問題1.7

双曲線の媒介変数表示は、問題1.2で求めた双曲線の表現式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1 \quad \cdots ①$$

から、双曲線関数を用いて、

$$\begin{cases} x = a\cosh u & \cdots ② \\ y = a\sqrt{e^2-1}\sinh u & \cdots ③ \end{cases}$$

と表すことができる（②、③を①へ代入すれば、~~$\cosh^2 u - \cos$~~ $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を満たす）

②、③より、焦点を座標原点とする直交座標 x^*, y^* は、

$$\begin{cases} x^* = r\cos f = a(\cosh u - e) & \cdots ④ \\ y^* = r\sin f = a\sqrt{e^2-1}\sinh u & \cdots ⑤ \end{cases}$$

と表せる

④、⑤の両辺の自乗の和をとると、

$$r^2\cos^2 f + r^2\sin^2 f = a^2(\cosh^2 u - 2e\cosh u + e^2) + a^2(e^2-1)\sinh^2 u$$

$$r^2 = a^2(e^2\cosh^2 u - 2e\cosh u + 1)$$

$$r^2 = a^2(e\cosh u - 1)^2$$

$$\underline{r = a(e\cosh u - 1)} \quad \cdots ⑥ \quad —(1.20)$$

また、④、⑤より

$$\frac{r\sin f}{r\cos f} = \frac{a\sqrt{e^2-1}\sinh u}{a(\cosh u - e)}$$

$$\tan f = \frac{\sqrt{e^2-1}\sinh u}{\cosh u - e} \quad \cdots ⑦$$

⑦を楕円のときと同様にして、三角関数の倍角の公式と双曲線関数を用いて変形させていく

$$⑦の左辺 = \tan\left(\frac{f}{2}+\frac{f}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{f}{2}}{1-\tan^2\frac{f}{2}}$$

$$⑦の右辺 = \frac{\sqrt{e^2-1}\sinh\left(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}\right)-e}$$

$$= \frac{\sqrt{e^2-1}\cdot 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{u}{2}}{\cosh^2\frac{u}{2}+\sinh^2\frac{u}{2}-e\left(\cosh^2\frac{u}{2}-\sinh^2\frac{u}{2}\right)}$$

分母・分子ともに $\cosh^2\frac{u}{2}$ でわる

$$= \frac{2\sqrt{e^2-1}\tanh\frac{u}{2}}{1+\tanh^2\frac{u}{2}-e\left(1-\tanh^2\frac{u}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{e^2-1}\tanh\frac{u}{2}}{1-e+(1+e)\tanh^2\frac{u}{2}}$$

分母・分子ともに $(1-e)$ でわる

$$= \frac{2\sqrt{\frac{(e-1)(e+1)}{(1-e)^2}}\tanh\frac{u}{2}}{1+\frac{1+e}{1-e}\tanh^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{(e-1)(e+1)}{(e-1)^2}}\tanh\frac{u}{2}}{1-\frac{e+1}{e-1}\tanh^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{u}{2}}{1-\frac{e+1}{e-1}\tanh^2\frac{u}{2}}$$

左辺と右辺を比較すると、

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{u}{2} \quad \cdots ⑧ \quad \cdots (1.21)$$

問題では問われていないが楕円のときと同様に
rとfの時間微分も求めていく

④,⑤の両辺をtで微分

$$\dot{r}\cos f - r\dot{f}\sin f = a\dot{u}\sinh u \quad \cdots ⑨$$
$$\dot{r}\sin f + r\dot{f}\cos f = a\sqrt{e^2-1}\,\dot{u}\cosh u \quad \cdots ⑩$$

⑨×cos f + ⑩×sin f

$$\begin{array}{rl} & \dot{r}\cos^2 f - r\dot{f}\sin f\cos f = a\dot{u}\sinh u\cos f \\ +) & \dot{r}\sin^2 f + r\dot{f}\sin f\cos f = a\sqrt{e^2-1}\,\dot{u}\cosh u\sin f \\ \hline & \dot{r} = a\dot{u}(\sinh u\cos f + \sqrt{e^2-1}\cosh u\sin f) \quad \cdots ⑩ \end{array}$$

⑩へ④,⑤を代入して、fを消去する

$$\dot{r} = a\dot{u}\left\{\sinh u\cdot\frac{a}{r}(\cosh u - e) + \sqrt{e^2-1}\cdot\cosh u\cdot\frac{a\sqrt{e^2-1}}{r}\sinh u\right\}$$
$$= \frac{a^2\dot{u}e}{r}\sinh u(e\cosh u - 1)$$
$$= \frac{a^2\dot{u}e\sinh u(e\cosh u-1)}{a(e\cosh u - 1)} \quad (\because ⑥)$$
$$= \underline{ae\dot{u}\sinh u} \quad \cdots ⑪$$

⑨ $\times(-\sin f)$ + ⑩ $\times \cos f$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & -\dot{r}\sin f\cos f + r\dot{f}\sin^2 f & = & -a\dot{u}\sinh u\sin f \\
+) & \dot{r}\sin f\cos f + r\dot{f}\cos^2 f & = & a\sqrt{e^2-1}\,\dot{u}\cosh u\cos f \\
\hline
 & r\dot{f} & = & a\dot{u}\left(\sinh u\sin f + \sqrt{e^2-1}\cosh u\cos f\right) \quad \cdots ⑫
\end{array}
$$

⑫へ④,⑤を代入して、fを消去する

$$\dot{f} = \frac{a\dot{u}}{r}\left\{\sinh u\cdot\underbrace{\frac{a\sqrt{e^2-1}}{r}\sinh u}_{(\because ⑤)} + \sqrt{e^2-1}\cosh u\cdot\underbrace{\frac{a}{r}(\cosh u - e)}_{(\because ④)}\right\}$$

$$= \frac{a^2\dot{u}\sqrt{e^2-1}}{r^2}\left(\sinh^2 u - \cosh^2 u + e\cosh u\right)$$

$$= \frac{a^2\dot{u}\sqrt{e^2-1}}{r^2}\left(e\cosh u - 1\right)$$

$(\because ⑥)$

$$= \frac{a\sqrt{e^2-1}}{r}\dot{u} \quad \cdots ⑬$$