2.2 運動方程式の解

(2.8)の両辺と$\mathbb{r}$の外積をとる

$$\mathbb{r}\times\ddot{\mathbb{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbb{r}\times\mathbb{r}$$

$$\mathbb{r}\times\ddot{\mathbb{r}} = 0 \quad \cdots (a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{r}\times\dot{\mathbb{r}} = \mathrm{Const} = \mathbb{h} \quad \cdots (2.14)$$

$$\left(\because (\mathbb{r}\times\dot{\mathbb{r}})' = \underbrace{\dot{\mathbb{r}}\times\dot{\mathbb{r}}}_{0} + \underbrace{\mathbb{r}\times\ddot{\mathbb{r}}}_{0\ (\because a)} = 0 \right)$$

(2.8)~~式~~の両辺と$\dot{\mathbb{r}}$の内積をとる

$$\dot{\mathbb{r}}\cdot\frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbb{r}\cdot\dot{\mathbb{r}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{\mathbb{r}}^2 = \frac{d}{dt}\frac{\mu}{r}$$

$$\left(\begin{aligned} \because\ & -\frac{\mu}{r^3}\mathbb{r}\cdot\dot{\mathbb{r}} \\ &= -\frac{\mu}{r^3}r\dot{r} \quad (\because \mathbb{r} /\!/ \dot{\mathbb{r}}) \\ &= -\frac{\mu}{r^2}\dot{r} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbb{r}}^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbb{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = \mathrm{Const} = E \quad \cdots (2.16)$$

ここからは、運動方程式を軌道面内で記述する

$$\begin{aligned} \mathbb{h} &= \mathbb{r}\times\dot{\mathbb{r}} \\ &= (x, y)\times(\dot{x}, \dot{y}) \\ &= x\dot{y} - y\dot{x} \quad \cdots (2.17) \end{aligned}$$

エネルギー積分 (2.16)は以下のように書ける

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\mu}{r} = E \quad \cdots (2.18)$$

ここからは、直交座標の代わりに極座標(r, θ)を使って記述する

$$\begin{cases} \bar{x} = r\cos\theta \\ \bar{y} = r\sin\theta \end{cases} \quad \cdots (2.19)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\bar{y}} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \quad \cdots (2.20)$$

この(2.19)と(2.20)を(2.17)、(2.18)へ代入して、hとEを極座標で表示

$$\begin{aligned} h &= \bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}} \\ &= r\cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) - r\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta) \\ &= r\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta - r\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\sin^2\theta \\ &= r^2\dot{\theta} \quad \cdots (2.21) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) - \frac{\mu}{r} = E$$

$$\frac{1}{2}\left\{(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2\right\} - \frac{\mu}{r} = E$$

$$\frac{1}{2}\left\{\dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right\} - \frac{\mu}{r} = E$$

$$\frac{1}{2}\left\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right\} - \frac{\mu}{r} = E \quad \cdots (2.22)$$

(2.21), (2.22)は、r, θについての運動方程式である。
これを解くために、独立変数をtからθへ変換する。
(つまり、$F(\theta(t), \cdots)$なる関数をtで微分する。)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$= \frac{h}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\because 2.21)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta} \quad \cdots (2.23)$$

さらに、従属変数rを$s = \frac{1}{r}$で定義されるsへ変換すると、$\dot{r}$は

$$\frac{dr}{dt} = hs^2 \frac{d}{d\theta}(s^{-1}) \quad (\because 2.23)$$

$$= hs^2\left(-\frac{1}{s^2}\frac{ds}{d\theta}\right)$$

$$= -h\frac{ds}{d\theta} \quad \cdots (2.24)$$

エネルギー保存(2.22)を$t \to \theta$, $r \to s$と書き換えると、

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = E$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(-h\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right\} - \frac{\mu}{r} = E \quad (\because 2.24,\ 2.21)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(-h\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + (sh)^2\right\} - \mu s = E \quad \left(\because r = \frac{1}{s}\right)$$

$$\frac{1}{2}h^2\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}h^2s^2 - \mu s = E \quad \cdots (2.25)$$

(2.25)を$\frac{ds}{d\theta}$について解くと、

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{h^2} - s^2 + \frac{2\mu s}{h^2}$$

$$\therefore d\theta = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2E}{h^2} - s^2 + \frac{2\mu s}{h^2}}} \quad \cdots (2.26)$$

(2.26)を積分して、

$$d\theta = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{2E}{h^2}+\frac{\mu^2}{h^4}\right)-\left(s-\frac{\mu}{h^2}\right)^2}} \quad \cdots ①$$

$$\begin{cases} \frac{2E}{h^2}+\frac{\mu^2}{h^4}=A & \cdots ② \\ s-\frac{\mu}{h^2}=\sqrt{A}\cos\phi & \cdots ③ \end{cases}$$ とおく

$$= \frac{ds}{\sqrt{A-A\cos^2\phi}} \quad \cdots ④$$

③の両辺をtで微分

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{A}\sin\phi \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

$$ds = -\sqrt{A}\sin\phi \cdot d\phi \quad \cdots ⑤$$

⑤を④へ代入

$$d\theta = \frac{-\sqrt{A}\sin\phi \cdot d\phi}{\sqrt{A}\sin\phi} = -d\phi \quad \cdots ⑥$$

⑥の両辺を積分すると、

$$\theta = -\phi + C \quad \cdots ⑦ \qquad (\phi = -\theta + C)$$

⑦を③へ代入する

$$\cos(-\theta+C) = \frac{s-\frac{\mu}{h^2}}{\sqrt{A}}$$

$$\Rightarrow \theta = C - \cos^{-1}\left(\frac{\frac{sh^2}{\mu}-1}{\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}}\right) \quad \cdots (2.27)$$

(2.27)を $s=\frac{1}{r}$ を用いて変形し、$\boxed{r\text{を}\theta\text{の関数として表現する}}$

$$\theta = \omega - \cos^{-1}\left(\frac{\frac{h^2}{r\mu}-1}{\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\frac{h^2}{r\mu}-1}{\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}}\right) = \omega - \theta$$

$$\frac{h^2}{r\mu}-1 = \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\cos(\omega-\theta)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\cos(\omega-\theta)\right)$$

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\cos(\omega-\theta)} \quad \cdots \quad (2.28)$$

$$\rightarrow \left(\begin{aligned} &\cos(\omega-\theta) \\ &=\cos\{-(\theta-\omega)\} \\ &=\cos(\theta-\omega) \end{aligned}\right)$$

(2.28)は1章1節で求めた2次曲線の極座標表示 (1.8) $r=\frac{l(1+e)}{1+e\cos\phi}$ と比較することによって、(2.28)も2次曲線であること、そして、その2次曲線軌道の離心率は

$$e = \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}} \quad \cdots \quad (2.29)$$

であることがわかる。

軌道の形はわかったので、次は$\boxed{\text{時刻との関係を求める。}}$

・教科書通りに、エネルギー~~積~~保存(2.22)を利用する方法

まず、E<0となる、楕円運動の場合を考える。

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \quad \cdots (1.6) \quad と \quad r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\cos(\theta-\omega)}$$

を比較することにより、(分母について1は2.29で~~扱~~扱っているので今回は分子のみ)

$$\frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2)$$

$$h = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad \cdots \quad (2.31)$$

(2.31)へ(2.29)を代入する

$$h^2 = \mu a\left\{1-\left(1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}\right)\right\}$$

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad \cdots (2.30)$$

エネルギー積分(2.22)の中の$\dot\theta$を(2.21)を用いて消去

$$\frac{1}{2}\left\{\dot r^2 + r^2\cdot\left(\frac{h}{r^2}\right)^2\right\} - \frac{\mu}{r} = E$$

$$\frac{1}{2}\left\{\dot r^2 + \frac{h^2}{r^2}\right\} - \frac{\mu}{r} = E$$

この式のE、hを(2.30),(2.31)を使ってa,eで書き換えて、$\dot r$について解く

$$\frac{1}{2}\left(\dot r^2 + \frac{\mu a(1-e^2)}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\dot r^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu a(1-e^2)}{r^2}$$

$$= \frac{-\mu}{ar^2}\left(r^2 - 2ar + a^2(1-e^2)\right)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$= \frac{-\mu}{ar^2}\left(r-a(1-e)\right)\left(r-a(1+e)\right)$$

$$= \frac{\mu}{ar^2}\left(r-a(1-e)\right)\left(a(1+e)-r\right)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}\{a(1+e)-r\}\{r-a(1-e)\}} \quad \cdots (2.32)$$

これを、離心近点離角 u を用いて書き換える

$r = a(1-e\cos u)$ を代入する

$$\dot{r} = \frac{1}{a(1-e\cos u)}\sqrt{\frac{\mu}{a}\{a(1+e)-a(1-e\cos u)\}\{a(1-e\cos u)-a(1-e)\}}$$

$$= \frac{1}{a(1-e\cos u)}\sqrt{\frac{\mu}{a}\{ae(1+\cos u)\}\{ae(1-\cos u)\}}$$

$$= \frac{1}{a(1-e\cos u)}\sqrt{\frac{\mu}{a}a^2e^2(1-\cos^2 u)}$$

$$= \frac{1}{1-e\cos u}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cdot e\sin u \quad \cdots ⓐ$$

$r = a(1-e\cos u)$ を t で微分する

$$\frac{dr}{dt} = ae\sin u\frac{du}{dt} \quad \cdots ⓑ$$

ⓐ,ⓑより、

$$ae\sin u\frac{du}{dt} = \frac{e\sin u}{1-e\cos u}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$(1-e\cos u)\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad \cdots (2.33)$$

(2.33)を積分すると、

$$u - e\sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t - t_0) = l \quad \cdots (2.34)$$

この式はケプラー方程式(1.30)である。

(1.30) … $u - e\sin u = n(t - t_0)$ と(2.34)を比較して、

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$ ：平均運動

この式を変形させた、

$$n^2 a^3 = \mu = G(m_1 + m_2) \quad \cdots (2.35)$$

：ケプラーの第3法則

軌道長半径 a と公転周期 P との関係

(2.35)を $P = \frac{2\pi}{n}$ を用い書き換えると、

$$\frac{4\pi^2}{P^2} a^3 = \mu$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad \cdots (2.36)$$