# Teoremas de Gauss–Bonnet e aplicações. Rigidez da esfera em $\mathbb{R}^3$

Andrey Soldatenkov

Universidade Federal Fluminense, 13 de julho de 2023

# Introdução

Ideia: O teorema de Gauss–Bonnet dá uma relação entre a característica de Euler–Poincaré de uma superfície Riemanniana (isto é, sua invariante topológica) e sua curvatura Gaussiana (isto é, uma quantidade que depende da métrica Riemanniana).

Recordemos as definições necessárias

Seja $S$ uma superfície (isto é, $\dim_{\mathbb{R}} S = 2$) regular e orientada. Seja $g$ uma métrica Riemanniana em $S$. Então existe uma conexão afim, chamada a conexão de Levi–Civita

$$\nabla \colon TS \to T^*S \otimes TS,$$

tal que $\nabla g = 0$ e $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para quaisquer campos de vetores $X$ e $Y$ locais, i.e. definidos em um subconjunto aberto de $S$.

# Conexão de Levi–Civita e a curvatura Gaussiana

Sejam $e_1$, $e_2$ campos de vetores locais que formam um referencial ortonormal orientado, i.e.

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1, \quad g(e_1, e_2) = 0.$$

Temos: $0 = L_X(g(e_1, e_1)) = 2g(\nabla_X e_1, e_1)$, portanto $\nabla_X e_1$ é ortogonal a $e_1$.

Obtemos:

$$\nabla e_1 = \omega_1 \otimes e_2,$$

onde $\omega_1$ e uma 1-forma diferencial local. Analogamente:

$$\nabla e_2 = \omega_2 \otimes e_1.$$

Temos tambem: $0 = g(\nabla_X e_1, e_2) + g(e_1, \nabla_X e_2)$, daonde $\omega_1(X) = -\omega_2(X)$, para cada campo vetorial $X$. Portanto $\omega_1 = -\omega_2$.

# Conexão de Levi–Civita e a curvatura Gaussiana

Podemos escrever a conexão $\nabla$ en base $e_1$, $e_2$ do seguinte modo:

$$\nabla = d + A,$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. A curvatura de $\nabla$ é

$$R = dA + A \wedge A = \begin{pmatrix} 0 & -d\omega \\ d\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos escrever: $d\omega = -K d\sigma$, onde $d\sigma$ é a 2-forma de área, i.e. $d\sigma = e_1^* \wedge e_2^*$ localmente. Aqui $K$ é uma função em $S$ chamada a curvatura Gaussiana. $K$ não depende da escolha de $e_1$, $e_2$.

# Conexão de Levi–Civita e a curvatura Gaussiana

Exemplo. Suponha que a métrica $g$ é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} E(x,y) & 0 \\ 0 & G(x,y) \end{pmatrix},$$

onde $x$, $y$ são coordenadas locais ortogonais, i.e. $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 0$. Sejam $e_1 = E^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = G^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}$. Então:

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}\left(\frac{E_y}{E\sqrt{G}}e_1 - \frac{G_x}{G\sqrt{E}}e_2\right).$$

A condição $\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1 = [e_1, e_2]$ implica que

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_x dy - E_y dx\right),$$

daonde usando a expreção $d\sigma = \sqrt{EG}dx \wedge dy$ obtemos

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}}\right)_x + \left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\right)_y\right).$$

# Curvatura geodésica de uma curva

Seja $\gamma\colon [0,a] \to S$ uma curva. A conexão $\nabla$ induz uma derivada covariante $\frac{D}{dt}\colon \gamma^*TS \to \gamma^*TS$ que age em campos de vetores ao longo de imagem de $\gamma$.

Temos um operador linear $I\colon TS \to TS$, que é definido localmente como: $Ie_1 = e_2$, $Ie_2 = -e_1$. O operador $I$ não depende da escolha do referencial local $e_1$, $e_2$. Ele depende apenas da classe conforme da métrica $g$ e da orientação.

## Definição

*Uma curvatura geodésica da $\gamma$ é*

$$k_g(t) = g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, I\dot{\gamma}\right),$$

*onde $t \in [0,a]$ e $\dot{\gamma}$ é o vetor de velocidade de $\gamma$.*

Exemplo. Se $\gamma$ é uma geodésica, isto é $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$, então $k_g(t) = 0$.

# Teorema de Gauss–Bonnet local

## Teorema (Gauss–Bonnet local)

*Sejam:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um subconjunto aberto;*
- $g$ *uma métrica Riemanniana em* $\Omega$, *tal que* $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 0$;
- $R \subset \Omega$ *um região simples, (i.e.* $R$ *é homeomorfo a um disco) com a fronteira* $\partial R$ *suave;*
- $\gamma \colon [0, a] \to \partial R$ *uma parametrização da fronteira pelo comprimento de arco, orientada positivamente (i.e. no sentido anti-horário).*

*Seja* $k_g$ *a curvatura geodésica de* $\gamma$, $K$ *a curvatura Gaussiana de* $g$ *e* $d\sigma$ *a 2-forma de volume de* $g$. *Então:*

$$\int_0^a k_g(t)dt + \int_R K d\sigma = 2\pi.$$

# Demonstração do teorema de Gauss–Bonnet local, 1

Sejam $e_1 = E(x,y)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2 = G(x,y)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}$ campos de vetores ortonormais em $\Omega$. Então:

$$\dot\gamma = \cos(\varphi)e_1 + \operatorname{sen}(\varphi)e_2,$$
$$I\dot\gamma = -\operatorname{sen}(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{D\dot\gamma}{dt} &= -\dot\varphi\operatorname{sen}(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)\nabla_{\dot\gamma}e_1 + \dot\varphi\cos(\varphi)e_2 + \operatorname{sen}(\varphi)\nabla_{\dot\gamma}e_2\\ &= -\operatorname{sen}(\varphi)(\dot\varphi + \omega(\dot\gamma))e_1 + \cos(\varphi)(\dot\varphi + \omega(\dot\gamma))e_2.\end{aligned}$$

Obtemos:

$$k_g(t) = \dot\varphi + \omega(\dot\gamma).$$

# Demonstração do teorema de Gauss–Bonnet local, 2

Pela fórmula de Stokes:

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega = -\int_R K d\sigma.$$

Por outro lado:

$$\int_{\partial R} \omega = \int_0^a \omega(\dot{\gamma}) dt = \int_0^a k_g(t) dt - \int_0^a \dot{\varphi} dt$$

Nós temos: $\int_0^a \dot{\varphi} dt = \varphi(a) - \varphi(0) = 2\pi$. Portanto:

$$\int_0^a k_g(t) dt + \int_R K d\sigma = 2\pi.$$

# Generalização do teorema de Gauss–Bonnet local

## Teorema (Gauss–Bonnet local, mais forte)

*As mesmas suposições do teorema anterior, mas suponha que a fronteira* $\partial R$ *é regular por partes, i.e.* $\gamma\colon [0,a] \to \partial R$ *é diferenciável por partes. Sejam* $v_i = \gamma(t_i)$ *os vértices de* $\partial R$ *e* $\theta_i$ *os ângulos externos em* $v_i$, $i = 1, \dots N$. *Então:*

$$\int_0^a k_g(t)dt + \int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 2\pi.$$

A demonstração é análoga à anterior (exercício!).

# A característica de Euler–Poincaré

Para enunciar a versão global do teorema de Gauss–Bonnet, recordamos a noção da característica de Euler–Poincaré de uma superfície.

Seja $S$ um superficie compacta, possivelmente com fronteira. É possível triangular a superfície $S$, ou seja, cortá-la em triângulos. Então a característica de Euler–Poincaré

$$\chi(S) = F - E + V,$$

onde $F$ é o número de triângulos (faces), $E$ é o número de lados (arestas), $V$ é o número de vértices da triangulação. O número inteiro $\chi(S)$ não depende da triangulação de $S$.

Exemplo: Seja $S$ uma superfície compacta sem fronteira da gênero $\mathrm{g}$. Então $\chi(S) = 2 - 2\mathrm{g}$.

# Teorema de Gauss–Bonnet global

## Teorema (Gauss–Bonnet global)

*Seja $S$ uma superfície Riemanniana compacta, orientada, com fronteira regular $\partial S = \coprod_{i=1}^{N} C_i$, onde as curvas $C_i$ são regulares, e $C_i$ são componentes conectadas da fronteira, com as orientações compatíveis com a orientação de $S$. Sejam $k_g$ a curvaturas geodesicas de $C_i$, $K$ a curvatura Gaussiana de $S$ e $d\sigma$ a forma de área. Então:*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{C_i} k_g(t)dt + \int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

# Demonstração do teorema de Gauss–Bonnet global, 1

É possível cobrir $S$ por cartas com coordenadas locais ortogonais. Escolhemos uma triangulação de $S$ tal que cada triângulo $R_j$ esteja contido em uma carta.

Aplicamos o teorema de Gauss–Bonnet local a cada triângulo e calculamos a soma. Note que as integrais de $k_g$ sobre as arestas internas aparecem duas vezes na soma, com sinais opostos. Então obtemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{C_i} k_g(t)dt + \int_S K d\sigma + \sum_{j=1}^{F} \sum_{k=1}^{3} \theta_{jk} = 2\pi F,$$

onde $\theta_{jk}$ são ângulos externas em cada vértice. Temos $\theta_{jk} = \pi - \varphi_{jk}$, onde $\varphi_{jk}$ são angulos internos.

# Demonstração do teorema de Gauss–Bonnet global, 2

Suponha por simplicidade que $\partial S = \emptyset$. Então temos apenas vértices internas. Em cada vértice $v$ temos:

$$\sum_{\text{em } v} \theta_{jk} = \#\{\text{arestas em } v\} \cdot \pi - \sum_{\text{em } v} \varphi_{jk}.$$

A última soma é igual a $2\pi$. Quando tomamos a soma de todos os vértices, cada aresta é contada duas vezes. Portanto:

$$\sum_{j=1}^{F} \sum_{k=1}^{3} \theta_{jk} = 2\pi E - 2\pi V.$$

Segue o teorema.

No caso $\partial S \neq \emptyset$ a prova é análoga (exercício).

# Aplicações

## Corolário (1)

*Seja* $S$ *uma superfície Riemanniana compacta, orientada, sem fronteira. Então:*

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

## Corolário (2)

*Seja* $S$ *uma superfície Riemanniana compacta, orientada, sem fronteira. Suponha que a curvatura Gaussiana seja positiva. Então* $S$ *é homeomorfa a uma esfera* $S^2$.

# Rigidez da esfera em $\mathbb{R}^3$.

## Teorema

*Seja* $S \subset \mathbb{R}^3$ *uma superfície regular, compacta, sem fronteira. Suponha que a curvatura Gaussiana de* $S$ *seja constante* $K \in \mathbb{R}$*. Então* $S$ *é uma esfera, i.e. existem* $x \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$, *tais que*

$$S = \{y \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ |x - y| = r\}.$$

## Corolário

*Seja* $S \subset \mathbb{R}^3$ *uma superfície regular, compacta, sem fronteira. Sejam* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *uma esfera e* $f : \Sigma \to S$ *uma isometria. Então* $S$ *é uma esfera.*

# Esboço de prova de rigidez da esfera, 1

A superfície $S$ é compacta, portanto temos um $R > 0$ tal que $S \subset B_R(0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid |v| \leqslant R\}$. Defina:

$$R_0 = \inf\{R > 0 \mid S \subset B_R(0)\}.$$

Então $S \subset B_{R_0}(0)$ e existe um ponto $p \in S \cap S_{R_0}(0)$.

A esfera $S_{R_0}(0)$ é convexa no ponto $p$ (i.e. $p$ é um ponto elíptico), portanto $S$ é tambem convexa, i.e. as curvaturas principais $\kappa_1$ e $\kappa_2$ de $S$ são positivas. A curvatura Gaussiana $K = \kappa_1 \kappa_2$ é tambem positiva no ponto $p$, consequentemente em todos os pontos.

Vamos mostrar que $\kappa_1 = \kappa_2$ em todos os pontos, i.e. $S$ e totalmente umbílica. Suponha que não, e seja $p_0 \in S$ um ponto onde $\kappa_1$ é máxima. Então $\kappa_2 < \kappa_1$ é mínima em $p_0$.

# Esboço de prova de rigidez da esfera, 2

Podemos escolher coordenadas locais $(x, y)$ em torno de $p_0$, tais que a métrica e a segunda forma fundamental são dadas por matrizes diagonais:

$$\begin{pmatrix} E(x,y) & 0 \\ 0 & G(x,y) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e(x,y) & 0 \\ 0 & g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Então $\kappa_1 = e/E$, $\kappa_2 = g/G$, e temos as equações de Mainardi–Codazzi:

$$2e_y = E_y(\kappa_1 + \kappa_2), \qquad 2g_x = G_x(\kappa_1 + \kappa_2).$$

# Esboço de prova de rigidez da esfera, 3

Usando a expressão explícita para a curvatura Gaussiana e as equações de Mainardi–Codazzi obtemos uma igualdade da seguinte forma:

$$-2(\kappa_1 - \kappa_2)KEG = -2E(\kappa_1)_{yy} + 2G(\kappa_2)_{xx} + M(\kappa_1)_y + N(\kappa_2)_x,$$

onde $M$ e $N$ são algumas funções. Como $K > 0$ e no ponto $p_0$ temos $\kappa_1 >_2$, $(\kappa_1)_y = (\kappa_2)_x = 0$, $(\kappa_1)_{yy} \leqslant 0$, $(\kappa_2)_{xx} \geqslant 0$, obtemos uma contradição. Concluimos que $\kappa_1 = \kappa_2$ em todos os pontos de $S$.

Como último passo, usamos o seguinte fato, que pode ser provado usando o mapa de Gauss: se todos os pontos de $S$ são umbílicos, $S$ está contido em um plano ou em uma esfera. Como $K > 0$ e $S$ é compacta e sem fronteira, $S$ é uma esfera.

Obrigado!