2.5 楕円運動の展開

2.5.1 陰関数の定理

（陰関数の定理の証明はやってない…）

$$z = a + w\theta(z) \quad \cdots \quad (2.159)$$ を変形して、

$$z - a = w\theta(z) \quad \cdots ①$$

$$w = \frac{z-a}{\theta(z)} \left(= g(z)\right) \cdots ②$$

①と(2.157)，②と(2.156)を比較してみると、(2.159)の展開係数を求めるには
上記定理(2.158)の z を $z-a$，$g(z)$ を $\frac{z-a}{\theta(z)}$ へと変更すればよい。
つまり、

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\frac{z}{g(z)}\right\}^n\right]_{z=0} \quad \cdots \quad (2.158)$$

$$\downarrow \begin{matrix} z \to z-a \\ g(z) \to z-a/\theta(z) \end{matrix} \text{ へ変更}$$

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\frac{z-a}{z-a/\theta(z)}\right\}^n\right]_{z-a=0}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\theta(z)\right\}^n\right]_{z=a}$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{\theta(a)\right\}^n \quad \cdots \quad (2.161)$$

2.5.2 離心近点離角の展開

ケプラー方程式　$u=l+e\sin u$ …(2.162) は陰関数定理の項に出てきた、$z=a+w\theta(z)$ …(2.159) と同じ形をしている。
よって、(2.159)から z を u、a を l、w を e、$\theta(z)$ を $\sin u$ へと置き換えたものが(2.162)と考えれば、そのまま(2.160)、(2.161)も同様に置き換えると、

$$u=l+b_1 e+b_2 e^2+b_3 e^3+\cdots \quad ③$$

$$b_n=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dl^{n-1}}\{\sin l\}^n \quad \cdots ④$$

③、④より、

$$u=l+e\sin l+\frac{e^2}{2!}\frac{d}{dl}(\sin l)^2+\frac{e^3}{3!}\frac{d^2}{dl^2}(\sin l)^3+\cdots \quad \cdots(2.163)$$

さらに、(2.163)を展開するために $b_1\sim b_3$ を解いて、③に合わせると、

$$b_1=\sin l$$

$$b_2=\frac{1}{2!}\frac{d}{dl}(\sin l)^2=\frac{1}{2!}\cdot 2\sin l\cdot\cos l=\frac{1}{2}\sin 2l$$

$$\begin{aligned}
b_3&=\frac{1}{3!}\frac{d^2}{dl^2}(\sin l)^3\\
&=\frac{1}{6}\frac{d}{dl}\left(3\sin^2 l\cos l\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(2\sin l\cos^2 l-\sin^3 l\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(2\sin l-3\sin^3 l\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sin 3l-\frac{1}{4}\sin l\right)\\
&=\frac{3}{8}\sin 3l-\frac{1}{8}\sin l
\end{aligned}$$

（∵三倍角の公式　$\sin 3l=3\sin l-4\sin^3 l$）

$$\begin{aligned}
u&=l+\sin l\cdot e+\frac{1}{2}\sin 2l\cdot e^2+\left(\frac{3}{8}\sin 3l-\frac{1}{8}\sin l\right)e^3+O(e^4)\\
&=l+\left(e-\frac{1}{8}e^3\right)\sin l+\frac{1}{2}e^2\sin 2l+\frac{3}{8}e^3\sin 3l+O(e^4) \quad \cdots(2.164)\\
&=l+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nl \quad \cdots(2.165)
\end{aligned}$$

2.5.3

・フーリエ展開

$$S=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\ell+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\ell \quad \cdots (2.166)$$

・複素フーリエ展開

$Z=e^{in\ell}\cdots(2.167)$ と置いて考えると、

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n Z^n \quad \cdots (2.168)$$

係数 A_n, B_n と P_n の関係をみるために、(2.168)を変形する

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n(\cos n\ell+i\sin n\ell)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}P_n(\cos n\ell+i\sin n\ell)+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos n\ell+i\sin n\ell)+P_0(\cos(0)+i\sin(0))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P_{-n}(\cos n\ell-i\sin n\ell)+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos n\ell+i\sin n\ell)+P_0$$

$$=P_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(P_{-n}+P_n)\cos n\ell+i(P_n-P_{-n})\sin n\ell\right] \quad \cdots ⑤$$

(2.166)と⑤を比較して、

$$\begin{cases}\frac{1}{2}A_0=P_0\\ A_n=P_n+P_{-n}\\ B_n=i(P_n-P_{-n})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}P_n=\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{2i}B_n\\ P_{-n}=\frac{1}{2}A_n-\frac{1}{2i}B_n\end{cases} \cdots (2.169)$$

$$\begin{cases}A_0=2P_0\\ A_n=P_n+P_{-n}\\ B_n=i(P_n-P_{-n})\end{cases} \cdots (2.170)$$

離心近点離角 u について変数

$$s = e^{iu} \quad \cdots (2.171)$$

を導入

(2.167)をケプラー方程式を用いて書き換えると、

$$Z = e^{i(u - e\sin u)} \qquad (\because u - e\sin u = l,\ Z = e^{il})$$

$$= e^{iu} \cdot e^{-ie\sin u}$$

$$= s \cdot e^{-\frac{e}{2}(s - s^{-1})}$$

$$\cdots (2.173)$$

$\because$ 2.171

$s = e^{iu}$ より　　$s^{-1} = e^{-iu}$ より

$$s = \cos u + i\sin u$$
$$-)\ s^{-1} = \cos u - i\sin u$$
$$s - s^{-1} = 2i\sin u$$
$$\Rightarrow i\sin u = \frac{1}{2}(s - s^{-1})$$

コーシーの第1定理

周期関数 S に対して、以下のような周期関数 $\sqcup$ を考える

$$\sqcup = S\frac{r}{a}e^{\frac{ne}{2}(s - s^{-1})} \quad \cdots (2.174)$$

この $\sqcup$ を離心近点離角でフーリエ展開する

$$\sqcup = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n' s^n \quad \cdots (2.175)$$

このとき、

$$P_n = P_n' \quad \cdots (2.176)$$

の関係がある。

°コーシーの第1定理の証明

係数P_nは、(2.168)より、

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S Z^{-n} dl \quad \cdots (2.177)$$

積分変数をlからuに変換するため、(2.172)をuで微分する

$$1 - e\cos u = \frac{dl}{du}$$

$$dl = (1 - e\cos u)du$$

$$= \frac{r}{a}du \quad (\because 2.59\ ;\ r = a(1-e\cos u))$$

$$\cdots (2.178)$$

(2.178)と(2.173)を(2.177)へ代入

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S Z^{-n} dl$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S \cdot S^{-n} e^{n\frac{e}{2}(S-S^{-1})} \cdot \frac{r}{a}du \quad (\because 2.173式, 2.178)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S^{-n} \sqcup du \quad (\because 2.174)$$

$$= P_n' \cdots (2.179)$$

[例2.5a]

$\zeta = \frac{a}{r}$ をフーリエ展開するために、ζに対するωについて考える

(2.174)より、このζに対するωは、

$$\omega = \zeta \cdot \frac{r}{a} \cdot e^{\frac{ne}{2}(s-s^{-1})}$$ ~~⋯(2.180)~~

$$= e^{\frac{ne}{2}(s-s^{-1})} \quad \cdots (2.180)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ne)\cdot s^n \quad (\because 12.54: ベッセル関数の母関数) \quad \cdots (2.181)$$

この(2.181)と(2.168)[redacted]とコーシーの第1定理より、

$$P_n = J_n(ne)$$

となる。つまり、

$$P_{-n} = [redacted]\ \frac{1}{2}A_n - \frac{1}{2i}\underbrace{B_n}_{0} = P_n = J_n(ne) \quad (\because \zeta は[redacted]実数なので、B_n = 0)$$

これらと、(2.170)より

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A_0 = J_0(0) = 1 \quad (\because 12.53) \\ [redacted] \\ A_n = 2J_n(ne) \\ B_n = 0 \end{cases}$$

以上と(2.166)より、

$$\zeta = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos n\ell \quad \cdots (2.182)$$

[例2.5b]

sに対応する$\sqcup$は、 $\left(s = \left(\frac{x}{a}\right)^m\right)$

$$\sqcup = \left(\frac{r}{a}\right)^{m+1} e^{\frac{ne}{2}(s-s^{-1})} \quad (\because 2.174) \qquad \cdots (2.183)$$

(2.183)へ $n=0$ をいれて $\sqcup_0$ をもとめる

$$\sqcup_0 = \sqcup_{(n=0)}$$
$$= \left(\frac{r}{a}\right)^{m+1}$$
$$= (1 - e\cos u)^{m+1} \quad (\because r = a(1-e\cos u))$$
$$= \left\{1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right\}^{m+1} \quad \left(\because \cos u = \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu}) \underset{(\because 2.171)}{=} \frac{1}{2}(s + s^{-1})\right)$$
$$\cdots (2.184)$$

この$\sqcup_0$をテイラー展開したいが、その前の準備として、

$s + \frac{1}{s} = x$ とおき、

$f(x) = \sqcup_0$ とすると、

$$f(x) = \sqcup_0 = \left(1 - \frac{e}{2}x\right)^{m+1} \quad (\because 2.184)$$
$$f'(x) = -(m+1)\frac{e}{2}\left(1 - \frac{e}{2}x\right)^m$$
$$f''(x) = m(m+1)\left(\frac{e}{2}\right)^2\left(1 - \frac{e}{2}x\right)^{m-1}$$
$$\vdots$$
$$f^{(j)}(x) = \frac{(m+1)!}{(m+1-j)!}(-1)^j\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(1 - \frac{e}{2}x\right)^{m+1-j}$$

以上より、$\sqcup_0$を $x=0$ 周りでテーラー展開すると、

$$\sqcup_0 = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{j!}f^{(j)}(0)x^j + \cdots$$
$$= 1 \cancel{+} -(m+1)\frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) + \frac{(m+1)m}{2!}\left(\frac{e}{2}\right)^2\left(s + \frac{1}{s}\right)^2 + \cdots + (-1)^j\frac{(m+1)!}{j!\cdot(m+1-j)!}\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(s + \frac{1}{s}\right)^j + \cdots$$
$$\cdots (2.185)$$

ここで、

$$S+\frac{1}{S} \neq \mathrm{const} \quad \text{であるが、}$$

$$\left(S+\frac{1}{S}\right)^2 = S^2+\frac{1}{S^2}+\underline{\underline{2}}$$

$$\left(S+\frac{1}{S}\right)^3 = S^3+3S+\frac{3}{S}+\frac{1}{S^3}$$

$$\left(S+\frac{1}{S}\right)^4 = S^4+4S^2+\frac{4}{S^2}+\frac{1}{S^4}+\underline{\underline{6}}$$

より、$\left(S+\frac{1}{S}\right)$の奇数乗から定数部分は出てこないが、偶数乗からは出てくることがわかり、この定数部分は以下のように表せる

$$\left\{\left(S+\frac{1}{S}\right)^{2\ell}\right\}_{\mathrm{const}} = \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2} \quad \cdots \quad (2.186)$$

したがってSの定数部分は、

$$(S)_{\mathrm{const}} = \left\{\left(\frac{L}{a}\right)^m\right\}_{\mathrm{const}}$$

$$= 1+\frac{(m+1)m}{2!}\left(\frac{e}{2}\right)^2\cdot\frac{2!}{1}+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{4!}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4\cdot\frac{4!}{(2!)^2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(m+1)!}{(m+1-2\ell)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2\ell}\cdot\frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2}$$

$$= 1+(m+1)m\left(\frac{e}{2}\right)^2+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{(2!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^4+\cdots\frac{(m+1)!}{(\ell!)^2\cdot(m+1-2\ell)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2\ell}+\cdots$$

$$\cdots(2.187)$$

2.5.4

(2.164)より、

$$u = l + \Delta u \quad \cdots (2.190)$$

$$\Delta u = e\sin l + \frac{1}{2}e^2\sin 2l + O(e^3) \quad \cdots (2.191)$$

まず、$\cos u$の展開を求める

$$\cos u = \cos(l+\Delta u)$$

$$= \cos l \cos\Delta u - \sin l \sin\Delta u$$

$$= \left\{1-\frac{1}{2}(\Delta u)^2\right\}\cos l - \Delta u \sin l + O\{(\Delta u)^3\} \quad \cdots (2.192)$$

$f(x) = \cos x$ とおると、

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f(x)$をマクローリン展開

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$

$= \cos(0) - \sin(0)x - \frac{1}{2}\cos(0)x^2$

$= 1 - \frac{1}{2}x^2$

$f(\Delta u) = 1 - \frac{1}{2}(\Delta u)^2$

つまり、$\cos(\Delta u) = 1 - \frac{1}{2}(\Delta u)^2$

同様に$g(x) = \sin x$とおいて

マクローリン展開

$\sin(\Delta u) = \Delta u$

(2.191)を(2.192)へ代入して整理する

このとき、e^2までの表現を計算することとする

$$\cos u = \left\{1-\frac{1}{2}\left(e\sin l+\frac{1}{2}e^2\sin 2l\right)^2\right\}\cos l - \left(e\sin l+\frac{1}{2}e^2\sin 2l\right)\sin l + O(e^3)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}e^2\sin^2 l\right)\cos l - \left(e\sin^2 l + \frac{1}{2}e^2\sin 2l \sin l\right) + O(e^3)$$

↓ cosに統一

$$= \cos l - \frac{1}{2}e^2\cos l(1-\cos^2 l) - e(1-\cos^2 l) - e^2\cos l(1-\cos^2 l) + O(e^3)$$

$$= -e + \left(1-\frac{3}{2}e^2\right)\cos l + e\cos^2 l + \frac{3}{2}e^2\cos^3 l + O(e^3)$$

$$= -e + \left(1-\frac{3}{2}e^2\right)\cos l + e\left(\frac{\cos 2l+1}{2}\right) + \frac{3}{2}e^2\left(\frac{\cos 3l + 3\cos l}{4}\right) + O(e^3)$$

$$= -\frac{1}{2}e + \left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos l + \frac{1}{2}e\cos 2l + \frac{3}{8}e^2\cos 3l + O(e^3) \quad \cdots (2.193)$$

($\because$ 倍角、3倍角の公式

$\cos^2 l = \frac{1}{2}(\cos 2l + 1)$

$\cos^3 l = \frac{1}{4}(\cos 3l + 3\cos l)$)

同様にして、$\sin u$ は

$$\sin u = \sin(l + \Delta u)$$

$$= \sin l \cos \Delta u + \cos l \sin \Delta u$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{2}(\Delta u)^2\right\} \sin l + \Delta u \cdot \cos l + O\{(\Delta u)^3\}$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{2}\left(e \sin l + \frac{1}{2}e^2 \sin 2l\right)^2\right\} \sin l + \left(e \sin l + \frac{1}{2}e^2 \sin 2l\right) \cdot \cos l + O\{(\Delta u)^3\}$$

$$= \sin l - \frac{1}{2}e^2 \sin^3 l + e \sin l \cos l + e^2 \sin l \cos^2 l + O(e^3) \quad \leftarrow$$ (e^n $n \geq 3$ 以上は $\fallingdotseq 0$ として近似)

$\downarrow$ $\sin$ に統一

$$= \sin l - \frac{1}{2}e^2 \sin^3 l + \frac{1}{2} e \sin 2l + e^2 \sin l (1 - \sin^2 l) + O(e^3)$$

$$= (1 + e^2) \sin l - \frac{3}{2}e^2 \sin^3 l + \frac{1}{2} e \sin 2l + O(e^3)$$

$$= (1 + e^2) \sin l - \frac{3}{2}e^2 \cdot \frac{1}{4}\underbrace{(3 \sin l - \sin 3l)}_{(\because 3\text{倍角の公式})} + \frac{1}{2} e \sin 2l + O(e^3)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{8}e^2\right) \sin l + \frac{1}{2} e \sin 2l + \frac{3}{8}e^2 \sin 3l + O(e^3) \quad \cdots (2.194)$$

次に動径 r の展開を求める

$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u$ であることから、これに (2.193) を代入して。

$$= 1 + \frac{1}{2}e^2 - e \cos l - \frac{1}{2}e^2 \cos 2l + O(e^3) \quad \cdots (2.195)$$

(e^n $n \geq 3$ は $\fallingdotseq 0$ として近似)

r の逆数は、

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e \cos u}$$

ここで、$f(x) = \frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開を考える

$$f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

f(x)のマクローリン展開を参考に、$x = e\cos u$ を f(x)に代入すると、

$$\frac{a}{r} = 1 + e\cos u + \frac{2}{2}e^2\cos^2 u + O(e^3)$$

$$= 1 + e\cos u + e^2\cos^2 u + O(e^3) \quad \cdots ⑥$$

この式に(2.193)を代入するが、まず先に$\cos^2 u$について計算しておく。

$$\cos u = -\frac{1}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos l + \frac{1}{2}e\cos 2l + \frac{3}{8}e^2\cos 3l + O(e^3) \quad \cdots (2.193)$$

これをeの次数別にまとめると、

$$\cos u = \cos l + \left(\frac{1}{2}\cos 2l - \frac{1}{2}\right)e + \left(-\frac{1}{8}\sin l + \frac{3}{8}\sin 3l\right)e^2$$

これを用いて、$\cos^2 u$ を求めるのだが、⑥からわかるように$\cos^2 u$にはe^2が掛けられており、かつ今回の計算ではe^2までの表現しか考えないことから、

$$\cos^2 u = \cos^2 l \cancel{+ 2\cos l\left(\frac{1}{2}\cos 2l - \frac{1}{2}\right)e}$$

としてよい

以上より、⑥は、

$$\frac{a}{r} = 1 + \left(-\frac{1}{2}e^2 + e\cos l + \frac{1}{2}e^2\cos 2l\right) + e^2\cos^2 l$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^2 + e\cos l + \frac{1}{2}e^2\cos 2l + e^2\cdot\frac{1}{2}(\cos 2l + 1) \quad (\because 2倍角の公式)$$

$$= 1 + e\cos l + e^2\cos 2l + O(e^3) \quad \cdots (2.196)$$

$x^* = a(\cos u - e) \cdots (2.57)$ より.

$$\frac{x^*}{a} = \cos u - e$$

$$= -\frac{3}{2}e + \left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos l + \frac{1}{2}e\cos 2l + \frac{3}{8}e^2\cos 3l + O(e^3) \quad (\because 2.193) \cdots (2.197)$$

$y^* = a\sqrt{1-e^2}\sin u \cdots (2.58)$ より

$$\frac{y^*}{a} = \sqrt{1-e^2}\sin u$$

($\sqrt{1-e^2}$ をマクローリン展開

$f(e) = (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, $f'(e) = -e(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(e) = -(1-e^2)^{-\frac{1}{2}} - e^2(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$f(e) = f(0) + f'(0)e + \frac{f''(0)}{2!}e^2$$

$$= 1 + 0 + \frac{1}{2}(-1)e^2$$

$$\sqrt{1-e^2} \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2}e^2$$)

$$\frac{y^*}{a} \fallingdotseq \left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\sin u$$

$$= \left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\sin l + \frac{1}{2}e\sin 2l + \frac{3}{8}e^2\sin 3l + O(e^3) \quad (\because 2.194) \cdots (2.198)$$

$\cos f$ と $\sin f$ は.

$\cancel{\ } x^* = r\cos f$ より

$$\cos f = \frac{x^*}{r}$$

$$= \frac{a}{r}\frac{x^*}{a}$$

$$= \underbrace{(1+e\cos l + e^2\cos 2l)}_{(\because 2.196)}\underbrace{\left\{-\frac{3}{2}e + \left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos l + \frac{1}{2}e\cos 2l + \frac{3}{8}e^2\cos 3l\right\}}_{(\because 2.197)} + O(e^3)$$

$$= (1+e\cos l + e^2\cos 2l)\left\{\cos l + e\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2l\right) + e^2\left(-\frac{3}{8}\cos l + \frac{3}{8}\cos 3l\right)\right\} + O(e^3)$$

$$= \cos l + e\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2l\right) + e^2\left(-\frac{3}{8}\cos l + \frac{3}{8}\cos 3l\right)$$

$$+ e\cos^2 l + e^2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2l\right) + e^2\cos 2l\cos l$$

$\vdots$

$$= -e + \left(1-\frac{9}{8}e^2\right)\cos l + e\cos 2l + \frac{9}{8}e^2\cos 3l \quad \cdots (2.199)$$

$y^* = r\sin f$ より

$$\sin f = \frac{y^*}{r} = \frac{a}{r}\cdot\frac{y^*}{a}$$

$$= \underbrace{(1+e\cos l + e^2\cos 2l)}_{(\because 2.196)}\underbrace{\left\{\left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\sin l + \frac{1}{2}e\sin 2l + \frac{3}{8}e^2\sin 3l\right\}}_{(\because 2.198)} + O(e^3)$$

$$= (1+e\cos l+e^2\cos 2l)\left\{\sin l + \frac{1}{2}e\sin 2l + \left(-\frac{5}{8}\sin l+\frac{3}{8}\sin 3l\right)e^2\right\} + O(e^3)$$

$$= \sin l + \frac{1}{2}e\sin 2l + \left(-\frac{5}{8}\sin l + \frac{3}{8}\sin 3l\right)e^2$$
$$+ e\sin l\cos l + \frac{1}{2}e^2\sin 2l\cos l$$
$$+ e^2\sin l\cos 2l \qquad + O(e^3)$$

$$= \sin l + \frac{1}{2}e\sin 2l - \frac{5}{8}e^2\sin l + \frac{3}{8}e^2\sin 3l + \frac{1}{2}e\sin 2l + \underbrace{e^2\sin l\cos^2 l}_{e^2\sin l(1-\sin^2 l)} + \underbrace{e^2\sin l(1-2\sin^2 l)}_{e^2\sin l - 2e^2\sin^3 l} + O(e^3)$$

3倍角の公式で、$\sin^3 l$ を $\sin 3l$ へ変換して整理すると、

$$= \left(1-\frac{7}{8}e^2\right)\sin l + e\sin 2l + \frac{9}{8}e^2\sin 3l + O(e^3) \quad \cdots (2.200)$$

f の u についての展開は

$$f = \underbrace{l + \Delta u}_{(\because 2.190)} + 2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e}_{(\because 2.202)}\cdot\sin u + \underbrace{\frac{1}{4}e^2}_{(\because 2.202)}\cdot 2\sin u\cos u$$

$$= l + \underbrace{e\sin l + \frac{1}{2}e^2\sin 2l}_{(\because 2.191)} + e\sin l + \underbrace{\frac{1}{2}e^2\sin 2l + \frac{1}{2}e^2\sin l\cos l}_{(\because 2.193,\ 2.194)} + O(e^3)$$

$$= l + 2e\sin l + \frac{5}{4}e^2\sin 2l + O(e^3) \quad \cdots (2.203)$$