2.1 運動方程式

2質点 P_1, P_2 の運動方程式

$$
\begin{cases}
m_1 \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -Gm_1m_2 \dfrac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r^3} & \cdots (2.1) \\[2ex]
m_2 \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -Gm_1m_2 \dfrac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{r^3} & \cdots (2.2)
\end{cases}
$$

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ の代わりとなる変数として、重心ベクトル $\boldsymbol{r}_c$ と相対ベクトル $\boldsymbol{r}$ をとりいれる。

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2} \quad \cdots (2.3)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \quad \cdots (2.4)$$

$\boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{r}$ を使って、$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ の位置をあらわすと、

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_c - \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \quad \cdots (2.5)$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_c + \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \quad \cdots (2.6)$$

$\boldsymbol{r}_c$ の運動方程式は (2.1), (2.2) の両辺の和をとることによって、

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r^3} - Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{r^3} \\
&= 0 \quad \cdots (a)
\end{aligned}
$$

(2.3) を時間で2回微分して、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_c}{dt^2} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2) \underset{(\because\ a)}{=} 0 \quad \cdots (2.7)$$

次に、相対ベクトル$\mathbb{r}$の運動方程式は、
(2.1), (2.2)をそれぞれm_1, m_2で辺々割算して差をとると、

$$\ddot{\mathbb{r}}_1 - \ddot{\mathbb{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2}{r^3} + Gm_1 \frac{\mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1}{r^3}$$

$$= -\frac{G}{r^3}(m_1 + m_2)(\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2)$$

$$\underline{\ddot{\mathbb{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbb{r}} \quad \cdots (2.8) \qquad (\because \mu = G(m_1 + m_2) \cdots (2.9), \ (2.4))$$

2体問題の基本の運動方程式として、今後議論を進めていく。