6.5 静止衛星

静止衛星軌道に投入された衛星が受ける主な摂動

- 月・太陽による摂動
- 経度に依存する地球ポテンシャルによる摂動

6.5.1 月・太陽による摂動

月・太陽の摂動は潮汐力として働く。(3.4.2項より)

ケプラー力(K)と月・太陽の潮汐力(R_t)の大きさの比は (3.51)より

$$\frac{R_t}{K}=\frac{m'}{M_E}\left(\frac{a}{a'}\right)^3 \quad \cdots (6.121)$$

a: 座標原点から被摂動天体までのきょり
a': 〃 摂動天体 〃

(m', a' は 月 or 太陽 の質量と軌道長半径) ← どっちがケプラー力でどっちが摂動力かはそのときしだい…。

一方、赤道部の膨らみによる摂動すなわちJ_2摂動(R_{J_2})とケプラー力(K)の大きさの比は、

$$\frac{|\nabla R|}{|\nabla U|}=J_2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2 \quad \cdots (6.122)$$

a) 月・太陽摂動による摂動関数の永年項

まずは太陽からの寄与を考える。
太陽の運動は円運動と近似。

太陽による摂動関数の主要項は (3.47)より

$$R_S = GM_S \frac{r^2}{r_S^3} P_2(\cos\theta)$$

$$= GM_S \frac{r^2}{r_S^3} \cdot \frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta) \quad \leftarrow (\because P.243)$$

$$= GM_S \frac{r^2}{r_S^3} \frac{1}{4}\left\{1+3(2\cos^2\theta-1)\right\}$$

$$= GM_S \frac{r^2}{r_S^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \quad \cdots (6.125)$$

R_Sの永年項を取り出すには太陽経度λ_Sと人工衛星の平均近点離角lについて平均すればよい。

$$R_{S,sec} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_S \, d\lambda \, dl \quad \cdots (6.126)$$

球面三角公式より。 ← 詳しくはノート5.6-11で議論している

$$\cos\theta = \cos L \cos(\lambda_S - \bar{\Omega}) + \sin L \sin(\lambda_S - \bar{\Omega}) \cos \bar{I} \quad \cdots (6.127)$$

$$(L = f + \bar{\omega}) \cdots (6.128)$$

(6.127)を自乗して、

$$\cos^2\theta = \cos^2 L\cos^2(\lambda_s-\bar{\Omega}) + \sin^2 L\sin^2(\lambda_s-\bar{\Omega})\cos^2\bar{I}$$
$$+2\sin L\cos L\sin(\lambda_s-\bar{\Omega})\cos(\lambda_s-\bar{\Omega})\cos\bar{I}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1+\cos 2(\lambda_s-\bar{\Omega})\right\}\cos^2 L + \frac{1}{2}\cos^2\bar{I}\left\{1-\cos 2(\lambda_s-\bar{\Omega})\right\}\sin^2 L$$
$$+\frac{1}{2}\cos\bar{I}\sin 2L\sin 2(\lambda_s-\bar{\Omega}) \quad \cdots (6.129)$$

である。

$\cos^2\theta$の太陽経度λ_sについての平均は、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\lambda_s = \frac{1}{2}\cos^2 L + \frac{1}{2}\cos^2\bar{I}\sin^2 L$$

($\cos 2(\lambda_s-\bar{\Omega})$
$\sin 2(\lambda_s-\Omega)$は
時間平均とれば 0)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2L)+\frac{1}{2}\cdot(1-\sin^2\bar{I})\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2L)$$
$$=\frac{1}{4}(1+\cos 2L+1-\cos 2L-\sin^2\bar{I}+\sin^2\bar{I}\cos 2L)$$
$$=\frac{1}{4}(2-\sin^2\bar{I}+\sin^2\bar{I}\cos 2L)$$
$$=\frac{1}{4}(1+\cos^2\bar{I}+\sin^2\bar{I}\cos 2L) \quad \cdots (6.130)$$

(6.130)を(6.125)へ代入すると、(摂動関数の太陽経度λ_sについての平均)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_s\, d\lambda_s = GM_s\frac{r^2}{a_s^3}\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}(1+\cos^2\bar{I}+\sin^2\bar{I}\cos 2L)-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= GM_s\frac{r^2}{a_s^3}\left\{\frac{1}{8}(3\cos^2\bar{I}-1)+\frac{3}{8}\sin^2\bar{I}\cos 2L\right\} \quad \cdots (6.131)$$

(太陽の運動は円運動と
近似したので$r_s \fallingdotseq a_s$と
近似できる。
a_s:太陽-地球の軌道(長)半径)

次に、人工衛星に平均近点離角(l)についての平均をとる。

$$R_{s,sec} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_s \, dl_s\right\} dl$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[GM_s \frac{r_{(l)}^2}{a_s^3}\left\{\frac{1}{8}(3\cos^2\bar{I}-1) + \frac{3}{8}\sin^2\bar{I}\,\underbrace{\cos 2\bar{L}_{(l)}}_{\parallel (\because 6.128)\ \cos 2f_{(l)}\cos 2\bar{\omega} - \sin 2f_{(l)}\sin 2\bar{\omega}}\right\}\right] dl$$

$$= GM_s \frac{a^2}{a_s^3}\left[\frac{1}{8}(3\cos^2\bar{I}-1)\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 dl\right\}}_{①} + \frac{3}{8}\overbrace{\cos 2\bar{\omega}}^{\sin^2\bar{I}}\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f\, dl\right\}}_{②} - \frac{3}{8}\underbrace{\sin 2\bar{\omega}}_{\sin^2\bar{I}}\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2f\, dl\right\}}_{③}\right]$$

① : $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 dl = 1 + \frac{3}{2}e^2 \quad \cdots (6.132)$

② : $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f\, dl = \frac{5}{2}e^2 \quad \cdots (6.133)$

教科書で与えられたものをそのまま使った。(確認はしてない)

③ : $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f\, dl$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin 2f\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{a^3}\, r \cdot r\sin f \cdot r\cos f\right\} du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{a^3}\, a(1-e\cos u)\cdot a(\cos u - e)\cdot a\sqrt{1-e^2}\sin u\right\} du$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(1-e\cos u)(\cos u - e)\sin u\right\} du$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(\cos u - e - e\cos^2 u + e^2\cos u)\sin u\right\}du$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\underbrace{e\sin^3 u + (e^2+1)\sin u\cos u - 2e\sin u}\right\}du$$

$$= 0$$ ← 全て三角関数（2π or π 周期）で定数項もないから

$$\vdots$$

$$R_{S.sec} = \frac{GM_S a^2}{a_S^3}\left[\frac{1}{8}(3\cos^2\bar{I}-1)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)+\frac{3}{8}\sin^2\bar{I}\cos 2\bar{\omega}\cdot\frac{5}{2}e^2\right]$$

$$= \frac{GM_S a^2}{a_S^3}\left\{\frac{1}{8}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(3\cos^2\bar{I}-1)+\frac{15}{16}e^2\sin^2\bar{I}\cos 2\bar{\omega}\right\} \quad \cdots(6.134)$$

一方 J_2 から出てくる永年項は (6.12) より

$$R_{J_2,sec} = \frac{\mu a_E^2}{4a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}J_2(3\cos^2\bar{I}-1) \quad \cdots(6.135)$$

月・太陽摂動の永年項 (6.134) は黄道を基準面としている。
J_2 摂動の永年項 (6.135) は地球の赤道面を基準面としている。
両者の相互作用を考慮するために、基準面を赤道面に統一する。

今後、静止衛星軌道の離心率は0と近似する。

球面三角公式より

$$\cos\bar{I} = \cos\epsilon\cos I + \sin\epsilon\sin I\cos\Omega \quad \cdots (6.136)$$

これを(6.134)へ代入して整理する

$$\left(\begin{aligned}
\cos^2\bar{I} &= \cos^2\epsilon\cos^2 I + \sin^2\epsilon\sin^2 I\cos^2\Omega + 2\sin\epsilon\cos\epsilon\sin I\cos I\cos\Omega \\
&= \cos^2\epsilon\cos^2 I + \sin^2\epsilon\sin^2 I\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\Omega + 1) + \frac{1}{2}\sin 2\epsilon\sin 2I\cos\Omega \\
&= \cos^2\epsilon\cos^2 I + \frac{1}{2}(1-\cos^2\epsilon)(1-\cos^2 I) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sin 2\epsilon\sin 2I\cos\Omega + \frac{1}{2}\sin^2\epsilon\sin^2 I\cos 2\Omega \\
&= \frac{1}{2}\left(3\cos^2\epsilon\cos^2 I - \cos^2\epsilon - \cos^2 I + 1\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sin 2\epsilon\sin 2I\cos\Omega + \frac{1}{2}\sin^2\epsilon\sin^2 I\cos 2\Omega
\end{aligned}\right)$$

$$\begin{aligned}
R_{s,sec} &= \frac{GM_s a^2}{a_s^3}\frac{1}{8}\left\{\frac{3}{2}\left(3\cos^2\epsilon\cos^2 I - \cos^2\epsilon - \cos^2 I + 1\right) + \frac{3}{2}\sin 2\epsilon\sin 2I\cos\Omega\right. \\
&\qquad \left. + \frac{3}{2}\sin^2\epsilon\sin^2 I\cos 2\Omega - 1\right\} \\
&= \frac{GM_s a^2}{a_s^3}\left\{\frac{3}{16}\left(3\cos^2\epsilon\cos^2 I - \cos^2\epsilon - \cos^2 I + \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{16}\sin 2\epsilon\sin 2I\cos\Omega\right. \\
&\qquad \left. + \frac{3}{16}\sin^2\epsilon\sin^2 I\cos 2\Omega\right\} \\
&= \frac{GM_s a^2}{a_s^3}\left\{\frac{1}{16}(3\cos^2\epsilon - 1)(3\cos^2 I - 1) + \frac{3}{16}\sin 2\epsilon\sin 2I\cos\Omega\right. \\
&\qquad \left. + \frac{3}{16}\sin^2\epsilon\sin^2 I\cos 2\Omega\right\} \quad \cdots (6.137)
\end{aligned}$$

月・太陽摂動とJ_2摂動の永年項をまとめると、

$$R_{SEC} = R_{S,sec} + R_{M,sec} + R_{J_2,sec}$$

$$= \frac{GM_S a^2}{a_S^3}\left\{\frac{1}{16}(3\cos^2\epsilon - 1)(3\cos^2 I - 1) + \frac{3}{16}\sin 2\epsilon \sin 2I \cos\Omega + \frac{3}{16}\sin^2\epsilon \sin^2 I \cos 2\Omega\right\}$$

$$+ \frac{GM_M a^2}{a_M^3}\left\{\frac{1}{16}(3\cos^2\epsilon - 1)(3\cos^2 I - 1) + \frac{3}{16}\sin 2\epsilon \sin 2I \cos\Omega + \frac{3}{16}\sin^2\epsilon \sin^2 I \cos 2\Omega\right\}$$

$$+ \frac{\mu a_E^2}{4a^3} J_2 (3\cos^2 I - 1)$$

$$= (3\cos^2 I - 1)\left\{\frac{GM_S a^2}{16 a_S^3}(3\cos^2\epsilon - 1) + \frac{GM_M a^2}{16 a_M^3}(3\cos^2\epsilon - 1) + \frac{\mu a_E^2}{4a^3}J_2\right\}$$

$$+ \sin 2I \cos\Omega\left\{\frac{3GM_S a^2}{16 a_S^3}\sin 2\epsilon + \frac{3GM_M a^2}{16 a_M^3}\sin 2\epsilon\right\}$$

$$+ \sin^2 I \cos 2\Omega\left\{\frac{3GM_S a^2}{16 a_S^3}\sin^2\epsilon + \frac{3GM_M a^2}{16 a_M^3}\sin^2\epsilon\right\}$$

$$= (3\cos^2 I - 1)\left\{\frac{1}{16}(3\cos^2\epsilon - 1)\left(\frac{GM_S a^2}{a_S^3} + \frac{GM_M a^2}{a_M^3}\right) + \frac{\mu a_E^2}{4a^3}J_2\right\}$$

$$+ \sin 2I \cos\Omega\left\{\frac{3}{16}\sin 2\epsilon\left(\frac{GM_S a^2}{a_S^3} + \frac{GM_M a^2}{a_M^3}\right)\right\}$$

$$+ \sin^2 I \cos 2\Omega\left\{\frac{3}{16}\sin^2\epsilon\left(\frac{GM_S a^2}{a_S^3} + \frac{GM_M a^2}{a_M^3}\right)\right\}$$

$$\frac{GM_S a^2}{a_S^3} + \frac{GM_M a^2}{a_M^3} = n^2 a^2\left(\frac{GM_S}{n^2 a_S^3} + \frac{GM_M}{n^2 a_M^3}\right)$$

$$= n^2 a^2\left(\frac{GM_S}{n^2}\cdot\frac{n_S^2}{GM_S} + \frac{GM_M}{n^2}\cdot\frac{n_M^2}{G(M_E + M_M)}\right)$$

$$= n^2 a^2\left\{\left(\frac{n_S}{n}\right)^2 + \frac{M_M}{M_E + M_M}\left(\frac{n_M}{n}\right)^2\right\} = n^2 a^2 \alpha \quad \cdots (6.142)$$

$\vdots$

$$R_{sec} = (3\cos^2 I - 1)\left\{\frac{1}{16}(3\cos^2\epsilon - 1)n^2 a^2 \alpha + \frac{\mu a_E{}^2}{4a^3}J_2\right\}$$
$$+\sin 2I \cos\Omega\left\{\frac{3}{16}\sin 2\epsilon \cdot n^2 a^2 \alpha\right\}$$
$$+\sin^2 I \cos 2\Omega\left\{\frac{3}{16}\sin^2\epsilon \cdot n^2 a^2 \alpha\right\}$$

$$= n^2 a^2\left[(3\cos^2 I - 1)\left\{\frac{1}{16}(3\cos^2\epsilon - 1)\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{a_E}{a}\right)^2 J_2\right\}\right.$$
$$\left.+\sin 2I\cos\Omega\left\{\frac{3}{16}\alpha\sin 2\epsilon\right\} + \sin^2 I\cos 2\Omega\left\{\frac{3}{16}\alpha\sin^2\epsilon\right\}\right] \quad (\because 6.139 \sim 6.142)$$
$$= n^2 a^2\left(A(3\cos^2 I - 1) + B\sin 2I\cos\Omega + C\sin^2 I\cos 2\Omega\right) \quad \cdots(6.138)$$

ここで、月・太陽に関する実際のデータを使って、A, B, Cを評価し、(6.143)のように具体的な値を求める。
軌道傾斜角が小さい場合を考えているので、変数として I, Ω の代わりに、5.2.2項で導入した

$$q = \sin I\cos\Omega, \quad p = \sin I\cos\Omega \quad \cdots(6.144)$$

を使う。これを(6.138)へ代入する。（p, qについて3次の項は省略した）

Iが微小量だから

$(q^2 + p^2 = \sin^2 I)$

$$\cdot\ 3\cos^2 I - 1 = 3(1 - \sin^2 I) - 1$$
$$= 2 - 3\sin^2 I$$
$$= 2 - 3q^2 - 3p^2$$

$\vdots$

⋮

$$\cdot \sin 2I \cos\Omega = 2\sin I \cos I \cos\Omega$$
$$= 2q \cos I$$
$$= 2q\sqrt{1-\sin^2 I}$$
$$= 2q\sqrt{1-q^2-p^2}$$
$$= 2\sqrt{q^2-\underbrace{q^4-q^2p^2}_{\fallingdotseq\, 0}}$$
$$= 2q$$

$$\cdot \sin^2 I \cos 2\Omega = \sin^2 I(2\cos^2\Omega - 1)$$
$$= 2(\sin I \cos\Omega)^2 - \sin^2 I$$
$$= 2q^2 - (q^2+p^2)$$
$$= q^2 - p^2$$

以上をまとめると、

$$R_{SEC} = n^2a^2\left[A(2-3q^2-3p^2) + B\cdot 2q + C(q^2-p^2)\right]$$
$$= n^2a^2\left\{-(3A-C)q^2-(3A+C)p^2+2Bq+2A\right\} \quad \cdots (6.145)$$

b) 運動方程式とその解

新変数 q, p についての運動方程式を求める。

・(5.198), (5.197) より、

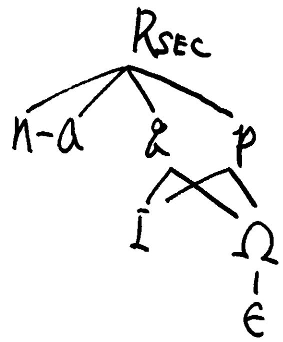
$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\cos I}{na^2\eta}\dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial p} - \dfrac{q\cos I}{2na^2\eta\cos^2\frac{I}{2}}\left(k\dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial h} - h\dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial k} + \dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial \epsilon}\right) & \cdots(5.198) \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\cos I}{na^2\eta}\dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial q} - \dfrac{p\cos I}{2na^2\eta\cos^2\frac{I}{2}}\left(k\dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial h} - h\dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial k} + \dfrac{\partial R_{SEC}}{\partial \epsilon}\right) & \cdots(5.197) \end{cases}$$

$(h = e\sin\tilde{\omega},\ k = e\cos\tilde{\omega} \quad \cdots(5.175))$

・共通する、2項目の括弧内を整理しておくと、

$$\underbrace{k\frac{\partial R_{SEC}}{\partial h}}_{\fallingdotseq 0} - \underbrace{h\frac{\partial R_{SEC}}{\partial k}}_{\fallingdotseq 0} + \frac{\partial R_{SEC}}{\partial \epsilon}$$

$(\because e \fallingdotseq 0)$



$(\epsilon = \sigma + \omega + \Omega)$
$(\tilde{\omega} = \omega + \sigma)$

$$= \frac{\partial R_{SEC}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R_{SEC}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon}$$

$\vdots$

となり、括弧の前に q or p がかかっていることから、第2項目は 0 と近似できることが暗算でわかる。

($\because$ (6.146) を導くときに、q, p について3次を省略したので、ここでは2次を省略する。)

以上まとめて、
(おいて、$e \fallingdotseq 0$, $\cos I = 1$)

(ノート 6.5-9 と同じ方法で) ← ($\frac{\partial R_{SEC}}{\partial p}$, $\frac{\partial R_{SEC}}{\partial q}$ について展開してないから わかりにくいけど大丈夫)

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2}\frac{\partial R_{SEC}}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{na^2}\frac{\partial R_{SEC}}{\partial q} \quad \cdots (6.146)$$

この(6.146)へ(6.145)を代入すると、

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2}\cdot n^2a^2\left\{-2(3A+C)p\right\}$$

$$= 2n(3A+C)p \quad \cdots (6.147)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2}\cdot n^2a^2\left\{-2(3A-C)q + 2B\right\}$$

$$= -2n(3A-C)q + 2Bn \quad \cdots (6.148)$$

これは、定数係数の線形微分方程式である。

まずは、(6.147)を(6.148)へ代入して、qについての式にまとめる。

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2n(3A+C)}\frac{dq}{dt}\right\} = -2n(3A-C)q + 2Bn$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -4n^2(9A^2-C^2)q + 4n^2B(3A+C)$$

$$\ddot{q} + 4n^2(9A^2-C^2)q = 4n^2B(3A+C) \quad \cdots ④$$

④の同次形の一般解を求める

$$\ddot{\varrho}' + 4n^2(9A^2 - C^2)\varrho' = 0$$

$$\therefore \varrho' = \alpha_1 \cos\sqrt{4n^2(9A^2-C^2)}\,t + \alpha_2 \sin\sqrt{4n^2(9A^2-C^2)}\,t$$

(α_1, α_2は積分定数)

④の特殊解をϱ_0とおくと、④の一般解は

$\varrho = \varrho' + \varrho_0$ (ϱ_0: const ④の右辺の形より)

と表せる。これを④へ代入

$$\ddot{\varrho}' + 4n^2(9A^2-C^2)(\varrho' + \varrho_0) = 4n^2B(3A+C)$$

$$4n^2(9A^2-C^2)\varrho_0 = 4n^2B(3A+C)$$

$$\varrho_0 = \frac{B}{3A-C}$$

以上をまとめると、

$$\varrho = c\cos\left(\sqrt{4n^2(9A^2-C^2)}\,t + \gamma\right) + \frac{B}{3A-C}$$

$$= c\cos(\rho t + \gamma) + q \quad \cdots (6.149)$$

この(6.149)を(6.147)へ代入すると、

$$-\rho c \sin(\rho t + \gamma) = 2n(3A+C)\cdot p$$

$$p = -c\frac{2n\sqrt{9A^2-C^2}}{2n(3A+C)}\sin(\rho t + \gamma)$$

$$= -c\sqrt{\frac{(3A+C)(3A-C)}{(3A+C)^2}}\sin(\rho t + \gamma)$$

$$= -c\sqrt{\frac{3A-C}{3A+C}}\sin(\rho t + \gamma)$$

$$= -c\sqrt{\frac{1-C/3A}{1+C/3A}}\sin(\rho t + \gamma) \quad \cdots (6.150)$$

6.5.2 経度に依存する地球ポテンシャルによる摂動

経度に依存するポテンシャルは

$$R = \frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_E}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)$$

である。

自分で導出できないけど、とりあえず使ってみる。
多分ラプラス方程式とけばでてくる？ …(6.153)

地球に固定した座標系を地球の主慣性軸と一致するようにすると、
$C_{2,1} = S_{2,1} = 0$ となる。

すると、経度に依存する地球ポテンシャルの主要項は、

$$R = \frac{\mu a_E^2}{r^3} P_2^2(\sin\varphi)\left(C_{2,2}\cos 2\lambda + S_{2,2}\sin 2\lambda\right) \quad \cdots (6.154)$$

である。ケプラー力とポテンシャル(6.154)からの力の大きさの比は、

$$\frac{|-\nabla R|}{|-\nabla U|} \sim \frac{\frac{\partial}{\partial r}R}{\frac{\partial}{\partial r}U}$$

$$= \frac{3\frac{\mu a_E^2}{r^4} P_2^2(\sin\varphi)\left(C_{2,2}\cos 2\lambda + S_{2,2}\sin 2\lambda\right)}{\frac{\mu}{r^2}}$$

$$\sim \left(\frac{a_E}{a}\right)^2\left(C_{2,2}\cos 2\lambda + S_{2,2}\sin 2\lambda\right) \quad \cdots (6.155)$$

赤道面内を円運動している同期衛星を議論している。
⇒ 緯度 $\varphi = 0$
経度 ψ は　$\psi = \lambda - \theta$　$\cdots(6.156)$　と近似できる。
(θ: 地球の自転角)

この ψ についての運動方程式を導く。
(5.173) より、

$$\lambda = nt + \epsilon = \int n\,dt + \epsilon^{I} = \rho + \epsilon^{I} \quad \cdots(5.173)$$

ψ の時間微分は、

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d(\rho + \epsilon^{I})}{dt} - \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\epsilon^{I}}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \quad \cdots(6.157)$$

さらに、この両辺を時間微分すると、

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}_{= -\frac{3}{a^3}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\ (\because 5.174)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\epsilon^{I}}{dt}\right) - \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}_{= 0\ (\because 等速円運動)}$$

$$= -\frac{3}{a^3}\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\epsilon^{I}}{dt}\right) \quad \cdots(6.158)$$

ここで、テキストでは(6.158)の第2項部分

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\epsilon_1}{dt}\right) \quad \cdots ㋑$$

を微小量とみて無視できる理由が説明されているが、よ意味がわからない。おそらく以下のようなことが言いたいものと思われる。

(5.174)より

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\eta}\frac{\partial R}{\partial I} \quad \cdots (6.159)$$

であることがわかっている。Rは $a, e, I, \omega, \Omega, l(a,t)$ の関数なので、これを時間微分すれば㋑の中の項は全てに

$$\frac{dl}{dt}\frac{\partial R}{\partial l} \quad \cdots ㋺$$

という部分をもつことになる。このとき $\frac{dl}{dt}(=n)$ は1周期程度では大して変化しないことがわかっている。しかしRは周期関数なので、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R}{\partial l}\,dl = 0$$

となり、㋑は無視できることとなる。

上記の近似と$P_2^2(0)=3$を使って(6.154)を表現すると、

$$R=\frac{\mu a_E^2}{a^3}\cdot 3\cdot(C_{2,2}\cos 2\psi+S_{2,2}\sin 2\psi)$$

$$=\frac{3\mu a_E^2}{a^3}(C_{2,2}\cos 2\psi+S_{2,2}\sin 2\psi) \quad \cdots (6.160)$$

である。このRを(6.158)へ代入すると、

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \lambda}$$

$$=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

$$=-\frac{3}{a^2}\cdot\frac{3\mu a_E^2}{a^3}\left(-2C_{2,2}\sin 2\psi+2S_{2,2}\cos 2\psi\right)\cdot 1$$

$$=18\frac{\mu a_E^2}{a^5}\left(C_{2,2}\sin 2\psi-S_{2,2}\cos 2\psi\right)$$

$$=18n^2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2(C_{2,2}\sin 2\psi-S_{2,2}\cos 2\psi)$$

$$=18n^2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\sqrt{C_{2,2}^2+S_{2,2}^2}\sin(2\psi+\beta)$$

$$\left(\begin{cases}\sqrt{C_{2,2}^2+S_{2,2}^2}\cos\beta=C_{2,2}\\ \sqrt{C_{2,2}^2+S_{2,2}^2}\sin\beta=-S_{2,2}\end{cases}\Rightarrow \tan\beta=-\frac{S_{2,2}}{C_{2,2}}\right.$$

$$\Rightarrow \beta=\tan^{-1}\left(-\frac{S_{2,2}}{C_{2,2}}\right)=29.2^\circ \quad \cdots (6.162)$$

以下では、

$$0 < 2\psi + \beta < 2\pi$$

$$\therefore 0 < \psi + \frac{\beta}{2} < \pi$$

と限定する。
新たな変数

$$\chi = \pi - (2\psi + \beta) \quad \cdots (6.163)$$

を導入すると、運動方程式 (6.161) は、

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{1}{2}(\pi - \beta - \chi)\right\} = 18n^2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\sqrt{C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2}\sin(\pi - \chi)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\chi}{dt^2} = 18n^2\left(\frac{a_E}{a}\right)^2\sqrt{C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2}\sin\chi$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -36\left(C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a_E}{a}\right)^2 n^2 \sin\chi$$

$$= -\{\underbrace{6\left(C_{2,2}^2 + S_{2,2}^2\right)^{\frac{1}{4}}\frac{a_E}{a}n}_{=\nu \ \cdots (6.165)}\}^2\sin\chi$$

$$= -\nu^2\sin\chi \quad \cdots (6.164)$$

振幅が小さいときは調和振動子となり、その振動周期は、

$$\frac{2\pi}{\nu} \underset{\left(\because n = \frac{2\pi}{P}\right)}{=} \frac{2\pi \cdot P}{1.21\times10^3 \cdot 2\pi} \underset{(\because P = 0.9973\text{日} \ \text{P.208})}{=} \frac{0.9973}{1.21\times10^3} = 823\text{日} = 2.4\text{年}$$

(6.164)の両辺に$\dot{x}$を掛けて時間について積分すると、

・(6.164) × $\dot{x}$

$$\dot{x}\cdot\ddot{x} = -\dot{x}\cdot \nu^2 \sin x$$

・積分

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \nu^2 \cos x + E$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \nu^2 \cos x = E \quad \cdots (6.166)$$

（E：エネルギー積分）

ここで、

$$E = -\nu^2 \cos\alpha, \quad \alpha > 0 \quad \cdots (6.167)$$

とする。運動エネルギーは、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\nu^2(\cos x - \cos\alpha) \quad \cdots (6.168)$$

よって、

$$\cos x - \cos\alpha > 0$$

$$\cos x > \cos\alpha \quad \cdots$$

でなくてはいけない。(6.163)よりxのとり得る範囲は、

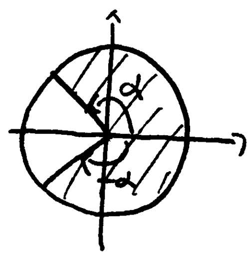
$$-\pi < x < \pi$$

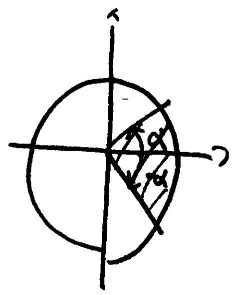
なので、

$$\cos x > \cos\alpha$$

$$\therefore |x| < \alpha \quad \cdots (6.169)$$

である。





よってψのとりうる範囲は、

$$-\alpha < \pi - (2\psi + \beta) < \alpha$$

$$-\alpha - \pi + \beta < -2\psi < \alpha - \pi + \beta$$

$$\frac{1}{2}(\pi - \beta - \alpha) < \psi < \frac{1}{2}(\pi - \beta + \alpha) \quad \cdots (6.170)$$

「単振動の運動方程式の解はヤコビの楕円関数snを使って

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\,\mathrm{sn}(\nu t + \mathrm{const}) \quad \cdots (6.171)$$

周期は

$$P = \frac{4}{\nu}K(k) \quad \cdots (6.172)$$

となる。ここで

$$k = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \cdots (6.173)$$

であり、$K(k)$はkを母数とする第1種完全楕円積分であるらしいが、楕円積分のことよくわからないから後で復習する。」

6.5.3 軌道制御

a) 南北制御

打ち上げ時の軌道傾斜角がゼロとなる軌道は、(6.144)より、

$$\begin{cases} q_0 = \sin 0 \cos \Omega = 0 \\ p_0 = \sin 0 \sin \Omega = 0 \end{cases}$$

という条件が課されるので、これを(6.149), (6.150)へ代入して、

$$\begin{cases} q_0 = c\cos\gamma + q = 0 \\ p_0 = -c\sin\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\cos\gamma = -q \\ c\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

ここで(6.150)の$\sqrt{}$は ≒1.03〜1と近似している

この初期条件を(6.149), (6.150)へ代入すると、

$$q = c(\cos\rho t\cos\gamma - \sin\rho t\sin\gamma) + q$$
$$= -q\cos\gamma + q$$
$$= q(1-\cos\gamma) \quad \cdots (6.174)$$

$$p = -c\sin(\rho t+\gamma)$$
$$= -c\sin\rho t\cos\gamma - c\cos\rho t\sin\gamma$$
$$= q\sin\rho t \quad \cdots (6.175)$$

ここで、(6.144)より

$$\sin^2 I = q^2 + p^2 \quad \leftarrow \text{ここへ (6.174), (6.175) を代入}$$

$$= q^2(1 - 2\cos\rho t + \cos^2\rho t + \sin^2\rho t)$$

$$= 2q^2(1 - \cos\rho t) \quad \cdots (6.176)$$

$$\fallingdotseq 2q^2\left\{1 - \left(1 - \frac{(\rho t)^2}{2!} + \cdots\right)\right\}$$

$$\fallingdotseq (q\rho t)^2$$

$$\therefore \sin I = q\rho t \quad \cdots (6.177)$$

打ち上げ直後の軌道傾斜角が小さいときのことを考えているので

$$I \sim q\rho t$$

$$= 0.1313 \times 5.067 \times 10^{-5} n\ t$$

$$= 6.653 \times 10^{-6} nt$$

$$= (2.40^\circ \times 10^{-3}/\text{日})\, t \quad \cdots (6.178)$$

軌道傾斜角が0から0.1度までずれるには、

$$\frac{0.1}{2.40 \times 10^{-3}} = 41.7\ \text{日}$$

かかる。

次に、軌道制御してこのズレを0に戻したい。

ガウスの惑星方程式を用いる。

(5.203)より、

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{na^2\eta} W\cos(f+\omega) \quad \cdots (6.179)$$

軌道傾斜角を変化させるには、軌道面に垂直な力 W を加えればよいことがわかる。

また、(5.201)〜(5.206)をチェックすると、W により変化させられる軌道要素に(5.205)、(5.206)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{nae}\left\{R \sim S \sim\right\} - \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta} W\cot i \quad \cdots (5.205)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta\sin i} W \quad \cdots (5.206)$$

がある。

ここで、$f+\omega = 0$ or 180度(すなわち昇交点 or 降交点)となるときに W を作用させれば、軌道傾斜角を最大効率で変化させられる上に、ω や Ω が不本意に変化してしまうことも防げる。

W を微小時間 dt だけ作用させるということは、

$$du = W dt \quad \cdots (6.180)$$

だけ加速させることに対応している。

衛星が昇交点に来たときに軌道傾斜角をdIだけ変化させるのに必要な加速量は、(6.179), (6.180)から、

$$dI = \frac{1}{na} W a \cos(0) dt \leftarrow 6.179より + (e=0, r=a, f+\omega=0)$$

$\downarrow$ ($\because$ 6.180)

$$dv = na\, dI$$
$$= v_0\, dI \quad \cdots (6.181)$$

軌道傾斜角を0.1度減らして軌道面を赤道面と一致させるには、(このとき、静止軌道の公転速度v_0は 3.07 km/s である。)

$$dv = 3.07 \times 10^3 \text{ m/s} \times (-0.1) \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$
$$= -5.4 \text{ m/s}$$

1年間にわたって軌道傾斜角を0.1度より小さくするのに必要な1年間の加速の総量は、

$$\frac{365}{41.7} \times 5.4 \text{ m/s} \sim 47 \text{ m/s}$$

である。

b) 東西制御

・衛星のC点近傍での運動

衛星がC点に来たとき、

・ψは最大値（$\psi_c = \psi_{max}$）をとり、
・χは最小値（$\chi_c = -\alpha$）をとる。 ←（∵ 6.163）

よって、

$$\dot{\chi}(-\alpha) = 0 \quad \cdots (6.182)$$ （∵ 極値周りでのビブン）

(6.161)より、

$$\ddot{\chi}(-\alpha) = -\nu^2 \sin(-\alpha) = \nu^2 \sin\alpha \quad \cdots (6.183)$$

これらを用いて、χをC点周りでテイラー展開する

$$\begin{aligned}\chi &= \chi_c + \dot{\chi}_c t + \frac{1}{2!}\ddot{\chi}_c t^2 + O(t^3)\\ &= -\alpha + \frac{1}{2}\nu^2 \sin\alpha \cdot t^2 + O(t^3)\\ &= \frac{1}{2}(\nu t)^2 \sin\alpha - \alpha + O(t^3) \quad \cdots (6.184)\end{aligned}$$

χに対応するψのψ_{max}からのずれを$\Delta\psi = \psi - \psi_{max}$とすると、

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \frac{1}{2}(-\chi + \pi - \beta) - \frac{1}{2}(-\chi_c + \pi - \beta) \quad (\because 6.163)\\ &= -\frac{1}{2}(\chi - \chi_c)\\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\nu t)^2 \sin\alpha - \alpha + \alpha\right\} + O(t^3)\\ &\fallingdotseq -\frac{1}{4}(\nu t)^2 \sin\alpha\\ &= -\frac{1}{4}(1.21 \times 10^{-3}\, nt)^2 \sin\alpha \quad (\because 6.165)\\ &= -3.66 \times 10^{-7}(nt)^2 \sin\alpha \quad \cdots (6.185)\end{aligned}$$

C点近くでのψの時間変化は、

$$\frac{\psi_{(t)} - \psi_c}{t - t_c} = \frac{\Delta\psi}{t} \quad (\because ここで t_c = 0 とする)$$

より、

$$\dot{\psi} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\psi}{t}$$

$$= \frac{d}{dt}\Delta\psi$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot 2\nu^2 t \cdot \sin\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}\nu^2 t \sin\alpha$$

$$\nu \quad (\because 6.165)$$

$$= -\frac{1}{2}(1.21 \times 10^{-3} n)^2 t \sin\alpha$$

$$= -(7.32 \times 10^{-7} n^2 \sin\alpha) t \quad \cdots (6.186)$$

・ψの角速度を東向きに$2|\dot{\psi}_{(t_A)}|$だけ増加させる具体的方法

ψの角速度を東向きに$2|\dot{\psi}_{(t_A)}|$だけ増加させる
$= n$を$2|\dot{\psi}_{(t_A)}|$だけ増加させる

ケプラーの第3法則の両辺を時間微分すると、$\left(\overset{\text{Kepler 3}}{\mu = n^2 a^3}\right)$

$$0 = 2n \cdot \frac{dn}{dt} \cdot a^3 + n^2 \cdot 3a^2 \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\therefore \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt} \quad \cdots (6.187)$$

↑つまり、東西制御をするには a を変化させれば……ことがわかる

aを変化させるには、ガウス方程式(5.210)より、
T(接線方向の力)を作用させればよいことがわかる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{1+2e\cos f+e^2}{1-e^2}}\,T \qquad \begin{matrix}(5.210)\\ \cdots(6.188)\end{matrix}$$

この(6.188)を(6.187)へ代入する

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{a}\cdot\frac{2}{n}\underbrace{\sqrt{\frac{1+2e\cos f+e^2}{1-e^2}}}_{\downarrow e\sim 0 \atop 1}\,T$$

$$= -\frac{3}{a}T$$

$$= -\frac{3n}{v_0}T \quad (\because v_0 = na) \leftarrow (e\sim 0)$$

$$\cdots(6.189)$$

この(6.189)より、dtだけTを作用させたときの平均運動の変化dnは、

$$dn = -\frac{3n}{v_0}T\,dt = -\frac{3n}{v_0}dv \qquad \cdots(6.190)$$

ここでのdvは接線方向への加速なので、(6.190)より必要となる加速量は、

$$dv = -\frac{dn}{3n}v_0$$

$$= -\frac{2|\dot{\psi}(t_A)|}{3n}v_0 \qquad \cdots(6.191)$$

。「ひまわり」の東西制御に必要な加速量を求めてみる。

静止衛星の平均運動の値は、

$$n = \frac{360度}{1恒星日} = \frac{360.986度}{日} = \frac{2\pi \times 1.0027}{日}$$

を使う。

東経140度の赤道面内に投入された「ひまわり」の α は130度である。
(6.185)を使って、「ひまわり」は投入後 $t_A = 17日$ たつと、

$$\Delta\psi = -0.37\times10^{-6}(2\pi\times1.0027\times17)^2 \sin 130^\circ \ \text{rad}$$

$$= -3.3\times10^{-3} \ \text{rad}$$

$$= -0.19度$$

$$\sim 2\Delta \qquad \cdots (6.192)$$

だけ西へ移動する。
この地点での「ひまわり」の西向き角速度は、(6.186)より、

$$\dot{\psi}(t_A) = -0.74\times10^{-6}(2\pi\times1.0027 \ /日)^2 \sin130^\circ \times 17日$$

$$= -3.8\times10^{-4} \ \text{rad}/日 \qquad \cdots (6.193)$$

←(テキストは度だけどノートはrad)

これらの数値を(6.191)へ代入すると必要な加速量は、

$$\Delta u = -\frac{2\times3.8\times10^{-4}}{3\times2\pi\times1.0027}\times3.07\times10^3 \ \text{m/s}$$

$$= -0.12 \ \text{m/s} \qquad \cdots (6.194)$$

1年間に必要な加速量は

$$\frac{365.25}{2\times 17}\times 0.12 = 1.3\ \mathrm{m/s}$$

である。

東西制御による「ひまわり」の軌道長半径の変化は、(6.187)より、

$$da = -\frac{2}{3}\frac{dn}{n}a \quad \leftarrow \dot{\lambda}(t_a)$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{3.8\times 10^{-4}}{2\pi\times 1.0027}\cdot 4.216\times 10^{4}\ \mathrm{km}$$

$$= -1.7\ \mathrm{km}$$