1.2 ケプラーの法則

・第2法則（面積速度一定）を定量的に記述する

第2法則より、

$$\frac{dS}{dt} = 一定 = k \quad \Rightarrow \quad S = k(t-t_0) \quad \cdots (1.25)$$

時刻の基準とするt_0は本来どんな値でもよいが、今回は近日点Aを通過する時刻とする。さらに、公転周期をPとおいたときの楕円の面積は、

$$S(t_0+P) = kP = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

$$\xrightarrow[(1.25)]{} k = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}$$

ここで、公転周期Pの代わりに、$n = \frac{2\pi}{P}$ …(1.27) で定義される平均運動nを導入する。

微小扇形FPQの面積

$$dS \approx \frac{1}{2}FP \times QH = \frac{1}{2}r(r+dr)\sin df \underset{\substack{\uparrow \\ 2次の微小量を無視}}{\sim} \frac{1}{2}r^2 df \quad \left(\because \begin{array}{l}\sin df \fallingdotseq df \\ r+dr \fallingdotseq r\end{array}\right)$$

であるから、面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{df}{dt} \quad \cdots (1.28)$$

ここからは、変数を(r, f)からuのみに変更して考えていく。
そのために、前章で楕円の媒介変数表示を考えるときに用いた

$$\begin{cases} r = a(1-e\cos u) & \cdots (1.13) \\ r\dot{f} = a\sqrt{1-e^2}\,\dot{u} & \cdots (1.19) \end{cases}$$

の2式を使って変数変換を行っていく。

(1.28)に(1.13)と(1.19)を代入すると、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r \cdot r\dot{f} = \frac{1}{2}a^2(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2}\frac{du}{dt} \quad \cdots (a)$$

さらに、

$$\frac{dS}{dt} = k \underset{(\because 1.26)}{=} \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P} \underset{(\because 1.27)}{=} \frac{1}{2} n a^2\sqrt{1-e^2} \quad \cdots (b)$$

(a), (b)より

$$\frac{1}{2} a^2(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2}\,\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} n a^2\sqrt{1-e^2}$$

$$\Rightarrow (1-e\cos u)\frac{du}{dt} = n \quad \cdots (1.29)$$

(1.29)を時間について積分する

$$u - e\sin u = n(t-t_0) \quad \cdots (1.30)$$