1.4. 空間はなぜ3次元か？

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0 \quad \cdots (1.58)$$

これを極座標に変換する（変換の計算はめんどうなので、結果をそのまま使った）

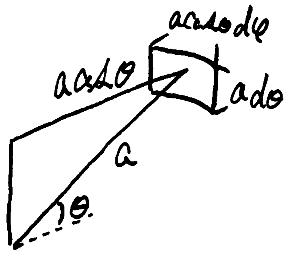
$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

空間が等方であると、$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}=0$ なので、上式は

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)\\ &= \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{d\phi}{dr}+r^2\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)\\ &= \frac{d^2}{dr^2}\phi+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\phi = 0 \quad \cdots (1.59)\end{aligned}$$

1.4.1 球殻のポテンシャル

$$dU = \phi(r)\, dm \quad \cdots (1.63)$$



上図より、微小表面積 dS は、

$$dS = a^2 \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

よって、微小面素 dm は、

$$dm = \sigma \cdot dS$$
$$= \sigma a^2 \cos\theta \, d\theta \, d\varphi \quad \cdots (1.64)$$

(1.63)を積分して、

$$U = \sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(r) \cos\theta \, d\theta \quad \cdots (1.65)$$

三角形OPQにおいて、

$$r^2 = a^2 + z^2 - 2az\sin\theta \quad \cdots (1.66)$$

(1.66)の両辺を時間で微分すると、

$$2r\frac{dr}{dt} = -2az\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta\, d\theta = -\frac{r}{az}\, dr \quad \cdots (1.67)$$

(1.67)を(1.65)へ代入

$$U = \sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{r_1} \phi(r) \left(-\frac{r}{az}\, dr\right)$$

⋮

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
	a^2+z^2+2az		a^2+z^2-2az
	$=(z+a)^2$		$=(z-a)^2$

$r_0 = z+a$, $r_1 = z-a$ とおく

$$\vdots$$

$$U = \frac{\sigma a^2}{a z}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\int_{r_0}^{r_1} -r\phi(r)\,dr$$

$$= \frac{2\pi a\sigma}{z}\int_{r_1}^{r_0} r\phi(r)\,dr \quad \cdots (1.68)$$

ここで、ポテンシャルが万有引力 $\phi = -\frac{1}{r}$ のときの球殻ポテンシャルを考えると、

$$U = \frac{2\pi a\sigma}{z}\int_{r_1=z-a}^{r_0=z+a} r\left(-\frac{1}{r}\right)dr$$

$$= \frac{2\pi a\sigma}{z}\left[-r\right]_{z-a}^{z+a}$$

$$= -\frac{4\pi\sigma a^2}{z}$$

$$= -\frac{M}{z} \quad \cdots (1.69)$$

1.4.2 球対称分布している物体のポテンシャル

$dm = 4\pi r^2 \rho \, dr$ より、

$$dU = -\frac{dm}{z} \qquad (\because \ 1.69)$$

・点Qが球の外にある場合

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^a dU \\
&= -\int_0^a \frac{4\pi r^2 \rho}{z} dr \\
&= -\frac{4\pi \rho}{z} \int_0^a r^2 \, dr \\
&= -\frac{4\pi \rho a^3}{3z} \\
&= -\frac{M}{z} \quad \cdots (1.73)
\end{aligned}
$$

・点Qが球内にある場合

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^z dU + \int_z^a dU \\
&= -\int_0^z \frac{4\pi \rho r^2}{z} dr - \int_z^a \frac{4\pi \rho r^2}{r} dr \\
&= -\frac{4\pi \rho}{z} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^z - 4\pi \rho \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_z^a \\
&= \frac{2}{3} \pi \rho z^2 - 2\pi \rho a^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{M}{a^3} z^2 - \frac{3}{2} \frac{M}{a} \quad \cdots (1.75)
\end{aligned}
$$

まず、１次元運動を考える。x 軸上の質点の単位質量あたりのポテンシャルが $U(x)$ で与えられる場合は、単位質量あたりの力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E = const.$$

と表される。平衡点は $U'(x) = 0$ を満たす点 x_0 であり、$U''(x_0) > 0$ の場合は安定、$U''(x_0) < 0$ の場合は不安定である。

次に、平面内の質点の運動を考える。極座標 (r, f) を用いることにする。単位質量あたりの角運動量の保存則は

$$r^2 \dot{f} = h = const.$$

と表される。軌道面内の速度は

$$(\dot{r}, r\dot{f}) = \left(\dot{r}, \frac{h}{r}\right)$$

木下さんが勝手にこうおいて計算していた。
万有引力の法則は３次元空間での観測から導いた式だから、これを他の次元に勝手に拡張するのはダメな気がする。　by青島

と表すことができる。単位質量あたりの力のポテンシャルが $\phi(r) = -k\, r^{-(n-2)}$ という関数で与えられるとする（ただし、$k > 0$）。単位質量あたりの力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - kr^{-(n-2)} = E = const.$$

と表される。これは、ポテンシャル $U(r) = -kr^{-(n-2)} + \dfrac{h^2}{2r^2}$ のもとでの１次元運動に相当する。$U(r)$ を有効ポテンシャルという。平衡点は

$$U'(r_0) = (n-2)kr_0^{-(n-1)} - \frac{h^2}{r_0^3} = 0$$

を満たす半径 r_0 である。すなわちこの距離で、質点は円運動をする。この円運動の安定性は $U''(r_0)$ の符号を調べればわかる。

$$U''(r_0) = -(n-2)(n-1)kr_0^{-n} + 3\frac{h^2}{r_0^4} = -(n-1)\frac{h^2}{r_0^4} + 3\frac{h^2}{r_0^4} = (4-n)\frac{h^2}{r_0^4}$$

となる。したがって $n < 4$ の場合は安定、$n > 4$ の場合は不安定である。

$n = 4$ の場合は、この基準では安定性は分からない。この場合、有効ポテンシャルは

$$U(r) = \left(-k + \frac{h^2}{2}\right)\frac{1}{r^2}$$

である。すなわち、角運動量が $\sqrt{2k}$ に等しくない限り、平衡点は存在しない。角運動量が $\sqrt{2k}$ よりも大きいときは、質点は無限遠まで放出される。逆に、角運動量が $\sqrt{2k}$ よりも小

さいときは、質点は原点まで落ち込むことになる。たまたま、角運動量が$\sqrt{2k}$に等しいときは、あらゆる点が平衡点となる。しかし、角運動量がたまたま$\sqrt{2k}$に等しい確率は０である。角運動量が$\sqrt{2k}$に等しい場合でも、角運動量が少しでも揺らぐと平衡は崩れる。