5.5 他の積分定数を用いた運動方程式

5.5.1 $a, e, I, \epsilon, \tilde{\omega}, \Omega$ を用いた運動方程式

σ, ω, Ω の代わりに

$$\epsilon = \sigma + \omega + \Omega \quad \cdots (5.156) \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \epsilon - \tilde{\omega} \\ \omega = \tilde{\omega} - \Omega \end{cases}$$

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega \quad \cdots (5.157)$$

$$\Omega = \Omega \quad \cdots (5.158)$$

を変数に選ぶ (2.8.1 項参照)

以上の文字 ($a, e, I, \epsilon, \tilde{\omega}, \Omega$) を変数としたときのラグランジュ括弧式は、(A.34) より、 (計算方法の詳細は A.2)

$$[\epsilon, a] = \frac{\partial(\epsilon - \tilde{\omega}, L)}{\partial(\epsilon, a)} + \frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial(\epsilon, a)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(\epsilon, a)}$$

$$= \left(\frac{\partial(\epsilon - \tilde{\omega})}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial L}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial(\epsilon - \tilde{\omega})}{\partial a} \cdot \frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega)}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial G}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega)}{\partial a} \cdot \frac{\partial G}{\partial \epsilon}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial H}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \cdot \frac{\partial H}{\partial \epsilon}\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} na - 0 + 0 - 0 + 0 - 0$$

$$= \frac{1}{2} na \quad \cdots (5.159)$$

$$[\tilde{\omega}, a] = \frac{\partial(\epsilon-\tilde{\omega}, L)}{\partial(\tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(\tilde{\omega}-\Omega, G)}{\partial(\tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(\tilde{\omega}, a)}$$

$$= \left(\frac{\partial(\epsilon-\tilde{\omega})}{\partial\tilde{\omega}} \cdot \frac{\partial L}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial(\epsilon-\tilde{\omega})}{\partial a} \cdot \frac{\partial L}{\partial\tilde{\omega}}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial(\tilde{\omega}-\Omega)}{\partial\tilde{\omega}} \cdot \frac{\partial G}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial(\tilde{\omega}-\Omega)}{\partial a} \cdot \frac{\partial G}{\partial\tilde{\omega}}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\omega}} \cdot \frac{\partial H}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a} \cdot \frac{\partial H}{\partial\tilde{\omega}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}na - 0 + \frac{1}{2}na\eta - 0 + 0 - 0$$

$$= \frac{1}{2}na(\eta - 1) \quad \cdots (5.160)$$

$$[\tilde{\omega}, e] = -\frac{na^2e}{\eta} \quad \cdots (5.161)$$

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2}na\eta(\cos I - 1) \quad \cdots (5.162)$$

$$[\Omega, e] = \frac{na^2e(1-\cos I)}{\eta} \quad \cdots (5.163)$$

$$[\Omega, I] = -na^2\eta\sin I \quad \cdots (5.164)$$

計算省略
上2つと方法は同じ

この後は、(5.3.1)項の時と同様にして、$a, e, I, \epsilon, \hat{\omega}, \Omega$ について の運動方程式を求める。
具体的には、基本方程式 (5.100) へ (5.159) ~ (5.164) を代入する。
その結果は以下のようになる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad \cdots (5.165)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\eta}{na^2 e}(1-\eta)\frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \hat{\omega}} \quad \cdots (5.166)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan I/2}{na^2 e\eta}\left(\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \hat{\omega}}\right) - \frac{1}{na^2\eta \sin I}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad \cdots (5.167)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan \frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I} \quad \cdots (5.168)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan \frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I} \quad \cdots (5.169)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin I}\frac{\partial R}{\partial I} \quad \cdots (5.170)$$

これらの軌道要素の組を用いても前節の軌道要素の組の場合と同様に混合永年項が出てくる。
これを避けるために新たな変数 ϵ^I を定義する

$$\frac{d\epsilon^I}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + t\frac{dn}{dt} \quad \cdots (5.171)$$

(5.171)を(5.168)へ代入して、ϵ^I についての方程式を導く。

$$\frac{d\epsilon^I}{dt} - t\frac{dn}{dt} = \underbrace{-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - t\frac{dn}{dt}}_{(\because 5.131)} + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I}$$

$$\therefore \frac{d\epsilon^I}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I} \quad \cdots (5.172)$$

平均経度 $\lambda = nt + \epsilon$ と ϵ^I の関係は、

$$\begin{aligned}\lambda &= nt + \epsilon \\ &= \underbrace{\int n\,dt}_{\rho} + \epsilon^I \\ &= \rho + \epsilon^I \quad \cdots 5.173\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned}\because \frac{d\epsilon^I}{dt} &= \frac{d\epsilon}{dt} + t\frac{dn}{dt} \\ &= \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{d}{dt}(nt) - n\end{aligned}\right.$$

積分して

$$\left.\epsilon^I = \epsilon + nt - \int n\,dt\right)$$

であり、ρ についての方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} &= -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (\because 5.142) \\ &= -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon^I} \\ &= -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\end{aligned} \quad \cdots (5.174)$$

ノート5.3-6でも同じことやってる

5.5.2 離心率・軌道傾斜角が小さい場合の運動方程式

このような場合は、しばしば次のような変数が使われる

$$h = e \sin\tilde{\omega}, \quad k = e\cos\tilde{\omega} \quad \cdots (5.175)$$

$$p = \sin\frac{I}{2}\sin\Omega, \quad q = \sin\frac{I}{2}\cos\Omega \quad \cdots (5.176)$$

摂動関数 R を新しい変数 h, k, p, q の関数と考えると、R の離心率についての偏微分は、

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial k}\cdot\frac{\partial k}{\partial e}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial h}\sin\tilde{\omega} + \frac{\partial R}{\partial k}\cos\tilde{\omega}$$

$$= \frac{1}{e}\left(h\frac{\partial R}{\partial h} + k\frac{\partial R}{\partial k}\right) \quad \cdots (5.177)$$

同様にして、R の近日点経度 $\tilde{\omega}$, 軌道傾斜角 I, 昇交点経度 Ω についての偏微分は、

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial R}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \tilde{\omega}}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial h}e\cos\tilde{\omega} + \frac{\partial R}{\partial k}(-e\sin\tilde{\omega})$$

$$= k\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial k} \quad \cdots (5.178)$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{\partial R}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial I} + \frac{\partial R}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial I}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{I}{2}\sin\Omega\right) + \frac{\partial R}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{I}{2}\cos\Omega\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{I}{2}\left(\sin\Omega\frac{\partial R}{\partial p} + \cos\Omega\frac{\partial R}{\partial q}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{I}{2}}{\sin\frac{I}{2}}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cot\frac{I}{2}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right) \quad \cdots(5.179)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \Omega}$$

$$= \frac{\partial R}{\partial p}\left(\sin\frac{I}{2}\cos\Omega\right) + \frac{\partial R}{\partial q}\left(-\sin\frac{I}{2}\sin\Omega\right)$$

$$= q\frac{\partial R}{\partial p} - p\frac{\partial R}{\partial q} \quad \cdots(5.180)$$

まず、h ($e, \tilde{\omega}$の関数) の方程式を求める

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial e}\right)_{\tilde{\omega}}\frac{de}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}}\right)_e\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$$

$$= \frac{de}{dt}\sin\tilde{\omega} + \frac{d\tilde{\omega}}{dt}e\cos\tilde{\omega} \quad \cdots(5.181)$$

この(5.181)の $\frac{de}{dt}$ と $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ に(5.166)と(5.169)を代入する

$$\frac{dh}{dt}=\left(-\frac{\eta}{na^2e}(1-\eta)\frac{\partial R}{\partial \epsilon}-\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right)\sin\tilde{\omega}$$

$$+\left(\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I}\right)e\cos\tilde{\omega}$$

$$=\frac{h}{e}\left\{-\frac{\eta}{na^2e}(1-\eta)\frac{\partial R}{\partial \epsilon}-\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right\}$$

$$+k\left\{\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I}\right\} \quad \cdots(5.182)$$

さらに、$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$, $\frac{\partial R}{\partial I}$ に(5.178),(5.177),(5.179)を代入し、整理する

$$\frac{dh}{dt}=\frac{h}{e}\left\{-\frac{\eta}{na^2e}(1-\eta)\frac{\partial R}{\partial \epsilon}-\frac{\eta}{na^2e}\left(k\frac{\partial R}{\partial h}-h\frac{\partial R}{\partial k}\right)\right\}$$

$$+k\left\{\frac{\eta}{na^2e}\cdot\frac{1}{e}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{1}{2}\cot\frac{I}{2}\left(p\frac{\partial R}{\partial p}+q\frac{\partial R}{\partial q}\right)\right\}$$

$$=-\frac{h\eta(1-\eta)}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}-\frac{h\eta k}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial h}+\frac{h^2\eta}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial k}$$

$$+\frac{\eta kh}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial h}+\frac{\eta k^2}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial k}+\frac{kp}{2na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial p}+\frac{kq}{2na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial q}$$

$$=\frac{\eta(h^2+k^2)}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial k}-\frac{h\eta(1-\eta)}{na^2e^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}+\frac{k}{2na^2\eta}\left(p\frac{\partial R}{\partial p}+q\frac{\partial R}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\eta(h^2+k^2)}{na^2e^2}=\frac{\eta(e^2\sin^2\tilde{\omega}+e^2\cos^2\tilde{\omega})}{na^2e^2}=\frac{\eta}{na^2}$$

$$\frac{h\eta(1-\eta)}{na^2e^2}=\frac{h\eta(1-\eta)}{na^2(1-\eta^2)}=\frac{h\eta}{na^2(1+\eta)}$$

$$=\frac{\eta}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k}-\frac{h\eta}{na^2(1+\eta)}+\frac{k}{2na^2\eta}\left(p\frac{\partial R}{\partial p}+q\frac{\partial R}{\partial q}\right) \quad \cdots(5.183)$$

残りの変数についても同様の計算をすればいい
(計算省略、以下結果のみ)

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad \cdots(5.184)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt}=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\eta}{na^2(1+\eta)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{1}{2na^2\eta}\left(p\frac{\partial R}{\partial p}+q\frac{\partial R}{\partial q}\right) \quad \cdots(5.185)$$

$$\frac{dk}{dt}=-\frac{\eta}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h}-\frac{k\eta}{na^2(1+\eta)}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}-\frac{k}{2na^2\eta}\left(p\frac{\partial R}{\partial p}+q\frac{\partial R}{\partial q}\right) \quad \cdots(5.186)$$

$$\frac{\partial p}{dt}=\frac{1}{4na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial q}-\frac{p}{2na^2\eta}\left(k\frac{\partial R}{\partial h}-h\frac{\partial R}{\partial k}+\frac{\partial R}{\partial \epsilon}\right) \quad \cdots(5.187)$$

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{4na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial p}-\frac{q}{2na^2\eta}\left(k\frac{\partial R}{\partial h}-h\frac{\partial R}{\partial k}+\frac{\partial R}{\partial \epsilon}\right) \quad \cdots(5.188)$$

以上6式は分母に今回使用している変数(h, k, p, q $+a\epsilon$)のいずれも含んでいない。すなわち、これらの変数の組を用いることにより見かけ上の特異点が取り除かれた。

離心率 e や軌道傾斜角 I が小さいとき。
すなわち h, k, p, q を1次の微小量とし、2次、3次の微小量は無視するとして、(5.183)〜(5.188)を書き直すと、

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \quad \frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} \qquad \cdots (5.189)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h} \qquad \cdots (5.190) \leftarrow \left(\because \eta = \sqrt{1-e^2} \fallingdotseq 1\right)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{4na^2}\frac{\partial R}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{4na^2}\frac{\partial R}{\partial p} \qquad \cdots (5.191)$$

p, q のとり方には他にもバリエーションがあるが、目的は同じで $e=0$, $I=0$ となるときの見かけの特異点を消すことである。