Onlinekurs Mathematik - Geometrie - Winkel, Kongruenz und Ähnlichkeit

5.1.2 Kongruenzsätze

Zu einem Dreieck gehören drei Seitenlängen und drei Winkel, also sechs Größen. Wenn bei zwei Dreiecken alle diese Größen übereinstimmen, so sind diese Dreiecke **kongruent** oder deckungsgleich, dabei spielt es keine Rolle, wo sich die Dreiecke befinden. Kongruente Dreiecke können also durch Drehung, Spiegelung und Verschiebung ineinander überführt werden.
Kennt man vier von den sechs Größen, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt bis auf Spielgelung oder Drehung, das heißt bis auf die Lage des Dreiecks im Raum. Alle Dreiecke, die man mit diesen Angaben erhält, sind dann kongruent. In einigen Fällen genügen sogar drei Angaben, um das Dreieck eindeutig zu bestimmen. Diese Fälle werden mit den **Kongruenzsätzen** beschrieben:

Info 5.1.10

Ein Dreieck ist eindeutig bestimmt, wenn

- von den drei Winkeln und den drei Seitenlängen mindestens vier Angaben gegeben sind.
- alle drei Seitenlängen gegeben sind. (Diesen Satz bezeichnet man gerne mit „sss“ für „Seite, Seite, Seite“.)
- eine Seitenlänge und ihre Winkel zu den anderen Seiten gegeben sind („wsw“ für „Winkel, Seite, Winkel“).
- zwei Seitenlängen und der von den Seiten eingeschlossenen Winkel gegeben sind („sws“ für „Seite, Winkel, Seite“).
- ein Winkel und zwei Seitenlängen so gegeben sind, dass nur eine der Seiten auf einem Schenkel des Winkels liegt und die andere gegebene Seite die längere der beiden gegebenen Seiten ist.

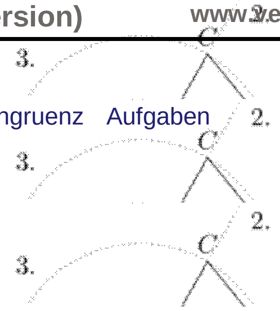
  (Diesen Satz bezeichnet man mit „Ssw“ für „Seite, Seite, Winkel“, wobei das groß geschriebene „S“ signalisieren soll, dass die dem Winkel gegenüberliegende Seite die längere Seite darstellt.)

Hat man von einem Dreieck nur zwei oder drei Angaben, die keinem der oben angegebenen Fälle entsprechen, gegeben, so gibt es verschiedene Dreiecke, für die die Angaben zutreffen.

Beispiel 5.1.11

Gegeben seien der Winkel α und die Seiten b und c . Das Dreieck „sws“ erhält man, indem man zunächst eine Seite, hier zum Beispiel die Seite c , zeichnet und an der nach der Bezeichnungskonvention korrekten Ecke (A) den Winkel α anfügt. Dann schlägt man um diese Ecke einen Kreis, dessen

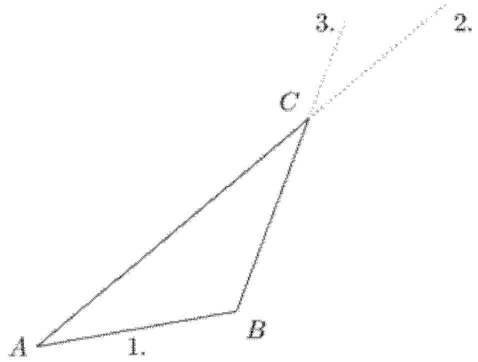
Radius der Länge der zweiten Seite (hier b) entspricht. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem zweiten Schenkel des Winkels bildet die dritte Ecke des Dreiecks (C).



Aufgabe 5.1.12
Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seite $c = 5$ und den Winkeln $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 120^\circ$.

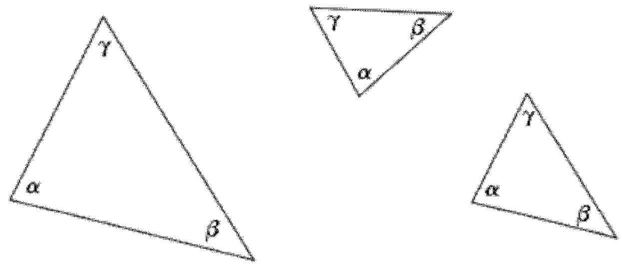
Lösung

Man zeichnet zuerst die gegebene Strecke c . Dann trägt man an den beiden Enden der Strecke die zwei der Bezeichnungskonvention entsprechenden Winkel an. Der Schnittpunkt der beiden neuen Schenkel ist die dritte Ecke des Dreiecks.



Beispiel 5.1.13

Gegeben seien nun die drei Winkel $\alpha = 77^\circ$, $\beta = 44^\circ$ und $\gamma = 59^\circ$. Diese Angaben findet man nicht bei den Kongruenzsätzen 5.1.10. Wir wollen trotzdem versuchen, ein Dreieck zu konstruieren.



Wir erhalten unendlich viele Dreiecke, die nicht kongruent sind, also nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Allerdings sehen diese Dreiecke irgendwie ähnlich aus. Solche **ähnlichen** Dreiecke erhält man auch, wenn man zum Beispiel die Verhältnisse aller Seiten zueinander kennt.

Info 5.1.14

VE & MINT

Kursinhalt

Einführung

Mein Kurs

Einstellungen

Eingangstest

Suche

Das KIT

Feedback

Beta-Version

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn

- sie in zwei (und damit wegen der Winkelsumme in drei) Winkeln übereinstimmen.
- sie in allen **Verhältnissen** ihrer entsprechenden Seiten übereinstimmen.
- sie in einem Winkel und im **Verhältnis** der anliegenden Seiten übereinstimmen.
- sie im **Verhältnis** zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Eine Besonderheit gibt es bei dem rechten und dem linken Dreieck in Beispiel 5.1.13: Hier geht das eine Dreieck durch zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und einem Streckfaktor k in das andere über.