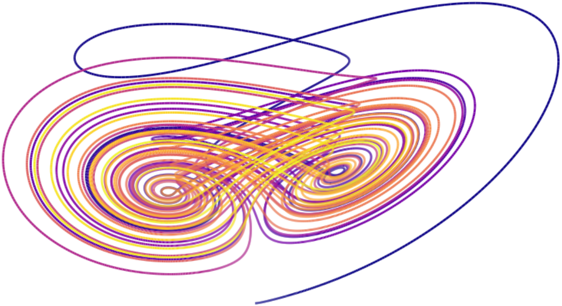
Numeeriset menetelmät differentiaaliyhtälöille

Arttu Hyvönen

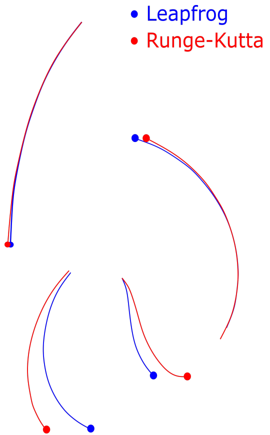
21.2.2020



Kuva: Chen attraktori Runge-Kutta menetelmällä

Sisältö

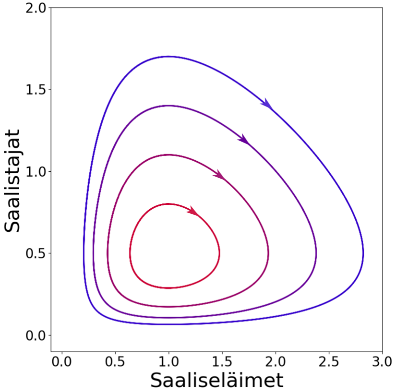
- Yleistä tietoa aiheesta
- Menetelmien esittely
  - Euler
  - Runge-Kutta
  - Leapfrog
- Menetelmien vertailu
- Yhteenveto



Kuva: Simulaatio gravitaatiosta eri menetelmillä

Differentiaaliyhtälöt

- Kuvaavat monenlaisia systeemejä
  - Populaatio
  - Kemialliset reaktiot
  - Pörssikurssit
- Fysiikan matemaattisen muotoilun perusta



Kuva: Populaation mallinnus Lotkan-Volterran yhtälöllä

Numeeristen menetelmien tarve

- Kaikki yhtälöt eivät ratkea analyyttisesti
- Ratkaisu saattaa olla liian kömpelö käyttää

$$\theta(t) = 2\arcsin\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sn}(u,k)\right\}$$
$$k = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$
$$u = K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t$$
$$\mathrm{sn}(u,k) = \frac{\vartheta(0,\tau)}{\vartheta_{10}(0,\tau)}\,\frac{\vartheta_{10}(u\,\vartheta(0,\tau)^{-2},\tau)}{\vartheta_{01}(u\,\vartheta(0,\tau)^{-2},\tau)}$$
$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\pi i n^2\tau + 2\pi i n z)$$
$$\vartheta_{01}(z,\tau) = \vartheta(z+\frac{1}{2},\tau)$$
$$\vartheta_{10}(z,\tau) = \exp(\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i z)\vartheta(z+\frac{1}{2}\tau,\tau)$$
$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}$$

Kuva: Heilurin analyyttinen ratkaisu ja funktioiden määritelmät

Numeeristen menetelmien tavoite

- Tavoite on ottaa differentiaaliyhtälö ja ratkaista siitä haluttu muuttuja

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \rightarrow y = g(t)$$

- Tähän päästään ottamalla alkuarvo ja laskemalla loput arvot yhtälön mukaan

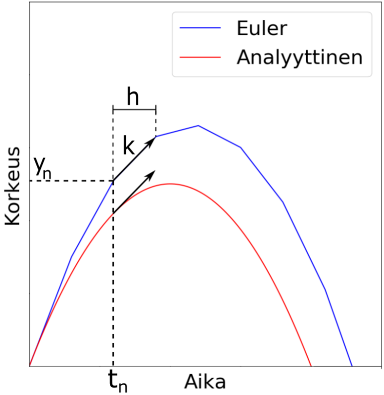
Eulerin menetelmä

- Yksinkertaisin menetelmä
- Helppo toteuttaa, mutta epätarkka
- Toimii pohjana tarkemmille menetelmille

Kuva: Leonhard Euler

Eulerin menetelmän toiminta

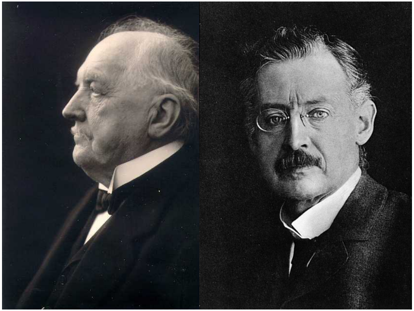
1. Alkuarvo y_n
2. Funktio kulmakertoimelle
   $$\frac{dy}{dt} = k(t)$$
3. Edetään askel h kerrallaan
   $$y_{n+1} = y_n + h\,k(t_n)$$



Kuva: Heitetyn pallon korkeus ajan funktiona

Runge-Kutta menetelmät

- Joukko menetelmiä jotka kehitettiin 1900 alussa
- Yhden kulmakertoimen sijasta lasketaan monta
- Tunnetuimmasta menetelmästä käytetään nimeä Runge-Kutta menetelmä



Kuva: Martin Kutta ja Carl Runge

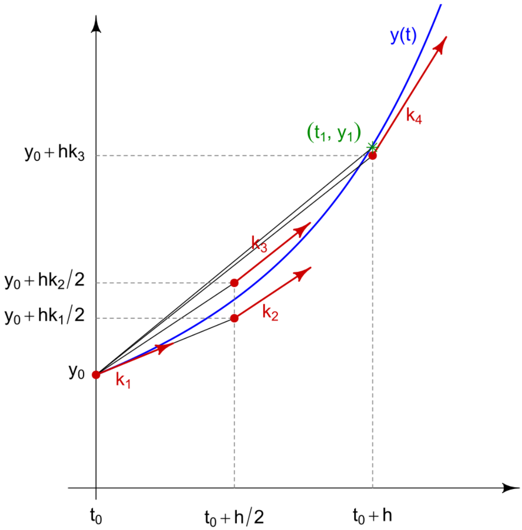
Runge-Kutta menetelmän toiminta

1. Alkuarvo y_n

2. Lasketaan kulmakertoimet $k_1, ... k_4$

3. Edetään askel h

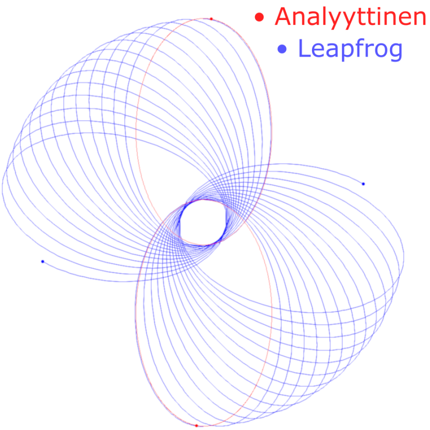
   $$y_{n+1} = y_n + h\,K$$



Kuva: Askel Runge-Kutta menetelmällä

Leapfrog menetelmä

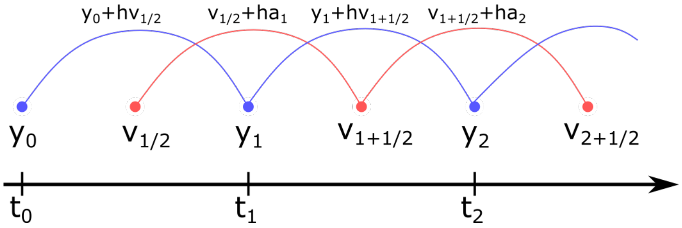
- Toimii yhtälöille muotoa $\frac{d^2 y}{dt^2} = a(t, y)$
- Säilyttää fysikaalisen systeemin kokonaisenergian
  - Epätarkkuutta muualla



Kuva: Kahden kappaleen simulaatio

Leapfrog menetelmän toiminta

1. Alkuarvot paikalle y_0 ja nopeudelle $v_{1/2}$
2. Funktio kiihtyvyydelle $a(t_n, y_n) \equiv a_n$
3. Edetään askel h eteenpäin y:llä ja v:llä



Kuva: Ensimmäiset askeleet Leapfrog menetelmällä

Menetelmien toteutus koodina

Eulerin menetelmä

```
def euler(h, t, q0, p0, dq, dp):
    k1 = dq(t, q0, p0)
    l1 = dp(t, q0, p0)

    q1 = q0 + k1*h
    p1 = p0 + l1*h

    return [q1, p1]
```

Leapfrog menetelmä

```
def leapfrog(h, t, q0, p0, ddq):
    p12 = p0 + ddq(t, q0)*h*0.5
    q1 = q0 + p12*h
    p1 = p12 + ddq(t, q1)*h*0.5

    return [q1, p1]
```

Runge-Kutta menetelmä

```
def rk4(h, t, q0, p0, dq, dp):
    k1 = h*dq(t, q0, p0)
    l1 = h*dp(t, q0, p0)

    k2 = h*dq(t+0.5*h, q0+0.5*k1, p0+0.5*l1)
    l2 = h*dp(t+0.5*h, q0+0.5*k1, p0+0.5*l1)

    k3 = h*dq(t+0.5*h, q0+0.5*k2, p0+0.5*l2)
    l3 = h*dp(t+0.5*h, q0+0.5*k2, p0+0.5*l2)

    k4 = h*dq(t+h, q0+k3, p0+l3)
    l4 = h*dp(t+h, q0+k3, p0+l3)

    q1 = q0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6.0
    p1 = p0 + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4)/6.0

    return [q1, p1]
```

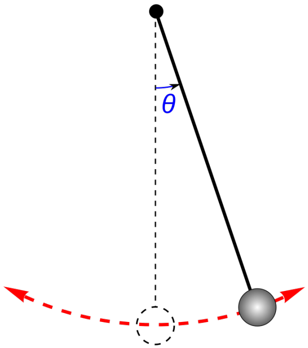
Vertailu systeemi

- Systeeminä käytetään ideaalista heiluria
- Leapfrog

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta)$$

- Runge-Kutta, Euler

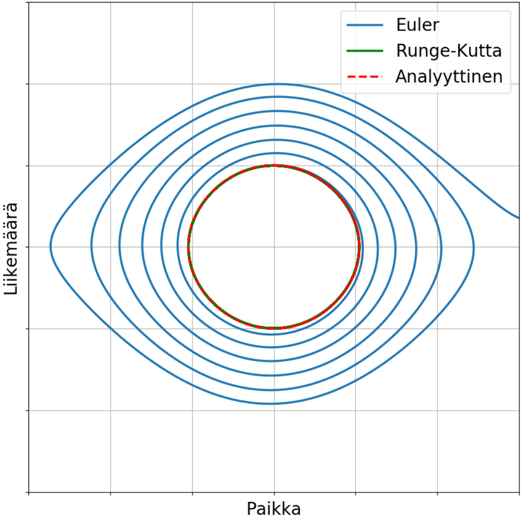
$$\frac{dp_\theta(t)}{dt} = -\sin(\theta), \; \frac{d\theta}{dt} = p_\theta$$



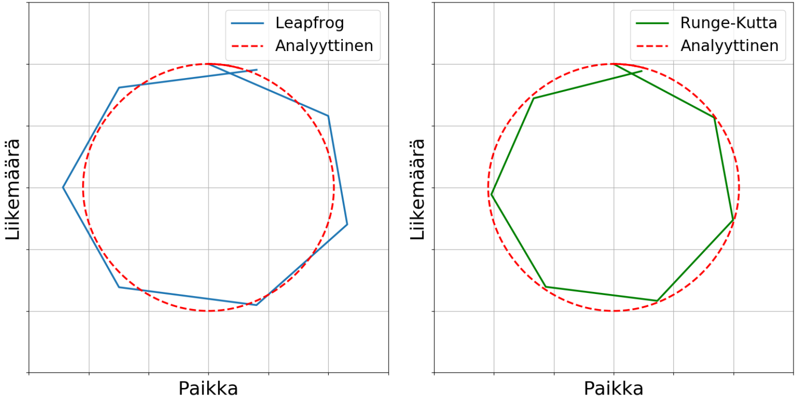
Kuva: Heiluri

Runge-Kutta ja Euler mentelmät

- Runge-Kutta ja analyyttinen lähes identtiset
- Eulerin menetelmällä kasaantuu virhettä

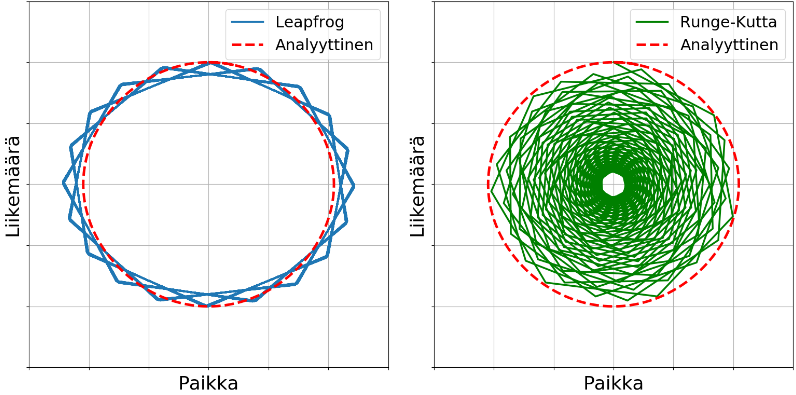


Runge-Kutta ja Leapfrog mentelmät



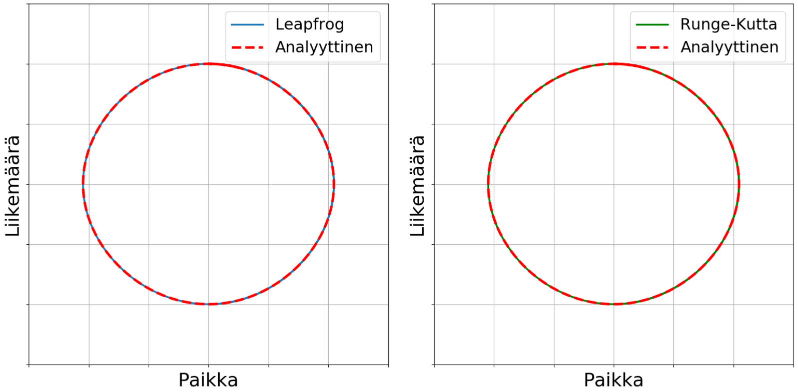
Kuva: Yksi heilahdus Runge-Kutta ja Lepafrog menetelmillä

Runge-Kutta ja Leapfrog mentelmät



Kuva: Monta heilahdusta Runge-Kutta ja Leapfrog menetelmillä

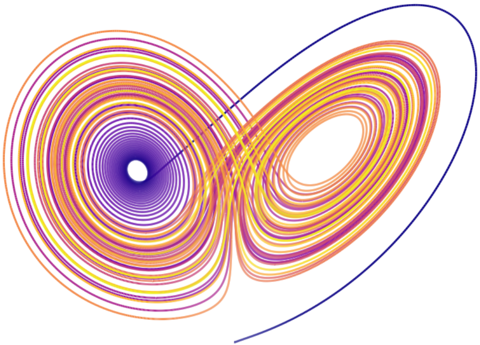
Runge-Kutta ja Leapfrog mentelmät



Kuva: Monta heilahdusta pienellä aika-askeleella

Yhteenveto

- Eulerin menetelmä on epätarkka
- Leapfrog on tarkka ja nopea mutta sen käytöllä on rajoituksia
- Runge-Kutta on melko tarkka ja sitä voi käyttää monissa tilanteissa



Kuva: Lorenz attraktori Runge-Kutta menetelmällä