質点 P_1 を原点とするので、前小節で使った座標 ~~座~~ を X 軸方向へ $\frac{m_2}{m_1+m_2}a'$ 平行移動させて考える。平行移動させた後の座標は以下のようになる

$$P_1 = (0, 0, 0) \quad , \quad P_2 = (a', 0, 0) = (d, 0, 0)$$

$$P_3 = (X', Y', Z') = \left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}a', Y, Z\right) = \left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}d, Y, Z\right) \quad \cdots ①$$

① を (4.14) ~ (4.16) へ代入

$$\begin{cases} \ddot{X}' - 2n'\dot{Y}' - n'^2\left(X' - \frac{m_2}{m_1+m_2}d\right) = -\frac{\partial U}{\partial X'} \\ \ddot{Y}' + 2n'\dot{X}' - n'^2 Y' = -\frac{\partial U}{\partial Y'} \\ \ddot{Z}' = -\frac{\partial U}{\partial Z'} \end{cases}$$

$$U = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2}$$

これらを整理して、新しく $U^{*\prime}$ をおく

$\left(n'^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a'^3}\right)$

$$\begin{cases} \ddot{X}' - 2n'\dot{Y}' = -\frac{\partial U^{*\prime}}{\partial X'} & \left(= -\frac{\partial U}{\partial X'} + n'^2 X' - n'^2 \frac{m_2}{m_1+m_2}d = -\frac{\partial U}{\partial X'} + n'^2 X' - \frac{Gm_2}{d^2}\right) \\ \ddot{Y}' + 2n'\dot{X}' = -\frac{\partial U^{*\prime}}{\partial Y'} & \left(= -\frac{\partial U}{\partial Y'} + n'^2 Y'\right) \\ \ddot{Z}' = -\frac{\partial U^{*\prime}}{\partial Z'} \end{cases}$$

$$U^{*\prime} = U - \frac{1}{2}n'^2(X'^2+Y'^2) + \frac{GM_2}{d^2}X'$$
$$= U - \frac{1}{2}n'^2(X'^2+Y'^2) + \frac{GM_2\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3} \quad \left(\because \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r} = (d,0,0)\cdot(X',Y',Z') = dX'\right)$$

(4.25)へ以上の結果をあてはめると、

$$\frac{1}{2}(\dot{X}'^2+\dot{Y}'^2+\dot{Z}'^2) + U - \frac{1}{2}n'^2(X'^2+Y'^2) + \frac{GM_2\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3} = \mathrm{const}$$
$$\therefore \frac{1}{2}(\dot{X}'^2+\dot{Y}'^2+\dot{Z}'^2) - \left\{\frac{1}{2}n'^2(X'^2+Y'^2) + \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} - \frac{GM_2\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3}\right\} = \mathrm{const} \quad \cdots(4.28)$$

(4.29)についても~~前小節(4.2)~~ 4.1, 4.2で用いた方法と同じようにすればよい。
(X', Y', Z')と原点は同じで慣性系の(ξ', η', ζ')を考える
この2つの系の関係は、

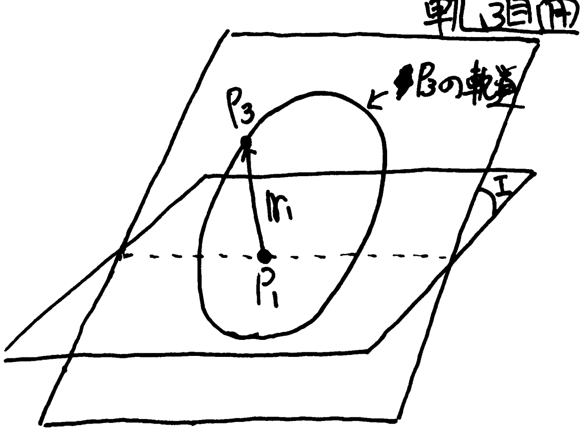
$$\xi' = X'\cos\theta - Y'\sin\theta$$
$$\eta' = X'\sin\theta + Y'\cos\theta$$
$$\zeta' = Z'$$

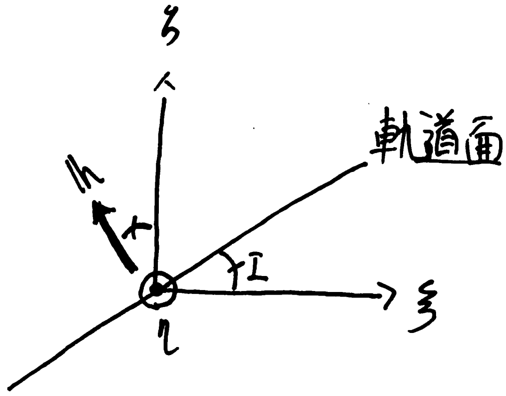
となり、(4.3)~(4.5)と同じ形の式になるのでヤコビ積分は、

$$\frac{1}{2}(\dot{X}'^2+\dot{Y}'^2+\dot{Z}'^2) + U^{*\prime} = \mathrm{const} \quad (\because 4.25)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\dot{X}'^2+\dot{Y}'^2+\dot{Z}'^2) - \frac{1}{2}n'(X'^2+Y'^2) - \frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}}_{\text{(ノート:4.2-①の式と形が同じなので(4.29)より)}} + \frac{GM_2\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3} = \mathrm{const}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}'^2+\dot{\eta}'^2+\dot{\zeta}'^2) - n'(\xi'\dot{\eta}' - \eta'\dot{\xi}') - \frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} + \frac{GM_2\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3} = \mathrm{const} \quad \cdots(4.29)$$





P_1, P_3の2体問題の保存量 (P_1原点)

・エネルギー積分

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\dot\xi^2+\dot\eta^2+\dot\zeta^2)-\frac{GM_1}{r_1}}_{\text{位置と速度から}} = \underbrace{-\frac{GM_1}{2a}}_{\text{接触軌道要素から}} \quad (\because 2.82) \quad \cdots (4.30)$$

・角運動量のζ成分

*ふつうに位置と速度から角運動量をだすと、

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 = (\eta\dot\zeta - \zeta\dot\eta,\ \zeta\dot\xi - \xi\dot\zeta,\ \xi\dot\eta - \eta\dot\xi)$$

よって

$$h_\zeta = \xi\dot\eta - \eta\dot\xi \quad \cdots ②$$

*次に接触軌道要素からhをだすと、

$$h = \sqrt{GM_1 a(1-e^2)} \quad (\because 2.69)$$

図より、hのζ成分は、

$$h_\zeta = h\cos I = \sqrt{GM_1 a(1-e^2)}\cos I \quad \cdots ③$$

②,③より、

$$\xi\dot\eta - \eta\dot\xi = \sqrt{GM_1 a(1-e^2)}\cos I \quad \cdots (4.31)$$

(4.29)へ(4.30)と(4.31)を代入

$$-\frac{Gm_1}{2a} - n'\sqrt{Gm_1 a(1-e^2)}\cos I - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{Gm_2\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3} = \mathrm{const}$$

（P_1とP_2での2体問題を考えたときのケプラーの第3法則 $n'^2 a'^3 = G(m_1+m_2)$ を用いると、）

$$-\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a'^3}}\sqrt{Gm_1 a(1-e^2)}\cos I$$

$$= -\frac{G}{a'}\sqrt{\frac{m_1(m_1+m_2)a(1-e^2)}{a'}}\cos I$$

全体 $\times \dfrac{a'}{Gm_1}$

$$-\frac{a'}{2a} - \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1(m_1+m_2)\frac{a}{a'}(1-e^2)}\cos I - \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{a'}{r_2} + \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{a'\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3} = \mathrm{const}$$

$$\therefore \frac{a'}{2a} + \sqrt{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{a}{a'}(1-e^2)}\cos I = -\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{a'}{r_2} - \frac{a'\,\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{d^3}\right) + \mathrm{const}$$

$\cdots(4.32)$