3.4

3.4.2

$$\frac{d^2\mathbf{d}_2}{dt^2} = \frac{d^2(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2\mathbf{r}_3}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}$$

$$= -GM_1\frac{\mathbf{d}_1}{d_1^3} - GM_3\frac{\mathbf{d}_2}{d_2^3} - GM_2\frac{\mathbf{d}_2}{d_2^3} - GM_1\frac{\mathbf{d}}{d^3} \qquad (\because 3.38,\ 3.39)$$

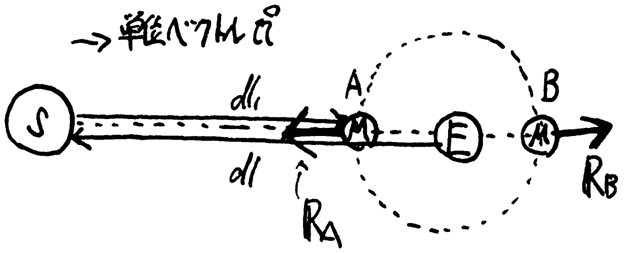
$$= -G(M_2+M_3)\frac{\mathbf{d}_2}{d_2^3} \underbrace{- GM_1\left(\frac{\mathbf{d}_1}{d_1^3} + \frac{\mathbf{d}}{d^3}\right)}_{\parallel} \quad \cdots (3.40)$$

$\mathbf{R}$：太陽による摂動力

右図より、$\mathbf{d}_1 \,/\!/\, \mathbf{d}_2 \,/\!/\, \hat{i}$ よって

$$\mathbf{R} = GM_1\left\{-\frac{d_1\hat{i}}{d_1^3} - \frac{(-d\hat{i})}{d^3}\right\}$$

$$= GM_1\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2}\right)\hat{i} \quad \cdots (3.41)$$



潮汐力$\mathbf{R}$は以下のように表現できる

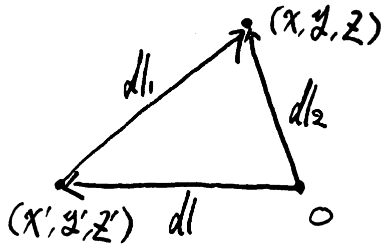
$$\mathbf{R} = GM_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}_2}{d^3}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_2} V \quad \cdots (3.42)$$

Vは摂動関数または潮汐ポテンシャルという。
このVをこれから求めていくが、その前に (3.40) と (3.42) から、

$$\mathbf{R} = GM_1\left(-\frac{\mathbf{d}_1}{d_1^3} - \frac{\mathbf{d}}{d^3}\right) = GM_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}_2}{d^3}\right) \quad \cdots ①$$

が成り立っているのか確認しておく。

右図のように、$\mathbb{dl}=(x',y',z')$, $\mathbb{dl}_2=(x,y,z)$
とおくと、①の右辺（÷GM_1）は、



$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{dl}_2}\left(d_1^{-1}-\frac{\mathbb{dl}\cdot\mathbb{dl}_2}{d^3}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{k}\right)\left(\{\underbrace{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}_{\overset{\text{図より、}}{=d_1^2}}\}^{-\frac{1}{2}}-(xx'+yy'+zz')(\underbrace{x'^2+y'^2+z'^2}_{=d^2})^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(d_1^2)^{-\frac{3}{2}}(2x-2x')\mathbb{i}-\frac{1}{2}(d_1^2)^{-\frac{3}{2}}(2y-2y')\mathbb{j}-\frac{1}{2}(d_1^2)^{-\frac{3}{2}}(2z-2z')\mathbb{k}$$

$$-x'(d^2)^{-\frac{3}{2}}\mathbb{i}-y'(d^2)^{-\frac{3}{2}}\mathbb{j}-z'(d^2)^{-\frac{3}{2}}\mathbb{k}$$

$$=-\frac{(x-x')\mathbb{i}+(y-y')\mathbb{j}+(z-z')\mathbb{k}}{d_1^3}-\frac{x'\mathbb{i}+y'\mathbb{j}+z'\mathbb{k}}{d^3}$$

$$=-\frac{\mathbb{dl}_1}{d_1^3}-\frac{\mathbb{dl}}{d^3}\quad\cdots②$$

②より、①が成り立つことが確認できた。

よって、次はVについて考えていく。
Vの第1項は

$$\frac{1}{d_1}=(d^2+d_2^2-2dd_2\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\qquad(\because 3.43)$$

$$=\left\{d^2\left(1+\frac{d_2^2}{d^2}-2\frac{d_2}{d}\cos\theta\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{d_2}{d}\right)^n}\qquad(\because D.16)\text{ ルジャンドル多項式}$$

$$\cdots(3.45)$$

$n=0$ $$\frac{1}{d}P_0(\cos\theta)\left(\frac{d_2}{d}\right)^0=\frac{1}{d}\cdot1\cdot1=\frac{1}{d}\qquad(\because D.13)$$

$n=1$ $$\frac{1}{d}P_1(\cos\theta)\left(\frac{d_2}{d}\right)^1=\frac{d_2}{d^2}\cdot\cos\theta=\frac{dd_2\cos\theta}{d^3}\underset{(\because 3.46)}{=}\frac{\mathbb{dl}\cdot\mathbb{dl}_2}{d^3}$$

よって、(3.42)の左辺のカッコの中は、(3.45)より、

$$\frac{1}{d_1} - \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}_2}{d^3} = \frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d_2}{d}\right)^n P_n(\cos\theta) - \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}_2}{d^3}$$

$$= \frac{1}{d} + \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}_2}{d^3} + \frac{1}{d}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d_2}{d}\right)^n P_n(\cos\theta) - \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}_2}{d^3}$$

$$= \frac{1}{d} + \frac{1}{d}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d_2}{d}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

これより、(3.42)の左辺全体は、

$$GM_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{d}_2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}_2}{d^3}\right) = GM_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{d}_2}\left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d_2}{d}\right)^n P_n(\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{GM_1}{d}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{d}_2}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d_2}{d}\right)^n P_n(\cos\theta)\right]$$

これを(3.42)へ代入すれば、

$$V = \frac{GM_1}{d}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d_2}{d}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$= GM_1\left\{\underbrace{\frac{d_2^2}{d^3}P_2(\cos\theta)}_{\text{主要項}} + \underbrace{\frac{d_2^3}{d^4}P_3(\cos\theta)}_{} + \cdots\right\} \quad \cdots (3.47)$$

(第1項の $\frac{d_2}{d}$ 倍程度　$d \gg d_2$ より第2項以下はムシ)

主要項の具体的表現

$$\frac{d_2^2}{d^3}P_2(\cos\theta) = \frac{d_2^2}{d^3}\cdot\frac{1}{2}\left\{3(\cos\theta)^2 - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{2d^3}\left(3d_2^2\cos^2\theta - d_2^2\right) \quad \cdots ③$$

$$\left(\because\ P_2(x) = \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1) = \frac{1}{8}(12x^2-4) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\right)$$

⋮

つづく

$\vec{d_1} = \vec{d_2} - \vec{d}$ より

$d_1^2 = d_2^2 + d^2 - 2 d d_2 \cos\theta$

$2 d d_2 \cos\theta = d_2^2 + d^2 - d_1^2$

$= (x^2 + y^2 + z^2) + (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}$

$= 2xx' + 2yy' + 2zz'$

$\therefore (d d_2 \cos\theta)^2 = (xx' + yy' + zz')^2 \quad \cdots ④$

$d_2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \cdots ⑤$

③へ④,⑤を代入

$$\frac{d_2^2}{d^3} P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2d^3}\left\{\frac{3}{d^2}(xx' + yy' + zz')^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right\} \quad \cdots (3.48)$$

以上より、Vは近似的に

$$V = \frac{GM_1}{2d^3}\left\{\frac{3}{d^2}(xx' + yy' + zz')^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right\}$$

と表現できる。これより、

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{GM_1}{2d^3}\left\{\frac{3}{d^2}\cdot 2\underbrace{(xx' + yy' + zz')}_{=\vec{d}\cdot\vec{d_2}}x' - 2x\right\}$$

$$= \frac{GM_1}{d^3}\left\{\frac{3x' \cdot d d_2 \cos\theta}{d^2} - x\right\}$$

$$= \frac{GM_1}{d^3}\left\{\frac{3x' d_2 \cos\theta}{d} - x\right\} \quad \cdots (3.49)$$

$\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ も同様にして求められる

以上より、

$$\mathbb{R} = \frac{\partial V}{\partial \mathbb{d}_2}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbb{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{k}\right) V$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\mathbb{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbb{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbb{k}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

$$= \left[\left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left\{\frac{3x' d_2 \cos\theta}{d} - x\right\}^2 + \left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left\{\frac{3y' d_2 \cos\theta}{d} - y\right\}^2 + \left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left\{\frac{3z' d_2 \cos\theta}{d} - z\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left(\frac{9x'^2 d_2^2 \cos^2\theta}{d^2} + x^2 - \frac{6xx' d_2 \cos\theta}{d} + \frac{9y'^2 d_2^2 \cos^2\theta}{d^2} + y^2 - \frac{6yy' d_2 \cos\theta}{d} + \frac{9z'^2 d_2^2 \cos^2\theta}{d^2} + z^2 - \frac{6zz' d_2 \cos\theta}{d}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left\{\frac{9d_2^2 \cos^2\theta}{d^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{6d_2 \cos\theta}{d}(xx' + yy' + zz')\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left\{\frac{9d_2^2 \cos^2\theta}{d^2} d^2 + d_2^2 - \frac{6d_2 \cos\theta}{d} d d_2 \cos\theta\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2\left(9d_2^2 \cos^2\theta + d_2^2 - 6d_2^2 \cos^2\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

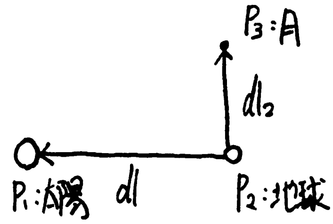
$$= \left[\left(\frac{GM_1}{d^3}\right)^2 d_2^2 \left(3\cos^2\theta + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= GM_1 \frac{d_2}{d^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \quad \cdots (3.50)$$

月に働くケプラー力と摂動力の比を考える

Aの運動方程式は、(地球を座標原点とする)

$$\frac{d^2 \boldsymbol{d}_2}{dt^2} = \underbrace{-G(M_2+M_3)\frac{\boldsymbol{d}_2}{d_2^3}}_{K:\text{ケプラー力}} + \underbrace{GM_1\left(-\frac{\boldsymbol{d}_1}{d_1^3}-\frac{\boldsymbol{d}}{d^3}\right)}_{R:\text{摂動力}} \quad \cdots (3.40)$$



$M_1 \gg M_2 \gg M_3$

$M_2 \gg M_3$より、ケプラー力の大きさは以下のように近似する

$$K = \frac{GM_2}{d_2^2}$$

Rについては、(3.50)で

$$R = GM_1\frac{d_2}{d^3}\underbrace{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}_{1\text{以上}2\text{以下}} \qquad (\because 3.50)$$

と導出しているので、

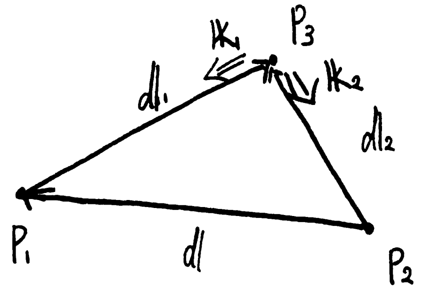
$$R = GM_1\frac{d_2}{d^3}$$

と近似して考える

これより、摂動力とケプラー力の比は、

$$\frac{R}{K} = \frac{GM_1 \cdot d_2}{d^3}\cdot\frac{d_2^2}{GM_2} = \frac{M_1}{M_2}\cdot\left(\frac{d_2}{d}\right)^3 \quad \cdots (3.51)$$

3.4.3



P_3の運動方程式は(3.39)

$$\frac{d^2\mathbb{r}_3}{dt^2} = -GM_1\frac{\mathbb{d}_1}{d_1^3} - GM_2\frac{\mathbb{d}_2}{d_2^3}$$

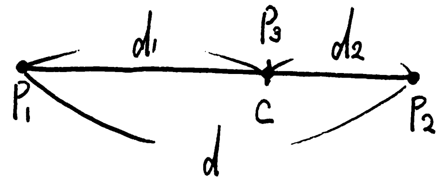
$$K_1 = \frac{GM_1}{d_1^2}, \quad K_2 = \frac{GM_2}{d_2^2}$$

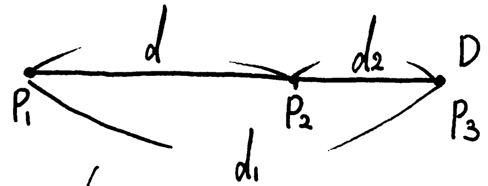
P_1とP_2による力がつり合うのは、

$$\frac{GM_1}{d_1^2} = \frac{GM_2}{d_2^2} \quad \cdots (3.52)$$

$$\therefore \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \equiv m \quad \cdots (3.53)$$

となる場所





このとき、

$$d = d_1 + d_2$$

$$d = \frac{1}{m}d_2 + d_2 \quad (\because 3.53)$$

$$\therefore d_2 = \frac{m}{1+m}d = CP_2$$

このとき、

$$d_1 = d + d_2$$

$$\frac{1}{m}d_2 = d + d_2 \quad (\because 3.53)$$

$$\frac{1-m}{m}d_2 = d$$

$$\therefore d_2 = \frac{m}{1-m}d = P_2D$$

(3.54)

図より、

$$P_2O = \frac{CD}{2} - CP_2$$

$$= \frac{m}{1-m^2}d - \frac{m}{1+m}d$$

$$= \frac{m^2}{1-m^2}d \quad \cdots (3.55)$$

$$r_G = \frac{CD}{2}$$

$$= \frac{m}{1-m^2} d \quad \cdots (3.56)$$

mは1より小さいと仮定しているので、m^2は無視
よって(3.55)、(3.56)は、

$$P_2O \sim 0 \quad \cdots (3.55)'$$

$$r_G \sim md \quad \cdots (3.56)'$$

と近似できる。

3.4.4

P_1を中心とするP_3の運動eq

$$\frac{d^2 \mathbf{d}_1}{dt^2} = \underbrace{-G(m_1+m_3)\frac{\mathbf{d}_1}{d_1^3}}_{K_1} + \underbrace{Gm_2\left(-\frac{\mathbf{d}_2}{d_2^3} + \frac{\mathbf{d}}{d^3}\right)}_{R_1} \quad \cdots (3.57)$$

$$K_1 \sim \frac{Gm_1}{d_1^2} = \frac{Gm_1}{d^2}\left\{1 + O\left(\frac{d_2}{d}\right)\right\} \quad \cdots (3.59)$$

$(\because m_1 > m_2)$ $(\because 3.44)$

$$R_1 = Gm_2\left|\frac{\mathbf{d}}{d^3} - \frac{\mathbf{d}_2}{d_2^3}\right|$$

$$= \frac{Gm_2}{d_2^2}\left|\underbrace{\left(\frac{d_2}{d}\right)^2}_{\simeq 0}\cdot\left(\frac{\mathbf{d}}{d}\right) - \frac{\mathbf{d}_2}{d_2}\right|$$

$$\simeq \frac{Gm_2}{d_2^2}\left|\frac{\mathbf{d}_2}{d_2}\right|$$

$$= \frac{Gm_2}{d_2^2}\left(1 + O\left(\frac{d_2}{d}\right)^2\right) \quad \cdots (3.60)$$

一方. P_2を中心とするP_3の運動eqとK_2, R_2については前小節(3.4.2)で求めてあるので. それを利用する。

(3.40)より

$$K_2 \underset{(\because M_2 \gg M_3)}{\simeq} \frac{GM_2}{d_2^2} \quad \cdots (3.61)$$

(3.50)より

$$R_2 = GM_1 \frac{d_2}{d^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \quad \cdots (3.62)$$

以上 (3.59)〜(3.62)を (3.58)へ代入すると.

$$\frac{R_2}{K_2} \leq \frac{R_1}{K_1} \quad \cdots (3.58)$$

$$GM_1 \frac{d_2}{d^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \cdot \frac{d_2^2}{GM_2} \leq \frac{GM_2}{d_2^2} \cdot \frac{d^2}{GM_1}$$

$$\frac{M_1}{M_2}\frac{d_2^3}{d^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \leq \frac{M_2}{M_1}\frac{d^2}{d_2^2}$$

両辺に $\times \dfrac{M_2}{M_1}\cdot\left(\dfrac{d_2}{d}\right)^2(1+3\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{d_2}{d}\right)^5 \leq \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2(1+3\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

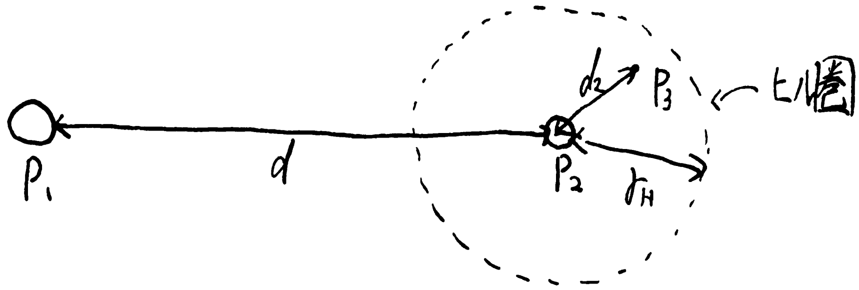
$$\frac{d_2}{d} \leq \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{5}}\underbrace{(1+3\cos^2\theta)^{-\frac{1}{10}}}_{\fallingdotseq\, 1} \quad \cdots (3.63)$$

1と近似する

等号が成り立つときのd_2が作用半径r_Iなので:

$$r_I = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{5}} d \quad \cdots (3.64)$$

3.4.5



$$r_H = \left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{\frac{1}{3}} d \quad \cdots \ (3.65)$$

導出方法分かった。（次のページ）
導出するというよりは定義だった。

~~どうやって導出したのかよくわからないけど、~~
~~4.5節で詳しくやるらしいからとりあえず認めておく~~

$K_2 = R_2$ となるところは、

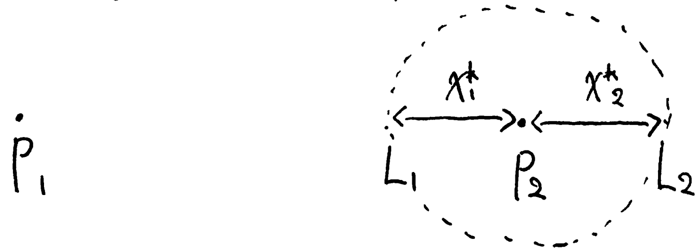
$$\underbrace{\frac{GM_2}{d_2^{\,2}}}_{(\because 3.61)} = \underbrace{GM_1 \frac{d_2}{d^3}}_{(\because 3.62)}$$

$\sqrt{1+3\cos^2\theta} \sim 1$ と近似

$$d_2^{\,3} = \frac{M_2}{M_1} d^3$$

$$\therefore d_2 = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{3}} d \quad \cdots \ (3.66)$$

3.4.5 ヒル圏 (3.65)の導出



$$x_1^* = \alpha\left(1 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{23}{81}\alpha^3 + \cdots\right) \quad (\because 4.64)$$

$$\sim \alpha = \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_2^* = \alpha\left(1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{31}{81}\alpha^3 + \cdots\right) \quad (\because 4.53)$$

$$\sim \alpha = \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

以上より、$x_1^* \fallingdotseq x_2^*$とみなして、半径 αの円をヒル圏とする

$$\alpha = \left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\because 4.48)$$

4章ではP_1, P_2のキョりを1と規格化しているので、P_1P_2のキョりをdとおけば、ヒル半径は

$$\left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{\frac{1}{3}} d \quad \cdots (3.65)$$

となる