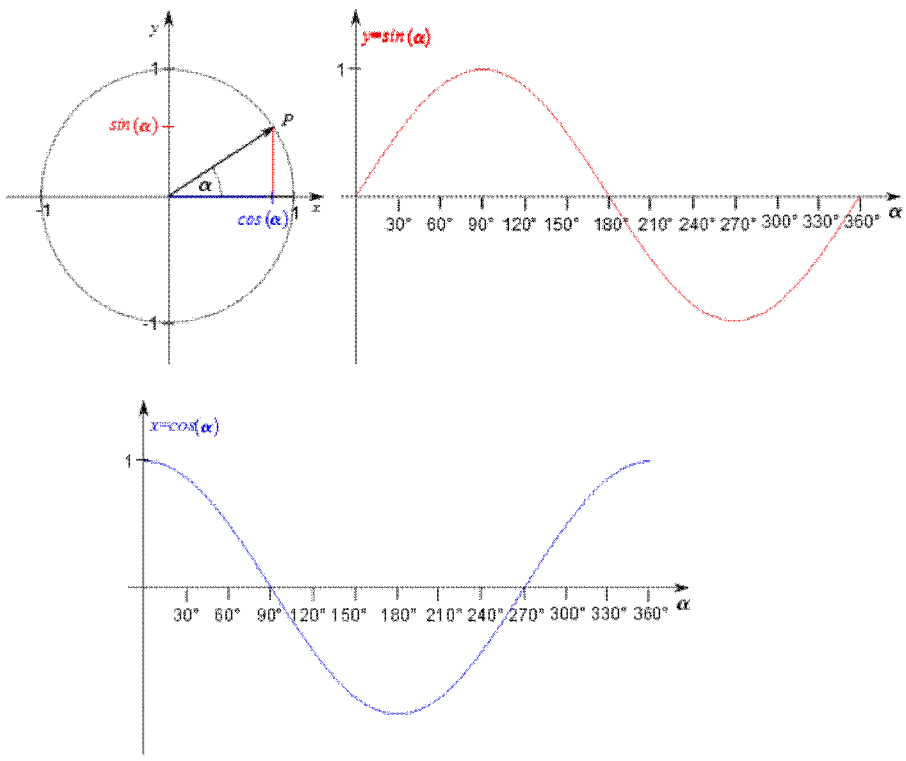
Onlinekurs Mathematik - Geometrie - Trigonometrie

5.3.2 Trigonometrie am Einheitskreis

Im letzten Abschnitt haben wir die trigonometrischen Funktionen anhand eines rechtwinkligen Dreiecks angeschaut. Die gefundenen Erkenntnisse gelten also für einen Winkelbereich von 0 bis $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Um unsere Erkenntnisse auf größere Winkel als $\pi/2$ ausdehnen zu können, schauen wir uns den Einheitskreis an.



Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems.

Wir betrachten einen Vektor vom Ursprung aus mit der Länge 1 . Wir lassen diesen Vektor von seiner Ausgangslage auf der positiven $x-$Achse gegen den Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn um den Nullpunkt rotieren. Dabei überstreicht seine Spitze den Einheitskreis, und er bildet mit der positiven $x -$ Achse den Winkel α , der bei der Rotation von 0 bis 2π bzw. 360° wächst. Zu jedem Winkel α gehört also ein Punkt P_α mit den Koordinaten x_α und y_α auf dem Einheitskreis.
Für $\alpha \in \; [0, \pi/4]$ kann man den Vektor, den zugehörigen $x -$ Achsenabschnitt und den zugehörigen $y -$ Achsenabschnitt als rechtwinkliges Dreieck ansehen, wie wir es vom letzten Kapitel her kennen. Die Hypotenuse ist der Vektor mit der Länge 1 , der $x -$ Achsenabschnitt ist die Ankathete und der $y -$ Achsenabschnitt die Gegenkathete.

Der Sinus des Winkels α ist also

$$\sin(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha$$

und der Kosinus ist

$$\cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha$$

Diese Definitionen gelten auch für die Winkel $\alpha > \pi/4$. Dabei können die Werte für x_α und y_α auch negativ werden und damit auch der Kosinus bzw. Sinus. Trägt man die y − Werte in Abhängigkeit vom Winkel α in ein Diagramm, so erhält man die rote Kurve, für die x − Werte erhält man die blaue Kurve.
Mit dem Satz von Pythagoras gilt außerdem

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1.$$

Setzen wir hier die Beziehungen für x_α und y_α mit den Winkelfunktionen ein, erhalten wir, dass für beliebige Winkel α die wichtige Beziehung

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

gilt.

Beispiel 5.3.8
Wir suchen die Werte jeweils des Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens des Winkels $\alpha = 315^\circ$.

Für $\alpha = 315^\circ$ liegt der Punkt P_α im 4. Quadranten, der zugehörige Vektor bildet mit den zugehörigen Achsenabschnitten ein gleichschenkliges Dreieck. Es gilt:

$$|x_\alpha| = |y_\alpha| \quad \Rightarrow \quad |x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2 = 2 \cdot |x_\alpha|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |x_\alpha| = |y_\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha) = x_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin(\alpha) = y_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \tan(\alpha) = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = -1$$