1 Elementare Funktionen

Modulübersicht

Dieses Modul besteht aus

- dem Abschnitt Grundlegendes zu Funktionen, Lineare Funktionen und Polynome, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Trigonometrische Funktionen, Eigenschaften und Konstruktion elementarer Funktionen,
- dem Abschlusstest.

1.1 Grundlegendes zu Funktionen

Einführung

Aus Modul **??** kennen wir bereits die reellen Zahlen als Menge sowie Intervalle als wichtige Teilmengen der reellen Zahlen.

Beispiel 1.1.1

Wir möchten die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$ außer der Zahl $0 \in \mathbb{R}$ in einer Menge zusammenfassen. Wie schreiben wir eine solche Zahlenmenge auf? Hierfür gibt es die Schreibweise

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

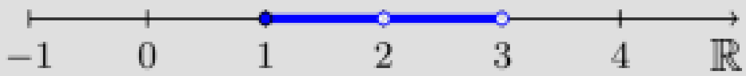
Diese wird gelesen als "$\mathbb{R}$ ohne 0". Eine weitere Schreibweise für diese Menge ist die Vereinigung zweier offener Intervalle:

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

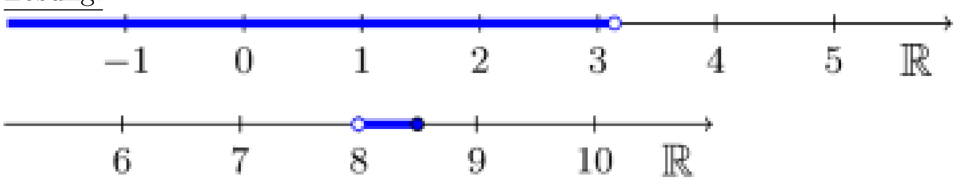
Genauso kann man aus beliebigen anderen Mengen einzelne Zahlen entfernen. So beinhaltet etwa die Menge

$$[1, 3) \setminus \{2\},$$

alle Zahlen aus dem halboffenen Intervall $[1, 3)$ außer der Zahl 2:



Aufgabe 1.1.1
Wie sehen die Intervalle $(-\infty; \pi)$ und $(8; 8,5]$ auf der Zahlengeraden aus?
Lösung:



Die Betrachtung von Mengen sowie Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen aus diesen Mengen, wie in den vorhergehenden Modulen (etwa Modul 1) geschehen, reicht nicht aus um Mathematik zu betreiben und anzuwenden. Darüber hinaus hinaus brauchen wir sogenannte Funktionen (diese werden oft auch als Abbildungen bezeichnet).

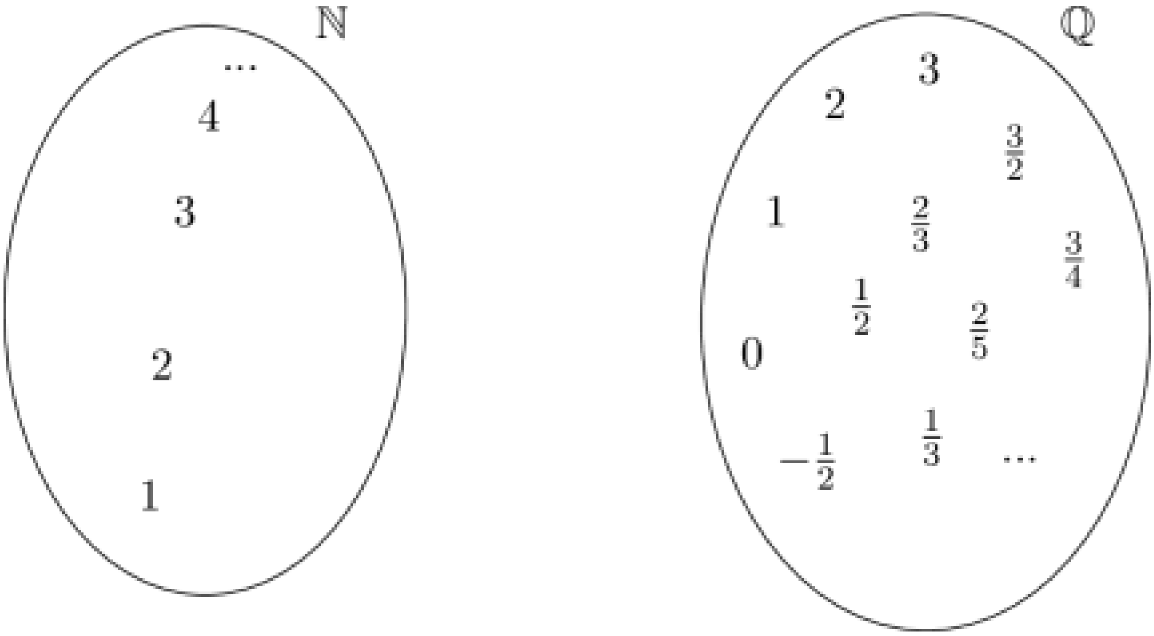
Info 1.1.2

Funktionen (bzw. **Abbildungen**) sind Zuordnungen zwischen den Elementen zweier Mengen.

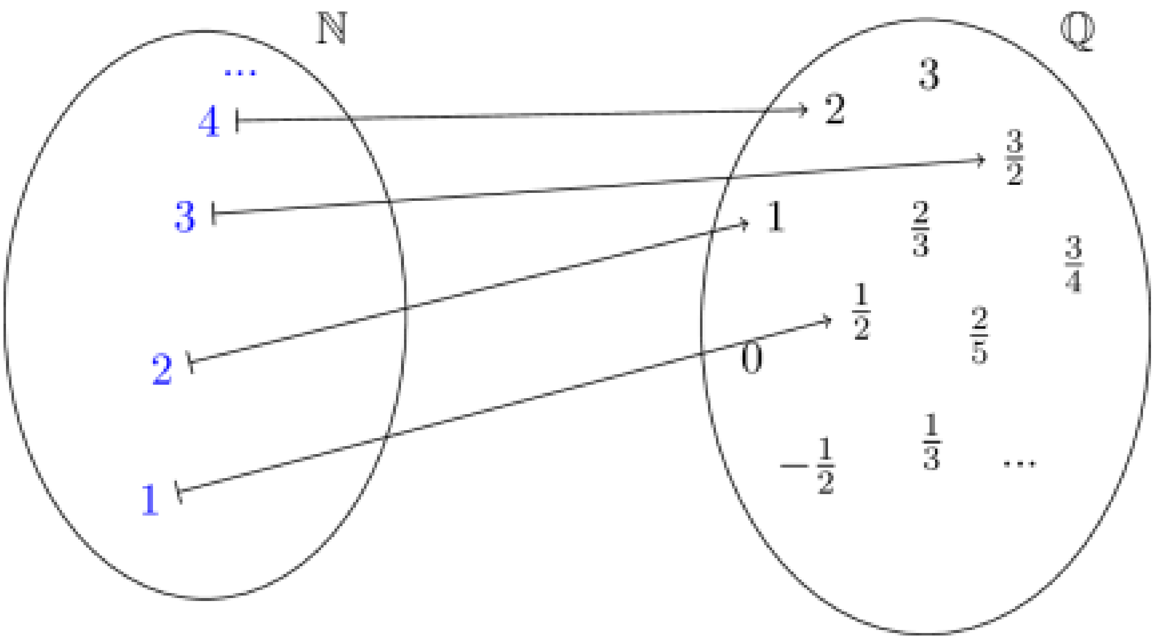
Diesem grundlegenden mathematischen Begriff der Zuordnung zwischen Mengen werden wir uns im ersten Abschnitt 1.1.1 widmen. Im Abschnitt 1.1.2 stellen wir Bezüge zu Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften her und machen uns die Nützlichkeit des mathematischen Funktionsbegriffs, als Formalisierung von abhängigen Größen, bewusst. Schließlich untersuchen wir in Abschnitt 1.1.3 die bildliche Darstellung von Funktionen mittels Graphen. Im weiteren Verlauf dieses Moduls werden wir dann die wichtigsten elementaren Funktionen zusammen mit ihren Graphen betrachten. Es ist fundamental, den Verlauf der Graphen der elementaren Funktionen zu kennen.

1.1.1 Zuordnungen zwischen Mengen

Wir beginnen mit einem ersten Beispiel einer Funktion als Zuordnung zwischen zwei Mengen. Dazu betrachten wir die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und veranschaulichen uns diese als zwei „Container" mit Zahlen.



Nun wollen wir eine Zuordnung zwischen den Elementen dieser beiden Mengen auf folgende Art durchführen. Jeder beliebigen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird die Hälfte dieser Zahl $\frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$ zugeordnet. Also der Zahl $1 \in \mathbb{N}$, die Zahl $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, der Zahl $2 \in \mathbb{N}$, die Zahl $1 \in \mathbb{Q}$ und immer so weiter. Dies können wir im Bild durch Pfeile veranschaulichen, die andeuten welche Zahlen in $\mathbb{N}$ welchen Zahlen in $\mathbb{Q}$ zugeordnet werden.



Wir benutzen für die Zuordnung der einzelnen Elemente der Mengen, die wir oben in Worten beschrieben haben, den sogenannten Zuordnungspfeil. Dies ist ein Pfeil der auf einer Seite einen senkrechten Strich als Abschluss hat: $\longmapsto$. Er bedeutet, dass die Zahl auf der Seite mit dem senkrechten Strich die Zahl auf der Seite der Pfeilspitze zugeordnet wird:

$$\mathbb{N} \ni 1 \longmapsto 0.5 \in \mathbb{Q}, \ \mathbb{N} \ni 2 \longmapsto 1 \in \mathbb{Q}, \ \text{usw.}$$

Mit diesen Zuordnungen haben wir nun eine Funktion von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruiert. In der Mathematik gibt man dieser Zuordnung nun einen Namen, d.h. man reserviert ein Symbol (oft f für Funktion), das genau diese Zuordnung beschreiben soll. Dazu muss man die Zahlenmengen notieren, aus denen und in die zugeordnet werden soll. In diesem Fall werden den Elementen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ rationale Zahlen zugeordnet. Dies schreibt man mathematisch mit einem sogenannten Abbildungspfeil $\longrightarrow$ an dessen Spitze die Menge auftaucht, die das Ziel der Zuordnung ist und an dessen Basis die Menge steht, deren Elemente zugeordnet werden. In diesem Fall also

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Man liest dies als „die Funktion f bildet von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ ab".

Weiterhin können wir uns nun die Frage stellen, ob wir die Zuordnungen dieser Funktion $1 \longmapsto \frac{1}{2}$, $2 \longmapsto 1$, usw., kürzer aufschreiben können. Dazu erinnern wir uns an den Beginn dieses Beispiels. Wir haben haben uns überlegt, jeder natürlichen Zahl n ihre Hälfte $\frac{n}{2}$ zuzuordnen. Damit können wir links und rechts des Zuordnungspfeils nun einfach diese beliebige natürliche Zahl n bzw. die sich daraus ergebende rationale Zahl $\frac{n}{2}$ hinschreiben:

$$n \longmapsto \frac{n}{2}.$$

Man liest dies als „n wird auf $\frac{n}{2}$ abgebildet". Diese Schreibweise bezeichnet man auch als Abbildungsvorschrift der Funktion. Eine weitere Schreibweise für die Abbildungsvorschrift benutzt den Namen der Funktion:

$$f(n) = \frac{n}{2}.$$

Man liest dies als „f von n ist gleich $\frac{n}{2}$". Wir können also die hier betrachtete Funktion f nun zusammengefasst folgendermaßen schreiben:

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Man liest dies nun als „die Funktion f bildet von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ ab, jedes $n \in \mathbb{N}$ wird auf $\frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$ abgebildet". Diese zusammenfassende Schreibweise werden wir im Rest diese Moduls für Funktionen weiter verwenden.

Wir betrachten einige weitere einfache Beispiele für Funktionen:

Beispiel 1.1.3

- Eine Funktion g soll jeder reellen Zahl x ihr Quadrat $x \cdot x = x^2$ zuordnen. Dies ergibt die sogenannte Standardparabel (siehe 1.2.5):

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{cases}$$

  Die Abbildungsvorschrift von g lautet damit $g(x) = x^2$. Man kann dann die Zuordnungen für konkrete Zahlen ausrechnen. Zum Beispiel $g(2) = 2^2 = 4$ oder $g(-\pi) = (-\pi)^2 = \pi^2$, usw.

- Eine Funktion φ soll jeder reellen Zahl y zwischen 0 und 1 ihren dreifachen Wert plus 1 zuordnen. Dies ist ein Beispiel für eine sogenannte linear-affine Funktion (siehe 1.2.3):

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y + 1. \end{cases}$$

  Die Abbildungsvorschrift von φ lautet damit $\varphi(y) = 3y + 1$. Somit errechnet man beispielsweise $\varphi(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2$, usw. Allerdings kann man in diesem Fall $\varphi(8)$ oder auch $\varphi(1)$ nicht angeben, da 8 und 1 keine Elemente der Menge $(0,1)$ sind.

Aufgabe 1.1.2 (i) Geben Sie eine Funktion h an, die jeder positiven reellen Zahl x ihren Kehrwert zuordnet. Berechnen Sie $h(2)$ und $h(1)$. Vervollständigen Sie die beiden Zuordnungen

$$3 \longmapsto \ ? \quad \text{und} \quad ? \ \longmapsto 2$$

von h.

(ii) Beschreiben Sie in Worten die Zuordnung, die von folgender Funktion ausgeführt wird:

$$w : \begin{cases} [4;9] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

Berechnen Sie $w(9)$ und $w(5)$. Kann man auch $w(10)$ angeben?

Lösung:

(i) Der Kehrwert von x ist $\frac{1}{x}$. Die positiven reellen Zahlen sind die Menge $(0;\infty)$. Damit kann man die Funktion h schreiben als

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array} \right.$$

Dies ist ein Beispiel für eine Funktion vom hyperbolischen Typ und wird in Abschnitt 1.3 genauer behandelt. Die Abbildungsvorschrift von h ist $h(x) = \frac{1}{x}$, womit gilt $h(2) = \frac{1}{2}$ und $h(1) = \frac{1}{1} = 1$. Außerdem berechnet man $h(3) = \frac{1}{3}$, womit $3 \longmapsto \frac{1}{3}$ gilt. Weiterhin führt die Überlegung $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ auf $\frac{1}{2} \longmapsto 2$.

(ii) Die Funktion w ordnet jeder reellen Zahl α, die größer oder gleich 4 und kleiner oder gleich 9 ist, ihre Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$ zu. Die Abbildungsvorschrift lautet $w(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, womit $w(9) = \sqrt{9} = 3$ sowie $w(5) = \sqrt{5}$ gilt. $w(10)$ kann nicht angegeben werden, da $10 \notin [4,9]$.

Die obigen Beispiele zeigen einige Grundeigenschaften von Funktionen für die wir nun spezielle Begriffe einführen wollen:

Info 1.1.4

Beim Aufschreiben einer Funktion gibt man eine Menge von Zahlen an, deren Elemente von der Funktion anderen Zahlen zugeordnet werden sollen. Diese Menge heißt **Definitionsbereich** oder Definitionsmenge der Funktion. Hat die Funktion einen Namen, etwa f, so wird der Definitionsbereich mit dem Symbol D_f bezeichnet. So ist zum Beispiel die Definitionsmenge der Funktion

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

aus Aufgabe 1.1.2, die Menge $D_h = (0;\infty)$. Auch für die Elemente des Definitionsbereichs gibt es eine spezielle Bezeichnung. In diesem Fall werden die Zahlen $x \in D_h$ mittels der Abbildungsvorschrift $h(x) = \frac{1}{x}$ zugeordnet. Hierbei wird die Variable x als die **Veränderliche** der Funktion h bezeichnet.

Aufgabe 1.1.3
Geben Sie die Definitionsbereiche der Funktionen w aus Aufgabe 1.1.2 und g aus Beispiel 1.1.3 an.
Lösung:
Es gilt

$$w : \left\{ \begin{array}{rcl} [4,9] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{\alpha} \end{array} \right.$$

und

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2, \end{array} \right.$$

womit man $D_w = [4,9]$ und $D_g = \mathbb{R}$ erhält.

Betrachten wir die Abbildungsvorschrift $h(x) = \frac{1}{x}$ der Funktion h, so sehen wir, dass eigentlich nichts dagegen spricht, jede beliebige reelle Zahl für x in $\frac{1}{x}$ einzusetzen außer der Zahl $x = 0$, da die Rechenoperation „$\frac{1}{0}$" kein Ergebnis liefert. Man kann bei der Angabe einer Definitionsmenge also unterscheiden zwischen Zahlen die ausgeschlossen sind, da man sie überhaupt nicht in die Abbildungsvorschrift einsetzen darf und solchen die ausgeschlossen sind weil die Funktion eben so definiert ist. Dies führt nun auf den Begriff des größtmöglichen Definitionsbereichs einer Funktion, die größtmögliche Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die man als Definitionsmenge einer Funktion mit bekannter Abbildungsvorschrift benutzen kann.

Beispiel 1.1.5

Der größtmögliche Definitionsbereich $D_h \subset \mathbb{R}$ der Funktion

$$h : \begin{cases} D_h & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}, \end{cases}$$

ist $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 1.1.4
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion

$$w : \begin{cases} D_w & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{\alpha} \end{cases}$$

an.
<u>Lösung:</u>
Die Wurzel liefert für alle nicht-negativen reellen Zahlen ein sinnvolles reelles Ergebnis. Somit gilt $D_w = [0, \infty)$.

Beim Aufschreiben von Funktionen ist neben dem Definitionsbereich noch eine zweite Menge notwendig, nämlich diejenige Menge, die das Ziel der durch die Funktion beschriebenen Zuordnung ist. Diese wird als Zielmenge oder Zielbereich bezeichnet. Betrachten wir nochmal die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1 \end{cases}$$

aus Beispiel 1.1.3. Deren Zielmenge sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Zielmenge der Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2} \end{cases}$$

aus dem einführenden Beispiel dieses Abschnitts sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wir erkennen hier einen wichtigen Unterschied zwischen der Definitionsmenge und der Zielmenge einer Funktion. Die Definitionsmenge enthält alle Zahlen, und nur diese, die man in die Abbildungsvorschrift der Funktion einsetzen darf und möchte. Wohingegen die Zielmenge alle Zahlen enthalten kann, die potentiell als Ergebnis der Abbildungsvorschrift auftauchen können.

In diesem Zusammenhang stellen wir uns die Frage, was denn der kleinstmögliche Zielbereich ist, den man für eine Funktion mit gegebenem Definitionsbereich und bekannter Abbildungsvorschrift benutzen kann. Unter dem kleinstmöglichen Zielbereich verstehen wir all diejenigen Zahlen, die – bei gegebener Definitionsmenge und Abbildungsvorschrift – tatsächlich als Ziele der Zuordnung auftauchen. Diese Menge bezeichnet man als **Wertebereich** oder Wertemenge und dessen Elemente als Werte der Funktion. Für eine Funktion f benutzt man das Symbol W_f für die Wertemenge. Für die Werte einer Funktion f mit Veränderlicher x schreibt man allgemein meist $f(x) \in W_f$, wie in der Abbildungsvorschrift oder führt eine weitere Variable ein, zum Beispiel $y = f(x) \in W_f$.

Beispiel 1.1.6

Betrachten wir hierzu nochmal das Beispiel

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1. \end{cases}$$

Der Wertebereich dieser Funktion ist

$$W_\varphi = (1;4).$$

Dies sieht man ein, indem man einige Werte aus $D_\varphi = (0;1)$ in die Abbildungsvorschrift einsetzt und die Ergebnisse berechnet. Dies führt auf eine sogenannte **Wertetabelle**:

y	$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,7$	$0,9$
$\varphi(y)$	$1,3$	$1,9$	$2,5$	$3,1$	$3,7$

Solche Wertetabellen sind sinnvoll, um sich einen Überblick über die Werte einer Funktion zu verschaffen. Sie reichen aber nicht aus, um mathematisch ganz sicher zu sein, was der tatsächliche Wertebereich einer Funktion ist. Eine Methode, den Wertebereich einer Funktion zu bestimmen, benutzt das Lösen von Ungleichungen:

Beispiel 1.1.7

In der Funktion

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1 \end{cases}$$

gilt aufgrund des Definitionsbereichs $D_\varphi = (0,1)$ für die Veränderliche:

$$0 < y < 1.$$

Nun benutzen wir Äquivalenzumformungen um in diesen Ungleichungen die Abbildungsvorschrift $\varphi(y) = 3y + 1$ zu erzeugen:

$$0 < y < 1 \,|\cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 3y < 3 \,| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 3y + 1 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \varphi(y) < 4.$$

Somit gilt für die Werte der Funktion $\varphi(y) \in (1;4)$ und deshalb $W_\varphi = (1;4)$.

1.1.2 Funktionen in Mathematik und Anwendungen

Mathematische Funktionen beschreiben oft Zusammenhänge zwischen Größen, die aus anderen Wissenschaften oder dem Alltagsbereich stammen. So ist etwa das Volumen V eines Würfels abhängig von der Kantenlänge a des Würfels. Damit kann das Volumen als mathematische Funktion aufgefasst werden, in der jeder Kantenlänge $a > 0$ das entsprechende Volumen $V(a) = a^3$ zugeordnet wird:

$$V : \begin{cases} (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & V(a) = a^3. \end{cases}$$

Es ergibt sich die kubische Standardparabel (siehe Abschnitt 1.2.5) als Zusammenhang zwischen Kantenlänge und Volumen. Auf diese Art lassen sich noch viele weitere Beispiele aus Naturwissenschaften und aus dem Alltagsbereich finden: Ort in Abhängigkeit von der Zeit in der Physik, Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration in der Chemie, Mehlmenge in Abhängigkeit von der gewünschten Teigmenge in einem Rezept, usw.

Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Beispiel 1.1.8

Die Intensität radioaktiver Strahlung ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands von der Quelle. Dies wird auch als Abstandsgesetz bezeichnet. Unter Benutzung einer physikalischen Proportionalitätskonstante $c > 0$ kann man den Zusammenhang zwischen Intensität I der Strahlung und Abstand $r > 0$ von der Quelle folgendermaßen als mathematische Funktion formulieren:

$$I : \begin{cases} (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \frac{c}{r^2}. \end{cases}$$

Für die Intensität gilt also die Abbildungsvorschrift $I(r) = \frac{c}{r^2}$, die somit die Abhängigkeit der Größen I und r voneinander beschreibt.

Aufgabe 1.1.5

Beim Bau von Windkraftanlagen gilt in guter Näherung, dass die Leistung proportional zur dritten Potenz der Windgeschwindigkeit ist. Unter Benutzung einer Proportionalitätskonstanten $\rho > 0$, welche der folgenden mathematischen Funktionen gibt diese Abhängigkeit physikalischer Größen korrekt wieder?

a)

$$P : \begin{cases} (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & P(v) = \frac{\rho}{v^3} \end{cases}$$

b)

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & P(v) = \rho v^3 \end{cases}$$

c)

$$P : \begin{cases} [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & P(v) = \rho v^3 \end{cases}$$

d)

$$x : \begin{cases} [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & x(f) = \rho f^3 \end{cases}$$

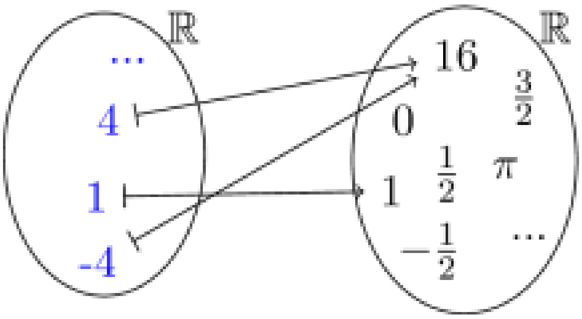
Lösung:
c) und d). a) ist falsch, da es sich um eine umgekehrte Proportionalität handelt. b) ist nicht der Problemstellung angepasst. Negative Windgeschwindigkeiten ergeben in diesem Zusammenhang keinen Sinn und sollten aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden. c) ist korrekt; in diesem Fall ergibt sich die Abhängigkeit $P(v) = \rho v^3$ für die Leistung P und die Windgeschwindigkeit v. Wir bemerken, dass d) genauso richtig ist. In diesem Fall haben wir eine Funktion, die völlig identisch zu Fall c) ist, nur die Leistung wird in diesem Fall mit x und die Windgeschwindigkeit mit f bezeichnet. Dies verdeutlicht nochmals, dass die Variablen, die für die Bezeichnung der Funktion und für die Veränderliche benutzt werden, mathematisch völlig willkürlich sind. Allerdings gibt es in den Naturwissenschaften Konventionen, welche Variablen üblicherweise für bestimmte Größen verwendet werden. So ist es hier doch üblicher die Geschwindigkeit mit v (vom englischen velocity) und die Leistung mit P (vom englischen power) zu bezeichnen.

1.1.3 Umkehrbarkeit

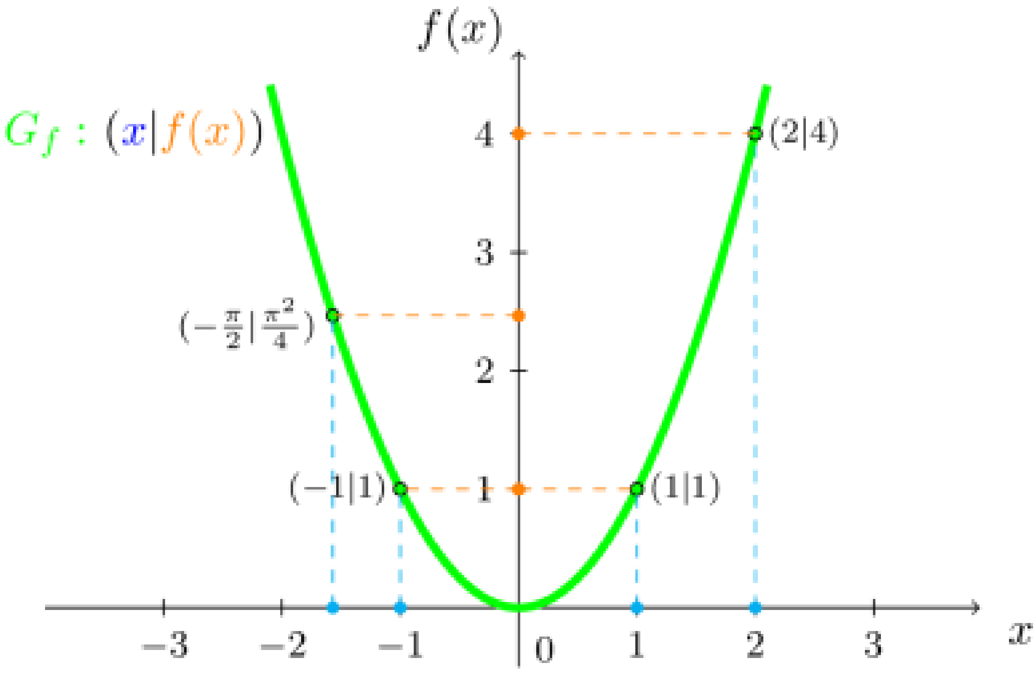
Die bildliche Darstellung einer Funktion, wie zum Beispiel

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2, \end{cases}$$

als sogenanntes Venn-Diagramm (vgl. Abschnitt 1.1.1)



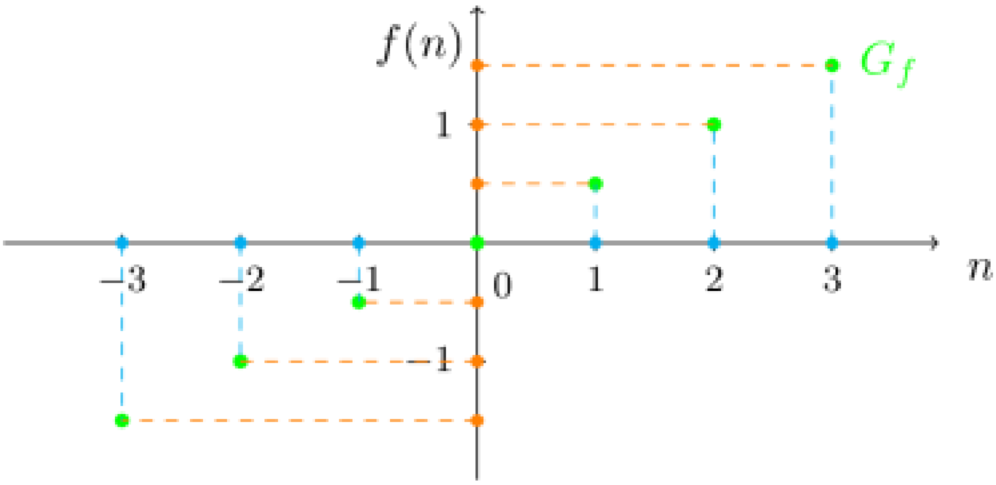
ist zwar nützlich, um den Funktionsbegriffs zu verstehen, sagt aber nicht viel über die besonderen Eigenschaften der Funktion aus. Hierfür gibt es eine andere Möglichkeit der grafischen Darstellung, nämlich die des Graphen der Funktion. Dazu fertigen wir ein zweidimensionales Koordinatensystem (vgl. Modul **??**) an, in dem die Zahlen aus dem Definitionsbereich der Funktion auf der Querachse und die Zahlen aus dem Zielbereich auf der Hochachse eingetragen werden. In einem solchen Koordinatensystem markieren wir alle Punkte $(x|f(x))$, die durch die Zuordnung der Funktion $x \longmapsto f(x)$ entstehen, in diesem Fall also alle Punkte $(x|x^2)$, d.h. $(1|1)$, $(-1|1)$, $(-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi^2}{4})$, usw. Dadurch entsteht eine Kurve, die Graph von f genannt und mit dem Symbol G_f bezeichnet wird:



Betrachten wir die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2} \end{cases}$$

aus Abschnitt 1.1.1 und deren Graphen

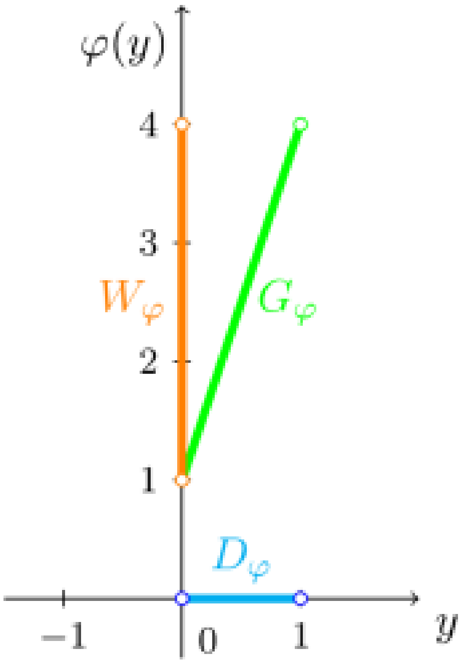


so stellen wir fest, dass Graphen nicht immer durchgehende Kurven sein müssen, sondern wie in diesem Fall auch nur aus einzelnen Punkten bestehen können.

Anhand des Graphen sind nun viele Grundeigenschaften einer Funktion erkennbar. Rufen wir uns die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1 \end{cases}$$

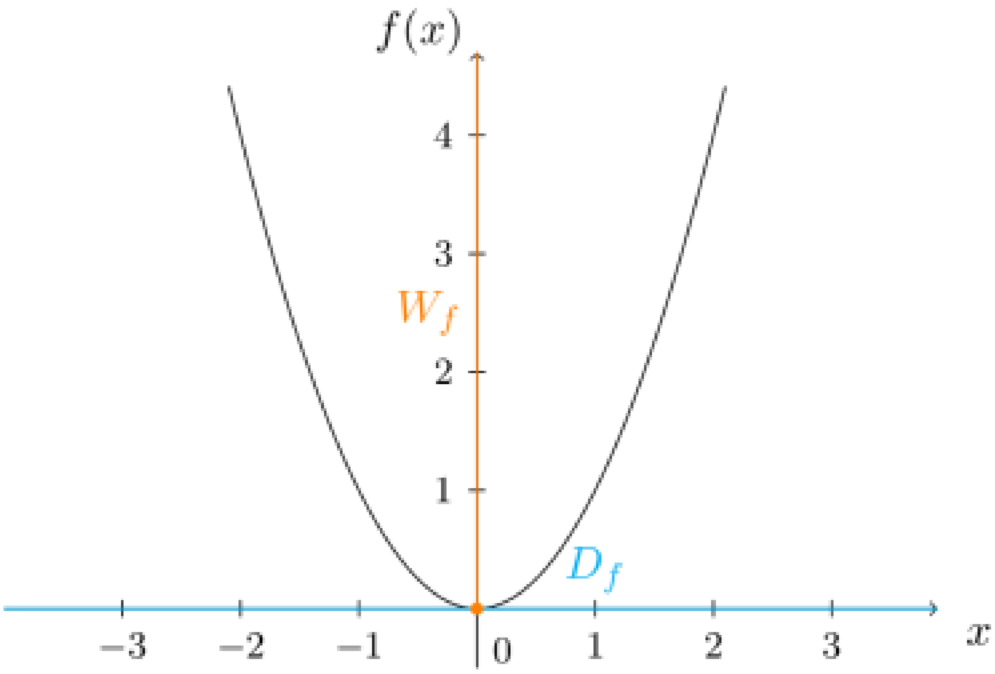
mit dem Definitionsbereich $D_\varphi = (0,1)$ und dem Wertebereich $W_\varphi = (1,4)$ aus Abschnitt 1.1.1 ins Gedächtnis. Wenn wir ihren Graphen zeichnen, so erkennen wir, dass der Definitionsbereich und der Wertebereich auf der Quer- bzw. Hochachse auftauchen:



Aufgabe 1.1.6
Betrachten Sie nochmal den Graphen der Funktion

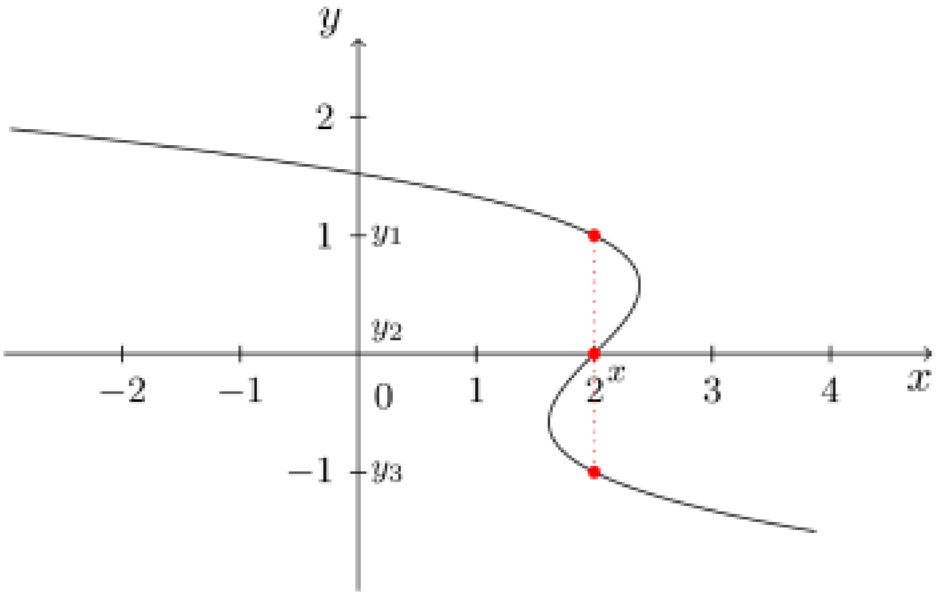
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases},$$

markieren Sie Definitions- und Wertebereiche auf Quer- und Hochachse und geben Sie diese an.
Lösung:



$D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [0, \infty)$

Weiterhin ist die Eigenschaft der Eindeutigkeit von Funktionen am Graphen zu erkennen. Um dies einzusehen machen wir uns klar, dass eine Kurve wie in der folgenden Abbildung

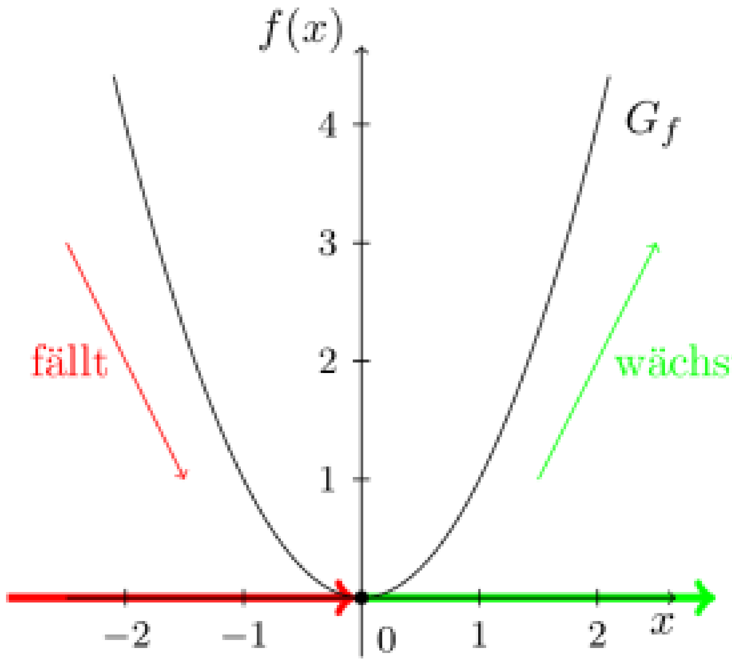


niemals als Graph einer Funktion auftauchen kann. Zu einem x-Wert aus dem Definitionsbereich müsste es hier mehrere Werte y_1, y_2, y_3 aus dem Wertebereich geben. Graphen von Funktionen geben die Eindeutigkeit also immer dadurch wieder, dass sie „nicht in horizontaler Richtung zurücklaufen können".

Eine weitere wichtige Eigenschaft eines Graphen ist sein Wachstumsverhalten. Betrachten wir die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

und ihren Graphen.

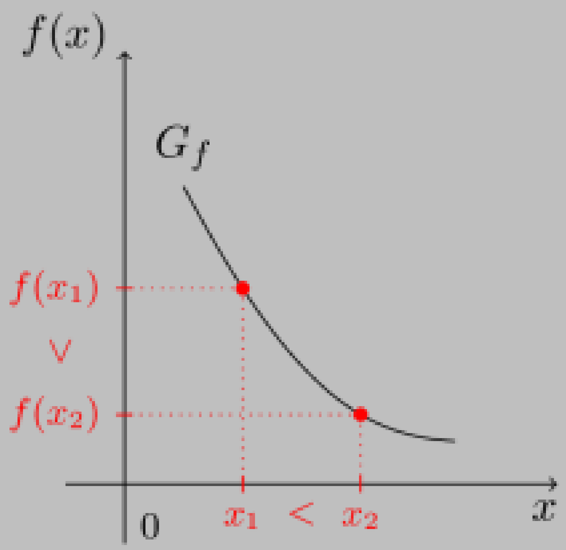


Auf der Querachse in diesem Graphen erkennen wir zwei Bereiche, in denen der Graph unterschiedliches Wachstumsverhalten zeigt. Im Bereich von x-Werten mit $x \in (-\infty, 0)$ fällt der Graph. Das heißt, werden die x-Werte größer, so werden die zugehörigen Funktionswerte auf der Hochachse kleiner. Im Bereich von x-Werten mit $x \in (0, \infty)$ stellen wir das gegenteilige Verhalten fest. Bei größer werdenden x-Werten werden auch die zugehörigen Funktionswerte größer. Der Graph wächst. Beim Wert $0 \in \mathbb{R}$ geht der fallende Bereich in den wachsenden Bereich über. Solche Werte werden bei der Untersuchung von Scheitelpunkten in Abschnitt 1.2.6 und beim Bestimmen von Extremwerten in Modul **??** besonders wichtig werden.

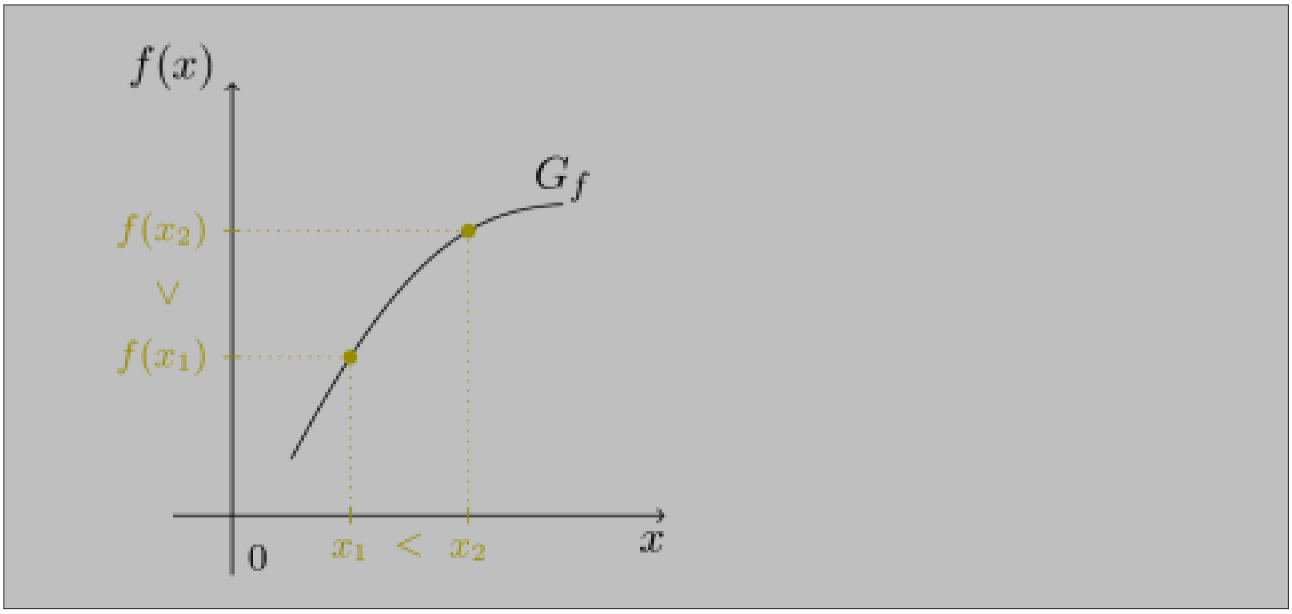
Wir bezeichnen diese beiden Eigenschaften als streng monoton fallend bzw. streng monoton wachsend und schreiben sie mathematisch folgendermaßen auf:

Info 1.1.9

- Für $x_1 < x_2$ aus einer Teilmenge des Definitionsbereich einer Funktion f gilt $f(x_1) > f(x_2)$. Dann heißt f in dieser Teilmenge streng monoton fallend.



- Für $x_1 < x_2$ aus einer Teilmenge des Definitionsbereich einer Funktion f gilt $f(x_1) < f(x_2)$. Dann heißt f in dieser Teilmenge streng monoton wachsend.



Dies gilt so für alle Funktionen, die wir in diesem Modul betrachten werden. Oft treffen die beschriebenen Monotonieeigenschaften nur in bestimmten Bereichen der Definitionsmenge der Funktion zu, wie oben bei der Standardparabel gesehen. Es gibt jedoch auch Funktionen, die nur eine Monotonieeigenschaften im gesamten Definitionsbereich besitzen (siehe Beispiel 1.1.10 unten). In diesem Fall nennt man dann die gesamte Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Weiterhin heißt eine Funktion die entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend ist, einfach streng monoton.

Ein weiteres Beispiel zeigt, wie man strenge Monotonie mit Hilfe des Lösens von Ungleichungen aus Modul **??** auf Seite ?? bei einer Funktion explizit nachrechnen kann.

Beispiel 1.1.10

Gegeben sei die Funktion

$$h: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$$

Ist h streng monoton wachsend oder streng monoton fallend?

Wir beginnen zwei beliebige Zahlen $x_1, x_2 \in D_h = \mathbb{R}$ aufzuschreiben mit der Eigenschaft, dass

$$x_1 < x_2$$

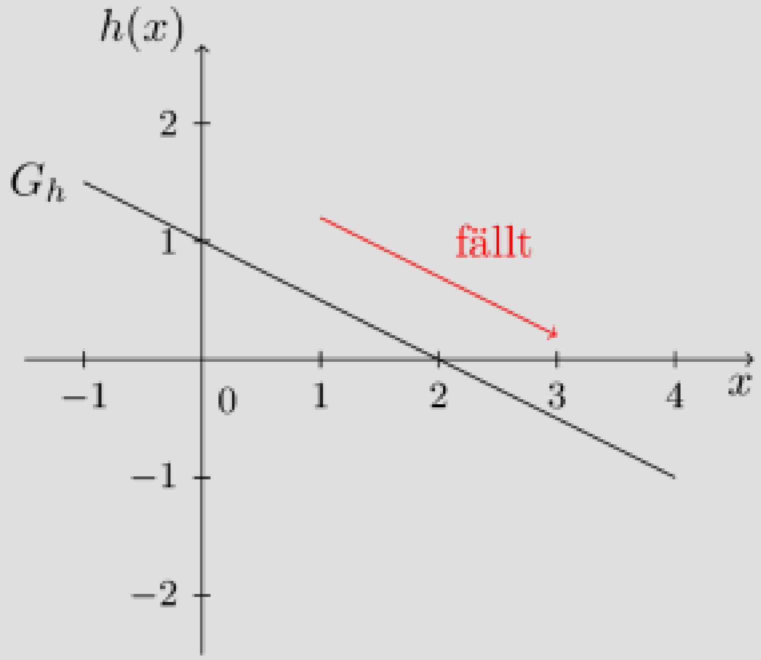
gilt. Durch ΩÄquivalenzumformungen**??** von Ungleichungen können wir $x_1 < x_2$ nun entweder zu $h(x_1) < h(x_2)$ oder zu $h(x_1) > h(x_2)$ umformen und damit folgern, dass h streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. es gelten die folgenden Äquivalenzumformungen für $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \,|\cdot(-\frac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2.$$

Weiterhin wird in der Abbildungsvorschrift +1 addiert. Wir erhalten also

$$-\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2 \,|+1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_1 + 1 > -\frac{1}{2}x_2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad h(x_1) > h(x_2),$$

Da nun $h(x_1) > h(x_2)$ gilt, ist h streng monoton fallend. Dies können wir auch am Graphen von h erkennen:



Aufgabe 1.1.7
Rechnen Sie durch Äquivalenzumformungen von Ungleichungen explizit nach, dass

$$\eta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+2 \end{cases}$$

streng monoton wachsend ist.
<u>Lösung:</u>
Es gilt

$$x_1 < x_2 \,|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 < 2x_2 \,|+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2 < 2x_2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \eta(x_1) < \eta(x_2),$$

womit η streng monoton wachsend ist.

1.2 Lineare Funktionen und Polynome

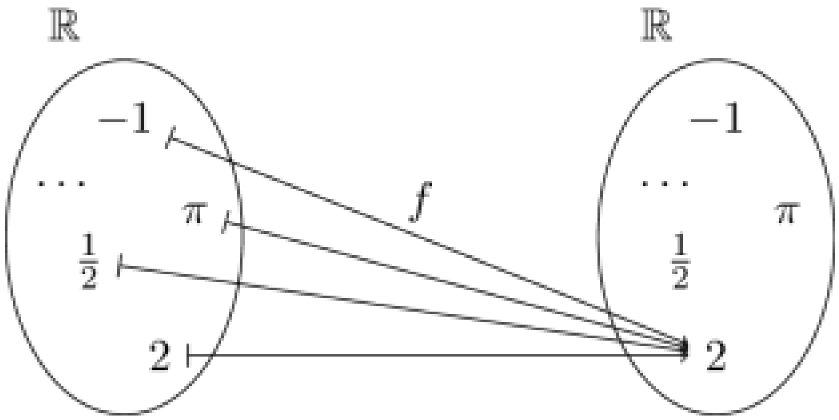
Einführung

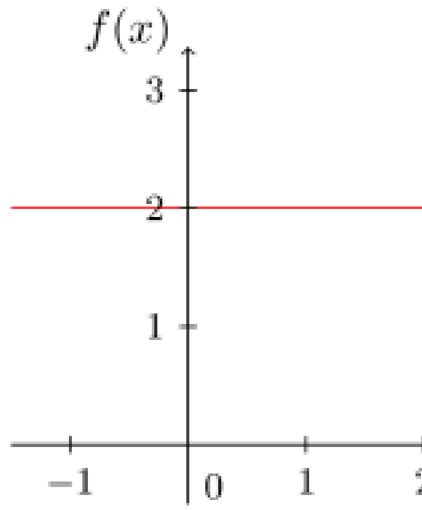
In diesem Abschnitt untersuchen wir folgende Klassen von Funktionen: konstante, lineare, linear-affine Funktionen sowie Monome und Polynome.

1.2.1 Konstante Funktionen und die Identität

Die sogenannten konstanten Funktionen ordnen jeder Zahl aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ eine konstante Zahl aus dem Zielbereich $\mathbb{R}$ zu. Zum Beispiel die konstante Zahl 2 auf folgende Art:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 \end{cases}$$

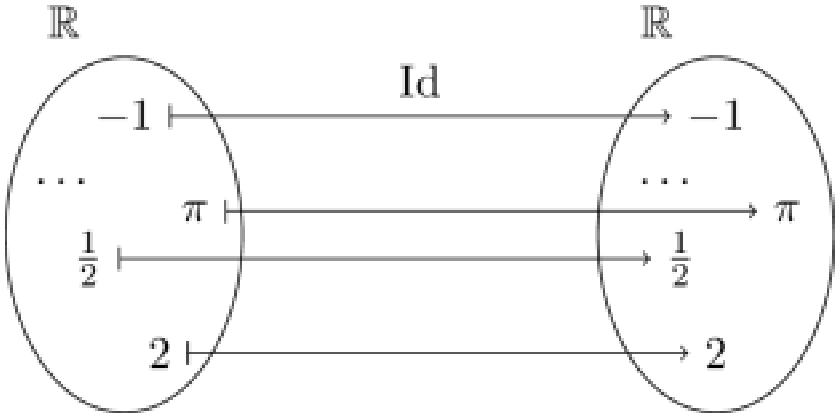


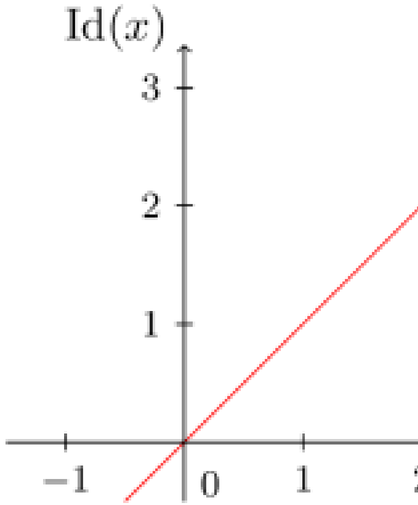


Es gilt hier also $f(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit die Wertemenge dieser Funktion f nur aus der Menge $W_f = \{2\} \subset \mathbb{R}$ besteht.

Die Identität auf $\mathbb{R}$ ist die Funktion, welche jeder reellen Zahl wieder genau die identische reelle Zahl zuordnet. Man schreibt das so:

$$\mathrm{Id} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$





Es gilt hier also $\mathrm{Id}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit der Wertebereich von Id die gesamten reellen Zahlen sind ($W_{\mathrm{Id}} = \mathbb{R}$). Weiterhin ist die Identität offenbar eine streng monoton wachsende Funktion.

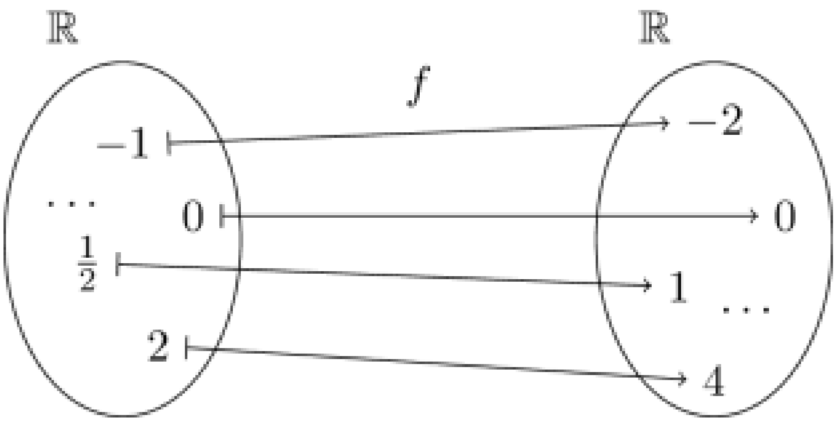
1.2.2 Lineare Funktionen

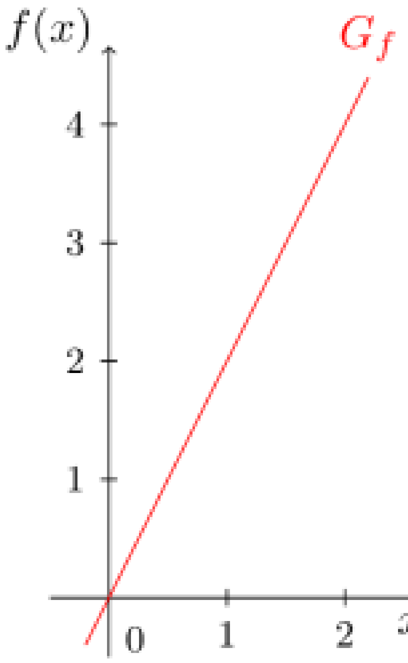
Ausgehend von der Identität, kann man sich nun komplexere Funktionen, die sogenannten linearen Funktionen, konstruieren. So kann man sich zum Beispiel überlegen, dass jede reelle Zahl ihrem doppelten Wert, oder ihrem π-fachen Wert, usw. zugeordnet werden kann. Etwa

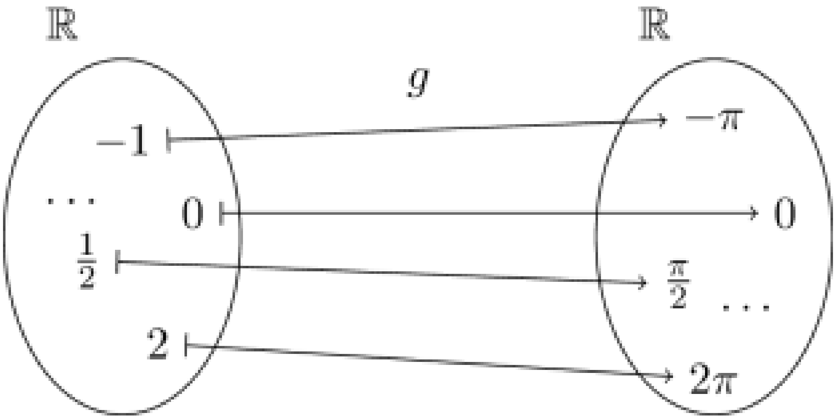
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{cases}$$

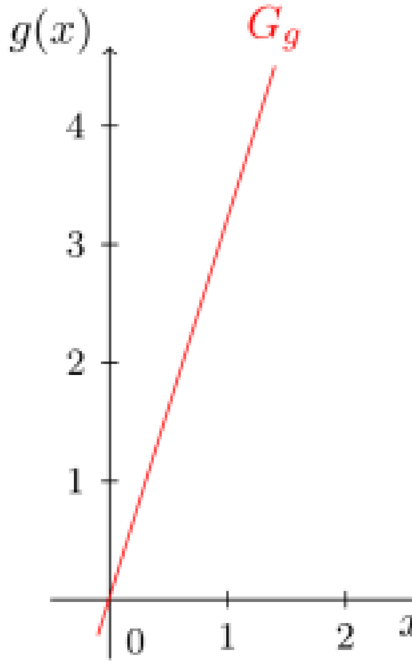
oder

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \pi x. \end{cases}$$



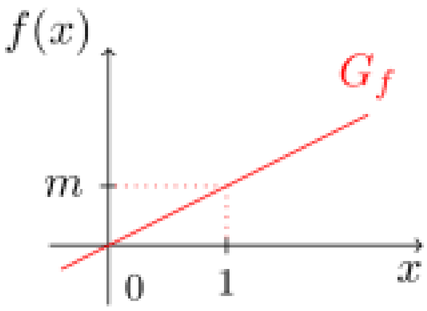






Alle linearen Funktionen haben also als Wertebereich ebenfalls die gesamten reellen Zahlen ($W_f, W_g = \mathbb{R}$). Der Faktor, mit dem jede reelle Zahl in einer solchen linearen Funktion multipliziert wird, heißt Steigung der linearen Funktion. Oft möchte man auch bei linearen Funktionen nicht eine bestimmte Funktion mit spezifischer Steigung angeben, sondern irgendeine mit beliebiger Steigung $m \in \mathbb{R}$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx. \end{cases}$$



Woher kommt der Begriff Steigung für eine lineare Funktion? Teilt man die Differenz, um welche der Graph in vertikaler Richtung anwächst, duch die entsprechende Längeneinheit in horizontaler Richtung, so erhält man die Steigung m.

Info 1.2.1

Eine lineare Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx \end{cases}$$

ist genau dann streng monoton wachsend, wenn ihre Steigung positiv ist, also $m > 0$ gilt; und sie ist genau dann streng monoton fallend, wenn ihre Steigung negativ ist, also $m < 0$ gilt.

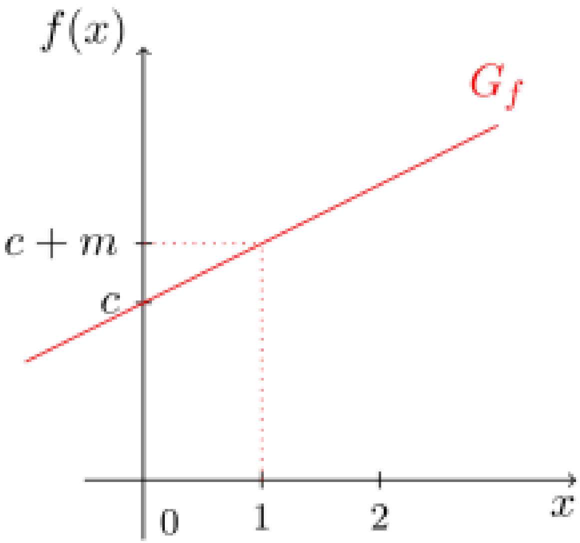
Aufgabe 1.2.1
Welche lineare Funktion ergibt sich für die Steigung $m = 1$?
Lösung:
Es ergibt sich $f(x) = 1 \cdot x = x = \mathrm{Id}(x)$, also genau die Identität.

Aufgabe 1.2.2
Welche Funktion ergibt sich für die Steigung $m = 0$?
Lösung:
Es ergibt sich $f(x) = 0 \cdot x = 0$, also genau die konstante Funktion, die konstant 0 ist.

1.2.3 Linear-affine Funktionen

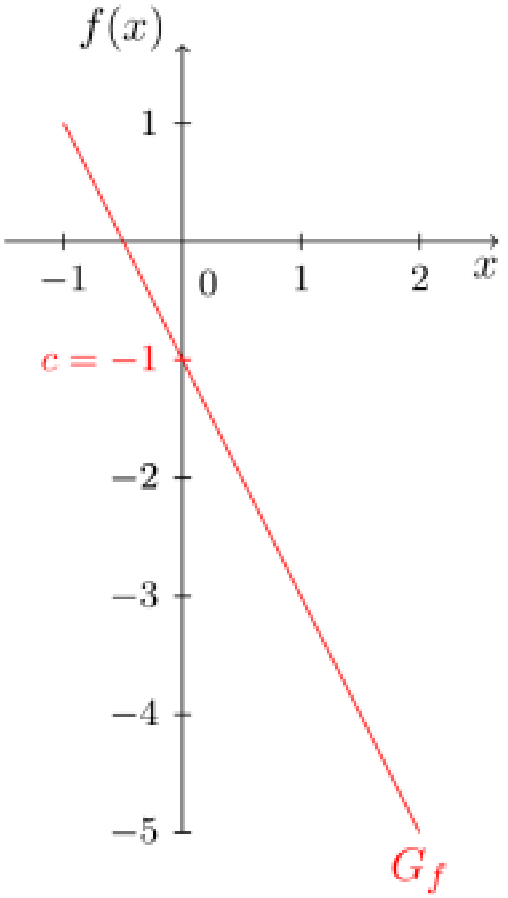
Kombiniert man lineare Funktionen mit konstanten Funktionen, so erhält man die sogenannten linear-affinen Funktionen. Diese ergeben sich als die Summe einer linearen und einer konstanten Funktion. Im allgemeinen Fall, ohne konkret spezifizierte Steigung ($m \in \mathbb{R}$) und mit einer Konstanten ($c \in \mathbb{R}$) schreibt man das so:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx + c. \end{cases}$$



Die Graphen linear-affiner Funktionen werden auch als Geraden bezeichnet. Die Konstante m wird für linear-affine Funktionen weiterhin als Steigung bezeichnet, die Konstante $c \in \mathbb{R}$ als Achsenabschnitt. Der Grund für diese Bezeichnung ist folgender: Betrachtet man den Schnittpunkt des Graphen der linear-affinen Funktion mit der vertikalen Achse, so hat dieser vom Ursprung den Abstand c (siehe Abbildung oben). So ergibt sich zum Beispiel für die unten abgebildete linear-affine Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x - 1 \end{cases}$$



die Steigung $m = -2$ und der Achsenabschnitt $c = -1$. Der Achsenabschnitt ergibt sich als Funktionswert bei $x = 0$ und somit durch

$$c = f(0) = -2 \cdot 0 - 1 = -1.$$

Aufgabe 1.2.3
Was sind die Steigung und der Achsenabschnitt von

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \pi x - 42? \end{array} \right.$$

Lösung:
Steigung: π und Achsenabschnitt: -42

Aufgabe 1.2.4
Welche Funktionen ergeben sich als linear-affine Funktionen mit Steigung $m = 0$ und welche mit Achsenabschnitt $c = 0$?
Lösung:
Ist $m = 0$, so gilt $f(x) = 0 \cdot x + c = c$. Damit ergeben sich die konstanten Funktionen als diejenigen mit Steigung 0. Ein verschwindender Achsenabschnitt $c = 0$ impliziert $f(x) = mx + 0 = mx$. Somit ergeben sich in diesem Fall genau die linearen Funktionen.

1.2.4 Betragsfunktionen

In Modul **??** wurde der Betrag einer reellen Zahl x auf folgende Art eingeführt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Im Kontext dieses Moduls kann der Betrag nun als Funktion aufgefasst werden. Man erhält die **Betragsfunktion**

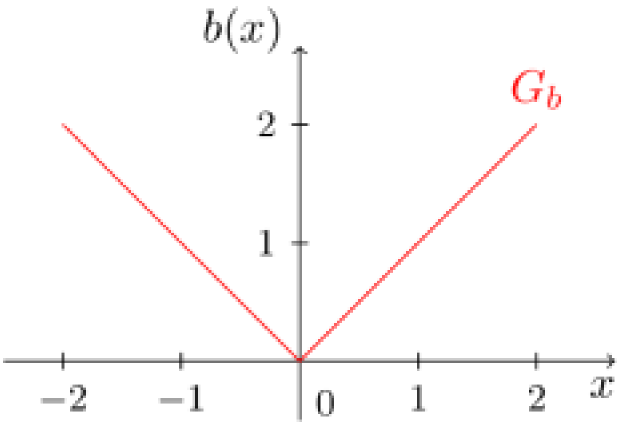
$$b : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|. \end{cases}$$

Aufgabe 1.2.5
Was ist die Wertemenge W_b der Betragsfunktion b?
Lösung:
Da für alle Zahlen x aus $D_b = \mathbb{R}$ gilt $b(x) = |x| \geq 0$, ergibt sich $W_b = [0, \infty)$.

Durch die Fallunterscheidung

$$b(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist die Betragsfunktion ein Beispiel für eine abschnittsweise definierte Funktion. Schreibt man Beträge mit Hilfe dieser Fallunterscheidung um, so spricht man auch vom Auflösen des Betrags. Der Graph der Betragsfunktion b sieht dann so aus:



Eine Eigenschaft des Graphen der Betragsfunktion, die auch bei den meisten allgemeineren Funktionen auftritt in denen ein Betrag vorkommt, ist der „Knick" an der Stelle $x = 0$. Die oben definierte Betragsfunktion b ist nur der einfachste Fall einer Funktion, in der der Betrag vorkommt. Man kann sich kompliziertere Beispiele von Funktionen überlegen in denen ein Betrag oder mehrere Beträge vorkommen. So etwa

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |2x - 1|. \end{cases}$$

Eine wichtige Aufgabe bei solchen gegebenen Funktionen ist, eine Vorstellung von deren Graphen zu bekommen. Dabei benutzt man die abschnittsweise Definition des Betrags und geht ähnlich vor wie beim Lösen von Betragsgleichungen und -ungleichungen. Wir zeigen dies hier am Beispiel obiger Funktion f:

Beispiel 1.2.2

Die Funktion

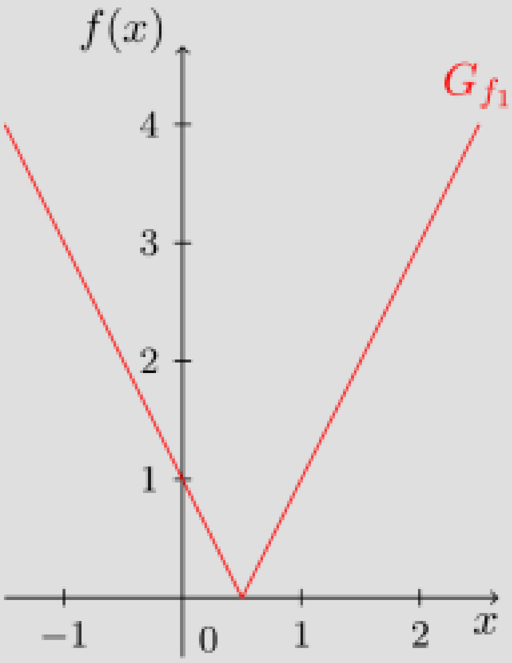
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |2x-1| \end{cases}$$

ist gegeben. Wie sieht ihr Graph aus?

Wir berechnen:

$$f(x) = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & \text{falls } 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{falls } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Somit erhalten wir eine abschnittsweise definierte Funktion, deren Graph eine steigende Gerade mit Steigung 2 und Achsenabschnitt -1 im Bereich $x \geq \frac{1}{2}$ und eine fallende Gerade mit Steigung -2 und Achsenabschnitt 1 im Bereich $x < \frac{1}{2}$ ist. Mit diesen Informationen können wir den Graphen von f zeichnen:



Info 1.2.3

WICHTIG! Beim Auflösen von Beträgen wie in der Rechnung in obigem Beispiel sind folgende zwei wichtige Rechengesetze zu beachten:

1. Die Bereiche der Fallunterscheidung des Betrags ergeben sich als Ungleichungen für den gesamten Ausdruck im Betrag, hier also $2x-1 \geq 0$ und $2x-1 < 0$ und nicht etwa nur $x \geq 0$ und $x < 0$. Dies funktioniert beim Auflösen von Beträgen immer so.
2. Im Fall < 0 erhält der gesamte Ausdruck im Betrag ein Minuszeichen. Hier muss also auf das setzen einer Klammer geachtet werden. Im obigen Beispiel ergibt sich deshalb $-(2x-1) =$

$-2x+1$ und nicht etwa $-2x-1$. Auch dies funktioniert beim Auflösen von Beträgen immer so.

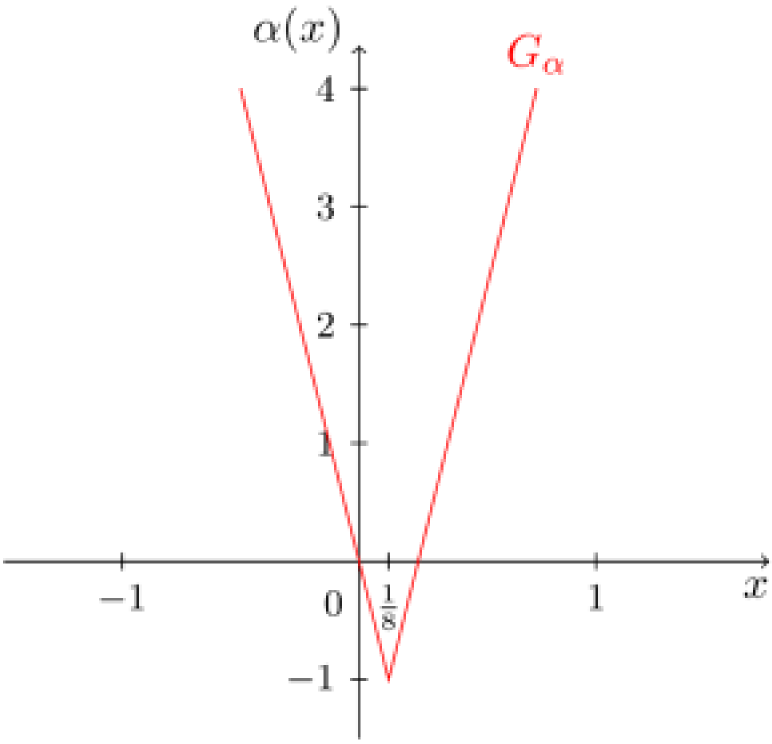
Aufgabe 1.2.6
Wie sieht der Graph der Funktion

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |-8x+1|-1 \end{array} \right.$$

aus? Geben Sie außerdem W_α an.
Lösung:
Es gilt

$$\alpha(x) = |-8x+1|-1 = \left\{ \begin{array}{rl} -8x+1-1 & \text{falls } -8x+1 \geq 0 \\ -(-8x+1)-1 & \text{falls } -8x+1 < 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{rl} -8x & \text{falls } x \leq \frac{1}{8} \\ 8x-2 & \text{falls } x > \frac{1}{8}, \end{array} \right.$$

folglich:

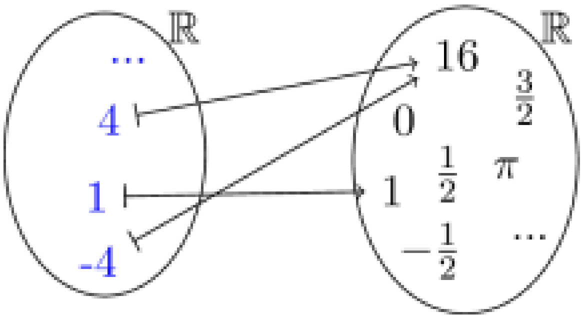


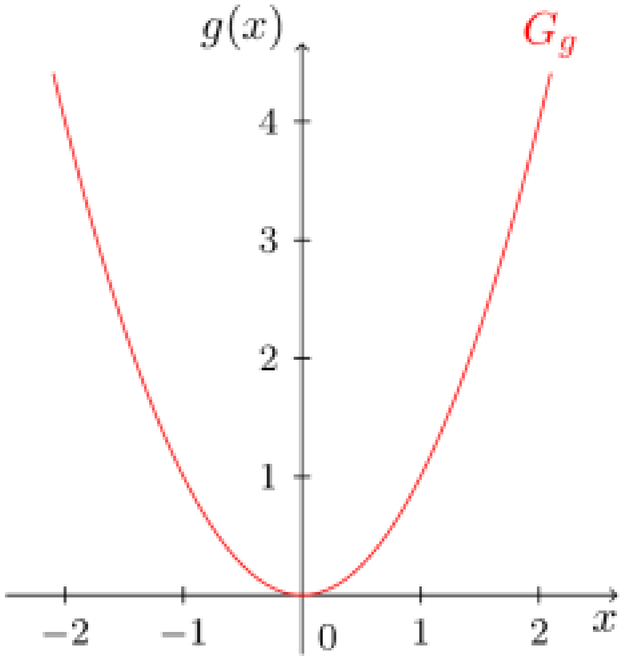
Da $|-8x+1| \geq 0$ gilt, folgt $|-8x+1|-1 \geq -1$ und damit ist $W_\alpha = [-1, \infty)$.

1.2.5 Monome

Neben den linear-affinen Funktionen aus dem vorigen Abschnitt kann man sich nun auch Funktionen überlegen, die allen reellen Zahlen natürliche Potenzen ihrer selbst zuordnen. So zum Beispiel

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$$





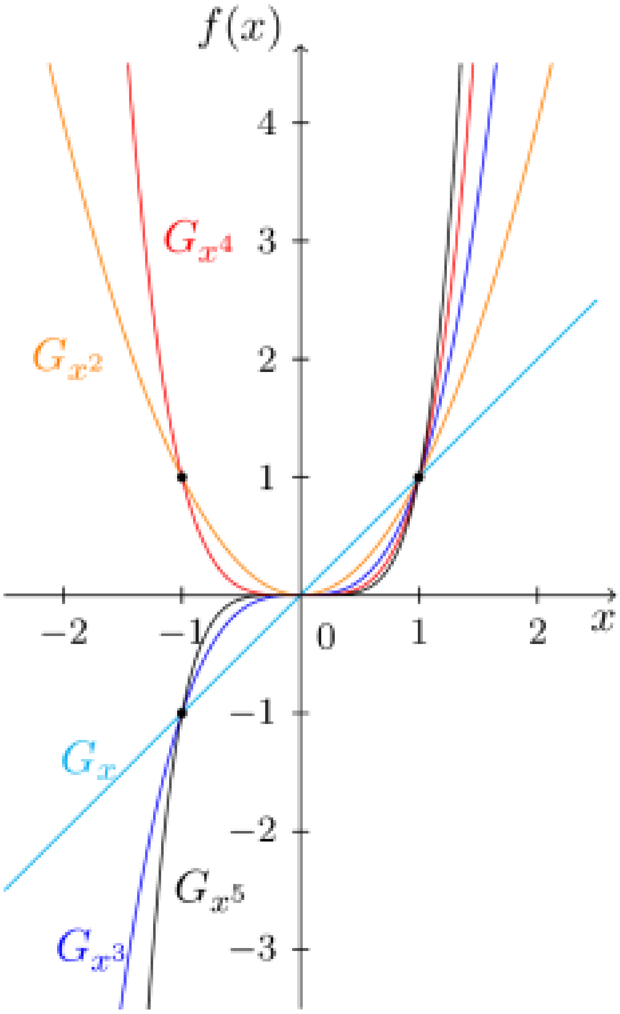
Dies funktioniert für jeden natürlichen Exponenten und man schreibt dann allgemein

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und bezeichnet diese Funktionen als Monome. Der Exponent n eines Monoms wird als Grad des Monoms bezeichnet. So ist etwa die Funktion g vom Anfang dieses Abschnitts ein Monom vom Grad 2, usw.

Aufgabe 1.2.7
Welche Funktion ergibt sich als Monom vom Grad 1 bzw. vom Grad 0 ?
Lösung:
Da $x^1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich die Identität Id als Monom vom Grad 1. Genauso gilt $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit ist die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ das Monom vom Grad 0.

Man bezeichnet das Monom vom Grad 2 auch als die Standardparabel. Das Monom vom Grad 3 wird auch als kubische Standardparabel bezeichnet. Hier einige Graphen von Monomen:



Auf Basis dieser Graphen fassen wir nun einige Erkenntisse über Monome zusammen: Es gibt einen grundlegenden Unterschied zwischen Monomen (mit Abbildungsvorschrift $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) von geradem und von ungeradem Grad. Die Monome von geradem Grad haben als Wertebereich immer die Menge $[0, \infty)$, während die Monome von ungeradem Grad ganz $\mathbb{R}$ als Wertebereich besitzen. Weiterhin gilt stets

$$f(1) = 1^n = 1,$$
$$f(0) = 0^n = 0$$

und

$$f(-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ferner gilt

$$\begin{cases} x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots & \text{für } x \in (0,1) \\ x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots & \text{für } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Aufgabe 1.2.8
Wie ergeben sich diese Erkenntnisse über Monome unmittelbar aus den Potenzrechengesetzen?
Lösung:
Nach den Potenzrechengesetzen gilt stets $1^n = 1$ und $0^n = 0$ für beliebige natürliche Zahlen n und $(-1)^n = 1$ für gerade n sowie $(-1)^n = -1$ für ungerade n. Dadurch ergeben sich die beschriebenen

Punkte die alle Graphen der Monome gemeinsam haben. Auch die Ungleichungen $x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots$ für x kleiner 1 und $x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$ für x größer 1 folgen aus den Potenzrechengesetzen, da höhere werdende Potenzen für Zahlen kleiner 1 stets kleiner werdende Ergebnisse liefern und für Zahlen größer 1 umgekehrt stets größer werdende Ergebnisse.

1.2.6 Polynome und ihre Nullstellen

Während in den bis jetzt betrachteten Monomen immer nur genau eine Potenz der Veränderlichen in der Abbildungsvorschrift vorkommt, lassen sich aus diesen Monomen problemlos komplexere Funktionen konstruieren in denen mehrere verschiedene Potenzen der Veränderlichen vorkommen. Diese ergeben sich als Summen von Vielfachen von Monomen. Man spricht dann von sogenannten Polynomen; hier einige Beispiele und deren Graphen:

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^3 + 4x^2 - 3x + 42 \end{array} \right. \qquad \text{(Grad: 3)}$$

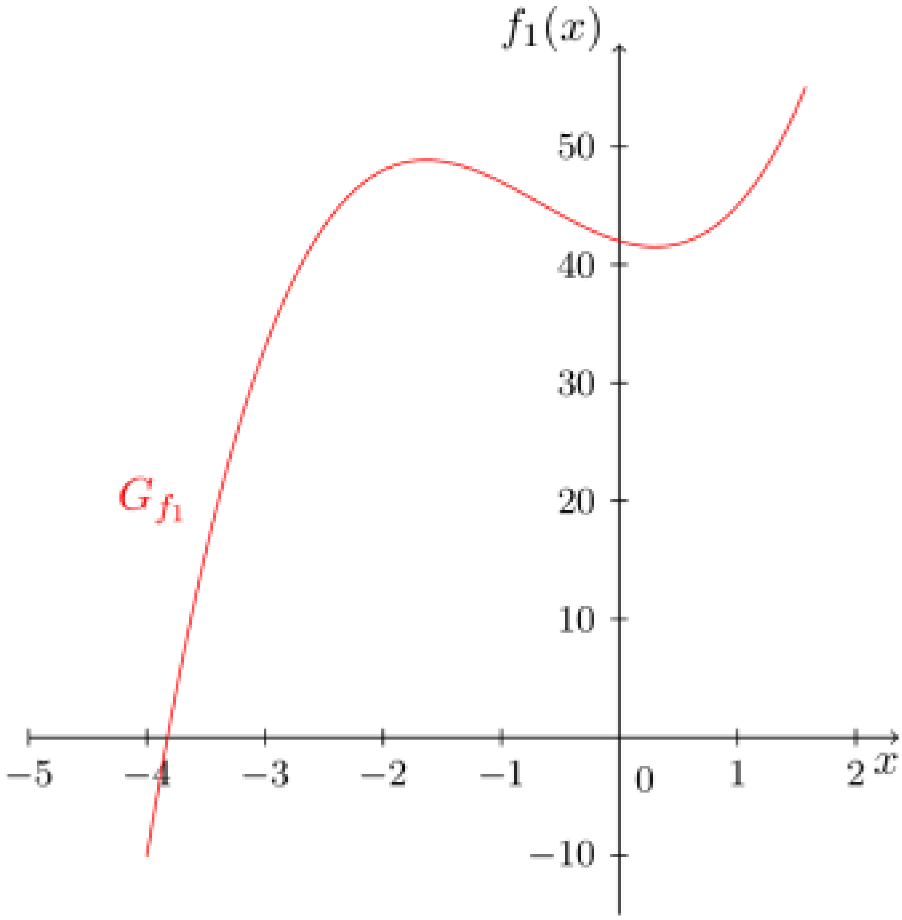
$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^{101} + 3x - 14 \end{array} \right. \qquad \text{(Grad: 101)}$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 9x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 19x \end{array} \right. \qquad \text{(Grad: 4)}$$

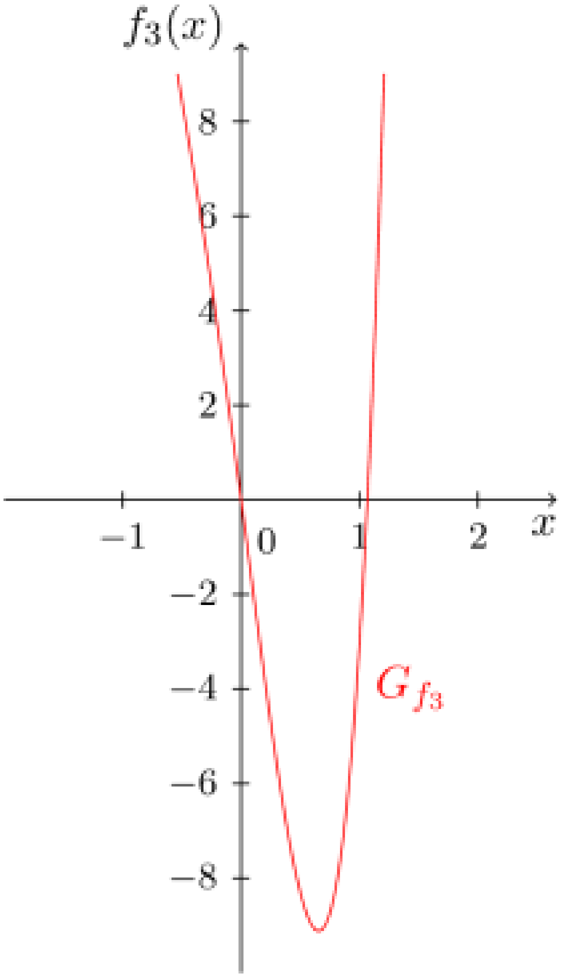
$$f_4 : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 2x + 2 \end{array} \right. \qquad \text{(Grad: 2)}$$

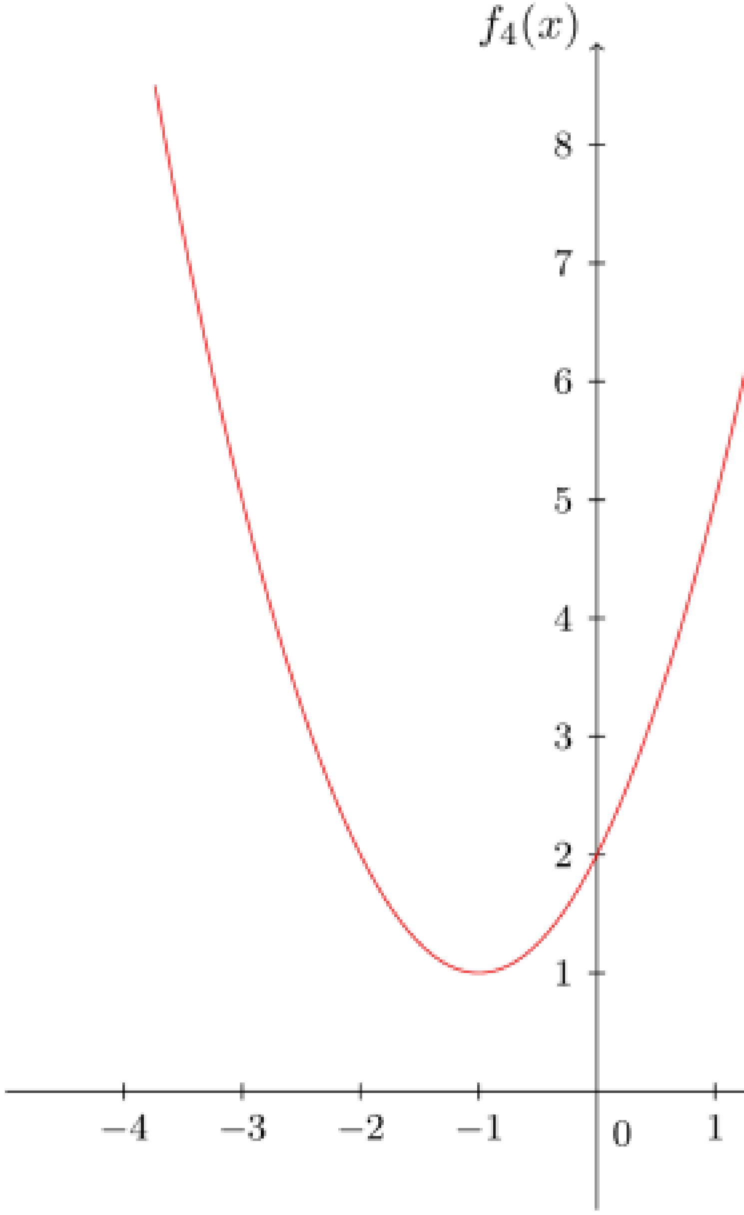
$$f_5 : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 8x - 2 \end{array} \right. \qquad \text{(Grad: 1)}$$

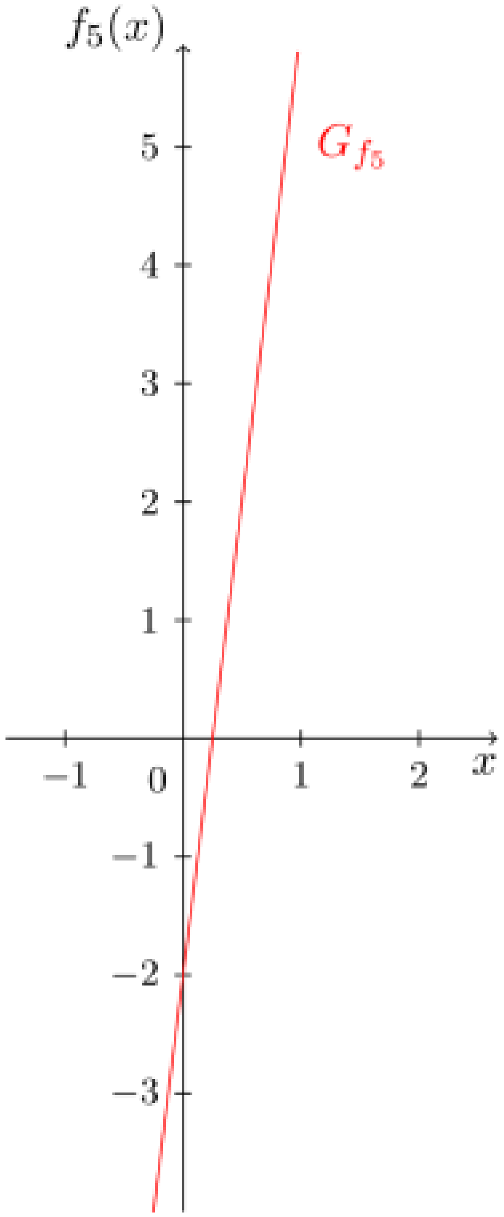
$$f_6 : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 13 \end{array} \right. \qquad \text{(Grad: 0)}$$

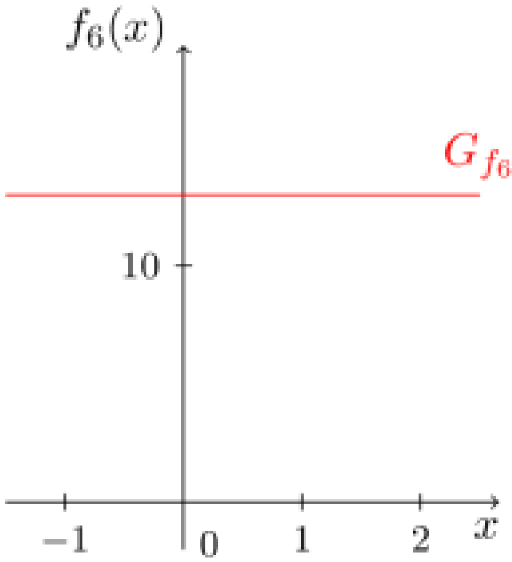


$f_1(x)$
50
40
30
20
10
−10
G_{f_1}
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
x


$f_3(x)$
8
6
4
2
−1
0
1
2
x
−2
−4
−6
−8
G_{f_3}


$f_4(x)$
8
7
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1





Der Grad eines Polynoms richtet sich also nach dem vorkommenden Monom mit dem höchsten Grad. Außerdem erkennen wir, dass die bisher behandelten Funktionstypen der konstanten, linearen und linear-affinen Funktionen – genauso wie die Monome – auf natürliche Weise wieder als Spezialfälle der Polynome auftauchen. Die Polynome umfassen also alle bisher betrachteten Funktionstypen.

Möchte man allgemein ein unspezfiziertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ angeben, so schreibt man dies folgendermaßen:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 . \end{array} \right.$$

Dabei sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ die reellen Vorfaktoren vor den einzelnen Monomen, die als Koeffizienten des Polynoms bezeichnet werden.

Aufgabe 1.2.9

Wie lautet das Polynom $f(x)$ mit den Koeffizienten $a_0 = -4$, $a_2 = \pi$ und $a_4 = 9$ und welchen Wertebereich besitzt es?

Das Polynom lautet $f(x) = \boxed{}$,
sein Wertebereich ist $W_f = \boxed{}$.

Lösung:
Das Polynom lautet

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 9x^4 + \pi x^2 - 4. \end{cases}$$

und besitzt den Wertebereich $W_f = [-4, \infty)$, da die geraden Potenzen von x nur nichtnegative Werte annehmen können.

Bei allgemeinen Polynomen sind insbesondere die Nullstellen von Interesse. Diese findet man durch das Lösen von Gleichungen n-ten Grades. Für den Grad $n = 2$, also für Polynome vom Grad 2 (diese werden auch als allgemeine Parabeln bezeichnet), ist dies durch das Lösen einer quadratischen Gleichung möglich. In Modul **??** werden die relevanten Techniken der quadratischen Ergänzung, der pq-Formel und der Scheitelpunktsform quadratischer Ausdrücke genauer erklärt.

Beispiel 1.2.4

Gegeben ist die Parabel

$$\zeta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 2y^2 - 8y + 6. \end{cases}$$

Wir bestimmen Nullstellen und Scheitelpunkt und zeichnen den Graphen.

Wir führen an der Abbildungsvorschrift $\zeta(y) = 2(y^2 - 4y + 3)$ eine quadratische Ergänzung durch:

$$y^2 - 4y + 3 = y^2 - 4y + 4 - 1 = (y - 2)^2 - 1.$$

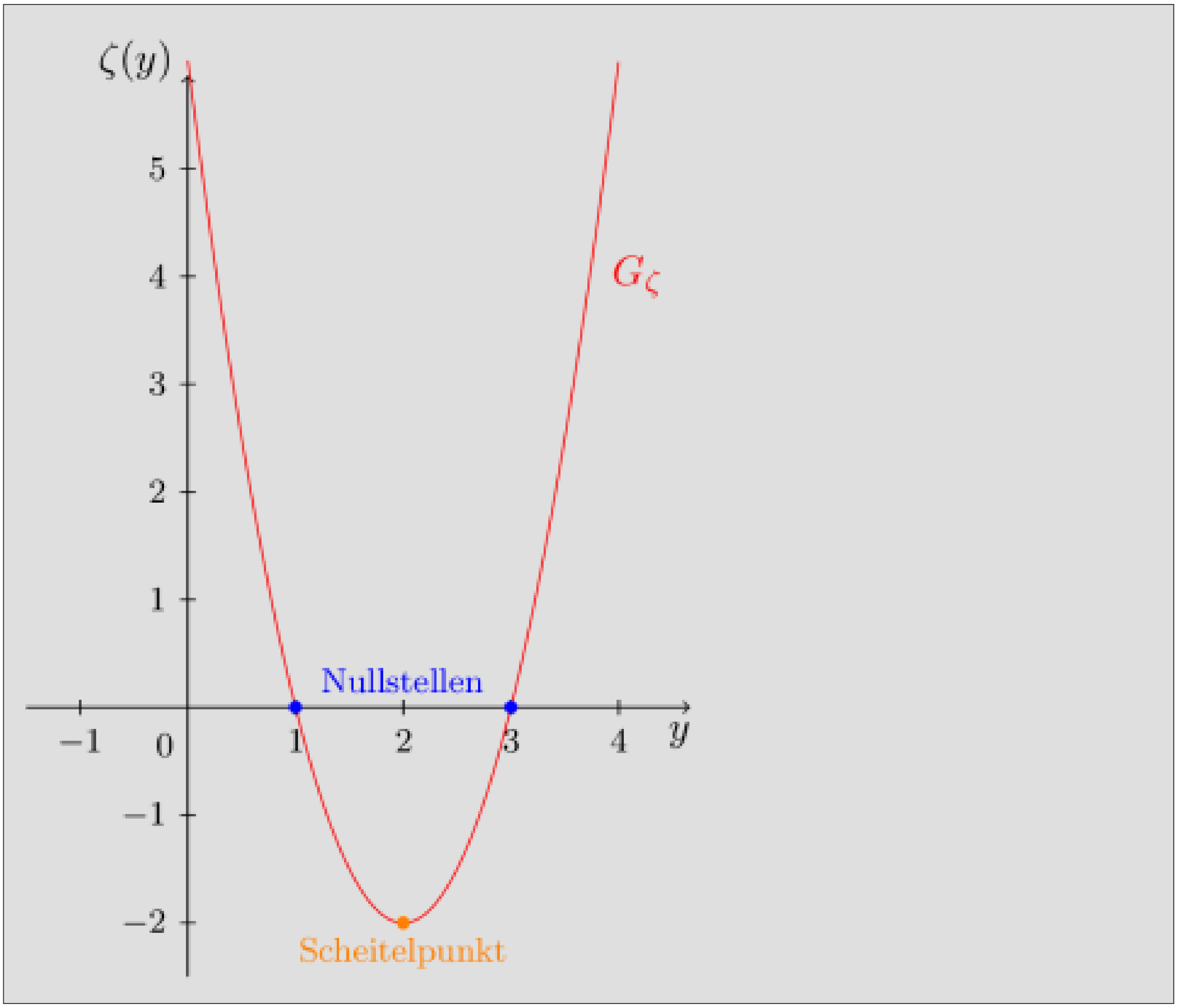
Folglich läßt sich die Abbildungsvorschrift als

$$\zeta(y) = 2(y - 2)^2 - 2$$

schreiben. Wir erkennen, dass die Parabel gegenüber der Standardparabel um 2 Längeneinheiten nach rechts und nach unten verschoben ist. Der Scheitelpunkt läßt sich bei $(2| - 2)$ ablesen. Die Nullstellen lassen sich berechnen:

$$\zeta(y) = 2((y - 2)^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 2)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} - 2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Der Graph ergibt sich schließlich zu:



1.2.7 Hyperbeln

Wir betrachten Funktionen, die als Abbildungsvorschrift einen reziproken Zusammenhang besitzen. Darunter versteht man das Vorkommen von Kehrwerten in der Abbildungsvorschrift. Zu beachten ist bei der Bestimmung des größtmöglichen Definitionsbereich solcher Funktionen, dass der Nenner nicht 0 werden darf.

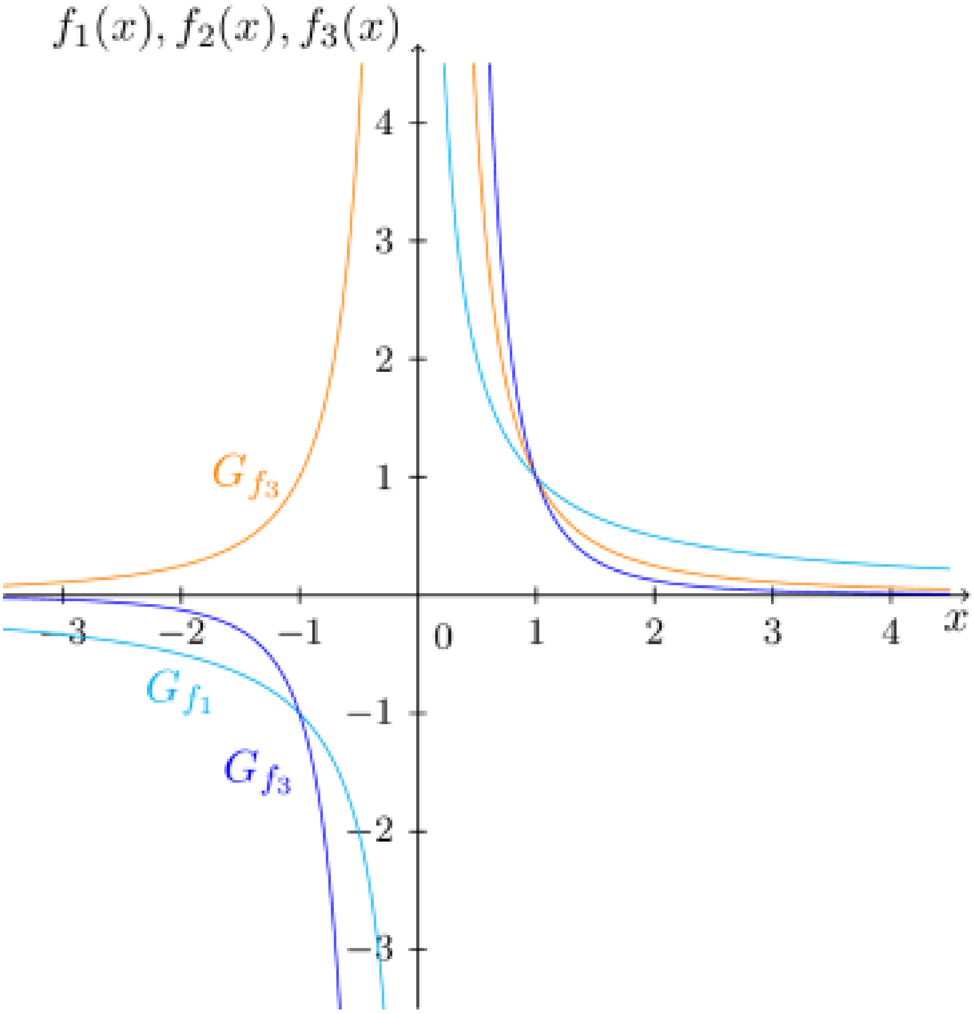
Beispiele reziproker Funktionen sind im Folgenden zusammengestellt; diese ergeben sich als Kehrwerte der Monome und werden auch als Funktionen vom hyperbolischen Typ bezeichnet:

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}, \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2}, \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^3}, \end{cases}$$

usw. Ihre Graphen sehen so aus:



Insbesondere der Graph der Funktion

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}, \end{cases}$$

wird als Hyperbel bezeichnet.

Allgemein kann man für den Kehrwert eines beliebigen Monoms vom Grad $n \in \mathbb{N}$ also eine entsprechende Funktion hyperbolischen Typs angeben:

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^n}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.2.10
Wie lautet die Wertemenge W_{f_n} der Funktion f_n für gerade $n \in \mathbb{N}$ bzw. für ungerade $n \in \mathbb{N}$?
Lösung:
Stets gilt $\frac{1}{x^n} \neq 0$, da ein Quotient nur Null werden kann, wenn der Zähler Null wird. Folglich kommt $0 \in \mathbb{R}$ nie in der Wertemenge vor. Da stets $x^n \geq 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\frac{1}{x^n} > 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$.

Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ kann allerdings auch $\frac{1}{x^n} < 0$ sein. Es ergibt sich

$$W_{f_n} = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (0, \infty) & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Dies ist auch aus den Graphen der Funktionen vom hyperbolischen Typ ersichtlich.

Weitere Beispiele für Funktionen vom hyperbolischen Typ haben wir bereits in Beispiel 1.1.8 und Aufgabe 1.1.5 in Abschnitt 1.1.2 betrachtet.

1.2.8 Gebrochenrationale Funktionen

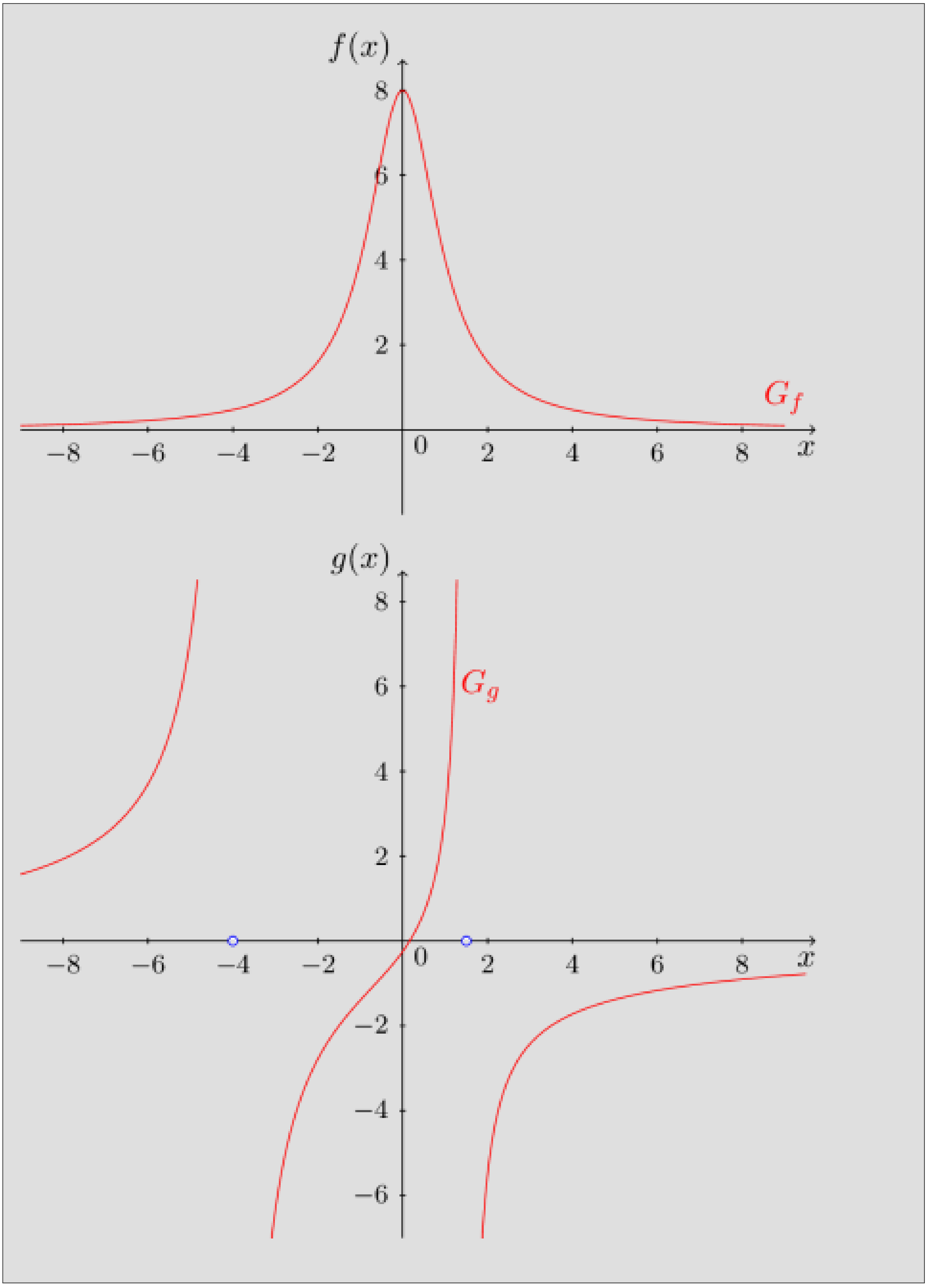
Allgemeine gebrochenrationale Funktionen besitzen Abbildungsvorschriften, die aus dem Quotienten zweier Polynome bestehen. Hier einige Beispiele mit ihren Graphen. Natürlich müssen auch bei diesen Funktionen diejenigen Zahlen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der Nenner in der Abbildungsvorschrift gleich Null wird.

Beispiel 1.2.5

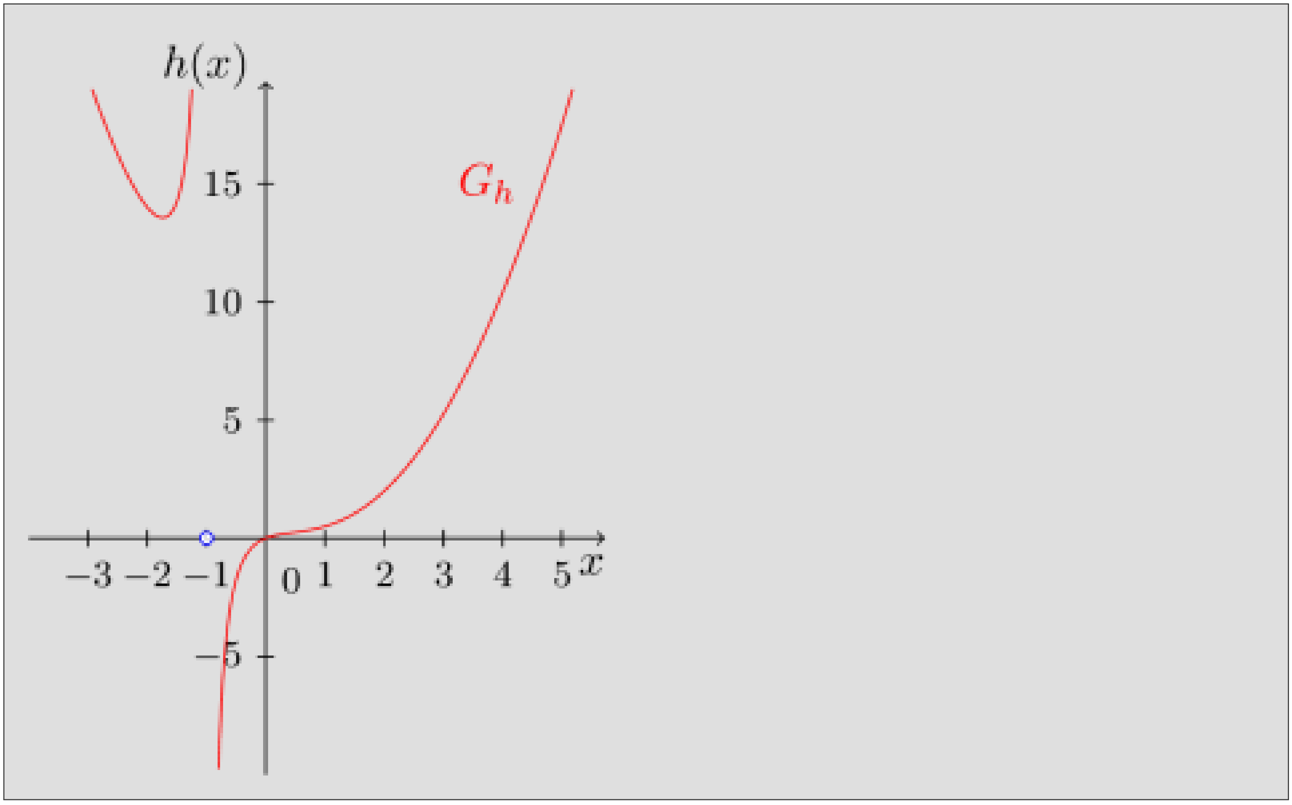
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{8}{x^2+1}, \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-4, \frac{3}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-18x+3}{2x^2+5x-12}, \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3-x^2+x}{x+1}. \end{cases}$$



f(x)
G_f
x
g(x)
G_g
x



Aufgabe 1.2.11
Gegeben ist die Funktion

$$\psi : \begin{cases} D_\psi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-42x}{x^2-\pi}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_\psi \subset \mathbb{R}$ für ψ.
Lösung:
Die Nullstellen des Nenners ergeben sich durch

$$x^2 - \pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\pi}.$$

Damit ist $D_\psi = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\}$.

Aufgabe 1.2.12
Bestimmen Sie für die gebrochen rationalen Funktionen im einführenden Beispiel 1.2.5 jeweils den Zähler- sowie den Nennergrad und berechnen Sie die Nullstellen des Zählers und des Nenners.
Lösung:
Die Funktion f hat den Zählergrad 0 und den Nennergrad 2. Es gibt keine Zählernullstelle ($8 \neq 0$) und keine Nennernullstelle ($x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung).// Die Funktion g hat den Zählergrad 1 und den Nennergrad 2. Die Zählernullstelle liegt bei $x = -\frac{1}{6}$ ($-18x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{18}$) und die Nennernullstellen $x_{1,2} = -4, \frac{3}{2}$ erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung $2x^2 + 5x - 12 = 0$, zum Beispiel mit Hilfe der Mitternachtsformel.// Die Funktion h hat den Zählergrad 3 und den Nennergrad 1. Die Nennernullstelle liegt einfach bei $x = -1$ ($x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$). Für die Zählernullstellen muss die Gleichung $x^3 - x^2 + x = 0$ gelöst werden. Nach ausklammern von x erhält man $x(x^2 - x + 1) = 0$ und folgert, dass eine Nullstelle bei $x = 0$ liegt. Schließlich muss noch die

quadratische Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ mit der Mitternachtsformel gelöst werden. Es ergibt sich hier allerdings eine negative Diskriminante von $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, so dass keine weitere reelle Lösung – und damit keine weitere Nennernullstelle – existiert.

Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion ergeben sich als die Zählernullstellen. So hat zum Beispiel die Funktion

$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x^2-2x-3} \end{cases}$$

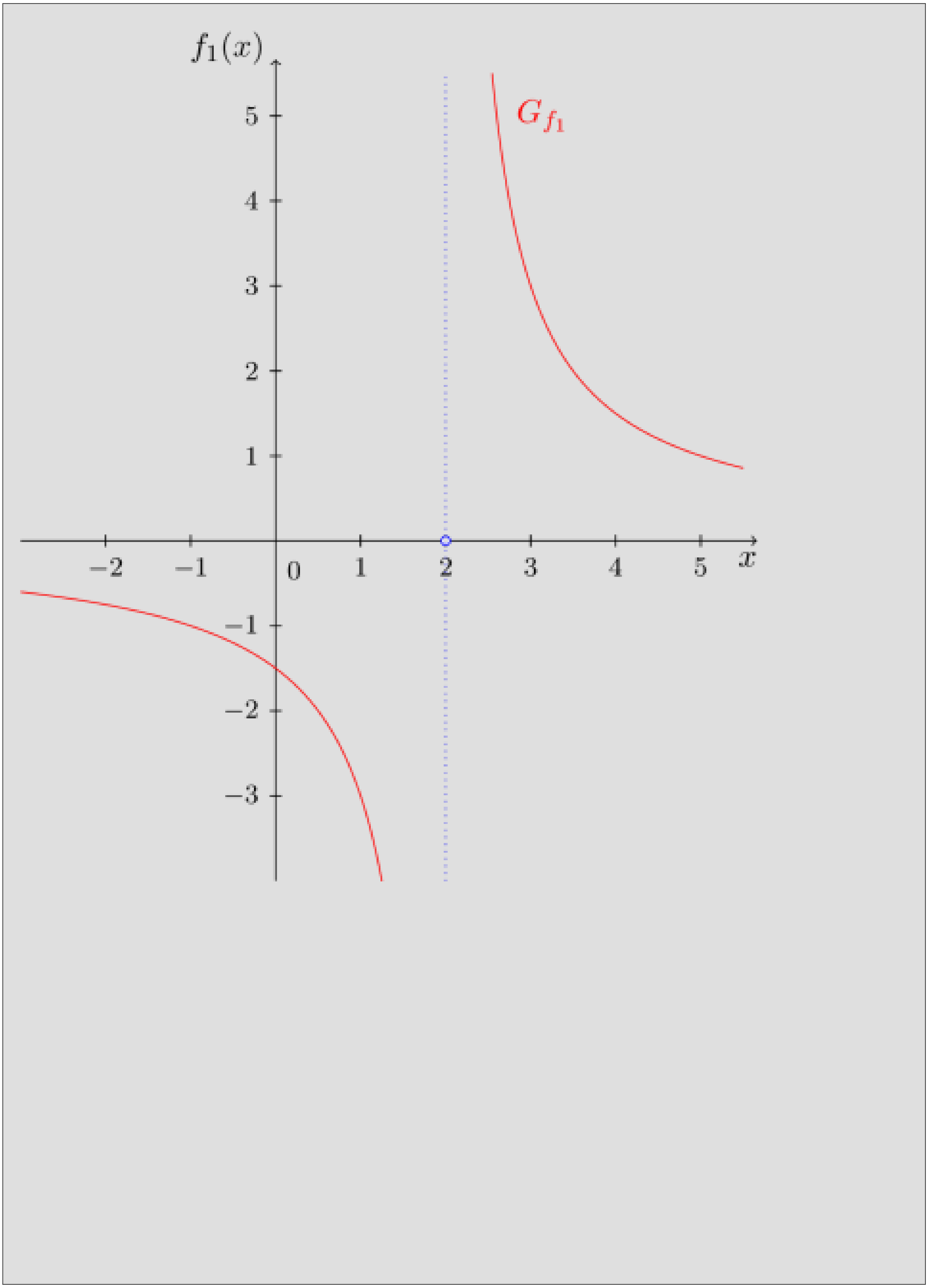
die einzige Nullstelle bei $x = 1$. Die Nennernullstellen gebrochenrationaler Funktionen, welche aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, müssen oft noch genauer untersucht werden. Vor allem ist von Interesse, wie die Graphen der Funktionen in der Nähe der Definitionslücken verlaufen. Die Nennernullstellen gebrochenrationaler Funktionen bezeichnet man auch als Polstellen. Die folgenden Beispiele zeigen, dass es verschiedene Typen von Polstellen gibt.

Beispiel 1.2.6

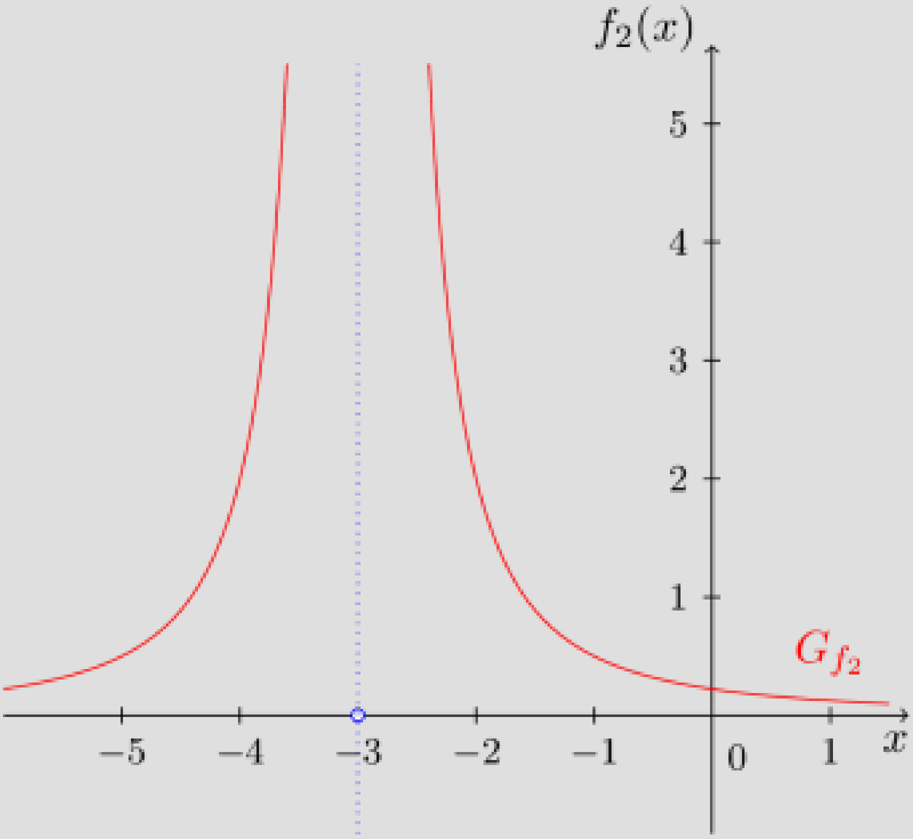
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{x-2} \end{cases}$$

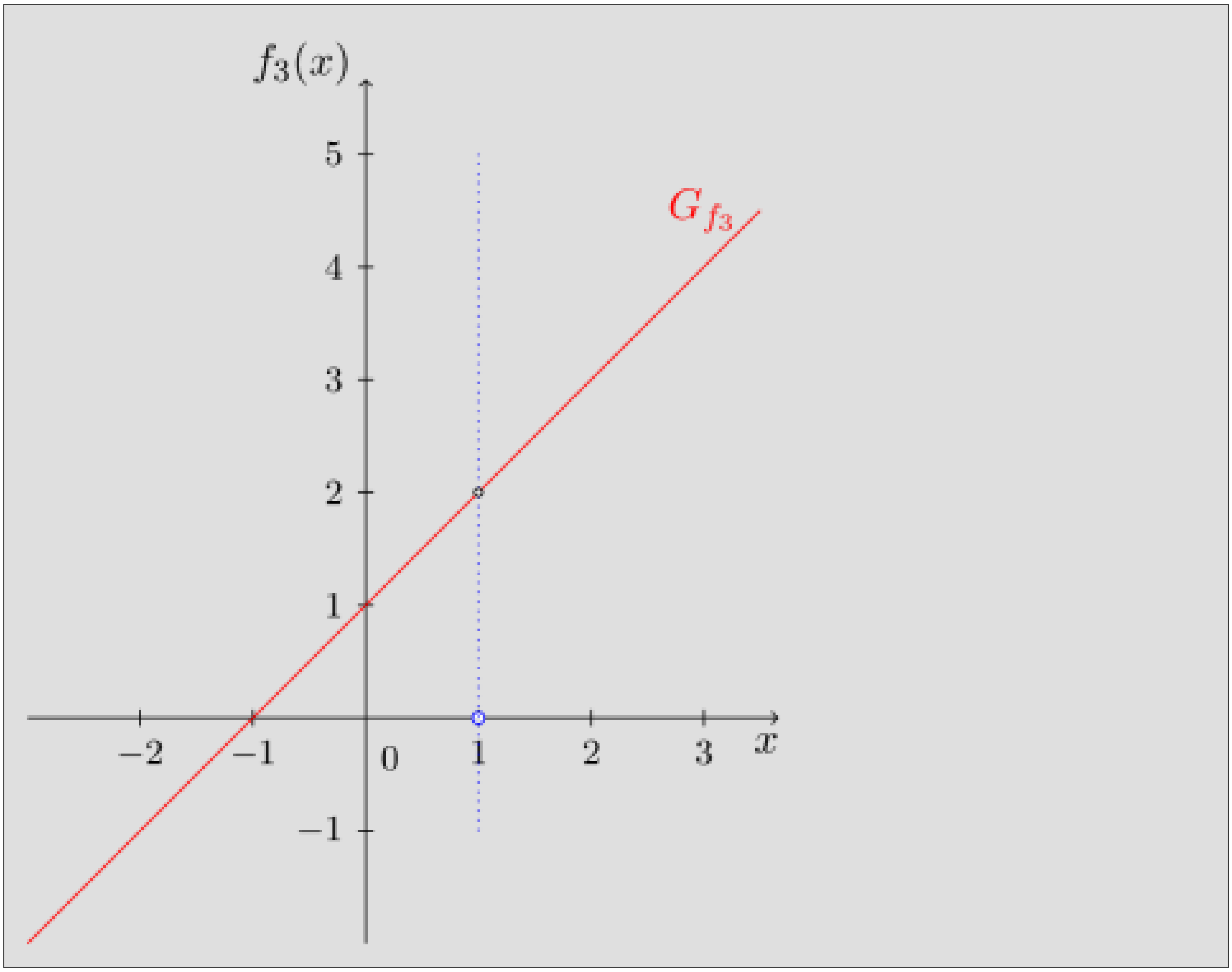
$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2}{(x+3)^2} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$$



$f_1(x)$
G_{f_1}
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3
4
5


$f_2(x)$
5
4
3
2
1
G_{f_2}
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
x



Die Stellen $x = 2$ und $x = -3$ sind sogenannte echte Polstellen der Funktionen f_1 und f_2, die Stelle $x = 1$ ist eine sogenannte hebbare Definitionslücke der Funktion f_3. Anhand der Graphen wird der Unterschied zwischen diesen Typen von Polstellen deutlich. Bei echten Polstellen wächst oder fällt der Graph in der Nähe der Polstelle unbeschränkt, und bei stetig hebbaren Definitionslücken mündet er von links und rechts in das „Loch" im Graphen ein.

Anhand der Abbildungsvorschriften der drei Funktionen kommt dieser Unterschied folgendermaßen zum Ausdruck: Die Werte $x = 2$ und $x = -3$ sind Nennernullstellen, aber keine Zählernullstellen der Funktionen f_1 bzw. f_2. Tatsächlich besitzen f_1 und f_2 gar keine Zählernullstellen. In einem solchen Fall sind die Nennernullstellen immer echte Polstellen.

Aufgabe 1.2.13
Ist die Nennernullstelle der Funktion

$$q : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^4-1}{2x-1} \end{array} \right.$$

eine echte Polstelle? Wenn ja, warum?
Lösung:

Die Stelle $x = \frac{1}{2}$ ist eine Nullstelle des Nenners:

$$2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Aber für den Zähler gilt:

$$x^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1,$$

womit die Zählernullstellen bei $x = -1$ und $x = 1$ liegen und $x = \frac{1}{2}$ keine Zählernullstelle ist. Damit ist $x = \frac{1}{2}$ eine echte Polstelle.

Ein weitere Unterschied wird zwischen den beiden Polstellen von f_1 und f_2 deutlich. Bei der Polstelle $x = 2$ von f_1 findet ein Vorzeichenwechsel der Funktion statt. Der Graph von f_1 fällt links der Polstelle unbeschränkt ins Negative und wächst rechts der Polstelle unbeschränkt ins Positive.// Der Graph von f_2 wächst auf beiden Seiten der Polstelle $x = -3$ ins positive, es findet also kein Vorzeichenwechsel statt.

In der Abbildungsvorschrift von f_3 hingegen kann man den Term, der dafür verantwortlich ist, dass man die Polstelle $x = 1$ nicht einsetzen darf herauskürzen. Dies ist bei gebrochenrationalen Funktionen, die eine hebbare Definitionslücke als Polstelle aufweisen, immer so.

Aufgabe 1.2.14
Bestimmen Sie alle Polstellen/Definitionslücken von

$$\gamma : \begin{cases} D_\gamma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+6}{x^2+x-6}, \end{cases}$$

sowie deren Typ. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_\gamma \subset \mathbb{R}$ an.
Lösung:
Die Nennernullstellen sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$, also

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2. \end{cases}$$

Folglich ist der größtmögliche Definitionsbereich

$$D_\gamma = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

Die Zählernullstelle ergibt sich durch $3x + 6 = 0$, liegt also ebenfalls bei $x = -2$. Wir können damit die Abbildungsvorschrift von γ also für $x \neq -2$ folgendermaßen umformen:

$$\gamma(x) = \frac{3x+6}{x^2+x-6} = \frac{3(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{x-3}.$$

Damit läßt sich die Funktion auch als

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{x-3} \end{cases}$$

schreiben und es liegt bei $x = -2$ eine stetig hebbare Definitionslücke und bei $x = 3$ eine echte Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor.

1.2.9 Asymptoten

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wie sich gebrochenrationale Funktionen im Unendlichen verhalten, falls der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-\pi\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+\pi}. \end{array} \right.$$

In f ist der Zählergrad 1 und der Nennergrad 1. Solche Funktionen werden als echt gebrochenrational bezeichnet. Beispiele hierfür haben wir im vorhergehenden Abschnitt 1.2.8 betrachtet.

Beispiel 1.2.7

Wir betrachten die Funktion

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \frac{1}{x-1} \end{array} \right.$$

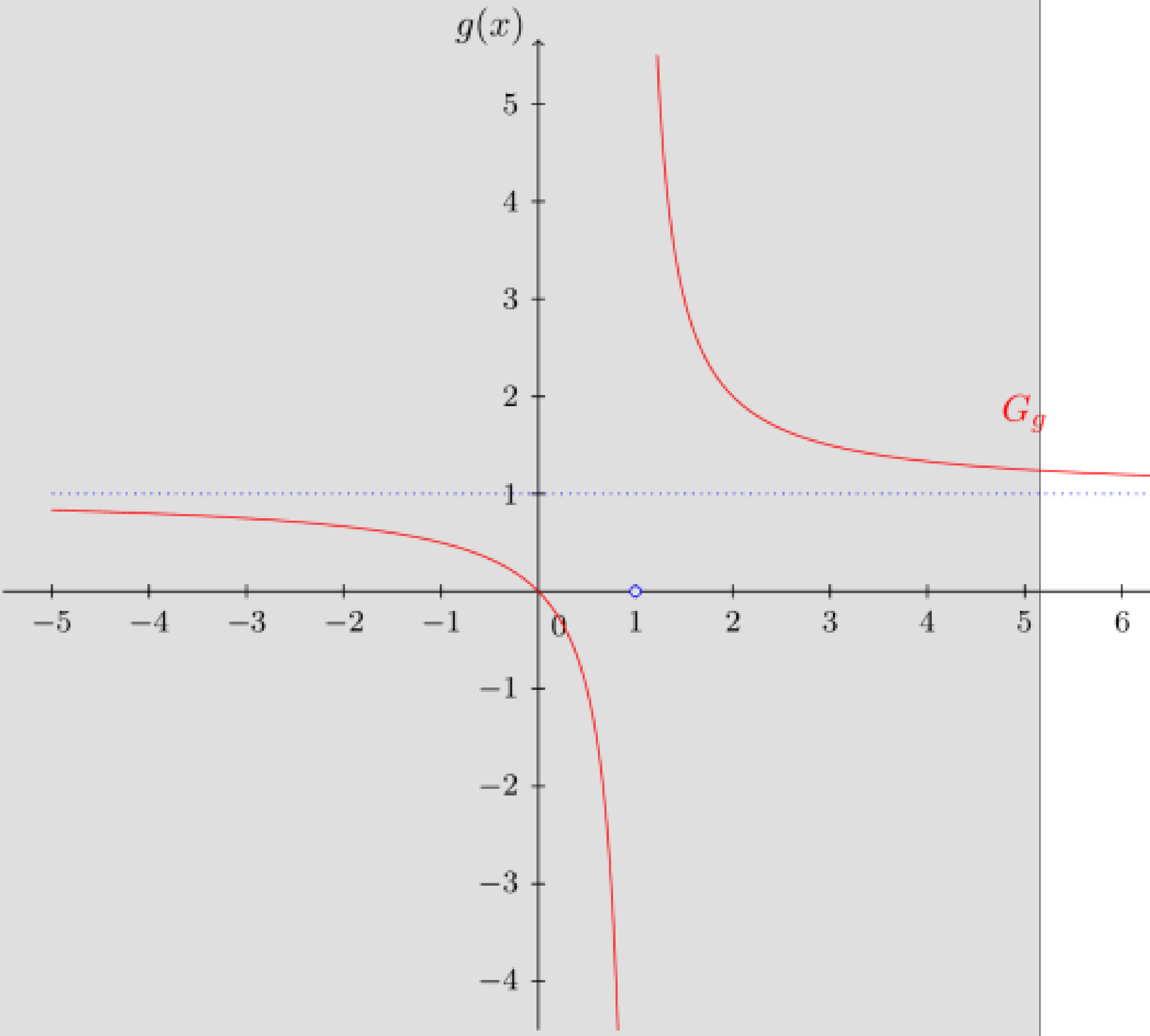
und stellen fest, dass deren Abbildungsvorschrift in der Form einer Summe aus einem Polynom (vom Grad 0) und einem echt gebrochenrationalen Term vorliegt. Durch Bilden des Hauptnenners ist es nun einfach $g(x)$ auf eine unecht gebrochenrationale Form zu bringen, in der der Zählergrad und der Nennergrad gleich sind:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}.$$

Wir können g also auch schreiben als

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x-1} \end{array} \right.$$

und betrachten den zugehörigen Graphen:



Neben der Polstelle und Definitionslücke bei $x = 1$ erkennen wir, dass der Wert $y = 1$ eine besondere Rolle spielt. Dieser wird offenbar von der Funktion g nie angenommen. Für die Wertemenge von g gilt $W_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Stattdessen nähert sich g für „sehr große" und „sehr kleine" Werte der Veränderlichen x immer stärker dem Wert 1 an ohne diesen jemals für eine reelle Zahl x zu erreichen.

Dies erkennt man in der Abbildungsvorschrift $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ folgendermaßen. Für „sehr große" (5, 10, 100, usw.) oder „sehr kleine" (-5, -10, -100, usw.) Werte für x nähert sich der echt gebrochenrationale Anteil $\frac{1}{x-1}$ immer mehr der 0 an, da x dort im Nenner vorkommt. Tendenziell bleibt also für solche Werte nur noch der polynomielle Anteil 1 aus der Abbildungsvorschrift übrig. Dieser Anteil kann nun durch eine – in diesem Fall konstante – Funktion beschrieben werden, die als Asymptote g_{As} der Funktion g bezeichnet wird:

$$g_{As} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

Da es sich in diesem Fall um eine konstante Funktion handelt, wird diese auch als waagrechte Asymptote bezeichnet.

Aufgabe 1.2.15
Bestimmen Sie die Asymptote der Funktion

$$i : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 - \frac{6}{x+2} \end{cases}$$

sowie die Asymptote der Hyperbel aus Abschnitt 1.2.7.
Lösung:
Es gilt

$$i(x) = 3 - \frac{6}{x+2}$$

mit echt gebrochenrationalem Anteil $\frac{6}{x+2}$. Folglich hat die waagrechte Asymptote von i die Abbildungsvorschrift $i_{As}(x) = 3$. Die Hyperbel

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

besitzt auch eine Asymptote. Wir können die Abbildungsvorschrift schreiben als

$$f(x) = 0 + \frac{1}{x},$$

womit für die Asymptote gilt $f_{As}(x) = 0$. Hier ist die Asymptote also diejenige Funktion, die konstant 0 ist: die Nullfunktion, oder – anders gesagt – die Querachse des Koordinatensystems.

Info 1.2.8

Eine gebrochenrationale Funktion f mit Zählerpolynom $p(x)$ vom Grad $z \geq 0$ und Nennerpolynom $q(x)$ vom Grad $n \geq 0$ der Form

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\text{Nennernullstellen}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \end{cases}$$

hat als Asymptote eine konstante Funktion – also eine waagrechte Asymptote – falls $z \leq n$ gilt (insbesondere ist die Nullfunktion die Asymptote im Fall $z < n$).

1.3 Potenzfunktionen

Einführung

In den Abschnitten 1.2.5 und 1.2.7 haben wir Monome und Funktionen vom hyperbolischen Typ kennengelernt. Zusammenfassend kann man diese als folgende Klasse von Funktionen aufschreiben:

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} \right. ,$$

wobei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $D_f = \mathbb{R}$ falls $k \in \mathbb{N}$ sowie $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$. In diesem Abschnitt wollen wir beliebige rationale Werte im Exponenten der Abbildungsvorschrift zulassen. Man erhält dann die sogenannten Potenzfunktionen, die wiederum die Monome und Funktionen vom hyperbolischen Typ als Spezialfälle enthalten. Wir stellen auch deren fundamentale Eigenschaften und einige Anwendungen zusammen.

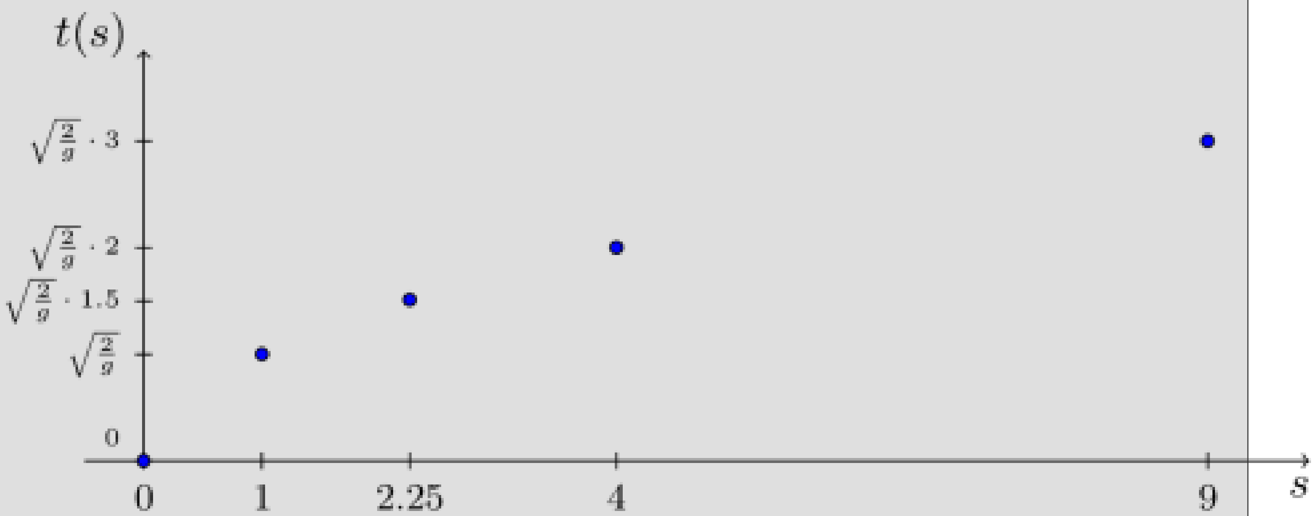
1.3.1 Wurzelfunktionen

Beispiel 1.3.1

Untersucht man einen Körper, der sich im freien Fall im homogenen Gravitationsfeld der Erde befindet, so kann man folgenden Zusammenhang zwischen seiner Fallzeit und seinem zurückgelegten Weg feststellen:

Fallzeit t in Sekunden	0	$\sqrt{\frac{2}{g}}$	$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 1.5$	$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 2$	$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 3$
zurückgelegter Weg s in Metern	0	1	2.25	4	9

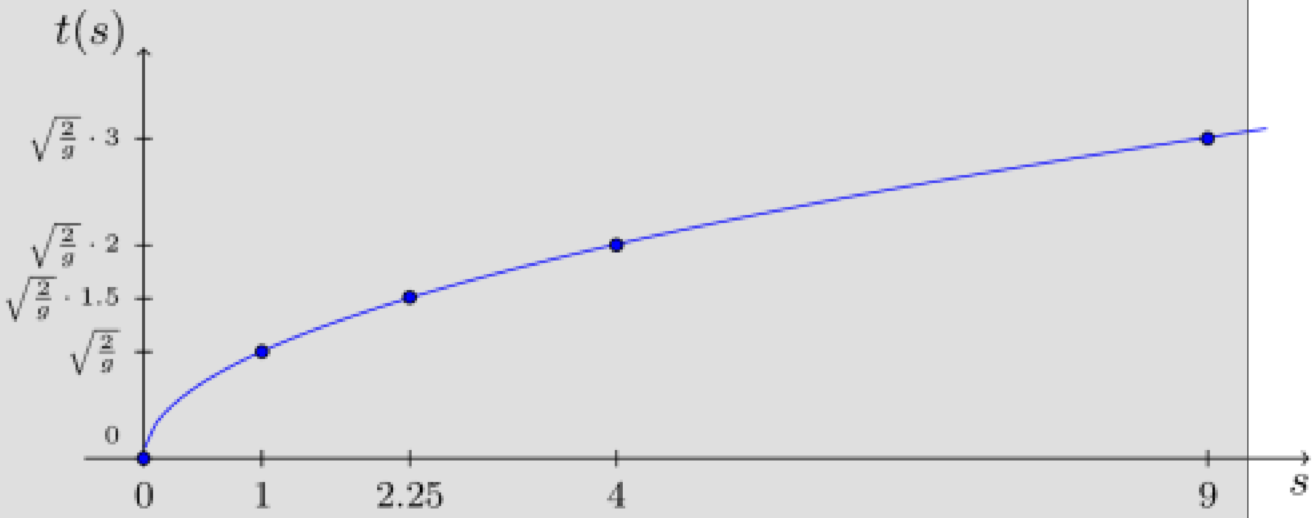
Dabei ist $g \approx 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die physikalische Konstante der Fallbeschleunigung. Trägt man nun diese Werte in einem Diagramm mit t auf der Hochachse und s auf der Querachse auf erhält man:



Dies legt nahe, dass man den Zusammenhang zwischen t und s, mit s als Veränderlicher, mathematisch durch die Funktion

$$t : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{s} \end{array} \right.$$

beschreiben kann, also eine Funktion, in deren Abbildungsvorschrift die Wurzel (genauer gesagt die Quadratwurzel) der Veränderlichen vorkommt. Deren Graph beinhaltet dann die obigen gemessenen Punkte:



Dieses Beispiel zeigt, dass Funktionen mit Abbildungsvorschriften, die Wurzeln der Veränderlichen enthalten, natürlicherweise in Anwendungen der Mathematik auftauchen.

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ bezeichnet man die Funktionen

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl} D_{f_n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array} \right. = x^{\frac{1}{n}}$$

als die Klasse der Wurzelfunktionen. Diese beinhalten offenbar die Quadratwurzel $f_2(x) = \sqrt{x}$, die dritte Wurzel $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, die vierte Wurzel $f_4(x) = \sqrt[4]{x}$, usw. als Abbildungsvorschriften von Funktionen (vgl. Potenzgesetze).

Aufgabe 1.3.1
Benutzen Sie die Potenzrechengesetze, um die Abbildungsvorschrift der Wurzelfunktionen ohne Wurzelzeichen und stattdessen mit Hilfe von Exponenten aufzuschreiben.
Lösung:
Nach den Potenzrechengesetzen gilt

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Also zum Beispiel

$$f_2(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad f_3(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad f_4(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}, \ldots$$

Aufgabe 1.3.2
Welche Funktion f_n ergäbe sich für $n = 1$?
Lösung:
Für $n = 1$ gilt nach den Potenzrechengesetzen

$$f_1(x) = \sqrt[1]{x} = x^{\frac{1}{1}} = x = \mathrm{Id}(x).$$

Es ergibt sich also die Identität. Diese schließt man für gewöhnlich aus der Klasse der Wurzelfunktionen aus.

Von großem Interesse ist nun der größtmögliche Definitionsbereich D_{f_n}, der für diese Wurzelfunktionen möglich ist. Denn offenbar kommt es auf den Wurzelexponenten n an, welche Werte man für x in die Abbildungsvorschriften einsetzen darf, um reelle Werte als Ergebnisse zu erhalten. So erkennen wir, dass bei der Quadratwurzel $\sqrt{}$ nur nicht-negative Werte ein reelles Ergebnis liefern. Betrachten wir allerdings die Kubikwurzel $\sqrt[3]{}$, so erhalten wir in diesem Fall, dass alle reellen Zahlen eingesetzt, wieder reelle Zahlen als Ergebnis liefern, so etwa $\sqrt[3]{-27} = -3$. Allgemein gilt:

Info 1.3.2

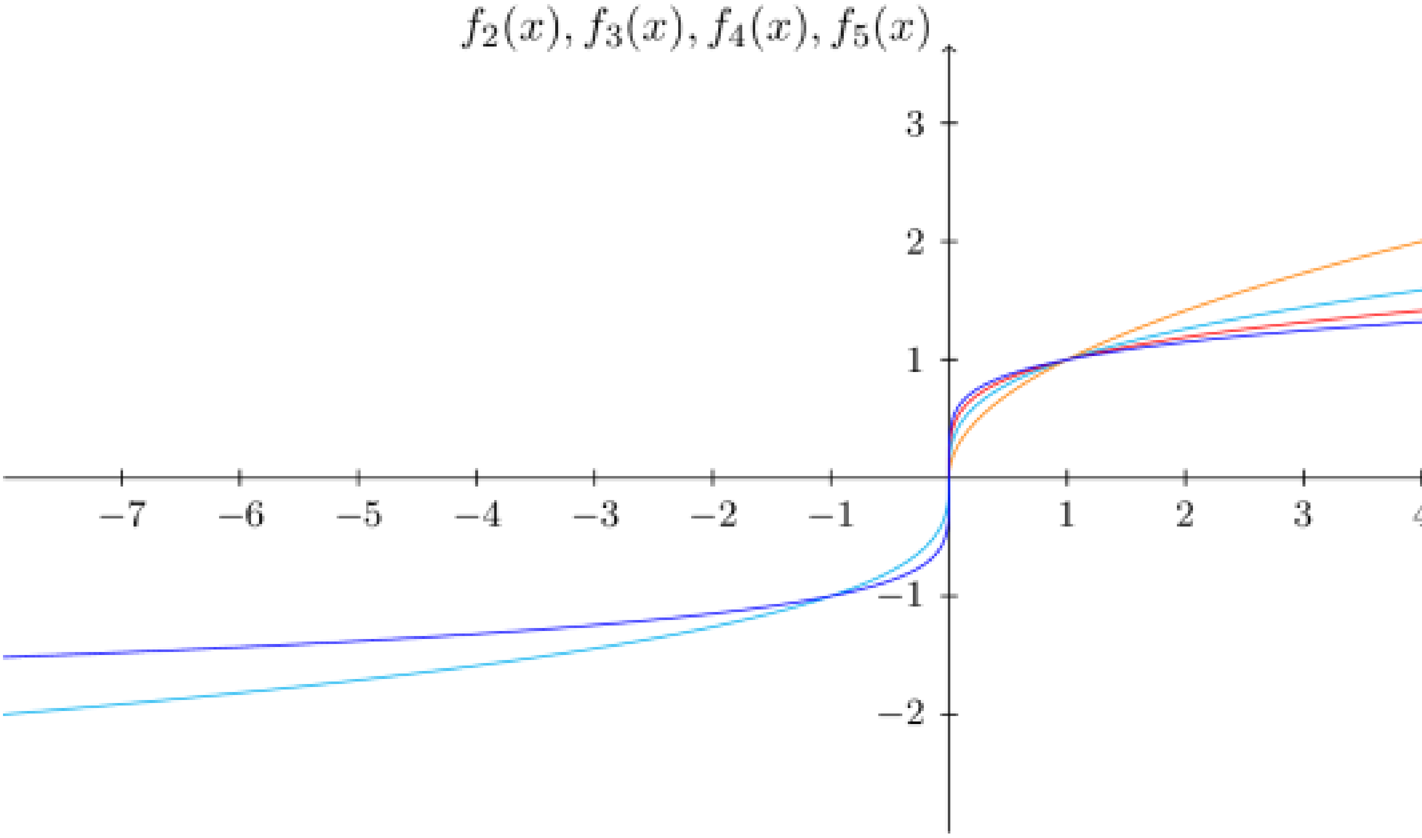
Für die Wurzelfunktionen

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl} D_{f_n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array} \right.$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ gelten die folgenden größtmöglichen Definitionsbereiche:

$$D_{f_n} =$$

Damit erhält man folgendes Aussehen für die Graphen der ersten vier Wurzelfunktionen f_2, f_3, f_4, f_5:



Aus dem Verlauf der Graphen sieht man, dass alle Wurzelfunktionen streng monoton wachsend sind.

Aufgabe 1.3.3
Bestimme für die Wurzelfunktionen

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} D_{f_n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array} \right.$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, den Wertebereich W_{f_n}, in Abhängigkeit davon ob n gerade oder ungerade ist.
Lösung:
Für die geradzahligen Wurzelfunktionen ergeben sich offenbar als Werte nur nicht-negative reelle Zahlen, denn nach den Potenzrechengesetzen kann $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{x}$, usw. für $x \geq 0$ nie negativ werden. Die ungeradzahligen Wurzelfunktionen können auch alle negativen reellen Zahlen als Werte liefern. Tatsächlich gilt $\sqrt[3]{x} < 0$, $\sqrt[5]{x} < 0$, usw. genau dann wenn $x < 0$ ist. Zusammenfassend gilt dann also unter Berücksichtigung der strengen Monotonie der Wurzelfunktionen:

1.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Einführung

Bei **Exponentialfunktionen** stellt die Veränderliche im Gegensatz zu den Potenzfunktionen nicht die Basis des Exponentialausdrucks dar, sondern sie bildet den Exponenten. Dementsprechend werden wir Zuordnungsvorschriften betrachten wie z.B.:

$$x \longmapsto 2^x \text{ oder } x \longmapsto 10^x$$

Exponentialfunktionen spielen in vielen unterschiedlichen Bereichen eine wichtige Rolle, so etwa bei der Beschreibung biologischer Wachstumsprozesse - diverse Modelle zur Bevölkerungsentwicklung eingeschlossen -, bei Prozessen des radioaktiven Zerfalls oder bei einer bestimmten Form der Zinseszinsberechnung. Betrachten wir ein Beispiel:

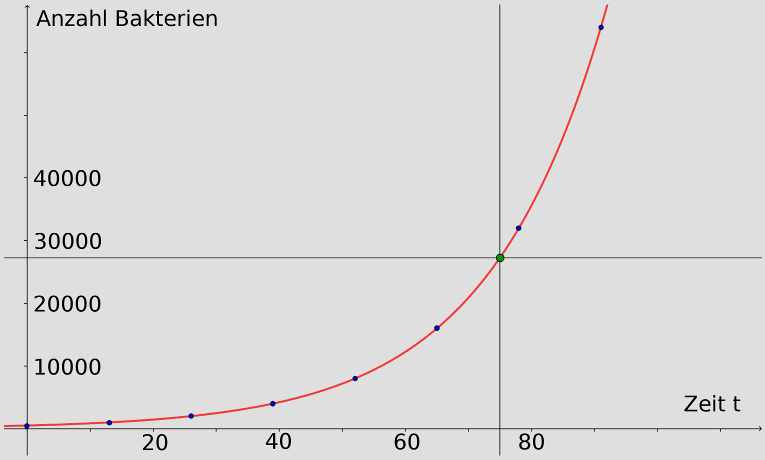
Beispiel 1.4.1

Eine Bakterienkultur enthält zu Versuchsbeginn 500 Bakterien und verdoppelt ihre Population alle 13 Minuten. Wir möchten gerne wissen, wieviele Bakterien nach 1 Stunde und 15 Minuten (also nach 75 Minuten) in der Kultur vorhanden sind?

In einem ersten Anlauf können wir eine einfache Wertetabelle erstellen, die uns die Bakterienpopulation zu Beginn ($t = 0$ min), nach $t = 13$ min, nach $t = 26$ min usw., also zu Vielfachen der 13-Minuten-Verdopplungszeitspanne, angibt:

Zeit t in min	0	13	26	39	52	65	78	91	usw.
Anzahl Bakterien	500	1000	2000	4000	8000	16000	32000	64000	usw.

Aus der Tabelle können wir abschätzen, dass die Antwort auf unsere Frage zwischen 16000 und 32000, wahrscheinlich näher bei 32000, liegen wird. Doch wie sieht es mit einer präzis(er)en Antwort aus? Dazu müssen wir den funktionalen Zusammenhang zwischen allgemeinen t-Werten und Bakterienanzahl kennen. In der unten stehenden Abbildung ist auch der Graph einer Funktion p wiedergegeben; dieser Funktionsgraph füllt sozusagen die Lücken zwischen den isolierten Punkten, die den Wertepaaren aus der Tabelle entsprechen und die ebenfalls eingezeichnet sind. Die zugehörige Abbildungsvorschrift ordnet jedem reellen Zeitpunkt eine Populationsgröße zu. Wie wir sehen werden, handelt es sich bei der Funktion um eine Exponentialfunktion.



Aus der graphischen Darstellung können wir die gesuchte Anzahl an Bakterien schon etwas genauer ablesen. Aber für die exakte Angabe benötigen wir die Abbildungsvorschrift, die hinter dem Graphen aus der Abbildung steht und die wir hier zunächst nur angeben:

$$p : [0; \infty) \longrightarrow (0\infty) \text{ mit } t \longmapsto p(t) = 500 \cdot 2^{(t/13)}$$

(In Aufgabe 1.4.2 auf Seite 52 werden wir diesen funktionalen Zusammenhang begründen.)
Damit erhalten wir für $t = 75$ (gemessen in Minuten) den Funktionswert

$$p(75) = 500 \cdot 2^{(75/13)} \approx 500 \cdot 54,539545 \approx 27270$$

Also leben nach 75 Minuten 27270 Bakterien in der fraglichen Population.

Inhalt

Im vorangegangen Beispiel tritt eine Exponentialfunktion zur Basis $a = 2$ auf, die Veränderliche - im Beispiel t - erscheint im Exponenten. Wir wollen nun die allgemeine Abbildungvorschrift für Exponentialfunktionen zu einer beliebigen Basis a angeben; dabei setzen wir allerdings $a > 0$ voraus:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = f_0 \cdot a^{\lambda x} \end{array}$$

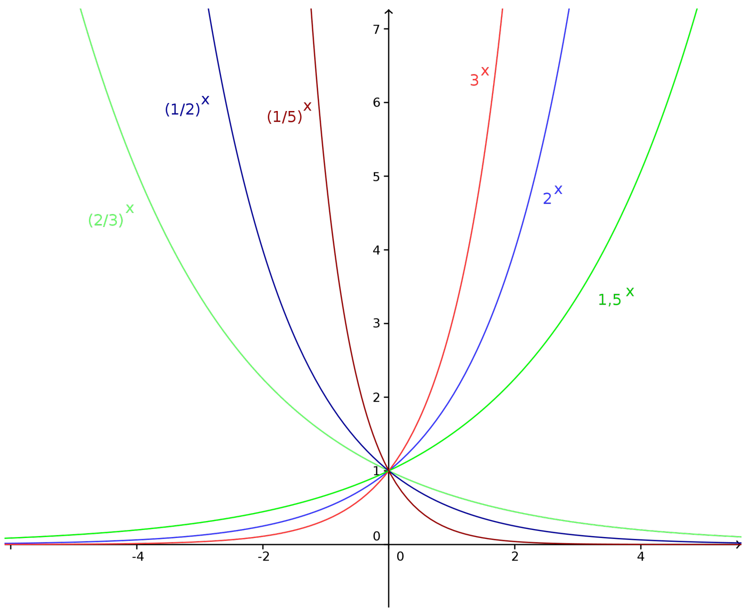
Dabei bezeichnen f_0 und λ sogenannte Parameter der Exponentialfunktion, auf die wir weiter unten eingehen werden.

Der Definitionsbereich aller Exponentialfunktionen wird von allen reellen Zahlen gebildet, $D_f = \mathbb{R}$, wohingegen der Wertebereich nur aus den positiven reellen Zahlen besteht ($W_f = \mathbb{R}^+$), da jedwede Potenz einer postiven Zahl nur positiv sein kann.

Aufgabe 1.4.1
Warum setzt man bei den Exponentialfunktionen voraus, dass die Basis a größer Null sein soll?
Lösung:
Eine Exponentialfunktion soll nicht nur für ausgewählte, spezielle oder isolierte Werte der Veränderlichen

x definiert sein, sondern, wenn möglich, für alle reellen Zahlen. Würde man negative Basiswerte $a < 0$ zulassen, so würden sofort Probleme beim Wurzelziehen - siehe $a^{(1/2)} = \sqrt{a}, a^{1/4}, a^{1/12}$ etc. - auftreten. Zum Beispiel sind Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert, vergleiche auch Abschnitt 1.3 auf Seite 45.

Einige generelle Eigenschaften von Exponentialfunktionen können wir im folgenden Bild erkennen, in dem Exponentialfunktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto g(x) = a^x$ für verschiedene Werte von a gegenübergestellt sind:



- Alle diese Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $(x = 0, y = 1)$: Dies gilt, da $g(x = 0) = a^0$ und $a^0 = 1$ für jede Zahl a.
- Ist $a > 1$, so steigt der Graph von g von links nach rechts (also für wachsende x-Werte) an; man sagt auch, dass die Funktion g streng monoton wachsend ist. Je größer der Wert für a ist, desto schneller wächst g für positive x-Werte. Geht man von rechts nach links (also zu immer größeren negativen x-Werten), so bildet die negative x-Achse eine Asymptote des Graphen.
- Ist $a < 1$, so fällt der Graph von g von links nach rechts (also für wachsende x-Werte) ab; man sagt auch, dass die Funktion g streng monoton fallend ist. Je größer der Wert für a ist, desto langsamer fällt g für negative x-Werte. Geht man von links nach rechts (also zu immer größeren positiven x-Werten), so bildet die positive x-Achse eine Asymptote.

Und was hat es nun noch mit den Parametern f_0 und λ auf sich? Der Parameter f_0 ist schnell erklärt: Setzt man den Wert $x = 0$ für die Veränderliche in die allgemeinen Exponentialfunktionen f ein,

$$f(x = 0) = f_0 \cdot a^{\lambda \cdot 0} = f_0 \cdot a^0 = f_0 \cdot 1 = f_0 \quad ,$$

so erkennt man, dass f_0 eine Art Start- oder Anfangswert darstellt (zumindest falls man die Veränderliche x zeitlich interpretiert); der exponentielle Verlauf $a^{\lambda x}$ wird generell mit dem Faktor f_0 multipliziert und dementsprechend gewichtet, d.h. gestreckt (für $|f_0| > 1$) bzw. gestaucht (für $|f_0| < 1$).

Der Parameter λ im Exponenten heißt **Wachstumsrate**; er bestimmt, wie stark die Exponentialfunktion - bei gleichbleibender Basis - wächst (für $\lambda > 0$) oder fällt (für $\lambda < 0$).

Aufgabe 1.4.2
Begründen Sie die Form der Exponentialfunktion $f(t) = 500 \cdot 2^{(t/13)}$, die im Beispiel 1.4.1 auf Seite 49 auftritt!
Lösung:
In jeder Verdopplungszeitspanne von 13 Minuten verdoppelt sich - wie der Name schon sagt - die Bakterienpopulation. Jeweils bezogen auf den Ausgangswert (500 Bakterien) hat sich also die Anzahl an Bakterien nach einer Zeitspanne von 13 Minuten verdoppelt, nach zwei solchen Zeitspannen vervierfacht, nach $3 \cdot 13$ Minuten verachtfacht (immer - wie erwähnt - im Vergleich zum Anfangswert) usw. Daran erkennen wir, dass bei dem Wachstumsprozess 2er-Potenzen involviert sind; dementsprechend wählen wir als Basis für den funktionalen Zusammenhang $a = 2$.

Diese Überlegung legt auch den Exponenten der gesuchten Exponentialfunktion fest: Unsere Zeitmessung muss sich auf die 13-Minuten-Zeitspanne beziehen, der Exponent ist daher $\frac{t}{13}$. Nach 13 Minuten ergibt sich somit für den Exponenten $\frac{13}{13} = 1$. Der Wachstumsfaktor ergibt sich zu $2^{(13/13)} = 2$. Nach zwei Zeitspannen (gleich 26 Minuten) ist der Exponent $\frac{26}{13} = 2$ und damit der Wachstumsfaktor insgesamt $2^{(26/13)} = 2^2 = 4$ usw.

Schließlich müssen wir $2^{(t/13)}$ noch mit dem richtigen Anfangswert (500 Bakterien) gewichten; dies geschieht mit Hilfe des Faktors 500.

1.4.1 Eulersche Funktion

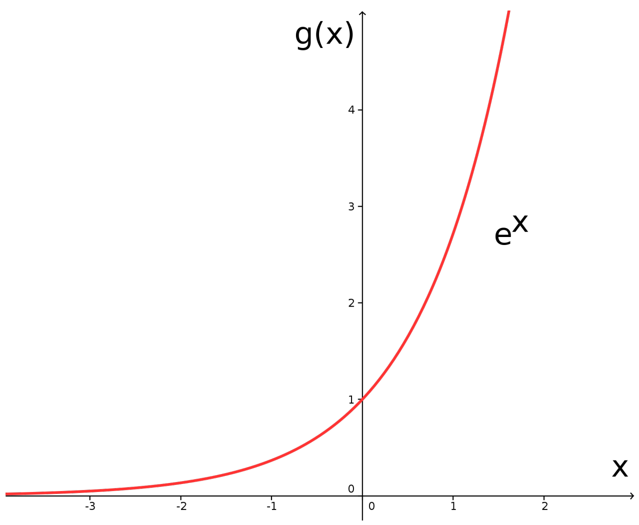
Es gibt eine ganz besondere Exponentialfunktion, manchmal auch als *die* Exponentialfunktion bezeichnet, um die wir uns jetzt kümmern wollen. In der Tat lassen sich, wie wir sehen werden, alle anderen Exponentialfunktionen auf diese besondere Exponentialfunktion zurückführen. Sie besitzt als Basis die **eulersche Zahl** e. Ihr (ungefährer) Wert beträgt

$$e = 2,718281828459045235\ldots \quad .$$

Betrachten wir also - zunächst ohne irgendwelche zusätzlichen Parameter - den Graphen der Exponentialfunktion,

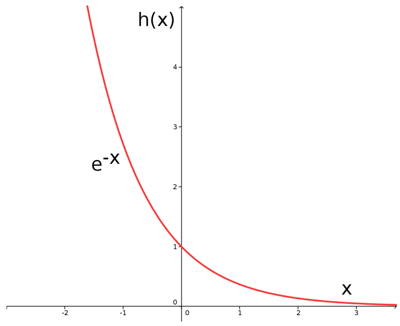
$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & g(x) = e^x \end{array} \quad ,$$

wegen der Basis e auch **e-Funktion** oder **natürliche Exponentialfunktion** genannt:



Wenig überraschend zeigt auch die e-Funktion das bereits in 1.4 auf Seite 50 diskutierte Verhalten der Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ $(a > 1)$; schließlich haben wir für die Basis ja auch nur einen speziellen Wert, nämlich $a = e$, gewählt. Insbesondere halten wir nochmals fest, dass die e-Funktion streng monoton wachsend ist, sich für große negative x-Werte an die negative x-Achse anschmiegt und für $x = 0$ den Wert 1 annimmt.

Aufgabe 1.4.3
Wie sieht der Graph der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto h(x) = e^{-x}$ aus, und welche generellen Eigenschaften besitzt diese Funktion?
Lösung:



Die Funktion h ist streng monoton fallend, für große positive x-Werte schmiegt sich der Graph von h an die positive x-Achse an und für $x = 0$ nimmt h den Wert $h(x = 0) = 1$ an.

Eingangs dieses Unterabschnitts haben wir behauptet, dass sich die weiter oben besprochenen Exponentialfunktionen auf die e-Funktion zurückführen lassen. Dies gelingt mit Hilfe der Identität

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)} \quad ,$$

die für beliebige reelle $a > 0$ und beliebige reelle x gilt. Dabei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus, dessen Funktionsgestalt im folgenden Abschnitt 1.4.2 auf Seite 55 noch ausgiebig beschäftigen wird.

Aufgabe 1.4.4
Begründen Sie die Identität $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.
Lösung:
Nach dem Potenzgesetz $(b^r)^s = b^{r \cdot s}$ kann die rechte Seite der in Frage stehenden Identität als $e^{x \cdot \ln(a)} = (e^{\ln(a)})^x$ umgeschrieben werden. Da ln die Umkehrung zu e *hoch* ist, folgt $e^{\ln(a)} = a$. Damit folgt $(e^{\ln(a)})^x = a^x$, was in der Tat die linke Seite der Identität darstellt.

Allgemeine e-Funktionen enthalten die bereits in Unterabschnitt 1.4 auf Seite 50 eingeführten Parameter f_0 und λ; ihre funktionale Gestalt sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = f_0 \cdot e^{\lambda x} \quad , \end{array}$$

Wiederum repräsentiert f_0 die Möglichkeit von 1 verschiedener Start- oder Anfangswerte, und der Faktor λ im Exponenten gestattet unterschiedlich starke (positive oder negative) Wachstumsraten. Wir wollen dies abschließend an einem Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 1.4.2

Bei einer Versuchsreihe mit radioaktiven Jodatomen (^{131}I) ergeben sich im Mittel folgende Daten:

Anzahl Jodatome	10000	5000	2500	1250	usw.
Anzahl Tage seit Beginn	0	8,04	16,08	24,12	usw.

Mit anderen Worten: Alle $8,04$ Tage halbiert sich die Anzahl der Jodatome aufgrund radioaktiven Zerfalls; man spricht daher in diesem Zusammenhang davon, dass die Halbwertszeit h von Jod-131 $h = 8,04$ Tage beträgt.

Der radioaktive Zerfall folgt einem Exponentialgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

Unsere Exponentialfunktion heißt hier N; sie gibt die Anzahl der noch vorhandenen Jodatome an. N_0 steht dementsprechend für die Anzahl der Jodatome zu Beginn, also $N_0 = 10000$. Die Veränderliche im vorliegenden Beispiel ist die Zeit t (gemessen in Tagen). Von dem Parameter λ erwarten wir, dass er negativ ist, da es um die Beschreibung eines Zerfallsprozesses, also eines Prozesses mit negativem Wachstum, geht. Wir wollen λ in der Folge aus den Messdaten bestimmen:

Nach $h = 8,04$ Tagen sind nur noch 5000 Jodatome vorhanden, d.h. $N(t = 8,04) = 5000 = \frac{N_0}{2}$. Verwenden wir das Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall, so erhalten wir:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot h}$$

Wir können N_0 auf beiden Seiten der Gleichung kürzen und anschließend logarithmieren (siehe Abschnitt 1.4.2 auf der nächsten Seite):

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{\lambda \cdot h})$$

Die linke Seite formen wir gemäß den Rechenregeln für den Logarithmus um (siehe Abschnitt 1.4.2 auf der nächsten Seite), $\ln(1/2) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$. Für die rechte Seite beachten wir, dass Logarithmieren die Umkehrung zum Exponentieren darstellt, $\ln(e^{\lambda \cdot h}) = \lambda \cdot h$; damit folgt:

$$\begin{aligned} -\ln(2) &= \lambda \cdot h \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= -\frac{\ln(2)}{h} \end{aligned}$$

Mit $h = 8,04$ Tage für Jod-131 folgt für den Parameter λ im vorliegenden Fall

$$\lambda \approx -0,0862 \, \frac{1}{\text{Tage}} \quad .$$

Andere radioaktive Substanzen besitzen andere Halbwertszeiten - Plutonium-239 z.B. weist eine Halbwertszeit von ungefähr 24000 Jahren auf - und führen folglich auf andere Werte für den Parameter λ im Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall.

1.4.2 Logarithmus

In Abschnitt 1.4.1 auf Seite 52 haben wir beim Studium der e-Funktion,

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & g(x) = e^x \end{array} ,$$

insbesondere auf eine sehr wichtige Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion hingewiesen, nämlich dass diese Funktion streng monoton wachsend ist. Spiegelt man den Graph der Funktion an der Winkelhalbierenden zwischen dem ersten und dritten Quadranten, so erhält man den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion - und versieht sie mit einem eigenen Symbol, nämlich ln:

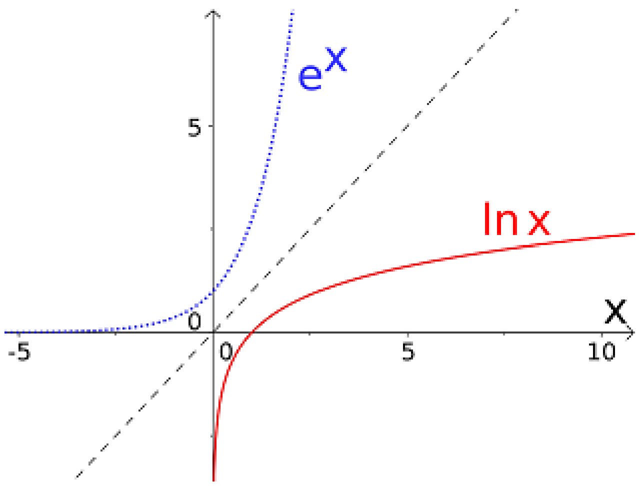
Info 1.4.3

Die über die Gleichung $e^{\ln(x)} = x$ erklärte Funktion

$$\ln: \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{cases}$$

heißt die **natürliche Logarithmusfunktion**.

Die Gleichung ist dabei so zu lesen, dass $\ln(x) = a$ derjenige Wert a ist mit $e^a = x$. Diese Konstruktion wird im folgenden Bild dargestellt:



Folgende Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion können wir dem Graphen entnehmen:

- Die Funktion ln ist streng monoton wachsend.
- Nähert man sich von rechts auf der x-Achse dem Nullpunkt, so nimmt $\ln(x)$ immer größere negative Werte an: Wir halten fest, dass sich der Graph von ln an die negative Hochachse (y-Achse) anschmiegt.
- An der Stelle $x = 1$ besitzt die natürliche Logarithmusfunktion den Wert 0, $\ln(1) = 0$.

Neben der natürlichen Logarithmusfunktion gibt es noch andere Logarithmusfunktionen, die jeweils zu einem bestimmten Exponenten gehören:

Info 1.4.4

Ist $b > 0$ ein beliebiger Exponent, so nennt man die über die Gleichung $b^{\log_b(x)} = x$ (sprich: $\log_b(x) = a$ ist derjenige Exponent a mit $b^a = x$) erklärte Funktion

$$\log_b : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_b(x) \end{cases}$$

die **allgemeine Logarithmusfunktion** zur Basis b.

Die Logarithmusfunktion kann man in der Regel nicht direkt ausrechnen. Da sie als die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion definiert ist, versucht man in der Regel, ihre Eingabe als Potenz zu schreiben und den Exponenten abzulesen.

Beispiel 1.4.5

Typische Berechnungen für den natürlichen Logarithmus sind

$$\ln(e^5) \;=\; 5 \;\;,\;\; \ln(\sqrt{e}) \;=\; \ln(e^{\frac{1}{2}}) \;=\; \frac{1}{2}$$

sowie für den allgemeinen Logarithmus

$$\log_5(25) \;=\; \log_5(5^2) \;=\; 2 \;\;,\;\; \log_3(81) \;=\; \log_3(3^4) \;=\; 4\,.$$

Dabei muss man auf die Basis des Logarithmus achten, beispielsweise ist

$$\log_2(64) \;=\; \log_2(2^6) \;=\; 6 \;\text{ aber }\; \log_4(64) \;=\; \log_4(4^3) \;=\; 3\,.$$

Aufgabe 1.4.5
Berechnen Sie diese Logarithmen:

a. $\ln(\sqrt[3]{e}) = \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\ln(\sqrt[3]{e}) = \ln(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}$.

b. $\log_2(256) = \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\log_2(256) = \log_2(2^8) = 8$.

c. $\log_9(3) = \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\log_9(3) = \log_9(9^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$.

In der Mathematik und den Naturwissenschaften werden folgende Logarithmen häufig eingesetzt und erhalten deshalb besondere Symbole:

- Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ oder manchmal auch nur $\log(x)$, dieser Logarithmus gehört zu den Zehnerpotenzen und wird beispielsweise zur Berechnung von pH-Werten in der Chemie eingesetzt.
- Logarithmus zur Basis 2: $\log_2(x) = \mathrm{ld}(x)$, dieser Logarithmus ist in der Informatik wichtig.
- Logarithmus zur Basis e: $\log_e(x) = \ln(e)$, der natürliche Logarithmus ist für praktische Rechnungen meist ungeeignet (es sei denn, der Ausdruck ist eine e-Potenz). Er wird als natürlich bezeichnet, weil die Exponentialfunktion zur Basis e aus mathematischer Sicht einfacher ist als die allgemeinen Exponentialfunktionen (z.B. weil e^x seine eigene Ableitung ist, b^x aber nicht $b \neq e$).

Für die Logarithmusfunktion gibt es zahlreiche Rechenregeln, die im folgenden Abschnitt erklärt werden.

1.4.3 Logarithmengesetze

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten gewisse Gesetze, die sich aus den Potenzgesetzen herleiten lassen:

Info 1.4.6

Die folgenden Rechenregeln bezeichnet man als **Logarithmengesetze**:

$$\begin{aligned} \log(u \cdot v) &= \log(u) + \log(v) && (u, v > 0) \\ \log\left(\frac{u}{v}\right) &= \log(u) - \log(v) && (u, v > 0) \\ \log(u^x) &= x \cdot \log(u) && (u > 0, x \in \mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Diese Gesetze sind neben dem natürlichen auch für alle anderen Logarithmen richtig und eignen sich dazu, einen gegebenen Term so umzuformen, dass Potenzen alleine in den Logarithmen stehen:

Beispiel 1.4.7

Den Wert $\mathrm{ld}(4^5)$ kann man beispielsweise mit Hilfe der Logarithmengesetze so ausrechnen:

$$\mathrm{ld}(8^5) \;=\; \log_2(8^5) \;=\; 5\cdot\log_2(8) \;=\; 5\cdot\log_2(2^3) \;=\; 5\cdot 3 \;=\; 15\,.$$

Produkte in Logarithmen kann man in Summen außerhalb der Logarithmen zerlegen:

$$\lg\left(100\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{10}\right) \;=\; \lg(100)+\lg(\sqrt{10})-\lg(10) \;=\; 2+\frac{1}{2}-1 \;=\; \frac{3}{2}\,.$$

Wichtig bei der Zerlegungsregel $\log(u\cdot v) = \log(u)+\log(v)$ ist, dass sie Produkte in Summen umwandelt. Der umgekehrte Weg ist beim Logarithmus nicht möglich, den Logarithmus einer Summe kann man nicht weiter umformen.

1.5 Trigonometrische Funktionen

Einführung

Die **Trigonometrie** ist der griechischen Wortherkunft nach die Maßlehre der Dreiecke. Eine zentrale Rolle nehmen dabei die sogenannten **trigonometrischen Funktionen**, wie Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion, ein.

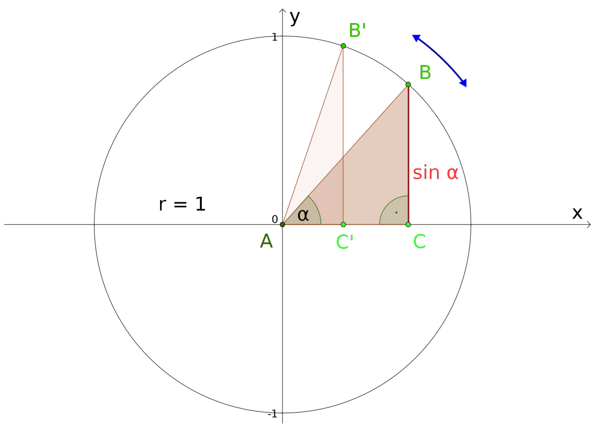
Das Anwendungsfeld von Sinus, Kosinus, Tangens & Co. ist jedoch nicht auf „simple" Dreiecksberechnungen beschränkt. Vielmehr entfalten die trigonometrischen Funktionen ihr eigentliches Potenzial erst in den mannigfachen Anwendungsbereichen, deren wichtigste vielleicht in der Beschreibung von Schwingungs– und Wellenvorgängen durch trigonometrische Funktionen in Physik und Technik liegen. Aber auch in vielen anderen Gebieten, der Landvermessung etwa oder der Astronomie, kommen sie zum Tragen.

1.5.1 Die Sinusfunktion

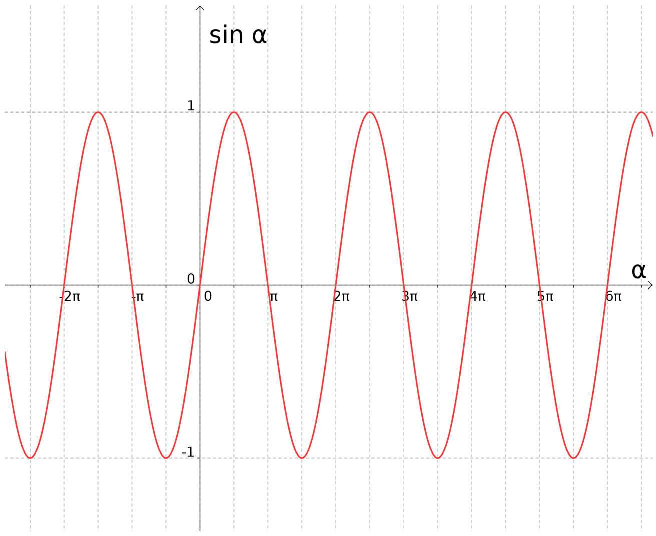
In Modul **??** auf Seite ?? wurden die trigonometrischen Funktionen elementar im rechtwinkligen Dreieck durch

$$\sin(\alpha) \quad = \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}.$$

sowie am Einheitskreis erklärt. Ausgehend von dieser Definition von $\sin(\alpha)$ gelangt man zur **Sinusfunktion**, indem man den Winkel α zur Veränderlichen einer Funktion mit Namen sin macht. Man kann sich dies an Hand einer Familie von rechtwinkligen Dreiecken ABC verdeutlichen, die dem **Einheitskreis**, das ist ein Kreis mit Radius $r = 1$, auf bestimmte Art und Weise einbeschrieben sind:



Beginnen wir mit dem Winkel $\alpha = 0°$, also einem zur Strecke entarteten Dreieck, so ist die Länge der Strecke $\overline{BC}$ gleich 0. Lassen wir nun den Punkt B entgegen dem Uhrzeigersinn um den Kreis wandern, so wächst α - und auch $\sin(\alpha)$ - zunächst an, bis für $\alpha = 90°$ ein maximaler Wert ($\sin(90°) = 1$) erreicht wird, bevor α weiter zu-, aber $\sin(\alpha)$ wieder abnimmt. Für $\alpha = 180°$ ist das Dreieck ABC wieder zur Strecke degeneriert, und $\sin(180°) = 0$. Wird α noch größer, „klappt" das Dreieck „nach unten", die Stecke $\overline{BC}$ ist parallel zur negativen Hochachse (y-Achse) ausgerichtet, ihre Länge daher negativ. Für $\alpha = 270°$ tritt der maximal negative Wert auf, bevor er sich wieder 0 nähert. Bei $\alpha = 360°$ beginnt das Spiel von Neuem.



Das voranstehende Schaubild gibt den Graphen der Sinusfunktion,

$$\begin{array}{rccl} \sin: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,+1] \\ & \alpha & \longmapsto & \sin(\alpha) \quad , \end{array}$$

wieder. Allerdings haben wir auf der Querachse (α-Achse) den Winkel α nicht - wie in der bisherigen Diskussion - im Gradmaß aufgetragen, sondern wir haben das in diesem Zusammenhang üblichere Bogenmaß verwendet.

Halten wir einige der wichtigsten Eigenschaften der Sinusfunktion fest:

- Die Sinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $D_{\sin} = \mathbb{R}$; der Wertebereich besteht dagegen nur aus dem Intervall von -1 bis $+1$, diese beiden Endpunkte eingeschlossen: $W_{\sin} = [-1,+1]$
- Nach gewissen Abständen wiederholt der Graph der Sinusfunktion exakt sein Aussehen; man spricht in diesem Zusammenhang von der Periodizität der Sinusfunktion. Die **Periode** beträgt $360°$ bzw. 2π. Formelmäßig kann man diesen Sachverhalt als

  $$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$$

  ausdrücken.

Schon die Betrachtung des Graphen der einfachen Sinusfunktion legt die Verwendung dieser Funktion für die Beschreibung von Wellenvorgängen nahe. Um jedoch die gesamte Leistungsfähigkeit der Sinusfunktion ausschöpfen zu können, werden zuvor noch einige zusätzliche Parameter eingeführt. So können die „Ausschläge“ der Sinusfunktion mit einem sogenannten Amplitudenfaktor A verstärkt oder abgemildert, die „Schnelligkeit“ oder „Dichte“ der Auf- und Abbewegungen durch einen frequenzartigen Faktor a beeinflusst und der gesamte Verlauf des Graphen kann mit einer Verschiebekonstanten b nach rechts oder links verrückt werden. Die allgemeine Sinusfunktion besitzt daher folgende Gestalt:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-A,+A] \\ & x & \longmapsto & f(x) = A\,\sin(ax+b) \end{array}$$

Beispiel 1.5.1

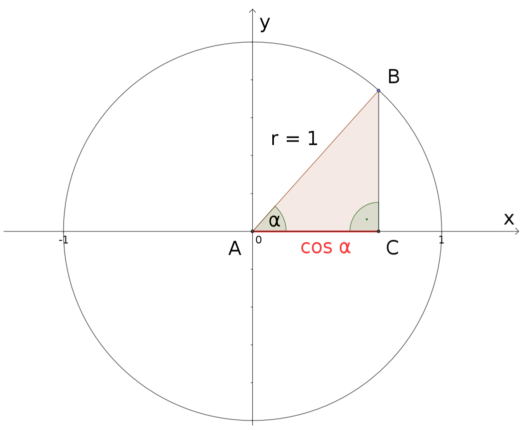
Beim Fadenpendel schwingt eine kleine schwere Masse im Gravitationsfeld der Erde an einem langen dünnen Faden, der z.B. fest an der Decke eines (hohen) Raumes verankert ist. Unter gewissen idealisierenden Annahmen und für kleine Werte des Auslenkwinkels φ aus der Ruhelage (der Lotrechten) hängt φ von der Veränderlichen t, der Zeit, über eine allgemeine Sinusfunktion ab:

$$\varphi(t) = A\,\sin(\frac{2\pi}{T}t + b)$$

Dabei bezeichnet T die sogenannte Schwingungsdauer des Pendels, also diejenige Zeitspanne, die für eine vollständige Schwingung vom Pendel benötigt wird.

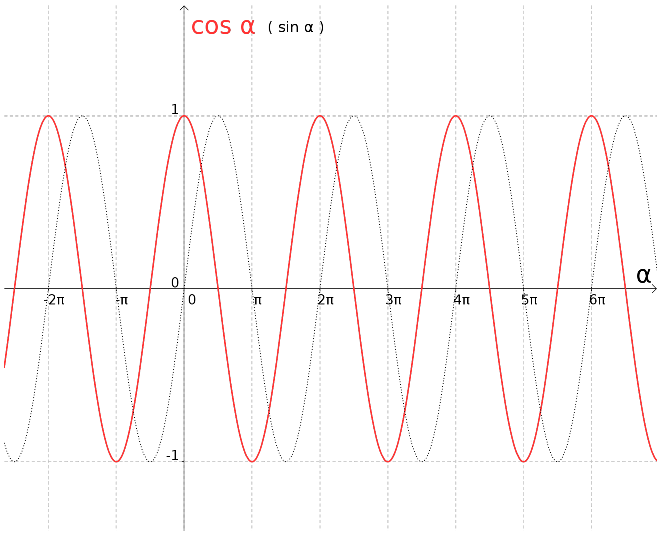
1.5.2 Kosinus und Tangens

Im Grunde genommen müssen wir für Kosinus- und Tangensfunktion die zur Sinusfunktion analogen Überlegungen angehen, die wir aus dem vorigen Unterabschnitt 1.5.1 auf Seite 59 kennen. Da wir schon etwas Übung besitzen, können wir die Diskussion etwas straffen. Beginnen wir mit der **Kosinusfunktion** und betrachten erneut unsere dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreiecke:



Wiederum besitzen alle Hypothenusen dieser so konstruierten rechtwinkligen Dreiecke die Länge 1, sodass die Kosinus der Winkel α im Bild als Längen der Strecken $\overline{AC}$ auftreten. Bewegen wir wie zuvor den Punkt B im Gegenuhrzeigersinn gleichmäßig um den Kreis und variieren so den Winkel α, erhalten wir letztlich die Kosinusfunktion:

$$\begin{array}{rrcl} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,+1] \\ & \alpha & \longmapsto & \cos(\alpha) \end{array}$$



Das Schaubild gibt neben dem Graphen der Kosinus- (durchgezogene Linie) nochmals denjenigen der Sinusfunktion (gepunktete Linie) zu Vergleichszwecken wieder; wir erkennen eine sehr enge Verwandtschaft, die wir noch thematisieren werden.

Welche wichtigen Eigenschaften besitzt die Kosinusfunktion?

- Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion. Die Periode ist wieder 2π bzw. $360°$.
- Der Definitionsbereich der Kosinusfunktion ist ganz $\mathbb{R}$, $D_{\cos} = \mathbb{R}$, der Wertebereich das Intervall von -1 bis $+1$, die Endpunkte inbegriffen, $W_{\cos} = [-1, +1]$.
- Aus dem obigen Bild der Graphen von $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ ergibt sich unmittelbar, dass
$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$
für alle reellen Werte von α gilt. Ebenso richtig, aber etwas schwieriger einzusehen, ist
$$\cos(\alpha) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Aufgabe 1.5.1
An welchen Stellen nimmt die Kosinusfunktion ihren maximalen Wert 1 an, wo ihren maximal negativen Wert -1? An welchen Punkten besitzt sie Nullstellen (d.h. wo ist der Funktionswert gleich 0)?
Lösung:
Es gilt $\cos(0) = 1$; aufgrund der Periodizität mit Periode 2π trifft dies auch für $\pm 2\pi, \pm 2 \cdot 2\pi, \pm 3 \cdot 2\pi, \ldots$ zu. Also nimmt die Kosinusfunktion den maximalen Wert 1 für alle ganzzahligen Vielfachen von 2π (bzw. für alle geradzahligen Vielfachen von π) an; man kann dies auch so schreiben:
$$\cos(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{2k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$$
Den Wert -1 erreicht die Kosinusfunktion an den Stellen $\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, also für ungeradzahlige Vielfache von π:
$$\cos(\alpha) = -1 \Leftrightarrow \alpha \in \{(2k+1) \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$$
Nullstellen treten für $\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$, d.h. für halbganzzahlige Vielfache von π auf:
$$\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{\tfrac{k}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Wie im Falle des Sinus gibt es auch für den Kosinus eine allgemeine Kosinusfunktion, in deren Definition zusätzliche Freiheiten in Form von Parametern auftauchen (Amplitudenfaktor B, Frequenzfaktor c sowie Verschiebekonstante d); auf diese Art und Weise eröffnet sich wiederum die Möglichkeit, den Funktionsverlauf an unterschiedliche Situationen (in Anwendungsbeispielen) anzupassen:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-A, +A] \\ & x & \longmapsto & g(x) = B\cos(cx + d) \end{array}$$

Aufgabe 1.5.2
In Beispiel 1.5.1 auf Seite 61 haben wir das Fadenpendel andiskutiert. Insbesondere kann man den zeitlichen Verlauf der Pendelauslenkung φ unter den Voraussetzungen bestimmen, dass die Schwingungsdauer T gerade π Sekunden beträgt, und dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Pendel bei einer Auslenkung von 30° losgelassen wird:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{2}).$$

Kann man diese Situation auch mit Hilfe der (allgemeinen) Kosinusfunktion (anstelle der Sinusfunktion) beschreiben, und wenn ja, wie sieht dann $\varphi(t)$ aus?
Lösung:
Die Antwort auf die erste Frage lautet: Ja, es ist möglich, die Kosinusfunktion zur Beschreibung des vorliegenden Sachverhaltes heranzuziehen (wie wir sogleich sehen werden).

Im Prinzip könnten wir mit der oben wiedergegebenen allgemeinen Kosinusfunktion g starten und mit Überlegungen, die analog zu denjenigen in Beispiel 1.5.1 auf Seite 61 verlaufen, die Parameter B, c und d im vorliegenden Fall bestimmen. Einfacher ist es jedoch, sich auf den Zusammenhang $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ zwischen Kosinus- und Sinusfunktion zu besinnen. Denn dann folgt sofort

$$\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2t) \quad ,$$

und damit:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} \cdot \cos(2t)$$

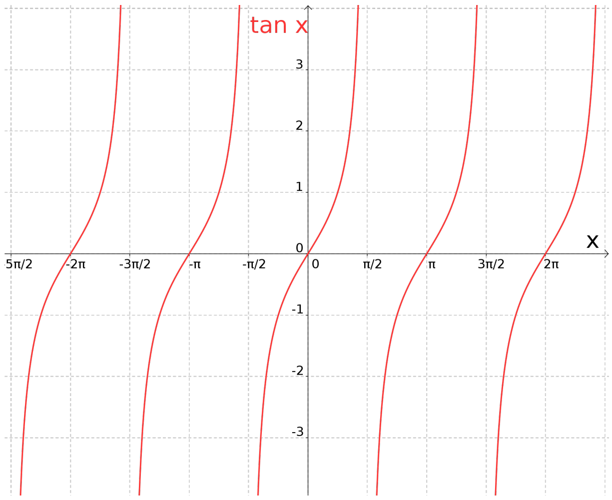
.

Der Tangens ist gegeben als das Verhältnis von Sinus zu Kosinus. Damit ist sofort klar, dass die **Tangensfunktion** nicht auf allen reellen Zahlen definiert sein kann, denn schließlich besitzt die Kosinusfunktion unendliche viele Nullstellen, wie man z.B. in Aufgabe 1.5.1 auf der vorherigen Seite sehen kann. In Aufgabe 1.5.1 auf der vorherigen Seite wird auch die Lage der Nullstellen von cos bestimmt ($\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{\frac{k}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$); demzufolge ist der Definitionsbereich der Tangensfunktion $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Und wie sieht es mit dem Wertebereich aus? Bei den cos-Nullstellen wird die Tangensfunktion gegen positiv bzw. negativ unendliche Werte streben und Polstellen haben und bei den sin-Nullstellen wird sin / cos Null. Dazwischen sind alle reellen Werte möglich, daher ist $W_{\tan} = \mathbb{R}$. Insgesamt ergibt sich für den Graphen der Tangensfunktion

$$\begin{array}{rrcl} \tan: & \mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) \end{array}$$

folgendes Bild:



Die Tangensfunktion verläuft zudem periodisch, allerdings mit der Periode π bzw. $180°$.

Aufgabe 1.5.3

Der sogenannte Kotangens (Abkürzung cot) ist definiert durch $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

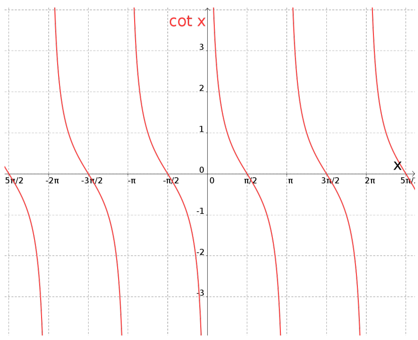
Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Kotangensfunktion an!

Lösung:

Die Polstellen des Kotangens liegen dort, wo der Sinus 0 wird, und das ist genau dann der Fall, wenn α ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Daher müssen wir bei der Definition der Kotangensfunktion genau diese Punkte ausschließen:

$$D_{\text{cot}} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Zur Bestimmung des Wertebereichs können Betrachtungen durchgeführt werden, die denjenigen beim Tangens stark ähneln; man findet $W_{\text{cot}} = \mathbb{R}$.



1.6 Eigenschaften und Konstruktion elementarer Funktionen

Einführung

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Eigenschaften elementarer Funktionen betrachten, die in den vorhergehenden Abschnitten noch nicht behandelt wurde. Dies ist die Symmetrie von Funktionen. Weiterhin werden Möglichkeiten untersucht, wie aus den nun bekannten elementaren Funktionen neue konstruiert werden können. Dazu führt man unter anderem Summen, Produkte und Verkettungen von Funktionen ein.

1.6.1 Symmetrie

Info 1.6.1

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gerade oder achsensymmetrisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(-x)$$

gilt. Analog heißt die Funktion ungerade oder punktsymmetrisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Diese beiden Symmetriebedingungen für Funktionen sagen also etwas über das Aussehen ihrer Graphen aus. Bei geraden Funktionen ändert sich der Graph bei Spiegelung an der Hochachse nicht, und bei ungeraden Funktionen ändert sich der Graph bei Spiegelung am Ursprung nicht. Wir listen einige Beispiele auf.

Beispiel 1.6.2

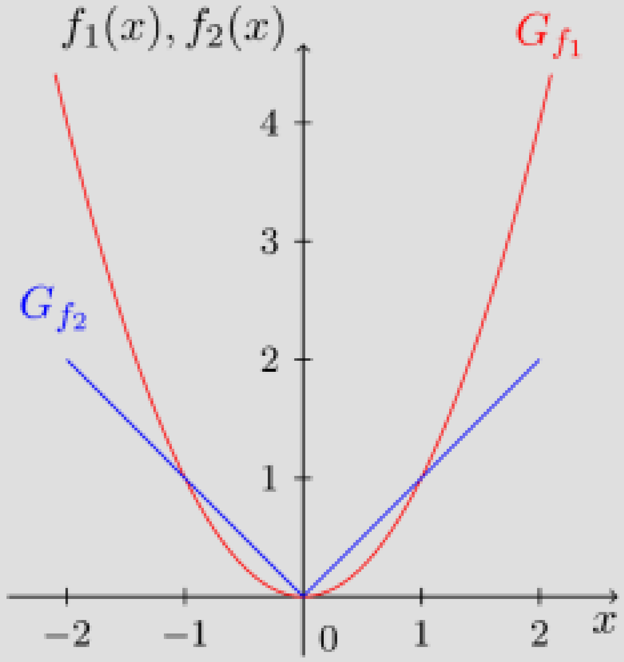
- Die Funktionen

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

und

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases},$$

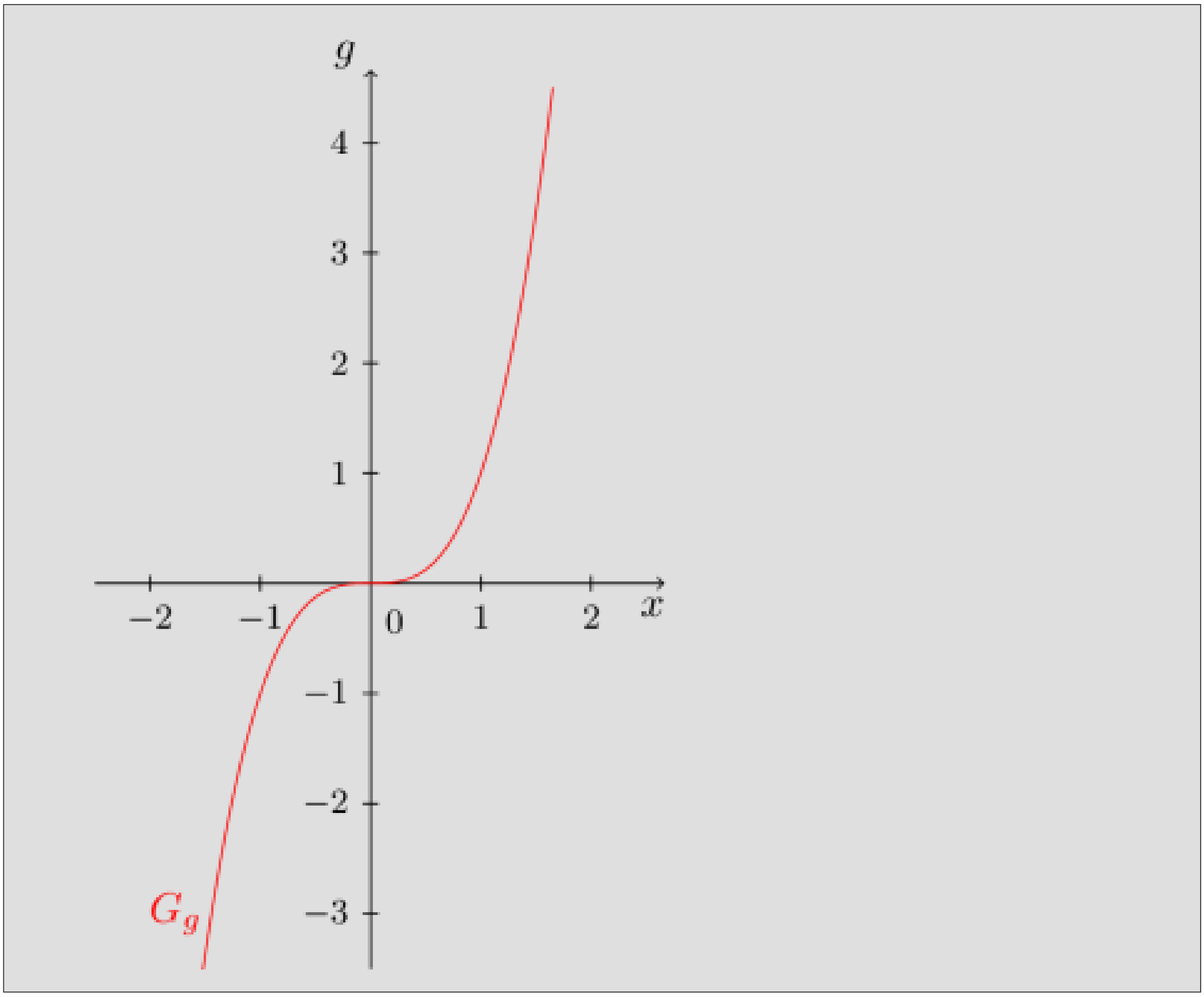
also die Standardparabel (vgl. Abschnitt 1.2.5) und die Betragsfunktion (vgl. Abschnitt 1.2.4), sind Beispiele für gerade Funktionen. Da gilt $f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$ und $f_2(-x) = |-x| = |x| = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Graphen weisen die Spiegelsymmetrie an der Hochachse auf:



- Die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases}$$

also die kubische Parabel (vgl. Abschnitt 1.2.5) ist ein Beispiel für eine ungerade Funktion. Es gilt $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs:



Natürlich sind die Symmetrieeigenschaften von Funktionen auch benutzbar, wenn der Definitionsbereich der Funktion nicht die gesamten reellen Zahlen umfasst. Es muss dann aber eine Definitionsmenge vorliegen, die die 0 in der Mitte des Intervalls enthält. Ein Beispiel dafür ist die Tangens-Funktion in der Aufgabe unten.

Aufgabe 1.6.1
Geben Sie von den folgenden Funktionen jeweils an, ob diese gerade, ungerade oder nicht-symmetrisch sind.

a)

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

b)

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \sin(y) \end{array} \right.$$

c)

$$h: \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) \end{cases}$$

d)

$$i: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \cos(u) \end{cases}$$

e)

$$j: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 42 \end{cases}$$

Lösung:
a) nicht-symmetrisch, b) ungerade, c) ungerade, d) gerade, e) gerade

1.6.2 Summen, Produkte, Verkettungen

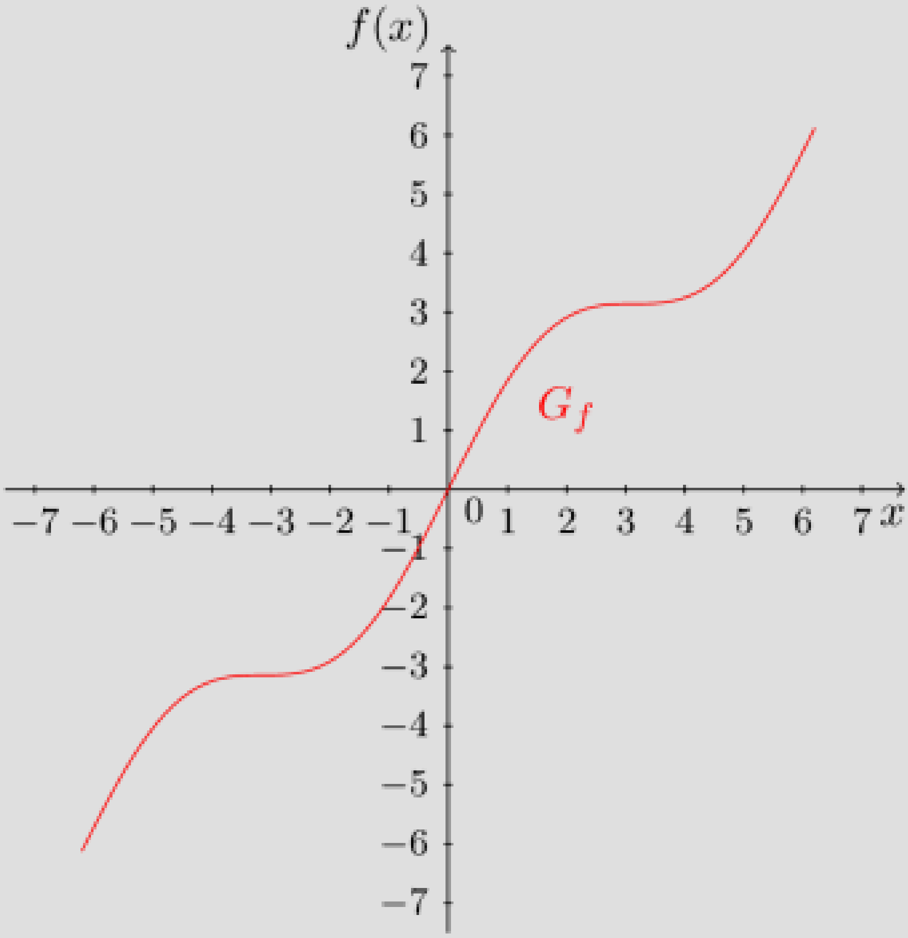
In diesem Abschnitt wollen wir nun das große Sortiment an elementaren Funktionen, die wir uns in diesem Modul erarbeitet haben, nutzen um neue komplexere Funktionen aus den elementaren zu konsturieren. An verschiedenen Stellen im Verlauf dieses Moduls haben wir bereits Funktionen untersucht deren Abbildungsvorschriften durch Summen- oder Produktbildung aus einfacheren Abbildungsvorschriften zusammengesetzt sind. Man kann natürlich auch Differenzen und unter bestimmten Umständen Quotienten von Abbildungsvorschriften bilden. Das folgende Beispiel stellt nochmal einige solche zusammengesetzte Funktionen zusammen.

Beispiel 1.6.3

- Die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin(x) \end{cases}$$

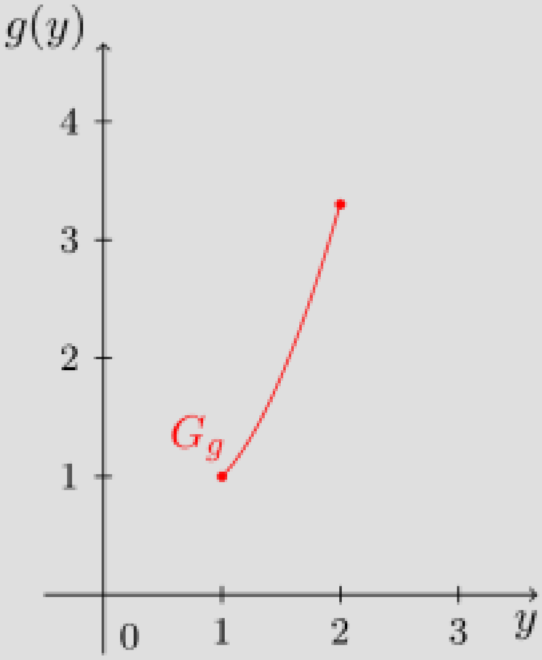
ist die Summe aus der Identität, (vgl. Abschnitt 1.2.2), und der Sinusfunktion (vgl. Abschnitt 1.5.1). Sie besitzt den folgenden Graphen:



- Die Funktion

$$g : \begin{cases} [1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 - \ln(y) \end{cases}$$

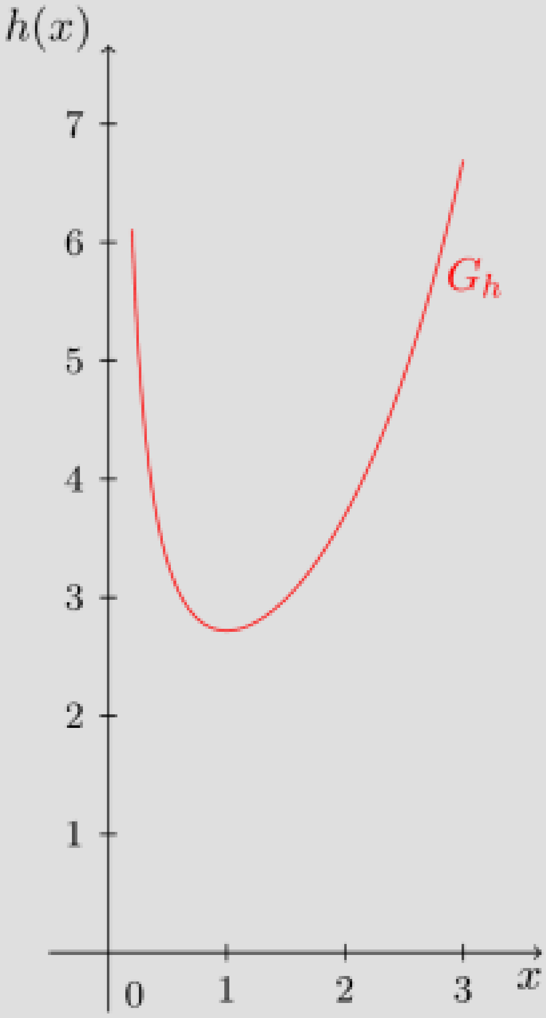
ist die Differenz aus der Standardparabel (vgl. Abschnitt 1.2.5) und der natürlichen Logarithmusfunktion (vgl. Abschnitt 1.4.2). Sie besitzt den folgenden Graphen:



- Die Funktion

$$h : \begin{cases} (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \frac{1}{x} \end{cases}$$

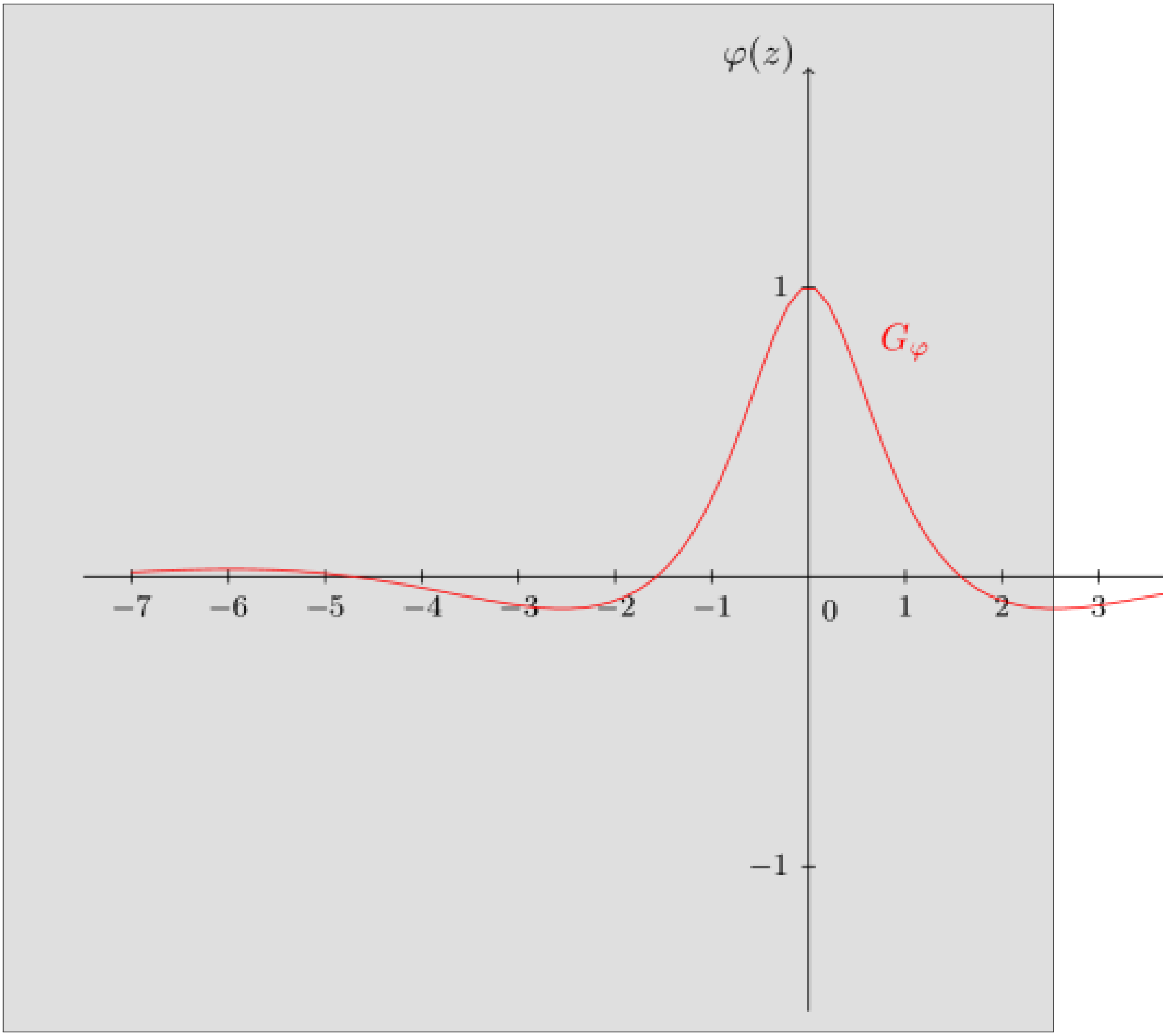
  ist das Produkt aus der natürlichen Exponentialfunktion mit Abbildungsvorschrift e^x (und der Hyperbel mit Abbildungvorschrift $\frac{1}{x}$ (vgl. Abschnitt 1.2.7). Sie besitzt folgenden Graphen:



- Die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \frac{cos(z)}{z^2+1} \end{cases}$$

ist der Quotient aus der Cosinusfunktion (vgl. Abschnitt 1.5.2) und dem Polynom zweiten Grades (vgl. Abschnitt 1.2.6) mit der Abbildungsvorschrift $z^2 + 1$. Sie besitzt folgenden Graphen:



Aufgabe 1.6.2
Finden Sie weitere Beispiele in diesem Modul für bereits behandelte elementare Funktionen, die mittels Summen-, Differenz-, Produkt- oder Quotientenbildung aus einfacheren elementaren Funktionen hervorgehen.

Lösung:
Zum Beispiel:

- Die Funktionen vom hyperbolischen Typ (vgl. Abschnitt 1.2.7) sind alle Quotienten aus der konstanten Funktion 1 und einem Monom.
- Die Monome (vgl. Abschnitt 1.2.5) sind alle mehrfache Produkte aus der Identität $\mathrm{Id}(x) = x$.

- Die linearen Funktionen (vgl. Abschnitt 1.2.2) sind Produkte aus konstanten Funktionen, die die Steigung beschreiben, und der Identität.
- Alle Polynome (vgl. Abschnitt 1.2.6) sind Summen und Differenzen von Funktionen, die ihrerseits Produkte aus konstanten Funktionen und Monomen sind.

Zuletzt gibt es noch eine weitere Art, elementare Funktionen zu verknüpfen um neue Funktionen zu erhalten. Dies ist die sogenannte Verkettung oder Komposition von Funktionen.

Wir betrachten dazu einige Beispiele.

Beispiel 1.6.4

- Die Funktionen

  $$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{cases}$$

  und

  $$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = e^x \end{cases}$$

  lassen sich auf zweierlei Art verketten. Wir können die Funktion $f \circ g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oder die Funktion $g \circ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilden. Wir erhalten

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1,$$

  also

  $$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{2x} + 1 \end{cases}$$

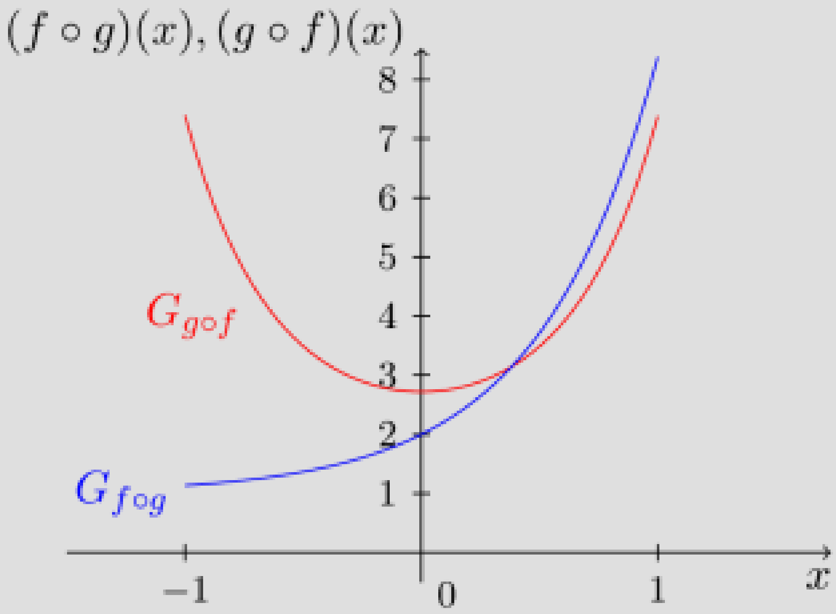
  und

  $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = e^{x^2+1},$$

  also

  $$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2+1}. \end{cases}$$

  Anhand der Graphen sehen wir, dass dies zwei völlig unterschiedliche Funktionen sind. Es kommt also auf die Reihenfolge der Verkettung an.



- Bei zwei Funktionen wie

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$$

und

$$w : \begin{cases} [0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

ist allerdings auf die Definitionsbereiche bei der Verkettung zu achten. Denn wollen wir etwa die verkettete Funktion $w \circ h$ betrachten, so gilt

$$(w \circ h)(x) = w(h(x)) = w(\sin(x)) = \sqrt{\sin(x)}.$$

Da die Funktionswerte des Sinus aber auch negativ werden können, man aber in die Quadratwurzelfunktion nur nicht-negative Werte einsetzen darf, muss also der Definitionsbereich der Sinusfunktion entsprechend eingeschränkt werden, so dass sich nicht-negative Werte ergeben, zum Beispiel mittels $x \in [0, \pi] = D_{w \circ h}$. Wir erhalten also

$$w \circ h : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\sin(x)}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.6.3
Gegeben sind die Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 3, \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

und

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x). \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verkettungen $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ f$, $h \circ g$, $f \circ f$ und $g \circ g$. Schränken Sie dazu eventuell die Definitionsbereiche so ein, dass die Verkettung zulässig ist. Benutzen Sie jedoch für die verketteten Funktion stets die größtmöglichen Definitionsbereiche.

Lösung:

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2}{x} - 3 \end{cases}$$

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2x-3} \end{cases}$$

$$h \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x-3) \end{cases}$$

$$h \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

$$f \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x - 9 \end{cases}$$

$$g \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$

1.7 Abschlusstest

Abschlusstest zu Modul 7

Aufgabe 1.7.1
Bestimmen Sie für die beiden Funktionen

$$f: \begin{cases} D_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{9x^2-\sin(x)+42}{x^2-2} \end{cases}$$

und

$$g: \begin{cases} D_g & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \frac{\ln(y)}{y^2+1} \end{cases}$$

jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D_f bzw. D_g.

Aufgabe 1.7.2
Bestimmen Sie für die Funktion

$$i: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 - 4x + 4 + \pi \end{cases}$$

die Wertemenge W_i.

Aufgabe 1.7.3
Bestimmen Sie in der Exponentialfunktion

$$c: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto A \cdot e^{\lambda x} - 1 \end{cases}$$

die Parameter $A, \lambda \in \mathbb{R}$, so dass $c(0) = 1$ und $c(4) = 0$ gilt.

Antwort: $A = \boxed{}$, $\lambda = \boxed{}$.

Aufgabe 1.7.4
Bestimmen Sie die Verkettung $h = f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Erläuterung: $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$) der Funktionen

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto C \cdot \sin(x) \end{cases}$$

und

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto B \cdot x + \pi. \end{cases}$$

Antwort: $h(x) = \boxed{}$.

Bestimmem Sie die Parameter, so dass die durch h beschriebene Sinusschwingung diesen Graph besitzt:

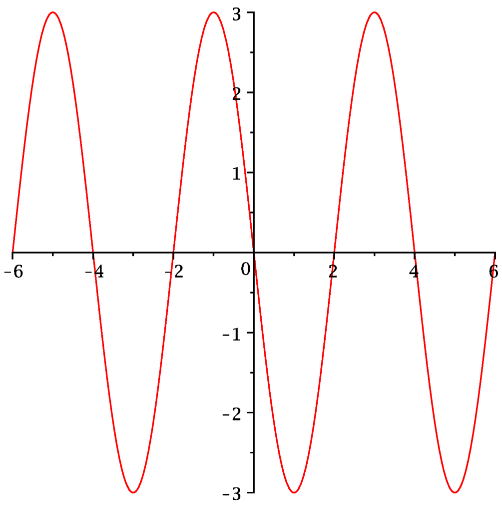


Abbildung 1: Eine Sinusschwingung. (Lizenz)

Antwort: $h(x) \;=\; \boxed{}$.

Aufgabe 1.7.5
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f = u^{-1}$ von

$$u : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad y & \longmapsto \quad -\log_2(y). \end{cases}$$

Die Funktion $f = u^{-1}$ besitzt:

a. Den Definitionsbereich $D_f \;=\; \boxed{}$.

b. Den Wertebereich $W_f \;=\; \boxed{}$.

c. Die Funktionsvorschrift $f(y) = u^{-1}(y) \;=\; \boxed{}$.

Aufgabe 1.7.6
Kreuzen Sie an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:

Die Funktion

$$f : \begin{cases} [0,3) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad 2x+1 \end{cases}$$

- ☐ ... kann man kürzer auch als $f(x) = 2x + 1$ schreiben.
- ☐ ... ist eine linear-affine Funktion.
- ☐ ... hat die Wertemenge $\mathbb{R}$.

- ☐ ... hat die Steigung 2.
- ☐ ... kann nur Werte größer oder gleich 1 und kleiner 7 annehmen.
- ☐ ... hat als Graph ein Stück einer Gerade.
- ☐ ... hat bei $x = 0$ den Wert 1.
- ☐ ... hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.7.7

Bestimmen Sie diese Logarithmen:

a. $\ln(e^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}) = \boxed{}$.

b. $\log_{10}(0,01) = \boxed{}$.

c. $\log_2(\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 256 \cdot 1024}) = \boxed{}$.