1.1 楕円

定義より、

$$PF + PF' = 一定 = 2a \quad \cdots (1.1)$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺の自乗をとる

$$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

さらに、両辺の自乗をとる

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2c^2$$

両辺を $a^4 - a^2c^2$ でわる

$$\frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2(a^2-c^2)} + \frac{a^2 y^2}{a^2(a^2-c^2)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \quad \cdots (1.2)$$

$\boxed{\text{直交座標における楕円の表現}}$

~~ここで、$c = ae$ … (1.3) とおく~~。

次に $\boxed{\text{焦点を原点とする楕円の極座標表示}}$ を求める。

$$\begin{cases} x = r\cos f + ae \\ y = r\sin f \end{cases} \quad \cdots (1.4)$$

これを、(1.2)へ代入

$$\frac{(r\cos f + ae)^2}{a^2} + \frac{(r\sin f)^2}{a^2 - \underbrace{a^2e^2}_{(1.3)より}} = 1$$

$$\frac{r^2\cos^2 f + 2aer\cos f + a^2e^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2 f}{a^2(1-e^2)} = 1$$

両辺に $a^2(1-e^2)$ をかける

$$(1-e^2)(r^2\cos^2 f + 2aer\cos f + a^2e^2) + r^2\sin^2 f = a^2(1-e^2)$$

↓

rについてまとめる

$$(1-e^2\cos^2 f)\,r^2+(1-e^2)(2ae\cos f)\,r-a^2(e^4-2e^2+1)=0$$

$$\{r(1+e\cos f)-a(1-e^2)\}\{r(1-e\cos f)+a(1-e^2)\}=0 \quad \cdots (1.5)$$

楕円であるならば、$e<1$ である。(∵ (1.3) $c=ae$)
よって、(1.5)の左辺第2因子は正であるので、
左辺$=0$となるためには、(∵ $r>0$, $1-e\cos f>0$, $a>0$, $(1-e^2)>0$)

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \quad \cdots (1.6)$$

焦点と近点の距離をqとすると、

$$q=a(1-e) \quad \cdots (1.7)$$

これを(1.6)に代入すると、

$$r=\frac{q(1+e)}{1+e\cos f} \quad \cdots (1.8)$$

ここからは、$\boxed{\text{楕円の媒介変数表示}}$について述べる。
媒介変数uを

$$\begin{cases} x=a\cos u & \cdots (1.9) \\ y=a\sqrt{1-e^2}\,\sin u & \cdots (1.10) \end{cases}$$

と定義する。
$\boxed{\text{焦点を原点とする楕円の極座標表示}}$のときの変数$r, f$と今回の変数$u$との関係を求めるために、焦点を原点とする直交座標$x^*, y^*$を考える。

$$x^*=r\cos f=a\cos u-c=a(\cos u-e) \quad \cdots (1.11)$$

$$y^*=r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\,\sin u \quad \cdots (1.12)$$

(1.11)と(1.12)の両辺の自乗の和をとると、

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{x^{*2}+y^{*2}} \\ &=\sqrt{a^2(\cos^2 u-2e\cos u+e^2)+a^2(1-e^2)\sin^2 u} \\ &=a\sqrt{(e\cos u-1)^2} \\ &=a(1-e\cos u) \qquad (\because\ e<1 \text{ より } 1-e\cos u>0) \\ &\cdots (1.13) \end{aligned}$$

また、(1.11)と(1.12)をもちいて、fとuの関係を求めると、

$$\frac{y^*}{x^*} = \frac{r\sin f}{r\cos f} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin u}{a(\cos u - e)}$$

$$\Rightarrow \tan f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{\cos u - e} \quad \cdots (1.14)$$

(1.14)の形では、実用的ではないので、~~(1.11)と(1.12)~~ 変形する。

$$(1.14)\text{の左辺} = \tan\left(\frac{f}{2}+\frac{f}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{f}{2}}{1-\tan^2\frac{f}{2}} \quad \cdots (1.15)$$

$$(1.14)\text{の右辺} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\left(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}\right) - e}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-e^2}\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\left(\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}\right) - e}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-e^2}\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\left(\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}\right) - e\left(\cos^2\frac{u}{2}+\sin^2\frac{u}{2}\right)}$$

分母と分子に $\times \, 1/\cos^2\frac{u}{2}$

$$= \frac{2\sqrt{1-e^2}\tan\frac{u}{2}}{\left(1-\tan^2\frac{u}{2}\right) - e\left(1+\tan^2\frac{u}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-e^2}\tan\frac{u}{2}}{(1-e) - (1+e)\tan^2\frac{u}{2}}$$

分母・分子に $\times \, 1/1-e$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}}{1-\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{u}{2}} \quad \cdots (1.16)$$

以上をまとめると、

$$\frac{2\tan\frac{f}{2}}{1-\tan^2\frac{f}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}}{1-\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{u}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2} \quad \cdots (1.17)$$

ここで、後に必要となるrとfの時間微分を、媒介変数uを用いて表現する。

まずは、(1.11)と(1.12)の両辺を時間について微分する。

$$\dot{r}\cos f - r\dot{f}\sin f = -a\dot{u}\sin u \quad \cdots (1.11)'$$

$$\dot{r}\sin f + r\dot{f}\cos f = a\sqrt{1-e^2}\,\dot{u}\cos u \quad \cdots (1.12)'$$

この2式を$\dot{r}$, $\dot{f}$について解く。

$(1.11)'\times\cos f + (1.12)'\times\sin f$

$$\begin{aligned} &\dot{r}\cos^2 f - r\dot{f}\sin f\cos f &&= -a\dot{u}\sin u\cos f \\ +)\ &\dot{r}\sin^2 f + r\dot{f}\sin f\cos f &&= a\sqrt{1-e^2}\,\dot{u}\cos u\sin f \\ \hline &\dot{r} &&= a\dot{u}(-\sin u\cos f + \sqrt{1-e^2}\cos u\sin f) \quad \cdots (\mathrm{i}) \end{aligned}$$

$(1.12)'\times\cos f - (1.11)'\times\sin f$

$$\begin{aligned} &\dot{r}\sin f\cos f + r\dot{f}\cos^2 f &&= a\sqrt{1-e^2}\,\dot{u}\cos u\cos f \\ -)\ &\dot{r}\sin f\cos f - r\dot{f}\sin^2 f &&= -a\dot{u}\sin u\sin f \\ \hline &r\dot{f} &&= a\dot{u}(\sin u\sin f + \sqrt{1-e^2}\cos u\cos f) \quad \cdots (\mathrm{ii}) \end{aligned}$$

(1.11)と(1.12)を用いてf, $r=a(1-e\cos u)$を用いてrを(i)(ii)から消去する

$$(\mathrm{i}):\ \dot{r} = a\dot{u}\left\{-\sin u\,\frac{a(\cos u - e)}{a(1-e\cos u)} + \sqrt{1-e^2}\cos u\,\frac{a\sqrt{1-e^2}\sin u}{a(1-e\cos u)}\right\}$$

$$= ae\dot{u}\sin u \quad \cdots (1.18)$$

$$(\mathrm{ii}):\ r\dot{f} = a\dot{u}\left\{\sin u\cdot\frac{a\sqrt{1-e^2}\sin u}{a(1-e\cos u)} + \sqrt{1-e^2}\cos u\,\frac{a(\cos u - e)}{a(1-e\cos u)}\right\}$$

$$= \cancel{1-e\cos u}\ \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\dot{u} \quad \cdots (1.19)$$