5.2 定数変化法

2体問題に摂動が働いたときの運動を、定数変化法を用いて議論する。

5.2.1 定数変化法の基本方程式

- 慣性系における運動方程式は

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \underbrace{\mathbf{X}}_{\text{摂動力}} \qquad \cdots(5.89)$$

である。

- 2階連立方程式(5.89)を1階連立の運動方程式に書き換える。

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i \quad , \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}x_i + X_i \qquad \cdots(5.90)$$

- 摂動がないとき、つまり $X_i = 0$ のとき、(5.89)の解は解析的に

$$x_i = f_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) , \quad u_i = g_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t)$$

で、c_j ($j=1 \sim 6$) は6個の積分定数である。 $\cdots(5.91)$

(摂動がないときは、ただの単振動の式になるので

$x_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + C_2)$

積分定数2つでてくる

これが3次元になれば、$2 \times 3 = 6$個の積分定数)

(5.91)は$X_i=0$での(5.90)の解であるので、

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}=g_i,\quad \frac{\partial g_i}{\partial t}=-\frac{\mu}{r^3}f_i \qquad \cdots(5.92)$$

である。

・<u>摂動があるとき</u>　つまり$X_i\neq 0$のとき

(5.91)ででてきたc_iを定数ではなく時間の関数とみなしてとく。

・まずは(5.91)を(5.90)へ代入する

$$\frac{dx_i}{dt}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left\{f_i(c_1(t),c_2(t),c_3(t),c_4(t),c_5(t),c_6(t),t)\right\}}_{=\frac{\partial f_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}}=u_i=g_i \qquad \cdots(5.93)$$

$$\frac{du_i}{dt}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left\{g_i(c_1(t),c_2(t),c_3(t),c_4(t),c_5(t),c_6(t),t)\right\}}_{=\frac{\partial g_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}}=-\frac{\mu}{r^3}f_i+X_i \qquad \cdots(5.94)$$

・(5.92)を(5.93), (5.94)へ代入する

$$g_i+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=g_i \qquad (\because 5.93)$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=0 \qquad \cdots(5.95)$$

$$-\frac{\mu}{r^3}f_i+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=-\frac{\mu}{r^3}f_i+X_i \qquad (\because 5.94)$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=X_i \qquad \cdots(5.96)$$

c_iについての1階連立方程式

・(5.95)、(5.96)を $\dfrac{dC_j}{dt}$ について陽に解くことを考える。

教科書の説明はなんだかよくわからないが、結局は以下の計算をしている

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f_1}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}\cdot\left(-\frac{\partial g_1}{\partial C_l}\right)=0$$

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f_2}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}\cdot\left(-\frac{\partial g_2}{\partial C_l}\right)=0$$

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f_3}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}\cdot\left(-\frac{\partial g_3}{\partial C_l}\right)=0$$

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial g_1}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial C_l}=X_1\frac{\partial f_1}{\partial C_l}$$

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial g_2}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial C_l}=X_2\frac{\partial f_2}{\partial C_l}$$

$$+)\ \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial g_3}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial C_l}=X_3\frac{\partial f_3}{\partial C_l}$$

$$\sum_{j=1}^{6}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial C_l}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial C_j}-\frac{\partial g_i}{\partial C_l}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial C_j}\right)\right\}\cdot\frac{dC_j}{dt}=X_1\frac{\partial f_1}{\partial C_l}+X_2\frac{\partial f_2}{\partial C_l}+X_3\frac{\partial f_3}{\partial C_l}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{6}[C_l, C_j]\frac{dC_j}{dt}=X_1\frac{\partial X_1}{\partial C_l}+X_2\frac{\partial X_2}{\partial C_l}+X_3\frac{\partial X_3}{\partial C_l} \quad \cdots(5.97)$$

ラグランジュの括弧式

定義

$$[C_l, C_j]=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial C_l}\frac{\partial g_i}{\partial C_j}-\frac{\partial g_i}{\partial C_l}\frac{\partial f_i}{\partial C_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial X_i}{\partial C_l}\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial C_j}-\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial C_l}\frac{\partial X_i}{\partial C_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(X_i, \dot{X}_i)}{\partial(C_l, C_j)} \quad \cdots(5.98)$$

・摂動力がポテンシャルから導かれる場合を考える

このとき、摂動力は、

$$X_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} \quad \cdots (5.99)$$

と表すことができる。このRを摂動関数と呼んでいる。

(ふだんポテンシャルから力を求めるときは、$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ とするので、今回はマイナスがついていないことに注意。)

この(5.99)を(5.97)に代入すると、

$$\sum_{j=1}^{6}[C_l, C_j]\frac{dC_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial C_l} + \frac{\partial R}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial C_l} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial C_l} = \frac{\partial R}{\partial C_l} \quad \cdots (5.100)$$

ポテンシャルが存在する保存系を取り扱う場合の基本方程式

5.2.2 摂動ポテンシャルが速度を含む場合

摂動ポテンシャルが速度も含む場合の定数変化法を用いた運動方程式を導く。

ハミルトニアンは、

速度にも依存する摂動ポテンシャル

$$F = \frac{1}{2}p^2 + U(q) + V(q, p) = F_0 + V(q, p) \quad \cdots (5.101)$$

運動方程式は、

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} = p + \frac{\partial V}{\partial p_i} \quad \cdots (5.102)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \cdots (5.103)$$

◦摂動がないとき　($V=0$)

解は6個の積分定数 C_i, ($i=1\sim6$) を用いて

$$q_i = f_i(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t), \quad p_i = g_i(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t) \quad \cdots(5.104)$$

これを(5.102),(5.103)へ代入すると、

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = g_i, \quad \frac{\partial g_i}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad \cdots(5.105)$$

◦摂動があるとき　($V\neq0$)

C_iを時間の関数とみなし、(5.104)を(5.102)と(5.103)へ代入する

$$\frac{dq_i}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[f_i(C_1(t), C_2(t), C_3(t), C_4(t), C_5(t), C_6(t), t)\right]}_{=\frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_i}{\partial C_j}\cdot\frac{dC_j}{dt}} = g_i + \frac{\partial V}{\partial p_i} \quad \cdots(5.106)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[g_i(C_1(t), C_2(t), C_3(t), C_4(t), C_5(t), C_6(t), t)\right]}_{=\frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \cdots(5.107)$$

(5.105)を(5.106)と(5.107)へ代入する

$$g_i + \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_i}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt} = g_i + \frac{\partial V}{\partial p_i}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_i}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt} = \frac{\partial V}{\partial p_i} \quad \cdots(5.108)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad \cdots(5.109)$$

前小節5.2.1のときのように、(5.108),(5.109)を $\frac{dC_j}{dt}$ について陽に解くことを考える

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}\left(-\frac{\partial g_1}{\partial C_l}\right)=\frac{\partial V}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial g_1}{\partial C_l}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_2}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}\left(-\frac{\partial g_2}{\partial C_l}\right)=\frac{\partial V}{\partial p_2}\left(-\frac{\partial g_2}{\partial C_l}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_3}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}\left(-\frac{\partial g_3}{\partial C_l}\right)=\frac{\partial V}{\partial p_3}\left(-\frac{\partial g_3}{\partial C_l}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_1}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial C_l}=-\frac{\partial V}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial C_l}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_2}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial C_l}=-\frac{\partial V}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial C_l}\right)$$

$$+)\ \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_3}{\partial C_j}\frac{dC_j}{dt}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial C_l}=-\frac{\partial V}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial C_l}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{6}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial C_l}\frac{\partial g_i}{\partial C_j}-\frac{\partial g_i}{\partial C_l}\frac{\partial f_i}{\partial C_j}\right)\right]\frac{dC_j}{dt}=-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial p_k}\frac{\partial g_k}{\partial C_l}+\frac{\partial V}{\partial q_k}\frac{\partial f_k}{\partial C_l}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{6}[C_l,C_j]\frac{dC_j}{dt}=-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial C_l}+\frac{\partial V}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial C_l}\right)$$

$$=-\frac{\partial V}{\partial C_l} \qquad \cdots(5.110)$$