4.8 正三角形解の永年不安定性

○ $U^* = U - \frac{1}{2}n'(X^2+Y^2)$ …(4.23) は L_4, L_5 で極大値をとる。

この U^* を力学的ポテンシャル U とみなすと (つまり、コリオリ力項 $-\frac{1}{2}n'(X^2+Y^2)$ をムシする)

(4.80)(4.81) は、

$$\ddot{x} + ax + by = 0 \quad \cdots (4.125)$$

$$\ddot{y} + bx + cy = 0 \quad \cdots (4.126)$$

となる。

○ この (4.125), (4.126) についての固有方程式は、

・まず (4.125) へ (4.86) を代入

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + aAe^{\lambda t} + bBe^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow A(\lambda^2 + a) + Bb = 0 \quad \cdots ①$$

・次に、(4.126) へ (4.86) を代入

$$B\lambda^2 e^{\lambda t} + bAe^{\lambda t} + cBe^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow A \cdot b + B(\lambda^2 + c) = 0 \quad \cdots ②$$

・①,② より、固有方程式が求められる

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + a & b \\ b & \lambda^2 + c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + a)(\lambda^2 + c) - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^4 + (a+c)\lambda^2 + ac - b^2 = 0 \quad \cdots (4.127)$$

○ $\lambda^2 = \sigma$ と置いて (4.127) を書き換えると、

$$\sigma^2 + (a+c)\sigma + ac - b^2 = 0 \quad \cdots (4.128)$$

◦ 2次方程式(4.128)の判別式は、

$$D = (a+c)^2 - 4(ac-b^2)$$
$$= a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2$$
$$= \underbrace{(a-c)^2}_{(+)} + \underbrace{4b^2}_{(+)} > 0$$

◦ さらに、(4.128)の実根をσ_1, σ_2とおくと、
解と係数の関係より、

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -(a+c)$$
$$= -\left(-\frac{3}{4}n'^2 - \frac{9}{4}n'^2\right) \quad (\because 4.92,\ 4.94)$$
$$= 3n'^2 > 0$$

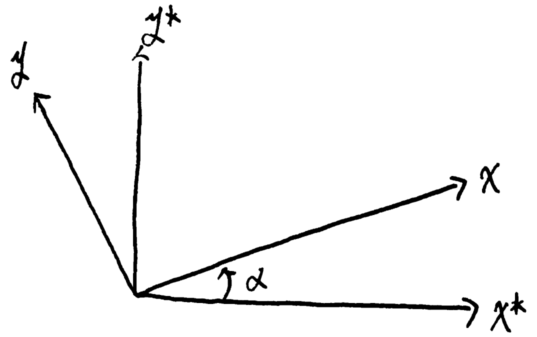
$$\sigma_1\sigma_2 = ac - b^2$$
$$= \left(-\frac{3}{4}n'^2\right)\left(-\frac{9}{4}n'^2\right) - \left\{\mp\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\nu)n'^2\right\}^2$$
$$= \frac{27}{16}n'^4 - \frac{27}{16}(1-2\nu)^2 n'^4$$
$$= \frac{27}{16}n'^4\left\{1-1+4\nu-4\nu^2\right\}$$
$$= \frac{27}{4}n'^4\nu(1-\nu) > 0 \quad (\because 4.96 : 0 \leq \nu \leq \tfrac{1}{2})$$

以上より、σ_1, σ_2は両方とも正であることがわかる
よって、解は不安定である。

正三角形解はコリオリ力によって安定化されている

4.8.1 新しい座標系の導入

◦ 永年不安定性を議論するのに都合のよい座標系を導入する。



このように座標回転させることで、U^* の xy 項を消す

$$\begin{cases} x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha & \cdots (4.130) \\ y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha & \cdots (4.131) \end{cases}$$

◦ x^*, y^* を使って U^* を表す　((4.84)へ(4.130), (4.131))を代入する)

$$U^* = U_i + \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{2}dz^2 \quad \cdots (4.84)$$

$$= \frac{1}{2}a(x^{*2}\cos^2\alpha + y^{*2}\sin^2\alpha - 2x^*y^*\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$+ b(x^{*2}\sin\alpha\cos\alpha + x^*y^*\cos^2\alpha - x^*y^*\sin^2\alpha - y^{*2}\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$+ \frac{1}{2}c(x^{*2}\sin^2\alpha + y^{*2}\cos^2\alpha + 2x^*y^*\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= x^{*2}\left(\frac{1}{2}a\cos^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}c\sin^2\alpha\right)$$
$$+ x^*y^*\left\{-a\sin\alpha\cos\alpha + b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + c\sin\alpha\cos\alpha\right\}$$
$$+ y^{*2}\left(\frac{1}{2}a\sin^2\alpha - b\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}c\cos^2\alpha\right)$$

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1) \\ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \end{cases}$$ を代入して整理

$$= \left\{\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}c\right) + \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c\right)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}b\sin 2\alpha\right\}x^{*2}$$
$$+ \left\{b\cos 2\alpha + \left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a\right)\sin 2\alpha\right\}x^*y^*$$
$$+ \left\{\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}c\right) + \left(\frac{1}{4}c - \frac{1}{4}a\right)\cos 2\alpha - \frac{1}{2}b\sin 2\alpha\right\}y^{*2}$$

⋮

⋮

$$U^* = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha\right\}x^{*2}$$
$$+\left\{b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha\right\}x^* y^*$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(c-a)\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha\right\}y^{*2}$$

この式を書き換えると、

$$U^* = \frac{1}{2}a^* x^{*2} + b^* x^* y^* + \frac{1}{2}c^* y^{*2} \quad \cdots (4.132)$$

$$a^* = \frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha \quad \cdots (4.133)$$

$$b^* = b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha \quad \cdots (4.134)$$

$$c^* = \frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(c-a)\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha \quad \cdots (4.135)$$

$\boxed{\text{ここからは、符号で混乱が生じないように}L_4\text{近傍について議論していく}}$

↳ L_4 の場合の a, b, c は、

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4}n'^2 & \cdots (4.92) \\ b = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\nu)n'^2 & \cdots (4.93) \\ c = -\frac{9}{4}n'^2 & \cdots (4.94) \end{cases}$$

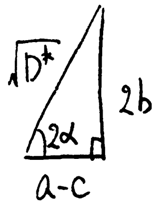
これを利用する

・$b^* = 0$ となるように（U^* の xy 項を消すため） α を決める

$$b^* = 0$$
$$\Rightarrow b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c}$$

$(\because (4.92), (4.93), (4.94))$

$$= \frac{-6\sqrt{3}(1-2\nu)}{6}$$
$$= -\sqrt{3}(1-2\nu) \quad \cdots (4.136)$$



$$\sin 2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{D^*}}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{c-a}{\sqrt{D^*}} \quad \cdots (4.137)$$

$$\begin{aligned} D^* &= (a-c)^2 + (2b)^2 \\ &= \left(-\frac{3}{4}n'^2 + \frac{9}{4}n'^2\right)^2 + \left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2}(1-2\nu)n'^2\right\}^2 \\ &= 9\{1-3\nu(1-\nu)\}n'^4 \quad \cdots (4.138) \end{aligned}$$

$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ より $\nu(1-\nu) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow D^* > 0$

○(4.137)を(4.133), (4.135)へ代入する

$$\begin{aligned} a^* &= \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\cdot\frac{a-c}{\sqrt{D^*}} + b\cdot\frac{2b}{\sqrt{D^*}} \\ &= \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2\sqrt{D^*}}\{\underbrace{(a-c)^2 + 4b^2}_{D^*}\} \\ &= \frac{1}{2}(a+c+\sqrt{D^*}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}n'^2 - \frac{9}{4}n'^2 + \sqrt{9\{1-3\nu(1-\nu)\}n'^4}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{1-3\nu(1-\nu)}\right)n'^2 < 0 \quad \cdots (4.139) \end{aligned}$$

$(\because \nu(1-\nu) \leq \frac{1}{4})$

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c)\frac{a-c}{\sqrt{D^*}} - b\frac{2b}{\sqrt{D^*}} \\ &= \frac{1}{2}(a+c-\sqrt{D^*}) \\ &= -\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1-3\nu(1-\nu)}\right)n'^2 < 0 \quad \cdots (4.140) \end{aligned}$$

← a^*と形が似ているので計算は簡単

4.8.2 永年不安定性

- (x^*, y^*)系での運動方程式を求める

  - (x, y)系での運動方程式(4.80)(4.81)へ(x, y)と(x^*, y^*)の関係式(4.130)(4.131)を代入する

α は定数

$$(\ddot{x}^*\cos\alpha - \ddot{y}^*\sin\alpha) - 2n'(\dot{x}^*\sin\alpha + \dot{y}^*\cos\alpha) + a(x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha) + b(x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha) = 0 \quad \cdots ③$$

$$(\ddot{x}^*\sin\alpha + \ddot{y}^*\cos\alpha) + 2n'(\dot{x}^*\cos\alpha - \dot{y}^*\sin\alpha) + b(x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha) + c(x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha) = 0 \quad \cdots ④$$

- ③ × cos α + ④ × sin α

$$\ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + ax^*\cos^2\alpha - ay^*\sin\alpha\cos\alpha + bx^*\sin\alpha\cos\alpha + by^*\cos^2\alpha + bx^*\cos\alpha\sin\alpha - by^*\sin^2\alpha + cx^*\sin^2\alpha + cy^*\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + (ax^* + by^*)\cos^2\alpha + (cx^* - by^*)\sin^2\alpha + \{2bx^* + (c-a)y^*\}\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + \frac{1}{2}(ax^* + by^*)(\cos 2\alpha + 1) + \frac{1}{2}(cx^* - by^*)(1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}\{2bx^* + (c-a)y^*\}\sin 2\alpha = 0$$

$$\ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + \frac{1}{2}\left[\{a + c + (a-c)\cos 2\alpha + 2b\sin 2\alpha\}x^* + \{\underbrace{2b\cos 2\alpha - (a-c)\sin 2\alpha}_{=0}\}y^*\right] = 0$$

$$\left(\frac{-2bc + 2ab}{\sqrt{D^*}} - \frac{2ab - 2bc}{\sqrt{D^*}} = 0\right)$$

$$\ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + \left\{\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha\right\}x^* = 0$$

$$\ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + a^* x^* = 0 \quad \cdots (4.145) \quad (\because 4.133)$$

- ③ × (− sin α) + ④ × cos α

$$\ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* - a(x^*\sin\alpha\cos\alpha - y^*\sin^2\alpha) - b(x^*\sin^2\alpha + y^*\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$+ b(x^*\cos^2\alpha - y^*\sin\alpha\cos\alpha) + c(x^*\sin\alpha\cos\alpha + y^*\cos^2\alpha) = 0$$

$$\ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* + (bx^* + cy^*)\cos^2\alpha + (-bx^* + ay^*)\sin^2\alpha + \{(c-a)x^* - 2by^*\}\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* + \frac{1}{2}(bx^* + cy^*)(\cos 2\alpha + 1) + \frac{1}{2}(-bx^* + ay^*)(1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}\{(c-a)x^* - 2by^*\}\sin 2\alpha = 0$$

$$\ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* + \frac{1}{2}\left[\{\underbrace{2b\cos 2\alpha + (c-a)\sin 2\alpha}_{=0}\}x^* + \{a + c + (c-a)\cos 2\alpha - 2b\sin 2\alpha\}y^*\right] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{D^*}}\{-2bc + 2ab + 2bc - 2ab\} = 0$$

$$\ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* + \left\{\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(c-a)\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha\right\}y^* = 0$$

$$\ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* + c^* y^* = 0 \quad \cdots (4.146) \quad (\because 4.135)$$

・散逸関数

$$\frac{1}{2}\left(f_{11}x^{*2}+2f_{12}x^{*}y^{*}+f_{22}y^{*2}\right)^{(=F)} \quad \cdots (4.147)$$

で表されるような散逸力を運動方程式(4.145).(4.146)に入れる。

・散逸~~函~~関数は正定値であるから、 ← よくわからないから あとで復習

$$f_{11}>0,\ f_{22}>0,\ f_{11}f_{22}>f_{12}^{2} \quad \cdots (4.148)$$

である。f_{11}, f_{12}, f_{22} は微小量。

・散逸力の各成分は、 ランダウ 力学 P.95

$$f_{x^*} = -\frac{\partial F}{\partial x^*} = -f_{11}x^* - f_{12}y^* \quad \cdots ③$$

$$f_{y^*} = -\frac{\partial F}{\partial y^*} = -f_{12}x^* - f_{22}y^* \quad \cdots ④$$

・この③.④を(4.145)(4.146)に入れて、
散逸力が働く場合の運動方程式を導く

$$\begin{cases} \ddot{x}^* - 2n'\dot{y}^* + a^*x^* = f_x \\ \ddot{y}^* + 2n'\dot{x}^* + c^*y^* = f_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}^* + a^*x^* + f_{11}\dot{x}^* + (f_{12}-2n')\dot{y}^* = 0 & \cdots (4.149) \\ \ddot{y}^* + c^*y^* + (f_{12}+2n')\dot{x}^* + f_{22}\dot{y}^* = 0 & \cdots (4.150) \end{cases}$$

。$x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ とおき、固有方程式を求める

・(4.149)より

$$A\lambda^2 + a^* A + f_{11} A\lambda + (f_{12} - 2n')B\lambda = 0$$

$$\therefore (\lambda^2 + f_{11}\lambda + a^*)A + (f_{12} - 2n')\lambda B = 0 \quad \cdots ⑤$$

・(4.150)より

$$B\lambda^2 + c^* B + (f_{12} + 2n')\lambda A + f_{22}\lambda B = 0$$

$$\therefore (f_{12} + 2n')\lambda A + (\lambda^2 + f_{22}\lambda + c^*)B = 0 \quad \cdots ⑥$$

・⑤, ⑥より固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + f_{11}\lambda + a^* & (f_{12} - 2n')\lambda \\ (f_{12} + 2n')\lambda & \lambda^2 + f_{22}\lambda + c^* \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda^2 + f_{11}\lambda + a^*)(\lambda^2 + f_{22}\lambda + c^*) - (f_{12}^2 - 4n'^2)\lambda^2 = 0$$

$$\therefore \lambda^4 + (f_{11} + f_{22})\lambda^3 + (a^* + c^* + 4n'^2 + f_{11}f_{22} - f_{12}^2)\lambda^2 + (f_{11}c^* + f_{22}a^*)\lambda + a^*c^* = 0$$

$$\cdots (4.151)$$

。エネルギー散逸がないとき (4.151)の固有値は、

$\lambda = \pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ ← ($\because$ エネルギー散逸がないということは(4.90)のときと同じ よって(4.101)がそのままつかえる)

であるから、

エネルギー散逸があるときの固有値は

$$\lambda' = p_1 \pm i(\omega_1 + r_1), \quad p_2 \pm i(\omega_2 + r_2)$$

と書ける。(p_1, p_2, r_1, r_2 は ω_1, ω_2 に比べて微小量)

○4次方程式の根と係数の関係について考える。

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \quad \cdots ⑦$$

について、この根を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とおくと、

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) = 0$$

$$\to x^4 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)x^2$$
$$+ (-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3\alpha_4)x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0 \quad \cdots ⑧$$

⑦,⑧を比較して、

$$\begin{cases} a_1 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 & \cdots ⑨ \\ a_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 & \cdots ⑩ \\ a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \cdots ⑪ \\ a_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \cdots ⑫ \end{cases}$$

○⑨を用いると、

$$f_{11} + f_{22} = -\{p_1 + i(\omega_1 + r_1)\} - \{p_1 - i(\omega_1 + r_1)\} - \{p_2 + i(\omega_2 + r_2)\} - \{p_2 - i(\omega_2 + r_2)\}$$
$$= -2p_1 - 2p_2$$

$$\therefore 2p_1 + 2p_2 = -(f_{11} + f_{22}) \underset{(\because 4.148)}{<} 0 \quad \cdots (4.152)$$

○$\frac{⑪}{⑫}$より、

$$-\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_4} = \frac{f_{11}c^* + f_{22}a^*}{a^* c^*}$$

$$\frac{1}{p_1 + i(\omega_1 + r_1)} + \frac{1}{p_1 - i(\omega_1 + r_1)} + \frac{1}{p_2 + i(\omega_2 + r_2)} + \frac{1}{p_2 - i(\omega_2 + r_2)} = -\frac{f_{11}}{a^*} - \frac{f_{22}}{c^*}$$

$$\frac{2p_1}{p_1^2 + (\omega_1 + r_1)^2} + \frac{2p_2}{p_2^2 + (\omega_2 + r_2)^2} = -\frac{f_{11}}{a^*} - \frac{f_{22}}{c^*}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2p_1}{\omega_1^2\left\{\underbrace{\frac{p_1^2}{\omega_1^2}}_{\approx 0}+\underbrace{\left(1+\frac{\gamma_1}{\omega_1}\right)^2}_{\approx 1}\right\}}+\frac{2p_2}{\omega_2\left\{\frac{p_2^2}{\omega_2^2}+\left(1+\frac{\gamma_2}{\omega_2}\right)^2\right\}} = -\frac{f_{11}}{a^*}-\frac{f_{22}}{c^*}$$

$$\approx \quad \frac{2p_1}{\omega_1^2}+\frac{2p_2}{\omega_2^2} \approx -\underbrace{\frac{f_{11}}{a^*}}_{(\because 4.139\text{より } a^*<0)}-\underbrace{\frac{f_{22}}{c^*}}_{(\because 4.140\text{より } c^*<0)} > 0 \quad \cdots (4.153)$$

∘(4.152)(4.153)より

$$p_1 p_2 < 0 \quad \cdots (4.154)$$

(∵ p_1, p_2 どちらかに0があれば(4.152)(4.153)どちらにも矛盾
p_1, p_2 どちらも正だと(4.152)に矛盾
p_1, p_2 どちらも負だと(4.153)に矛盾)

∘(4.152)より得られる $2p_1=-2p_2-f_{11}-f_{22}$ を(4.153)へ代入する

$$\frac{-2p_2-f_{11}-f_{22}}{\omega_1^2}+\frac{2p_2}{\omega_2^2} \approx -\frac{f_{11}}{a^*}-\frac{f_{22}}{c^*}$$

$$2p_2\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)-\frac{f_{11}+f_{22}}{\omega_1^2} \approx -\frac{f_{11}}{a^*}-\frac{f_{22}}{c^*}$$

$$\therefore 2p_2\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right) \approx \underbrace{\frac{f_{11}+f_{22}}{\omega_1^2}}_{>0\ (\because 4.148)} \underbrace{-\frac{f_{11}}{a^*}-\frac{f_{22}}{c^*}}_{>0\ (\because 4.153)} > 0 \quad \cdots (4.155)$$

∘(4.153)より

$$2p_2\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\right) > 0$$

$$\therefore p_2(\omega_1^2-\omega_2^2) > 0 \quad \cdots (4.156)$$

◦ (4.154) と (4.156) より

$p_1 < 0$, $p_2 > 0$ ← ($\because$ $\omega_1 > \omega_2$)

がわかる。