Onlinekurs Mathematik - Geometrie - Trigonometrie

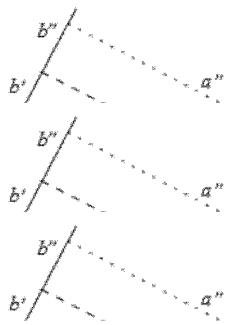
5.3.1 Trigonometrie am Dreieck

Durch die Strahlensätze haben wir gesehen, dass die Verhältnisse der Seiten in einem Dreieck lediglich von den Winkeln des Dreiecks abhängen. Ändert man in einem Strahlensatz den Winkel bei S oder den Winkel, in dem die parallelen Geraden einen Strahl schneiden, so ändern sich natürlich auch die Verhältnisse. Legt man hingegen einen der beiden Winkel fest, so kann man die Verhältnisse in Abhängigkeit von dem anderen Winkel als Funktion von einer Variablen darstellen.

Wir legen nun den Winkel γ fest auf $\gamma = \pi/2$, das heißt wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck. Nun sind die Seitenverhältnisse nur vom Winkel α abhängig, der Winkel β ergibt sich aus der Winkelinnensumme des Dreiecks. Wir erhalten eine Schar von ähnlichen Dreiecken, wobei die Seiten c, c', ... die Hypotenusen sind. Im Hinblick auf den betrachteten Winkel α bezeichnet man die dem Winkel gegenüberliegen Seiten a, a', ... als **Gegenkathete** und die am Winkel anliegende Seiten b, b', ... als **Ankathete**.
Wendet man nun die Strahlensätze an, so erhält man folgende Erkenntnisse:

Info 5.3.1

Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck



- Das Verhältnis

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \ldots = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \sin(\alpha)$$

bezeichnet man als den **Sinus** des Winkels α.

- Das Verhältnis

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \ldots = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \cos(\alpha)$$

bezeichnet man als den **Kosinus** des Winkels α.

- Das Verhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} := \tan(\alpha)$$

bezeichnet man als den **Tangens** des Winkels α.

Der Tangens des Winkels α ist nach der Definition

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \, .$$

Beispiel 5.3.2
Von einem Dreieck ist bekannt, dass es einen rechten Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ hat. Die Seite c ist 5 cm , die Seite a ist 2.5 cm lang. Wir wollen jeweils den Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α bestimmen:

Den Sinus können wir sofort aus den Angaben berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{2.5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0.5.$$

Für den Kosinus benötigen wir die Länge der Seite b , die wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhalten:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (2.5 \text{ cm})^2}}{5 \text{ cm}} = 0.866.$$

Daraus folgt für den Tangens

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{0.5}{0.866} = 0.5773.$$

Aufgabe 5.3.3
Die Hypotenuse $c = 5$ ist vorgegeben. Zeichnen Sie mit Hilfe des Thaleskreises (Maßstab $1 \triangleq 2$ cm die rechtwinkligen Dreiecke für die Winkel
$\alpha \in \{0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ\}$.

Messen Sie die Seiten a und b und schreiben Sie sie in eine Tabelle. Berechnen Sie zu jedem Dreieck den Sinus, Kosinus und Tangens.

Schauen Sie sich die Werte genauer an und versuchen Sie, sie zu interpretieren.

Tragen Sie die Werte von Sinus, Kosinus und Tangens in Abhängigkeit des Winkels α in ein Diagramm.

Lösung

Beim Messen entstehen immer Messfehler! Die Tabelle könnte folgendermaßen aussehen:

α	a	b	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0.0	5.0	0.0	1.0	0.
10°	0.8	4.9	0.160	0.98	0.1633
20°	1.7	4.7	0.34	0.96	0.3617
30°	2.5	4.3	0.5	0.86	0.5814
40°	3.2	3.8	0.64	0.76	0.8421
45°	3.5	3.5	0.7	0.7	1.0
50°	3.8	3.27	0.76	0.64	1.1875
60°	4.3	2.5	0.86	0.5	1.7200
70°	4.7	1.7	0.96	0.34	2.7647
80°	4.9	0.8	0.98	0.160	6.1250
90°	5.0	0.0	1.0	0.0	$\to \infty$

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt die Gegenkathete a zu und die Ankathete b ab.

  Ebenso verhalten sich $\sin(\alpha) \sim a$ und $\cos(\alpha) \sim b$.

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt a in dem gleichen Maß zu wie b mit von 90° aus fallenden Winkel α abnimmt. Im Thaleskreis sind die beiden Dreiecke mit den entgegengesetzten Werten für a und b die zwei Lösungen für die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse und gegebener Höhe (Aufgabe 5.2.16).

  Ebenso verhalten sich Sinus und Kosinus zueinander: es ist also

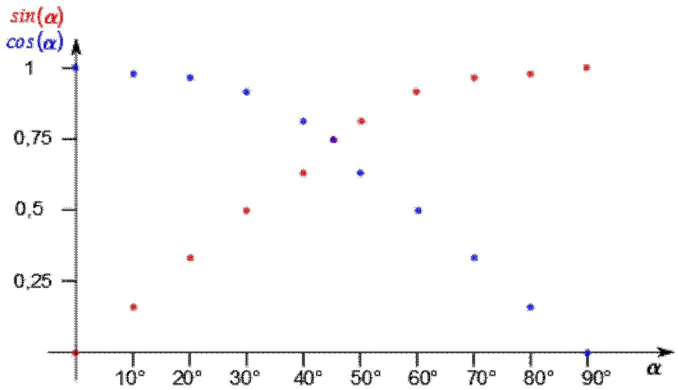
  $$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha) \text{ bzw.}$$

  $$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha) .$$

- Bei $\alpha = 45^\circ$ sind die Katheten und damit auch Sinus und Kosinus von α gleich.

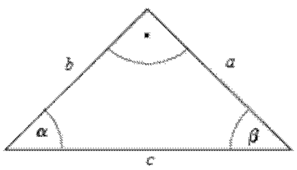
- Der Tangens, also das Verhältnis von a zu b , steigt mit zunehmendem Winkel α von Null ins Unendliche.

Das Diagramm sieht folgendermaßen aus:



Beispiel 5.3.4
Wir wollen den Sinus des Winkels $\alpha = 45^\circ$ nun berechnen, also nicht aus gemessenen (= fehlerbehafteten) Werten berechnen, wie in der letzten Aufgabe.

Wenn im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ der Winkel α gleich 45° ist, so muss wegen der Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$ der Winkel β auch gleich $45^\circ = \pi/4$ sein, und die beiden Katheten a und b sind gleichlang. Dieses Dreieck nennt man **gleichschenklig**:



Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \sin(45^\circ) = \frac{a}{c} .$$

Außerdem gilt:

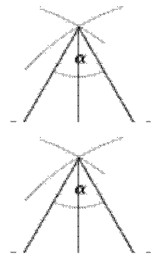
$$a^2 + b^2 = 2a^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2} \cdot a.$$

$$\Rightarrow \quad \sin(45^\circ) = \sin(\pi/4) = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

In der Aufgabe 5.3.3 haben wir für den Sinus von 45° einen Wert von 0.7 erhalten, was dem errechneten Wert von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ schon recht nahe kommt.

Beispiel 5.3.5
Wir betracheten nun ein **gleichseitiges** Dreieck. Wie der Name sagt, sind in diesem Dreieck alle Seiten gleich lang, und auch die Winkel sind alle gleich groß, nämlich $\alpha = \beta = \gamma = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Das Dreieck ist nach dem Kongruenzsatz ,,sss" mit der Angabe einer Seite a eindeutig bestimmt, und wir erhalten es, indem wir die Seite a zeichnen und mit dem Zirkel einen Kreis mit dem Radius a um jede Ecke schlagen. Der Schnittpunkt der Kreise ist nun die dritte Ecke.

Dieses Dreieck hat keinen rechten Winkel. Zeichnen wir eine Höhe h auf eine der Seiten a ein, so erhalten wir zwei kongruente Dreiecke mit je einem rechten Winkel.



Es gilt nun:

$$\sin(\alpha) = \sin(60^\circ) = \frac{h}{a}$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4} a^2 \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad \sin(60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Aus diesem Dreieck können wir noch den Sinus eines weiteren Winkels berechnen: Die Höhe h teilt den oberen Winkel in zwei gleiche Teile, so dass wir in den beiden kleinen kongruenten Dreiecken jeweils den Winkel $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ erhalten. Es ist nun

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 5.3.6
Berechnen Sie, ähnlich den vorher gezeigten Beispielen, den exakten Wert des Kosinus für die Winkel $\alpha_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ und $\alpha_3 = 60^\circ$. Verwenden Sie die Erkenntnisse aus Aufgabe 5.3.3.

Lösung

Aus der Aufgabe 5.3.3 wissen wir, dass $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Daraus folgt

$$\cos(30^\circ) = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\cos(45^\circ) = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

In einer kleinen Tabelle können wir nun unsere gefundenen Werte für markante Winkel zusammentragen:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
	0°	30°	45°	60°	90°

Diese Werte sollte man sich merken. Die trigonometrischen Funktionen für andere Winkel sind in Tabellen bzw. im Taschenrechner gespeichert.

Im Beispiel 5.3.5 haben wir mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen die Höhe h des Dreiecks berechnet. Diese Vorgehensweise gilt für alle beliebigen Dreiecke, da die Höhe h das Dreieck immer in zwei rechtwinklige Dreiecke teilt und somit die trigonometrischen Funktionen angewandt werden können.

Aufgabe 5.3.7
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten $c = 7$ und $b = 3$, sowie dem Winkel $\alpha = 30^\circ$.

Lösung

Der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$.

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad\Rightarrow\quad h = b\cdot\sin(\alpha) = 3\cdot\sin(30^\circ) = 3\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{21}{4}$$