5.1 摂動論入門

5.1.1 非線形振動

a) 逐次近似法

調和振動子に非線形な摂動力 ϵx^2 が働いている非線形振動を考える。

◦運動方程式は、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^2 = 0 \qquad \cdots (5.1)$$

である。

◦(5.1)の解を ϵ で展開して逐次に求めていく

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3) \qquad \cdots (5.2)$$

この(5.2)を(5.1)に代入する

$$(\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2) + \underbrace{\epsilon (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2)^2}_{\epsilon x_0^2 + 2\epsilon^2 x_0 x_1} + O(\epsilon^3) = 0$$

$$\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2 + \omega_0^2 (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2) + \epsilon (x_0^2 + 2\epsilon x_0 x_1) + O(\epsilon^3) = 0 \qquad \cdots (5.3)$$

$$\underbrace{\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0}_{=0} + \epsilon (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^2) + \epsilon^2 (\underbrace{\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 2 x_0 x_1}_{=0}) + O(\epsilon^3) = 0 \qquad \cdots ①$$

①で ϵ について同じ次数のものを集める

0次 : $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \qquad \cdots (5.4)$

1次 : $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2 \qquad \cdots (5.5)$

2次 : $\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -2 x_0 x_1 \qquad \cdots (5.6)$

0次の方程式(5.4)の一般解は

$$x_0 = a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = a_0 \cos\theta \qquad \cdots (5.7)$$

この(5.7)を 1次の方程式(5.5)に代入すると、

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -a_0^2\cos^2\theta$$
$$= -\frac{1}{2}a_0^2(1+\cos 2\theta) \quad \cdots (5.8)$$

この非斉次方程式の一般解について求めていく

・この一般解は、

$$x_1 = \underbrace{\text{斉次のときの一般解}}_{\substack{\| \,(\because 5.7) \\ a_1\cos(\omega_0 t+\alpha_1)}} + \underbrace{\text{非斉次のときの特殊解}}_{\substack{\| \\ T}} \quad \cdots ②$$

$$\left(\begin{aligned} T &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega_0 t + B_n\sin n\omega_0 t) \end{aligned} \right)$$

・②を元の方程式(5.8)へ代入する

$$\{a_1\cos(\omega_0 t+\alpha_1)+T\}'' + \omega_0^2\{a_1\cos(\omega_0 t+\alpha_1)+T\} = -\frac{1}{2}a_0^2(1+\cos 2\theta)$$

$$-a_1\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha_1) - n^2\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega_0 t + B_n\sin n\omega_0 t)$$
$$+a_1\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha_1) + \frac{\omega_0^2 A_0}{2} + \omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega_0 t + B_n\sin n\omega_0 t)$$
$$= -\frac{1}{2}a_0^2(1+\cos 2\omega_0 t)$$

$$\frac{\omega_0^2 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(1-n^2)\omega_0^2 A_n\cos n\omega_0 t + (1-n^2)\omega_0^2 B_n\sin n\omega_0 t\right\} = -\frac{a_0^2}{2} - \frac{a_0^2}{2}\cos 2\omega_0 t$$

両辺を比較して、

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_0^2 A_0}{2} = -\dfrac{a_0}{2} \\ (1-2^2)\omega_0^2 A_2 = -\dfrac{1}{2}a_0^2 \\ A_1,\ A_n\ (n>2) = 0 \\ B_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = -\dfrac{a_0^2}{\omega_0^2} \\ A_2 = -\dfrac{a_0^2}{2}\cdot\dfrac{1}{(-3\omega_0^2)} = \dfrac{a_0^2}{6\omega_0^2} \end{cases}$$

以上の結果を②へ戻すと、

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) - \frac{a_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{a_0^2}{6\omega_0^2}\cos 2\theta \quad \cdots (5.9)$$

0次の解で2個の積分定数を導入しているので、$a_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$とする。

↑

xの解は(5.2)の様に展開されている。
結局この解は　一般解＋特殊解　の形になれば……。
0次の解で2個の積分定数を導入して一般解を求めたのであれば、
それ以外、つまりx_1, x_2の解は特殊解であればよく、計算しやすいような
積分定数を与えれば……。

よって、

$$x_1 = -\frac{a_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{a_0^2}{6\omega_0^2}\cos 2\theta \quad \cdots (5.9)'$$

次は、ϵについて2次までの解を求めるために、2次の方程式(5.6)へ
0次の解と1次の解：(5.7), (5.9)′を代入する。

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -2 \cdot a_0 \cos\theta \cdot \left(-\frac{a_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{a_0^2}{6\omega_0^2}\cos 2\theta\right)$$

$$\quad '' \quad = \frac{a_0^3}{\omega_0^2}\cos\theta - \frac{a_0^3}{3\omega_0^2}\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)$$

$$\quad '' \quad = \left(\frac{a_0^3}{\omega_0^2} + \frac{a_0^3}{3\omega_0^2}\right)\cos\theta - \frac{2a_0^3}{3\omega_0^2}\cdot\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

3倍角の定理の計算は省略

$$\therefore \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}\cos\theta - \frac{a_0^3}{6\omega_0^2}\cos 3\theta \quad \cdots (5.10)$$

この(5.10)の解は、

$$x_2 = \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3} t \sin\theta + \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\theta \quad \cdots (5.11)$$

である。導出方法は別紙参照

(5.11)式の物理的な解釈

$$x_2 = \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3} t \sin\theta + \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\theta \qquad \cdots (5.11)$$

この右辺第1項は係数にtが入っているので、時間とともに増大しつづける。
このような項を混合永年項と呼ぶ。

今回、この混合永年項がでてきた原因は、方程式(5.10)を見るとわかる。

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}\cos\theta - \frac{a_0^3}{6\omega_0^2}\cos 3\theta \qquad \cdots (5.10)$$

$(\theta = \omega_0 t)$

この式は、左辺が調和振動子を、右辺がその調和振動に加えられた周期的に変化する摂動力を表現している。
このとき、調和振動子の固有振動と摂動力の第1項の振動数がω_0で一致しているため共鳴を起こしていることがわかる。
共鳴現象により、x_2の解にt依存する項が生じる。

○運動方程式(5.1)のエネルギー積分を求める。

・(5.1)の両辺に$\dot{x}$をかける

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x}x + \epsilon \dot{x}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}\epsilon x^3\right) = \frac{d}{dt}(\underset{=E\text{とおく}}{\mathrm{const}})$$

$$\therefore \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}\epsilon x^3 = E \qquad \cdots (5.12)$$

◦運動エネルギーは正であることから、

(5.12)より、

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}\epsilon x^3 = E - \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}\epsilon x^3 \leq E \quad \cdots (5.13)$$

b) 混合永年項が出ない方法

次は、摂動によって固有振動数が変化すると考えて議論していく。

◦固有振動数を微小パラメタ ϵ で展開する。

$$\omega = \omega_0(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2) + O(\epsilon^3) \quad \cdots (5.14)$$

解に共鳴が生じて混合永年項が出てこないように ω_1, ω_2 を決めていく。
時間の単位を適当にとることで、$\omega_0 = 1$ としても一般性を失わない。
よって、

$$\omega = 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + O(\epsilon^3) \quad \cdots (5.14)'$$

として今後の計算は行う。

・ここで新たな独立変数τを下のように定義する

$$\tau = \omega t \qquad \cdots (5.15)$$

（ついでに、
$\dfrac{d}{dt} = \omega \dfrac{d}{d\tau}$, $\dfrac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \dfrac{d}{d\tau}$ ）

・このτを使って(5.1)を書き換える

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \omega_0^2 x + \epsilon x^2 = 0$$

$$\therefore \omega^2 x'' + x + \epsilon x^2 = 0 \qquad (\because \overset{\text{前ページで}}{\omega_0 = 1} \text{と規格化})$$

$$\cdots (5.16)$$

・xの展開(5.2)とωの展開(5.14)′を(5.16)へ代入

$$\underbrace{(1+\epsilon\omega_1+\epsilon^2\omega_2)^2}(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2)'' + (x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2) + \epsilon\underbrace{(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2)^2} + O(\epsilon^3) = 0$$

$$\left(\begin{aligned} &1+\epsilon^2\omega_1^2+\epsilon^4\omega_2^2+2\epsilon\omega_1+2\epsilon^2\omega_2+2\epsilon^3\omega_1\omega_2 \\ &= 1+2\epsilon\omega_1+2\epsilon^2\omega_2+\epsilon^2\omega_1^2+O(\epsilon^3) \end{aligned}\right)$$

$$\left(\begin{aligned} &x_0^2+\epsilon^2 x_1^2+\epsilon^4 x_2^2+2\epsilon x_0 x_1+2\epsilon^2 x_0 x_2+2\epsilon^3 x_1 x_2 \\ &= x_0^2+2\epsilon x_0 x_1+O(\epsilon^2) \end{aligned}\right)$$

↑この後係数のεをかけるから

$$(1+2\epsilon\omega_1+2\epsilon^2\omega_2+\epsilon^2\omega_1^2)(x_0''+\epsilon x_1''+\epsilon^2 x_2'')+x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2$$
$$+\epsilon(x_0^2+2\epsilon x_0 x_1) + O(\epsilon^3) = 0 \qquad \cdots (5.17)$$

$$x_0''+2\epsilon\omega_1 x_0''+2\epsilon^2\omega_2 x_0''+\epsilon^2\omega_1^2 x_0''+\epsilon x_1''+2\epsilon^2\omega_1 x_1''+\epsilon^2 x_2''+x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\epsilon x_0^2+2\epsilon^2 x_0 x_1+O(\epsilon^3)$$
$$= 0$$

$$\underbrace{x_0''+x_0}_{=0} + \epsilon\underbrace{(2\omega_1 x_0''+x_1''+x_1+x_0^2)}_{=0} + \epsilon^2\underbrace{(2\omega_2 x_0''+\omega_1^2 x_0''+2\omega_1 x_1''+x_2''+x_2+2x_0 x_1)}_{=0} = 0$$

・この式を ϵ について各次数でまとめると、

0次： $x_0'' + x_0 = 0$ …(5.18)

1次： $x_1'' + x_1 = -x_0^2 - 2\omega_1 x_0''$ …(5.19)

2次： $x_2'' + x_2 = -(2\omega_2 + \omega_1^2)x_0'' - 2\omega_1 x_1'' - 2x_0 x_1$ …(5.20)

・0次の方程式(5.18)の解は、

$x_0 = a\cos\tau$ …(5.21)

運動方程式に時刻は陽には入っていないので $\tau=0$ における位相をゼロとしても一般性は失わない。

各項の係数"には時刻が陽に含まれていないので、解は平行移動できる。

・この0次の解(5.21)を(5.19)へ代入する

$x_1'' + x_1 = -(a\cos\tau)^2 - 2\omega_1(a\cos\tau)''$

$\quad〃 \quad = -a^2\cos^2\tau + 2\omega_1 a\cos\tau$

$\quad〃 \quad = -a^2\cdot\frac{1}{2}(\cos2\tau+1) + 2\omega_1 a\cos\tau$

$\therefore x_1'' + x_1 = -\frac{a^2}{2}(1+\cos2\tau) + 2\omega_1 a\cos\tau$ …(5.22)

・共鳴項が出ないためには $\omega_1 = 0$ でなければならない。

$x_1'' + x_1 = -\frac{a^2}{2}(1+\cos2\tau)$ …(5.22)'

この(5.22)'の一般解は

$x_1 =$ 同次の一般解 + 非同次の特殊解 …③

$\quad \overset{''}{b\cos(\tau+\beta)} \quad\quad \overset{''}{T}\left(=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\tau + B_n\sin n\tau)\right)$

の形で表せるので、この③を(5.22)'へ代入する

$$-b\cos(\tau+\beta)-n^2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)+b\cos(\tau+\beta)$$
$$+\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)=-\frac{a^2}{2}(1+\cos 2\tau)$$

$$\frac{A_0}{2}+(1-n^2)\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)=-\frac{a^2}{2}(1+\cos 2\tau)$$

両辺比較すると、

$$\begin{cases}\dfrac{A_0}{2}=-\dfrac{a^2}{2}\\ (1-2^2)A_2=-\dfrac{a^2}{2} \quad \Rightarrow A_2=\dfrac{a^2}{6}\\ A_n\ (n\neq 2)=0\\ B_n=0\end{cases}$$

以上より、x_1の解は

$$x_1=b\cos(\tau+\beta)-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{6}\cos 2\tau$$

と表すことができる。

しかし、0次の解ですでにaという積分定数を導入して一般解を出しているので、1次の解は特殊解で……。よって$b=0$として式を見やすくする。

$$x_1=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{6}\cos 2\tau \quad \cdots(5.23)$$

○ x_0, x_1の解(5.21)、(5.23)を(5.20)へ代入してx_2についての運動方程式を求める。

$$x_2''+x_2=-2\omega_2(-a\cos\tau)-2\cdot a\cos\tau\cdot\left(-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{6}\cos 2\tau\right)$$
$$〃\quad =2a\omega_2\cos\tau+a^3\cos\tau-\frac{a^3}{3}\cos\tau\cos 2\tau$$

$\vdots$

$\cos\tau(2\cos^2\tau-1)$
$=2\cos^3\tau-\cos\tau$
$=2\cdot\frac{1}{4}(\cos 3\tau+3\cos\tau)-\cos\tau$
$=\frac{1}{2}\cos 3\tau+\frac{1}{2}\cos\tau$

⋮

$$x_2'' + x_2 = 2a\omega_2 \cos\tau + a^3\cos\tau - \frac{a^3}{6}\cos 3\tau - \frac{a^3}{6}\cos\tau$$

$$x_2'' + x_2 = \left(2a\omega_2 + \frac{5}{6}a^3\right)\cos\tau - \frac{a^3}{6}\cos 3\tau \qquad \cdots (5.24)$$

。共鳴が起こらないためには、左辺の固有振動数と振動数が一致している$\cos\tau$の項の係数がゼロでなくてはならないので、

$$2a\omega_2 + \frac{5}{6}a^3 = 0$$

$$\therefore \omega_2 = -\frac{5}{12}a^2 \qquad \cdots (5.25)$$

よって(5.24)は、

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{6}\cos 3\tau \qquad \cdots (5.24)'$$

と書き換えられ、これについて解を求める。

解の形は以下のように予想できるので、

$$x_2 = a_3\cos(\tau + \alpha_3) + A_3\cos 3\tau + B_3\sin 3\tau$$

これを(5.24)'へ代入する

$$-a_3\cos(\tau+\alpha_3) - 9A_3\cos 3\tau - 9B_3\sin 3\tau$$

$$+ a_3\cos(\tau+\alpha_3) + A_3\cos 3\tau + B_3\sin 3\tau = -\frac{a^3}{6}\cos 3\tau$$

$$8A_3\cos 3\tau + 8B_3\sin 3\tau = \frac{a^3}{6}\cos 3\tau$$

両辺比較すると、

$$\begin{cases} 8A_3 = \dfrac{a^3}{6} \\ 8B_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3 = \dfrac{a^3}{48} \\ B_3 = 0 \end{cases}$$

以上より、

$$x_2 = a_3\cos(\tau+\alpha_3) + \frac{a^3}{48}\cos 3\tau = \underbrace{\frac{a^3}{48}\cos 3\tau}_{(\text{特解})} \qquad \cdots (5.26)$$

◦ 以上をまとめる

xについては (5.2)へ(5.21)(5.23)(5.26)を代入

ωについては (5.14)へ $\omega_0=1$, $\omega_1=0$, (5.25)を代入

$$x = a\cos t + \epsilon a^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2t\right) + \frac{\epsilon^2 a^3}{48}\cos 3t + O(\epsilon^3) \quad \cdots(5.27)$$

$$\omega = 1 - \frac{5}{12}\epsilon^2 a^2 + O(\epsilon^3) \quad \cdots(5.28)$$

◦ (5.28)を(5.27)へ代入して、ϵについて2次まで展開する

$$x = a\cos\left(t - \frac{5}{12}\epsilon^2 a^2 t\right) + \epsilon a^2\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos\left(2t - \frac{5}{6}\epsilon^2 a^2 t\right)\right\}$$
$$+ \frac{\epsilon^2 a^3}{48}\cos\left(3t - \frac{5}{4}\epsilon^2 a^2 t\right) + O(\epsilon^3)$$

cosについて別にマクローリン展開しておく。

$$\underbrace{\cos\left(t - \frac{5}{12}\epsilon^2 a^2 t\right)}_{=f(\epsilon)\text{とおく}} = f(\epsilon=0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}\cdot\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

$$= \left[\cos\left(t - \frac{5}{12}a^2 t\epsilon^2\right)\right]_{\epsilon=0}$$
$$+ \left[-\sin\left(t - \frac{5}{12}a^2 t\epsilon^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}a^2 t\epsilon\right)\right]_{\epsilon=0}\cdot\epsilon$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[-\cos\left(t - \frac{5}{12}a^2 t\epsilon^2\right)\left(-\frac{5}{6}a^2 t\epsilon\right)^2 + \frac{5}{6}a^2 t\cdot\sin\left(t - \frac{5}{12}a^2 t\epsilon^2\right)\right]_{\epsilon=0}\cdot\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$
$$= \cos t + \left(\frac{5}{12}a^2 t\sin t\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

同様にして、

$$\cos\left(2t - \frac{5}{6}\epsilon^2 a^2 t\right) = \cos 2t + \left(\frac{5}{6}a^2 t\sin 2t\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

$$\cos\left(3t - \frac{5}{4}\epsilon^2 a^2 t\right) = \cos 3t + \left(\frac{5}{4}a^2 t\sin 3t\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

⋮

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
x &= a\left\{\cos t + \left(\frac{5}{12}a^2 t \sin t\right)\epsilon^2\right\} \\
&\quad - \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{\epsilon a^2}{6}\left\{\cos 2t + \left(\frac{5}{6}a^2 t \sin 2t\right)\epsilon^2\right\} \\
&\quad + \frac{\epsilon^2 a^3}{48}\left\{\cos 3t + \left(\frac{5}{4}a^2 t \sin 3t\right)\epsilon^2\right\} \\
&= a\cos t + \epsilon a^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2t\right) + \epsilon^2 a^3\left\{\frac{5}{12}t\sin t + \frac{1}{48}\cos 3t\right\} + O(\epsilon^3)
\end{aligned}
$$

$\cdots(5.29)$

C) 初期値と積分定数

$\boxed{t=0\ (\tau=0) \text{ のとき } x=a,\ \dot{x}=0 \text{ となる解を求める。}}$

○0次の解を(5.21)にとると、[$x_0 = a\cos\tau$ …(5.21)]
この初期条件を0次の解は満たしている。
したがって、x_1, x_2 の初期条件は、(5.2): $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2$ より、

$$
\begin{cases}
x(0) = a + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) = a \\
\dot{x}(0) = 0 + \epsilon \dot{x}_1(0) + \epsilon^2 \dot{x}_2(0) = 0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1(0) = 0, & x_2(0) = 0 \\
\dot{x}_1(0) = 0, & \dot{x}_2(0) = 0
\end{cases}
\quad \cdots ④
$$

この初期条件をもとに、1次, 2次の方程式を解いていく。

◦ x_1 について とく

・(5.19) へ (5.21) を代入

$$x_1'' + x_1 = -a^2 \cos^2 \tau \qquad (\because \omega_1 = 0)$$

$$x_1'' + x_1 = -\frac{a^2}{2}(\cos 2\tau + 1)$$

・この方程式をとくと、一般解は

$$x_1 = a_1 \cos(\tau + \alpha_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2\tau \qquad \cdots ⑤$$

(∵ 5.1-⑧ 参考)

となるので、これに初期条件(④)を与えると、

$$\begin{cases} x_1(0) = a_1 \cos \alpha_1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} = 0 & \cdots ⑥ \\ \dot{x}_1(0) = -a_1 \sin \alpha_1 = 0 & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑦より、

$$\alpha_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \cdots) \qquad \cdots ⑧$$

⑧を⑥へ代入

$$a_1 \cos(n\pi) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} = 0$$

$$a_1 (-1)^n = \frac{a^2}{3}$$

$$\therefore a_1 = \frac{a^2}{3}(-1)^n \qquad \cdots ⑨$$

⑧.⑨を⑤へ代入

$$x_1 = \frac{a^2}{3}(-1)^n \cdot \cos(\tau + n\pi) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2\tau$$

$$= \frac{a^2}{3}(-1)^n \{\cos\tau \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - \sin\tau \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2\tau$$

$$= \frac{a^2}{3}\cos\tau - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6}\cos 2\tau$$

$$= a^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\tau + \frac{1}{6}\cos 2\tau\right) \qquad \cdots (5.30)$$

。x_2についてとく

・(5.20)〜(5.21),(5.30)を代入

$$x_2'' + x_2 = -\left(-\frac{5}{6}a^2+0\right)(-a\cos\tau) - 0 - 2\cdot a\cos\tau\cdot a^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos\tau+\frac{1}{6}\cos2\tau\right)$$

$$= -\frac{5}{6}a^3\cos\tau + a^3\left(\cos\tau - \frac{2}{3}\cos^2\tau - \frac{1}{3}\cos\tau\cos2\tau\right) \quad (\because \omega_0=1,\ \omega_1=0)$$

$$= a^3\left\{-\frac{5}{6}\cos\tau + \cos\tau - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\cos2\tau+1) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\cos3\tau+\cos\tau)\right\}$$

$$x_2'' + x_2 = a^3\left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos2\tau - \frac{1}{6}\cos3\tau\right\} \quad \cdots ⑩$$

この方程式は共鳴を起こさない。

解を

$$x_2 = a_2\cos(\tau+\alpha_2) + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right\} \quad \cdots ⑪$$

とおいて、⑩へ代入すると、

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(1-n^2)A_n\cos(nt) + (1-n^2)B_n\sin(nt)\right\} = a^3\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos2\tau - \frac{1}{6}\cos3\tau\right) \quad \cdots ⑫$$

両辺を比較すると、

$$\begin{cases} \dfrac{A_0}{2} = -\dfrac{a^3}{3} \\ (1-2^2)A_2 = -\dfrac{a^3}{3} \\ (1-3^2)A_3 = -\dfrac{a^3}{6} \\ A_n = 0 \quad (n\neq 1,3) \\ B_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \dfrac{a^3}{9} \\ A_3 = \dfrac{a^3}{48} \end{cases} \quad \cdots ⑬$$

この⑬を⑪へ代入すると、

$$x_2 = a_2\cos(\tau+\alpha_2) - \frac{1}{3}a^3 + \frac{a^3}{9}\cos2\tau + \frac{a^3}{48}\cos3\tau$$

$$= a_2\cos(\tau+\alpha_2) + a^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cos2\tau + \frac{1}{48}\cos3\tau\right) \quad \cdots ⑭$$

⑭へ初期条件(④)を与えると、

$$\begin{cases} x_2(0) = a_2\cos\alpha_2 + a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{48}\right) = 0 \\ \qquad a_2\cos\alpha_2 - \frac{29}{144}a^3 = 0 \qquad \cdots ⑮ \\ \dot{x}_2(0) = -a_2\sin\alpha_2 = 0 \qquad \cdots ⑯ \end{cases}$$

⑯より

$$\alpha_2 = n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots ⑰$$

⑮へ⑰を代入

$$a_2\cos(n\pi) - \frac{29}{144}a^3 = 0$$

$$\therefore \quad a_2 = \frac{29}{144}a^3(-1)^n \qquad \cdots ⑱$$

⑭へ⑰,⑱を代入

$$x_2 = \frac{29}{144}a^3(-1)^n\cdot\underbrace{\cos(\tau+n\pi)}_{(-1)^n\cos\tau} + a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cos2\tau+\frac{1}{48}\cos3\tau\right)$$

$$= a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{29}{144}\cos\tau+\frac{1}{9}\cos2\tau+\frac{1}{48}\cos3\tau\right) \qquad \cdots (5.31)$$

◦以上まとめると、

$$x = a\cos\tau + \varepsilon a^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos\tau+\frac{1}{6}\cos2\tau\right) + \varepsilon^2 a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{29}{144}\cos\tau+\frac{1}{9}\cos2\tau+\frac{1}{48}\cos3\tau\right)$$

$$\cdots (5.32)$$

。同じxの表現式でも(5.27)と(5.32)では、解に含まれる積分定数の意味が違う。

(5.27)：(5.21)を導出する際にでてきた積分定数

(5.32)：$t=0$における振幅

ここで、2つのaの関係を調べてみる。
(5.27)のaをa_Lと表記することとして、$t=0$で評価する。

$$x(0) = a_L + \epsilon a_L^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) + \frac{\epsilon^2 a_L^3}{48} = a + \epsilon a^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) + \epsilon^2 a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{29}{144}+\frac{1}{9}+\frac{1}{48}\right)$$

$$\therefore\ a = a_L - \frac{1}{3}\epsilon a_L^2 + \frac{1}{48}\epsilon^2 a_L^3 \qquad \cdots(5.33)$$

5.1.2 定数変化法の基本

a) 強制振動

調和振動子に強制振動が働いている系を考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \cos at \qquad \cdots(5.46)$$

・(5.46)を連立の1階の微分方程式に書き換える。

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \cdots(5.47)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + \varepsilon \cos at \qquad \cdots(5.48)$$

・$\varepsilon = 0$ の場合 (調和振動の場合)

・(5.46)より

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad \cdots(5.49)$$

・(5.48)と(5.49)より、

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

$$\therefore y = \omega(-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \qquad \cdots(5.50)$$

・$\varepsilon \neq 0$ の場合

(5.49), (5.50)の積分定数を時間の関数として

$$x = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t \qquad \cdots(5.51)$$

$$y = \omega\{-C_1(t) \sin \omega t + C_2(t) \cos \omega t\} \qquad \cdots(5.52)$$

が(5.47)(5.48)の解と考える

・(5.51)と(5.52)を(5.47),(5.48)へ代入する

$$\frac{dC_1}{dt}\cos\omega t-\omega C_1\sin\omega t+\frac{dC_2}{dt}\sin\omega t+\omega C_2\cos\omega t$$

$$=-\omega C_1\sin\omega t+\omega C_2\cos\omega t$$

$$\therefore\ \frac{dC_1}{dt}\cos\omega t+\frac{dC_2}{dt}\sin\omega t=0 \qquad \cdots(5.53)$$

$$\omega\left\{-\frac{dC_1}{dt}\sin\omega t-\omega C_1\cos\omega t+\frac{dC_2}{dt}\cos\omega t-\omega C_2\sin\omega t\right\}$$

$$=-\omega^2(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)+\epsilon\cos at$$

$$-\omega\frac{dC_1}{dt}\sin\omega t+\omega\frac{dC_2}{dt}\cos\omega t=\epsilon\cos at$$

$$\therefore -\frac{dC_1}{dt}\sin\omega t+\frac{dC_2}{dt}\cos\omega t=\frac{\epsilon}{\omega}\cos at \qquad \cdots(5.54)$$

・(5.53)と(5.54)を$\frac{dC_1}{dt}$と$\frac{dC_2}{dt}$について解く

*まずは、(5.53)×$\sin\omega t$ + (5.54)×$\cos\omega t$

$$\frac{dC_1}{dt}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{dC_2}{dt}\sin^2\omega t=0$$

$$+)\ -\frac{dC_1}{dt}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{dC_2}{dt}\cos^2\omega t=\frac{\epsilon}{\omega}\cos at\cdot\cos\omega t$$

$$\frac{dC_2}{dt}=\frac{\epsilon}{\omega}\cos at\cdot\cos\omega t$$

$$\therefore\ \frac{dC_2}{dt}=\frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\cos(\omega+a)t+\cos(\omega-a)t\right\}$$

$$\cdots(5.56)$$

* 次は、(5.53)×(+cos ωt)+(5.54)×(−sin ωt)

$$
\begin{array}{rl}
 & \dfrac{dc_1}{dt}\cos^2\omega t + \dfrac{dc_2}{dt}\sin\omega t\cos\omega t = 0 \\
+) & \dfrac{dc_1}{dt}\sin^2\omega t - \dfrac{dc_2}{dt}\sin\omega t\cos\omega t = -\dfrac{\epsilon}{\omega}\cos at\cdot\sin\omega t \\
\hline
 & \dfrac{dc_1}{dt} = -\dfrac{\epsilon}{\omega}\cos at\cdot\sin\omega t
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{dc_1}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\sin(\omega+a)t + \sin(\omega-a)t\right\} \quad \cdots (5.55)$$

「・(5.55)と(5.56)を積分する (ω≠aのとき)

$$c_1 = \frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\frac{\cos(\omega+a)t}{\omega+a} + \frac{\cos(\omega-a)t}{\omega-a} + c_1'\right\} \quad \cdots (5.57)$$

$$c_2 = \frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\frac{\sin(\omega+a)t}{\omega+a} + \frac{\sin(\omega-a)t}{\omega-a} + c_2'\right\} \quad \cdots (5.58)$$

・(5.57)と(5.58)を(5.49)へ代入する

$$x = \frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\frac{\cos(\omega+a)t}{\omega+a} + \frac{\cos(\omega-a)t}{\omega-a} + c_1'\right\}\cos\omega t$$

$$+\frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\frac{\sin(\omega+a)t}{\omega+a} + \frac{\sin(\omega-a)t}{\omega-a} + c_2'\right\}\sin\omega t$$

$$= \frac{\epsilon}{2\omega}\left[\frac{1}{\omega+a}\left\{\cos(\omega+a)t\cdot\cos\omega t + \sin(\omega+a)t\cdot\sin\omega t\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{\omega-a}\left\{\cos(\omega-a)t\cdot\cos\omega t + \sin(\omega-a)t\cdot\sin\omega t\right\}$$

$$\left. + c_1'\cos\omega t + c_2'\sin\omega t\right]$$

$$= \frac{\epsilon}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega+a}\cos at + \frac{1}{\omega-a}\cos(-a)t + c_1'\cos\omega t + c_2'\sin\omega t\right)$$

⋮

$$x = \frac{\epsilon}{2\omega}\left[\frac{(\omega-a)\cos at+(\omega+a)\cos at}{\omega^2-\lambda^2}+C_1'\cos\omega t+C_2'\sin\omega t\right]$$

$$= \frac{\epsilon}{\omega^2-a^2}\cos at+\frac{\epsilon C_1'}{2\omega}\cos\omega t+\frac{\epsilon C_2'}{2\omega}\sin\omega t$$

C_i置き直し

$$= \frac{\epsilon}{\omega^2-a^2}\cos at+C_1'\cos\omega t+C_2'\sin\omega t \quad \cdots(5.59)$$

・$\omega = a$ のとき、(5.55), (5.56)を積分すると、

$$\frac{dC_1}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\omega}\cdot\sin 2\omega t$$

$$\therefore C_1 = \frac{\epsilon}{4\omega^2}\cos 2\omega t + C_1' \quad \cdots(5.60)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{\epsilon}{2\omega}\left\{\cos 2\omega t + 1\right\}$$

$$\therefore C_2 = \frac{\epsilon}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{\epsilon}{2\omega}t + C_2' \quad \cdots(5.61)$$

・(5.49)へ(5.60), (5.61)を代入すると、

$$x = \left(\frac{\epsilon}{4\omega^2}\cos 2\omega t + C_1'\right)\cos\omega t + \left(\frac{\epsilon}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{\epsilon}{2\omega}t + C_2'\right)\sin\omega t$$

$$= \frac{\epsilon}{4\omega^2}\left(\cos 2\omega t\cdot\cos\omega t + \sin 2\omega t\cdot\sin\omega t\right) + \frac{\epsilon}{2\omega}t\sin\omega t$$

$$+ C_1'\cos\omega t + C_2'\sin\omega t$$

$$= \frac{\epsilon}{4\omega^2}\cos(2\omega-\omega)t + \frac{\epsilon}{2\omega}t\sin\omega t + C_1'\cos\omega t + C_2'\sin\omega t$$

$$= \frac{\epsilon}{2\omega}t\sin\omega t + \left(\frac{\epsilon}{4\omega^2}+C_1'\right)\cos\omega t + C_2'\sin\omega t$$

$$= \frac{\epsilon}{2\omega}t\sin\omega t + C_1'\cos\omega t + C_2'\sin\omega t \quad \cdots(5.62)$$

b) 非線形振動

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \cdots (5.63)$$

$$\frac{dv}{dt} = -x - \epsilon x^2 \quad \cdots (5.64)$$

◦ $\epsilon = 0$ の場合　(つまり、摂動なし)　の (5.63), (5.64) の解は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a\cos(t+\phi) \\ v = -a\sin(t+\phi) \end{cases} \quad \cdots (5.65)$$

a と ϕ は積分定数

◦ $\epsilon \neq 0$ の場合　(つまり、摂動あり)　のときは、a と ϕ を時間の関数と考える。

$$\begin{cases} x = a_{(t)} \cos\{t + \phi_{(t)}\} \\ v = -a_{(t)} \sin[t + \phi_{(t)}] \end{cases} \quad \cdots (5.66)$$

この (5.66) が (5.63)(5.64) の解となるような a と ϕ を決める。

・(5.66) を (5.63), (5.64) へ代入して、a と ϕ についての微分方程式を導く

$$\frac{da_{(t)}}{dt}\cos[t+\phi_{(t)}] - a_{(t)}\sin[t+\phi_{(t)}]\left(1 + \frac{d\phi_{(t)}}{dt}\right) = -a_{(t)}\sin[t+\phi_{(t)}]$$

$$\frac{da_{(t)}}{dt}\cos\{t+\phi_{(t)}\} - a_{(t)}\frac{d\phi_{(t)}}{dt}\sin[t+\phi_{(t)}] = 0$$

$$\therefore \frac{da_{(t)}}{dt}\cos\theta - a\frac{d\phi_{(t)}}{dt}\sin\theta = 0 \quad (\because 5.69 : \theta = t+\phi) \quad \cdots (5.67)$$

$$-\frac{da_{(t)}}{dt}\sin\{t+\phi_{(t)}\}-a_{(t)}\cos\{t+\phi_{(t)}\}\left(1+\frac{d\phi_{(t)}}{dt}\right)=-a_{(t)}\cos\{t+\phi_{(t)}\}-\epsilon a_{(t)}^2\cos^2\{t+\phi_{(t)}\}$$

$$\frac{da_{(t)}}{dt}\sin\{t+\phi_{(t)}\}+a_{(t)}\frac{d\phi_{(t)}}{dt}\cos\{t+\phi_{(t)}\}=\epsilon a_{(t)}^2\cos^2\{t+\phi_{(t)}\}$$

$$\therefore \frac{da}{dt}\sin\theta+a\frac{d\phi}{dt}\cos\theta=\epsilon a^2\cos^2\theta \quad (\because 5.69) \quad \cdots(5.68)$$

・(5.67), (5.68) を $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\phi}{dt}$ について とく

☆ (5.67) × $\cos\theta$ + (5.68) × $\sin\theta$

$$\frac{da}{dt}\cos^2\theta-a\frac{d\phi}{dt}\sin\theta\cos\theta=0$$

$$+)\ \frac{da}{dt}\sin^2\theta+a\frac{d\phi}{dt}\sin\theta\cos\theta=\epsilon a^2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\frac{da}{dt}=\epsilon a^2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\therefore \frac{da}{dt}=\frac{\epsilon}{4}a^2(\sin\theta+\sin3\theta) \quad \cdots(5.70)$$

☆ (5.67) × $(-\sin\theta)$ + (5.68) × $\cos\theta$

$$-\frac{da}{dt}\sin\theta\cos\theta+a\frac{d\phi}{dt}\sin^2\theta=0$$

$$+)\ \frac{da}{dt}\sin\theta\cos\theta+a\frac{d\phi}{dt}\cos^2\theta=\epsilon a^2\cos^3\theta$$

$$a\frac{d\phi}{dt}=\epsilon a^2\cos^3\theta$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dt}=\frac{\epsilon}{4}a(3\cos\theta+\cos3\theta) \quad \cdots(5.71)$$

摂動が働かないとき ($\epsilon=0$ のとき) は $\frac{da}{dt}=0$, $\frac{d\phi}{dt}=0$

つまり, a も ϕ も const

・(5.70)と(5.71)の解を求めるために、aとϕを微量ϵで展開する

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + O(\epsilon^3) \quad \cdots (5.72)$$

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + O(\epsilon^3) \quad \cdots (5.73)$$

・これを(5.70), (5.71)へ代入する

(5.70)へ代入

$$\epsilon \frac{da_1}{dt} + \epsilon^2 \frac{da_2}{dt} + O(\epsilon^3) \quad \leftarrow a_0\text{はconst}$$

$$= \frac{\epsilon}{4} \underbrace{(a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2)^2}_{a_0^2 + 2\epsilon a_0 a_1 + O(\epsilon^2)} \left\{ \underbrace{\sin(\underbrace{t+\phi_0}_{\theta_0} + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2)}_{\sin\theta_0 + \epsilon\phi_1\cos\theta_0 + O(\epsilon^2)} + \underbrace{\sin 3(\underbrace{t+\phi_0}_{\theta_0} + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2)}_{\sin 3\theta_0 + 3\epsilon\phi_1\cos 3\theta_0 + O(\epsilon^2)} \right\} + O(\epsilon^3)$$

$$\epsilon \frac{da_1}{dt} + \epsilon^2 \frac{da_2}{dt} + O(\epsilon^3) = \frac{\epsilon}{4}(a_0^2 + 2\epsilon a_0 a_1)\left[(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0) + \epsilon(\phi_1\cos\theta_0 + 3\phi_1\cos 3\theta_0)\right] + O(\epsilon^3)$$

$$〃 = \frac{\epsilon}{4}\left\{a_0^2(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0) + 2\epsilon a_0 a_1(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0) + a_0^2\epsilon(\phi_1\cos\theta_0 + 3\phi_1\cos 3\theta_0)\right\} + O(\epsilon^3)$$

$$〃 = \epsilon\left\{\frac{a_0^2}{4}(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0)\right\} + \epsilon^2\left\{\frac{a_0 a_1}{2}(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0) + \frac{a_0^2\phi_1}{4}(\cos\theta_0 + 3\cos 3\theta_0)\right\} + O(\epsilon^3) \quad \cdots (19)$$

この(19)の両辺を比較して、ϵの次数が同じ項に注目すると、

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{a_0^2}{4}(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0) \quad \cdots (5.74)$$

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{a_0 a_1}{2}(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0) + \frac{a_0^2\phi_1}{4}(\cos\theta_0 + 3\cos 3\theta_0) \quad \cdots (5.76)$$

☆(5.71)へ代入

$$\epsilon\frac{d\phi_1}{dt}+\epsilon^2\frac{d\phi_2}{dt}+O(\epsilon^3)=\frac{\epsilon}{4}\underbrace{(a_0+\epsilon a_1+\epsilon^2 a_2)}_{=a_0+\epsilon a_1+O(\epsilon^2)}\left\{\underbrace{3\cos(t+\phi_0+\epsilon\phi_1+\epsilon^2\phi_2)}_{=3\cos\theta_0-3\phi_1\epsilon\sin\theta_0+O(\epsilon^2)}+\underbrace{\cos 3(t+\phi_0+\epsilon\phi_1+\epsilon^2\phi_2)}_{=\cos 3\theta_0-3\phi_1\epsilon\sin 3\theta_0+O(\epsilon^2)}\right\}+O(\epsilon^3)$$

$\because t+\phi_0=\theta_0$

$$=\frac{\epsilon}{4}(a_0+\epsilon a_1)\left[(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0)-3\phi_1\epsilon(\sin\theta_0+\sin 3\theta_0)\right]+O(\epsilon^3)$$

$$=\frac{\epsilon}{4}\left\{a_0(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0)+\epsilon\left[a_1(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0)-3a_0\phi_1(\sin\theta_0+\sin 3\theta_0)\right]\right\}+O(\epsilon^3)$$

$$=\epsilon\left\{\frac{a_0}{4}(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0)\right\}+\epsilon^2\left\{\frac{a_1}{4}(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0)-\frac{3}{4}a_0\phi_1(\sin\theta_0+\sin 3\theta_0)\right\}+O(\epsilon^3)$$

…⑳

両辺のϵの次数が同じ項の係数を比較して、

$$\frac{d\phi_1}{dt}=\frac{1}{4}a_0(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0) \quad \cdots(5.75)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt}=-\frac{3}{4}a_0\phi_1(\sin\theta_0+\sin 3\theta_0)+\frac{1}{4}a_1(3\cos\theta_0+\cos 3\theta_0) \quad \cdots(5.77)$$

$\theta_0=0$

つまり、$t=0$から$\phi_0=0$の条件でなければ教科書のようにはとけない

・この(5.74)〜(5.77)を ~~$t=0$~~ のとき $a(0)=a_0$, $\phi(0)=\phi_0$ なる初期条件のもとで解くと a_1, a_2, ϕ_1, ϕ_2 の初期条件は、(5.72),(5.73)より、

$$a_1(0)=a_2(0)=0,\quad \phi_1(0)=\phi_2(0)=0 \quad \cdots(5.78)$$

☆1次方程式 (5.74),(5.75)の一般解は

$$a_1=a_0^2\left(-\frac{1}{4}\cos\theta_0-\frac{1}{12}\cos 3\theta_0\right)+a_{10} \quad \cdots(5.79)$$

$$\phi_1=a_0\left(\frac{3}{4}\sin\theta_0+\frac{1}{12}\sin 3\theta_0\right)+\phi_{10} \quad \cdots(5.80)$$

積分定数

* 一般解へ初期条件を与えて、積分定数 a_{10}, ϕ_{10} を求める
(教科書に書いてある $t=0$ という条件だけでは、これ以降の計算のつじつまが合わないので、$\theta_0 = 0$ という条件で計算していく。)

$$a_{1(\theta=0)} = a_0^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right) + a_{10} = 0$$

$$\therefore a_{10} = \frac{1}{3}a_0^2$$

$$\phi_{1(\theta=0)} = a_0\left(0+0\right) + \phi_{10} = 0$$

$$\therefore \phi_{10} = 0$$

(5.81)

* 2次方程式についても同様に計算していく
まず、(5.79)と(5.80) を (5.76), (5.77) へ代入する

・(5.76)

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{1}{4}a_0^3\left(\frac{3}{4}\sin\theta_0 + \frac{1}{12}\sin 3\theta_0\right)\left(\cos\theta_0 + 3\cos 3\theta_0\right)$$
$$+\frac{1}{2}a_0^3\left(-\frac{1}{4}\cos\theta_0 - \frac{1}{12}\cos 3\theta_0 + \frac{1}{3}\right)\left(\sin\theta_0 + \sin 3\theta_0\right)$$

$$= \frac{1}{4}a_0^3\left(\frac{3}{4}\sin\theta_0\cos\theta_0 + \frac{9}{4}\sin\theta_0\cos 3\theta_0 + \frac{1}{12}\sin 3\theta_0\cos\theta_0 + \frac{1}{4}\sin 3\theta_0\cos 3\theta_0\right)$$
$$+\frac{1}{2}a_0^3\left(-\frac{1}{4}\sin\theta_0\cos\theta_0 - \frac{1}{4}\sin 3\theta_0\cos\theta_0 - \frac{1}{12}\sin\theta_0\cos 3\theta_0 - \frac{1}{12}\sin 3\theta_0\cos 3\theta_0 + \frac{1}{3}\sin\theta_0 + \frac{1}{3}\sin 3\theta_0\right)$$

$$= a_0^3\left\{\underbrace{\frac{1}{16}\sin\theta_0\cos\theta_0}_{=\frac{1}{32}\sin 2\theta_0} + \underline{\underline{\frac{25}{48}\sin\theta_0\cos 3\theta_0 - \frac{5}{48}\sin 3\theta_0\cos\theta_0}} + \underbrace{\frac{1}{48}\sin 3\theta_0\cos 3\theta_0}_{=\frac{1}{96}\sin 6\theta_0} + \frac{1}{6}\sin\theta_0 + \frac{1}{6}\sin 3\theta_0\right\}$$

別途計算

$$\frac{25}{48}\sin\theta_0\cos3\theta_0 - \frac{5}{48}\sin3\theta_0\cos\theta_0$$

$$= \frac{5}{48}\left(\sin\theta_0\cos3\theta_0 - \cos\theta_0\sin3\theta_0\right) + \frac{20}{48}\sin\theta_0\cos3\theta_0$$

$$= \frac{5}{48}\sin(\theta_0 - 3\theta_0) + \frac{5}{12}\sin\theta_0(4\cos^3\theta_0 - 3\cos\theta_0)$$

$$\left(\begin{aligned}&\sin4\theta\\&=\cos\theta(4\cos\theta-8\sin^2\theta)\\&=4\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta)\end{aligned}\right)$$

$$= -\frac{5}{18}\sin2\theta_0 + \frac{5}{12}\sin\theta_0\cos\theta_0(4\cos^2\theta_0 - 3)$$

$$= -\frac{5}{18}\sin2\theta_0 + \frac{5}{12}\sin\theta_0\cos\theta_0(1 - 4\sin^2\theta_0)$$

$$= \quad '' \quad + \frac{5}{12}\left\{2\sin\theta_0\cos\theta_0(1-2\sin^2\theta_0) - \sin\theta_0\cos\theta_0\right\}$$

$$= -\frac{5}{18}\sin2\theta_0 + \frac{5}{12}\left\{\frac{1}{2}\sin4\theta_0 - \frac{1}{2}\sin2\theta_0\right\}$$

$\vdots$

$$\frac{da_2}{dt} = a_0^3\left[\frac{1}{6}\sin\theta_0 - \frac{5}{24}\sin2\theta_0 + \frac{1}{6}\sin3\theta_0 + \frac{5}{24}\sin4\theta_0 + \frac{1}{96}\sin6\theta_0\right] \quad \cdots(5.82)$$

・(5.77)

$$\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{3}{4}a_0^2\left(\frac{3}{4}\sin\theta_0 + \frac{1}{12}\sin3\theta_0\right)\left(\sin\theta_0 + \sin3\theta_0\right)$$
$$+\frac{1}{4}a_0^2\left(-\frac{1}{4}\cos\theta_0 - \frac{1}{12}\cos3\theta_0 + \frac{1}{3}\right)\left(3\cos\theta_0 + \cos3\theta_0\right)$$

$$= -\frac{3}{4}a_0^2\left(\frac{3}{4}\sin^2\theta_0 + \frac{3}{4}\sin\theta_0\sin3\theta_0 + \frac{1}{12}\sin\theta_0\sin3\theta_0 + \frac{1}{12}\sin^2 3\theta_0\right)$$
$$+\frac{1}{4}a_0^2\left(-\frac{3}{4}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{4}\cos\theta_0\cos3\theta_0 - \frac{1}{4}\cos\theta_0\cos3\theta_0 - \frac{1}{12}\cos^2 3\theta_0\right.$$
$$\left. + \cos\theta_0 + \frac{1}{3}\cos3\theta_0\right)$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = a_0^2\left\{-\frac{9}{16}\sin^2\theta_0 - \frac{15}{24}\sin\theta_0\sin3\theta_0 - \frac{1}{16}\sin^2 3\theta_0 - \frac{3}{16}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{8}\cos\theta_0\cos3\theta_0 - \frac{1}{48}\cos^2 3\theta_0 + \frac{1}{4}\cos\theta_0 + \frac{1}{12}\cos3\theta_0\right\}$$

$$= a_0^2\left\{-\frac{9}{16}(1-\cos^2\theta_0) - \frac{3}{16}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{16}(1+\cos^2 3\theta_0) - \frac{1}{48}\cos^2 3\theta_0 - \frac{15}{24}(\cos3\theta_0\cos\theta_0 + \sin3\theta_0\sin\theta_0) + \frac{1}{2}\cos\theta_0\cos3\theta_0 + \frac{1}{4}\cos\theta_0 + \frac{1}{12}\cos3\theta_0\right\}$$

$$= a_0^2\left\{-\frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cos^2\theta_0 - \frac{1}{16} + \frac{1}{24}\cos^2 3\theta_0 - \frac{5}{8}\cos(3\theta_0-\theta_0) + \frac{1}{2}\cos\theta_0\cos3\theta_0 + \frac{1}{4}\cos\theta_0 + \frac{1}{12}\cos3\theta_0\right\}$$

$$= a_0^2\left\{-\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos2\theta_0) + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos6\theta_0) - \frac{5}{8}\cos2\theta_0 + \frac{1}{2}\cos\theta_0\cos3\theta_0 + \frac{1}{4}\cos\theta_0 + \frac{1}{12}\cos3\theta_0\right\}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
&\cos\theta_0\cos3\theta_0 \\
&= 4\cos^4\theta_0 - 3\cos^2\theta_0 \\
&= \frac{1}{2}(\cos4\theta_0 + 4\cos2\theta_0 + 3) - 3\cdot\frac{1}{2}(1+\cos2\theta_0) \\
&= \frac{1}{2}(\cos4\theta_0 + \cos2\theta_0)
\end{aligned}$$

$$\left(\because\ \cos4x = 8\cos^4x - 8\cos^2x + 1,\quad \cos2x = 2\cos^2x - 1\right)$$

$$\vdots$$

$$= a_0^2\left(-\frac{5}{12} + \frac{1}{4}\cos\theta_0 - \frac{3}{16}\cos2\theta_0 + \frac{1}{12}\cos3\theta_0 + \frac{1}{4}\cos4\theta_0 + \frac{1}{48}\cos6\theta_0\right) \quad \cdots(5.83)$$

* (5.82), (5.83) を積分して、a_2, ϕ_2 の一般解を求める。

$$a_2 = a_0^3\left\{-\frac{1}{6}\cos\theta_0 + \frac{9}{64}\cos 2\theta_0 - \frac{1}{18}\cos 3\theta_0 - \frac{5}{96}\cos 4\theta_0 - \frac{1}{576}\cos 6\theta_0\right\} + a_{20} \quad \cdots (21)$$

$$\phi_2 = a_0^2\left\{-\frac{5}{12}t + \frac{1}{4}\sin\theta_0 - \frac{3}{32}\sin 2\theta_0 + \frac{1}{36}\sin 3\theta_0 + \frac{1}{16}\sin 4\theta_0 + \frac{1}{288}\sin 6\theta_0\right\} + \phi_{20} \quad \cdots (22)$$

* (21), (22) へ初期条件 (5.72)(5.73) を代入して、積分定数 a_{20}, ϕ_{20} を求める。

$$a_2(\theta_0 = 0) = a_0^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{9}{64} - \frac{1}{18} - \frac{5}{96} - \frac{1}{576}\right) + a_{20} = 0$$

$$\therefore\ a_{20} = \frac{13}{96}a_0^3 \quad \cdots (23)$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ t=0}}{\phi_2(\theta_0 = 0)} = a_0^2 \cdot 0 + \phi_{20} = 0$$

$$\therefore\ \phi_{20} = 0 \quad \cdots (24)$$

* 以上まとめて、2次の解は、

$$a_2 = a_0^3\left(\frac{13}{96} - \frac{1}{6}\cos\theta_0 + \frac{9}{64}\cos 2\theta_0 - \frac{1}{18}\cos 3\theta_0 - \frac{5}{96}\cos 4\theta_0 - \frac{1}{576}\cos 6\theta_0\right) \quad \cdots (5.84)$$

$$\phi_2 = a_0^2\left(-\frac{5}{12}t + \frac{1}{4}\sin\theta_0 - \frac{3}{32}\sin 2\theta_0 + \frac{1}{36}\sin 3\theta_0 + \frac{1}{16}\sin 4\theta_0 + \frac{1}{288}\sin 6\theta_0\right) \quad \cdots (5.85)$$

◦ x の表現を求めるため、(5.79), (5.80), (5.84), (5.85) を (5.65) へ代入する。

$$x = a\cos(t + \phi)$$

$$\left[\begin{aligned}
&\cdot\ a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 \qquad (\because 5.72) \\
&\cdot\ \cos(t+\phi) = \cos(t + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2) \qquad (\because 5.73) \\
&\qquad = \cos\left\{t + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\left(-\frac{5}{12}a_0^2 t + \phi_{2p}\right)\right\} \\
&\qquad = \cos\left\{\underbrace{\left(1 - \frac{5}{12}a_0^2\epsilon^2\right)t + \phi_0}_{\theta^* \ (\because 5.87)} + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_{2p}\right\} \\
&\qquad = \cos(\theta^* + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_{2p})
\end{aligned}\right]$$

;

⋮

$$x = (a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2)\cos(\theta^* + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_{2p}) \quad \cdots (5.86)$$

この後の計算は(5.86)をふつうに展開して、倍角の定理を使いながら教科書(5.88)式の形へそろえていけばいいだけだが、非常に煩雑で心が折れたので、また今度やる。

ちなみに、$\cos\theta_0 = \cos(\theta^* - \frac{5}{12}\epsilon^2 a_0^2 t) = \cos\theta^* + O(\epsilon^2)$ なので、
ϵについて2次まで展開しなければいけない今回の状況では $\cos\theta_0 \neq \cos\theta^*$

(5.86)をまず $\theta_0 \to \theta^*$ へ変換してから展開していった方がいい気がする。