Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Exponentialfunktion und Logarithmus

Einführung

Bei **Exponentialfunktionen** stellt die Veränderliche im Gegensatz zu den Potenzfunktionen nicht die Basis des Exponentialausdrucks dar, sondern sie bildet den Exponenten. Dementsprechend werden wir Zuordnungsvorschriften betrachten wie z.B.:

$$x \longmapsto 2^x \quad \text{oder} \quad x \longmapsto 10^x$$

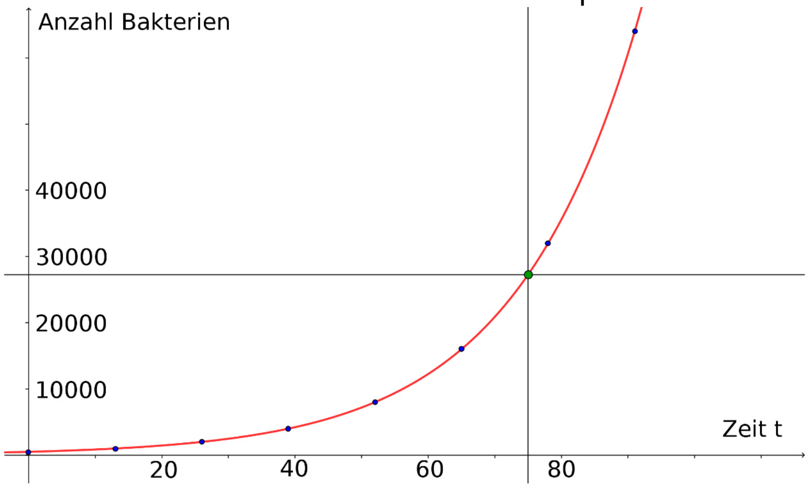
Exponentialfunktionen spielen in vielen unterschiedlichen Bereichen eine wichtige Rolle, so etwa bei der Beschreibung biologischer Wachstumsprozesse - diverse Modelle zur Bevölkerungsentwicklung eingeschlossen -, bei Prozessen des radioaktiven Zerfalls oder bei einer bestimmten Form der Zinseszinsberechnung. Betrachten wir ein Beispiel:

Beispiel 6.4.1
Eine Bakterienkultur enthält zu Versuchsbeginn 500 Bakterien und verdoppelt ihre Population alle 13 Minuten. Wir möchten gerne wissen, wieviele Bakterien nach 1 Stunde und 15 Minuten (also nach 75 Minuten) in der Kultur vorhanden sind?

In einem ersten Anlauf können wir eine einfache Wertetabelle erstellen, die uns die Bakterienpopulation zu Beginn ($t = 0$ min), nach $t = 13$ min, nach $t = 26$ min usw., also zu Vielfachen der 13-Minuten-Verdopplungszeitspanne, angibt:

Zeit t in min	0	13	26	39	52	65	78	91	usw.
Anzahl Bakterien	500	1000	2000	4000	8000	16000	32000	64000	usw.

isolierten Punkten, die den Wertepaaren aus der Tabelle entsprechen und die ebenfalls eingezeichnet sind. Die zugehörige Abbildungsvorschrift ordnet jedem reellen Zeitpunkt eine Populationsgröße zu. Wie wir sehen werden, handelt es sich bei der Funktion um eine Exponentialfunktion.



Aus der graphischen Darstellung können wir die gesuchte Anzahl an Bakterien schon etwas genauer ablesen. Aber für die exakte Angabe benötigen wir die Abbildungsvorschrift, die hinter dem Graphen aus der Abbildung steht und die wir hier zunächst nur angeben:

$$p : [0; \infty) \to (0; \infty) \quad \text{mit} \quad t \longmapsto p(t) = 500 \cdot 2^{(t/13)}$$

(In Aufgabe 6.4.3 werden wir diesen funktionalen Zusammenhang begründen.)
Damit erhalten wir für $t = 75$ (gemessen in Minuten) den Funktionswert

$$p(75) = 500 \cdot 2^{(75/13)} \approx 500 \cdot 54,539545 \approx 27270$$

Also leben nach 75 Minuten 27270 Bakterien in der fraglichen Population.