問題2.14

双曲線に関する公式は楕円運動に関する公式において、

$$\begin{cases} a \to -a \\ u \to iu \\ n \to -in \end{cases}$$

とした置き換えで求められることを確かめる

a) 幾何学的関係式

$\boxed{\text{楕円}}$ $\boxed{\text{双曲線}}$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \quad \cdots (2.56) \longrightarrow r = \frac{-a(1-e^2)}{1+e\cos f} = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f} \quad \cdots (2.113)$$

$$x^* = a(\cos u - e) \quad \cdots (2.57) \longrightarrow x^* = -a(\cos(iu) - e) = -a(\underbrace{\cosh u}_{①} - e) \quad \cdots (2.114)$$

$$\left(\begin{aligned} &\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \leftarrow \text{オイラーの公式より} \\ &\cos(i\theta) = \frac{1}{2}(e^{-\theta} + e^{\theta}) \\ &\quad\downarrow \text{双曲線関数の定義より} \\ &\cos(i\theta) = \cosh\theta \quad \cdots ① \end{aligned} \right)$$

$$y^* = a\sqrt{1-e^2}\sin u \quad \cdots (2.58) \longrightarrow y^* = -a\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(iu)$$

$$= -a\sqrt{-(e^2-1)} \cdot \left(-\frac{1}{i}\sinh u\right)$$

$$= -a \cdot i\sqrt{e^2-1}\left(-\frac{1}{i}\sinh u\right)$$

$$= a\sqrt{e^2-1}\sinh u \quad \cdots (2.115)$$

$$\left(\begin{aligned} \because\ &\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &\sin(i\theta) = \frac{1}{2i}(e^{-\theta} - e^{\theta}) \\ &\qquad = -\frac{1}{i}\sinh\theta \quad \cdots ② \end{aligned} \right)$$

$$r = a(1 - e\cos u) \longrightarrow r = -a(1 - e\cos(iu))$$
$\cdots(2.59)$
$$= a(e\cosh u - 1)$$
$\cdots(2.116)$

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2} \longrightarrow \tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{iu}{2}$$
$\cdots(2.60)$
$$= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\sin\frac{iu}{2}}{\cos\frac{iu}{2}}$$
$(\because ①.②)$
$$= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\left(-\frac{1}{i}\tanh\frac{u}{2}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\left(-\frac{1}{i}\right)^2}\tanh\frac{u}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sqrt{\frac{1}{-1}}\tanh\frac{u}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{1+e}{e-1}}\tanh\frac{u}{2} \quad \cdots(2.117)$$

b) 時刻 t と媒介変数 u の関係式

$\boxed{楕円}$

ケプラー方程式　$u - e\sin u = n(t - t_0) \quad \cdots(2.65)$

$\downarrow$

$\boxed{双曲線}$

$$iu - e\sin(iu) = -in(t - t_0)$$
$$iu + \frac{e}{i}\underbrace{\sinh u}_{(\because ②)} = -in(t - t_0)$$

両辺に i かける

$$e\sinh u - u = n(t - t_0) \quad \cdots(2.118)$$

ケプラーの第3法則

$\boxed{楕円}$ $n^2a^3=\mu=G(m_1+m_2) \quad \cdots (2.66)$

$\downarrow$

$\boxed{双曲線}$ $(-in)^2(-a)^3= \quad \cdots$

$(-n^2)(-a^3)= \quad \cdots$

$n^2a^3=\mu=G(m_1+m_2) \quad \cdots (2.119)$

c) 力学的物理量 h, E と幾何学的量 a, e の関係式

$\boxed{楕円}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{双曲線}$

$E=-\dfrac{\mu}{2a} \longrightarrow E=-\dfrac{\mu}{2(-a)}=\dfrac{\mu}{2a} \quad \cdots (2.120)$

$h=\sqrt{\mu a(1-e^2)} \longrightarrow h=\sqrt{\mu(-a)(1-e^2)}=\sqrt{\mu a(e^2-1)} \quad \cdots (2.121)$

$a=-\dfrac{\mu}{2E} \longrightarrow -a=-\dfrac{\mu}{2E}$

$a=\dfrac{\mu}{2E} \quad \cdots (2.122)$

$e=\sqrt{1+\dfrac{2Eh^2}{\mu^2}} \longrightarrow \cancel{e=\sqrt{1+\dfrac{2E\mu a(e^2-1)}{\mu^2}}}$

$e=\sqrt{1+\dfrac{2Eh^2}{\mu^2}} \quad \cdots (2.123)$

(そのまま)

d) 時間微分を含んだ関係式

a)〜c)で求めてきた、双曲線運動をしているときの、各物理量同士の関係式を用いて、楕円のときと同様の方法で求めていく。

・双曲線運動でのケプラー方程式（2.118 − $e\sinh u - u = n(t-t_0)$）をtで微分する。

$$e\cosh u\frac{du}{dt} - \frac{du}{dt} = n$$

$$(e\cosh u)\frac{du}{dt} = n$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{an}{r} \quad \cdots (2.124) \quad (\because 2.116)$$

$$\frac{dr}{dt} = ae\dot{u}\sinh u \quad (\because \text{問題1.7 解答⑪式より})$$

$$= \frac{a^2en}{r}\sinh u \quad (\because 2.124)$$

$$= \frac{a^2en}{r}\cdot\frac{r}{a\sqrt{e^2-1}}\sin f \quad (\because 2.115)$$

$$= \frac{aen}{\sqrt{e^2-1}}\sin f \quad \cdots (2.125)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{a\sqrt{e^2-1}}{r}\dot{u} \quad (\because \text{問題1.7 解答⑬式})$$

$$= \frac{a\sqrt{e^2-1}}{r}\cdot\frac{an}{r} \quad (\because 2.124)$$

$$= \frac{a^2n\sqrt{e^2-1}}{r^2} \quad \cdots (2.126)$$

$$\frac{dx^*}{dt} = -a\dot{u}\sinh u \quad (\because 2.114)$$

$$= -\frac{a^2 n}{r}\sinh u \quad (\because 2.124)$$

$$= -\frac{a^2 n}{r}\cdot\frac{r\sin f}{a\sqrt{e^2-1}} \quad (\because 2.115)$$

$$= -\frac{an\sin f}{\sqrt{e^2-1}} \quad \cdots (2.127)$$

$$\frac{dy^*}{dt} = a\sqrt{e^2-1}\cdot\dot{u}\cosh u \quad (\because 2.115)$$

$$= \frac{a^2 n\sqrt{e^2-1}\cosh u}{r} \quad (\because 2.124)$$

↓ 変数をuからfへ変えた…が、計算が合わない…

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{f})^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{aen\sin f}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}_{(\because 2.125)} + \underbrace{\left(\frac{a^2 n\sqrt{e^2-1}}{r}\right)^2}_{(\because 2.126)}} \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{an(1+e\cos f)}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}_{(\because 2.113)}$$

$$= \frac{an}{\sqrt{e^2-1}}\sqrt{e^2\sin^2 f + 1 + 2e\cos f + e^2\cos^2 f}$$

$$= \frac{an}{\sqrt{e^2-1}}\sqrt{e^2 + 2e\cos f + 1} \quad \cdots (2.129)$$

$$= \frac{an}{\sqrt{e^2-1}}\sqrt{e^2 + 2e\cdot\left(-\frac{\cosh u - e}{e\cosh u - 1}\right) + 1} \longleftarrow \left(\because \cos f = -\frac{a(\cosh u - e)}{r} \ (\because 2.114) = -\frac{\cosh u - e}{e\cosh u - 1} \ (\because 2.116)\right)$$

$$= \frac{an}{\sqrt{e^2-1}}\sqrt{\frac{(e^3-e)\cosh u + e^2 - 1}{e\cosh u - 1}}$$

$$= an\sqrt{\frac{e\cosh u + 1}{e\cosh u - 1}} \quad \cdots (2.130)$$

$$= \sqrt{\frac{a^3 n^2 (e\cosh u + 1)}{r}} \quad (\because 2.116)$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{r}}\sqrt{e\cosh u + 1} \quad \cdots (2.131)$$

$$v_r = \frac{aen}{\sqrt{e^2-1}}\sin f \quad (\because 2.125) \quad \cdots (2.132)$$

$$v_\theta = r\dot{f} = \frac{a^2 n\sqrt{e^2-1}}{r} \quad (\because 2.126)$$

$$= \frac{an(1+e\cos f)}{\sqrt{e^2-1}} \quad (\because 2.113)$$

$$\cdots (2.133)$$

動径ベクトル$\mathbf{r}$と速度ベクトル$\mathbf{v}$のなす角をβとすると、

$v_r = v\cos\beta$, $v_\theta = v\sin\beta$ となる

よって

$$\tan\beta = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{an(1+e\cos f)}{\sqrt{e^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{e^2-1}}{aen\sin f} \quad (\because 2.132 と 2.133)$$

$$= \frac{1+e\cos f}{e\sin f} \quad \cdots (2.134)$$

$h = rv\sin\beta \quad \cdots (2.135)$ そのまま