P.137 (5.10)→(5.11)の微分方程式の解き方

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}\cos\theta - \frac{a_0^3}{6\omega_0^2}\cos 3\theta \quad \cdots (5.10)$$

$$\Downarrow \qquad (\theta = \omega_0 t)$$

$$x_2 = \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3} t\sin\theta + \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\theta \quad \cdots (5.11)$$

・(5.10)の解は、

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}\cos\theta \quad \cdots ①$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{a_0^3}{6\omega_0^2}\cos 3\theta \quad \cdots ②$$

の解の重ね合わせによって与えられる。

・のについて解く

このの が両辺~~角~~の振動数が一致していて共鳴をおこす原因。

のの解の形を以下のように仮定して のへ代入する

$$x_2 = a_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2) + A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t \quad \cdots ③$$

共鳴がおこるときは、ここを変数にする

③とのへ代入

$$-a_2\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha_2) + \ddot{A}(t)\cos\omega_0 t - 2\omega_0\dot{A}(t)\sin\omega_0 t - \omega_0^2 A(t)\cos\omega_0 t$$
$$+\ddot{B}(t)\sin\omega_0 t + 2\omega_0\dot{B}(t)\cos\omega_0 t - \omega_0^2 B(t)\sin\omega_0 t$$
$$+a_2\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha_2) + \omega_0^2 A(t)\cos\omega_0 t + \omega_0^2 B(t)\sin\omega_0 t$$
$$= \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}\cos\theta$$

⋮

⋮

$$(\ddot{A}(t) + 2\omega_0 \dot{B}(t))\cos\omega_0 t + (\ddot{B}(t) - 2\omega_0 \dot{A}(t))\sin\omega_0 t = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}\cos\underbrace{\theta}_{=\omega_0 t}$$

両辺を比較すると、

$$\begin{cases} \ddot{A}(t) + 2\omega_0 \dot{B}(t) = \dfrac{5a_0^3}{6\omega_0^2} & \cdots ④ \\ \ddot{B}(t) - 2\omega_0 \dot{A}(t) = 0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤を t で積分

$$\dot{B}(t) - 2\omega_0 A(t) = \mathrm{const}$$

$$\dot{B}(t) = 2\omega_0 A(t) \quad \cdots ⑥$$

x_0の一般解はすでに求めているので、x_1, x_2については特殊解がわかればよい。
よって今回のx_2についての計算で出てきた積分定数は任意で計算しやすくなるように決めていい！

⑥を④へ代入

$$\ddot{A}(t) + 4\omega_0^2 A(t) = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2} \quad \cdots ⑦$$

⑦の解を以下のように仮定する

$$A(t) = a_2' \cos(2\omega_0 t + \alpha_2') + C_2' \quad \cdots ⑧$$

これを⑦へ代入する

$$-4\omega_0^2 a_2' \cos(2\omega_0 t + \alpha_2') + 4\omega_0^2 a_2' \cos(2\omega_0 t + \alpha_2') + 4\omega_0^2 C_2' = \frac{5a_0^3}{6\omega_0^2}$$

$$\therefore C_2' = \frac{5a_0^3}{24\omega_0^4} \quad \cdots ⑨$$

これを⑧へ戻すと、

$$A(t) = a_2' \cos(2\omega_0 t + \alpha_2') + \frac{5a_0^3}{24\omega_0^4}$$

$$= \frac{5a_0^3}{24\omega_0^4} \quad \cdots ⑩$$

これを⑥へ代入してtで積分する

$$\dot{B}(t) = 2\omega_0 \cdot \frac{5a_0^3}{24\omega_0^4}$$

積分

$$B(t) = \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3}t + \mathrm{const}$$

$$= \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3}t \quad \cdots (11)$$

⑩, ⑪を③へ代入すると、

$$x_2 = a_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2) + \frac{5a_0^3}{24\omega_0^4}\cos\omega_0 t + \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3}t\sin\omega_0 t$$

$$= \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3}t\sin\omega_0 t \quad \cdots (12)$$

ここ自信ない、、2項目消して大丈夫?
でもこうしないと解けない、、
↓
やっぱり間違ってるはず

・②について解く

解の形は、

$$x_2 = a_2''\cos(\omega_0 t + \alpha_2'') + A'\cos 3\omega_0 t + B'\sin 3\omega_0 t \quad \cdots (13)$$

となることがわかっており、これを②へ代入する

$$-\omega_0^2 a_2''\cos(\omega_0 t + \alpha_2'') - 9\omega_0^2(A'\cos 3\omega_0 t + B'\sin 3\omega_0 t)$$
$$+\omega_0^2\{a_2''\cos(\omega_0 t + \alpha_2'') + A'\cos 3\omega_0 t + B'\sin 3\omega_0 t\} = -\frac{a_0^3}{6\omega_0^2}\cos 3\theta$$

$$8\omega_0^2(A'\cos 3\omega_0 t + B'\sin 3\omega_0 t) = \frac{a_0^3}{6\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t$$

両辺比較して、

$$\begin{cases} 8\omega_0^2 A' = \dfrac{a_0^3}{6\omega_0^2} \\ 8\omega_0^2 B' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = \dfrac{a_0^3}{48\omega_0^4} \\ B' = 0 \end{cases} \quad \cdots (14)$$

⑭を⑬へ代入すると、

$$x_2 = a_2'' \cos(\omega_0 t + \alpha_2'') + \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\omega_0 t$$

$$= \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\omega_0 t \quad (\text{特殊解})$$

$$\cdots ⑮$$

・⑫と⑮の重ね合わせは、

$$x_2 = \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3} t \sin\omega_0 t + \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\omega_0 t$$

$$= \frac{5a_0^3}{12\omega_0^3} t \sin\theta + \frac{a_0^3}{48\omega_0^4}\cos 3\theta \quad \cdots (5.11)$$