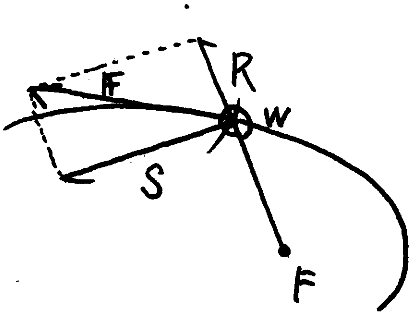
5.6 ガウスの惑星方程式

5.6.1 R, S, Wを用いた運動方程式



左図のように摂動力を分解した場合

R, S, Wを用いた定数変化法の運動方程式は以下のようになる(導出方法は付録B)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\left(R\frac{ae}{\eta}\sin f + S\frac{a^2\eta}{r}\right) \quad \cdots(5.201)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{na}\left\{R\sin f + S(\cos f + \cos u)\right\} \quad \cdots(5.202)$$

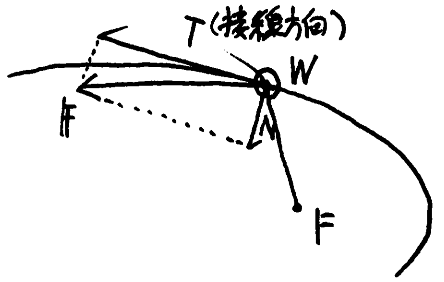
$$\frac{dI}{dt} = \frac{r}{na^2\eta} W\cos(f+\omega) \quad \cdots(5.203)$$

$$\frac{d\sigma^{I}}{dt} = -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{\eta^2}{e}\cos f\right)R - \frac{\eta^2}{nae}\left(1 + \frac{r}{p}\right)S\sin f \quad \cdots(5.204)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{nae}\left\{-R\cos f + S\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f\right\} - \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta}W\cos I \quad \cdots(5.205)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta\sin I}W \quad \cdots(5.206)$$

5.6.2 T, N, W を用いた運動方程式



左図のように摂動力を分解した場合

前項で用いたR, Sの代わりにT, Nを導入する。
R, SとT, Nの関係は、(問題5.8より)

$$R = T\cos\beta - N\sin\beta \quad \cdots(5.208)$$

$$S = T\sin\beta + N\cos\beta \quad \cdots(5.209)$$

となることから、前項で求めた運動方程式(5.201), (5.202), (5.205), (5.204)へ(5.208), (5.209)を代入すると、T, N, Wを用いたガウスの惑星方程式が次のように求められる

$$\frac{da}{dt} = \frac{2A}{n\eta}T \quad \cdots(5.210)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{naA}\left\{2(e+\cos f)T - \frac{r}{a}\sin f N\right\} \quad \cdots(5.211)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{naeA}\left\{2\sin f T + (\cos u + e)N\right\} - \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta}W\cot I \quad \cdots(5.212)$$

$$\frac{d\sigma^{2}}{dt} = \frac{r}{na^2eA}\left\{-2(1+e^2+e\cos f)\sin f T - \eta^2\cos f N\right\} \quad \cdots(5.213)$$

$$A = \sqrt{1+2e\cos f + e^2} = \frac{\eta}{an}v$$

IとΩについての方程式に変更はない

5.6.3 T, N, Wを用いたガウスの惑星方程式の幾何学的導出

a) Tによる効果

微小時間 dt の間にTなる力が働く。
⇒撃力 $T\,dt$ が質点Pに作用すると考える。

⇒この撃力によって質点Pは

$$dv = T\,dt \quad \cdots(5.214)$$

だけ加速される。

エネルギー積分

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (\because 2.82)$$

が撃力によってどのように変化するか考える。

・撃力によって質点Pの位置は変化しない
・撃力によって運動方向は変化しない (Tは運動方向と同じ向き)

という条件の下で考える。
エネルギー積分の両辺を時間微分すると、

$$2v\frac{dv}{dt} = \mu\left(a^{-2}\frac{da}{dt}\right)$$

上の条件より、rは固定

$$\therefore 2v\,dv = \frac{\mu}{a^2}da \quad \cdots(5.215)$$

が得られる。

この(5.215)へ(5.214)を代入すると、

$$2vT\,dt = \frac{\mu}{a^2}\,da$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2va^2}{\mu}T$$

$$= \frac{2va^2}{n^2a^3}T \qquad (\because ケプラーの第3法則\ 2.66)$$

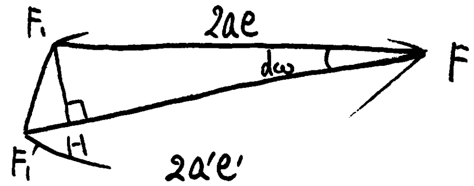
$$= \frac{2v}{n^2a}T$$

$$= \frac{2A}{n\eta}T \qquad \cdots(5.216)$$

この式より、Tがどのように働けば軌道長半径 a がどのように変化するか知ることができる。

以下、de と $d\omega$ を定量的に評価する。
以後の計算において $da, de, d\omega$ は1次の微小量として、これら微小量の2次の項は無視する。

2焦点間の距離 $F_1'F = 2a'e'$ であり、微小角 $d\omega$ を頂点とする三角形 $\Delta FF_1F_1'$ において、



$$
\begin{aligned}
F_1'F &= F_1'H + HF \\
&\simeq F_1'H + F_1F \\
&= \underbrace{F_1F_1'}_{\substack{\| \\ dr_1 \\ \| \\ 2da}} \cos \underbrace{\angle F_1F_1'F}_{\substack{\simeq \\ f_1}} + \underbrace{F_1F}_{\substack{\| \\ 2ae}} \\
&= 2da\cos f_1 + 2ae \qquad \cdots (5.217)
\end{aligned}
$$

$$
\left(
\begin{cases}
r + r_1 = 2a \\
r + r_1' = 2a' \to r + (r_1 + dr_1) = 2(a + da)
\end{cases}
\Rightarrow dr_1 = 2da
\right)
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
de &= e' - e \\
&= \frac{ae + da\cos f_1}{a + da} - e \\
&= \frac{ae + da\cos f_1 - e(a + da)}{a + da} \\
&= \frac{(\cos f_1 - e)\,da}{a + da} \\
&= \frac{(\cos f_1 - e)}{a} \cdot \frac{da}{\left(1 + \frac{da}{a}\right)} \\
&\simeq \frac{(\cos f_1 - e)\,da}{a} \qquad \cdots (5.218)
\end{aligned}
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
&(\because 5.217) \\
&F_1'F = 2a'e' = 2da\cos f_1 + 2ae \\
&\therefore e' = \frac{ae + da\cos f_1}{a + da}
\end{aligned}
\right)
$$

$\cos f_1$ の表現式が以下のように与えられたとする　(問題5.11で求める)

$$\cos f_1 = \frac{(1+e^2)\cos f + 2e}{1+2e\cos f + e^2} \quad \cdots (5.247)$$

この(5.247)と(5.216)を(5.218)へ代入すると、

$$de = \frac{1}{a}\left\{\frac{(1+e^2)\cos f + 2e}{1+2e\cos f + e^2} - e\right\} \cdot \frac{2A}{n\eta} T\, dt$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{2A}{na\eta}\left\{\frac{(1+e^2)\cos f + 2e - e - 2e^2\cos f - e^3}{1+2e\cos f + e^2}\right\} T$$

$$= \frac{2A}{na\eta}\left\{\frac{(1-e^2)\cos f + e(1-e^2)}{A^2}\right\} T$$

$$= \frac{2A}{na\eta}\,\frac{\eta^2(\cos f + e)}{A^2}\, T$$

$$= \frac{2\eta}{naA}(e+\cos f)\, T \quad \cdots (5.219)$$

三角形 $\Delta FF_1F_1'$ において

$$F_1H = F_1F\,\cancel{\sin}\,d\omega \qquad \text{or} \qquad F_1H = \underbrace{F_1F_1'}_{= dr_1 = 2da}\sin\underbrace{\angle F_1F_1'F}_{\simeq f_1}$$

$$\simeq F_1F\,d\omega$$

$$= 2ae\,d\omega \qquad\qquad \simeq 2da\sin f_1$$

(5.220)

$\sin f_1$の表現式が以下のように与えられたとする（問題5.11で求める）

$$\sin f_1 = \frac{(1-e^2)\sin f}{1+2e\cos f+e^2} \qquad \cdots (5.248)$$

(5.220)を整理して、

$$d\omega = \frac{1}{ae}\,da\,\sin f_1$$

としたところへ、(5.248)と(5.216)を代入する

$$d\omega = \frac{1}{ae}\cdot\frac{2A}{n\eta}T\,dt\cdot\frac{\eta^2\sin f}{A^2}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\eta\sin f}{naeA}T \qquad \cdots (5.221)$$

b) Nによる効果

撃力$N\,dt$が働くと $\left\{\begin{array}{l}\text{質点Pの位置} \\ \text{速度の大きさ} \\ \text{運動方向}\end{array}\right.$ 質点Pの位置・速度の大きさ）変化しない ⇒ rもvも変化しないので（エネルギー積分によって）aも変化しない
運動方向 ← のみ変化する

$$dv = |d\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}| = N\,dt = v'\sin d\alpha \approx v'd\alpha \approx v\,d\alpha \qquad \cdots (5.222)$$

$$\Rightarrow d\alpha = \frac{N}{v}dt \qquad \cdots (5.223)$$

楕円の性質より

$$\angle FPN = \angle F_1PM \qquad \cdots (5.224)$$

$$\angle FPN' = \angle F_1'PM' \qquad \cdots (5.225)$$

であるから.

$$d\alpha = \angle FPN' - \angle FPN$$
$$= \underbrace{\angle F_1'PM'} - \angle F_1PM$$
$$= \underbrace{\angle F_1'PF_1 + \angle F_1PM'} - \angle F_1PM$$
$$= \angle F_1'PF_1 - (\angle F_1PM - \angle F_1PM')$$
$$= \angle F_1'PF_1 - d\alpha \quad \cdots (5.226)$$
$$\therefore 2d\alpha = \angle F_1'PF_1 \quad \cdots (5.227)$$

したがって三角形 $\triangle F_1'PF_1$ において

$$F_1F_1 \fallingdotseq r_1 \sin \angle F_1'PF_1$$
$$= r_1 \cdot 2d\alpha$$
$$= 2r_1 d\alpha \quad \cdots (5.228)$$

である。撃力 Ndt を受けた後の楕円の2焦点間距離は

$$F_1'F = 2ae'$$
$$\fallingdotseq F_1F - F_1H$$
$$= F_1F - F_1F_1' \cos\left(\frac{\pi}{2} - f_1\right)$$
$$= 2ae - 2r_1 d\alpha \sin f_1 \quad (\because 5.228)$$
$$= 2ae - 2r_1 \sin f_1 \, d\alpha \quad \cdots (5.229)$$

$$\therefore \quad de = e' - e$$
$$= e - \frac{r_1}{a} \sin f_1 \, d\alpha - e$$
$$= -\frac{r_1}{a} \sin f_1 \, d\alpha \quad \cdots (5.230)$$

(5.230)より、離心率についての運動方程式は

$$\frac{de}{dt} = -\frac{r_1}{a}\sin f_1 \frac{d\alpha}{dt}$$

$$= -\frac{r_1}{av}\sin f_1 N \qquad (\because 5.223)$$

$$= -\frac{r_1}{a}\cdot\frac{\eta}{anA}\sin f_1 N \qquad (\because 5.213 \quad A = \frac{\eta}{an}v)$$

$$= -\frac{r_1\eta}{na^2A}\sin f_1 N$$

$$= -\frac{\eta r\sin f}{na^2A} N \qquad \cdots(5.231) \qquad (\because \text{問}5.11\text{のヒント}: r_1\sin f_1 = r\sin f)$$

三角形$\Delta FHF_1'$において

$$F_1'H = F_1'F\sin d\omega$$

$$\fallingdotseq F_1'F\, d\omega$$

$$= (2ae - 2r_1\sin f_1\, d\alpha)\, d\omega$$

$$\fallingdotseq 2ae\, d\omega \qquad (\because 2\text{次の微小量は無視})$$

$$\cdots(5.232)$$

また、三角形$\Delta F_1'HF_1$において

$$F_1'H = F_1F_1'\sin\left(\frac{\pi}{2} - f_1\right)$$

$$= 2r_1\, d\alpha\cdot\cos f_1 \qquad (\because 5.228)$$

$$\cdots(5.233)$$

(5.232) と (5.233) より

$$2ae\,d\omega = 2r_1\,d\alpha\cos f_1$$

$$\therefore\ d\omega = \frac{r_1}{ae}\cos f_1\,d\alpha \qquad \cdots(5.234)$$

これより、近点引数 ω の方程式は

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{r_1}{ae}\cos f_1\frac{d\alpha}{dt}$$

$$= \frac{1}{ae}\underbrace{(r\cos f + 2ae)}_{\left(\because\text{問題5.11 ヒント } r_1\cos f_1 - r\cos f = 2ae\right)}\cdot\underbrace{\frac{N}{v}}_{(\because 5.223)}$$

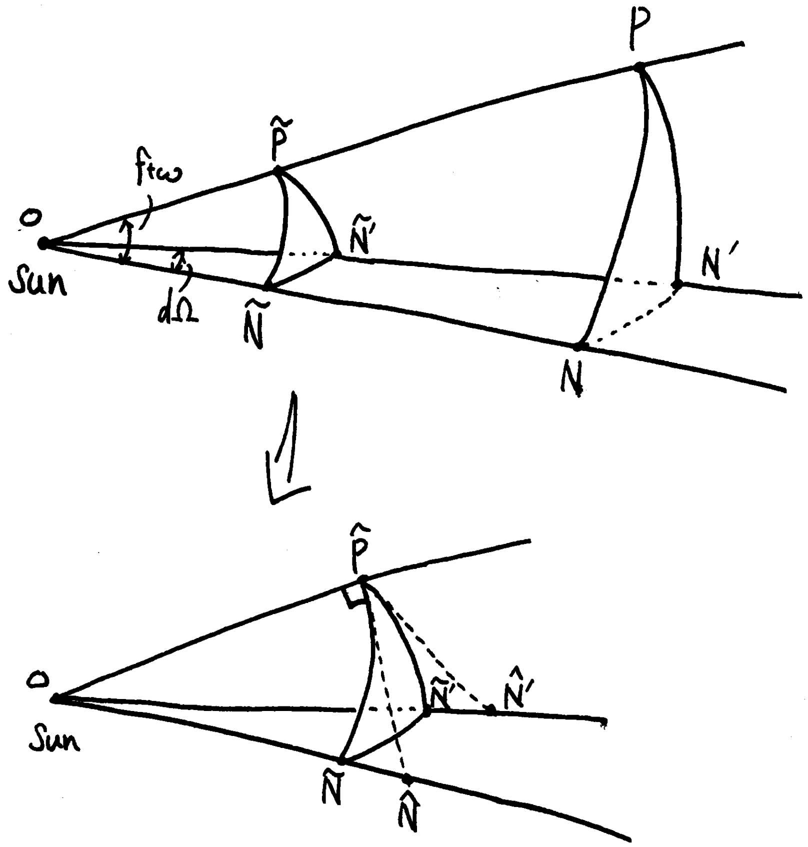
$$= \frac{1}{ae}(r\cos f + 2ae)\cdot N\cdot\underbrace{\frac{\eta}{anA}}_{\left(\because 5.213 : A = \frac{\eta}{an}v\right)}$$

$$= \frac{\eta}{na^2eA}\Big(\underbrace{a\cos u - ae}_{\left(\because 2.55 \text{ と } 2.57\right)} + 2ae\Big)N$$

$$= \frac{\eta(\cos u + e)}{naeA}N \qquad \cdots(5.235)$$

c) Wによる効果

$\Delta PNN'$は太陽を中心とする球面上に存在しないので、球面三角法を直接用いることができない。
よって、下図のようにして$\Delta PNN'$を単位球面上の$\Delta \tilde{P}\tilde{N}\tilde{N}'$へおとしこみ、$\Delta \tilde{P}\tilde{N}\tilde{N}'$へ球面三角法を用いることにする。



テキストの図5.4では$\angle NPN' = d\beta$であるかのように描かれているが、
実際は軌道面同士のなす角が$d\beta$である。
つまり、$\angle \hat{N}\tilde{P}\hat{N}' = d\beta$である。　また、$\angle \hat{N}\tilde{P}\hat{N}' = \angle \tilde{N}\tilde{P}\tilde{N}'$
でもあるので、以上まとめて$\angle \tilde{N}\tilde{P}\tilde{N}' = d\beta$となる。
$\angle \tilde{P}\tilde{N}'\tilde{N} = \pi - I'$　も同様の方法で求められる。

以上より、$\triangle \tilde{P}\tilde{N}\tilde{N}'$に球面三角の正弦法則を適用する。

$$\frac{\sin(d\Omega)}{\sin(d\beta)} = \frac{\sin(f+\omega)}{\sin\{\pi - I'\}}$$

$$\therefore \frac{\sin(d\Omega)}{\sin(d\beta)} = \frac{\sin(f+\omega)}{\sin(I+dI)} \quad \cdots (5.236)$$

上式において各微小量についてそれぞれマクローリン展開し、2次の微小量を無視すると、

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \frac{\sin(f+\omega)}{\sin I + \bigcirc\, dI}$$

↑どうせムシされる

$$\therefore \sin I \, d\Omega = \sin(f+\omega)\, d\beta \quad \cdots (5.237)$$

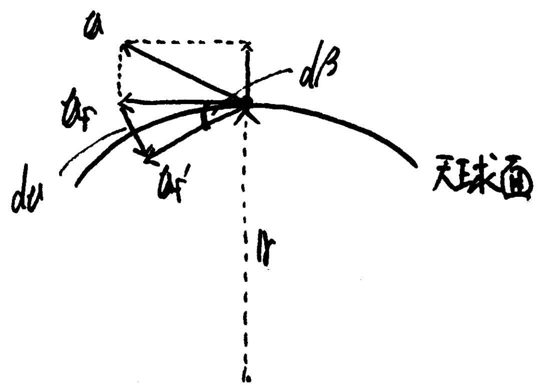
また、余弦法則より、(D.3)

$$\cos\angle\tilde{P}\tilde{N}'\tilde{N} = -\cos\angle N'NP \cdot \cos\angle N'PN + \sin\angle N'NP \cdot \sin\angle N'PN \cdot \cos\angle\tilde{P}O\tilde{N}$$

$$\therefore \underbrace{\cos(\pi - I - dI)}_{= -\cos(I+dI) \simeq -\cos I + \sin I \cdot dI} = -\cos I \underbrace{\cos(d\beta)}_{\simeq 1} + \sin I \underbrace{\sin(d\beta)}_{\simeq d\beta} \cos(f+\omega) \quad \cdots (5.238)$$

$$-\cos I + \sin I \cdot dI = -\cos I + \sin I \cos(f+\omega)\, d\beta$$

$$\therefore dI = \cos(f+\omega)\, d\beta \quad \cdots (5.239)$$



$$dv = v_f \sin d\beta$$
$$\fallingdotseq v_f \, d\beta \quad \cdots (5.240)$$

である一方、力積を考えると、

$$dv = W \, dt \quad \cdots ①$$

であるから、(5.240) と ① より、

$$d\beta = \frac{W}{v_f} dt \underset{\uparrow}{=} \frac{r}{na^2\eta} W \, dt \quad \cdots (5.241)$$

$$\left(\because v_f = r\frac{df}{dt} = \frac{a^2 n \eta}{r} \quad : 2.74 \right)$$

この (5.241) を (5.237) と (5.239) に代入すると、I と Ω についての方程式が求められる

・(5.237)

$$\sin I \, d\Omega = \sin(f+\omega) \cdot \frac{r}{na^2\eta} W \, dt$$

$$\therefore \sin I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta} W \quad \cdots (5.243)$$

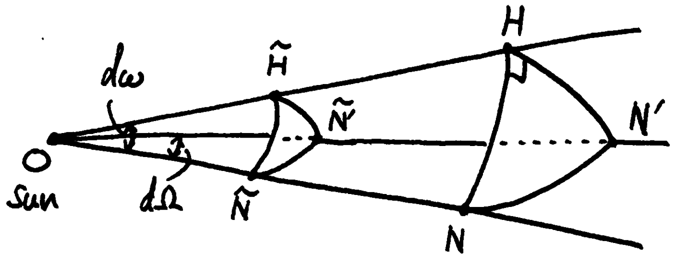
・(5.239)

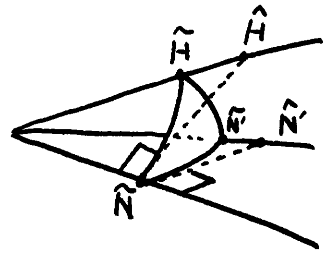
$$dI = \cos(f+\omega) \cdot \frac{r}{na^2\eta} W \, dt$$

$$\therefore \frac{dI}{dt} = \frac{r\cos(f+\omega)}{na^2\eta} W \quad \cdots (5.242)$$

近点引数ωについて議論する。
Wによる効果で変化し得る軌道要素はI, Ω, ωである。
今回は$d\omega$について考えたいので、撃力が働く前後の軌道面を同一平面に揃えるとわかりやすい。つまり、$d\Omega$とdIが0であると考える。
すると、図5.4の点N'とHは重なることがわかる。

また、今回の話も正確に考えるためには、$\triangle PNN'$について考察したときと同様に、この$\triangle HNN'$も単位球面上に写して考えなければいけない。





上図のようにして得た$\triangle \hat{H}\tilde{N}\hat{N}'$について考えていく

$$\begin{cases} \tilde{N}\tilde{H} = (-)\,d\omega \\ \tilde{N}\tilde{H} = \tilde{N}\tilde{N}' \cos I \end{cases}$$

$$\left(\begin{aligned} &\angle \hat{H}\tilde{N}\hat{N}' = I \\ &\angle \hat{H}\tilde{N}\hat{N}' = \angle \hat{H}\tilde{N}\tilde{N}' \\ &\therefore \angle \tilde{H}\tilde{N}\tilde{N}' = I \end{aligned} \right)$$

$$\therefore -d\omega = \tilde{N}\tilde{H} = \cos I \, d\Omega \quad \cdots (5.244)$$

したがって、ωについての運動方程式は

$$\frac{d\omega}{dt} = -\cos I \frac{d\Omega}{dt}$$

$$= -\frac{\cos I}{\sin I} \frac{r \sin(f+\omega)}{na^2\eta} W$$

$$= -\frac{r \cot I \sin(f+\omega)}{na^2\eta} W \quad \cdots (5.245)$$