m = x^{*3}(3-3x^*+x^{*2})\underbrace{(1-x^*)^{-3}}_{=J_1(x^*)}\underbrace{(1+x^*+x^{*2})^{-1}}_{=J_2(x^*)} \cdots ⑯$$

この$J_1(x^*)$, $J_2(x^*)$についてそれぞれ展開する

$$\begin{aligned} J_1(x^*) &= (1-x^*)^{-3} \\ J_1'(x^*) &= 3(1-x^*)^{-4} \\ J_1''(x^*) &= 12(1-x^*)^{-5} \\ J_1'''(x^*) &= 60(1-x^*)^{-6} \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} J_1(0) &= 1 \\ J_1'(0) &= 3 \\ J_1''(0) &= 12 \\ J_1'''(0) &= 60 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_1(x^*) = J_1(0) + J_1'(0)x^* + \frac{1}{2!}J_1''(0)x^{*2} + \frac{1}{3!}J_1'''(0)x^{*3} + O(x^{*4})$$

$$= 1 + 3x^* + 6x^{*2} + 10x^{*3} + O(x^{*4}) \cdots ⑰$$

J_2については展開する前に$K(x^*) = 1+x^*+x^{*2}$とおいて、$K(x^*)$の微分を計算しておく

$$\begin{aligned} K(x^*) &= 1+x^*+x^{*2} \\ K'(x^*) &= 1+2x^* \\ K''(x^*) &= 2 \\ K'''(x^*) &= 0 \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} K(0) &= 1 \\ K'(0) &= 1 \\ K''(0) &= 2 \\ K'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2(x^*) &= K(x^*)^{-1} \\ J_2'(x^*) &= -K(x^*)^{-2}\cdot K'(x^*) \\ J_2''(x^*) &= 2K(x^*)^{-3}\cdot K'^2(x^*) - K(x^*)^{-2}\cdot K''(x^*) \\ J_2'''(x^*) &= -6K(x^*)^{-4}\cdot K'^3(x^*) + 4K^{-3}(x^*)\cdot K'(x^*)\cdot K''(x^*) \\ &\quad + 2K^{-3}(x^*)\cdot K'(x^*)\cdot K''(x^*) - K^{-2}(x^*)\cdot K'''(x^*) \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} J_2(0) &= 1 \\ J_2'(0) &= -1\cdot 1 = -1 \\ J_2''(0) &= 2-2 = 0 \\ J_2'''(0) &= -6+4\cdot 2+2\cdot 2-1\cdot 0 = 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_2(x^*) = J_2(0) + J_2'(0)x^* + \frac{1}{2!}J_2''(0)x^{*2} + \frac{1}{3!}J_2'''(0)x^{*3} + O(x^{*4})$$
$$= 1 - x^* + x^{*3} + O(x^{*4}) \quad \cdots ⑱$$

⑯へ⑰,⑱を代入

$$m = x^{*3}\{(3-3x^*+x^{*2})(1+3x^*+6x^{*2}+10x^{*3})(1-x^*+x^{*3}) + O(x^{*4})\}$$
$$= x^{*3}\{(3-3x^*+x^{*2})(1+2x^*+3x^{*2}+5x^{*3}) + O(x^{*4})\}$$
$$= x^{*3}\{3+3x^*+4x^{*2}+8x^{*3}+O(x^{*4})\}$$
$$\therefore \frac{m}{3} = x^{*3}\left(1+x^*+\frac{4}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}x^{*3}+\cdots\right) \quad \cdots (4.62)$$

ここで、a) のときと同じように、$\alpha = \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ とおき、(4.62) へ代入

$$\alpha = x^* \underbrace{\left(1+x^*+\frac{4}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}x^{*3}+\cdots\right)^{\frac{1}{3}}}_{= L(x^*)} \quad \cdots ⑲$$

この $L(x^*)$ をマクローリン展開する
計算を見易くするために $L(x^*) = M(x^*)^{\frac{1}{3}}$ として、$M(x^*)$ についての微分を先に計算しておく

$$M(x^*) = 1+x^*+\frac{4}{3}x^{*2}+\frac{8}{3}x^{*3} \qquad M(0) = 1$$
$$M'(x^*) = 1+\frac{8}{3}x^*+8x^{*2} \quad \to \quad M'(0) = 1$$
$$M''(x^*) = \frac{8}{3}+16x^* \qquad M''(0) = \frac{8}{3}$$
$$M'''(x^*) = 16 \qquad M'''(0) = 16$$

$$L(x^*) = M(x^*)^{\frac{1}{3}}$$

$$L'(x^*) = \frac{1}{3} M(x^*)^{-\frac{2}{3}} \cdot M'(x^*)$$

$$L''(x^*) = -\frac{2}{9} M(x^*)^{-\frac{5}{3}} \cdot M'^2(x^*) + \frac{1}{3} M(x^*)^{-\frac{2}{3}} \cdot M''(x^*)$$

$$L'''(x^*) = \frac{10}{27} M(x^*)^{-\frac{8}{3}} \cdot M'^3(x^*) - \frac{4}{9} M(x^*)^{-\frac{5}{3}} \cdot M'(x^*) \cdot M''(x^*)$$
$$- \frac{2}{9} M(x^*)^{-\frac{5}{3}} \cdot M'(x^*) \cdot M''(x^*) + \frac{1}{3} M(x^*)^{-\frac{2}{3}} \cdot M'''(x^*)$$

$$L(0) = 1$$
$$\rightarrow \quad L'(0) = \frac{1}{3}$$
$$L''(0) = -\frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$L'''(0) = \frac{10}{27} - \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{3} - \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \cdot 16 = \frac{106}{27}$$

$$\Rightarrow L(x^*) = L(0) + L'(0) x^* + \frac{1}{2!} L''(0) x^{*2} + \frac{1}{3!} L'''(0) x^{*3} + O(x^{*4})$$
$$= 1 + \frac{1}{3} x^* + \frac{1}{3} x^{*2} + \frac{53}{81} x^{*3} + O(x^{*4}) \quad \cdots 20$$

20を19へ戻すと

$$\alpha = x^* \left(1 + \frac{1}{3} x^* + \frac{1}{3} x^{*2} + \frac{53}{81} x^{*3} + \cdots \right) \quad \cdots (4.63)$$

ここで、x^*をαについて解くために陰関数定理を用いる

$$x^* = b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \cdots$$

(∵2.158)

と展開すると、この展開係数b_nは、(4.63)より

$$b_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{*n-1}} \left\{ \frac{x^*}{x^* \left(1 + \frac{1}{3} x^* + \frac{1}{3} x^{*2} + \frac{53}{81} x^{*3} + \cdots \right)} \right\}^n \right]_{x^*=0}$$

$$= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{*n-1}} \left(1 + \frac{1}{3} x^* + \frac{1}{3} x^{*2} + \frac{53}{81} x^{*3} + \cdots \right)^{-n} \right]_{x^*=0}$$

$N(x^*) = 1 + \frac{1}{3}x^* + \frac{1}{3}x^{*2} + \frac{53}{81}x^{*3}$ とおいて この微分について先に計算しておく

$N'(x^*) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^* + \frac{53}{27}x^{*2}$

$N''(x^*) = \frac{2}{3} + \frac{106}{27}x^*$ →

$N'''(x^*) = \frac{106}{27}$

$N(0) = 1$

$N'(0) = \frac{1}{3}$

$N''(0) = \frac{2}{3}$

$N'''(0) = \frac{106}{27}$

ノート 4.4-⑩,⑪ の計算を流用する

$b_1 = 1$

$b_2 = \frac{1}{2!}\left[-2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3}$

$b_3 = \frac{1}{3!}\left[12 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{2}{3}\right] = -\frac{1}{9}$

$b_4 = \frac{1}{4!}\left[-120 \cdot \frac{1}{27} + 40 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{106}{27}\right] = \frac{1}{4!}\left(-\frac{184}{27}\right) = -\frac{23}{81}$

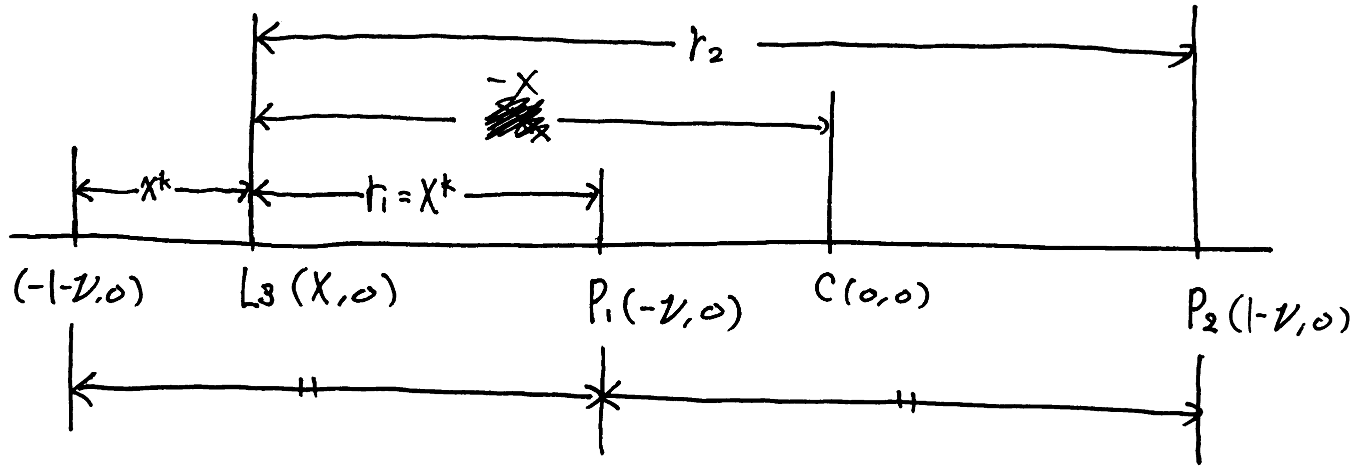
以上より

$$x^* = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + \cdots$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{23}{81}\alpha^3 + \cdots\right) \quad \cdots (4.64)$$

c) $X < -\nu$ （P_1より左の領域）：L_3について

L_3 :



この区間での平衡点についての方程式は、(4.41)より

$$X - \frac{(1-\nu)(X+\nu)}{-(X+\nu)^3} - \frac{\nu(X-1+\nu)}{-(X-1+\nu)^3} = 0$$

$$\therefore X + \frac{1-\nu}{(X+\nu)^2} + \frac{\nu}{(X-1+\nu)^2} = 0 \quad \cdots (4.65)$$

この5次方程式(4.65)が $X < -\nu$ の区間で根をもつかどうか調べるために、

$$X^* = -X - \nu \quad \cdots (4.66) \quad \rightarrow X = -X^* - \nu$$

と置く。(4.65)へ(4.66)を代入して X^* についての方程式にすると、

$$(-X^* - \nu) + \frac{1-\nu}{(-X^* - \nu + \nu)^2} + \frac{\nu}{(-X^* - \nu - 1 + \nu)^2} = 0$$

$$-X^* - \nu + \frac{1-\nu}{X^{*2}} + \frac{\nu}{(X^*+1)^2} = 0$$

$$\Big\downarrow \times X^{*2}(X^*+1)^2$$

$$(-X^* - \nu)X^{*2}(X^*+1)^2 + (1-\nu)(X^*+1)^2 + \nu X^{*2} = 0$$

$$-X^{*5} - (2+\nu)X^{*4} - (1+2\nu)X^{*3} + (\nu-1)X^{*2} + 2(\nu-1)X^* + \nu - 1 = 0$$

$$\therefore X^{*5} + (2+\nu)X^{*4} + (1+2\nu)X^{*3} - (1-\nu)(X^{*2} + 2X^* + 1) = 0 \quad \cdots (4.67)$$

デカルトの符号法則より、(4.67)は正根をただ1つもつことがわかる。

この(4.67)を次のように変形する。

$$X^{*5}+2X^{*4}+X^{*3}+\nu X^{*4}+2\nu X^{*3}+(\nu-1)(X^{*2}+2X^{*}+1)=0$$

$$X^{*3}(X^{*2}+2X^{*}+1)+\nu X^{*3}(X^{*}+2)+(\nu-1)(X^{*2}+2X^{*}+1)=0$$

$$\therefore (X^{*3}-1+\nu)(X^{*}+1)^2+\nu X^{*3}(X^{*}+2)=0 \quad \cdots (4.68)$$

ここで $\nu \to 0$ のとき(4.68)は

$$(X^{*3}-1)(X^{*}+1)^2=0$$

$$\Rightarrow X^{*} \to 1 \text{ or } X^{*} \to -1$$ となるが、$X^{*}>0$ より

$$\Rightarrow X^{*} \to 1$$

そこで、

$X^{*}=1-x^{*}$ すなわち(4.66)より $X=x^{*}-1-\nu \quad \cdots (4.69)$

と置き、νの代りにmを~~■~~用いて、(4.65)からmをx^{*}で表す。

まずは(4.65)へ(4.69)と(4.49)を代入

$$\left(x^{*}-1-\frac{m}{1+m}\right)+\frac{\frac{1}{1+m}}{(x^{*}-1)^2}+\frac{\frac{m}{1+m}}{(x^{*}-2)^2}=0$$

$$(1+m)x^{*}-1-2m+\frac{1}{(x^{*}-1)^2}+\frac{m}{(x^{*}-2)^2}=0$$

$$\left[x^{*}-2+\frac{1}{(x^{*}-2)^2}\right]m+x^{*}-1+\frac{1}{(x^{*}-1)^2}=0$$

$$\left\{(x^{*}-2)^3(x^{*}-1)^2+(x^{*}-1)^2\right\}m+(x^{*}-1)^3(x^{*}-2)^2+(x^{*}-2)^2=0$$

$$(x^{*}-1)^2(x^{*3}-6x^{*2}+12x^{*}-7)m+(x^{*}-2)^2(x^{*3}-3x^{*2}+3x^{*})=0$$

$$\therefore m=\frac{x^{*}(2-x^{*})^2(3-3x^{*}+x^{*2})}{(7-12x^{*}+6x^{*2}-x^{*3})(1-x^{*})^2} \quad \cdots (4.70)$$

(4.70)を x^* についてテイラー展開する

$$m = x^*(2-x^*)^2(3-3x^*+x^{*2})\underbrace{(7-12x^*+6x^{*2}-x^{*3})^{-1}}_{A(x^*)=a(x^*)^{-1}}\underbrace{(1-x^*)^{-2}}_{B(x^*)=b(x^*)^{-2}} \quad \cdots ㉑$$

この部分をそれぞれマクローリン展開

A, B を計算しやすくするためにまず、a, b の微分を計算しておく.

$$a(x^*) = 7-12x^*+6x^{*2}-x^{*3} \qquad b(x^*) = 1-x^*$$

$$a'(x^*) = -12+12x^*-3x^{*2} \qquad b'(x^*) = -1$$

$$a''(x^*) = 12-6x^*$$

$$a'''(x^*) = -6$$

$$\Downarrow$$

$$a(0) = 7 \qquad b(0) = 1$$

$$a'(0) = -12 \qquad b'(0) = -1$$

$$a''(0) = 12$$

$$a'''(0) = -6$$

$$A(x^*) = a(x^*)^{-1}$$

$$A'(x^*) = -a(x^*)^{-2}\cdot a'(x^*)$$

$$A''(x^*) = 2a(x^*)^{-3}\cdot a'^2(x^*) - a(x^*)^{-2}\cdot a''(x^*)$$

$$A'''(x^*) = -6a(x^*)^{-4}\cdot a'^3(x^*) + 4a(x^*)^{-3}\cdot a'(x^*)\cdot a''(x^*) + 2a(x^*)^{-3}\cdot a'(x^*)\cdot a''(x^*) - a^{-2}(x^*)\cdot a'''(x^*)$$

$$B(x^*) = b(x^*)^{-2}$$

$$B'(x^*) = -2b(x^*)^{-3}\cdot b'(x^*)$$

$$B''(x^*) = 6b(x^*)^{-4}\cdot b'^2(x^*) - 2b(x^*)^{-3}\cdot b''(x^*)$$

$$B'''(x^*) = -24b(x^*)^{-5}\cdot b'^3(x^*) + 12b(x^*)^{-4}\cdot b'(x^*)\cdot b''(x^*) + 6b^{-4}(x^*)\cdot b'(x^*)\cdot b''(x^*) - 2b(x^*)^{-3}\cdot b'''(x^*)$$

$A(0) = \frac{1}{7}$

$A'(0) = -\frac{1}{49}(-12) = \frac{12}{49}$

$A''(0) = 2 \cdot \frac{1}{343} \cdot 144 - \frac{1}{49} \cdot 12 = \frac{204}{343}$

$A'''(0) =$

メンドクサクナッタ　ヤメル

この後の流れは L_1, L_2 のときと同じ

でも計算めんどくさいよー