5.4 接触軌道要素

6個の軌道要素を$c_j(t)$とすると直交座標x_iは、

$$x_i(t) = f_i(c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), c_5(t), c_6(t), t) \quad \cdots (5.143)$$

である。

(5.143)をマクローリン展開する。

$$x_i(t) = \underbrace{x_{i,0}}_{\substack{\parallel \\ f_i(c(0),\,0)}} + \dot{x}_{i,0}\, t + \frac{1}{2}\ddot{x}_{i,0}\, t^2 + \cdots \quad \cdots (5.144)$$

$$\cdots (5.145)$$

(5.143)をtについて微分すると

$$\frac{dx_i}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\substack{\parallel (\because 5.92) \\ g(c(t),\,t)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}}_{\substack{\parallel (\because 5.95) \\ 0}} \quad \cdots (5.146)$$

よって、

$$\dot{x}_{i,0} = g(c(0), 0) \quad \cdots (5.147)$$

x_iのtについての2階微分は運動方程式(5.89)より

$$\ddot{x}_{i,0} = \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)_{t=0} = -\frac{\mu x_{i,0}}{r_0^3} + X_i(0) \quad \cdots (5.148)$$

である。

次に、軌道要素が摂動によって変化しない軌道、
つまり、軌道要素が $c_j(0)$ のまま固定された軌道 $x_i^*(t)$ を考える。

$t=0$ でテイラー展開する

$$x_i^*(t) = f(c(0), t)$$

$$= \underbrace{x_{i,0}^*}_{= f(c(0),0)\ \cdots(5.150)} + \dot{x}_{i,0}^* t + \frac{1}{2}\ddot{x}_{i,0}^* t^2 + \cdots \quad \cdots(5.149)$$

(5.149)を t で微分すると、

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{= g\ (\because 5.92)} \quad \cdots(5.151)$$

よって、

$$\dot{x}_{i,0}^* = g(c(0), 0) \quad \cdots(5.152)$$

軌道 x_i^* は摂動力を無視しているので、ケプラー運動を表している。
よって2体問題の運動方程式を満たしているので、

$$\ddot{x}_{i,0}^* = \left(\frac{d^2 x_i^*}{dt^2}\right)_{t=0} = -\frac{\mu x_{i,0}^*}{r_0^{*3}} \quad \cdots(5.153)$$

である。

2つの軌道 x_i と x_i^* を時間について マクローリン展開したときの係数の関係をまとめると、

$$x_{i,0} = x_{i,0}^* \quad , \quad \dot{x}_{i,0} = \dot{x}_{i,0}^* \quad , \quad \ddot{x}_{i,0} = \ddot{x}_{i,0}^* + X_i(0) \quad \cdots (5.154)$$

である。

この (5.154) の関係より、軌道 $\mathbb{r}(x_1, x_2, x_3)$ と $\mathbb{r}^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ の差は、

$$\mathbb{r} - \mathbb{r}^* = \frac{1}{2} X(0) t^2 + O(t^3)$$

$$\therefore \mathbb{r} = \mathbb{r}^* + \frac{1}{2} X(0) t^2 + O(t^3) \quad \cdots (5.155)$$