1 Lineare Gleichungssysteme

Modulübersicht

1.1 Was sind Lineare Gleichungssysteme?

1.1.1 Einführung

Ein Problem mit mehreren Unbekannten gleichzeitig!? Und eine ganze Reihe von Gleichungen dazu!? Problemstellungen dieser Art kommen nicht nur im naturwissenschaftlich-technischen Bereich vor, sondern auch in anderen wissenschaftlichen Disziplinen und im Alltag! Und sie müssen gelöst werden!

Zur Beruhigung vorneweg: Schwierig wird es nicht! Dagegen stimmt es, dass sich in den unterschiedlichsten Gebieten häufig Situationen und Aufgaben finden, die in der mathematischen Modellierung auf mehrere Gleichungen in mehreren Unbekannten führen. Hierzu wird ein erstes einfaches Beispiel betrachtet:

Beispiel 1.1.1

Eine junge Artistengruppe möchte ihre halsbrecherische Radnummer zusätzlich aufmotzen, indem sie für ihre Ein- und Zweiräder neue Felgen mit grellbunten Lichteffekten zukauft. Für die insgesamt 10 Räder benötigt sie 13 Felgen. Wieviele Ein- und wieviele Zweiräder besitzt die Gruppe?

In einem ersten Schritt gilt es, die in der Aufgabenstellung enthaltenen Informationen, wenn möglich, in mathematische Gleichungen zu übersetzen. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Einräder mit x, diejenige der Zweiräder mit y, so kann man als erste Information aus der Problembeschreibung herauslesen, dass

$$\text{Gleichung (1)} \quad : \quad x + y = 10$$

gelten muss, da die Gruppe insgesamt 10 Räder ihr Eigentum nennt. Außerdem hat ein Einrad eine Felge, ein Zweirad dagegen zwei Felgen. Weil alles in allem 13 Felgen angeschafft werden sollen, weiß man auch, dass

$$\text{Gleichung (2)} \quad : \quad x + 2y = 13$$

ist. Aus der vorliegenden Problemstellung ergeben sich also zwei Gleichungen, die die zwei unbekannten Größen x (Anzahl der Einräder) und y (Anzahl der Zweiräder) in Beziehung setzen.

Früher oder später will man natürlich wissen, über wieviele Ein- bzw. Zweiräder die Artistengruppe tatsächlich verfügt. Im gegebenen Beispiel kann man die Werte für x und y durch ein wenig Probieren erraten. Aber eigentlich interessiert man sich für **systematische Methoden**, um Fragestellungen wie die obige gezielt zu beantworten.

1.1.2 Inhalt

Bevor man richtig loslegen kann, muss man den Sprachgebrauch noch ein bisschen schärfen.

Info 1.1.2

Mehrere Gleichungen, die auf eine bestimmte Anzahl Unbekannter **gleichzeitig** zutreffen, bilden ein sogenanntes **Gleichungssystem**. Kommen in jeder einzelnen Gleichung eines solchen Systems die Unbekannten in jedem Term nur linear, d.h. höchstens zur Potenz 1 und ausschließlich multipliziert mit (konstanten) Zahlen vor, so spricht man von einem **Linearen Gleichungssystem**, oder kurz **LGS**.

Die beiden Gleichungen aus dem einführenden Beispiel 1.1.1 auf der vorherigen Seite stellen ein Lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte x und y dar. Dagegen bilden die drei Gleichungen

$$x + y + z = 3 \text{ und } x + y - z = 1 \text{ und } x \cdot y + z = 2$$

in den Unbekannten x, y und z zwar ein Gleichungssystem, jedoch **kein** lineares, da in der dritten Gleichung der Term $x \cdot y$ auftritt, der **bilinear** in x und y ist und daher der Bedingung der **Linearität** widerspricht.
Übrigens muss bei einem Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen nicht gleich der Anzahl der Unbekannten sein; darauf wird man später noch zurückkommen.

Info 1.1.3

Ist die Anzahl der Gleichungen in einem Gleichungssystem gleich der Anzahl der Unbekannten, so bezeichnet man das Gleichungssystem als **quadratisch**.

Aufgabe 1.1.1
Bei welchen der folgenden Gleichungssysteme handelt es sich um Lineare Gleichungssysteme?

- [ ] $x + y - 3z = 0$ und $2x - 3 = y$ und $1{,}5x - z = 22 + y$,
- [ ] $\sin(x) + \cos(y) = 1$ und $x - y = 0$,
- [ ] $2z - 3y + 4x = 5$ und $z + y - x^2 = 25$.

Lineare Gleichungssysteme zeichnen sich gegenüber allgemeinen Gleichungssystemen durch eine meist deutlich größere Einfachheit aus. Nichtsdestotrotz spielen sie in den verschiedensten Bereichen eine zentral wichtige Rolle, so in der Medizin z.B. im Zusammenhang mit der Computertomographie, in der Technik etwa bei der Beschreibung, wie sich Schall in komplex gestalteten Räumen ausbreitet, oder in der Physik beispielsweise bei der Frage, welche Wellenlängen angeregte Atome aussenden können. Daher ist es zweifelsohne lohnenswert, sich intensiv mit Linearen Gleichungssystemen auseinanderzusetzen.

Im Vordergrund steht bei Gleichungssystemen generell die Frage, welche Zahlenwerte man für die Unbekannten wählen muss, damit alle Gleichungen des Systems simultan erfüllt sind. Ein solcher Satz von Zahlenwerten für die Unbekannten wird auf den Begriff der **Lösung eines Gleichungssystems** führen.

Zuvor sollte jedoch eine Feinheit beachtet werden: Abhängig von der Problemstellung ist es unter Umständen nicht sinnvoll, alle möglichen Zahlenwerte für die Unbekannten zuzulassen. Im Eingangsbeispiel 1.1.1 auf Seite 2 repräsentieren die Unbekannten x und y die Stückzahlen der Ein- bzw. Zweiräder im Besitz der Artistengruppe. Solche Stückzahlen können nur ganze nichtnegative Zahlen, also Elemente von $\mathbb{N}_0$, sein. Daher muss man in diesem Fall die Menge der Zahlen, aus denen die Lösungen stammen können, von vornherein auf $\mathbb{N}_0$ einschränken (und zwar sowohl für x als auch y).

Info 1.1.4

Diejenige Zahlenmenge, aus der die Lösungen eines Gleichungssystems überhaupt nur stammen können, nennt man die **Grundmenge** des Gleichungssystems. Die **Definitionsmenge** ist diejenige Teilmengeder Grundmenge, für die alle Terme in den Gleichungen des Systems **definiert** sind. Für Lineare Gleichungssysteme fallen Grundmenge und Definitionsmenge zusammen. Als **Lösungsmenge** schließlich bezeichnet man diejenige Teilmenge der Definitionsmenge, die die **Lösungen** des Systems zusammenfasst. Diese Lösungsmenge wird mit L bezeichnet.

Ist keine weitere Aussage über die Grundmenge getroffen - und lässt sich auch keine Aussage aus der Problembeschreibung ableiten -, so wird stillschweigend davon ausgegangen, dass die Grundmenge gleich $\mathbb{R}$, also gleich der Menge der reellen Zahlen, ist.

1.2 LGS mit zwei Unbekannten

1.2.1 Einführung

Man beschränkt sich zunächst auf Lineare Gleichungssysteme in **zwei** Unbekannten.

Info 1.2.1

Allgemein hat ein Lineares Gleichungssystem (LGS), bestehend aus zwei Gleichungen in den Unbekannten x und y, folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y &= b_1 \ , \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y &= b_2 \ . \end{aligned}$$

Dabei sind a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} die sogenannten Koeffizienten des Linearen Gleichungssystems, die ebenso wie die rechten Seiten b_1 und b_2 der Gleichungen meist aus den reellen Zahlen stammen und aufgrund der Problemstellung (weitgehend) vorgegeben sind.

Sind die rechten Seiten b_1 und b_2 beide gleich 0 ($b_1 = 0 = b_2$), so spricht man von einem **homogenen**, andernfalls von einem **inhomogenen** Linearen Gleichungssystem.

Aufgrund der Linearität kann jede der beiden Gleichungen des Systems in Infobox 1.2.1 für sich als Gleichung einer Geraden in der x-y-Ebene interpretiert werden: Löst man z.B. die erste Gleichung nach y auf,

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x + \frac{b_1}{a_{12}} \ ,$$

so kann man aus dieser expliziten Form direkt ablesen, dass eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$ und dem y-Achsenabschnitt $y_0 = \frac{b_1}{a_{12}}$ beschrieben wird.

Am Rande wird festgehalten, dass das eben erwähnte Freistellen nach y natürlich nur funktioniert, falls $a_{12} \neq 0$ ist. Ist $a_{12} = 0$, so lautet die erste Gleichung $a_{11} \cdot x = b_1$; diese ist für $a_{11} \neq 0$ äquivalent zu $x = \frac{b_1}{a_{11}}$, was bedeutet, dass x einen konstanten Wert annimmt; dies stellt ebenfalls eine Gerade dar, nämlich eine Gerade parallel zur y-Achse im Abstand $\frac{b_1}{a_{11}}$.
Und was, wenn sowohl $a_{12} = 0$ als auch $a_{11} = 0$ gilt? Nun, dann muss ebenfalls $b_1 = 0$ sein, da ansonsten die erste Gleichung von vornherein einen Widerspruch ergeben würde. Für $a_{11} = a_{12} = b_1 = 0$ ist aber die erste Gleichung (für alle Werte von x und y) immer identisch erfüllt ($0 = 0$) und somit wertlos.

Im Fall der zweiten Gleichung in Infobox 1.2.1 geht man ganz entsprechend vor:

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x + \frac{b_2}{a_{22}} \ .$$

Insgesamt erhält man zwei Geraden als Repräsentanten der beiden linearen Gleichungen, und die Frage nach Lösbarkeit und Lösung des Linearen Gleichungssystems, also die **Frage nach der gleich-**

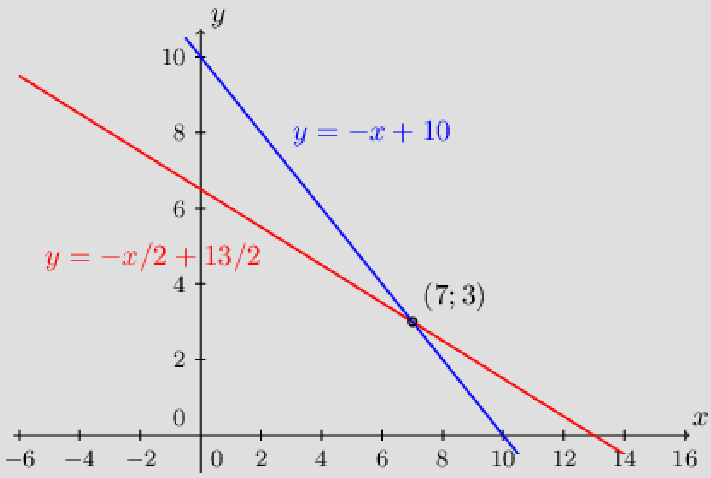
zeitigen Gültigkeit beider Gleichungen, lässt sich als **Frage nach Existenz und Lage des Schnittpunkts der beiden Geraden** lesen. Dazu schaut man sich ein konkretes Beispiel an:

Beispiel 1.2.2

Das Lineare Gleichungssystem aus dem einführenden Beispiel 1.1.1 auf Seite 2 lautet:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 10 \\ x+2y & = & 13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x+10 \\ y & = & -\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \end{array}\right. .$$

(Hier nehmen die allgemeinen Koeffizienten und rechten Seiten des Systems 1.2.1 auf der vorherigen Seite somit die Werte $a_{11}=1, a_{12}=1, a_{21}=1, a_{22}=2, b_1=10$ und $b_2=13$ an.)
Es werden zwei Geraden mit den Steigungen $m_1=-1$ bzw. $m_2=-\frac{1}{2}$ und den y-Achsenabschnitten $y_{0,1}=10$ bzw. $y_{0,2}=\frac{13}{2}$ beschrieben:



Man erkennt aus dem Schaubild, dass sich die beiden Geraden in der Tat schneiden, und liest die Koordinaten des Schnittpunktes zu $(x=7; y=3)$ ab. Dementsprechend besitzt das hier betrachtete Lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung; die Lösungsmenge L enthält genau ein Zahlenpaar, $L=\{(x=7; y=3)\}$. Die Artistengruppe aus Beispiel 1.1.1 auf Seite 2 hat also 7 Einräder und 3 Fahrräder.

Diese anschauliche Betrachtungsweise eignet sich hervorragend, alle Fälle zu diskutieren, die überhaupt nur auftreten können: Denn entweder schneiden sich zwei Geraden in der x-y-Ebene - und dann ist der Schnittpunkt zwangsläufig **eindeutig** -, oder aber zwei solche Geraden verlaufen parallel - und besitzen somit keinen Schnittpunkt -, oder aber die beiden Geraden sind deckungsgleich - und schneiden sich daher sozusagen in unendlich vielen Punkten. Andere Möglichkeiten sind nicht denkbar. Demzufolge kann man im Hinblick auf die Mächtigkeit der Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems Folgendes festhalten:

Info 1.2.3

Ein **inhomogenes Lineares Gleichungssystem** besitzt entweder **keine**, **eine eindeutige** oder aber **unendlich viele Lösungen**.

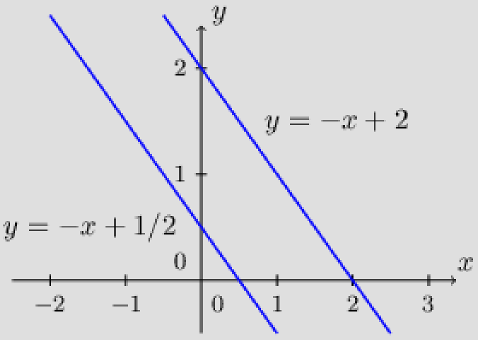
Ein **homogenes Lineares Gleichungssystem** weist **immer eine Lösung** auf, nämlich die sogenannte **triviale Lösung** $x = 0$ und $y = 0$. Darüber hinaus **kann** ein solches homogenes System auch **unendlich viele Lösungen** besitzen.

Das Gesagte soll an zwei weiteren Beispielen, bei denen man direkt mit den Linearen Gleichungssystemen startet, verdeutlicht werden:

Beispiel 1.2.4

In beiden Fällen wählt man als **Grundmenge** die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

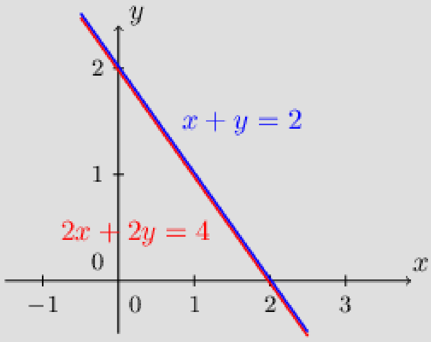
$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+2 \\ y &=& -x+\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$



Die beiden Geraden besitzen dieselbe Steigung $m = -1$, aber verschiedene y-Achsenabschnitte ($y_0 = 2$ bzw. $y_0 = \dfrac{1}{2}$); sie verlaufen parallel; das Lineare Gleichungssystem besitzt **keine** Lösung:

$$L = \emptyset \ .$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+2 \\ y &=& -x+2 \end{array}\right. .$$



Die beiden Geraden besitzen sowohl dieselbe Steigung $m = -1$ als auch denselben y-Achsenabschnitt $y_0 = 2$; sie sind deckungsgleich; das Lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, die z.B. wie folgt angegeben werden können:

$$L = \{(t; -t+2) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \ .$$

Im Falle des Beispiels in der rechten Spalte sind andere Parametrisierungen der Lösungsmenge möglich und erlaubt. Es kommt im Grunde nur darauf an, die Punkte der (deckungsgleichen) Geraden geeignet zu beschreiben. Bei der obigen Angabe von L wurde einfach die Geradengleichung selbst verwendet und die Laufvariable t statt x genannt.

Und was hat es mit den oben erwähnten möglichen Einschränkungen wegen der Grundmenge auf sich? Auch hierzu ein Beispiel:

Beispiel 1.2.5

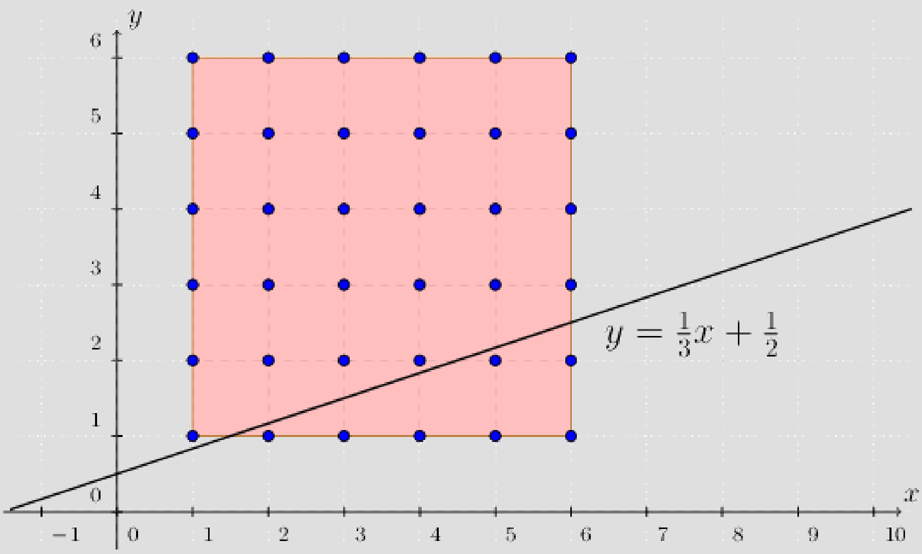
Auf einem Volksfest verspricht ein besonders pfiffiger Standbesitzer geradezu traumhafte Preise und das gegen einen lächerlich geringen Spieleinsatz, wenn, ja wenn einer der Passanten ihm nur folgendes kleine Rätsel löst: *Ich habe mit einem Würfel zweimal gewürfelt. Ziehe ich vom Sechsfachen der zweiten Augenzahl das Zweifache der ersten ab, so erhalte ich die Zahl* 3*. Addiere ich andererseits zum Vierfachen der ersten Augenzahl die Zahl* 6*, so bekomme ich das Zwölffache der zweiten Augenzahl. Welche beiden Zahlen habe ich gewürfelt?*

Bezeichnet man die Augenzahl des ersten Würfelwurfs mit x, diejenige des zweiten mit y, so kann man die Aussagen des Standbesitzers sehr schnell in Gleichungen übersetzen:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6y-2x &=& 3 \\ 4x+6 &=& 12y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \\ y &=& \frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Man stellt fest, dass das entstehende Lineare Gleichungssystem - anschaulich interpretiert - auf zwei deckungsgleiche Geraden führt. Vordergründig scheint es daher unendlich viele Lösungen zu geben.

Hier kommt jetzt allerdings die Grundmenge ins Spiel: Da sowohl x als auch y Augenzahlen eines Würfels repräsentieren, können beide Unbekannte jeweils nur einen Wert aus der Menge $\{1;2;3;4;5;6\}$ annehmen. Betrachtet man die Gerade $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ in der x-y-Ebene,



so erkennt man, dass kein mögliches Augenzahlpaar auf dieser Geraden liegt; daher ist die Lösungsmenge hier tatsächlich leer, $L=\emptyset$.

1.2.2 Die Einsetzmethode und die Gleichsetzmethode

Bisher wurden Fragen der **Lösbarkeit** und der **graphischen Lösung** von Linearen Gleichungssystemen der Gestalt aus 1.2.1 auf Seite 5 untersucht.Eine rechnerische Behandlung solcher Systeme steht noch aus, was jetzt nachgeholt werden soll. Dazu betrachtet man ein weiteres Beispiel:

Beispiel 1.2.6

Familie Müller hat für die Renovierung ihres Hauses zwei Kredite in einer Gesamthöhe von 50 000 Euro aufnehmen müssen, für die sie pro Jahr zusammen 3 700 Euro allein an Zinsen zu bezahlen hat. Für den einen Kreditvertrag fallen 5%, für den anderen 8% jährliche Zinsen an. Über welche Beträge laufen die einzelnen Kredite?

Man bezeichnet die gesuchten Kredithöhen der beiden Verträge mit x und y. Die Summe dieser beiden Beträge beläuft sich laut Aufgabentext auf 50 000 Euro, also lautet die erste Gleichung:

$$\text{Gleichung (1)} \quad : \quad x + y = 50\,000 \quad \text{(in Euro)}\ .$$

Die Zinslast aus dem mit 5% verzinsten Vertrag beträgt $0{,}05 \cdot x$, die aus dem anderen Vertrag mit 8% Zinsen $0{,}08 \cdot y$. Beide Lasten summieren sich gemäß Aufgabetext auf 3 700 Euro; dies liefert eine zweite Gleichung:

$$\text{Gleichung (2)} \quad : \quad 0{,}05x + 0{,}08y = 3\,700 \quad \text{(in Euro)}\ .$$

Wiederum landet man bei einem Linearen Gleichungssystem vom Typ 1.2.1 auf Seite 5.

Für die rechnerische Lösung stellt man Gleichung (1) nach y um; es entsteht eine zu (1) äquivalente Gleichung $(1')$:

$$\text{Gleichung } (1') \quad : \quad y = 50\,000 - x\ .$$

Diesen Ausdruck für y kann man nun in Gleichung (2) für y **einsetzen**, sodass die resultierende Gleichung nur noch x als Unbekannte enthält und dementsprechend aufgelöst werden kann:

$$\begin{aligned} & 0{,}05x + 0{,}08(50\,000 - x) = 3\,700 \\ \Leftrightarrow\quad & 0{,}05x + 4\,000 - 0{,}08x = 3\,700 \\ \Leftrightarrow\quad & 0{,}03x = 300 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 10\,000\ . \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis für x in Gleichung $(1')$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} & y = 50\,000 - 10\,000 \\ \Leftrightarrow\quad & y = 40\,000\ . \end{aligned}$$

Die gesuchten Kreditvolumina betragen daher 10 000 Euro (Vertrag mit 5% Verzinsung) und 40 000 Euro (Vertrag mit 8% Verzinsung).

Das voranstehende Beispiel demonstriert auf charakteristische Art und Weise das Vorgehen bei der sogenannten **Einsetzmethode**:

Info 1.2.7

Bei der **Einsetzmethode** wird eine der beiden linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt; dieses Ergebnis wird im zweiten Schritt in die andere lineare Gleichung **eingesetzt**. Es können nun drei Fälle auftreten:

(i) Die resultierende Gleichung enthält (nach dem Zusammenfassen gleichartiger Terme) noch die andere der beiden Unbekannten. Das Auflösen der resultierenden Gleichung nach dieser anderen Unbekannten liefert den ersten Teil des Ergebnisses; den zweiten Teil erhält man zum Beispiel, indem man das erste Teilergebnis in die Gleichung aus dem ersten Schritt einsetzt. Die Lösung ist eindeutig. (Gehört diese Lösung allerdings nicht zur Grundmenge, so muss sie ausgeschlossen werden.)

(ii) Die resultierende Gleichung enthält die andere der beiden Unbekannten nicht mehr und stellt einen Widerspruch in sich dar. Dann besitzt das Lineare Gleichungssystem keine Lösung.

(iii) Die resultierende Gleichung enthält die andere der beiden Unbekannten nicht mehr und ist automatisch immer gültig. Dann besitzt das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen (wenn sich durch die zulässige Grundmenge keine Einschränkungen ergeben).

Bei dieser Vorgehensweise bestehen gewisse Freiheiten. Es ist nicht festgelegt, welche der linearen Gleichungen des Systems nach welcher Unbekannten - oder Vielfachen davon - aufgelöst werden soll; solange es sich generell um Äquivalenzumformungen handelt, führt jeder der möglichen Wege zum selben Resultat. Die Bevorzugung eines bestimmten Lösungsweges ist zum Teil eine Frage des Geschmacks und zum Teil eine Frage der Geschicklichkeit: Einige Zwischenrechnungen können sich vereinfachen, wenn eine clevere Wahl getroffen wird.

Im Zusammenhang mit der **Einsetzmethode** sollen die oben angesprochenen Fälle (ii) und (iii) noch an den Linearen Gleichungssystemen aus Beispiel 1.2.4 auf Seite 7 illustriert werden:

Beispiel 1.2.8

Als Grundmenge bei beiden Linearen Gleichungssystemen legt man wiederum $\mathbb{R}$ fest.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x+y & = & 2 \\ \text{Gleichung (2)}: & 2x+2y & = & 1 \end{array} .$$

Freistellen der Gleichung (1) nach x liefert $x = 2 - y$. Dies in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} & 2(2-y)+2y = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4-2y+2y = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4 = 1\ . \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch; das LGS besitzt

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x+y & = & 2 \\ \text{Gleichung (2)}: & 2x+2y & = & 4 \end{array} .$$

Freistellen der Gleichung (1) nach y liefert $y = 2 - x$. Dies in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} & 2x+2(2-x) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2x+4-2x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 4 = 4\ . \end{aligned}$$

Dies ist immer wahr; das LGS besitzt **un-**

Die Einsetzmethode ist nicht das einzige Verfahren, um Lineare Gleichungssysteme rechnerisch zu lösen. Nachfolgend betrachtet man eine weitere Methode, die sehr eng mit der graphischen Lösung eines LGS verwandt ist.

Info 1.2.9

Bei der **Gleichsetzmethode** werden **beide** linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt. Die beiden resultierenden neuen Gleichungen werden dann im zweiten Schritt **gleichgesetzt**. Es können dann abermals die drei im Zusammenhang mit der Einsetzmethode diskutierten Fälle auftreten.

Auch dieses Verfahren beinhaltet gewisse Freiheiten; so ist zum Beispiel nicht vorgeschrieben, nach welcher Unbekannten die linearen Gleichungen freigestellt werden sollen.

Zur Demonstration wird das Eingangsbeispiel nochmals gelöst, jetzt mit Hilfe der Gleichsetzmethode:

Beispiel 1.2.10

Das Lineare Gleichungssystem des einführenden Beispiels lautet:

$$\begin{aligned} x+y &= 10\ , \\ x+2y &= 13\ . \end{aligned}$$

Man löst beide Gleichungen nach x auf,

$$\begin{aligned} x &= 10-y\ , \\ x &= 13-2y\ , \end{aligned}$$

und setzt die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich,

$$10-y=13-2y\ ,$$

was auf $y=3$ führt. Dieses Ergebnis kann man in eine der beiden nach x aufgelösten Gleichungen einsetzen, um $x=7$ zu erhalten.

Aufgabe 1.2.1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 2y &= 14 \,, \\ 3x - 5y &= 6 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Gleichsetzmethode.

Lösung:
Man löst beispielsweise beide Gleichungen nach x auf: dazu multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{1}{7}$ und stellt nach x um,

$$x = \tfrac{14}{7} - \tfrac{2}{7}y \Leftrightarrow x = 2 - \tfrac{2}{7}y \ : \ \text{Gleichung } (1') \,;$$

die zweite Gleichung multipliziert man dagegen mit $\frac{1}{3}$, bevor man nach x freistellt,

$$x = \tfrac{6}{3} + \tfrac{5}{3}y \Leftrightarrow x = 2 + \tfrac{5}{3}y \ : \ \text{Gleichung } (2') \,.$$

Gleichsetzen der beiden rechten Seiten der Gleichungen $(1')$ und $(2')$ liefert:

$$2 - \tfrac{2}{7}y = 2 + \tfrac{5}{3}y \Leftrightarrow 0 = (\tfrac{2}{7} + \tfrac{5}{3})y \Leftrightarrow y = 0 \,.$$

Mit diesem Ergebnis für y ergibt z.B. die erste Gleichung:

$$7x + 2 \cdot 0 = 14 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2 \,.$$

Also ist das gegebene Lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar und $L = \{(x = 2; y = 0)\}$.

Alternativ hätte man die beiden Gleichungen vor dem Gleichsetzen auch nach y auflösen können (oder nach einem Vielfachen von x oder nach einem Vielfachen von y). Das Endresultat ist jedesmal dasselbe.

1.2.3 Die Additionsmethode

Es soll noch ein weiteres, drittes, Verfahren zur rechnerischen Lösung von Linearen Gleichungssystemen vorgestellt werden, das sein eigentliches Potential aber erst bei größeren Systemen, d.h. vielen linearen Gleichungen in vielen Unbekannten entwickeln wird, da es sich sehr gut systematisieren lässt. Hier soll es um die prinzipielle Vorgehensweise gehen. Zu Beginn wird ein Beispiel betrachtet:

Beispiel 1.2.11

Man sucht die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \text{Gleichung } (1): \quad 2x + y &= 9 \,, \\ \text{Gleichung } (2): \quad 3x - 11y &= 1 \,, \end{aligned}$$

wobei als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gewählt wird.

Diesmal wird zur Lösung folgender Weg eingeschlagen: Man multipliziert Gleichung (1) mit dem Faktor 11 durch und erhält eine zu Gleichung (1) äquivalente Gleichung:

$$\begin{aligned} (2x + y) \cdot 11 &= 9 \cdot 11 \\ \Leftrightarrow \quad 22x + 11y &= 99 \qquad : \ \text{Gleichung } (1') \,. \end{aligned}$$

Anschließend **addiert** man die neue Gleichung $(1')$ zu Gleichung (2) hinzu, d.h. man setzt die **Summe** der linken Seiten von (2) und $(1')$ gleich der **Summe** der rechten Seiten von (2) und $(1')$. Dabei fällt die Unbekannte y heraus; dies ist übrigens der Grund für die Wahl des Faktors 11 im vorherigen Schritt:

$$3x - 11y + 22x + 11y = 1 + 99 \Leftrightarrow 25x = 100 \Leftrightarrow x = 4 \; .$$

Um den Lösungswert für y zu bekommen, kann man das gerade erzielte Resultat für x z.B. in Gleichung (1) einsetzen:

$$2 \cdot 4 + y = 9 \Leftrightarrow 8 + y = 9 \Leftrightarrow y = 1 \; .$$

Das Lineare Gleichungssystem des vorliegenden Beispiels besitzt also eine eindeutige Lösung, $L = \{(x = 4; y = 1)\}$.

Auch bei diesem Verfahren ist das Vorgehen nicht eindeutig festgelegt: So hätte man z.B. auch Gleichung (1) mit 3 und Gleichung (2) mit (-2) durchmultiplizieren können,

$$\begin{array}{rcccrcll} (2x+y)\cdot 3 & = & 9\cdot 3 & \Leftrightarrow & 6x+3y & = & 27 & : \text{Gleichung } (1'') \; , \\ (3x-11y)\cdot(-2) & = & 1\cdot(-2) & \Leftrightarrow & -6x+22y & = & -2 & : \text{Gleichung } (2'') \; , \end{array}$$

um bei der anschließenden **Addition** der Gleichungen $(1'')$ und $(2'')$ die Variable x zu eliminieren:

$$6x + 3y - 6x + 22y = 27 - 2 \Leftrightarrow 25y = 25 \Leftrightarrow y = 1 \; .$$

Das Ergebnis für y hätte man dann z.B. in Gleichung (2) einsetzen können, um x zu bestimmen:

$$3x - 11 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4 \; .$$

Info 1.2.12

Bei der **Additionsmethode** wird eine der linearen Gleichungen durch geschickte Multiplikation mit einem geeigneten Faktor so umgeformt, dass bei der anschließenden **Addition** der anderen Gleichung (zumindest) eine Unbekannte herausfällt. (Manchmal ist es einfacher, **beide** Gleichungen vor der **Addition** mit passend gewählten Faktoren zu multiplizieren.) Wie im Fall der Einsetzmethode 1.2.7 auf Seite 10 (oder der Gleichsetzmethode 1.2.9 auf Seite 11) könnenanschließend drei Fälle auftreten, die auf eine Lösungsmenge L mit genau einem Element, keinem Element oder unendlich vielen Elementen führen.

1.2.4 Aufgaben

Aufgabe 1.2.2
Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Einsetzmethode:

a. $3x + y = 4$ und $-x + 2y = 1$,

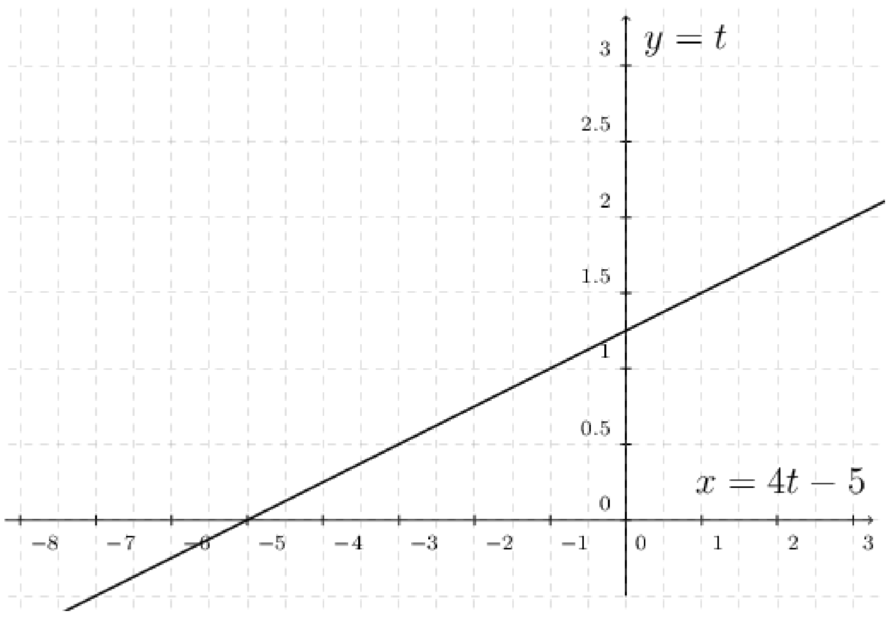
b. $-x + 4y = 5$ und $2x - 8y = -10$.

Lösung:

a. Auflösen z.B. der 1. Gleichung ($3x+y = 4$) nach y liefert $y = 4-3x$. Dies kann man dann in die 2. Gleichung ($-x + 2y = 1$) einsetzen: $-x + 2(4 - 3x) = 1 \Leftrightarrow -x + 8 - 6x = 1 \Leftrightarrow -7x = -7 \Leftrightarrow x = 1$. Mit diesem Ergebnis für x liefert in der Folge z.B. die 1. Gleichung $3 \cdot 1 + y = 4 \Leftrightarrow y = 1$. Die Lösungsmenge L lautet hier also $L = \{(1; 1)\}$.

   Selbstverständlich könnte man auch anders beginnen: Man könnte z.B. die 1. Gleichung nach x auflösen und das Ergebnis für x dann in die 2. Gleichung einsetzen, um y zu bestimmen; oder man könnte generell mit der 2. Gleichung beginnen und diese im 1. Schritt nach x oder nach y auflösen. Es bestehen also einige Freiheiten in der Vorgehensweise.

b. Auflösen z.B. der 1. Gleichung ($-x + 4y = 5$) nach x liefert $x = 4y - 5$. Dies kann man dann in die 2. Gleichung ($2x-8y = -10$) einsetzen: $2(4y-5)-8y = -10 \Leftrightarrow 8y-10-8y = -10 \Leftrightarrow 0 = 0$. Es entsteht also keine neue Aussage; mit anderen Worten: Die 2. Gleichung enthält keine neue Information. Damit enthält die Lösungsmenge L in diesem Fall unendlich viele Lösungspaare $(x; y)$, die sich durch eine reelle Zahl t parametrisieren lassen. Wählt man z.B. $y = t$, so lautet die Lösungsmenge $L = \{(4t - 5; t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Diese Lösungsmenge lässt sich als Gerade im zweidimensionalen Raum veranschaulichen:



   Dementsprechend sind andere Parametrisierungen der Lösungsmenge möglich, z.B. indem man als freien Parameter $x \in \mathbb{R}$ wählt und die obige Gerade mit Hilfe ihrer Steigung und ihres y-Achsenabschnittes charakterisiert, also $L = \{(x; \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.2.3
Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Additionsmethode:

a. $2x + 4y = 1$ und $x + 2y = 3$,

b. $-7x + 11y = 40$ und $2x + 5y = 13$.

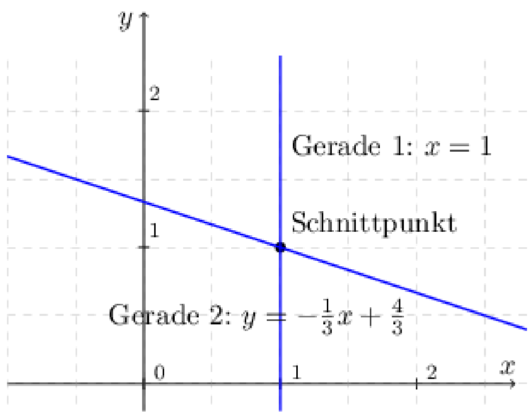
Lösung:

a. Multipliziert man z.B. die 2. Gleichung ($x + 2y = 3$) mit (-2), so entsteht die Gleichung ($2'$): $-2x - 4y = -6$. Die letzte Gleichung addiert man dann zur 1. Gleichung ($2x + 4y = 1$): $2x + 4y - 2x - 4y = 1 - 6 \Leftrightarrow 0 = -5$. Dies ist ein Widerspruch! Somit ist die Lösungsmenge L für dieses Lineare Gleichungssystem leer: $L = \emptyset$.

b. Multiplikation der 1. Gleichung ($-7x+11y = 40$) mit 2 führt auf die Gleichung ($1'$): $-14x+22y = 80$; Multiplikation der 2. Gleichung mit 7 auf die Gleichung ($2'$): $14x + 35y = 91$. Anschließende Addition der Gleichungen ($1'$) und ($2'$) liefert: $-14x+22y+14x+35y = 80+91 \Leftrightarrow 57y = 171 \Leftrightarrow y = 3$. Setzt man dieses Ergebnis für y z.B. in die 2. Gleichung ein, so entsteht: $2x+5\cdot 3 = 13 \Leftrightarrow 2x = 13 - 15 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$. Damit lautet die Lösungsmenge L hier: $L = \{(-1; 3)\}$.

Aufgabe 1.2.4
Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem graphisch: $2x = 2$ und $x + 3y = 4$.

Lösung:
Die 1. Gleichung ($2x = 2$) ist äquivalent zu $x = 1$: Diese Gleichung beschreibt eine Gerade parallel zur y-Achse durch den Punkt $(1; 0)$ auf der x-Achse. Die 2. Gleichung ($x + 3y = 4$) kann umgeformt werden zu $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; dies beschreibt ebenfalls eine Gerade, diesmal mit der Steigung $-\frac{1}{3}$ und dem y-Achsenabschnitt $\frac{4}{3}$. Es ergibt sich also folgendes Bild:



Aus diesem Bild liest man die Koordinaten des Schnittpunktes zu ($x = 1; y = 1$) ab; daher: $L = \{(1; 1)\}$.

1.3 LGS mit drei Unbekannten

1.3.1 Einführung

In der Folge wird der Schwierigkeitsgrad ein wenig gesteigert, indem man zur Behandlung etwas komplizierterer Systeme übergeht:

Beispiel 1.3.1

Drei Kinder finden beim Spielen ein Portemonnaie mit 30 Euro. Da meint das erste Kind: „Wenn ich das Geld für mich alleine behalte, so besitze ich doppelt so viel wie ihr beide zusammen!“ Woraufhin das zweite Kind mit vor Stolz geschwellter Brust prahlt: „Und wenn ich das gefundene Geld einfach einstecke, habe ich dreimal so viel wie ihr beide!“ Das dritte Kind kann da nur überlegen schmunzeln: „Und wenn ich’s nehme, so bin ich fünfmal so reich wie ihr beiden Gauner!“ Wieviel Geld besitzen die Kinder vor dem Fund?

Bezeichnet man die Geldsummen (in Euro) des ersten, zweiten bzw. dritten Kindes vor dem Portemonnaiefund mit x, y bzw. z, so kann man die Aussage des ersten Kindes wie folgt in eine mathematische Gleichung übersetzen:

$$x + 30 = 2(y + z) \Leftrightarrow x - 2y - 2z = -30 \ : \ \text{Gleichung (1)} \ .$$

Analog wird die Aussage des zweiten Kindes übertragen,

$$y + 30 = 3(x + z) \Leftrightarrow -3x + y - 3z = -30 \ : \ \text{Gleichung (2)} \ ,$$

und schließlich diejenige des dritten Kindes:

$$z + 30 = 5(x + y) \Leftrightarrow -5x - 5y + z = -30 \ : \ \text{Gleichung (3)} \ .$$

Es entsteht also ein System aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten, die hier x, y und z heißen.

Wen die Lösung dieses kleinen Rätsels interessiert, der wird sie weiter unten sowohl im Rahmen der **Einsetzmethode** (siehe 1.3.5 auf Seite 22) als auch im Rahmen der Additionsmethode (siehe 1.3.7 auf Seite 24) ausführlich vorgerechnet finden.

Info 1.3.2

Ein Lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen in den drei Unbekannten x, y und z, besitzt folgende allgemeine Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z &= b_1 \ , \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z &= b_2 \ , \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z &= b_3 \ . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ und a_{33} die **Koeffizienten** sowie b_1, b_2 und b_3 die rechten Seiten des **Linearen Gleichungssystems**.

Wiederum nennt man das **Lineare Gleichungssystem homogen**, falls die rechten Seiten b_1, b_2 und b_3 verschwinden ($b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$). Andernfalls heißt das System **inhomogen**.

1.3.2 Lösbarkeit und Gleichsetzmethode, Graphische Interpretation

Im Falle von Systemen aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten kann man - wie in 1.2 auf Seite 5 gesehen - die Frage nach Lösbarkeit und Lösung des Systems sehr schön anschaulich in die Frage nach Existenz und Lage des Schnittpunkts zweier Geraden übersetzen. Und natürlich sollte man sich überlegen, ob für Systeme aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten eine ähnlich bildhafte Interpretation gegeben werden kann.

Erweitert man den bisherigen Raum (x und y) um eine weitere Dimension oder Variable, nämlich z, dann kann man mit einer linearen Gleichung dieser drei Variablen,

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \ ,$$

eine **Ebene in Koordinatenform** darstellen, ganz analog zu den Geradengleichungen, die bisher untersucht wurden. Für $a_{13} \neq 0$ kann diese Gleichung nach z aufgelöst werden,

$$z = \tfrac{b_1}{a_{13}} - \tfrac{a_{11}}{a_{13}} \cdot x - \tfrac{a_{12}}{a_{13}} \cdot y \ ,$$

sodass die **explizite Form** der Gleichung ebenjener Ebene resultiert. Die letzte Gleichung besagt, dass jedem Paar $(x; y)$, also jedem Punkt der x-y-Koordinatenebene, gemäß der Vorschrift der rechten Seite ein Wert z, also gewissermaßen eine Höhe, zugeordnet wird; dadurch entsteht eine Fläche über der x-y-Ebene, die aufgrund der Linearität der Gleichung selbst eine Ebene ist.

Nun muss aber nicht nur die erste Gleichung im System 1.3.2 auf der vorherigen Seite gelten, sondern es müssen **gleichzeitig** auch die zweite und die dritte Gleichung erfüllt sein, die bildlich ebenfalls als Ebenen interpretiert werden können. Wonach also bei der Suche nach Lösungen eines Systems aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten gefahndet wird, ist - in der anschaulichen Sprache - das **Schnittverhalten** dreier Ebenen. Hierzu wird zunächst ein Beispiel betrachtet:

Beispiel 1.3.3

Es wird nach der Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x + y - z & = & 0 \ , \\ \text{Gleichung (2)}: & x + y + z & = & 6 \ , \\ \text{Gleichung (3)}: & 2x - y + z & = & 4 \end{array}$$

gesucht; als Grundmenge wählt man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

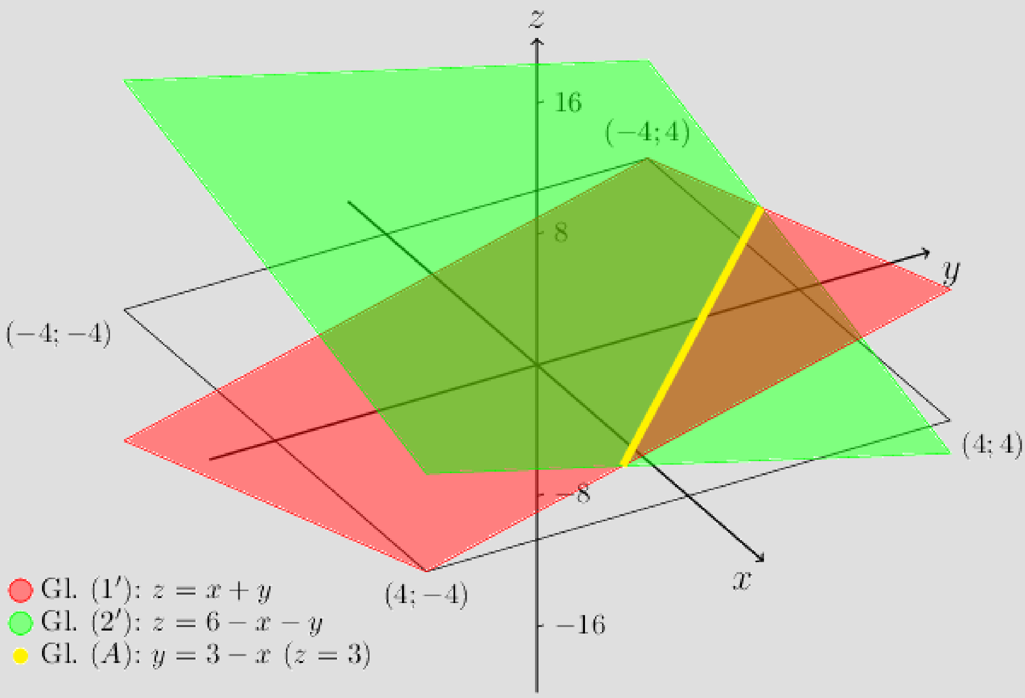
Jede der drei linearen Gleichungen lässt sich problemlos nach z umstellen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1')}: & z & = & x + y \ , \\ \text{Gleichung (2')}: & z & = & 6 - x - y \ , \\ \text{Gleichung (3')}: & z & = & 4 - 2x + y \ . \end{array}$$

Setzt man jetzt die rechten Seiten der Gleichungen $(1')$ und $(2')$ **gleich**, so bedeutet dies - anschaulich gesprochen -, dass man die **Schnittgerade** der beiden durch diese Gleichungen beschriebenen Ebenen bestimmt:

$$x + y = 6 - x - y \Leftrightarrow 2x + 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3 - x \ : \ \text{Gleichung } (A) \, .$$

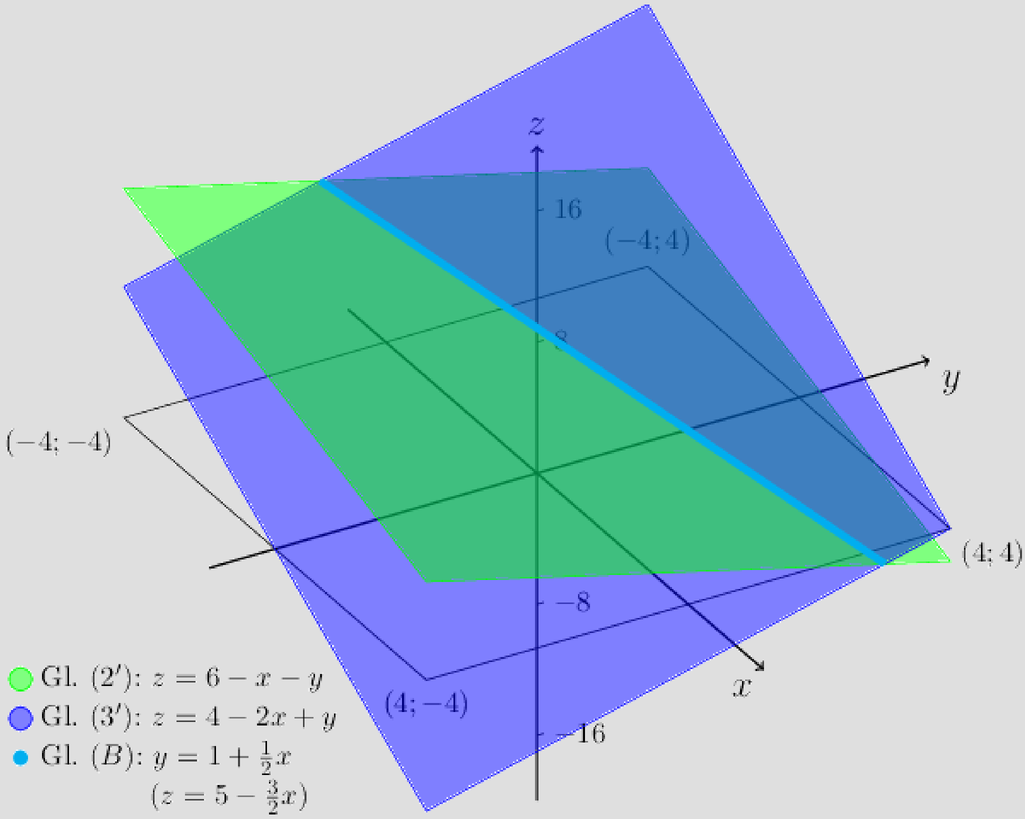
Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung $(1')$ oder $(2')$ erhält man die zugehörigen z-Koordinaten der Schnittgeraden; hier ergibt sich $z = 3$. Die folgende perspektivische Skizze zeigt diese Schnittgerade, Gleichung (A), als den Schnitt der durch die Gleichungen $(1')$ und $(2')$ beschriebenen, nicht parallelen Ebenen:



Die vollkommen analoge Aussage gilt, falls man die rechten Seiten von Gleichung $(2')$ und $(3')$ **gleichsetzt**; man erhält dann die **Schnittgerade** der Ebenen (2) und (3):

$$6 - x - y = 4 - 2x + y \Leftrightarrow x - 2y = -2 \Leftrightarrow y = 1 + \tfrac{1}{2}x \ : \ \text{Gleichung } (B) \, .$$

Deren z-Koordinaten ergeben sich entsprechend durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung $(2')$ oder $(3')$ zu $z = 5 - \frac{3}{2}x$. Eine diesem Sachverhalt entsprechende perspektivische Skizze aus derselben Blickrichtung zeigt diese Schnittgerade, Gleichung (B), als den Schnitt der durch die Gleichungen $(2')$ und $(3')$ beschriebenen, nicht parallelen Ebenen:



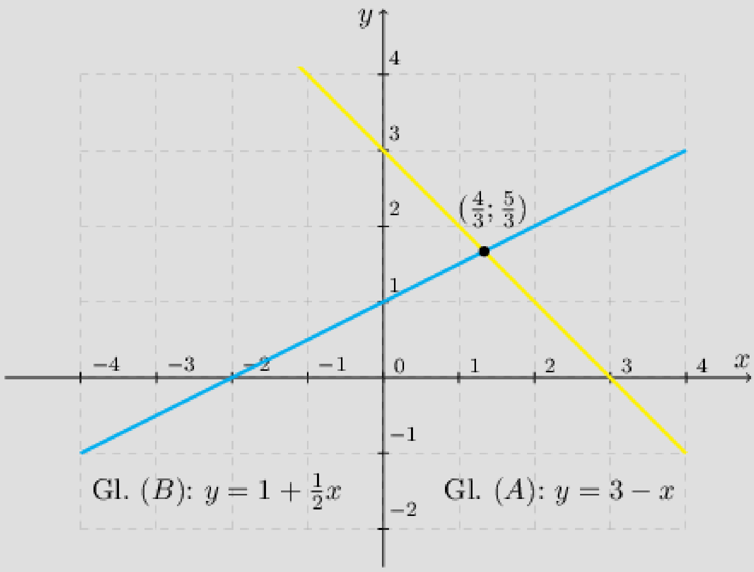
Da im Ausgangssystem alle drei Gleichungen simultan gelten sollen, müssen auch die zwei gerade hergeleiteten Geradengleichungen gleichzeitig erfüllt sein. Im bildlichen Kontext suchen man daher den Schnittpunkt dieser beiden Geraden; diesen Schnittpunkt bekommt man, indem man die rechten Seiten der Gleichungen (A) und (B) **gleichsetzt**:

$$3 - x = 1 + \tfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{4}{3}\ .$$

Den Lösungswert für y kann man durch Einsetzen des Ergebnisses für x z.B. in Gleichung (A) berechnen:

$$y = 3 - \tfrac{4}{3} \Leftrightarrow y = \tfrac{5}{3}\ .$$

Die folgende Skizze zeigt die Schnittgeraden, Gleichungen (A) und (B), in der x-y-Ebene, Projektion - Ansicht von oben -, und deren Schnittpunkt:



Der Wert für z schließlich resultiert, indem man die Werte für x und y z.B. in Gleichung $(1')$ einsetzt:

$$z = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow z = \frac{9}{3} \Leftrightarrow z = 3\,.$$

Das gegebene Lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar; für die Lösungsmenge erhält man $L = \{(x = \frac{4}{3}; y = \frac{5}{3}; z = 3)\}$.

Um die Frage der Lösbarkeit eines Systems aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten allgemeiner und etwas genauer unter die Lupe zu nehmen, soll noch für einen Moment in der bildhaften Welt verweilt werden:

- Liegen (mindestens) **zwei** der drei **Ebenen parallel** zueinander (ohne deckungsgleich zu sein), so besitzt das System **keine Lösung**: Parallele (nicht deckungsgleiche) Ebenen schneiden sich nicht; daher ist es unmöglich, die zu den Ebenen gehörenden Gleichungen simultan zu erfüllen.
- Sind **zwei** der drei **Ebenen deckungsgleich**, so wird die Schnittmenge mit der dritten (nicht parallelen und nicht deckungsgleichen) Ebene durch eine **Schnittgerade** gebildet; alle Punkte dieser Schnittgeraden repräsentieren Lösungen des Systems, die **Lösungsmenge** ist daher **unendlich mächtig**.
- Sind alle **drei Ebenen deckungsgleich**, so sind alle Punkte der (deckungsgleichen) Ebene(n) Lösungen des Systems; wiederum ist die **Lösungsmenge unendlich mächtig**.
- Eine eindeutige Lösung kann höchstens in diesem letzten Fall eintreten: Die drei (nicht parallelen und nicht deckungsgleichen) Ebenen führen auf **drei Schnittgeraden** (Ebene (1) mit Ebene (2), Ebene (2) mit Ebene (3), Ebene (1) mit Ebene (3)):
  - Liegen **zwei Schnittgeraden parallel** zueinander, so besitzt das System **keine Lösung**.
  - Sind **zwei Schnittgeraden deckungsgleich**, so weist das System **unendlich viele Lösungen** auf.

– **Schneiden sich die Schnittgeraden in einem Punkt**, so ist die **Lösung eindeutig** und die **Lösungsmenge** besteht **aus genau einem Element**.

Man sieht, dass trotz der anschaulichen Interpretation das genaue Auseinanderdividieren der einzelnen Fälle doch einigermaßen kompliziert ist. Um so wichtiger wird es sein, gerade wenn die Systeme noch größer werden und die Anschauung schwieriger bzw. unmöglich wird, rechnerische Methoden zur Hand zu haben, um die Lösbarkeit Linearer Gleichungssysteme zu untersuchen und deren Lösungsmengen zu bestimmen. Das **Additionsverfahren**, dessen Diskussion weiter unten erneut aufgegriffen wird, wird ein solch geeignetes Verfahren sein.

Übrigens ist es im obigen Beispiel 1.3.3 auf Seite 17 nicht nötig, die dritte Schnittgerade zu bestimmen und zu überprüfen, dass diese dritte Schnittgerade die beiden anderen Geraden in deren Schnittpunkt schneidet: Dies ist automatisch gewährleistet, da durch das Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung $(1')$ mit derjenigen von Gleichung $(2')$ (erste Schnittgerade / Gleichung (A)) und durch das Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung $(2')$ mit derjenigen von Gleichung $(3')$ (zweite Schnittgerade / Gleichung (B)) die Gültigkeit der Gleichung für die dritte Schnittgerade (rechte Seite von $(1')$ = rechte Seite von $(3')$),

$$x + y = 4 - 2x + y \Leftrightarrow 3x = 4 \ : \ \text{Gleichung } (C) \ ,$$

garantiert ist.

Im Beispiel wurde als rechnerisches Verfahren die Gleichsetzmethode verwendet, da sie sehr eng mit der anschaulich geometrischen Interpretation zusammenhängt. Durch das **Gleichsetzen** expliziter Ebenen- bzw. Geradengleichungen werden ja genau die Schnittgeraden bzw. -punkte bestimmt.

Info 1.3.4

Bei der Bei der **Gleichsetzmethode** werden die drei linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - umgestellt. Die resultierenden neuen Gleichungen werden dann im zweiten Schritt paarweise **gleichgesetzt**, wobei es genügt, dies für zwei Paare durchzuführen. Insgesamt entsteht ein **Lineares Gleichungssystem**, das nur noch aus **zwei** Gleichungen in (den verbliebenen) **zwei** Unbekannten aufgebaut ist und das anschließend mit den Methoden des Abschnitts 1.2 auf Seite 5 bearbeitet werden kann.

Aufgabe 1.3.1
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x + z &= 2 \, , \\ -x + y + 2z &= 1 \, , \\ y + z &= 11 \, . \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Gleichsetzmethode und gehen Sie geschickt vor!

Lösung:
Die erste Gleichung hängt von vornherein nicht von der Unbekannten y ab; daher bietet es sich an, aus der zweiten und dritten Gleichung zunächst ebenfalls y zu eliminieren. Man löst dazu die zweite und die dritte Gleichung jeweils nach y auf,

$$y = 1 + x - 2z \ \text{ und } \ y = 11 - z \ ,$$

und setzt anschließend die rechten Seiten gleich:

$$1 + x - 2z = 11 - z \Leftrightarrow -x + z = -10 \; .$$

Als Nächstes muss man diese letzte Gleichung und die erste Gleichung des ursprünglichen Systems weiterverarbeiten. Beim Betrachten dieser beiden Gleichungen fällt auf, dass die linken Seiten (die Kombination $-x + z$ der Unbekannten x und z) identisch sind, wohingegen die rechten Seiten (die Zahlenwerte 2 und -10) offensichtlich nicht übereinstimmen. Daher stößt man auf einen Widerspruch und das gegebene Lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung, $L = \emptyset$.
Andere, ebenso geschickte, Lösungswege sind möglich.

1.3.3 Die Einsetzmethode

Die **Einsetzmethode** wurde bereits im Rahmen von Systemen, bestehend aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten, behandelt, siehe 1.2.2 auf Seite 9. Auch im vorliegenden Fall eines Systems vom Typ 1.3.2 auf Seite 16 ändert sich an der Vorgehensweise nichts Prinzipielles:

Beispiel 1.3.5

Das einleitende Beispiel 1.3.1 auf Seite 16 dieses Abschnitts wird wieder aufgegriffen; das Lineare Gleichungssystem im Falle des Rätsels um die drei in Versuchung geführten Kinder lautet:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x - 2y - 2z & = & -30 \; , \\ \text{Gleichung (2)}: & -3x + y - 3z & = & -30 \; , \\ \text{Gleichung (3)}: & -5x - 5y + z & = & -30 \; . \end{array}$$

Man kann mit der Lösung z.B. so beginnen, dass man Gleichung (1) nach x freistellt,

$$x = 2y + 2z - 30 \;:\; \text{Gleichung } (1') \; .$$

Setzt man diese Gleichung in die Gleichungen (2) und (3) **ein**, so wird aus den letztgenannten Gleichungen die Unbekannte x eliminiert:

$$-3(2y + 2z - 30) + y - 3z = -30 \Leftrightarrow -5y - 9z = -120 \;:\; \text{Gleichung } (2') \; ,$$

$$-5(2y + 2z - 30) - 5y + z = -30 \Leftrightarrow -15y - 9z = -180 \;:\; \text{Gleichung } (3') \; .$$

Man erhält also in diesem Zwischenschritt ein System aus **zwei** linearen Gleichungen in den **zwei** Unbekannten y und z, das mit den Methoden des vorigen Abschnitts 1.2 auf Seite 5 weiterbehandelt wird.
So kann man z.B. Gleichung $(2')$ nach y auflösen,

$$y = 24 - \tfrac{9}{5}z \; ,$$

und diesen Ausdruck in Gleichung $(3')$ **einsetzen**:

$$-15(24 - \tfrac{9}{5}z) - 9z = -180 \Leftrightarrow 360 - 27z + 9z = 180 \Leftrightarrow 18z = 180 \Leftrightarrow z = 10 \; .$$

Damit ergibt sich y mit Gleichung $(2')$ zu

$$y = 24 - \tfrac{9}{5} \cdot 10 = 24 - 9 \cdot 2 = 6$$

und schließlich x (mit Hilfe von beispielsweise Gleichung $(1')$):

$$x = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 - 30 = 12 + 20 - 30 = 2\ .$$

Das Lineare Gleichungssystem besitzt daher eine eindeutige Lösung; die Lösungsmenge L enthält genau ein Element, $L = \{(x = 2; y = 6; z = 10)\}$. Damit hatte das erste Kind vor dem Portemonnaie-Fund 2, das zweite Kind 6 und das dritte Kind 10 Euro.

Vielleicht fragt sich der eine oder andere im Zusammenhang mir dem voranstehenden Beispiel, ob es in Anbetracht der identischen rechten Seiten - alle gleich -30 - nicht praktischer wäre, einfach die linken Seiten paarweise gleichzusetzen und mit den resultierenden Gleichungen weiterzuarbeiten.

Ein solches Vorgehen ist allerdings nicht zielführend und - wenn man nicht genau aufpasst, was man tut - unter Umständen sogar falsch. Jedenfalls würde es keine Reduktion in der Anzahl der Unbekannten nach sich ziehen. Und das ist ja gerade die Intention, die sowohl hinter der Einsetz- als auch hinter der Gleichsetzmethode steckt: In beiden Verfahren (und auch in der Additionsmethode) geht es darum, in einem ersten und zweiten Schritt eine der Unbekannten zu eliminieren, sodass nur noch ein System aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten (und damit ein einfacheres Problem) verbleibt.

Übrigens, wie man dann dieses reduzierte Problem löst, kann unabhängig von der Art und Weise, wie man begonnen hat, gewählt werden. Mit anderen Worten, es ist durchaus zulässig und - vom rechentechnischen Standpunkt aus gesehen - eventuell sogar clever, beim Lösen eines Linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen in drei Unbekannten mit einer Methode, z.B. der Einsetzmethode, zu beginnen, um die Problemstellung auf ein System aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten sozusagen „herunterzubrechen“, und dieses einfachere System dann mit einer anderen Methode, z.B. der Gleichsetzmethode, weiterzubehandeln. In diesem Sinne können die Verfahren also gemischt werden.

Info 1.3.6

Bei der Einsetzmethode wird eine der drei linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt; dieses Ergebnis wird im zweiten Schritt in die beiden anderen linearen Gleichungen **eingesetzt**. Es entsteht ein **Lineares Gleichungssystem**, das nur noch aus **zwei** Gleichungen in (den verbliebenen) **zwei** Unbekannten aufgebaut ist und das anschließend mit den Methoden des Abschnitts 1.2 auf Seite 5 bearbeitet werden kann.

1.3.4 Die Additionsmethode

Der Grundgedanke der Additionsmethode, der auch schon früher andiskutiert wurde (siehe 1.2.3 auf Seite 12), besteht darin, Gleichungen des Systems so zu **addieren**, dass in der resultierenden Gleichung nur noch eine reduzierte Anzahl an Unbekannten auftritt. Dazu ist es meist erforderlich, vor der **Addition** eine der Gleichungen mit einem geschickt gewählten Faktor zu multiplizieren.

Die Additionsmethode soll für Systeme aus drei Gleichungen in drei Unbekannten gleich in einer Form vorgestellt werden, die sich leicht auf größere Systeme übertragen lässt. Dazu bedient man sich zur Illustration der Vorgehensweise noch einmal des einführenden Beispiels 1.3.1 auf Seite 16, also des Beispiels der möglicherweise diebischen Kinder:

Beispiel 1.3.7

Das zu einer erneuten Lösung auffordernde System linearer Gleichungen lautet also:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y-2z &=& -30\,, \\ \text{Gleichung (2)}: & -3x+y-3z &=& -30\,, \\ \text{Gleichung (3)}: & -5x-5y+z &=& -30\,. \end{array}$$

Gleichung (1) wird im Folgenden unverändert beibehalten. Gleichung (2) jedoch soll durch eine neue Gleichung ersetzt werden, die durch **Addition** von Gleichung (2) mit der mit dem Faktor 3 durchmultiplizierten Gleichung (1) - kurz notiert als $(2)+3\cdot(1)$ - gewonnen wird:

$$(-3x+y-3z)+3\cdot(x-2y-2z) = -30+3\cdot(-30) \Leftrightarrow -5y-9z = -120 \ : \ \text{Gleichung } (2')\,.$$

Ähnlich geht man mit Gleichung (3) vor: Sie wird durch $(3)+5\cdot(1)$, also durch die **Summe** aus Gleichung (3) und der mit dem Faktor 5 durchmultiplizierten Gleichung (1) ersetzt:

$$(-5x-5y+z)+5\cdot(x-2y-2z) = -30+5\cdot(-30) \Leftrightarrow -15y-9z = -180 \ : \ \text{Gleichung } (3')\,.$$

Das System sieht jetzt folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y-2z &=& -30\,, \\ \text{Gleichung } (2'): & -5y-9z &=& -120\,, \\ \text{Gleichung } (3'): & -15y-9z &=& -180\,. \end{array}$$

Aus den Gleichungen $(2')$ und $(3')$ ist die Abhängigkeit von der Unbekannten x verschwunden - das war das Ziel und der Grund für die Faktoren 3 bzw. 5 bei den obigen Summationen.

Man könnte nun das Untersystem, bestehend aus den zwei Gleichungen $(2')$ und $(3')$ in den zwei Unbekannten y und z mit einer anderen Methode, z.B. der Einsetzmethode, weiterbehandeln. Doch es soll lieber vollständig innerhalb der Additionsmethode gearbeitet werden: Dazu nimmt man im Folgenden Gleichung $(2')$ - ebenso wie Gleichung (1) - von Änderungen aus; Gleichung $(3')$ soll aber nochmals ersetzt werden und zwar durch die Summe $(3')+(-3)\cdot(2')$:

$$(-15y-9z)+(-3)\cdot(-5y-9z) = -180+(-3)\cdot(-120) \Leftrightarrow 18z = 180 \ : \ \text{Gleichung } (3'')\,.$$

Das System hat ein weiteres Mal sein Aussehen gewandelt,

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y-2z &=& -30\,, \\ \text{Gleichung } (2'): & -5y-9z &=& -120\,, \\ \text{Gleichung } (3''): & 18z &=& 180\,, \end{array}$$

und besitzt nun - zumindest was die linken Seiten anbelangt - eine Art **Dreiecksform**.

Die Bestimmung der Unbekannten ist nun äußerst einfach: Die unterste Gleichung (Gleichung $(3'')$) hängt nur noch von einer einzigen Unbekannten, nämlich z, ab und kann daher sofort aufgelöst werden, $z=10$.
Mit diesem Resultat für z geht man in die darüber stehende Gleichung (Gleichung $(2')$), die dann

unmittelbar das Ergebnis für die nächste Unbekannte, hier y, liefert: $-5y - 9 \cdot 10 = -120 \Leftrightarrow -5y = -30 \Leftrightarrow y = 6$.
Schließlich ergeben y und z in die oberste Gleichung (Gleichung (1)) eingesetzt sofort die Lösung für die verbleibende Unbekannte, im vorliegenden Beispiel x: $x - 2 \cdot 6 - 2 \cdot 10 = -30 \Leftrightarrow x = 2$.
Also ist die Lösungsmenge gegeben durch $L = \{(x = 2; y = 6; z = 10)\}$.

Die aufmerksame Leserin, der aufmerksame Leser mag sich beim Studium des obigen Beispiels unter Umständen die Frage stellen, ob - und wenn ja, warum - es zulässig ist, in einem System eine Gleichung durch eine andere zu ersetzen.Im Beispiel geschieht dies an drei Punkten, etwa wenn an die Stelle der Gleichung (2) die Kombination Gleichung (2) plus 3 mal Gleichung (1), also Gleichung $(2')$, tritt.

Wenn man nach der Lösung eines Gleichungssystems forscht, verlangt man die **gleichzeitige Gültigkeit** aller Gleichungen des Systems. Damit insistiert man - um im Beispiel 1.3.7 auf der vorherigen Seite zu sprechen - mit der Forderung, dass Gleichung (1) **und** Gleichung (2) gelten sollen, klarerweise auch auf der Gültigkeit von

$$\text{Gleichung } (2) + 3 \cdot \text{ Gleichung } (1) \Leftrightarrow \text{ Gleichung } (2')\ .$$

Gelten nun stattdessen simultan Gleichung (1) **und** Gleichung $(2')$, dann folgt umgekehrt auch die Gültigkeit von Gleichung (2) mit

$$\text{Gleichung } (2') + (-1) \cdot \text{ Gleichung } (1) \Leftrightarrow 3 \cdot \text{ Gleichung } (2) \Leftrightarrow \text{ Gleichung } (2)\ .$$

Also ist es zulässig, im System Gleichung (2) durch Gleichung $(2')$ zu ersetzen.

Zugleich erkennt man hier einen weiteren wichtigen Punkt: Würde man die **eine** Gleichung $(2')$ an die Stelle der **beiden** Gleichungen - Gleichung (1) und Gleichung (2) - treten lassen, so würde man an Information einbüßen und sogar einen Fehler begehen. (Die Forderung von **nur** $(2')$ statt (1) **und** (2) ist eine wesentlich schwächere.) Dies ist der Grund dafür, warum man in die „neuen“ Systeme einige Gleichungen ungeändert übernimmt: Gleichung (1) **und** Gleichung (2) sind in den jeweiligen Systemen äquivalent zu Gleichung (1) und Gleichung $(2')$. Analoges trifft natürlich auch auf die anderen Ersetzungen in obigem Beispiel zu - und allgemeiner bei derartigen Umformungen Linearer Gleichungssysteme innerhalb der Additionsmethode.

Info 1.3.8

Bei der **Additionsmethode** werden Paare linearer Gleichungen des Systems - gegebenenfalls nach der Multiplikation (mindestens) einer der beiden Gleichungen mit einem geschickt gewählten Faktor (bzw. mit geschickt gewählten Faktoren) - mit dem Ziel addiert, dass in den resultierenden Gleichungen (zumindest) eine Unbekannte herausfällt. Dabei ist darauf zu achten, dass bei der fortschreitenden Lösungsfindung keine Information verloren geht, sprich, dass die Anzahl der (informationsrelevanten) Gleichungen stets erhalten bleibt. Am geschicktesten bringt man in diesem Zuge das Gleichungssystem auf eine **Dreiecksform**. Dann ist das anschließende Auffinden der Lösung besonders einfach.

1.3.5 Aufgaben

Aufgabe 1.3.2
Geben Sie die Lösungsmenge für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 1\ , \\ 11x + 8z &= 2\ , \\ -4x + y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

an. Verwenden Sie zum Lösen

a. die Einsetzmethode,

b. die Additionsmethode.

Lösung:

a. Man stellt z.B. die erste Gleichung ($2x - y + 5z = 1$) nach y frei, $y = 2x + 5z - 1$, und setzt dieses Ergebnis in die dritte Gleichung ($-4x + y - 3z = -1$) ein:

$$-4x + (2x + 5z - 1) - 3z = -1 \Leftrightarrow -2x + 2z = 0 \Leftrightarrow z = x\ .$$

Das letzte Ergebnis, das schon nach der Unbekannten z aufgelöst wurde, setzt man in die zweite Gleichung ein ($11x + 8z = 2$), die von vornherein unabhängig von y ist:

$$11x + 8x = 2 \Leftrightarrow 19x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{19}\ .$$

Damit gilt auch

$$z = \tfrac{2}{19}\ ,$$

und für y erhält man - gemäß der Gleichung aus der ersten Umformung -:

$$y = 2 \cdot \tfrac{2}{19} + 5 \cdot \tfrac{2}{19} - 1 = \tfrac{4+10-19}{19} = \tfrac{-5}{19}\ .$$

Also ist das Lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar mit $L = \{(x = \frac{2}{19}; y = -\frac{5}{19}; z = \frac{2}{19})\}$. Alternative Lösungswege sind ebenso gut möglich.

b. Addition der ersten und der dritten Gleichung eliminiert die Unbekannte y:

$$(2x - y + 5z) + (-4x + y - 3z) = 1 + (-1) \Leftrightarrow -2x + 2z = 0\ .$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit (-4), so entsteht

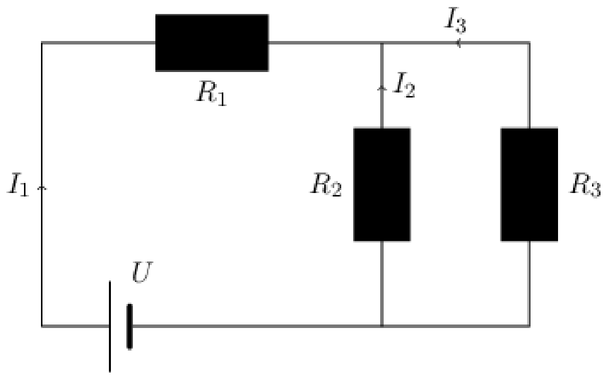
$$8x - 8z = 0\ ,$$

und die anschließende Addition der zweiten Gleichung ($11x + 8z = 2$) sorgt dafür, dass die Abhängigkeit von z herausfällt:

$$(8x - 8z) + (11x + 8z) = 0 + 2 \Leftrightarrow 19x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{19}\ .$$

Wie im ersten Aufgabenteil können in der Folge z und y bestimmt werden; natürlich bekommt man dasselbe Ergebnis $L = \{(x = \frac{2}{19}; y = -\frac{5}{19}; z = \frac{2}{19})\}$.
Alternative Lösungswege sind ebenso gut möglich.

Aufgabe 1.3.3
Die folgende einfache Schaltung soll betrachtet werden:



Sie ist aus einer Spannungsquelle, die eine Spannung $U = 5{,}5\,\mathrm{V}$ liefern soll, sowie aus drei Widerständen $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ und $R_3 = 3\,\Omega$ aufgebaut. Gefragt ist nach den in den einzelnen Zweigen fließenden Strömen I_1, I_2 und I_3.
Hinweise: Die Zusammenhänge zwischen den interessierenden Größen, sprich den Spannungen, den Widerständen und den Stromstärken, werden für solche Schaltungen von den sogenannten **Kirchhoffschen Regeln** geliefert, die im vorliegenden Beispiel drei Gleichungen bereitstellen:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 &&: \text{ Gleichung (1) ,} \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U &&: \text{ Gleichung (2) ,} \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 &&: \text{ Gleichung (3) .} \end{aligned}$$

Außerdem wird die Beziehung zwischen den physikalischen Einheiten Volt (V) (für die Spannung), Ampère (A) (für die Stromstärke) und Ohm (Ω) (für den Widerstand) benötigt: $1\,\Omega = (1\,\mathrm{V})/(1\,\mathrm{A})$.

<u>Lösung:</u>
Man löst z.B. die erste Gleichung nach I_1 auf,

$$I_1 = I_2 + I_3 \ ,$$

und setzt das Ergebnis in die zweite Gleichung ein:

$$R_1(I_2 + I_3) + R_2 I_2 = U \Leftrightarrow (R_1 + R_2)I_2 + R_1 I_3 = U \ : \ \text{Gleichung } (2') \ .$$

Die letzte Gleichung und die dritte Gleichung im ursprünglichen System hängen nur noch von den Unbekannten I_2 und I_3 ab. Sie bilden ein System aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten, das man jetzt weiter löst: Dazu stellt man z.B. die dritte Gleichung des ursprünglichen Systems nach I_3 frei,

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3} I_2 \ : \ \text{Gleichung } (3') \ ,$$

und setzt das Resultat in Gleichung ($2'$) ein:

$$\begin{aligned} & (R_1+R_2)I_2 + R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3} I_2 = U \\ \Leftrightarrow \quad & \left(R_1 + R_2 + R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = U \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{R_1R_3}{R_3} + \frac{R_2R_3}{R_3} + \frac{R_1R_2}{R_3}\right) I_2 = U \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} I_2 = U \\ \Leftrightarrow \quad & I_2 = \frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} U\ . \end{aligned}$$

Damit folgt für I_3 wegen Gleichung ($3'$)

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} U = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} U$$

und für I_1 schließlich:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 + I_3 \quad &= \quad \frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot U + \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot U \\ &= \quad \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot U\ . \end{aligned}$$

Nun kann man die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Werte für die Widerstände ($R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ und $R_3 = 3\,\Omega$) und die Spannung ($U = 5{,}5\,\mathrm{V}$) einsetzen; für I_1 erhält man unter Verwendung von $1\,\mathrm{V} = 1\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{A}$:

$$I_1 = \frac{(2+3)\,\Omega}{(1\cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)\,\Omega^2} \cdot 5{,}5 \cdot \Omega \cdot \mathrm{A} = 2{,}5\,\mathrm{A}\ .$$

Analog findet man für I_2 und I_3: $I_2 = 1{,}5\,\mathrm{A}$ und $I_3 = 1\,\mathrm{A}$.
Alternative Lösungswege sind ebenso gut möglich.

Aufgabe 1.3.4
Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Additionsmethode:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 5\ , \\ 3x + y - 2z &= -1\ , \\ -x - 2y + 4z &= 7\ . \end{aligned}$$

Lösung:
Da die erste Gleichung ($x + 2z = 5$) von vornherein nicht von der Unbekannten y abhängt, bietet es sich an, aus der zweiten und dritten Gleichung y ebenfalls zu eliminieren. Dazu multipliziert man die zweite Gleichung ($3x + y - 2z = -1$) mit 2 und addiert die resultierende Gleichung zur dritten Gleichung ($-x - 2y + 4z = 7$) hinzu:

$$\begin{aligned} & (-x - 2y + 4z) + 2 \cdot (3x + y - 2z) = 7 + 2 \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow \quad & -x - 2y + 4z + 6x + 2y - 4z = 7 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 5x = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1\ . \end{aligned}$$

Zufälligerweise fällt gleichzeitig auch die Unbekannte z heraus. Mit dem Ergebnis für x liefert die erste Gleichung

$$1 + 2z = 5 \Leftrightarrow 2z = 4 \Leftrightarrow z = 2 \ .$$

Den Wert für y erhält man sodann, indem man z.B. die zweite Gleichung verwendet:

$$3 \cdot 1 + y - 2 \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 3 + y - 4 = -1 \Leftrightarrow y = 0 \ .$$

Also lautet die Lösungsmenge $L = \{(x = 1; y = 0; z = 2)\}$.

1.4 Allgemeinere Systeme

1.4.1 Einführung

Zu Systemen linearer Gleichungen könnte man noch eine ganze Menge mehr sagen. Um aber die Fülle an Informationen nicht allzu übermächtig werden zu lassen, beschränkt man sich zum Abschluss dieses Moduls auf zwei weitere, kleinere Punkte.

Zum einen können Gleichungssysteme sogenannte freie Parameter enthalten, das sind variable Größen - oder mit anderen Worten eine Art Stellschrauben -, die das Verhalten der Systeme und insbesondere der Lösungsmengen unter Umständen stark beeinflussen. Manchmal ist es von Vorteil, nicht alle Koeffizienten und nicht alle rechten Seiten der Gleichungen als feste, konkrete Zahlenwerte vorzugeben, sondern sie variabel zu lassen, um zu studieren, was in verschiedenen Situationen passieren kann; manchmal kennt man auch nicht alle Koeffizienten oder rechten Seiten aufgrund der Aufgaben- oder Problemstellung.

Zum anderen ist es möglich, dass die Anzahl der linearen Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten in einem Gleichungssystem unterschiedlich groß ist.

1.4.2 Systeme mit freiem Parameter

Am Anfang steht ein Beispiel, das zugegebenermaßen sehr einfach ist, aber dennoch auf einen, wenn nicht **den**, entscheidenden Punkt im Zusammenhang mit freien Parametern in Systemen linearer Gleichungen hinführen wird:

Beispiel 1.4.1

Es soll nach der Lösungsmenge für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x - 2y & = & 3\,, \\ \text{Gleichung (2)}: & -2x + 4y & = & \alpha \end{array}$$

in Abhängigkeit von dem Parameter α gesucht werden.

Dazu multipliziert man Gleichung (1) mit dem Faktor 2 durch und addiert Gleichung (2):

$$2 \cdot (x - 2y) + (-2x + 4y) = 2 \cdot 3 + \alpha \Leftrightarrow 2x - 4y - 2x + 4y = 6 + \alpha \Leftrightarrow 0 = 6 + \alpha\,.$$

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Fall A: $\alpha \neq -6$: Ist der vorgegebene freie Parameter α ungleich -6, so stößt man auf einen Widerspruch. In diesem Fall besitzt das Lineare Gleichungssystem **keine Lösung**, $L = \emptyset$.

Fall B: $\alpha = -6$: Ist der vorgegebene freie Parameter α gleich -6, so ist die Gleichung identisch erfüllt ($0 = 0$). In der Tat sind in diesem Fall die beiden Ausgangsgleichungen gerade Vielfache voneinander, sodass nur eine von ihnen tatsächlich Information trägt. Dementsprechend ist jetzt die **Lösungsmenge unendlich mächtig** und kann beispielsweise folgendermaßen angegeben werden: $L = \{(x = 3 + 2t; y = t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

Das Beispiel zeigt, dass das Aussehen der Lösungsmenge sehr stark von der Wahl des freien Parameters abhängen kann.

Ein solcher freier Parameter kann aber nicht nur auf einer der rechten Seiten des Linearen Gleichungssystems auftreten, sondern auch auf den linken Seiten, ja er kann auch mehrfach, in funktionalen Abwandlungen, sowohl links als auch rechts usw. vorkommen. Auch mehrere freie Parameter sind denkbar. Ein etwas komplizierteres Beispiel ist gegeben durch:

Beispiel 1.4.2

Im Folgenden soll die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 1 \, , \\ x + \alpha y + z &= 1 \, , \\ \alpha x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

studiert werden und zwar in Abhängigkeit von dem Wert des Parameters α.

Dazu löst man beispielsweise die erste Gleichung nach der Unbekannten x auf,

$$x = 1 - y - \alpha z \ : \ \text{Gleichung } (1') \, ,$$

und **setzt** das Ergebnis für x in die zweite und in die dritte Gleichung **ein**:

$$\begin{aligned} (1 - y - \alpha z) + \alpha y + z &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad -(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \quad &&: \ \text{Gleichung } (2') \, , \\ \alpha(1 - y - \alpha z) + y + z &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z = 1 - \alpha \quad &&: \ \text{Gleichung } (3') \, . \end{aligned}$$

Es entsteht ein System aus **zwei** linearen Gleichungen in den **zwei** Unbekannten y und z. Diesem System sieht man sofort an, dass für den Wert $\alpha = 1$ etwas Besonderes passiert. Man führt daher eine Fallunterscheidung durch:

Fall 1: $\alpha = 1$: In diesem Fall sind die beiden Gleichungen $(2')$ und $(3')$ identisch erfüllt $(0 = 0)$ und liefern keine weiteren Informationen; als einzige Beziehung zwischen den Unbekannten x, y und z verbleibt Gleichung $(1')$ bzw. Gleichung (1), die für $\alpha = 1$

$$x + y + z = 1 \ : \ \text{Gleichung } (\hat{1})$$

lautet. Daher besitzt die Lösungsmenge hier unendlich viele Elemente. Sie kann mit Hilfe **zweier freier Parameter** angegeben werden, z.B.

$$L = \{(s; t; 1 - s - t) \ : \ s, t \in \mathbb{R}\} \, .$$

Anschaulich gesprochen entspricht die Lösungsmenge gerade der durch Gleichung $(\hat{1})$ beschriebenen Ebene.

Fall 2: $\alpha \neq 1$: In diesem Fall kann man sowohl Gleichung $(2')$ als auch Gleichung $(3')$ durch $(1-\alpha)$ dividieren; man erhält unter Verwendung der 3. Binomischen Formel $((1 - \alpha^2) = (1 - \alpha)(1 + \alpha))$:

$$\begin{aligned} -y + z &= 0 \quad &&: \ \text{Gleichung } (2'') \, , \\ y + (1+\alpha)z &= 1 \quad &&: \ \text{Gleichung } (3'') \, . \end{aligned}$$

Gleichung $(2'')$ besagt, dass $y = z$ gilt; dies setzt man in Gleichung $(3'')$ ein:

$$z + (1 + \alpha)z = 1 \Leftrightarrow (2 + \alpha)z = 1 \ : \ \text{Gleichung } (\star) \, .$$

Jetzt muss man nochmals vorsichtig sein und eine weitere Fallunterscheidung durchführen, da $\alpha = -2$ und $\alpha \neq -2$ unterschiedliche Konsequenzen nach sich ziehen:

Fall 2a: $\alpha = -2$: In diesem (Unter-)Fall lautet Gleichung ($\star$): $0 = 1$. Somit tritt ein Widerspruch auf und das Lineare Gleichungssystem, von dem ausgegangen wurde, hat keine Lösung, $L = \emptyset$.

Fall 2b: $\alpha \neq -2$: In diesem (Unter-)Fall kann man die letzte Gleichung problemlos nach z auflösen,

$$z = \frac{1}{2+\alpha}\ .$$

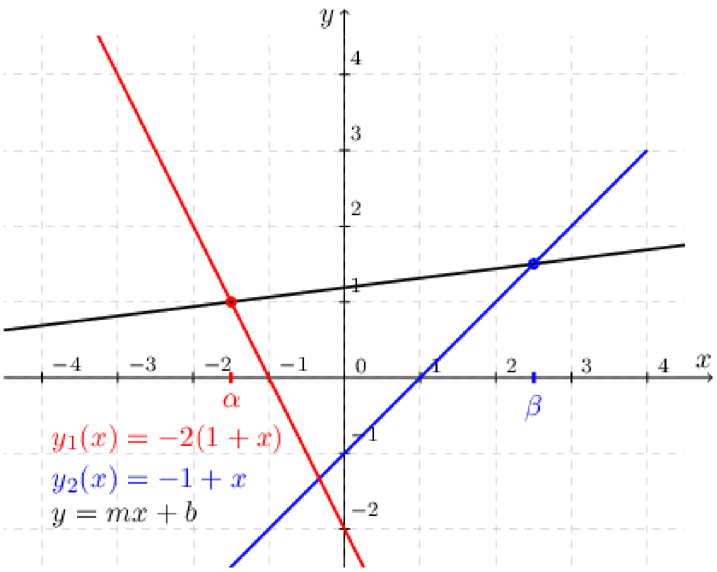
Damit liegen auch y ($y = z$) und x ($x = 1-y-\alpha z$) fest; das ursprüngliche Lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung, $L = \{(x = \frac{1}{2+\alpha}; y = \frac{1}{2+\alpha}; z = \frac{1}{2+\alpha})\}$.

Im Vorhergehenden wurde das Beispiel auch deshalb so ausführlich ausbuchstabiert, um eindringlich auf die Wichtigkeit einer sauberen und genauen Fallunterscheidung hinzuweisen. Je nachdem, ob $\alpha = 1$, $\alpha = -2$ oder $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ gilt, sieht die Lösungsmenge völlig verschieden aus! Im ersten Fall ist sie unendlich mächtig, im zweiten leer und im dritten besteht sie aus genau einem Element!

Übrigens hätte man die Besonderheit des Falles $\alpha = 1$ auch direkt an dem ursprünglichen System ablesen können: Für $\alpha = 1$ tritt dreimal dieselbe Gleichung, nämlich $x + y + z = 1$, auf; d.h. zwei der drei Gleichungen im Ausgangssystem enthalten keinerlei neue Information und sind daher überflüssig; nur die Ebenengleichung $x + y + z = 1$ stellt für $\alpha = 1$ eine Beziehung zwischen den drei Unbekannten her.

1.4.3 Aufgaben

Aufgabe 1.4.1
Es sollen der Achsenabschnitt b und die Steigung m einer Geraden mit der Darstellung $y = mx + b$ bestimmt werden, welche durch zwei Punkte festgelegt wird. Der erste Punkt an der Stelle $x_1 = \alpha$ liegt auf der Geraden, welche durch die Gleichung $y_1(x) = -2(1 + x)$ beschrieben wird; der zweite Punkt an der Stelle $x_2 = \beta$ liegt auf der Geraden, die durch $y_2(x) = x - 1$ beschrieben wird. Die Situation wird durch die nachfolgende Graphik verdeutlicht.



a. Bestimmen Sie das Gleichungssystem für die Geradenparameter b und m.

   Die erste Gleichung lautet $m\alpha + b =$ $\boxed{}$;
   die zweite Gleichung lautet $m\beta + b =$ $\boxed{}$.

b. Lösen Sie dieses Gleichungssystem für b und m. Für welche α und β ergibt sich eine eindeutige, keine bzw. unendlich viele Lösungen?

   Z.B. erhält man für den Fall $\alpha = -2$ und $\beta = 2$ die Lösung $m =$ $\boxed{}$ und $b =$ $\boxed{}$, für den Fall $\alpha = 2$ und $\beta = -2$ ergibt sich die Lösung $m =$ $\boxed{}$ und $b =$ $\boxed{}$.

   Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen, falls $\alpha =$ $\boxed{}$ und $\beta =$ $\boxed{}$ ist.
   Die zugehörigen Lösungen lassen sich parametrisieren mit $m = r$ und $b =$ $\boxed{}$, $r \in \mathbb{R}$.

c. Was bedeuten die letzten beiden Fälle, d.h. keine bzw. unendlich viele Lösungen, anschaulich?

Lösung:

a. Das LGS für m und b ergibt sich aus den Bedingungen

$$y(x_1 = \alpha) = y_1(x_1 = \alpha) \text{ und } y(x_2 = \beta) = y_2(x_2 = \beta)$$

zu

$$\begin{aligned} m\alpha + b &= -2(1+\alpha) \quad \text{Gl. (1)} ,\\ m\beta + b &= -1+\beta \quad \text{Gl. (2)} . \end{aligned}$$

b. Ersetzt man Gl. (2) durch die Differenz von Gl. (2) und Gl. (1), dann erhält man

$$\begin{aligned} m\alpha + b &= -2(1+\alpha) \quad \text{Gl. (1)} ,\\ m(\beta-\alpha) &= 1+2\alpha+\beta \quad \text{Gl. (2')} . \end{aligned}$$

Das LGS liegt damit bereits in Dreiecksform vor.

A. Für den Fall $\beta - \alpha \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \beta \neq \alpha$ kann Gl. $(2')$ durch $(\beta - \alpha)$ dividiert werden, womit man die Steigung m zu

$$m = \frac{1+2\alpha+\beta}{\beta-\alpha}$$

erhält. Dieses Ergebnis kann man z.B. in die nach b aufgelöste Gl. (1) einsetzen:

$$b = -2(1+\alpha) - m\alpha = -2(1+\alpha) - \frac{1+2\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\alpha .$$

Die so gefundenen Werte für m und b stellen eine eindeutige Lösung des betrachteten LGS dar.

Für das Beispiel $\alpha = -2, \beta = 2$ erhält man die Lösung $m = -1/4, b = 3/2$und für $\alpha = 2, \beta = -2$ das Ergebnis $m = -3/4, b = -9/2$.

B. Gilt nun $\beta - \alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta = \alpha$. Damit verschwindet die linke Seite von Gl. $(2')$. Dies macht die folgende weitere Fallunterscheidung nötig:

B(i). Gilt nun für die rechte Seite von Gl. $(2')$ $1+2\alpha+\beta \neq 0$,dann besitzt das LGS keine Lösung, $L = \emptyset$. Setzt man noch $\beta = \alpha$ ein, dann erhält man $\beta = \alpha \neq -\frac{1}{3}$.

B(ii). Verschwindet die rechte Seite von Gl. $(2')$, dann besteht das LGSfaktisch nur noch aus Gl. (1) mit $\beta = \alpha = -\frac{1}{3}$. In diesem Fall kann man $m = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, beliebig vorgeben, und b ergibt sich direkt aus Gl. (1) zu $b = \frac{1}{3}\lambda - \frac{4}{3}$. Die Lösungsmenge stellt sich damit wie folgt dar:

$$L = \left\{ \left(m = \lambda; b = \frac{1}{3}\lambda - \frac{4}{3} \right) \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

c. Die rechten Seiten der Gln. (1) und (2) enthalten die y-Werte der Ausgangsgeraden an den Stellen α und β, d.h. $y_1(\alpha)$ und $y_2(\beta)$, sodass in Gl. $(2')$ auf der rechten Seite die Differenz $y_2(\beta) - y_1(\alpha)$ steht. Im Fall 2., $\beta = \alpha$, erhält man dann $y_2(\alpha) - y_1(\alpha)$. Das LGS hat also keine Lösung (Fall 2a), wenn dann $y_2(\alpha) - y_1(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow y_2(\alpha) \neq y_1(\alpha)$ gilt, die beiden Geraden also verschiedene y-Werte besitzen. Dahingegen existieren unendlich viele Lösungen (Fall 2b), wenn sich die beiden Ausgangsgeraden an der Stelle α schneiden.

Aufgabe 1.4.2
Bestimmen Sie für das folgende parameterabhängige LGS die Lösungsmenge für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x - y + tz &= t \quad \text{Gl. (1)} ,\\ tx + (1-t)y + (1+t^2)z &= -1+t \quad \text{Gl. (2)} ,\\ (1-t)x + (-2+t)y + (-1+t-t^2)z &= t^2 \quad \text{Gl. (3)} . \end{aligned}$$

Das LGS besitzt Lösungen nur für folgende Werte des Parameters: $t \in$ [ ] .

Für den kleinsten dieser Parameterwerte kann die Lösung angegeben werden durch:
$x =$ [ ] , $y =$ [ ] , $z = r$, $r \in \mathbb{R}$.
Für den größten dieser Parameterwerte kann die Lösung angegeben werden durch:
$x =$ [ ] , $y =$ [ ] , $z = r$, $r \in \mathbb{R}$.

Lösung:
In einem ersten Schritt kann man Gl. (2) zu Gl. (3) addieren und damit Gl. (3) ersetzen:

$$\begin{array}{rcll} x - y + tz &=& t & \text{Gl. } (1)\ , \\ tx + (1-t)y + (1+t^2)z &=& -1+t & \text{Gl. } (2)\ , \\ x - y + tz &=& -1+t+t^2 & \text{Gl. } (3')\ . \end{array}$$

Da die linken Seiten der Gln. (1) und (3′) übereinstimmen, bietet es sich an, das Negative von Gl. (1) zu Gl. (3′) zu addieren und damit Gl. (3′) zu ersetzen:

$$\begin{array}{rcll} x - y + tz &=& t & \text{Gl. } (1)\ , \\ tx + (1-t)y + (1+t^2)z &=& -1+t & \text{Gl. } (2)\ , \\ 0 &=& -1+t^2 & \text{Gl. } (3'')\ . \end{array}$$

Nachfolgend erhält man für das LGS eine Dreiecksform, wenn man das $(-t)$-fache von Gl. (1) zu Gl. (2) hinzuaddiert und damit Gl. (2) ersetzt:

$$\begin{array}{rcll} x - y + tz &=& t & \text{Gl. } (1)\ , \\ y + z &=& -1+t-t^2 & \text{Gl. } (2')\ , \\ 0 &=& -1+t^2 & \text{Gl. } (3'')\ . \end{array}$$

Schließlich führt die Addition von Gl. (2′) zu Gl. (1) zur einer weiteren Vereinfachung,

$$\begin{array}{rcll} x + (1+t)z &=& -1+2t-t^2 & \text{Gl. } (1')\ , \\ y + z &=& -1+t-t^2 & \text{Gl. } (2')\ , \\ 0 &=& -1+t^2 & \text{Gl. } (3'')\ . \end{array}$$

Dieses äquivalente LGS besitzt nur dann eine Lösung, wenn auch Gl. (3″) erfüllt ist, also $0 = -1 + t^2$ $\Leftrightarrow$ $t^2 = 1$ gilt. In allen anderen Fällen ist die Lösungsmenge leer, d.h.

$$L = \emptyset \text{ für } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}\ .$$

Ist nun Gl. (3″) erfüllt, also $t = 1$ oder $t = -1$, dann kann z frei gewählt werden, d.h. $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Umstellung der Gln. (1′) und (2′) nach x bzw. y liefert im Fall $t = 1$ die Ausdrücke $x = -2z$ und $y = -1 - z$, also

$$L = \{(x = -2\lambda; y = -1 - \lambda; z = \lambda) \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ für } t = 1\ .$$

Entsprechend ergeben sich im Fall $t = -1$ die Ausdrücke $x = -4$ und $y = -3 - z$, also

$$L = \{(x = -4; y = -3 - \lambda; z = \lambda) \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ für } t = -1\ .$$

1.5 Abschlusstest

1.5.1 Abschlusstest Modul 5

Aufgabe 1.5.1
Bestimmen Sie die Lösungsmenge für folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= -5\,, \\ 3x + y &= 1\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ☐ ist leer,
☐ enthält genau eine Lösung: $x =$ ☐ , $y =$ ☐ ,
☐ enthält unendlich viele Lösungspaare $(x; y)$.

Aufgabe 1.5.2
Geben Sie diejenige zweistellige Zahl an, die bei Vertauschen von Einer- und Zehnerziffer auf eine um 18 kleinere Zahl führt und deren Quersumme 6 ist. Antwort: ☐ .

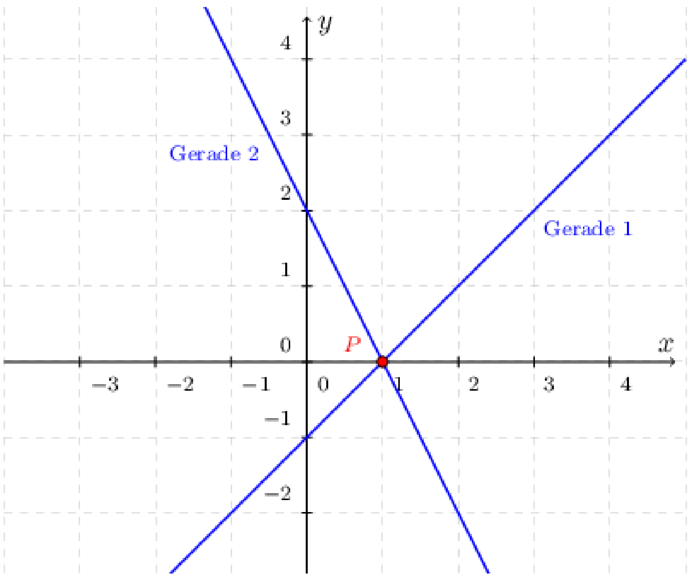
Aufgabe 1.5.3
Für welchen Wert des reellen Parameters α besitzt das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3\,, \\ 4x + 2y &= \alpha \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen?

Antwort: $\alpha =$ ☐ .

Aufgabe 1.5.4
Die Abbildung zeigt zwei Geraden im zweidimensionalen Raum.



Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf:

Gerade 1: $y =$ ☐ ,

Gerade 2: $y =$ ☐ .

Wieviele Lösungen besitzt das zugehörige Lineare Gleichungssystem?

Es besitzt
☐ keine Lösung,
☐ genau eine Lösung oder
☐ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 1.5.5
Geben Sie die Lösungsmenge für folgendes Lineare Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten, an:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 3\,, \\ -x + y + z &= 1\,, \\ 2y + 3z &= 5\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge
☐ ist leer,
☐ enthält genau eine Lösung: $x =$ ☐ , $y =$ ☐ , $z =$ ☐ ,
☐ enthält unendlich viele Lösungen $(x; y; z)$.