Apresentação de pesquisa

Andrey Soldatenkov

Áreas de pesquisa

- Geometria diferencial
- Geometria algébrica
- Teoria de Hodge

A maior parte da minha pesquisa se concentra no estudo das estruturas geométricas relacionadas à álgebra dos quatérnios. Essas estruturas dão origem às variedades hipercomplexas e hiperkähler.

A álgebra dos quatérnios:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

Áreas de pesquisa

- Geometria diferencial
- Geometria algébrica
- Teoria de Hodge

A maior parte da minha pesquisa se concentra no estudo das estruturas geométricas relacionadas à álgebra dos quatérnios. Essas estruturas dão origem às variedades hipercomplexas e hiperkähler.

A álgebra dos quatérnios:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

Áreas de pesquisa

- Geometria diferencial
- Geometria algébrica
- Teoria de Hodge

A maior parte da minha pesquisa se concentra no estudo das estruturas geométricas relacionadas à álgebra dos quatérnios. Essas estruturas dão origem às variedades hipercomplexas e hiperkähler.

A álgebra dos quatérnios:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

Áreas de pesquisa

- Geometria diferencial
- Geometria algébrica
- Teoria de Hodge

A maior parte da minha pesquisa se concentra no estudo das estruturas geométricas relacionadas à álgebra dos quatérnios. Essas estruturas dão origem às variedades hipercomplexas e hiperkähler.

A álgebra dos quatérnios:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

Lembrete: variedades de Kähler

Seja X uma variedade de classe C^∞, sem fronteira

Definição

Uma estrutura complexa em X é um endomorfismo

$$I\colon TX \to TX,$$

tal que $I^2 = -Id$, e I é integrável, ou seja

$$[T^{1,0}X, T^{1,0}X] \subset T^{1,0}X,$$

onde $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ é o autofibrado de I com autovalor i, ou seja $V \in T^{1,0}X$ quando $IV = iV$.

Equivalentemente: uma estrutura complexa em X é um atlas com as cartas locais em $\mathbb{C}^n$, tais que as transições entre as cartas são holomorfas.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja X uma variedade de classe C^∞, sem fronteira

Definição

Uma estrutura complexa em X é um endomorfismo

$$I \colon TX \to TX,$$

tal que $I^2 = -Id$, e I é integrável, ou seja

$$[T^{1,0}X, T^{1,0}X] \subset T^{1,0}X,$$

onde $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ é o autofibrado de I com autovalor i, ou seja $V \in T^{1,0}X$ quando $IV = iV$.

Equivalentemente: uma estrutura complexa em X é um atlas com as cartas locais em $\mathbb{C}^n$, tais que as transições entre as cartas são holomorfas.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja X uma variedade de classe C^∞, sem fronteira

Definição

Uma estrutura complexa em X é um endomorfismo

$$I\colon TX \to TX,$$

tal que $I^2 = -Id$, e I é integrável, ou seja

$$[T^{1,0}X, T^{1,0}X] \subset T^{1,0}X,$$

onde $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ é o autofibrado de I com autovalor i, ou seja $V \in T^{1,0}X$ quando $IV = iV$.

Equivalentemente: uma estrutura complexa em X é um atlas com as cartas locais em $\mathbb{C}^n$, tais que as transições entre as cartas são holomorfas.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja X uma variedade de classe C^∞, sem fronteira

Definição

Uma ***estrutura complexa*** *em* X *é um endomorfismo*

$$I \colon TX \to TX,$$

tal que $I^2 = -Id$, *e* I *é* ***integrável****, ou seja*

$$[T^{1,0}X, T^{1,0}X] \subset T^{1,0}X,$$

onde $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ *é o autofibrado de* I *com autovalor* i*, ou seja* $V \in T^{1,0}X$ *quando* $IV = iV$.

Equivalentemente: uma estrutura complexa em X é um atlas com as cartas locais em $\mathbb{C}^n$, tais que as transições entre as cartas são holomorfas.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja X uma variedade de classe C^∞, sem fronteira

Definição

Uma estrutura complexa em X é um endomorfismo

$$I\colon TX \to TX,$$

tal que $I^2 = -Id$, e I é integrável, ou seja

$$[T^{1,0}X, T^{1,0}X] \subset T^{1,0}X,$$

onde $T^{1,0}X \subset TX \otimes \mathbb{C}$ é o autofibrado de I com autovalor i, ou seja $V \in T^{1,0}X$ quando $IV = iV$.

Equivalentemente: uma estrutura complexa em X é um atlas com as cartas locais em $\mathbb{C}^n$, tais que as transições entre as cartas são holomorfas.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja (X, I) uma variedade complexa.

Definição

Uma métrica hermitiana em (X, I) é uma métrica Riemanniana $g \in S^2T^*X$, tal que

$$g(Iu, Iv) = g(u, v)$$

para todos $u, v \in TX$.

Para uma métrica hermitiana g defina $\omega(u, v) = g(Iu, v)$. Então $\omega \in \Lambda^2 X$.

Definição

Uma métrica hermitiana chama-se Kähleriana se $d\omega = 0$
Uma variedade de Kähler = uma variedade complexa com uma métrica de Kähler.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja (X, I) uma variedade complexa.

Definição

Uma *métrica hermitiana* *em* (X, I) *é uma métrica Riemanniana* $g \in S^2T^*X$, *tal que*

$$g(Iu, Iv) = g(u, v)$$

para todos $u, v \in TX$.

Para uma métrica hermitiana g defina $\omega(u, v) = g(Iu, v)$. Então $\omega \in \Lambda^2X$.

Definição

Uma métrica hermitiana chama-se *Kähleriana* *se* $d\omega = 0$
Uma variedade de Kähler = uma variedade complexa com uma métrica de Kähler.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja (X, I) uma variedade complexa.

Definição

Uma *métrica hermitiana* *em* (X, I) *é uma métrica Riemanniana* $g \in S^2T^*X$, *tal que*

$$g(Iu, Iv) = g(u, v)$$

para todos $u, v \in TX$.

Para uma métrica hermitiana g defina $\omega(u, v) = g(Iu, v)$. Então $\omega \in \Lambda^2 X$.

Definição

Uma métrica hermitiana chama-se *Kähleriana* *se* $d\omega = 0$
Uma variedade de Kähler = uma variedade complexa com uma métrica de Kähler.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja (X, I) uma variedade complexa.

Definição

Uma métrica hermitiana em (X, I) *é uma métrica Riemanniana* $g \in S^2T^*X$, *tal que*

$$g(Iu, Iv) = g(u, v)$$

para todos $u, v \in TX$.

Para uma métrica hermitiana g defina $\omega(u, v) = g(Iu, v)$. Então $\omega \in \Lambda^2 X$.

Definição

Uma métrica hermitiana chama-se Kähleriana se $d\omega = 0$

Uma variedade de Kähler = uma variedade complexa com uma métrica de Kähler.

Lembrete: variedades de Kähler

Seja (X, I) uma variedade complexa.

Definição

Uma *métrica hermitiana* *em* (X, I) *é uma métrica Riemanniana* $g \in S^2T^*X$, *tal que*

$$g(Iu, Iv) = g(u, v)$$

para todos $u, v \in TX$.

Para uma métrica hermitiana g defina $\omega(u, v) = g(Iu, v)$. Então $\omega \in \Lambda^2 X$.

Definição

Uma métrica hermitiana chama-se *Kähleriana* *se* $d\omega = 0$
Uma variedade de Kähler = uma variedade complexa com uma métrica de Kähler.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- g *é Kähleriana em relação as* I, J *e* K.

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- *g é Kähleriana em relação as I, J e K.*

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- *g é Kähleriana em relação as I, J e K.*

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- g *é Kähleriana em relação as* I, J *e* K.

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- g *é Kähleriana em relação as* I, J *e* K.

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- g *é Kähleriana em relação as* I, J *e* K.

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Definição

Uma variedade hiperkähler é uma variedade X de classe C^∞ com estruturas complexas I, J, K e uma métrica Riemanniana g, tais que:

- $IJ = -JI = K$;
- g *é Kähleriana em relação as* I, J *e* K.

Temos três formas de Kähler: ω_I, ω_J and ω_K.

Considere a 2-forma

$$\sigma_I = \omega_J + i\omega_K$$

É uma 2-forma holomorfa não-degenerada e fechada em (X, I), ou seja uma forma simplética holomorfa.

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X, I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X, I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X, I, J, K, g) chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X, I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X, I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X, I, J, K, g) chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X, I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X, I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X, I, J, K, g) chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X,I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X,I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X,I,J,K,g) chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X, I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X, I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X, I, J, K, g) *chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se*

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X,I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X,I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X, I, J, K, g) *chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se*

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Variedades hiperkähler

Seja $\Omega^k_{X,I}$ o fibrado de k-formas I-holomorfas em X

Então σ_I é uma seção de $\Omega^2_{X,I}$.

Pois σ_I é uma forma simplética, $\dim_{\mathbb{C}}(X,I) = 2n$, e σ_I^n é uma seção que trivializa do fibrado canônico $K_{X,I} = \Omega^{2n}_{X,I}$.

Portanto o fibrado canônico (X,I) é trivial.

Definição

Uma variedade hiperkähler compacta (X,I,J,K,g) *chama-se uma variedade irredutível holomorfa simplética (IHS), se*

- $\pi_1(X) = 1$
- $H^0(X, \Omega^2_{X,I})$ *é gerado pela* σ_I

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

$$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

  $S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
  O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
  S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

  $$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

  $S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
  O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
  S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

$$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

  $S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
  O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
  S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

$$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

$S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

$$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

  $S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
  O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
  S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

$$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

  $S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
  O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
  S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- $\mathbb{H}$ = a álgebra dos quatérnios, $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{H}$ uma rede.
  Então $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}^4$ é uma variedade hiperkähler:
  I, J, K são dados pela multiplicação por quatérnios imaginários, g é a metrica plana padrão.
- Seja S uma superfiçie de tipo K3, por exemplo

$$S = \{(x_0 : \ldots : x_3) \mid x_0^4 + \ldots + x_3^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3.$$

  $S = (X, I)$, onde X é a C^∞-variedade correspondente e I é induzida pela estrutura complexa no $\mathbb{C}P^3$.
  O teorema de Calabi-Yau $\Rightarrow$ existe uma metrica hiperkähler em S, ou seja, existem J, K e g como na definição acima.
  S é uma variedade IHS.

Exemplos de variedades hiperkähler

- Seja S uma superfiçie K3. A potência simétrica $S^{(n)} = S^n/\Sigma_n$ parametriza n-tuplas de pontos em S.
  A variedade $S^{(n)}$ é singular, mas existe uma resolução natural lisa
  $$r\colon S^{[n]} \to S^{(n)},$$
  onde $S^{[n]}$ chama-se esquema de Hilbert de n pontos em S.
  A variedade $S^{[n]}$ admite uma métrica hiperkähler, e $S^{[n]}$ é IHS.
- Seja $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ o toro complexo de dimensão 2.
  O morfismo de Albanese:
  $$a\colon T^{[n+1]} \to T, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i$$
  $K^nT = a^{-1}(0)$ — variedade de Kummer generalizada, ela é IHS
- Variedades de O'Grady de tipo IHS de dimensões 6 e 10
- Todas outras variedades IHS conhecidas são obtidas como as deformações dos exemplos acima

Exemplos de variedades hiperkähler

- Seja S uma superfiçie K3. A potência simétrica $S^{(n)} = S^n/\Sigma_n$ parametriza n-tuplas de pontos em S. A variedade $S^{(n)}$ é singular, mas existe uma resolução natural lisa
$$r\colon S^{[n]} \to S^{(n)},$$
onde $S^{[n]}$ chama-se esquema de Hilbert de n pontos em S. A variedade $S^{[n]}$ admite uma métrica hiperkähler, e $S^{[n]}$ é IHS.
- Seja $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ o toro complexo de dimensão 2. O morfismo de Albanese:
$$a\colon T^{[n+1]} \to T, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i$$
$K^nT = a^{-1}(0)$ — variedade de Kummer generalizada, ela é IHS
- Variedades de O'Grady de tipo IHS de dimensões 6 e 10
- Todas outras variedades IHS conhecidas são obtidas como as deformações dos exemplos acima

Exemplos de variedades hiperkähler

- Seja S uma superfiçie K3. A potência simétrica $S^{(n)} = S^n/\Sigma_n$ parametriza n-tuplas de pontos em S. A variedade $S^{(n)}$ é singular, mas existe uma resolução natural lisa
$$r\colon S^{[n]} \to S^{(n)},$$
onde $S^{[n]}$ chama-se esquema de Hilbert de n pontos em S. A variedade $S^{[n]}$ admite uma métrica hiperkähler, e $S^{[n]}$ é IHS.
- Seja $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ o toro complexo de dimensão 2. O morfismo de Albanese:
$$a\colon T^{[n+1]} \to T, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i$$
$K^nT = a^{-1}(0)$ — variedade de Kummer generalizada, ela é IHS
- Variedades de O'Grady de tipo IHS de dimensões 6 e 10
- Todas outras variedades IHS conhecidas são obtidas como as deformações dos exemplos acima

Exemplos de variedades hiperkähler

- Seja S uma superfiçie K3. A potência simétrica $S^{(n)} = S^n/\Sigma_n$ parametriza n-tuplas de pontos em S. A variedade $S^{(n)}$ é singular, mas existe uma resolução natural lisa
$$r\colon S^{[n]} \to S^{(n)},$$
onde $S^{[n]}$ chama-se esquema de Hilbert de n pontos em S. A variedade $S^{[n]}$ admite uma métrica hiperkähler, e $S^{[n]}$ é IHS.
- Seja $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ o toro complexo de dimensão 2. O morfismo de Albanese:
$$a\colon T^{[n+1]} \to T, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i$$
$K^nT = a^{-1}(0)$ — variedade de Kummer generalizada, ela é IHS
- Variedades de O'Grady de tipo IHS de dimensões 6 e 10
- Todas outras variedades IHS conhecidas são obtidas como as deformações dos exemplos acima

Exemplos de variedades hiperkähler

- Seja S uma superfiçie K3. A potência simétrica $S^{(n)} = S^n/\Sigma_n$ parametriza n-tuplas de pontos em S. A variedade $S^{(n)}$ é singular, mas existe uma resolução natural lisa
$$r\colon S^{[n]} \to S^{(n)},$$
onde $S^{[n]}$ chama-se esquema de Hilbert de n pontos em S. A variedade $S^{[n]}$ admite uma métrica hiperkähler, e $S^{[n]}$ é IHS.
- Seja $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ o toro complexo de dimensão 2. O morfismo de Albanese:
$$a\colon T^{[n+1]} \to T, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i$$
$K^nT = a^{-1}(0)$ — variedade de Kummer generalizada, ela é IHS
- Variedades de O'Grady de tipo IHS de dimensões 6 e 10
- Todas outras variedades IHS conhecidas são obtidas como as deformações dos exemplos acima

Exemplos de variedades hiperkähler

- Seja S uma superfiçie K3. A potência simétrica $S^{(n)} = S^n/\Sigma_n$ parametriza n-tuplas de pontos em S. A variedade $S^{(n)}$ é singular, mas existe uma resolução natural lisa
$$r\colon S^{[n]} \to S^{(n)},$$
onde $S^{[n]}$ chama-se esquema de Hilbert de n pontos em S. A variedade $S^{[n]}$ admite uma métrica hiperkähler, e $S^{[n]}$ é IHS.
- Seja $T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ o toro complexo de dimensão 2. O morfismo de Albanese:
$$a\colon T^{[n+1]} \to T, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i$$
$K^nT = a^{-1}(0)$ — variedade de Kummer generalizada, ela é IHS
- Variedades de O'Grady de tipo IHS de dimensões 6 e 10
- Todas outras variedades IHS conhecidas são obtidas como as deformações dos exemplos acima

Os resultados principais

- Estudamos correntes rígidas nas variedades hiperkähler. Provamos que a maioria das variedades IHS admitem correntes rígidas;
- Os grupos de cohomologia de qualquer variedade hiperkähler compacta pode ser incluídos como estruturas de Hodge na cohomologia de um toro complexo;
- Os motivos de André de variedades hiperkähler projetivas de todos os tipos de deformação conhecidos são abelianos, todas as classes de Hodge nestes variedades são absolutas e a conjectura de Mumford–Tate é válida para os grupos de cohomologia de grau par;
- Determinamos os estruturas de Hodge mistas limites para degenerações das variedades abelianas de Kuga–Satake a variedades hiperkähler;

Os resultados principais

- Estudamos correntes rígidas nas variedades hiperkähler. Provamos que a maioria das variedades IHS admitem correntes rígidas;
- Os grupos de cohomologia de qualquer variedade hiperkähler compacta pode ser incluídos como estruturas de Hodge na cohomologia de um toro complexo;
- Os motivos de André de variedades hiperkähler projetivas de todos os tipos de deformação conhecidos são abelianos, todas as classes de Hodge nestes variedades são absolutas e a conjectura de Mumford–Tate é válida para os grupos de cohomologia de grau par;
- Determinamos os estruturas de Hodge mistas limites para degenerações das variedades abelianas de Kuga–Satake a variedades hiperkähler;

Os resultados principais

- Estudamos correntes rígidas nas variedades hiperkähler. Provamos que a maioria das variedades IHS admitem correntes rígidas;
- Os grupos de cohomologia de qualquer variedade hiperkähler compacta pode ser incluídos como estruturas de Hodge na cohomologia de um toro complexo;
- Os motivos de André de variedades hiperkähler projetivas de todos os tipos de deformação conhecidos são abelianos, todas as classes de Hodge nestes variedades são absolutas e a conjectura de Mumford–Tate é válida para os grupos de cohomologia de grau par;
- Determinamos os estruturas de Hodge mistas limites para degenerações das variedades abelianas de Kuga–Satake a variedades hiperkähler;

Os resultados principais

- Estudamos correntes rígidas nas variedades hiperkähler. Provamos que a maioria das variedades IHS admitem correntes rígidas;
- Os grupos de cohomologia de qualquer variedade hiperkähler compacta pode ser incluídos como estruturas de Hodge na cohomologia de um toro complexo;
- Os motivos de André de variedades hiperkähler projetivas de todos os tipos de deformação conhecidos são abelianos, todas as classes de Hodge nestes variedades são absolutas e a conjectura de Mumford–Tate é válida para os grupos de cohomologia de grau par;
- Determinamos os estruturas de Hodge mistas limites para degenerações das variedades abelianas de Kuga–Satake a variedades hiperkähler;

Os resultados principais

- Provamos que a ação da monodromia em todos os grupos de cohomologia de variedades IHS é determinado por sua ação sobre H^2 até uma ambiguidade finita; a estrutura de Hodge limite em todos os grupos de cohomologia para degenerações máximas de variedades hiperkähler é do tipo Hodge–Tate;
- Generalizamos os resultados sobre os motivos de André de variedades hiperkähler para os orbifolds hiperkähler;
- Estudamos a holonomia de conexão de Obata nas variedades hipercomplexas. Provamos que a holonomia dessa conexão no grupo de Lie $SU(3)$ é maximal possivel, a saber igual a $GL(2, \mathbb{H})$.

Os resultados principais

- Provamos que a ação da monodromia em todos os grupos de cohomologia de variedades IHS é determinado por sua ação sobre H^2 até uma ambiguidade finita; a estrutura de Hodge limite em todos os grupos de cohomologia para degenerações máximas de variedades hiperkähler é do tipo Hodge–Tate;
- Generalizamos os resultados sobre os motivos de André de variedades hiperkähler para os orbifolds hiperkähler;
- Estudamos a holonomia de conexão de Obata nas variedades hipercomplexas. Provamos que a holonomia dessa conexão no grupo de Lie $SU(3)$ é maximal possivel, a saber igual a $GL(2, \mathbb{H})$.

Os resultados principais

- Provamos que a ação da monodromia em todos os grupos de cohomologia de variedades IHS é determinado por sua ação sobre H^2 até uma ambiguidade finita; a estrutura de Hodge limite em todos os grupos de cohomologia para degenerações máximas de variedades hiperkähler é do tipo Hodge–Tate;
- Generalizamos os resultados sobre os motivos de André de variedades hiperkähler para os orbifolds hiperkähler;
- Estudamos a holonomia de conexão de Obata nas variedades hipercomplexas. Provamos que a holonomia dessa conexão no grupo de Lie $SU(3)$ é maximal possivel, a saber igual a $GL(2, \mathbb{H})$.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Seja X uma variedade complexa projetiva
ou seja, tal que admite uma imersão $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$.

Temos:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ chama-se classe de Hodge.

Conjectura de Hodge:
Se α for uma classe de Hodge, então α é uma classe algébrica, ou seja, existem subvariedades $V_j \subset X$, $j = 1, \ldots, L$, tais que $\alpha = \sum_{j=1}^{L} a_j [V_j]$, onde $a_j \in \mathbb{Q}$ e $[V_j]$ são as classes fundamentais de V_j.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Seja X uma variedade complexa projetiva
ou seja, tal que admite uma imersão $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$.

Temos:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ chama-se classe de Hodge.

Conjectura de Hodge:
Se α for uma classe de Hodge, então α é uma classe algébrica, ou seja, existem subvariedades $V_j \subset X$, $j = 1, \dots, L$, tais que $\alpha = \sum_{j=1}^{L} a_j [V_j]$, onde $a_j \in \mathbb{Q}$ e $[V_j]$ são as classes fundamentais de V_j.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Seja X uma variedade complexa projetiva
ou seja, tal que admite uma imersão $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$.

Temos:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ chama-se classe de Hodge.

Conjectura de Hodge:
Se α for uma classe de Hodge, então α é uma classe algébrica, ou seja, existem subvariedades $V_j \subset X$, $j = 1, \ldots, L$, tais que $\alpha = \sum_{j=1}^{L} a_j [V_j]$, onde $a_j \in \mathbb{Q}$ e $[V_j]$ são as classes fundamentais de V_j.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Seja X uma variedade complexa projetiva
ou seja, tal que admite uma imersão $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$.

Temos:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ chama-se classe de Hodge.

Conjectura de Hodge:
Se α for uma classe de Hodge, então α é uma classe algébrica, ou seja, existem subvariedades $V_j \subset X$, $j = 1, \ldots, L$, tais que $\alpha = \sum_{j=1}^{L} a_j [V_j]$, onde $a_j \in \mathbb{Q}$ e $[V_j]$ são as classes fundamentais de V_j.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Seja X uma variedade complexa projetiva
ou seja, tal que admite uma imersão $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$.

Temos:

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ chama-se classe de Hodge.

Conjectura de Hodge:
Se α for uma classe de Hodge, então α é uma classe algébrica,
ou seja, existem subvariedades $V_j \subset X$, $j = 1, \dots, L$, tais que
$\alpha = \sum_{j=1}^{L} a_j [V_j]$, onde $a_j \in \mathbb{Q}$ e $[V_j]$ são as classes fundamentais
de V_j.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Pois X é projetiva, existem uns polinômios homogêneos

$$P_j = \sum_s P_{j,s} Y_1^{s_1} \dots Y_N^{s_N},$$

onde $j = 1, \dots, M$ e $P_{j,s} \in \mathbb{C}$ tais que

$X = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{C}P^N \ | \ P_j(x_0, \dots, x_N) = 0, j = 1, \dots, M\}.$

Seja $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Então podemos definir

$$P_j^\tau = \sum_s \tau(P_{j,s}) Y_1^{s_1} \dots Y_N^{s_N},$$

e a variedade conjugada por τ:

$X^\tau = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{C}P^N \ | \ P_j^\tau(x_0, \dots, x_N) = 0, j = 1, \dots, M\}.$

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Pois X é projetiva, existem uns polinômios homogêneos

$$P_j = \sum_s P_{j,s} Y_1^{s_1} \dots Y_N^{s_N},$$

onde $j = 1, \dots, M$ e $P_{j,s} \in \mathbb{C}$ tais que

$$X = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{C}P^N \mid P_j(x_0, \dots, x_N) = 0, j = 1, \dots, M\}.$$

Seja $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Então podemos definir

$$P_j^\tau = \sum_s \tau(P_{j,s}) Y_1^{s_1} \dots Y_N^{s_N},$$

e a variedade conjugada por τ:

$$X^\tau = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{C}P^N \mid P_j^\tau(x_0, \dots, x_N) = 0, j = 1, \dots, M\}.$$

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Temos um isomorfismo canônico

$$\varphi_\tau \colon H^k(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^k(X^\tau, \mathbb{C}).$$

Definição

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{C})$ chama-se classe de Hodge absoluta se $\varphi_\tau(\alpha)$ é uma classe de Hodge para toto $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.

A conjectura de Hodge tem 2 partes:

1. Cada classe de Hodge é absoluta;
2. Cada classe de Hodge absoluta é algébrica.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Temos um isomorfismo canônico

$$\varphi_\tau \colon H^k(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^k(X^\tau, \mathbb{C}).$$

Definição

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X, \mathbb{C})$ chama-se classe de Hodge absoluta se $\varphi_\tau(\alpha)$ é uma classe de Hodge para toto $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.

A conjectura de Hodge tem 2 partes:

1. Cada classe de Hodge é absoluta;
2. Cada classe de Hodge absoluta é algébrica.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Temos um isomorfismo canônico

$$\varphi_\tau\colon H^k(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^k(X^\tau,\mathbb{C}).$$

Definição

Uma classe $\alpha \in H^{2p}(X,\mathbb{C})$ *chama-se classe de Hodge absoluta se* $\varphi_\tau(\alpha)$ *é uma classe de Hodge para toto* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.

A conjectura de Hodge tem 2 partes:

1. Cada classe de Hodge é absoluta;
2. Cada classe de Hodge absoluta é algébrica.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Teorema (P. Deligne)

Seja X uma variedade abeliana, ou seja um toro compacto projetivo. Então cada classe de Hodge em X é absoluta.

Nos obtemos:

Teorema (S.)

Seja X uma das variedades IHS projetivas atualmente conhecidas. Então cada classe de Hodge em X é absoluta.

Conjectura de Hodge e classes de Hodge absolutas

Teorema (P. Deligne)

Seja X uma variedade abeliana, ou seja um toro compacto projetivo. Então cada classe de Hodge em X é absoluta.

Nos obtemos:

Teorema (S.)

Seja X uma das variedades IHS projetivas atualmente conhecidas. Então cada classe de Hodge em X é absoluta.

Bibliografia

- N. Sibony, A. Soldatenkov, M. Verbitsky, *Rigid currents on compact hyperkähler manifolds*, arXiv:2303.11362
- A. Soldatenkov, *Cohomology and André motives of hyperkähler orbifolds*, arXiv:2209.11029
- A. Soldatenkov, M. Verbitsky *The Moser isotopy for holomorphic symplectic and C-symplectic structures*, arXiv:2109.00935

- A. Soldatenkov, *On the Hodge structures of compact hyperkähler manifolds*, Math. Res. Lett. 28 (2021), no. 2, 623–635
- A. Soldatenkov, *Deformation principle and André motives of projective hyperkähler manifolds*, Int. Math. Res. Not. (2021)

Bibliografia

- A. Soldatenkov, *Limit mixed Hodge structures of hyperkähler manifolds*, Mosc. Math. J. 20 (2020), no. 2, 423–436
- S. Schreieder, A. Soldatenkov, *The Kuga–Satake construction under degeneration*, J. Inst. Math. Jussieu (2019)
- N. Kurnosov, A. Soldatenkov, M. Verbitsky, *Kuga–Satake construction and cohomology of hyperkähler manifolds*, Adv. Math. 351 (2019), 275–295
- E. Shinder, A. Soldatenkov, *On the geometry of the Lehn-Lehn-Sorger-van Straten eightfold*, Kyoto J. Math. 57 (2017), no. 4, 789–806,
- A. Soldatenkov, M. Verbitsky, *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkähler manifolds*, J. Geom. Phys. 92 (2015), 147–156

Bibliografia

- A. Soldatenkov, M. Verbitsky, *Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds*, Int. Math. Res. Not. (2015), no. 4, 981–994
- A. Soldatenkov, M. Verbitsky, *Subvarieties of hypercomplex manifolds with holonomy in* $SL(n, \mathbb{H})$, J. Geom. Phys. 62 (2012), no. 11, 2234–2240
- A. Soldatenkov, *Holonomy of the Obata connection on SU(3)*, Int. Math. Res. Not. (2012), no. 15, 3483–3497,

Obrigado!