4.9 正三角形平衡点近傍の微小振動解

・初期条件を与えて正三角形平衡点L_4の周りの微小振動解の具体的な形を求める。

・質量比$\nu<\nu_c$のとき(つまり安定であるとき)(∵4.100)、運動方程式の解は三角関数で表せることがわかっているので、

$$x^* = A\cos(\omega t+\gamma) \quad \cdots (4.157)$$

$$y^* = B\sin(\omega t+\gamma) \quad \cdots (4.158)$$

とおく。

・これを(4.145)(4.146)に代入すると、

$$-\omega^2 A\cos(\omega t+\gamma) - 2n'\omega B\cos(\omega t+\gamma) + a^* A\cos(\omega t+\gamma) = 0$$

$$-\omega^2 A - 2n'\omega B + a^* A = 0$$

$$\therefore (\omega^2 - a^*)A + 2n'\omega B = 0 \quad \cdots (4.159)$$

$$-\omega^2 B\sin(\omega t+\gamma) - 2n'\omega A\sin(\omega t+\gamma) + c^* B\sin(\omega t+\gamma) = 0$$

$$-\omega^2 B - 2n'\omega A + c^* B = 0$$

$$\therefore 2n'\omega A + (\omega^2 - c^*)B = 0 \quad \cdots (4.160)$$

・(4.159)(4.160)に対応する固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - a^* & 2n'\omega \\ 2n'\omega & \omega^2 - c^* \end{vmatrix} = 0$$

$$(\omega^2 - a^*)(\omega^2 - c^*) - (2n'\omega)^2 = 0$$

$$\omega^4 - (a^* + c^* + 4n'^2)\omega^2 + a^* c^* = 0 \quad \cdots (4.161)$$

○独立な振動数は ω_1, ω_2 であるから、(4.145)(4.146)の一般解は、

$$x^* = A_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \quad \cdots (4.162)$$

$$y^* = B_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \quad \cdots (4.163)$$

と書ける。

○x^* 成分と y^* 成分の振幅比は、(4.159)より

$$(\omega_i^2 - a^*)A_i + 2n'\omega B_i = 0$$

$$\therefore \frac{B_i}{A_i} = -\frac{\omega_i^2 - a^*}{2n'\omega_i} = -f_i \quad \cdots (4.164)$$

○振幅 A_i，位相 γ_i は初期条件から決まる。

ここでは $t=0$ において静止している初期条件のもとでの解を求める。

$$x^*(0) = A_1 \cos\gamma_1 + A_2 \cos\gamma_2 \quad \cdots (4.166)$$

$$y^*(0) = B_1 \sin\gamma_1 + B_2 \sin\gamma_2 \quad \cdots (4.167)$$

$$0 = \dot{x}^*(0) = -A_1\omega_1 \sin\gamma_1 - A_2\omega_2 \sin\gamma_2 \quad \cdots (4.168)$$

$$0 = \dot{y}^*(0) = B_1\omega_1 \cos\gamma_1 + B_2\omega_2 \cos\gamma_2 \quad \cdots (4.169)$$

○これら(4.166)～(4.169)を $A_i \cos\gamma_i$，$A_i \sin\gamma_i$ について解く

・(4.169より、

$$\cos\gamma_2 = -\frac{B_1\omega_1}{B_2\omega_2}\cos\gamma_1 \quad \cdots ①$$

・(4.166)へ①を代入

$$x^*_{(0)} = A_1\cos\gamma_1 - A_2\frac{B_1\omega_1}{B_2\omega_2}\cos\gamma_1$$

$$= \left(1 - \frac{A_2}{B_2}\cdot\frac{B_1}{A_1}\cdot\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)A_1\cos\gamma_1$$

$$= \left\{1 - \left(-\frac{2n'\omega_2}{\omega_2^2 - a^*}\right)\left(-\frac{\omega_1^2 - a^*}{2n'\omega_1}\right)\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}A_1\cos\gamma_1 \quad (\because 4.164)$$

$$= \left(1 - \frac{\omega_1^2 - a^*}{\omega_2^2 - a^*}\right)A_1\cos\gamma_1$$

$$= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - a^*}A_1\cos\gamma_1$$

$$\therefore A_1\cos\gamma_1 = \frac{\omega_2^2 - a^*}{\omega_2^2 - \omega_1^2}x^*_{(0)}$$

$$= -\frac{\omega_2^2 - a^*}{\omega_1^2 - \omega_2^2}x^*_{(0)} \quad \cdots (4.170)$$

・(4.166)へ(4.170)を代入

$$x^*_{(0)} = -\frac{\omega_2^2 - a^*}{\omega_1^2 - \omega_2^2}x^*_{(0)} + A_2\cos\gamma_2$$

$$\therefore A_2\cos\gamma_2 = \frac{\omega_1^2 - a^*}{\omega_1^2 - \omega_2^2}x^*_{(0)} \quad \cdots (4.171)$$

・(4.168)より

$$\sin\gamma_2 = -\frac{A_1\omega_1}{A_2\omega_2}\sin\gamma_1 \quad \cdots ②$$

・(4.167)へ②を代入

$$y^*_{(0)} = B_1 \sin\gamma_1 - B_2 \frac{A_1\omega_1}{A_2\omega_2}\sin\gamma_1$$

$$= \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2}\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)A_1\sin\gamma_1$$

$$= \left\{\left(-\frac{\omega_1^2 - a^*}{2n'\omega_1}\right) - \left(-\frac{\omega_2^2 - a^*}{2n'\omega_2}\right)\cdot\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}A_1\sin\gamma_1$$

$$= \left\{-\frac{\omega_2^2(\omega_1^2 - a^*)}{2n'\omega_1\omega_2^2} + \frac{\omega_1^2(\omega_2^2 - a^*)}{2n'\omega_1\omega_2^2}\right\}A_1\sin\gamma_1$$

$$\therefore A_1\sin\gamma_1 = -\frac{2n'\omega_1\omega_2^2}{a^*(\omega_1^2 - \omega_2^2)}y^*_{(0)} \quad \cdots (4.172)$$

・(4.168)へ(4.172)を代入

$$0 = -\frac{2n'\omega_1^2\omega_2^2}{a^*(\omega_1^2 - \omega_2^2)}y^*_{(0)} - A_2\omega_2\sin\gamma_2$$

$$\therefore A_2\sin\gamma_2 = -\frac{2n'\omega_1^2\omega_2}{a^*(\omega_1^2 - \omega_2^2)}y^*_{(0)} \quad \cdots (4.173)$$