2.3 離心積分

任意のベクトル $\mathbf{u}$ の方向の時間変化を表現する一般公式の導出:

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{u\dot{\mathbf{u}} - \dot{u}\mathbf{u}}{u^2}$$

$$= \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} - (\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}})\mathbf{u}}{u^3}$$

$$= \frac{(\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{u}})\times\mathbf{u}}{u^3} \quad \cdots (2.44) \quad (\because ベクトル3重積)$$

導出した一般公式 (2.44) の $\mathbf{u}$ の代わりに $\mathbf{r}$ を代入する

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mathbf{h}\times\mathbf{r}}{r^3} \quad (\because 2.14 \cdots \mathbf{h} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})$$

$$= -\frac{\mathbf{h}}{\mu}\times\ddot{\mathbf{r}} \quad (\because 2.8 \cdots \ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3})$$

これを時間について積分する~~。~~

まずは x 方向成分のみを考えると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_x}{r}\right) = \frac{1}{\mu}(\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h})_x$$

両辺 t で積分

$$\frac{\mathbf{r}_x}{r} + e_x = \frac{1}{\mu}(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h})_x \quad (e_x: 積分定数)$$

y, z 方向も同様に計算したのちまとめると、

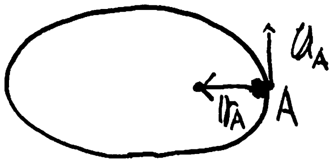
$$\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} = \frac{1}{\mu}(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h})$$

$$\mu\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}\right) = \mathbf{v}\times\mathbf{h} \quad \cdots (2.45)$$

$$\left(\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}) = \ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h} + \underbrace{\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{h}}}_{\because 0} = \ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{h}\right)$$

面積速度一定なので 0

(2.45)を近点Aで評価する



$$\mu\left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}_A}{r_A}\right) = \mathbf{v}_A \times \mathbf{h}$$

$$= \underbrace{-(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_A)\mathbf{v}_A}_{=0\ (\because\ \mathbf{r}_A \perp \mathbf{v}_A)} + v_A^2 \mathbf{r}_A \quad (\because ベクトル三重積)$$

$$= v_A^2 \mathbf{r}_A$$

$$\mu \mathbf{e} = \left(v_A^2 - \frac{\mu}{r_A}\right)\mathbf{r}_A$$

ここで、エネルギー積分(2.16)を代入する $\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = E\right)$

$$\mu \mathbf{e} = \left(2E + \frac{2\mu}{r_A} - \frac{\mu}{r_A}\right)\mathbf{r}_A$$

$$= \left(\frac{\mu}{r_A} + 2E\right)\mathbf{r}_A \quad \cdots (2.46)$$

楕円運動 ($E<0$) の場合には (2.30)より、$E = -\frac{\mu}{2a}$ であることがわかっているので、これを代入

$$\mu \mathbf{e} = \left(\frac{\mu}{r_A} - \frac{\mu}{a}\right)\mathbf{r}_A$$

$$\mathbf{e} = \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{a}\right)\mathbf{r}_A \quad \cdots (2.47)$$

(2.45)の両辺と$\mathbb{r}$との内積をとると、

$$\mu\left(\mathbb{e}\cdot\mathbb{r}+\frac{\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}}{r}\right)=\mathbb{r}\cdot(\mathbb{v}\times\mathbb{h})$$

$$\mu(\mathbb{e}\cdot\mathbb{r}+r)=h^2 \quad \cdots (2.48)$$

(∵ スカラー3重積 $\mathbb{r}\cdot(\mathbb{v}\times\mathbb{h})=\mathbb{h}\cdot(\underbrace{\mathbb{r}\times\mathbb{v}}_{\mathbb{h}})=h^2$)

$\mathbb{r}$と$\mathbb{e}$のなす角をfとすると、

$$\mathbb{e}\cdot\mathbb{r}=re\cos f$$

であるから、これを(2.48)に代入して、rについて整理すると、

$$\mu(re\cos f+r)=h^2$$

$$r\cdot\mu(e\cos f+1)=h^2$$

$$r=\frac{h^2/\mu}{e\cos f+1} \quad \cdots (2.49)$$