1 Geometrie

Modulübersicht

Wir beginnen die Elementare Geometrie mit der Einführung von Winkeln im Bogenmaß und im Gradmaß und arbeiten uns über Stufen- und Wechselwinkel zu den Dreiecken vor. Wir schauen uns kongruente und ähnliche Dreiecke, berechnen ihre Flächeninhalte und die von anderen Figuren und kommen dann zu den Strahlensätzen, die die Grundlage für die Einführung der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck bilden. Nachdem wir uns auch die Trigonometrie am Einheitskreis angesehen haben, erobern wir die dritte Dimension und beschäftigen uns mit den Volumina von Zylindern, Kegeln und Kugeln:

Dieses Modul gliedert sich in folgende Abschnitte:

- Winkel, Kongruenz und Ähnlichkeit
- Flächeninhalt und Strahlensätze
- Trigonometrie
- Abschlusstest für Modul 1.

1.1 Winkel, Kongruenz und Ähnlichkeit

Einführung

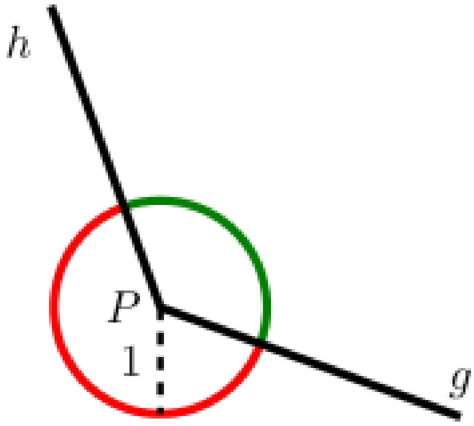
Das Bild zeigt einen Ausschnitt des Straßenplans von Ludwigshafen am Rhein. An ihm lassen sich einige Erkenntnisse über die Geometrie in der Ebene ablesen.

Man kann hier unter anderem das Bogenmaß eines Winkels entdecken und Stufen- und Wechselwinkel aufspüren.

Im ersten Abschnitt dieses Moduls werden wir das Bogenmaß und das Gradmaß einführen, Stufen- und Wechselwinkel betrachten und die Winkelsumme in Dreiecken bestimmen. Und wir werden sehen, wann zwei Dreiecke kongruent oder ähnlich sind.

1.1.1 Winkel

Zwei Halbgeraden g und h in der Ebene, die von demselben Punkt P ausgehen, bilden einen Winkel.



(Lizenz)

Zeichnen wir einen Kreis mit Radius 1 um P, wird dieser von den beiden Halbgeraden in zwei Teile zerschnitten. Wichtig ist nun derjenige Kreisbogen, der entsteht, wenn man von der Geraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Geraden h geht:

Info 1.1.1

Der **Kreisbogen**, der entsteht, wenn man von der Geraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Geraden h geht, bezeichnet den **Winkel** von g zu h.

- Die Länge des Kreisbogens mit dem Radius 1 ist das sogenannte **Bogenmaß** $\measuredangle(g, h)$.
- P heißt **Scheitelpunkt** des Winkels, und die beiden Halbgeraden, die den Winkel bilden, heißen **Schenkel** des Winkels.
- Hat man einen Punkt A auf der Geraden g und einen Punkt B auf der Geraden h, so kann man auch $\measuredangle(APB)$ statt $\measuredangle(g, h)$ schreiben.
- Winkel werden häufig mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, z. Bsp. α.

griechische Buchstaben:
Falls Sie das griechische Alphabet noch nicht so gut kennen, gibt es hier eine kleine Übersicht, die auch die Großbuchstaben enthält:

α, A	„alpha“	ξ, Ξ	„xi“	ι, I	„iota“	o, O	„omikron“	π, Π	„pi“
β, B	„beta“*	ζ, Z	„zeta“	$\varkappa$, K	„kappa“	ω, Ω	„omega“	φ, Φ	„phi“
γ, Γ	„gamma“	η, H	„eta“	λ, Λ	„lambda“	ϱ, P	„rho“	ψ, Ψ	„psi“
δ, Δ	„delta“	ϑ, Θ	„theta“	μ, M	„mü“	σ, Σ	„sigma“	χ, X	„chi“
ε, E	„epsilon“			ν, N	„nü“	τ, T	„tau“	υ, Υ	„üpsilon“

Nun wollen wir das Bogenmaß bestimmen.

Bereits die Griechen stellten fest, dass das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Radius r stets das gleiche ist. Sie definierten dieses Verhältnis über die Kreiszahl π:

Info 1.1.2

Die **Kreiszahl** ist

$$\pi = \frac{U}{2r}.$$

Dabei ist π keine rationale Zahl, sie kann nicht als endlicher oder periodischer Dezimalbruch geschrieben werden. Näherungsrechnungen haben ergeben, dass $\pi \approx 3.141592653589793$ ist.

Ist der Radius des Kreises genau 1, so hat der Kreis den Umfang 2π. Die Länge eines Kreisbogens, also das Bogenmaß des Winkels, ist dann ein Teil von 2π.

Beispiel 1.1.3

Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Halbskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/2 = \pi$.
Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Viertelskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/4 = \pi/2$.
Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Achtelskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/8 = \pi/4$.

Wenn man den Winkel $\measuredangle(g,h)$ kennt, so kann man nun auch leicht den Winkel $\measuredangle(h,g)$ bestimmen, der ja nach dem Bild 1.1.1 auf der vorherigen Seite durch den anderen Kreisbogen bestimmt ist:

$$\measuredangle(h,g) = 2\pi - \measuredangle(g,h).$$

Ein anderes sehr gebräuchliches Winkelmaß erhält man, in dem man den Kreis in 360 gleich große Teile teilt und dann misst, wie viele dieser Teile überstrichen werden, wenn g mathematisch positiv auf h gedreht wird. Dieses **Gradmaß** eines Winkels kann leicht in das Bogenmaß überführt werden:

$$\measuredangle(g,h) = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°},$$

wenn α das Gradmaß des Winkels zwischen g und h angibt.

Aufgabe 1.1.1
Der Winkel $\measuredangle(g,h)$ beträgt im Gradmaß 60°. Rechnen Sie den Winkel in das Bogenmaß um:

$\measuredangle(g,h) = \boxed{}$

Lösung:

$$\frac{60°}{360°} = \frac{\measuredangle(g,h)}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(g,h) = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 1.1.2
Der Winkel β beträgt im Bogenmaß $\pi/4$. Wie groß ist der Winkel im Gradmaß?

$\beta = \boxed{}$

Lösung:

$$\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{\beta}{360°} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi/4}{2\pi} \cdot 360° = \frac{1}{8} \cdot 360° = 45°$$

Info 1.1.4

Die folgenden Winkelformen bekommen spezielle Namen:

- Ein Winkel mit einem Maß zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ heißt **spitzer Winkel**.

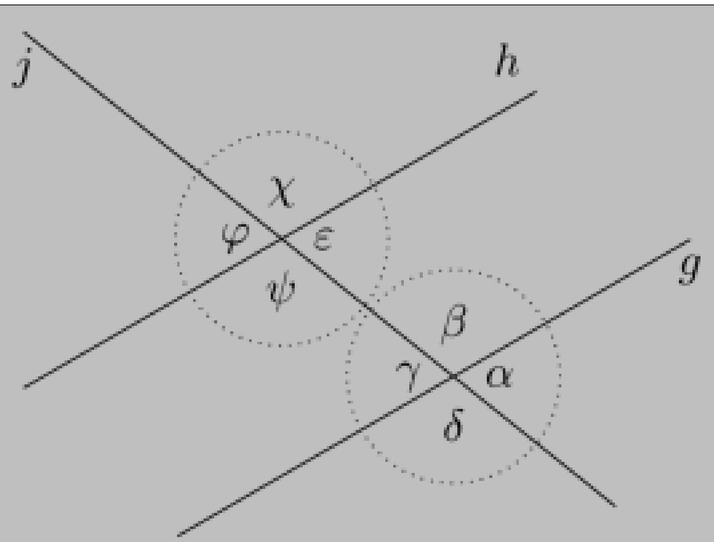
  Ein Winkel mit einem Maß von $\frac{\pi}{2}$ heißt **rechter Winkel**.

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π heißt **stumpfer Winkel**.

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen π und 2π heißt **überstumpfer Winkel**.
- Zwei Halbgeraden bilden eine Gerade, wenn sie einen Winkel vom Maß π bilden.
- Zwei Halbgeraden **stehen senkrecht aufeinander**, wenn sie einen rechten Winkel bilden.

Betrachten wir nun drei verschiedene Geraden, von denen zwei parallel sind, während die dritte nicht parallel zu diesen beiden ist. Es ergeben sich acht Schnittwinkel. Je vier dieser Winkel sind gleich groß.

Info 1.1.5



- Die Winkel $\alpha, \gamma, \varepsilon$ und φ sind gleich groß, ebenso die Winkel β, δ, χ und ψ.
- Dabei nennt man β und ψ bzw. γ und ε **Wechselwinkel**.
- Die Winkel α und ε heißen **Stufenwinkel**, ebenso β und χ, δ und ψ und γ und φ.

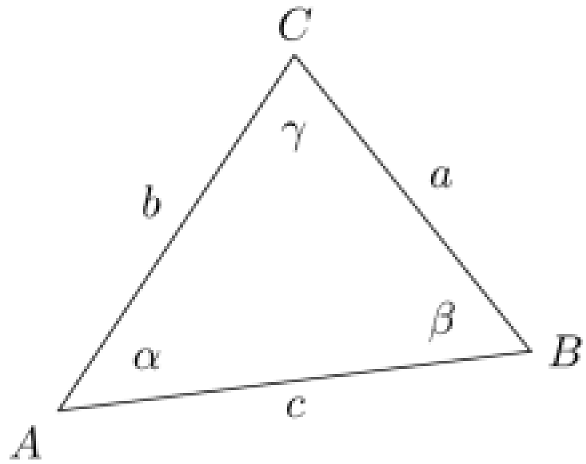
Eine einfache Figur mit Winkeln ist das Dreieck:

Info 1.1.6

- Ein **Dreieck** entsteht, wenn man drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, verbindet.
- Die drei Punkte, die verbunden werden, heißen **Ecken** des Dreiecks, und die drei Verbindungslinien heißen **Seiten** des Dreiecks.
- Je zwei Seiten des Dreiecks bilden je zwei Winkel.

  Der kleinere dieser beiden Winkel heißt **Innenwinkel**, und der größere der beiden Winkel heißt **Außenwinkel**.
- Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks beträgt stets π bzw. $180°$.

Man benennt die Ecken eines Dreiecks in mathematisch positiver Richtung mit lateinischen Großbuchstaben. Die einem Punkt gegenüberliegende Seite eines Dreiecks bekommt den entsprechenden Kleinbuchstaben zugeordnet, und der Innenwinkel in einer Ecke erhält den entsprechenden Kleinbuchstaben des griechischen Alphabets.
Da die Außenwinkel eines Dreiecks wesentlich weniger interessant sind als die Innenwinkel, nennt man die Innenwinkel eines Dreiecks auch schlicht **Winkel** des Dreiecks.



Da die Summe aller Winkel in einem Dreieck π beträgt, kann höchstens ein Winkel gleich oder größer als $\frac{\pi}{2}$ sein. Dadurch werden die Dreiecke nach ihrem größten Winkel in drei verschiedene Klassen eingeteilt:

Info 1.1.7

- Ein Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, heißt **spitzwinklig**.
- Ein Dreieck, das einen rechten Winkel enthält, heißt **rechtwinklig**.

  In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen, **Katheten** und die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse**.
- Ein Dreieck, das einen Winkel mit einem Maß von über $\frac{\pi}{2}$ besitzt, heißt **stumpfwinklig**.

1.1.2 Kongruenzsätze

Zu einem Dreieck gehören drei Seitenlängen und drei Winkel, also sechs Größen. Wenn bei zwei Dreiecken alle diese Größen übereinstimmen, so sind diese Dreiecke **kongruent** oder deckungsgleich, dabei spielt es keine Rolle, wo sich die Dreiecke befinden. Kongruente Dreiecke können also durch Drehung, Spiegelung und Verschiebung ineinander überführt werden.
Kennt man vier von den sechs Größen, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt bis auf Spielgelung oder Drehung, das heißt bis auf die Lage des Dreiecks im Raum. Alle Dreiecke, die man mit diesen Angaben erhält, sind dann kongruent. In einigen Fällen genügen sogar drei Angaben, um das Dreieck eindeutig zu bestimmen. Diese Fälle werden mit den **Kongruenzsätzen** beschrieben:

Info 1.1.8

Ein Dreieck ist eindeutig bestimmt, wenn

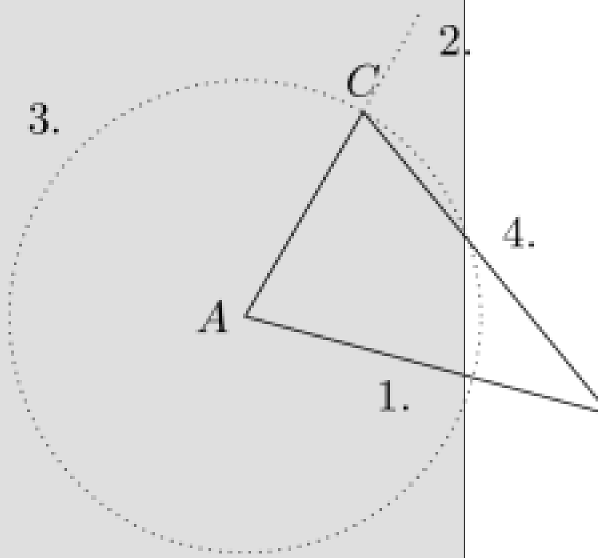
- von den drei Winkeln und den drei Seitenlängen mindestens vier Angaben gegeben sind.
- alle drei Seitenlängen gegeben sind. (Diesen Satz bezeichnet man gerne mit „sss“ für „Seite, Seite, Seite“.)
- eine Seitenlänge und ihre Winkel zu den anderen Seiten gegeben sind („wsw“ für „Winkel, Seite, Winkel“).
- zwei Seitenlängen und der von den Seiten eingeschlossenen Winkel gegeben sind („sws“ für „Seite, Winkel, Seite“).
- ein Winkel und zwei Seitenlängen so gegeben sind, dass nur eine der Seiten auf einem Schenkel des Winkels liegt und die andere gegebene Seite die längere der beiden gegebenen Seiten ist.

  (Diesen Satz bezeichnet man mit „Ssw“ für „Seite, Seite, Winkel“, wobei das groß geschriebene „S“ signalisieren soll, dass die dem Winkel gegenüberliegende Seite die längere Seite darstellt.)

Hat man von einem Dreieck nur zwei oder drei Angaben, die keinem der oben angegebenen Fälle entsprechen, gegeben, so gibt es verschiedene Dreiecke, für die die Angaben zutreffen.

Beispiel 1.1.9

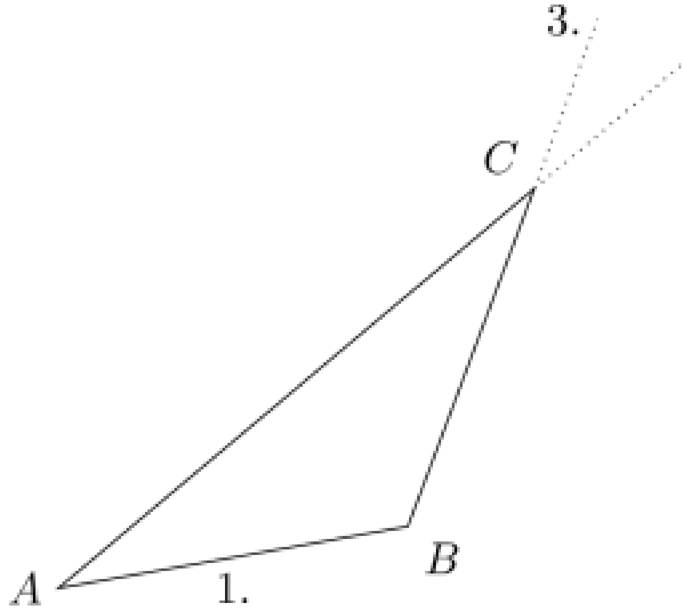
Gegeben seien der Winkel α und die Seiten b und c. Das Dreieck „sws“ erhält man, indem man zunächst eine Seite, hier zum Beispiel die Seite c, zeichnet und an der nach der Bezeichnungskonvention korrekten Ecke (A) den Winkel α anfügt. Dann schlägt man um diese Ecke einen Kreis, dessen Radius der Länge der zweiten Seite (hier b) entspricht. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem zweiten Schenkel des Winkels bildet die dritte Ecke des Dreiecks (C).



Aufgabe 1.1.3
Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seite $c = 5$ und den Winkeln $\alpha = 30°$ und $\beta = 120°$.

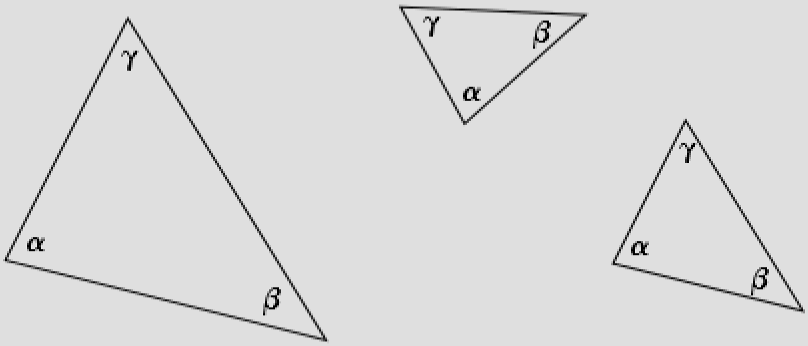
Lösung:

Man zeichnet zuerst die gegebene Strecke c. Dann trägt man an den beiden Enden der Strecke die zwei der Bezeichnungskonvention entsprechenden Winkel an. Der Schnittpunkt der beiden neuen Schenkel ist die dritte Ecke des Dreiecks.



Beispiel 1.1.10

Gegeben seien nun die drei Winkel $\alpha = 77°$, $\beta = 44°$ und $\gamma = 59°$. Diese Angaben findet man nicht bei den Kongruenzsätzen 1.1.8 auf der vorherigen Seite. Wir wollen trotzdem versuchen, ein Dreieck zu konstruieren.



Wir erhalten unendlich viele Dreiecke, die nicht kongruent sind, also nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Allerdings sehen diese Dreiecke irgendwie ähnlich aus. Solche **ähnlichen** Dreiecke erhält man auch, wenn man zum Beispiel die Verhältnisse aller Seiten zueinander kennt.

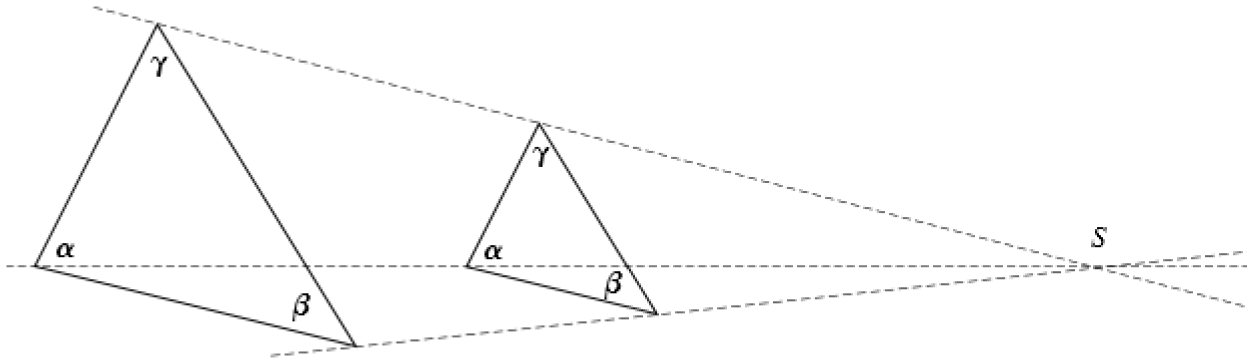
Info 1.1.11

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn

- sie in zwei (und damit wegen der Winkelinnensumme in drei) Winkeln übereinstimmen.
- sie in allen **Verhältnissen** ihrer entsprechenden Seiten übereinstimmen.
- sie in einem Winkel und im **Verhältnis** der anliegenden Seiten übereinstimmen.
- sie im **Verhältnis** zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Eine Besonderheit gibt es bei dem rechten und dem linken Dreieck in Beispiel 1.1.10 auf der vorherigen Seite: Hier geht das eine Dreieck durch zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und einem Streckfaktor k in das andere über.

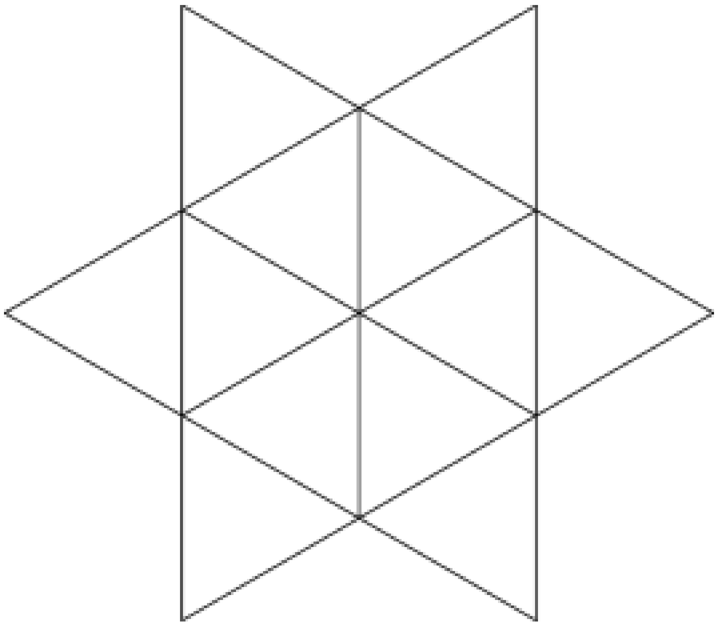

γ
α
β
γ
α
β
S

Aufgaben

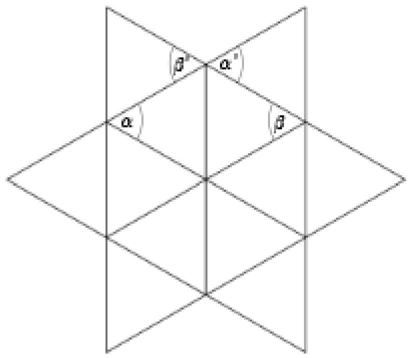
Aufgabe 1.1.4
Geben Sie die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte an! Dabei soll in einer Spalte stets der gleiche Winkel stehen.

Bogenmaß	π	$\boxed{}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\boxed{}$	$\frac{11\pi}{12}$
Gradmaß	$\boxed{}$	324	$\boxed{}$	270	$\boxed{}$

Aufgabe 1.1.5
Untersuchen Sie die folgende Figur auf Stufenwinkel und Wechselwinkel!



Lösung:

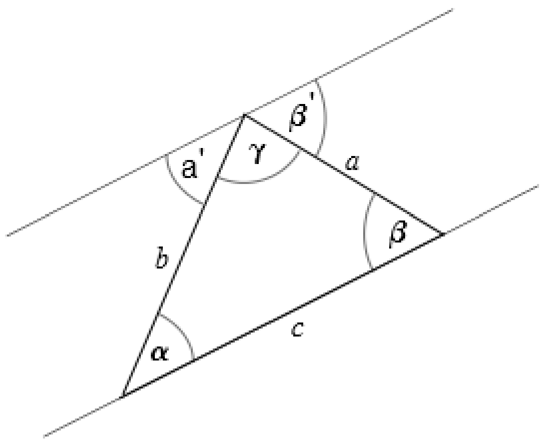


Die Winkel α und α' zum Beispiel sind Stufenwinkel, ebenso β und β'.

Die Winkel α' und β zum Beispiel sind Wechselwinkel, ebenso α und β'.

Aufgabe 1.1.6
Zeigen Sie mit Hilfe von Wechselwinkeln, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck stets π beträgt.

Lösung:



Zeichnet man parallel zur Seite c eine Gerade durch die obere Ecke des Dreiecks, so erhält man jeweils einen Wechselwinkel α' zu α und β' zu β.

An der Geraden gilt

$$\alpha' + \gamma + \beta' = \pi$$

Da $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ folgt $\alpha + \gamma + \beta = \pi$.

1.2 Flächeninhalt und Strahlensätze

Einführung

Das Bauamt von Ludwigshafen möchte die Grundstücksgrößen des in unserem Ausschnitt des Stadtplans (Bild 1.1 auf Seite 2) abgebildeten Viertels neu berechnen.

Die meisten der Grundstück haben eine (annähernd) vieleckige Grundfläche, die sich, wie man zeigen kann, in Dreiecke aufspalten lässt. Das Bauamt teilt diese Grundstücke also in Dreiecke auf, berechnet die Flächeninhalte der Dreiecke und erhält so die Gesamtfläche der Grundstücke durch die Addition der Dreiecksflächeninhalte.

In diesem Abschnitt wiederholen wir, wie man den Umfang und Flächeninhalte von Dreiecken und anderen Figuren berechnet.

Dann werden wir die sogenannten Strahlensätze einführen, die zum Beispiel bei der Skalierung einer Zeichnung oder bei der Berechnung von Höhen bzw. Abständen zum Einsatz kommen.

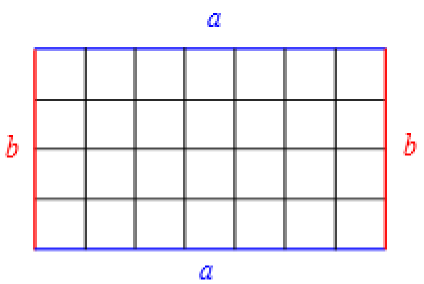
1.2.1 Flächeninhalt

Der Inhalt einer Fläche ist die Zahl der Einheitsquadrate, die man benötigt, um diese Fläche vollständig zu bedecken.

Zuerst wollen wir uns ein Rechteck ansehen.

Info 1.2.1

Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem alle vier Innenwinkel rechte Winkel sind.

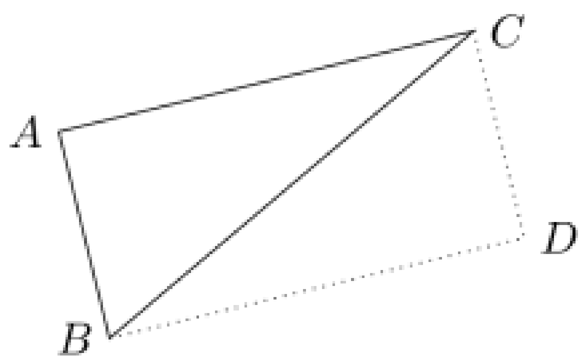


Wenn ein Rechteck eine Seite der Länge a und eine Seite der Länge b hat, dann gibt es b Reihen mit a Einheitsquadraten, also $a \cdot b$ Einheitsquadrate.

Info 1.2.2

Die Fläche A des Rechtecks ist
$$A = b \cdot a = a \cdot b$$

Damit können wir auch leicht den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen. Wir nehmen ein rechtwinkliges Dreieck ABC, drehen es um 180° und legen die beiden Hypotenusen des Dreiecks ABC und des gedrehten Dreiecks aufeinander. Damit erhalten wir ein Rechteck.

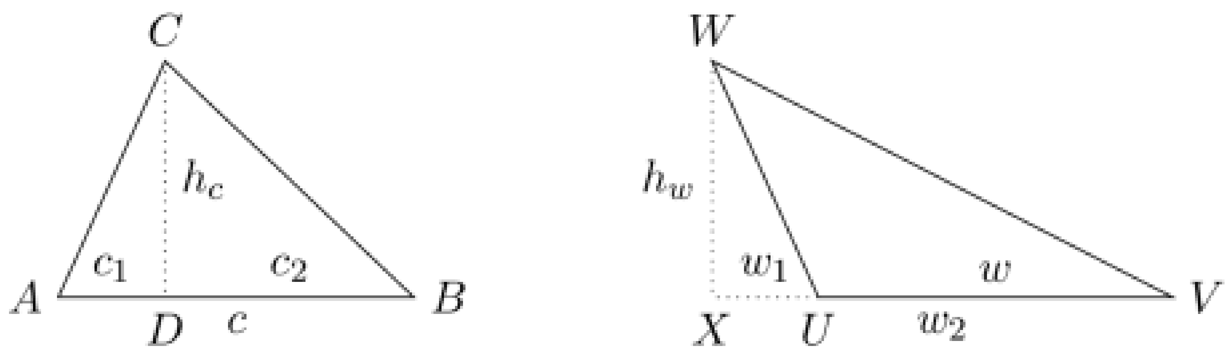


Der Flächeninhalt des Dreiecks ist nun die Hälfte des Flächeninhaltes des Rechtecks, also $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Doch was ist zu tun, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?

Aus jedem beliebigen Dreieck kann man zwei rechtwinklige Dreiecke gewinnen, indem man von einer Ecke aus eine Linie auf die gegenüberliegende Seite zieht, so dass sie diese senkrecht trifft. Diese Linie nennt man die **Höhe** h_i eines Dreiecks auf die bestimmte Seite i, wobei der Index i derjenigen Seite a, b oder c entspricht, über der die Höhe bestimmt wird.

Je nachdem, ob die neue Linie innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks dann aus der Summe oder der Differenz der Flächeninhalte der beiden sich ergebenden rechtwinkligen Dreiecke:



Links gilt also (wenn A_Δ den Flächeninhalt des Dreiecks Δ bezeichnet)

$$A_{ABC} = A_{DBC} + A_{ADC} = \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_2 + \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_1 = \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot (c_2 + c_1) = \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot c.$$

Rechts gilt genauso

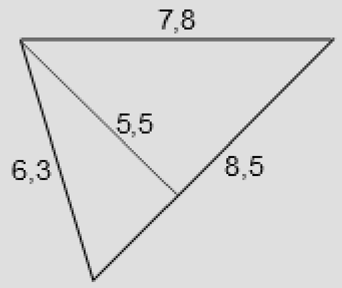
$$A_{UVW} = A_{XVW} - A_{XUW} = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_2 - \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_1 = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot (w_2 - w_1) = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w.$$

Info 1.2.3

- Die **Höhe eines Dreiecks auf einer Seite** ist die Strecke, die von dem der Seite gegenüberliegenden Punkt ausgeht und die Gerade, auf der die Seite liegt, im rechten Winkel trifft. Der Punkt, auf dem die Höhe diese Gerade trifft, heißt **Lotfußpunkt** der Höhe.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus der Hälfte des Produkts der Länge einer Seite mit der Länge der zugehörigen Höhe des Dreiecks

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

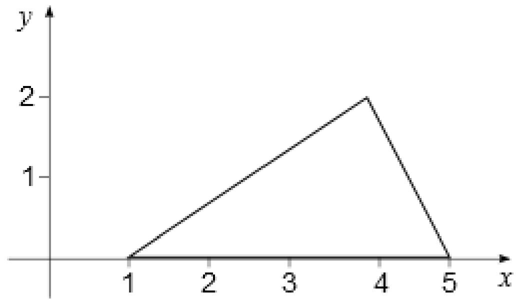
Beispiel 1.2.4



Bei dem hier gezeigten Dreieck ist die Höhe gegeben, die zur Seite mit dem Wert 8.5 gehört. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist also

$$A = \frac{8.5 \cdot 5.5}{2} = 23.375$$

Aufgabe 1.2.1
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks:

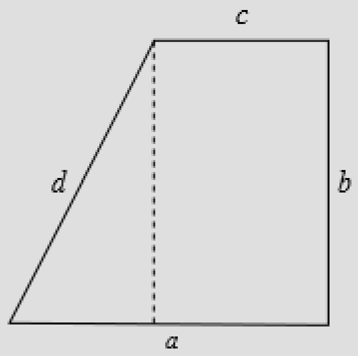


Lösung:
An diesem Dreieck lässt sich die zur Seite, die auf der $x-$Achse liegt, zugehörige Höhe ablesen:

$$\text{Seite} = 4, \quad \text{Höhe} = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

Nun können wir auch die Flächen von anderen Vielecken, auch **Polygone** genannt, bestimmen. Wir werden uns jedoch auf einige einfache Formen beschränken. Polygone können in Dreiecke unterteilt werden. Die Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke ergibt den Flächeninhalt des Polygons.

Beispiel 1.2.5

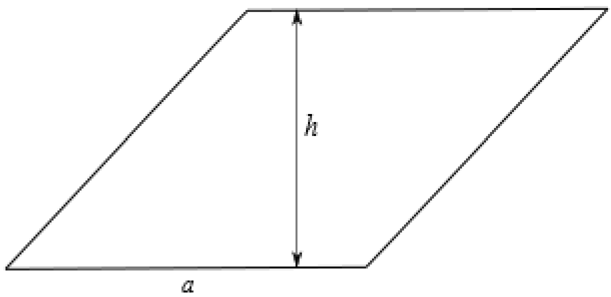


Sehen wir uns das links dargestellte Polygon an. Bei unserem Beispiel kann man das Polygon in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $(a - c)$ und b und der Hypotenuse d sowie ein Rechteck mit den Seiten b und c unterteilen. Der Flächeninhalt des Polygons ist dann:

$$A = A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}(a - c) \cdot b + b \cdot c = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bc + bc = \frac{1}{2}(a + b) \cdot c$$

Aufgabe 1.2.2

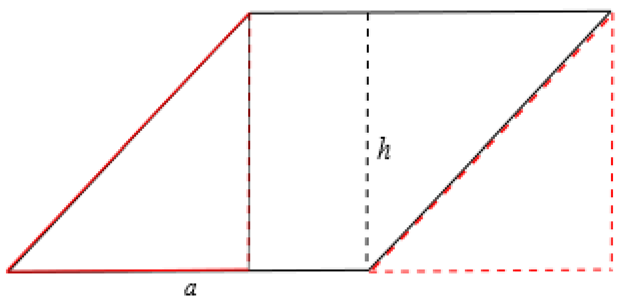
Berechnen Sie den Flächeninhalt des **Parallelogramms** für $a = 4$ und $h = 5$. Tipp: Teilen Sie es sinnvoll auf und schauen Sie sich die entstandenen Dreiecke gut an!



Lösung:

Man kann das Parallelogramm in das linke rote Dreieck, einem folgenden Rechteck und das rechte Dreieck aufspalten. Schneidet man das rote Dreieck aus und setzt es von rechts an das Parallelogramm, erhält man ein Rechteck mit den Seiten a und h. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$A = a \cdot b = 4 \cdot 5 = 20$$



Zum Schluss wollen wir noch Kreisflächen berechnen. Wir haben zu Beginn bei 1.1.2 auf Seite 4 schon die Kreiszahl π kennengelernt, die über den Umfang des Kreises definiert ist. Ebenso hängt die Kreiszahl mit dem Flächeninhalt von Kreisen zusammen.

Info 1.2.6

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r berechnet sich zu

$$A = \pi \cdot r^2$$

Beispiel 1.2.7

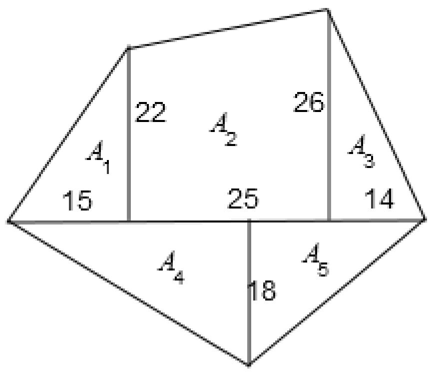
Ein Kreis hat einen Flächeninhalt von 12.566 bei einem Radius von ungefähr $r = 2$. Wir können daraus die Kreiszahl π berechnen:

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{A}{r^2} = \frac{12.566}{4} = 3.1415$$

Aufgaben

Aufgabe 1.2.3

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Polygons:

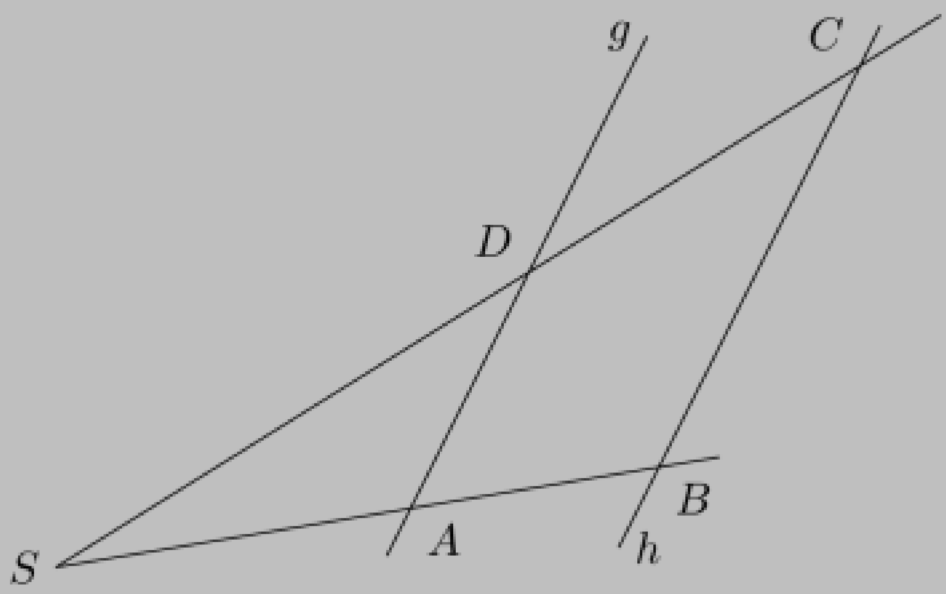


1.2.2 Die Strahlensätze

Die Strahlensätze haben etwa mit der zentrischen Streckung zu tun (siehe 1.1.2 auf Seite 9).

Info 1.2.8

Strahlensätze



Für zwei Punkte P und Q s
Strecke von P nach Q und $|\overline{P}$
dieser Strecke.

Sind in dem obigen Bild die Geraden g und h parallel, so gilt:

- Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl:

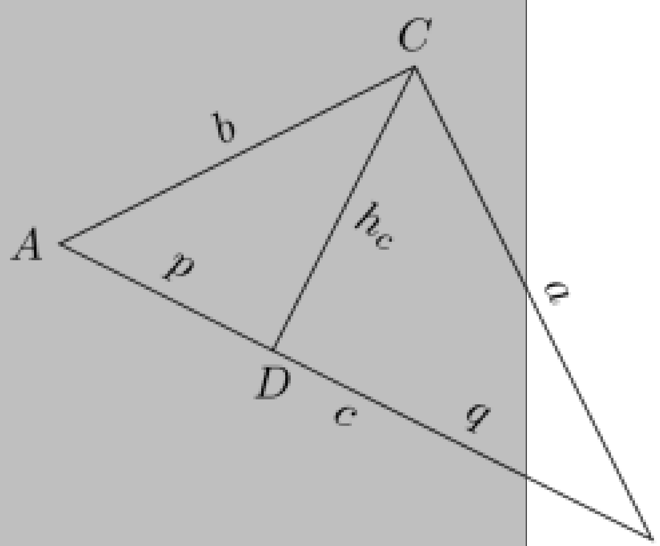
$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SD}|} = \frac{|\overline{SB}|}{|\overline{SC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}.$$

- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von S aus gehenden entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl;
$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{SC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BC}|}.$$

Mit dem Strahlensatz lassen sich auch einige wichtige Sätze herleiten, die für ein rechtwinkliges Dreieck gelten, zum Beispiel die **Satzgruppe des Pythagoras**. Diese wollen wir hier aber ohne Herleitung angeben:

Info 1.2.9

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel bei C, D der Lotfußpunkt der Höhe h_c auf c, $p = |\overline{AD}|$ und $q = |\overline{BD}|$, so gilt:



- **Satz des Pythagoras**
Die Summe der Quadrate über den Katheten haben den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. So gilt für das hier abgebildete Dreieck:
$$a^2 + b^2 = c^2$$
Werden die Seiten des Dreiecks anders bezeichnet, muss die Gleichung entsprechend angepasst werden!
- **Kathetensatz**
Das Quadrat über einer Kathete ist flächeninhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:
$$a^2 = c \cdot q, \qquad b^2 = c \cdot p$$
- **Höhensatz**
Das Quadrat über der Höhe ist flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenab-

schnitten

$$h^2 = p \cdot q$$

Beispiel 1.2.10

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 3$ und $b = 4$.

Wir können die Hypotenuse mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$c^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Die einzelnen Hypotenusenabschnitte p und q berechnen wir mit dem Kathetensatz:

$$q = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}, \qquad p = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5}$$

Die Höhe h_c erhalten wir mit dem Höhensatz:

$$h_c = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

Aufgabe 1.2.4
Berechnen Sie für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 10.5$, der Höhe $h_c = 5.04$ und dem Hypotenusenabschnitt $q = 3.78$ die Länge der beiden Katheten.

Lösung:

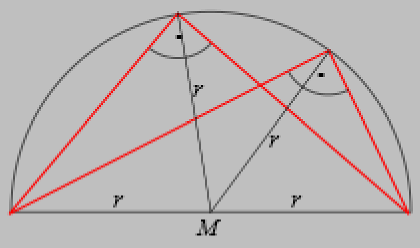
$$\text{Kathetensatz:} \quad a = \sqrt{c \cdot q} = \sqrt{10.5 \cdot 3.78} = 6.3$$

$$\text{Satz des Pythagoras:} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10.5^2 - 6.3^2} = 8.4$$

Es gibt noch einen weiteren wichtigen Satz, der für rechtwinklige Dreiecke gültig ist:

Info 1.2.11

Satz des Thales



Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf einem Kreis mit der Hypotenuse $c = \overline{AB}$ als Durchmesser.

Wenn man also über einer Strecke $\overline{AB}$ einen Halbkreis konstruiert, und dann A und B mit einem beliebigen Punkt C auf dem Halbkreis verbindet, dann ist das so entstandene Dreieck immer rechtwinklig.

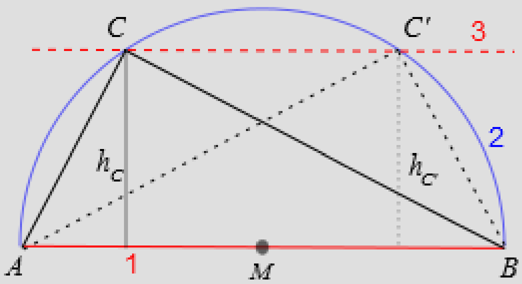
Beispiel 1.2.12

Es soll ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge $c = 6\,\text{cm}$ und der Höhe $h_c = 2.5\,\text{cm}$ konstruiert werden.

1. Zuerst zeichnet man die Hypotenuse $c = \overline{AB}$.

2. Die Mitte der Hypotenuse wird nun zum Mittelpunkt eines Kreises mit der Länge $c/2$.

3. Nun zeichnet man eine Parallelle zur Hypotenuse im Abstand h_c4. Es gibt zwei Schnittpunkte C und C' dieser Parallelen mit dem Thaleskreis.



Diese sind jeweils die dritte Ecke eines Dreiecks, das die geforderten Eigenschaften hat, das heißt, man erhält zwei Lösungen. Würde man noch einen Thaleskreis nach unten zeichen, so ergäben sich noch mal zwei Lösungen.

Aufgabe 1.2.5
Welche Höhe h_c kann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c maximal haben?

Lösung:
Die Höhe h_c kann maximal so groß werden wie der Radius des Thaleskreises über der Hypotenuse, also $h_c \leq c/2$.

Aufgaben

Aufgabe 1.2.6
Der Sohn des Hauses beobachtet den Baum auf des Nachbarn Grundstück. Er stellt fest, dass der Baum von der Hecke, die die beiden Grundstücke trennt, vollständig verdeckt wird, wenn er nur nahe genug an die Hecke herantritt. Jetzt sucht er den Punkt, an dem der Baum gerade so nicht mehr zu sehen ist.

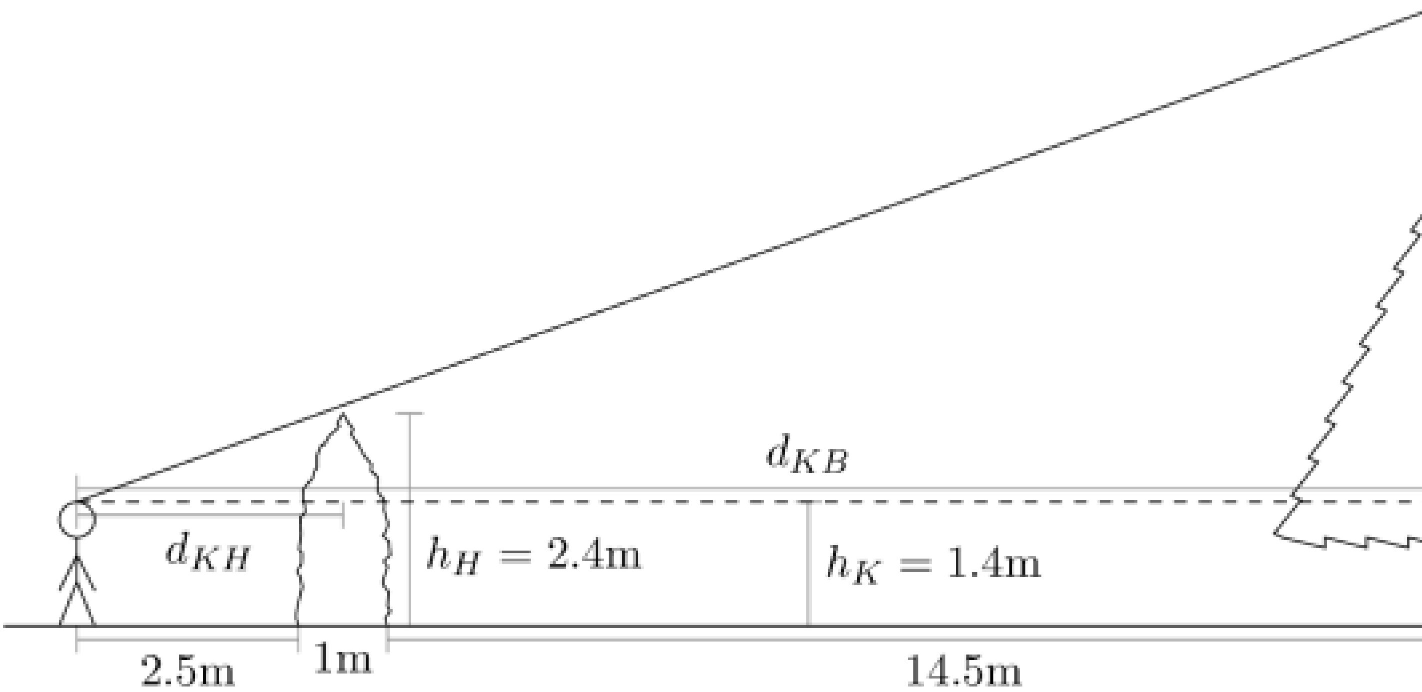
Der 1.40 Meter große Junge muss 2.50 Meter von der 2.40 Meter hohen, 1 Meter breiten und oben spitz zulaufenden Hecke entfernt stehen, damit der Baum vollständig verdeckt ist.

Wie hoch ist der Baum, wenn die Mitte des Stamms 14.5 Meter von der Hecke entfernt steht?

Führen Sie die Rechnung bitte zunächst allgemein durch und setzen Sie erst am Ende die Zahlenwerte ein!

Hinweis:
Beachten Sie die Breite der Hecke!

Lösung:



Wir wenden den zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{komplett}}{\text{vorne}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\right)$ an:

$$\frac{d_{KB}}{d_{KH}} = \frac{h_B - h_K}{h_H - h_K} \qquad \text{bzw.} \qquad h_B = (h_H - h_K) \cdot \frac{d_{KB}}{d_{KH}} + h_K.$$

Nun gelten $d_{KH} = 2.5\text{m} + \frac{1\text{m}}{2} = 3\text{m}$ und $d_{KB} = 2.5\text{m} + 1\text{m} + 14.5\text{m} = 18\text{m}$. Damit folgt

$$h_B = (2.4\text{m} - 1.4\text{m}) \cdot \frac{18\text{m}}{3\text{m}} + 1.4\text{m} = 1\text{m} \cdot 6 + 1.4\text{m} = 7.4\text{m}.$$

1.3 Trigonometrie

Einführung

Im vorherigen Abschnitt haben wir uns bei rechtwinkligen Dreiecken mit deren Seiten beschäftigt. Nun werden wir uns auch den anderen Winkeln im rechtwinkligen Dreieck zuwenden und ihren Beziehung zu den Seiten. Daraus können wir dann auch die Höhe h eines nicht rechtwinkligen Dreiecks berechnen, die man für die Flächenberechnung benötigt, die oftmals aber nicht gegeben hat.

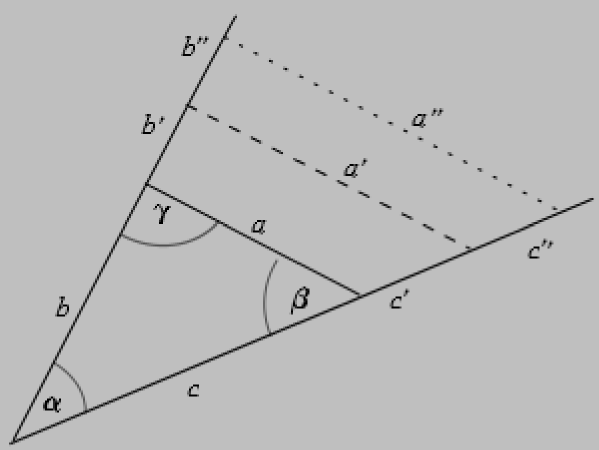
1.3.1 Trigonometrie am Dreieck

Durch die Strahlensätze haben wir gesehen, dass die Verhältnisse der Seiten in einem Dreieck lediglich von den Winkeln des Dreiecks abhängen. Ändert man in einem Strahlensatz den Winkel bei S oder den Winkel, in dem die parallelen Geraden einen Strahl schneiden, so ändern sich natürlich auch die Verhältnisse. Legt man hingegen einen der beiden Winkel fest, so kann man die Verhältnisse in Abhängigkeit von dem anderen Winkel als Funktion von einer Variablen darstellen.

Wir legen nun den Winkel γ fest auf $\gamma = \pi/2$, das heißt wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck. Nun sind die Seitenverhältnisse nur vom Winkel α abhängig, der Winkel β ergibt sich aus der Winkelinnensumme des Dreiecks. Wir erhalten eine Schar von ähnlichen Dreiecken, wobei die Seiten c, c', ... die Hypotenusen sind. Im Hinblick auf den betrachteten Winkel α bezeichnet man die dem Winkel gegenüberliegen Seiten a, a', ... als **Gegenkathete** und die am Winkel anliegende Seiten b, b', ... als **Ankathete**.
Wendet man nun die Strahlensätze an, so erhält man folgende Erkenntnisse:

Info 1.3.1

Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck



- Das Verhältnis
$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \ldots = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \sin(\alpha)$$
bezeichnet man als den **Sinus** des Winkels α.

- Das Verhältnis
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \ldots = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \cos(\alpha)$$
bezeichnet man als den **Kosinus** des Winkels α.
- Das Verhältnis
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} := \tan(\alpha)$$
bezeichnet man als den **Tangens** des Winkels α.

Der Tangens des Winkels α ist nach der Definition

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Beispiel 1.3.2

Von einem Dreieck ist bekannt, dass es einen rechten Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°$ hat. Die Seite c ist 5 cm, die Seite a ist 2.5 cm lang. Wir wollen jeweils den Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α bestimmen:

Den Sinus können wir sofort aus den Angaben berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{2.5\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = 0.5.$$

Für den Kosinus benötigen wir die Länge der Seite b, die wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhalten:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (2.5\,\text{cm})^2}}{5\,\text{cm}} = 0.866.$$

Daraus folgt für den Tangens

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{0.5}{0.866} = 0.5773.$$

Aufgabe 1.3.1
Die Hypotenuse $c = 5$ ist vorgegeben. Zeichnen Sie mit Hilfe des Thaleskreises (Maßstab 1$\hat{=}$2 cm die rechtwinkligen Dreiecke für die Winkel $\alpha \in \{0\circ, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°\}$.

Messen Sie die Seiten a und b und schreiben Sie sie in eine Tabelle. Berechnen Sie zu jedem Dreieck den Sinus, Kosinus und Tangens.

Schauen Sie sich die Werte genauer an und versuchen Sie, sie zu interpretieren.

Tragen Sie die Werte von Sinus, Kosinus und Tangens in Abhängigkeit des Winkels α in ein Diagramm.

Lösung:
Beim Messen entstehen immer Messfehler! Die Tabelle könnte folgendermaßen aussehen:

α	a	b	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0.0	5.0	0.0	1.0	0.
10°	0.8	4.9	0.160	0.98	0.1633
20°	1.7	4.7	0.34	0.96	0.3617
30°	2.5	4.3	0.5	0.86	0.5814
40°	3.2	3.8	0.64	0.76	0.8421
45°	3.5	3.5	0.7	0.7	1.0
50°	3.8	3.27	0.76	0.64	1.1875
60°	4.3	2.5	0.86	0.5	1.7200
70°	4.7	1.7	0.96	0.34	2.7647
80°	4.9	0.8	0.98	0.160	6.1250
90°	5.0	0.0	1.0	0.0	$\to \infty$

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt die Gegenkathete a zu und die Ankathete b ab.

  Ebenso verhalten sich $\sin(\alpha) \sim a$ und $\cos(\alpha) \sim b$.

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt a in dem gleichen Maß zu wie b mit von 90° aus fallenden Winkel α abnimmt. Im Thaleskreis sind die beiden Dreiecke mit den entgegengesetzten Werten für a und b die zwei Lösungen für die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse und gegebener Höhe (Aufgabe 1.2.12 auf Seite 21).

  Ebenso verhalten sich Sinus und Kosinus zueinander: es ist also

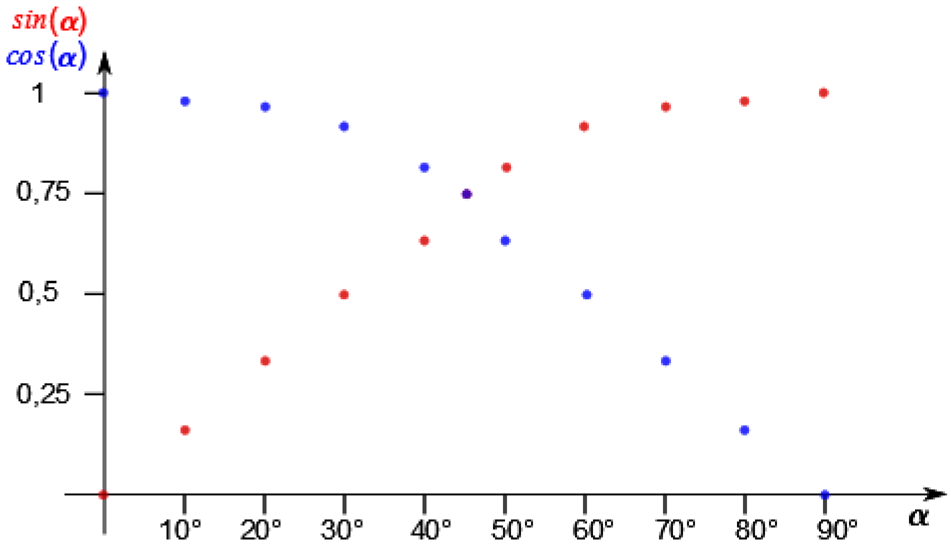
  $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$ bzw.

  $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$.

- Bei $\alpha = 45°$ sind die Katheten und damit auch Sinus und Kosinus von α gleich.

- Der Tangens, also das Verhältnis von a zu b, steigt mit zunehmendem Winkel α von Null ins Unendliche.

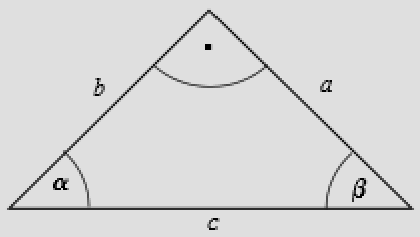
Das Diagramm sieht folgendermaßen aus:



Beispiel 1.3.3

Wir wollen den Sinus des Winkels $\alpha = 45°$ nun berechnen, also nicht aus gemessenen (= fehlerbehafteten) Werten berechnen, wie in der letzten Aufgabe.

Wenn im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ der Winkel α gleich $45°$ ist, so muss wegen der Innenwinkelsumme $\alpha+\beta+\gamma = \pi = 180°$ der Winkel β auch gleich $45° = \pi/4$ sein, und die beiden Katheten a und b sind gleichlang. Dieses Dreieck nennt man **gleichschenklig**:



Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \sin(45°) = \frac{a}{c}.$$

Außerdem gilt:

$$a^2 + b^2 = 2a^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2} \cdot a.$$

$$\Rightarrow \quad \sin(45°) = \sin(\pi/4) = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

In der Aufgabe 1.3.1 auf Seite 24 haben wir für den Sinus von $45°$ einen Wert von 0.7 erhalten, was dem errechneten Wert von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ schon recht nahe kommt.

Beispiel 1.3.4

Wir betracheten nun ein **gleichseitiges** Dreieck. Wie der Name sagt, sind in diesem Dreieck alle Seiten gleich lang, und auch die Winkel sind alle gleich groß, nämlich $\alpha = \beta = \gamma = \frac{180°}{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$. Das Dreieck ist nach dem Kongruenzsatz „sss“ mit der Angabe einer Seite a eindeutig bestimmt, und wir erhalten es, indem wir die Seite a zeichnen und mit dem Zirkel einen Kreis mit dem Radius a um jede Ecke schlagen. Der Schnittpunkt der Kreise ist nun die dritte Ecke.

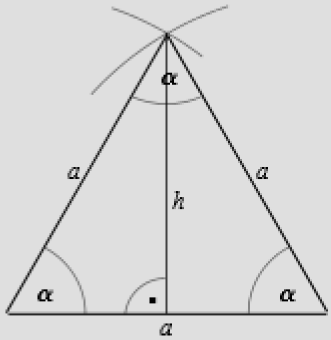
Dieses Dreieck hat keinen rechten Winkel. Zeichnen wir eine Höhe h auf eine der Seiten a ein, so erhalten wir zwei kongruente Dreiecke mit je einem rechten Winkel.
Es gilt nun:

$$\sin(\alpha) = \sin(60^\circ) = \frac{h}{a}$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a$$

$$\Rightarrow \quad \sin(60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$$



Aus diesem Dreieck können wir noch den Sinus eines weiteren Winkels berechnen: Die Höhe h teilt den oberen Winkel in zwei gleiche Teile, so dass wir in den beiden kleinen kongruenten Dreiecken jeweils den Winkel $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ erhalten. Es ist nun

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.3.2
Berechnen Sie, ähnlich den vorher gezeigten Beispielen, den exakten Wert des Kosinus für die Winkel $\alpha_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ und $\alpha_3 = 60^\circ$. Verwenden Sie die Erkenntnisse aus Aufgabe 1.3.1 auf Seite 24.

Lösung:
Aus der Aufgabe 1.3.1 auf Seite 24 wissen wir, dass $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Daraus folgt

$$\cos(30^\circ) = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$$

$$\cos(45^\circ) = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

In einer kleinen Tabelle können wir nun unsere gefundenen Werte für markante Winkel zusammentragen:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

Diese Werte sollte man sich merken. Die trigonometrischen Funktionen für andere Winkel sind in Tabellen bzw. im Taschenrechener gespeichert.

Im Beispiel 1.3.4 auf Seite 26 haben wir mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen die Höhe h des Dreiecks berechnet. Diese Vorgehensweise gilt für alle beliebigen Dreiecke, da die Höhe h das Dreieck immer in zwei rechtwinklige Dreiecke teilt und somit die trigonometrischen Funktionen angewandt werden können.

Aufgabe 1.3.3
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten $c = 7$ und $b = 3$, sowie dem Winkel $\alpha = 30°$.

Lösung:
Der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.

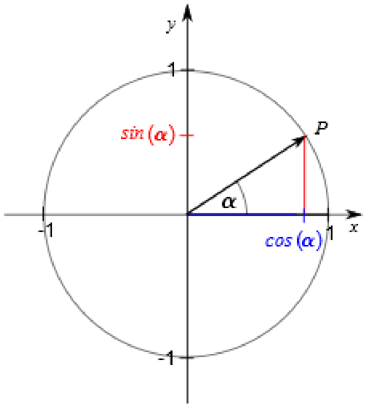
$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \cdot \sin(\alpha) = 3 \cdot \sin(30°) = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

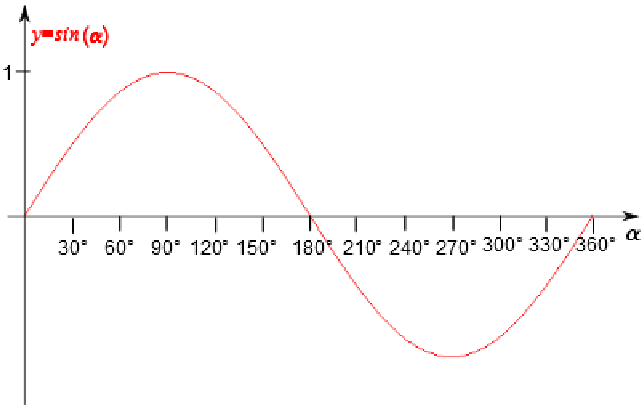
$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{4}$$

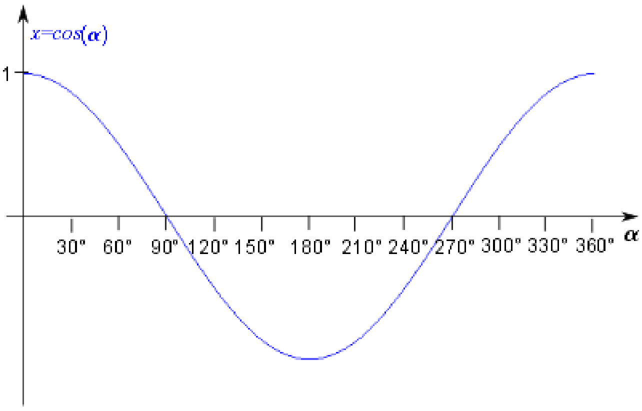
1.3.2 Trigonometrie am Einheitskreis

Im letzten Abschnitt haben wir die trigonometrischen Funktionen anhand eines rechtwinkligen Dreiecks angeschaut. Die gefundenen Erkenntnisse gelten also für einen Winkelbereich von 0 bis $90° = \frac{\pi}{2}$.

Um unsere Erkenntnisse auf größere Winkel als $\pi/2$ ausdehnen zu können, schauen wir uns den Einheitskreis an.







Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems.

Wir betrachten einen Vektor vom Ursprung aus mit der Länge 1. Wir lassen diesen Vektor von seiner Ausgangslage auf der positiven $x-$Achse gegen den Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn um den Nullpunkt rotieren. Dabei überstreicht seine Spitze den Einheitskreis, und er bildet mit der positiven $x-$Achse den Winkel α, der bei der Rotation von 0 bis 2π bzw. $360°$ wächst. Zu jedem Winkel α gehört also ein Punkt P_α mit den Koordinaten x_α und y_α auf dem Einheitskreis.
Für $\alpha \in [0, \pi/4]$ kann man den Vektor, den zugehörigen $x-$Achsenabschnitt und den zugehörigen $y-$Achsenabschnitt als rechtwinkliges Dreieck ansehen, wie wir es vom letzten Kapitel her kennen. Die Hypotenuse ist der Vektor mit der Länge 1, der $x-$Achsenabschnitt ist die Ankathete und der $y-$Achsenabschnitt die Gegenkathete.

Der Sinus des Winkels α ist also

$$\sin(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha$$

und der Kosinus ist

$$\cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha$$

Diese Definitionen gelten auch für die Winkel $\alpha > \pi/4$. Dabei können die Werte für x_α und y_α auch negativ werden und damit auch der Kosinus bzw. Sinus. Trägt man die $y-$Werte in Abhängigkeit vom Winkel α in ein Diagramm, so erhält man die rote Kurve, für die $x-$Werte erhält man die blaue Kurve.

Mit dem Satz von Pythagoras gilt außerdem

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1.$$

Setzen wir hier die Beziehungen für x_α und y_α mit den Winkelfunktionen ein, erhalten wir, dass für beliebige Winkel α die wichtige Beziehung

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

gilt.

Beispiel 1.3.5

Wir suchen die Werte jeweils des Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens des Winkels $\alpha = 315°$.

Für $\alpha = 315°$ liegt der Punkt P_α im 4. Quadranten, der zugehörige Vektor bildet mit den zugehörigen Achsenabschnitten ein gleichschenkliges Dreieck. Es gilt:

$$|x_\alpha| = |y_\alpha| \quad \Rightarrow \quad |x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2 = 2 \cdot |x_\alpha|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |x_\alpha| = |y_\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha) = x_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin(\alpha) = y_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \tan(\alpha) = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = -1$$

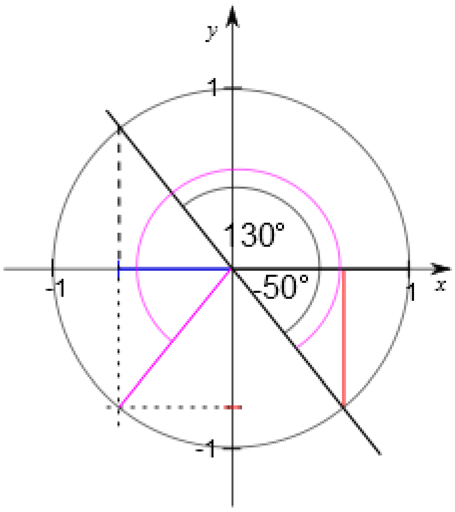
Aufgaben

Aufgabe 1.3.4
Welcher Winkel gehört zu dem Punkt $P_\alpha\,(\,-0.643,\ -0.766)$?
Hinweis:
Verwenden Sie dazu den Taschenrechner, aber vertrauen Sie ihm nicht blind!

Lösung:
Aus den Koordinaten des Punktes P_α erhalten wir:

$$\sin(\alpha) = -0.766 \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = -0.643.$$

Tippen Sie in den Taschenrechner:
invers(sin(-0,766)) bzw. $\sin^{-1}$(-0,766), so erhalten Sie ungefähr $-50°$, und
invers(cos(-0,643)) bzw. $\sin^{-1}$(-0,643), so erhalten Sie ungefähr 130°.
Außerdem wissen Sie, dass der Punkt im 3. Quadranten ist, also ein Winkel im Bereich zwischen 180° und 270° herauskommen muss.



Anhand des Bildes kann man erkennen, dass der negative Sinuswert zwar zum Winkel $-50°$, aber auch zu $\alpha = (180° + 50°) = 230°$ gehört.

Ebenso kann der negative Kosinuswert zu 130°, aber auch zu $\alpha = -130° = (360° - 130°) = 230°$ gehören.

Der richtige Winkel ist also $\alpha = 230°$ (rosa).

Aufgabe 1.3.5

1. Für ein bei C rechtwinkliges Dreieck seien $b = 2.53$ cm und $c = 3.88$ cm gegeben. Geben Sie $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und a an!

   Lösung:

   $$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(3.88\text{ cm})^2 - (2.53\text{ cm})^2} = \sqrt{15.0544\text{ cm}^2 - 6.4009\text{ cm}^2} = \sqrt{8.6535}\text{ cm}.$$

   $$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{8.6535}\text{ cm}}{3.88\text{ cm}} = \frac{\sqrt{86535}}{388} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{2.53\text{ cm}}{3.88\text{ cm}} = \frac{253}{388}$$

   Numerisch ergibt sich $a \approx 2.9417$ cm, $\sin(\alpha) \approx 0.7587$ und $\sin(\beta) \approx 0.65201$.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit $\beta = \frac{11\pi}{36}$, $a = 4$ m und $c = 60$ cm!

   Lösung:

$$\frac{(a \cdot \sin(\beta)) \cdot c}{2} = \sin\left(\tfrac{11\pi}{36}\right) \cdot 1.2\ \mathrm{m}^2 \approx 0.98298\ \mathrm{m}^2$$

1.4 Abschlusstest

Abschlusstest Modul 4

Aufgabe 1.4.1
In der folgenden Tabelle sind für ein rechtwinkliges Dreieck einige Größen gegeben, berechnen Sie die übrigen Größen. Verwenden Sie für die Winkel stets das Bogenmaß:

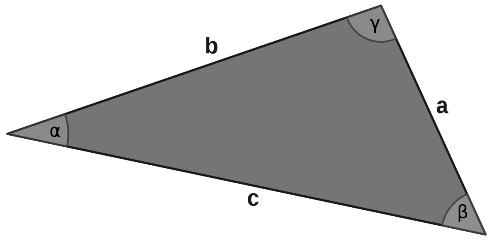


Abbildung 1: Winkel erhalten die griechischen Buchstaben zu den gegenüberliegenden Seiten (Lizenz)

a	b	c	α	β	γ	$\sin(\alpha)$	$\sin(\beta)$	$\sin(\gamma)$
1	1	1	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
1	1	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\frac{1}{2}\pi$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
3	4	$\boxed{}$	$*$	$*$	$\frac{1}{2}\pi$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
$\boxed{}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\boxed{}$	$*$	$*$	1	$\boxed{}$	$\boxed{}$
$\boxed{}$	$\boxed{}$	9	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$*$

Die mit $*$ gekennzeichneten Felder müssen nicht ausgefüllt werden.

Aufgabe 1.4.2
Ein Quadrat mit Seitenlänge a sei gegeben. Geben Sie Formeln an für Flächeninhalt und Umfang des größtmöglichen Kreises innerhalb des Quadrats, sowie für den kleinstmöglichen Kreis, der das Quadrat enthält:

a. Umfang des Kreises im Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

b. Flächeninhalt des Kreises im Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

c. Umfang des Kreises um das Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

d. Flächeninhalt des Kreises um das Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

Lösung:
Der mittig im Quadrat liegende Kreis besitzt den Radius $r = \frac{1}{2}a$, die halbe Seitenlänge des Quadrats. Folglich besitzt er den Umfang $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{1}{2}a = \pi a$ und den Flächeninhalt $\pi r^2 = \pi \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$.

Befindet sich das Quadrat dagegen mittig innerhalb des Kreises, so ist sein Radius die Hälfte der Länge der Diagonalen vom Quadrat. Diese besitzt die Länge $d = \sqrt{2} \cdot a$. Dies folgt aus dem Satz von Pythagoras, da die halbe Quadratdiagonale ein rechtwinkliges Dreieck bildet mit Seitenlänge d der

Hypothenuse und den beiden Katheten mit Längen $\frac{1}{2}a$: Also ist der Umfang $2\pi r = 2\pi \cdot \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}\pi a$, der Flächeninhalt ist $\pi r^2 = \pi \cdot 2a^2 = 2\pi a^2$.