4.6 平衡解の安定性

平衡解 L_i $(X_i, Y_i, Z_i=0)$ からの微小変位を x, y, z とする

$$X = X_i + x \quad , \quad Y = Y_i + y \quad , \quad Z = Z_i + z$$

微小変位についての運動方程式は (4.20)(4.21)(4.22) に上記の関係式を代入して求められる

・(4.20)より

$$\ddot{X} - 2n'\dot{Y} = -\frac{\partial U^*}{\partial X}$$

$$\rightarrow (X_i + x)'' - 2n'(Y_i + y)' = -\frac{\partial U^*}{\partial X}$$

$$\rightarrow \ddot{x} - 2n'\dot{y} = -\frac{\partial U^*}{\partial X} \quad \cdots ①$$

$\frac{\partial U^*}{\partial X}$ については、平衡点周りでテイラー展開する ~~(多変数関数のテイラー展開)~~ ← 2次の項はムシ

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \underbrace{\frac{\partial U^*}{\partial X}\bigg|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}}}_{\text{平衡点でビブンしたら}0} + \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial U^*}{\partial X}\right)\bigg|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} x + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial U^*}{\partial X}\right)\bigg|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} y + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial U^*}{\partial X}\right)\bigg|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} z$$

$$= \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Z_i} z \quad \cdots ②$$

①、②より

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Z_i} z = 0 \quad \cdots (4.77)$$

・(4.21)より

$$\ddot{Y} + 2n'\dot{X} = -\frac{\partial U^*}{\partial Y}$$

$$\to \ddot{y} + 2n'\dot{x} = -\frac{\partial U^*}{\partial Y} \quad \cdots ③$$

$\frac{\partial U^*}{\partial Y}$についても、平衡点周りでテイラー展開する

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y} = \left.\frac{\partial U^*}{\partial Y}\right|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} + \left.\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial U^*}{\partial Y}\right)\right|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} x + \left.\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial U^*}{\partial Y}\right)\right|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} y + \left.\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial U^*}{\partial Y}\right)\right|_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}} z$$

$$= \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial X_i} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial Z_i} z \quad \cdots ④$$

③,④より、

$$\ddot{y} + 2n'\dot{x} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial X_i} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial Z_i} z = 0 \quad \cdots (4.78)$$

・(4.22)より

$$\ddot{Z} = -\frac{\partial U^*}{\partial Z}$$

$$\to \ddot{z} = -\frac{\partial U^*}{\partial Z} \quad \cdots ⑤$$

$\frac{\partial U^*}{\partial Z}$についても平衡点周りでテイラー展開する　(④を参考に)

$$\frac{\partial U^*}{\partial Z} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial X_i} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial Y_i} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2} z \quad \cdots ⑥$$

⑤,⑥より

$$\ddot{z} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial X_i} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial Y_i} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2} z = 0 \quad \cdots (4.79)$$

$Z_i=0$ であるので、

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Z_i}=0 \quad \cdots ⑦, \quad \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial Z_i}=0 \quad \cdots ⑧, \quad \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial X_i}=0 \quad \cdots ⑨, \quad \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial Y_i}=0 \quad \cdots ⑩$$

この⑦〜⑩を用いて、(4.77)〜(4.79)を整理していくが、
まずは⑦〜⑩の証明をしておく。

・⑦について、

$$\left[\begin{aligned}
U^* &= -\frac{GM_1}{r_1}-\frac{GM_2}{r_2}-\frac{1}{2}n'^2(X^2+Y^2) \quad \cdots (4.23)\\
&= -GM_1 r_1'^{-\frac{1}{2}}-GM_2 r_2'^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}n'(X^2+Y^2)\\
r_1 &= \sqrt{\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right)^2+Y^2+Z^2} \quad (=r_1'^{\frac{1}{2}}) \quad \cdots (4.18)\\
r_2 &= \sqrt{\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right)^2+Y^2+Z^2} \quad (=r_2'^{\frac{1}{2}}) \quad \cdots (4.19)
\end{aligned}\right]$$

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Z_i}=\left[\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial U^*}{\partial X}\right)\right]_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i=0}}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial Z}\left\{\frac{1}{2}GM_1 r_1'^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right)+\frac{1}{2}GM_2 r_2'^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right)-n'^2X\right\}\right]_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=0}}$$

↓ Zによらない大字はすべてまとめてしまう

$$=\left[\frac{\partial}{\partial Z}\left(\alpha r_1'^{-\frac{3}{2}}+\beta r_2'^{-\frac{3}{2}}-\gamma\right)\right]_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}}$$

$$=\left[\alpha' r_1'^{-\frac{5}{2}}\cdot 2Z+\beta' r_2'^{-\frac{5}{2}}\cdot 2Z\right]_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i}}$$

$$=0 \quad ■$$

・⑧については⑦と同様にやれば証明できる
・⑨,⑩については、U^*が平衡点周りで連続であることから、
偏微分の順序交換ができるので、⑦,⑧を使って証明できる。

以上より、⑦～⑩を用いて、(4.77)(4.78)(4.79)を整理する

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n'\dot{y} + \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2} x + \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} y = 0 \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} + \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} x + \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2} y = 0 \\ \ddot{z} + \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2} z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} - 2n'\dot{y} + ax + by = 0 & \cdots (4.80) \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} + bx + cy = 0 & \cdots (4.81) \\ \ddot{z} + dz = 0 & \cdots (4.82) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2} \\ b = \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} \\ c = \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2} \\ d = \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2} \end{cases} \cdots (4.83)$$

U^*を平衡点の周りでテイラー展開すると、

$$U^* = \underbrace{U^*\Big|_{\substack{X=X_i \\ Y=Y_i \\ Z=Z_i}}}_{= U_i} + \underbrace{\frac{\partial U^*}{\partial X}\Big|_{\substack{X=X_i \\ \vdots}} x + \frac{\partial U^*}{\partial Y}\Big|_{\substack{X=X_i \\ \vdots}} y + \frac{\partial U^*}{\partial Z}\Big|_{\substack{X=X_i \\ \vdots}} z}_{=0\ (\because 平衡点でビブンしたから)}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^2}\Big|_{\sim} x^2 + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^2}\Big|_{\sim} y^2 + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z^2}\Big|_{\sim} z^2 \right) + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X \partial Y}\Big|_{\sim} xy + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y \partial Z}\Big|_{\sim} yz + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z \partial X}\Big|_{\sim} zx$$

$$= U_i + \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{2}dz^2 + O \quad (\because ⑦\sim⑩,\ (4.83))$$

$\cdots (4.84)$　　(x, y, zについて3次式)

(4.80)～(4.82)から、zの運動は、x, yの値とは無関係であることがわかる。
このzの運動について調べるためにdの具体的な形を調べる

$$d = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial U^*}{\partial Z} \right) \right]_{\substack{X=X_i \\ Y=Y_i \\ Z=Z_i=0}}$$

$\vdots$

⋮

$$d = \left[\frac{\partial}{\partial Z}\left(GM_1 r_1'^{-\frac{3}{2}} \cdot Z + GM_2 r_2'^{-\frac{3}{2}} \cdot Z\right)\right]_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i=0}}$$

$$= \left[\left(GM_1 r_1'^{-\frac{3}{2}} + GM_2 r_2'^{-\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{2}\left(GM_1 r_1'^{-\frac{5}{2}} + GM_2 r_2'^{-\frac{5}{2}}\right)Z^2\right]_{\substack{X=X_i\\Y=Y_i\\Z=Z_i=0}}$$

$$= GM_1 r_1'^{-\frac{3}{2}} + GM_2 r_2'^{-\frac{3}{2}}$$

r_1', r_2' を r_1, r_2 になおす

$$= GM_1 r_1^{-3} + GM_2 r_2^{-3}$$

$$= \left\{\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\frac{a'}{r_1}\right)^3 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{a'}{r_2}\right)^3\right\} n'^2 \quad \cdots (4.85)$$

$$\left(\because \quad n'^2 a'^3 = G(m_1+m_2) \Rightarrow G = \frac{n'^2 a'^3}{m_1+m_2}\right)$$

ここからは軌道平面上［$(X\text{-}Y)$面上］での微小運動を考える。
(4.80)(4.81)は定数係数の線形微分方程式であるので、解の形は

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t} \quad \cdots (4.86)$$

と仮定して、(4.80), (4.81)へ代入する

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} + ax + by = 0$$

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} - 2\lambda Bn'e^{\lambda t} + aAe^{\lambda t} + bBe^{\lambda t} = 0$$

$$\therefore A(\lambda^2 + a) + B(-2n'\lambda + b) = 0 \quad \cdots (4.87)$$

$$\ddot{y} + 2n'\dot{x} + bx + cy = 0$$

$$\lambda^2 Be^{\lambda t} + 2n'\lambda Ae^{\lambda t} + bAe^{\lambda t} + cBe^{\lambda t} = 0$$

$$\therefore A(2n'\lambda + b) + B(\lambda^2 + c) = 0 \quad \cdots (4.88)$$

(4.87)(4.88)が平衡解以外に解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+a & -2n'\lambda+b \\ 2n'\lambda+b & \lambda^2+c \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots (4.89) \quad : 永年方程式$$

でなければいけない。

この(4.89)を書き直すと、

$$(\lambda^2+a)(\lambda^2+c)-(-2n'\lambda+b)(2n'\lambda+b)=0$$

$$\lambda^4+(a+c)\lambda^2+ac-(b^2-4n'^2\lambda^2)=0$$

$$\lambda^4+(4n'^2+a+c)\lambda^2+ac-b^2=0 \quad \cdots (4.90)$$

$\lambda^2=\sigma$ とおくと、

$$\sigma^2+(4n'^2+a+c)\sigma+ac-b^2=0 \quad \cdots (4.91)$$

(4.91)より、

・(4.91)が負の実根を持つ → λは純虚数 → x, yは三角関数で表現できる

→ つまり、安定

・(4.91)が負の実根を持たない場合 → x, yは指数関数的に増大する項をもつ

→ つまり、不安定

↑

初期条件を恣意的に選択すれば、指数関数的に増大する項の係数を0にすることができる場合もある

4.6.1 正三角形の安定性

正三角形解 L_4, L_5 の場合の a, b, c を求める (4.83)より

まずは、$\dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X^2}$，$\dfrac{\partial^2 U^*}{\partial X \partial Y}$，$\dfrac{\partial^2 U^*}{\partial Y^2}$ を求めておく．

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial U^*}{\partial X}$$

$r_1 = r_1'^{\frac{1}{2}}$ (∵)

$$= \frac{\partial}{\partial X}\left[GM_1 r_1'^{-\frac{3}{2}}\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right) + GM_2 r_2'^{-\frac{3}{2}}\left(X - \frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right) - n'^2 X \right]$$

$$= -3GM_1 r_1^{-5}\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right)^2 - 3GM_2 r_2^{-5}\left(X - \frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right)^2$$

$$+ GM_1 r_1^{-3} + GM_2 r_2^{-3} - n'^2 \quad \cdots ⑪$$

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial U^*}{\partial X}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y}\left\{ GM_1 r_1'^{-\frac{3}{2}}\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right) + GM_2 r_2'^{-\frac{3}{2}}\left(X - \frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right) - n'^2 X \right\}$$

$$= -3GM_1\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right) r_1^{-5} \cdot Y - 3GM_2\left(X - \frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right) r_2^{-5} \cdot Y \cdots ⑫$$

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial U^*}{\partial Y}\right) \qquad (⑪と形同じ)$$

$$= -3GM_1 r_1^{-5} \cdot Y^2 - 3GM_2 r_2^{-5} \cdot Y^2 + GM_1 r_1^{-3} + GM_2 r_2^{-3} - n'^2 \quad \cdots ⑬$$

この⑪〜⑬を用いて、実際に a, b, c を求めていく．

$$a = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_{z}{}^2}$$

$$= \left.\frac{\partial^2 U^*}{\partial X}\right|_{\substack{X = X_z = \left(\frac{1}{2} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right)a' \\ Y = Y_z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a' \\ Z = Z_z = 0}}$$ ← また、正三角形解なので、$r_1 = r_2 = a'$ も代入

$$= -3GM_1 a'^{-5}\left(\frac{1}{2}a' - \frac{m_2}{m_1+m_2}a' + \frac{m_2}{m_1+m_2}a'\right)^2 - 3GM_2 a'^{-5}\left(\frac{1}{2}a' - \frac{m_2}{m_1+m_2}a' - \frac{m_1}{m_1+m_2}a'\right)^2$$

$$+ GM_1 a'^{-3} + GM_2 a'^{-3} - n'^2$$

⋮

⋮

$$a = -\frac{3GM_1}{a'^5}\left(\frac{1}{2}a'\right)^2 - \frac{3GM_2}{a'^5}\left(\frac{1}{2}a' - a'\right)^2 + \frac{GM_1}{a'^3} + \frac{GM_2}{a'^3} - n'^2$$

$$= \frac{1}{4}\frac{G}{a'^3}(M_1 + M_2) - n'^2$$

$$= \frac{1}{4}n'^2 - n'^2 \quad (\because\ n'^2 a'^3 = G(M_1 + M_2))$$

$$= \frac{-3}{4}n'^2 \quad \cdots (4.92)$$

$$b = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i}$$

$$= \left.\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}\right|_{\substack{X = \left(\frac{1}{2} - \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)a' \\ Y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a' \\ Z = 0}}$$

$$= -3GM_1\left(\frac{1}{2}a' - \frac{M_2}{M_1+M_2}a' + \frac{M_2}{M_1+M_2}a'\right)\cdot a'^{-5}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a'\right)$$
$$\quad -3GM_2\left(\frac{1}{2}a' - \frac{M_2}{M_1+M_2}a' - \frac{M_1}{M_1+M_2}a'\right)\cdot a'^{-5}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a'\right)$$

$$= \mp\frac{3\sqrt{3}}{4a'^3}GM_1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{4a'^3}GM_2$$

$$= \mp\frac{3\sqrt{3}}{4a'^3}G(M_1 - M_2)$$

$$= \mp\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}n'^2$$

$$= \mp\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\nu)n'^2 \quad (\because\ 4.95) \quad \cdots (4.93)$$

$\hat{L}$ −がL_4、+がL_5に対応

$$c = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2}$$

$$= \left.\frac{\partial^2 U^*}{\partial Y}\right|_{\substack{X=\left(\frac{1}{2}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)a' \\ Y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a' \\ Z=0}}$$

$$= -3Gm_1\cdot\frac{1}{a'^5}\cdot\frac{3}{4}a'^2 - 3Gm_2\cdot\frac{1}{a'^5}\cdot\frac{3}{4}a'^2 + \frac{Gm_1}{a'^3} + \frac{Gm_2}{a'^3} - n'^2$$

$$= -\frac{5}{4}\cdot\frac{G}{a'^3}(m_1+m_2) - n'^2$$

$$= -\frac{9}{4}n'^2 \quad \cdots (4.94)$$

a, b, cを(4.91)へ代入する

$$\sigma^2 + (4n'^2 + a + c)\sigma + ac - b^2 = 0$$

$$\sigma^2 + \left(4n'^2 - \frac{3}{4}n'^2 - \frac{9}{4}n'^2\right)\sigma + \frac{27}{16}n'^4 - \frac{27}{16}(1-2\nu)^2 n'^4 = 0$$

$$\sigma^2 + \sigma n'^2 + \frac{27}{4}\nu(1-\nu)n'^4 = 0 \quad \cdots (4.97)$$

(4.97)の判別式Dは

$$D = (n'^2)^2 - 4\cdot\frac{27}{4}\nu(1-\nu)n'^4$$

$$= \{1-27\nu(1-\nu)\}n'^4 \quad \cdots (4.98)$$

である。D=0となるのは、

$$1-27\nu(1-\nu) = 0$$

$$27\nu^2 - 27\nu + 1 = 0$$

$$\nu = \frac{27\pm\sqrt{27^2-4\cdot 27}}{2\cdot 27}$$

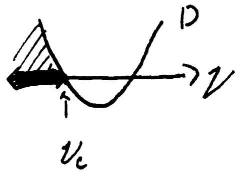
$$= \frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{27(27-4)}}{\sqrt{27^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{23}{27}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{23}{27}}\right) \leftarrow (\because 4.96)$$

$$\cdots (4.99)$$

◦ $D > 0$ のとき　（$\nu < \nu_c$ のとき）→



2次方程式(4.97)は実根 σ_1, σ_2 を持ち
この根と係数の関係は以下のようになる

$$(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)=0$$

$$\sigma^2-(\sigma_1+\sigma_2)\sigma+\sigma_1\sigma_2=0$$

この式と(4.97)を比較すると

$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_2 = -k'^2 < 0 \\ \sigma_1\sigma_2 = \frac{27}{4}\nu(1-\nu) > 0 \quad (\because 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

これより、2つの実根(σ_1, σ_2)は負であることがわかる
よって、λは純虚数となり、解は三角関数で表すことができ、安定

◦ $D = 0$　（$\nu = \nu_c$ のとき）

σは重根を持ち、解はtに比例する成分を持つ。
よってλもtに比例する成分を持つことになるので、不安定。

詳しくは、マセマ 常微分方程式 P.94

○ $D<0$ のとき（$\nu>\nu_c$ のとき）

$D<0$ より σ は実根をもたない（σ は複素数になる）

σ が複素数なら λ も複素数

つまり $\lambda=\alpha+i\beta$ の形になるので（$\alpha,\beta\neq0$）

$$e^{\lambda t}=\underbrace{e^{\alpha t}}_{t\text{に比例する項}}\cdot\underbrace{e^{i\beta t}}_{\text{振動}}$$ となる

t に比例する項 ← 不安定になる

次に固有値 λ の具体的な形を求める

○ $D>0$ のとき、

(4.97) より、

$$\sigma=\frac{-n'^2\pm\sqrt{n'^4-27\nu(1-\nu)n'^4}}{2}$$

$$=\frac{-n'^2}{2}\left\{1\mp\sqrt{1-27\nu(1-\nu)}\right\}$$

$\lambda^2=\sigma$ より

$$\lambda=\pm in'\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1\mp\sqrt{1-27\nu(1-\nu)}\right\}}$$ (4.101) 〜 (4.103)

4.6.2 直線平衡解の安定性

・直線平衡解のa, b, cの具体的な形については ⑪〜⑬ですでに求めている

$$a=\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^2}=-n'^2+\frac{GM_1}{r_1^3}+\frac{GM_2}{r_2^3}-\frac{3GM_1\left(X+\frac{M_2}{M_1+M_2}a'\right)^2}{r_1^5}-\frac{3GM_2\left(X-\frac{M_1}{M_1+M_2}a'\right)^2}{r_2^5} \quad \cdots (4.104)$$

$$b=\frac{\partial^2 U^*}{\partial X \partial Y}=-3Y\left\{\frac{GM_1\left(X+\frac{M_2}{M_1+M_2}a'\right)}{r_1^5}+\frac{GM_2\left(X-\frac{M_1}{M_1+M_2}a'\right)}{r_2^5}\right\} \quad \cdots (4.105)$$

$$c=\frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^2}=-n'^2+\frac{GM_1}{r_1^3}+\frac{GM_2}{r_2^3}-3Y\left(\frac{GM_1}{r_1^5}+\frac{GM_2}{r_2^5}\right) \quad \cdots (4.106)$$

(教科書では、$a'=1$, $G=1$, $M_1+M_2=1$ と規格化された式で書かれているが、規格化することについて何も説明がない。ノートでは規格化せずに計算する。)

・直線平衡解は、$Y=0$ であるため、(4.105)(4.106)より、

$$b=0$$

$$c=-n'^2+\frac{GM_1}{r_1^3}+\frac{GM_2}{r_2^3} \quad \cdots (4.107)$$

・直線平衡解では $b=0$ であることは確実だが、a, bの正負などについては、各点によって異なるかもしれない。

・そこで、まずはL_1点でのa, cの正負を考える。

。r_1, r_2については、(4.18)(4.19)や図4.2より、

$$r_1=X+\frac{M_2}{M_1+M_2}a', \quad r_2=\frac{M_1}{M_1+M_2}a'-X \quad \cdots (4.108)$$

。(4.108)を(4.104)へ代入すると、

$$a=-n'^2+\frac{GM_1}{r_1^3}+\frac{GM_2}{r_2^3}-\frac{3GM_1\cdot r_1^2}{r_1^5}-\frac{3GM_2\cdot r_2^2}{r_2^5}$$

$$=-\frac{2GM_1}{r_1^3}-\frac{2GM_2}{r_2^3}-n'^2<0 \quad \cdots(4.109)$$

・直線平衡解を求めるための式(4.35)を(4.108)の関係を使い書き換えると、

$$x-\frac{a'^3}{r_1^3}\frac{M_1}{M_1+M_2}\cdot r_1-\frac{a'^3}{r_2^3}\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot(-r_2)=0$$

$$\downarrow (\because 4.108)$$

$$r_1-\frac{M_2}{M_1+M_2}a'-\frac{a'^3}{r_1^2}\cdot\frac{M_1}{M_1+M_2}+\frac{a'^3}{r_2^2}\frac{M_2}{M_1+M_2}=0$$

$$\therefore \frac{a'^3}{r_1^2}\cdot\frac{M_1}{M_1+M_2}=r_1-\frac{M_2}{M_1+M_2}a'+\frac{a'^3}{r_2^2}\cdot\frac{M_2}{M_1+M_2} \quad \cdots(4.110)$$

・この(4.110)を(4.107)へ代入

。まずは(4.107)を整理

$$c=-n'^2+G\left(\frac{M_1}{r_1^3}+\frac{M_2}{r_2^3}\right)$$

$$\downarrow (\because n'^2a'^3=G(M_1+M_2))$$

$$=-n'^2+\frac{n'^2a'^3}{M_1+M_2}\left(\frac{M_1}{r_1^3}+\frac{M_2}{r_2^3}\right)$$

$$=-n'^2+\left(\frac{a'^3}{r_1^2}\cdot\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)\cdot\frac{n'^2}{r_1}+\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot\frac{n'^2a'^3}{r_2^3}$$

。ここで(4.110)を代入

$$c=-n'^2+\left(r_1-\frac{M_2}{M_1+M_2}a'+\frac{a'^3}{r_2^2}\cdot\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)\cdot\frac{n'^2}{r_1}+\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot\frac{n'^2a'^3}{r_2^3}$$

$$=-n'^2+n'^2-\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot\frac{a'n'^2}{r_1}+\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot\frac{a'^3n'^2}{r_1r_2^2}+\frac{M_2}{M_1+M_2}\cdot\frac{n'^2a'^3}{r_2^3}$$

$\vdots$

⋮

$$c = \frac{m_2}{m_1+m_2}n'^2\left(-\frac{a'}{r_1}+\frac{a'^3}{r_1 r_2^2}+\frac{a'^3}{r_2^3}\right)$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}n'^2\left\{-\frac{a'}{r_1}+\frac{a'^3}{r_2^2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\right\}$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}n'^2\left\{-\frac{a'}{r_1}+\frac{a'^3}{r_2^2}\cdot\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right\}$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}n'^2\left(-\frac{a'}{r_1}+\frac{a'^3}{r_2^2}\cdot\frac{a'}{r_1 r_2}\right) \quad (\because r_1+r_2=a' \ (\because 4.108))$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{n'^2 a'}{r_1}\left(-1+\frac{a'^3}{r_2^3}\right)(>0) \quad \cdots (4.111)$$

$(\because a'>r_2)$

・L_2, L_3についても同様の計算で求められるらしいが、今回は省略

計算した結果は、L_1, L_2, L_3について、

$$a<0,\quad c>0 \quad \cdots (4.112)$$

・よって永年方程式(4.91)の判別式Dは、

$$D = \underbrace{(4n'^2+a+c)^2\underbrace{-4\underbrace{a}_{-}\underbrace{c}_{+}}_{+}}_{+} > 0 \quad \cdots (4.113)$$

つまり、2つの実根をもつことがわかる

・ここで、2つの実根をσ_1, σ_2とおくと、

$$(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)=0$$

$$\sigma^2-(\sigma_1+\sigma_2)\sigma+\sigma_1\sigma_2=0$$

この式と(4.91)を比較すると、

$$\sigma_1\sigma_2 = \underbrace{\underset{\ominus}{a}\,\underset{\oplus}{c}}_{\ominus} - b^2 < 0$$

(∵ 4.1(2))

つまり、σ_1, σ_2のどちらかが正でどちらかが負であることがわかる

・σに正の実根があることから、直線平衡解の近傍の一般解は不安定であることがわかる。