1.3 ケプラーの法則から万有引力の法則へ

前節の面積速度一定を極座標で表した式 (1.28)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = k \quad \cdots (1.32)$$

を直交座標で表現する。

直交座標と極座標の関係式 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を時間について微分して、

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta & \cdots ⓐ \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta & \cdots ⓑ \end{cases}$$

ⓑ × $\cos\theta$ − ⓐ × $\sin\theta$

$$\begin{array}{rl} \dot{y}\cos\theta = & \dot{r}\sin\theta\cos\theta + r\dot{\theta}\cos^2\theta \\ -)\ \dot{x}\sin\theta = & \dot{r}\sin\theta\cos\theta - r\dot{\theta}\sin^2\theta \\ \hline \dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta = & r\dot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{array}$$

$$\dot{y}\cdot\frac{x}{r} - \dot{x}\cdot\frac{y}{r} = r\dot{\theta}$$

$$r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - \dot{x}y \quad \cdots (1.33)$$

この (1.33) を (1.32) へ代入する

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) = k \quad \cdots (1.34)$$

両辺を時間微分する

$$\frac{1}{2}(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \ddot{x}y - \dot{x}\dot{y}) = 0$$

$$x\ddot{y} - \ddot{x}y = 0$$

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{y}{x} \quad \cdots (1.35)$$

↑

加速度ベクトルと位置ベクトルの向きが同じ

座標系(X,Y)での楕円上の点

$$\begin{cases} X = a\cos u - f \\ Y = b\sin u - g \end{cases} \cdots (1.36) \xrightarrow{\text{微分}} \begin{cases} \dot{X} = -a\dot{u}\sin u \\ \dot{Y} = b\dot{u}\cos u \end{cases} \cdots (1.37) \xrightarrow{\text{微分}} \begin{cases} \ddot{X} = -a\ddot{u}\sin u - a\dot{u}^2\cos u \\ \ddot{Y} = b\ddot{u}\cos u - b\dot{u}^2\sin u \end{cases} \cdots (1.38)$$

働いている力が中心力であることを示す(1.35)式に(1.36),(1.38)を代入する

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\ddot{Y}}{Y}$$

$$\frac{-a\ddot{u}\sin u - a\dot{u}^2\cos u}{a\cos u - f} = \frac{b\ddot{u}\cos u - b\dot{u}^2\sin u}{b\sin u - g} \cdots (1.40)$$

$$(-a\ddot{u}\sin u - a\dot{u}^2\cos u)(b\sin u - g) - (b\ddot{u}\cos u - b\dot{u}^2\sin u)(a\cos u - f) = 0$$

$$(-ab + ag\sin u + bf\cos u)\ddot{u} + (ag\cos u - bf\sin u)\dot{u}^2 = 0$$

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = -\frac{(-ag\cos u + bf\sin u)\dot{u}}{ab - ag\sin u - bf\cos u} \cdots (1.41)$$

(1.41)をよくみてみると、両辺とも分子は分母の時間微分となっている
よって両辺を1回積分すると、

$$\log\dot{u} = -\log A + \mathrm{const} \cdots (1.42)$$

$$(A = ab - ag\sin u - bf\cos u) \cdots (1.43)$$

となる
これを書き換えると、

$$\log\dot{u} = \log A^{-1} + \log h \quad (h : \mathrm{const})$$

$$= \log\frac{h}{A}$$

$$\dot{u} = \frac{h}{A} \cdots (1.44)$$

(1.41)を(1.38)へ代入すると、

$$\ddot{X} = -a\sin u\left(\frac{ag\cos u - bf\sin u}{ab - ag\sin u - bf\cos u}\right)\dot{u}^2 - a\cdot\cos u\cdot\dot{u}^2$$

$$= \frac{\dot{u}^2}{ab - ag\sin u - bf\cos u}\left(-a^2 g\sin u\cos u + abf\sin^2 u - a^2 b\cos u + a^2 g\sin u\cos u + abf\cos^2 u\right)$$

$$= \frac{\dot{u}^2}{A}(abf - a^2 b\cos u)$$

$$= \frac{ab(f - a\cos u)}{A}\dot{u}^2$$

$$= \frac{ab(-X)}{A}\dot{u}^2 \quad (\because 1.36)$$

$$= -\frac{ab}{A}\dot{u}^2 X \quad \cdots (1.45)$$

$$= -\frac{ab}{A}\cdot\frac{h^2}{A^2}X \quad \rightarrow (\because 1.44)$$

$$= -\frac{abh^2}{A^3}X \quad \cdots (1.46)$$

Yに関しても同様にして、(1.41)を(1.38)へ代入

$$\ddot{Y} = b\ddot{u}\cos u - b\dot{u}^2\sin u$$

$$= b\cos u\cdot\frac{(ag\cos u - bf\sin u)\dot{u}^2}{ab - ag\sin u - bf\cos u} - b\sin u\cdot\dot{u}^2$$

$$= \frac{\dot{u}^2}{ab - ag\sin u - bf\cos u}\left\{abg\cos^2 u - b^2 f\sin u\cos u - ab^2\sin u + abg\sin^2 u + b^2 f\sin u\cos u\right\}$$

$$= \frac{\dot{u}^2}{A}\left(abg - ab^2\sin u\right)$$

$$= \frac{ab(g - b\sin u)}{A}\dot{u}^2$$

$$= \frac{ab}{A}(-Y)\dot{u}^2 \quad (\because 1.36) \quad = -\frac{ab}{A}\dot{u}^2 Y \quad = -\frac{ab}{A}\cdot\frac{h^2}{A^2}Y \quad (\because 1.44)$$

$$= -\frac{abh^2}{A^3}Y \quad \cdots (1.47)$$

$$F = \sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{abh^2}{A^3}\right)^2 X^2 + \left(\frac{abh^2}{A^3}\right)^2 Y^2}$$
$$= \frac{abh^2}{A^3} r \quad \cdots (1.48)$$

ここで、力の中心が楕円の焦点である~~事実~~ $(f, g) = (ae, 0)$ を
$A = ab - ag\sin u - bf\cos u$ へ代入すると、

$$A = ab - abe\cos u$$
$$= ab(1 - e\cos u)$$
$$= ab \cdot \frac{r}{a} \quad (\because 1.13)$$
$$= br \quad \cdots (1.49)$$

(1.49)を(1.48)へ代入すると、

$$F = \frac{abh^2}{b^3 r^3} r = \frac{ah^2}{b^2 r^2} = \frac{ah^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \cdots (1.50)$$

(1.44)を変形すると、

$$h = A\dot{u}$$
$$= (ab - ag\sin u - bf\cos u)\dot{u} \quad (\because 1.43)$$
$$= ab\dot{u} - ag\dot{u}\sin u - bf\dot{u}\cos u$$

これをtで積分すると、

$$h(t - t_0) = abu + ag\cos u - bf\sin u$$
$$u + \frac{g}{b}\cos u - \frac{f}{a}\sin u = \frac{h}{ab}(t - t_0) \quad \cdots (1.52)$$

(1.52)にも例の事実$(f, g) = (ae, 0)$を代入すると、

$$u + 0 - e\sin u = \frac{h}{ab}(t - t_0)$$

$$u - e\sin u = \frac{h}{ab}(t - t_0) \quad \cdots (1.53)$$ ：ケプラー方程式

(1.53)と(1.30)を比較して、

$$h = abn \quad \cdots (1.54)$$

(1.54)より(1.50)の比例係数は、

$$\frac{ah^2}{b^2} = \frac{a}{b^2} \cdot a^2 b^2 n^2$$

$$= a^3 n^2$$

$$= a^3 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \quad (\because 1.27)$$

$$= \frac{4\pi^2 a^3}{P^2} \quad \cdots (1.55)$$