1 Geometrie

Modulübersicht

Wir beginnen die Elementare Geometrie mit der Einführung von Winkeln im Bogenmaß und arbeiten uns über Stufen- und Wechselwinkel zu den Dreiecken vor. Mit Hilfe des Flächeninhalts eines Dreiecks lassen sich dann die Strahlensätze beweisen, die die Grundlage für die Einführung der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck bilden.

Am Ende erobern wir die dritte Dimension und beschäftigen uns mit den Volumina von Zylindern, Kegeln und Kugeln. Das Prinzip von Cavalieri wird uns hier große Dienste leisten.

1.1 Winkel

Einführung

Am folgenden Ausschnitt des Straßenplans von Ludwigshafen am Rhein lassen sich einige Erkenntnisse über die Geometrie in der Ebene ablesen.

Sie werden hier unter anderem das Radialmaß eines Winkels entdecken, Stufen- und Wechselwinkel aufspüren und die Strahlensätze optisch nachvollziehen.

Im ersten Abschnitt dieses Moduls werden wir das Radialmaß einführen, Stufen- und Wechselwinkel betrachten und schlussendlich die Winkelsumme in Dreiecken und anderen Vielecken bestimmen.

Als weiterführende Inhalte stellen wir Ihnen außerdem die sogenannten Kongruenzsätze für Dreiecke vor.

Inhalt

Zwei Halbgeraden in der Ebene, die von demselben Punkt ausgehen, bilden einen Winkel. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diesen Winkel zu messen.

Bereits die Griechen stellten fest, dass das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Radius stets das gleiche ist. Sie nannten das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser π.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Definition 1.1.1

Die Kreiszahl π

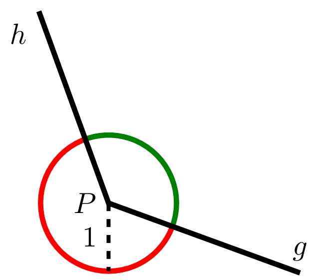
Die reelle Zahl π gibt das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zum Doppelten seines Radius' an und wird deshalb *Kreiszahl* genannt.

Für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ gilt also

$$\pi = \frac{\text{Umfang eines Kreises mit Radius } r}{2r}.$$

Messungen und Näherungsrechnungen haben ergeben, dass $\pi \approx 3.141592653589793$ ist.

Haben wir nun zwei Halbgeraden g und h gegeben, die von einem gemeinsamen Punkt P ausgehen, so wollen wir ein Maß des Winkels definieren, den die beiden bilden. Dazu zeichnen wir den Kreis mit Radius 1 um P und schauen, wie lang der Kreisbogen ist, den die beiden Halbgeraden aus dem Kreis ausschneiden.



Die Halbgeraden zerschneiden den Kreis in zwei Teile, von denen man sich für einen entscheiden muss.

Definition 1.1.2

Das Radialmaß eines Winkels

Seien g und h zwei Halbgeraden in der Ebene, die von einem gemeinsamen Punkt P ausgehen.

Das ***Radialmaß*** $\measuredangle(g, h)$ des Winkels von g nach h ist die Länge desjenigen Kreisbogens vom Radius 1 um P, der überstrichen wird, wenn g gegen den Uhrzeigersinn („***mathematisch positiv***") auf h gedreht wird.

P heißt *Scheitelpunkt* des Winkels und die beiden Halbgeraden, die den Winkel bilden, heißen *Schenkel* des Winkels.

Sind $A \neq P$ ein Punkt auf g und $B \neq P$ ein Punkt auf h, so schreibt man auch $\measuredangle(APB)$ statt $\measuredangle(g, h)$.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Es gilt selbstverständlich (da der Umfang des Kreises mit Radius 1 gerade 2π beträgt)

$$\measuredangle(h,g) = 2\pi - \measuredangle(g,h)\,.$$

Beispiel 1.1.3

Die Messung eines Winkels lässt sich im Ludwigshafener Stadtplan sehr schön an der Kurfürstenstraße und der Saarlandstraße demonstrieren.

Wir gehen mal davon aus, dass der Weg von der Kreuzung der beiden Straßen über die Kurfürstenstraße zur Sebastian-Bach-Straße eine Länge von 1 hat.

Läuft man nun auf der Sebastian-Bach-Straße von der Kurfürstenstraße aus bis zur Saarlandstraße, so hat man genau einen Weg von

$$\measuredangle(\text{Kurfürstenstraße},\ \text{Saarlandstraße})$$

zurückgelegt. (Dabei gehen wir davon aus, dass die Sebastian-Bach-Straße kreisförmig um die Kreuzung Kurfürstenstraße und Saarlandstraße herumführt.)

In der Mathematik und im Ingenieursstudium wird das Radialmaß (auch „***Bogenmaß***“ genannt) sehr häufig verwendet.

Ihnen besser vertraut dürfte allerdings das Winkelmaß sein, in dem der Kreis in 360 gleich große Teile geteilt und dann gemessen wird, wie viele dieser Teile überstichen werden, wenn g mathematisch positiv auf h gedreht wird. Dieses ***Gradmaß*** eines Winkels kann leicht in das Radialmaß überführt werden:

$$\measuredangle(g,h) = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ},$$

wenn α das Gradmaß des Winkels zwischen g und h angibt.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Definition 1.1.4

Spitze, rechte, stumpfe und überstumpfe Winkel

- Ein Winkel mit einem Maß zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ heißt *spitzer Winkel.*

  Ein Winkel mit einem Maß von $\frac{\pi}{2}$ heißt *rechter Winkel.*

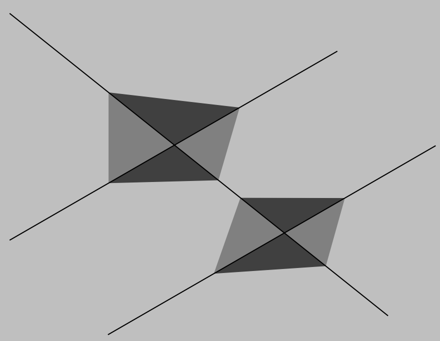
  Ein Winkel mit einem Maß zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π heißt *stumpfer Winkel.*

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen π und 2π heißt *überstumpfer Winkel.*
- Zwei Halbgeraden bilden eine Gerade, wenn sie einen Winkel vom Maß π bilden.
- Zwei Halbgeraden *stehen senkrecht aufeinander*, wenn sie einen rechten Winkel bilden.

Betrachten wir nun drei verschiedene Geraden, von denen zwei parallel sind, während die dritte nicht parallel zu diesen beiden ist, so ergeben sich acht Schnittwinkel. Je vier dieser Winkel sind gleich groß.

Info 1.1.5

Stufenwinkel und Wechselwinkel



Sind die beiden in oben stehender Zeichnung (von links nach rechts) aufwärts laufenden Geraden parallel, so sind die gleichfarbig markierten Winkel gleich groß.

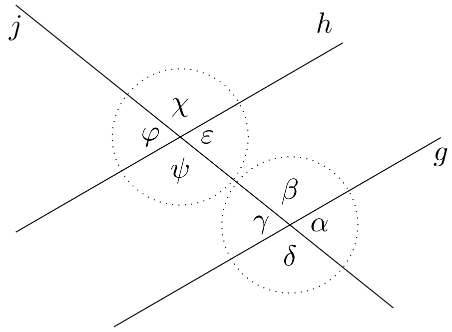
Zwei gleichfarbige Winkel, die zwischen den beiden parallelen Geraden liegen, heißen ***Wechselwinkel***.

Zwei gleichfarbige Winkel, die auf derselben Seite der nicht-parallelen Gerade liegen, heißen ***Stufenwinkel***.

(Dabei nennen wir zwei Geraden „parallel“, wenn zwei Strecken, die von verschiedenen Punkten der einen Geraden ausgehen, in einem rechten Winkel auf die andere Gerade treffen und auf derselben Seite einer der Geraden liegen, gleich lang sind.)

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Die Geraden und die Winkel seien wie im folgenden Bild bezeichnet.



Insbesondere sind β und ψ sowie γ und ε Wechselwinkel. Stufenwinkel sind α und ε, β und χ, γ und φ sowie δ und ψ.

griechische Buchstaben:
Winkel werden übrigens gerne mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Falls Sie die noch nicht so gut kennen, gibt es hier eine kleine Übersicht, die auch die Großbuchstaben enthält:

α, A	„alpha“	ξ, Ξ	„xi“	ι, I	„iota“	o, O	„omikron“	π, Π	„pi“
β, B	„beta“*	ζ, Z	„zeta“	$\varkappa$, K	„kappa“	ω, Ω	„omega“	φ, Φ	„phi“
γ, Γ	„gamma“	η, H	„eta“	λ, Λ	„lambda“	ϱ, P	„rho“	ψ, Ψ	„psi“
δ, Δ	„delta“	ϑ, Θ	„theta“	μ, M	„mü“	σ, Σ	„sigma“	χ, X	„chi“
ε, E	„epsilon“			ν, N	„nü“	τ, T	„tau“	υ, Υ	„üpsilon“

*Im Neu-Griechischen wird das β/B als „vita“ gesprochen.

Wir überlegen uns kurz, warum Stufen- und Wechselwinkel gleich groß sind.

Da g eine Gerade ist, gilt $\delta + \alpha = \pi$, und da j eine Gerade ist, gilt $\gamma + \delta = \pi$. Damit folgt $\alpha = \gamma$.

Verschiebt man den Kreis mit Radius 1, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt von g und j ist, in Richtung von j gemeinsam mit der Geraden g derart, dass der Mittelpunkt nun auf dem Schnittpunkt von h und j liegt, so kommt g auf h zum Liegen. Insbesondere schneiden also h und j einen ebensolangen Kreisbogen aus dem Kreis um ihren Schnittpunkt mit dem Radius 1 aus wie g und j aus dem entsprechenden Kreis.

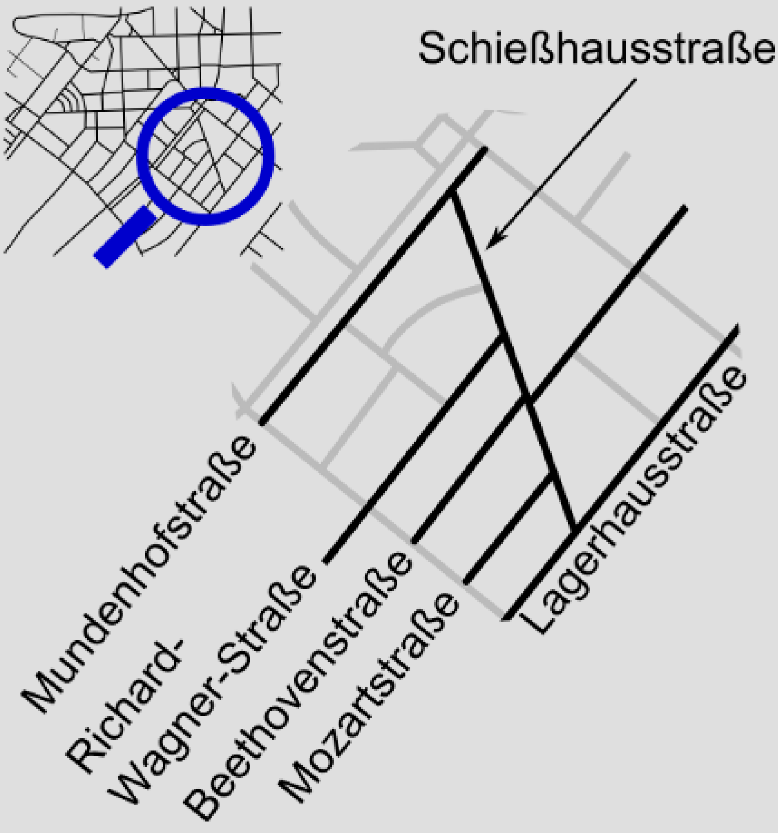
Das bedeutet, die beiden Stufenwinkel α und ε sind gleich groß. Mit $\alpha = \gamma$ folgt, dass auch die beiden Wechselwinkel γ und ε gleich groß sind. Die Gleichheit der anderen Stufen- und Wechselwinkel ergibt sich auf die gleiche Art und Weise.

Beispiel 1.1.6

Finden Sie Stufen- und Wechselwinkel im Ludwigshafener Stadtplan?

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Lösung:
Zum Beispiel hier:



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Im Bild sind Mundenhofstraße, Richard-Wagner-Straße, Beethovenstraße, Mozartstraße und Lagerhausstraße parallel.

Die Schießhausstraße bildet mit diesen Straßen Stufen- und Wechselwinkel.

Mit Stufen- und Wechselwinkeln **??** können wir schon erste Erkenntnisse über Dreicke sammeln.

Info 1.1.7

Definition von Dreiecken und Summe der Innenwinkel

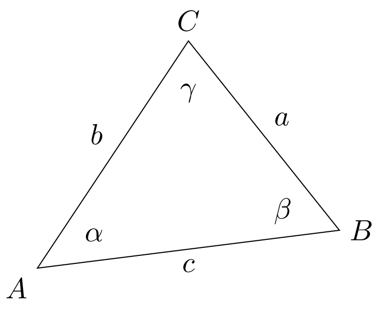
- Ein ***Dreieck*** entsteht, wenn man drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, verbindet.
- Die drei Punkte, die verbunden werden, heißen ***Ecken*** des Dreiecks und die drei Verbindungslinien heißen ***Seiten*** des Dreiecks.
- Je zwei Seiten des Dreiecks bilden je zwei Winkel.

  Der kleinere dieser beiden Winkel heißt ***Innenwinkel*** und der größere der beiden Winkel heißt ***Außenwinkel***.
- Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks beträgt stets π.

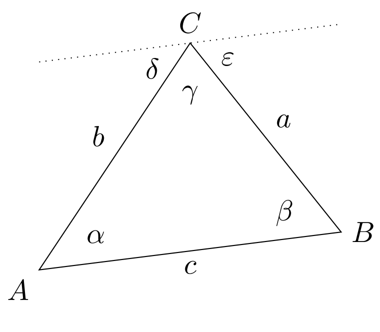
Es hat sich eingebürgert, die Ecken eines Dreiecks mit lateinischen Großbuchstaben in mathematisch positiver Richtung zu benennen. Die einem Punkt gegenüberliegende Seite eines Dreiecks bekommt den entsprechenden Kleinbuchstaben zugeordnet und der Innenwinkel in einer Ecke erhält den entsprechenden Kleinbuchstaben des griechischen Alphabets.

Soweit nicht anders angegeben, erfüllen in diesem Kurs alle Dreiecke diese Bezeichnungskonvention.

Da die Außenwinkel eines Dreiecks wesentlich weniger interessant sind als die Innenwinkel, nennt man die Innenwinkel eines Dreiecks auch schlicht ***Winkel*** des Dreiecks.



Die Bezeichnungen von Ecken, Seiten und Innenwinkeln in einem Dreieck.



Skizze für den Beweis des Innenwinkelsatzes.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Der letzte Satz von Info **??** ist keine Definition, sondern eine Aussage. Als solche wollen wir sie beweisen. Wir rechnen die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kurz aus.

In der rechten Skizze ist die gepunktete Linie parallel zur Seite c des Dreiecks. Also sind α und δ bzw. β und ε Wechselwinkel und damit gleich groß.

Verlängert man die gepunktete Linie auf beiden Seiten ins Unendliche, so erhält man eine Gerade und deshalb gilt

$$\delta + \gamma + \varepsilon = \pi.$$

Wegen $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$ folgt die Behauptung.

Da die Summe aller Winkel in einem Dreieck π beträgt, kann höchstens ein Winkel mindestens $\frac{\pi}{2}$ groß sein. Dadurch werden die Dreiecke nach ihrem größten Winkel in drei verschiedene Klassen eingeteilt:

Definition 1.1.8

Spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke

- Ein Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, heißt *spitzwinklig*.
- Ein Dreieck, das einen rechten Winkel enthält, heißt *rechtwinklig*.

  In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen, ***Katheten*** und die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt ***Hypotenuse***.
- Ein Dreieck, das einen Winkel mit einem Maß von über $\frac{\pi}{2}$ besitzt, heißt *stumpfwinklig*.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgaben

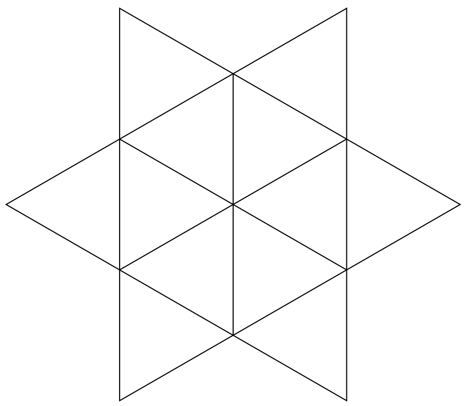
Aufgabe 1.1.1
Zusätzlich zum Radialmaß und zum Gradmaß wurde im Zuge der Metrisierung ein neues Maß eingesetzt, das zwar eigentlich keine eigene Bezeichnung hat, aber gelegentlich als „geodätisches Winkelmaß“ oder „Gonmaß“ bezeichnet wird. Es funktioniert ähnlich dem Gradmaß, teilt den Vollkreis aber in vierhundert gleiche Teile ein. Ein solcher Teil heißt „gon“. (Früher war auch die Bezeichnung „Neugrad“ gebräuchlich.) Es konnte sich aber nicht gegen Grad- und Radialmaß durchsetzen.

Geben Sie die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte an! Dabei steht in einer Spalte stets der gleiche Winkel.

Radialmaß	π			
Gradmaß			30	
Gonmaß		50		360

Radialmaß	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{12}$		
Gradmaß		270		60	
Gonmaß					150

Aufgabe 1.1.2
Untersuchen Sie die folgende Figur auf Stufenwinkel und Wechselwinkel!



Aufgabe 1.1.3

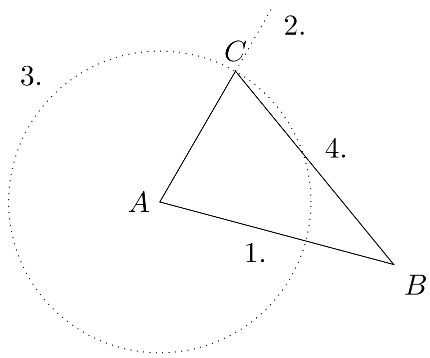
1. Machen Sie sich klar, dass ein Dreieck durch die Größe eines Winkels und die Länge der beiden Seiten, die auf den Schenkeln des Winkels liegen, eindeutig bestimmt wird, wenn die Bezeichnungskonvention eingehalten wird.
2. Genauso genügt die Angabe von zwei Winkeln und einer Seitenlänge, um ein Dreieck bei Einhaltung der Bezeichnungskonvention eindeutig zu bestimmen. Dabei ist es egal, welche Seitenlänge gegeben wird. Warum?

Hinweis:
Wie viele Möglichkeiten haben Sie, ein solches Dreieck zu zeichnen?

Wie viele dieser Möglichkeiten halten die Bezeichnungskonvention ein?

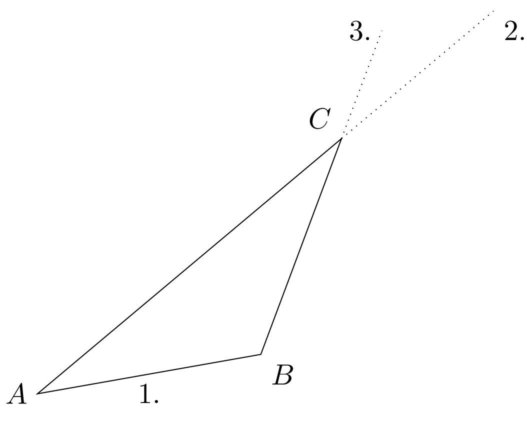
Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Lösung:
Sind ein Winkel und die beiden Längen der auf den Schenkeln liegenden Seiten gegeben, so zeichnet man zunächst eine Seite und trägt an der nach der Bezeichnungskonvention korrekten Ecke den Winkel an. Dann schlägt man um diese Ecke einen Kreis, dessen Radius der Länge der zweiten Seite entspricht. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem zweiten Schenkel des Winkels bildet die dritte Ecke des Dreiecks. (In der Skizze sind α, b und c gegeben.)



Hat man eine Seitenlänge und zwei Winkel gegeben, so kann man den dritten mit der Winkelsumme im Dreieck berechnen.

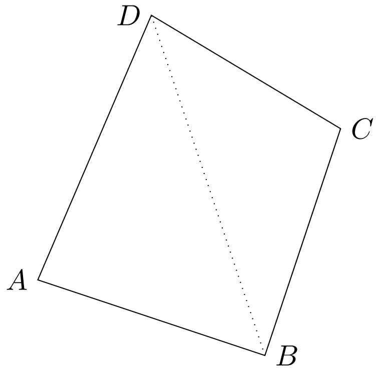
Man zeichnet zuerst die gegebene Strecke. Dann trägt man an den beiden Enden der Strecke jeweils auf der gleichen Seite die zwei der Bezeichnungskonvention entsprechenden Winkel an. Der Schnittpunkt der beiden neuen Schenkel ist die dritte Ecke des Dreiecks. (In der Skizze sind c, α und β gegeben.)

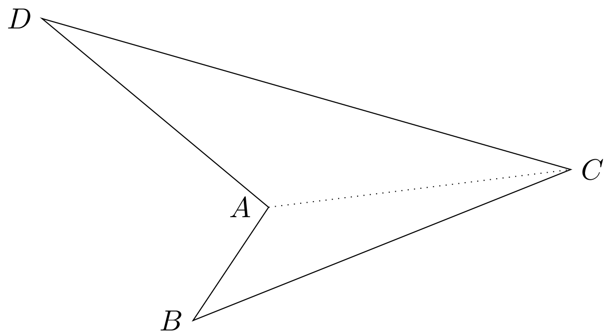


Aufgabe 1.1.4 1. Zeigen Sie, dass die Winkelsumme im Viereck stets 2π beträgt!

Lösung:
In jedem Viereck gibt es zwei nicht benachbarte Ecken, deren Verbindungslinie vollständig innerhalb des Vierecks verläuft.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt





Verbindet man diese beiden Ecken, so erhält man zwei Dreiecke, deren Gesamt-Winkelsumme mit der Winkelsumme des Vierecks übereinstimmt. Damit ergibt sich die Winkelsumme im Viereck zu 2π.

2. Folgern Sie, dass die Winkelsumme in einem Fünfeck stets 3π beträgt!

   Lösung:
   Ähnlich wie im Fall des Vierecks lässt sich das Fünfeck stets in ein Dreieck und ein Viereck zerlegen, indem man zwei nicht benachbarte Ecken durch eine Strecke verbindet, die durch das Innnere des Fünfecks verläuft. Überlegen Sie sich bitte, welche Fälle dabei auftreten können (Stichwort: einspringende Ecken).

3. Überlegen Sie, wie der folgende Satz zustande kommt:

Satz 1.1.9

Winkelsumme im n-Eck

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \neq n \neq 2$ beträgt die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck $(n-2) \cdot \pi$.

Lösung:
In jedem Vieleck lässt sich eine durch das Vieleck verlaufende Strecke finden, die zwei nicht benachbarte Ecken verbindet und das Vieleck in ein Dreieck und ein Vieleck mit einer Ecke weniger zerteilt.

Mit jeder Ecke mehr nimmt die Winkelsumme also um π zu.

Das ist auch anschaulich klar: Ein $(n+1)$-Eck kann man aus einem n-Eck gewinnen, indem man eine Seite knickt. Vor dem Knicken ist die Strecke eine Gerade und am Knickpunkt befindet sich also ein Winkel vom Maß π. Der Knick führt eine weitere Ecke ein und der Winkel vom Maß π teilt sich dabei auf den neuen Winkel und die beiden vergrößerten benachbarten Winkel auf oder „saugt“ ein Teil der beiden benachbarten Winkel ab.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

1.1.1 Kongruenzsätze

In Aufgabe **??** haben wir gesehen, dass ein Dreieck zum Beispiel durch die Angabe von zwei Winkeln und einer Seitenlänge eindeutig gegeben ist.

Ein solcher Satz heißt „Kongruenzsatz“. Es gibt deren fünf:

Info 1.1.10

Kongruenzsätze für Dreiecke

Die in den folgenden Aussagen formulierte „Eindeutigkeit“ versteht sich stets als „eindeutig bis auf Spiegelung oder Drehung“.

- Hat man von den drei Winkeln und den drei Seitenlängen eines Dreiecks mindestens vier Angaben gegeben, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt.
- Hat man von einem Dreieck alle drei Seitenlängen gegeben, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

  (Diesen Satz bezeichnet man gerne mit „sss“ für „Seite, Seite, Seite“.)
- Hat man von einem Dreieck zwei Winkel und eine Seitenlänge gegeben, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

  (Diesen Satz bezeichnet man mit „wsw“ für „Winkel, Seite, Winkel“.)
- Hat man von einem Dreieck zwei Seitenlängen und den von den Seiten eingeschlossenen Winkel gegeben, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

  (Diesen Satz bezeichnet man mit „sws“ für „Seite, Winkel, Seite“. Dabei steht der Winkel in der Mitte, um zu signalisieren, dass die beiden Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen.)
- Hat man von einem Dreieck einen Winkel und zwei Seitenlängen so gegeben, dass nur eine der Seiten auf einem Schenkel des Winkels liegt, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt, falls die andere gegebene Seite die längere der beiden gegebenen Seiten ist.

  (Diesen Satz bezeichnet man mit „Ssw“ für „Seite, Seite, Winkel“, wobei das groß geschriebene „S“ signalisieren soll, dass die dem Winkel gegenüberliegende Seite die längere Seite darstellt.)

Hat man von einem Dreieck nur zwei Angaben oder drei Angaben, die keinem der oben angegebenen Fälle entsprechen, gegeben, so gibt es verschiedene Dreiecke, für die die Angaben zutreffen.

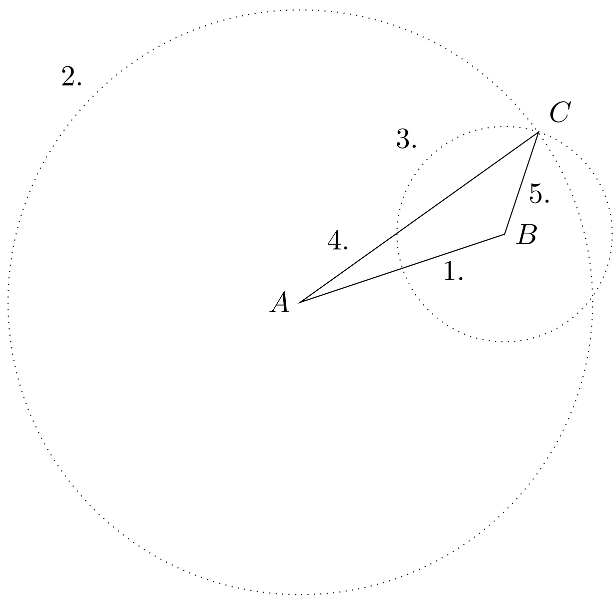
Die Kongruenzsätze kann man beweisen, indem man eine Konstuktionsvorschrift für die gegebenen Fälle angibt. Die Fälle „sws“ und „wsw“ haben Sie bereits in Aufgabe **??** erledigt.

Betrachten wir also den Fall „sss“:

Zunächst zeichnet man eine der drei Seiten. Danach schlägt man um die Enden der Seiten jeweils einen Kreis mit dem Radius der Seite, die in dieser Ecke beginnt. Diese beiden Kreise haben zwei

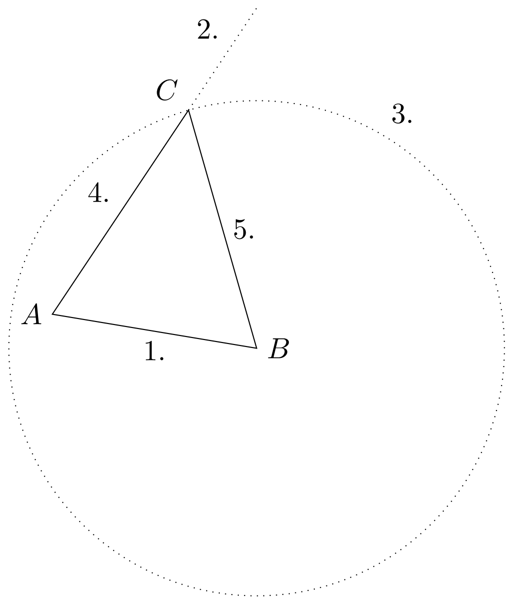
Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Schnittpunkte. Die Konvention, dass die Ecken mathematisch positiv bezeichnet werden, sagt uns, welcher der beiden Schnittpunkte zu wählen ist. (Würden wir den anderen nehmen, so ergäbe sich ein Dreieck, das aus unserem Dreieck durch Spiegelung an einer Seite hervorgeht.)



Es bleibt der Fall „Ssw“ zu zeigen:

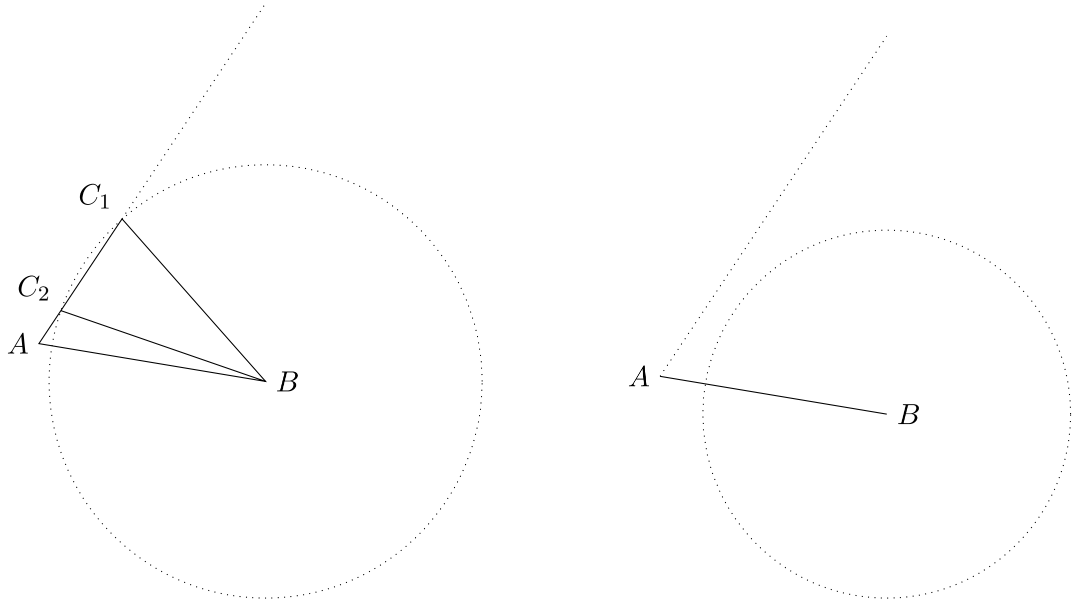
Wir zeichnen zunächst die kürzere der beiden Seiten und tragen auf der richtigen Ecke den Winkel an. Danach schlagen wir einen Kreis um die andere Ecke, dessen Radius die Länge der zweiten gegebenen Seite hat. Dieser Kreis schneidet den zweiten Schenkel des Winkels in einem Punkt, der die dritte Ecke des Dreiecks markiert. Dabei existiert der Schnittpunkt (und nur dieser eine), weil der Radius des Kreises größer ist als die zuerst gezeichnete Seite. (Für die Zeichnung seien exemplarisch c, α und a gegeben, wobei $a > c$ gelte.)



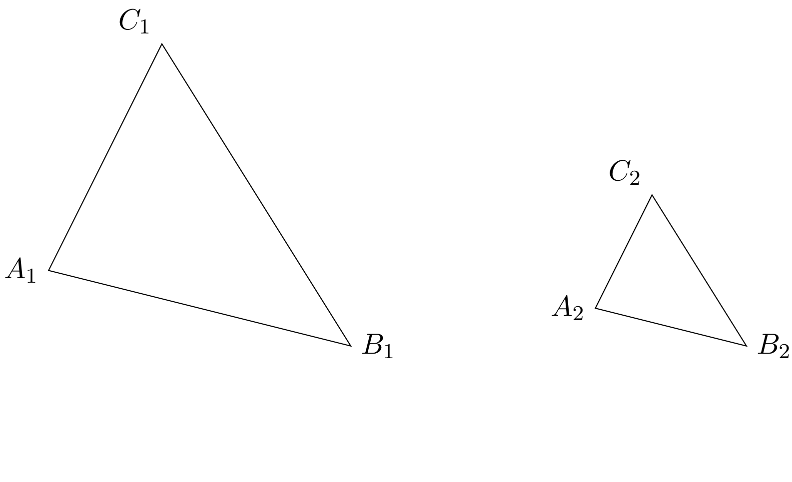
Hier sieht man auch schön, was schief geht, wenn die dem Winkel gegenüberliegende Seite die kürzere der beiden Seiten wäre. Man erhält mit dem Kreis entweder keinen oder zwei Schnittpunkte auf der

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Geraden, die beide die Bezeichnungskonvention erfüllen und zu Dreiecken führen, die nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführbar sind.



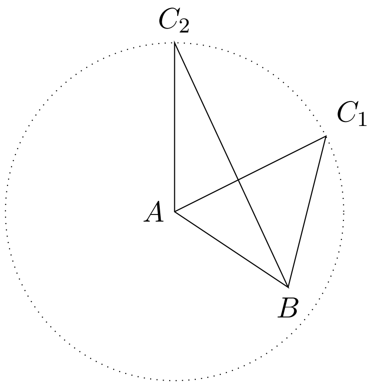
Dass die Angabe der drei Winkel eines Dreiecks nicht genügt, um das Dreieck eindeutig festzulegen, zeigt die folgende Skizze:



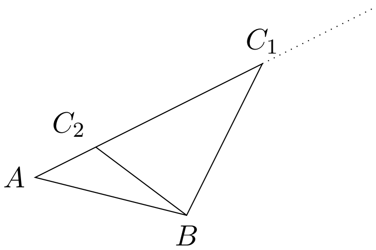
Hier geht das eine Dreieck durch Streckung, aber nicht durch Spiegelung oder Drehung in das andere über. Hat man lediglich zwei Winkel gegeben, so hat man dasselbe Problem.

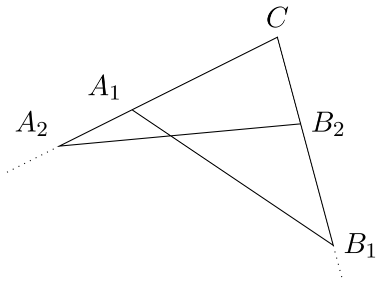
Dass die Angabe zweier Seitenlängen nicht ausreicht, zeigt die folgende Skizze, in der c und b gegeben sind.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt



Für die Angabe einer Seitenlänge und eines Winkels gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder liegt die gegebene Seite auf einem Schenkel oder sie liegt dem Winkel gegenüber. Beide Fälle liefern kein eindeutiges Dreieck (links sind c und α gegeben, rechts sind c und γ gegeben):





Hat man hingegen mindestens vier Werte gegeben, so kann man einen der Fälle „wsw“ oder „sws“ anwenden.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

1.2 Flächeninhalt und Strahlensätze

Einführung

Das Bauamt von Ludwigshafen möchte die Grundstücksgrößen des in unserem Ausschnitt des Stadtplans abgebildeten Viertels neu berechnen.

Die meisten der Grundstück haben eine (annähernd) vieleckige Grundfläche, die sich (wie in Aufgabe **??** gesehen) in Dreiecke aufspalten lässt. Das Bauamt teilt diese Grundstücke also in Dreiecke auf, berechnet die Flächeninhalte der Dreiecke und erhält so die Gesamtfläche der Grundstücke durch die Addition der Dreiecksflächeninhalte.

Doch wie wird eigentlich so ein Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet?

Sobald wir das wissen, lassen sich auch die sogenannten Strahlensätze herleiten, die zum Beispiel bei der Skalierung einer Zeichnung oder bei der Berechnung von Höhen bzw. Abständen zum Einsatz kommen.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

1.2.1 Der Flächeninhalt von Dreiecken

Definition 1.2.1

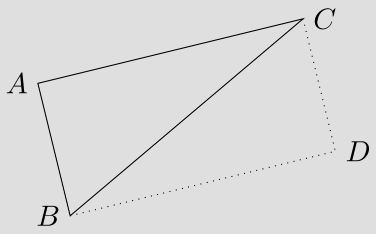
Flächeninhalt

Der ***Inhalt einer Fläche*** A ist die Anzahl der (möglicherweise auch zerschnittenen) Quadrate der Kantenlänge 1, die man benötigt, um A vollständig mit solchen Quadraten zu bedecken, wobei keine Überschneidungen der Quadrate auftreten.

Von rechtwinkligen Dreiecken lässt sich der Flächeninhalt sehr leicht berechnen.

Beispiel 1.2.2

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck ABC, drehen es um π und legen die beiden Hypotenusen des Dreiecks ABC und des gedrehten Dreiecks aufeinander. Die neu entstandene Ecke nennen wir D.

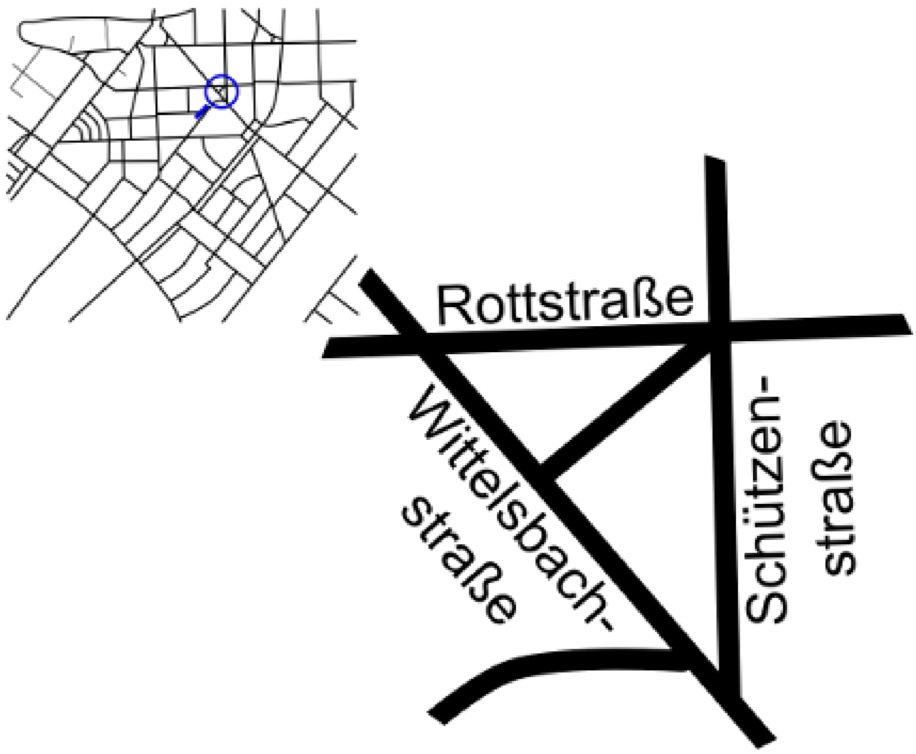


Die Winkel bei A und bei D des entstandenen Vierecks sind rechte Winkel. In den beiden Winkeln bei B und C werden jeweils die anderen beiden Winkel des Dreiecks ABC addiert. Mit der Winkelsumme im Dreieck folgt, dass diese beiden Winkel des Vierecks das Maß $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ haben und damit ebenfalls rechte Winkel sind.

Das Viereck $ABDC$ ist also ein Rechteck, dessen Flächeninhalt sich als Produkt der Längen der Katheten des Dreiecks ABC ergibt. Da die Dreiecke ABC und BDC, aus denen das Rechteck zusammen gesetzt ist, identisch sind, muss man diesen Flächeninhalt noch halbieren, um den Flächeninhalt von ABC zu erhalten.

Um den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, halbiert man das Produkt der Kathetenlängen. Doch was ist zu tun, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist? Der Stadtplan gibt uns hier einen entscheidenden Tipp:

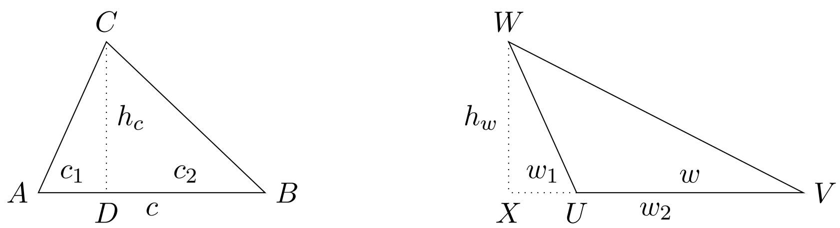
Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt



Die Schützenstraße bildet mit der Rottstraße und der Wittelsbachstraße ein Dreieck. Durch den kurzen Weg von der Ecke Schützenstraße und Rottstraße auf die Wittelsbachstraße wird dieses Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerteilt.

Aus jedem beliebigen Dreieck kann man zwei rechtwinklige Dreiecke gewinnen, indem man von einer Ecke aus eine Linie auf die Gerade zieht, auf der die gegenüberliegende Seite liegt. Die Linie sollte natürlich die Gerade in einem rechten Winkel treffen.

Je nachdem, ob die neue Linie innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks dann aus der Summe oder der Differenz der Flächeninhalte der beiden sich ergebenden rechtwinkligen Dreiecke.



Links gilt also (wenn F_Δ den Flächeninhalt des Dreiecks Δ bezeichnet)

$$F_{ABC} = F_{DBC} + F_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_2 + \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_1 = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot (c_2 + c_1) = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c.$$

Rechts gilt genauso

$$F_{UVW} = F_{XVW} - F_{XUW} = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_2 - \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_1 = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot (w_2 - w_1) = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot w.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Info 1.2.3

Höhe und Flächeninhalt eines Dreiecks

- Die ***Höhe eines Dreiecks auf einer Seite*** ist die Strecke, die von dem der Seite gegenüberliegenden Punkt ausgeht und die Gerade, auf der die Seite liegt, im rechten Winkel trifft.

  Der Punkt, auf dem die Höhe diese Gerade trifft, heißt ***Lotfußpunkt*** der Höhe.

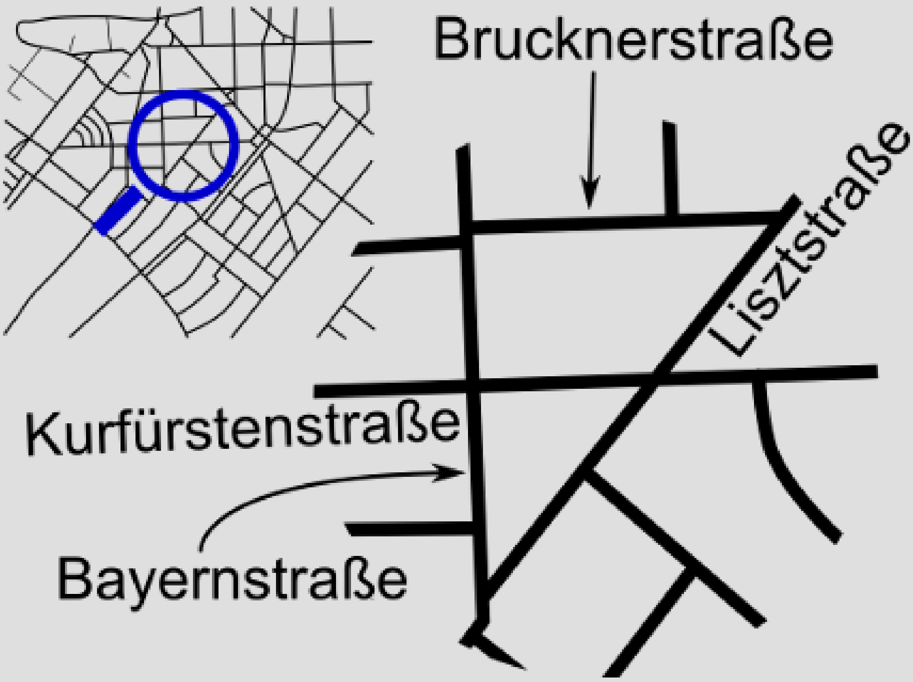
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus der Hälfte des Produkts der Länge einer Seite mit der Länge der zugehörigen Höhe des Dreiecks

$$F_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

1.2.2 Die Strahlensätze

Beispiel 1.2.4

Helen und Andreas nehmen an einer Stadtrallye teil. Startpunkt ist die Ecke, an der die Bayernstraße auf die Lisztstraße trifft.



Hier bekommen die zwei von einer Rallyeleiterin die Aufgabe, festzustellen, wie weit es bis zu den vier Kreuzungen ist, die die Kurfürstenstraße bzw. die Brucknerstraße mit der Bayernstraße bzw. der Lisztstraße bilden.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Außerdem sollen sie herausfinden, wie viele Meter man auf der Kurfürstenstraße bzw. auf der Brucknerstraße zurücklegen muss, um von der Bayernstraße auf die Lisztstraße zu kommen.

Das Ganze geht natürlich auf Zeit und als einziges Hilfsmittel ist ein Zollstock erlaubt. Die Werte sollen bei der Rallyeleiterin in eine Liste eingetragen werden.

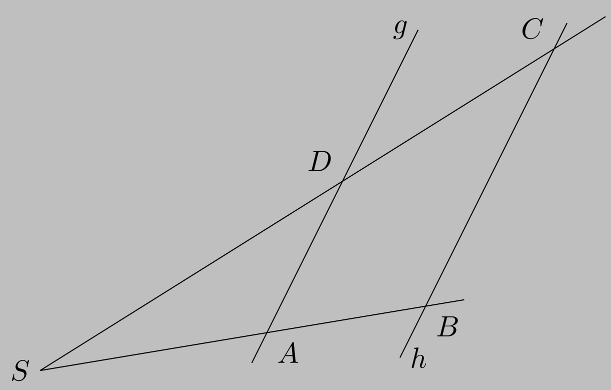
Um Zeit zu sparen, beschließen die beiden, dass Andreas die Schritte auf der Bayernstraße bis zur Brucknerstraße zählt und Helen die Längen der Seiten des von Lisztstraße, Kurfürstenstraße und Bayernstraße begrenzten Dreiecks bestimmt.

Mit Hilfe der Strahlensätze können Sie dann die anderen geforderten Längen errechnen.

Der Beweis des ersten Strahlensatzes verwendet den Flächeninhalt von Dreiecken.

Satz 1.2.5

Erster Strahlensatz



Für zwei Punkte P und Q seien $\overline{PQ}$ die Strecke von P nach Q und $\left|\overline{PQ}\right|$ die Länge dieser Strecke.

Sind in dem obigen Bild die Geraden g und h parallel, so gilt

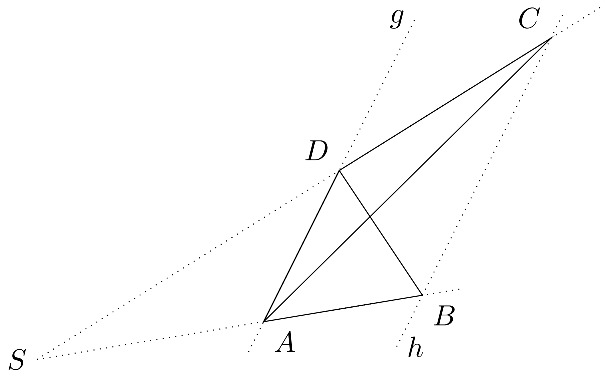
$$\frac{\left|\overline{SA}\right|}{\left|\overline{SD}\right|} = \frac{\left|\overline{SB}\right|}{\left|\overline{SC}\right|} = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CD}\right|}.$$

Der erste Strahlensatz betrachtet also die Verhältnisse von Abschnitten auf den von S ausgehenden Strahlen. Die Beobachtung ist, dass die Verhältnisse von je zwei sich entsprechenden Abschnitten auf verschiedenen Strahlen identisch sind. Sozusagen

$$„\frac{\text{vorne}}{\text{vorne}} = \frac{\text{komplett}}{\text{komplett}} = \frac{\text{hinten}}{\text{hinten}}“.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Für den Beweis schauen wir uns zunächst die beiden Dreiecke ABD und ACD an:



Die Höhe auf $\overline{AD}$ ist in beiden Dreiecken gleich lang, da die Geraden g und h parallel sind. Damit folgt, dass die Flächeninhalte F_{ABD} und F_{ACD} übereinstimmen. Das ändert sich auch nicht, wenn man das Dreieck SAD noch zu den beiden Dreiecken hinzufügt.

Wir haben also

$$F_{ABD} = F_{ACD} \qquad \text{und} \qquad F_{SBD} = F_{SAC}.$$

Daraus ergibt sich direkt

$$\frac{F_{SAD}}{F_{ABD}} = \frac{F_{SAD}}{F_{ACD}} \qquad \text{und} \qquad \frac{F_{SAD}}{F_{SBD}} = \frac{F_{SAD}}{F_{SAC}}.$$

Da $\overline{SA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{SB}$ auf einer Geraden liegen, ist die von D ausgehenden Höhe h_D des Dreiecks SAD auf $\overline{SA}$ gleichzeitig die Höhe des Dreiecks ABD auf $\overline{AB}$ und die Höhe des Dreiecks SBD auf $\overline{SB}$.

Ebenso ist die von A ausgehende Höhe h_A des Dreiecks SAD auf $\overline{SD}$ gleichzeitig die Höhe des Dreiecks ACD auf $\overline{CD}$ und die Höhe des Dreiecks SAC auf $\overline{SC}$.

Es folgen

$$\frac{F_{SAD}}{F_{ABD}} = \frac{\frac{|\overline{SA}|\cdot h_D}{2}}{\frac{|\overline{AB}|\cdot h_D}{2}} = \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{AB}|} \qquad \text{und} \qquad \frac{F_{SAD}}{F_{ACD}} = \frac{\frac{|\overline{SD}|\cdot h_A}{2}}{\frac{|\overline{CD}|\cdot h_A}{2}} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{CD}|}$$

sowie

$$\frac{F_{SAD}}{F_{SBD}} = \frac{\frac{|\overline{SA}|\cdot h_D}{2}}{\frac{|\overline{SB}|\cdot h_D}{2}} = \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} \qquad \text{und} \qquad \frac{F_{SAD}}{F_{SAC}} = \frac{\frac{|\overline{SD}|\cdot h_A}{2}}{\frac{|\overline{SC}|\cdot h_A}{2}} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{SC}|}$$

Setzt man diese vier Gleichungen in die oberen zwei Gleichungen ein, so erhält man

$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{CD}|} \qquad \text{und} \qquad \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{SC}|}$$

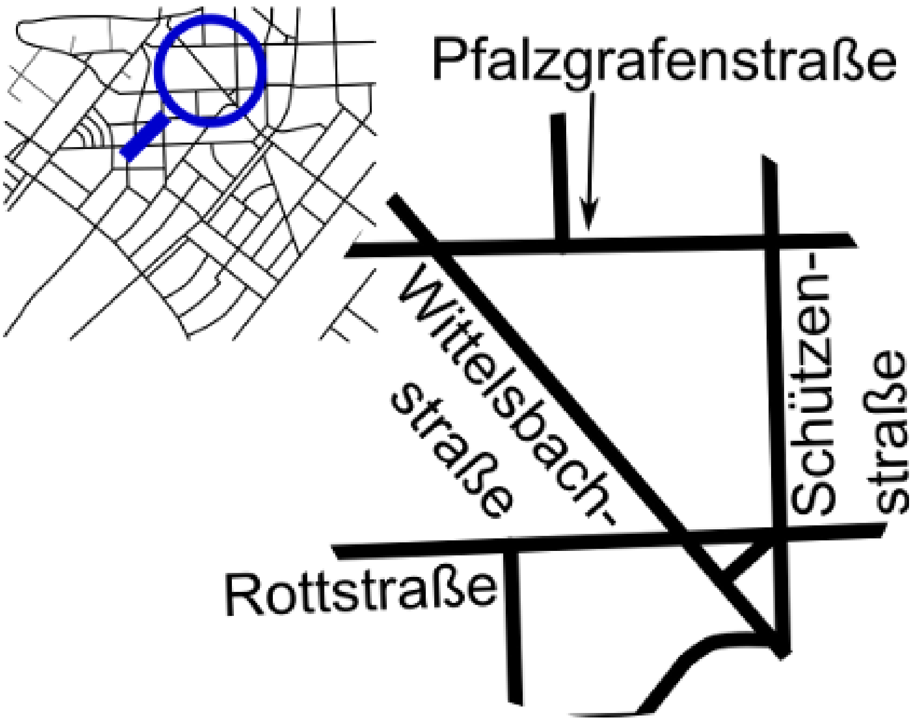
bzw.

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SD}|} = \frac{|\overline{SB}|}{|\overline{SC}|}.$$

Im Stadtplan findet sich noch eine Stelle, an der die Strahlensätze angewendet werden können. Wo ist sie?

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Lösung:

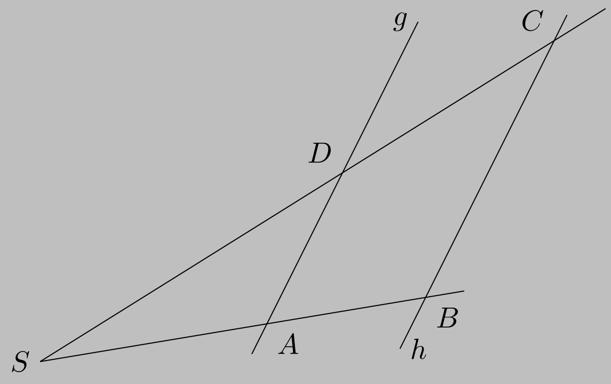


Aus diesem ersten Strahlensatz lässt sich noch ein zweiter gewinnen:

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Satz 1.2.6

Zweiter Strahlensatz



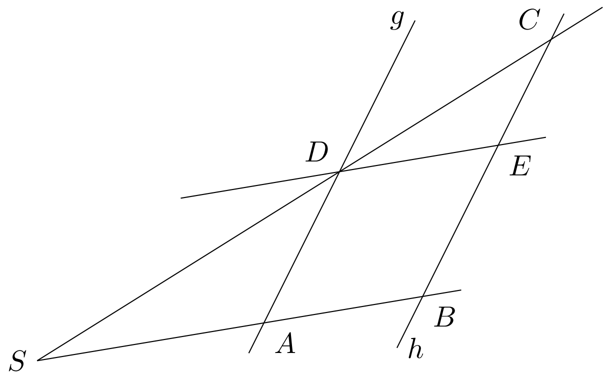
Sind in dem obigen Bild die Geraden g und h parallel, so gilt

$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{SC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BC}|}.$$

Der zweite Strahlensatz vergleicht die Längen der Parallelenabschnitte mit den Teilstrecken auf den Strahlen. Dabei gilt, dass das Verhältnis des kürzeren Parallelenabschnitts zum längeren dem Verhältnis des ersten Teilstücks auf einem Strahl zum gesamten Stück des Strahls entspricht. Sozusagen

$$\text{„}\frac{\text{vorne}}{\text{komplett}} = \frac{\text{kurz}}{\text{lang}}\text{“}.$$

Wir betrachten wieder die Strahlensatzfigur und ziehen zusätzlich die Parallele durch D zur Geraden durch S und B ein. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit $\overline{BC}$ sei E:

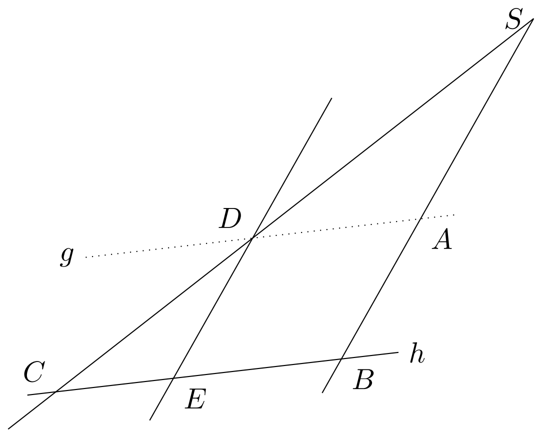


Da sowohl g und h als auch $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ parallel sind, gilt (siehe auch Satz **??**)

$$|\overline{AB}| = |\overline{DE}| \qquad \text{und} \qquad |\overline{AD}| = |\overline{BE}|.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Wenn wir diese Figur an der Geraden durch B und D spiegeln, erhalten wir



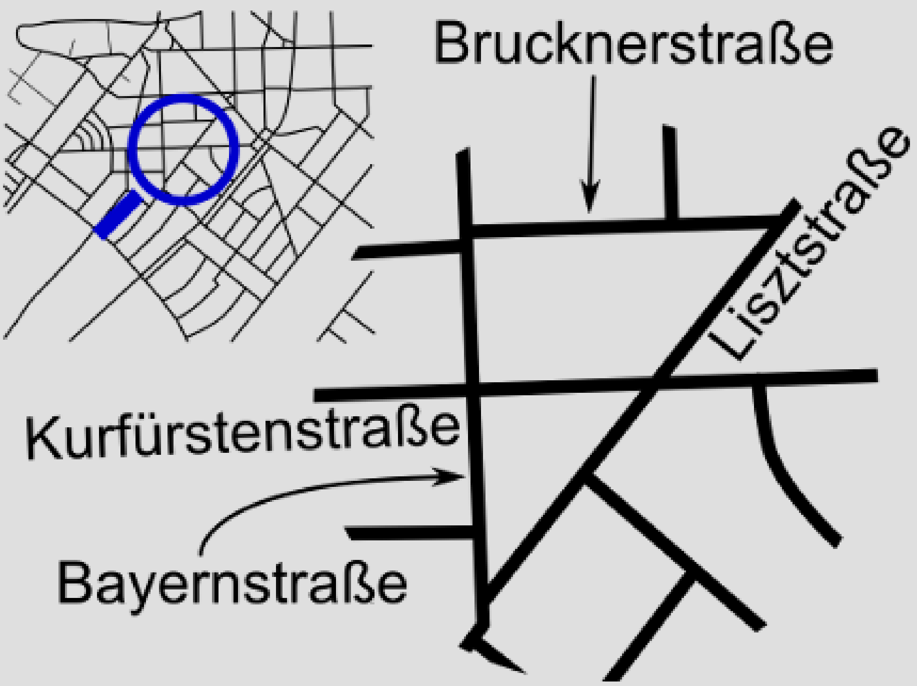
Mit dem ersten Strahlensatz **??** ergibt sich

$$\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{CS}|} = \frac{|\overline{EB}|}{|\overline{SD}|} \qquad \text{und} \qquad \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SD}|} = \frac{|\overline{SB}|}{|\overline{SC}|}.$$

Wegen $|\overline{AD}| = |\overline{BE}|$ folgt daraus

$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{SC}|} = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BC}|}.$$

Beispiel 1.2.7



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Andreas hat für die gesamte Strecke vom Ausgangspunkt auf der Bayernstraße zur Brucknerstraße 250 Schritte benötigt. Nach 150 Schritten hat er dabei die Kurfürstenstraße überquert.

Helen ist zunächst 267 Schritte auf der Lisztstraße gelaufen, hat dann 167 Schritte auf der Kurfürstenstraße gemacht und brauchte noch 200 Schritte, um zurück zum Ausgangspunkt zu gelangen.

Dort stellen die beiden fest, dass ein Schritt von Helen etwa 60 Zentimeter misst.

Also gelten die folgenden Längen:

Von	Auf	Nach	Distanz
Ausgangspunkt	Bayernstraße	Brucknerstraße	$a = 200$ Meter
Ausgangspunkt	Bayernstraße	Kurfürstenstraße	$b = 120$ Meter
Ausgangspunkt	Lisztstraße	Kurfürstenstraße	$c = 160.2$ Meter
Ausgangspunkt	Lisztstraße	Brucknerstraße	$d = 267$ Meter
Kurfürstenstraße	Bayernstraße	Brucknerstraße	$p = 80$ Meter
Kurfürstenstraße	Lisztstraße	Brucknerstraße	$q = 106.8$ Meter
Bayernstraße	Kurfürstenstraße	Lisztstraße	$u = 100.2$ Meter
Bayernstraße	Brucknerstraße	Lisztstraße	$v = 167$ Meter

Dabei errechnet sich b als Produkt der 200 Schritte, die Helen für die Strecke benötigt, mit Helens Schrittlänge von 0.6 Metern. Da Andreas für dieselbe Strecke 150 Schritte benötigt, misst einer seiner Schritte also $\frac{200 \cdot 0.6 \text{ Meter}}{150} = 0.8$ Meter. Die von den beiden abgelaufenen Strecken a, b, c und u lassen sich jetzt stets als Produkt der Anzahl der benötigten Schritte mit der Schrittlänge berechen.

p ist einfach die Differenz von a und b.

Mit dem ersten Strahlensatz lassen sich daraus d und q mittels

$$\frac{d}{a} = \frac{c}{b} = \frac{q}{p}$$

berechnen und v ergibt sich mit dem zweiten Strahlensatz aus

$$\frac{v}{u} = \frac{a}{b}.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgaben

Aufgabe 1.2.1
Der Sohn des Hauses beobachtet den Baum auf des Nachbarn Grundstück. Er stellt fest, dass der Baum von der Hecke, die die beiden Grundstücke trennt, vollständig verdeckt wird, wenn er nur nahe genug an die Hecke herantritt. Jetzt sucht er den Punkt, an dem der Baum gerade so nicht mehr zu sehen ist.

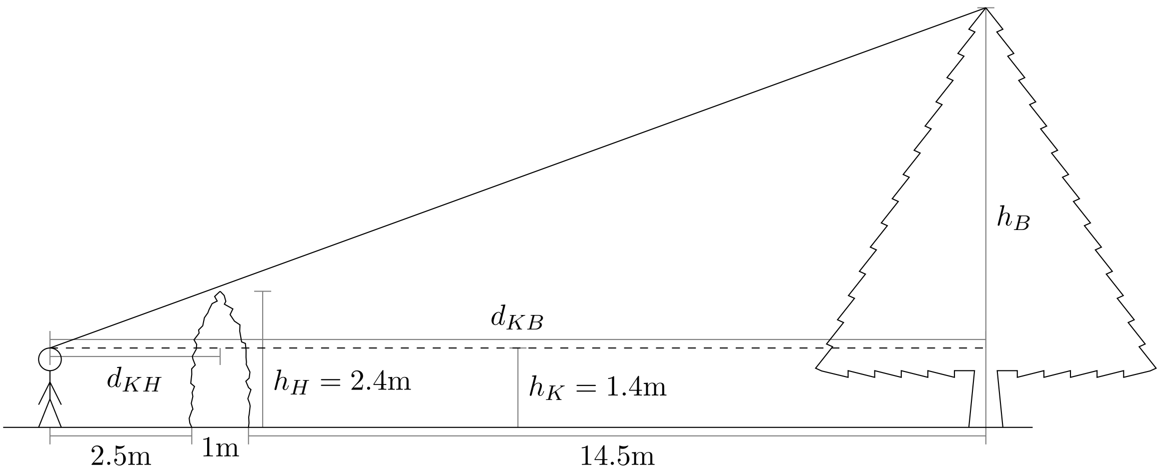
Der 1.40 Meter große Junge muss 2.50 Meter von der 2.40 Meter hohen, 1 Meter breiten und oben spitz zulaufenden Hecke entfernt stehen, damit der Baum vollständig verdeckt ist.

Wie hoch ist der Baum, wenn die Mitte des Stamms 14.5 Meter von der Hecke entfernt steht?

Führen Sie die Rechnung bitte zunächst allgemein durch und setzen Sie erst am Ende die Zahlenwerte ein!

Hinweis:
Beachten Sie die Breite der Hecke!

Lösung:



Wir wenden den zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{komplett}}{\text{vorne}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\right)$ an:

$$\frac{d_{KB}}{d_{KH}} = \frac{h_B - h_K}{h_H - h_K} \qquad \text{bzw.} \qquad h_B = (h_H - h_K) \cdot \frac{d_{KB}}{d_{KH}} + h_K.$$

Nun gelten $d_{KH} = 2.5\text{m} + \frac{1\text{m}}{2} = 3\text{m}$ und $d_{KB} = 2.5\text{m} + 1\text{m} + 14.5\text{m} = 18\text{m}$. Damit folgt

$$h_B = (2.4\text{m} - 1.4\text{m}) \cdot \frac{18\text{m}}{3\text{m}} + 1.4\text{m} = 1\text{m} \cdot 6 + 1.4\text{m} = 7.4\text{m}.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgabe 1.2.2
Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, sucht man sich am jenseitigen Ufer einen markanten Punkt. Auf der diesseitigen Flussseite stellt man auf der senkrecht zur Fließrichtung des Flusses verlaufenden Geraden, auf der der markante Punkt liegt, etwas vom Ufer entfernt ein Fernrohr auf. Ein zweites Fernrohr wird auf der Geraden, die parallel zum Ufer verläuft und auf der das erste Fernrohr steht, platziert.

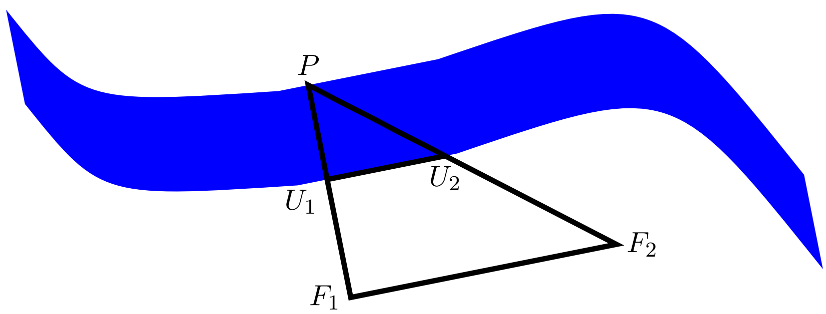
Mit beiden Fernrohren fixiert man nun den markanten Punkt.

Bestimmt man den Abstand der beiden Fernrohre, den Abstand des ersten Fernrohres vom Ufer und den Abstand der beiden Punkte, die die Fernrohre am diesseitigen Ufer sehen, so kann man die Breite des Flusses berechnen.

1. Skizzieren Sie die Lage des Flusses und der beiden Fernrohre!

   Zeichnen Sie außerdem die zu bestimmenden Längen ein!

   Lösung:

   P markiert den markanten Punkt, F_1 das erste Fernrohr und F_2 das zweite. U_1 und U_2 sind die beiden Punkte, die die beiden Fernrohre am diesseitigen Ufer anpeilen.

   Um $\left|\overline{PU_1}\right|$ zu bestimmen, benötigt man $\left|\overline{F_1F_2}\right|$, $\left|\overline{U_1U_2}\right|$ und $\left|\overline{F_1U_1}\right|$.

2. Wieviele Meter ist der Fluss breit, wenn die beiden Fernrohre 22 Meter auseinanderstehen, die beiden am diesseitigen Ufer angepeilten Punkte 12 Meter auseinanderliegen und das erste Fernrohr 30 Meter vom Ufer entfernt ist?

   Lösung:
   Wir verwenden den zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{lang}}{\text{kurz}} = \frac{\text{komplett}}{\text{vorne}}\right)$ und erhalten

$$\frac{\left|\overline{F_1F_2}\right|}{\left|\overline{U_1U_2}\right|} = \frac{\left|\overline{PF_1}\right|}{\left|\overline{PU_1}\right|} = \frac{\left|\overline{PU_1}\right| + \left|\overline{U_1F_1}\right|}{\left|\overline{PU_1}\right|} = 1 + \frac{\left|\overline{U_1F_1}\right|}{\left|\overline{PU_1}\right|}.$$

   Stellt man diese Formel nach $\left|\overline{PU_1}\right|$ um und setzt dann die Zahlenwerte ein, so erhält man

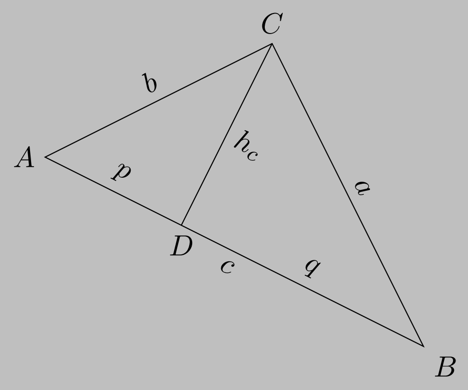
$$\left|\overline{PU_1}\right| = \left|\overline{U_1F_1}\right| \cdot \left(\frac{\left|\overline{F_1F_2}\right|}{\left|\overline{U_1U_2}\right|} - 1\right)^{-1} = \frac{\left|\overline{U_1F_1}\right| \cdot \left|\overline{U_1U_2}\right|}{\left|\overline{F_1F_2}\right| - \left|\overline{U_1U_2}\right|} = \frac{30\text{m} \cdot 12\text{m}}{22\text{m} - 12\text{m}} = \frac{360\text{m}^2}{10\text{m}} = 36\text{m}.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgabe 1.2.3
Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der folgenden Aussagen.

Satz 1.2.8

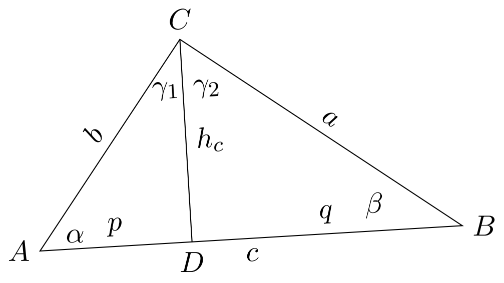
Höhensatz, Kathetensatz und Satz des Pythagoras



In einem rechtwinkligen Dreieck gilt mit den Bezeichnungen aus dem oben gezeichneten Dreieck (insbesondere sind der rechte Winkel bei C, D der Lotfußpunkt der Höhe h_c auf c, $p = \left|\overline{AD}\right|$ und $q = \left|\overline{BD}\right|$)

$$h_c^2 = pq, \qquad b^2 = cp, \qquad a^2 = cq \qquad \text{und} \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

1. Wir benennen die in dem Dreieck auftretenden Winkel:



Zeigen Sie, dass $\gamma_1 = \beta$ und $\gamma_2 = \alpha$ gilt!

Lösung:
Es gilt $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$, da unser Dreieck rechtwinklig bei C ist.

Außerdem gilt nach dem Winkelsummensatz in den rechtwinkligen Dreiecken ADC und BCD

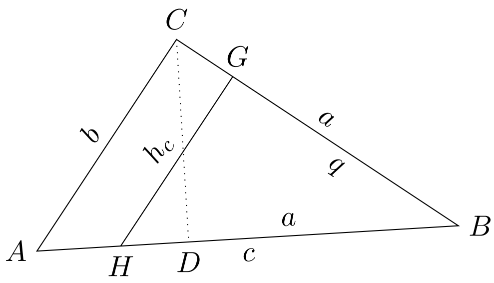
$$\alpha + \tfrac{\pi}{2} + \gamma_1 = \pi \qquad \text{und} \qquad \tfrac{\pi}{2} + \beta + \gamma_2 = \pi.$$

Damit folgt

$$\gamma_1 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma_2 = \tfrac{\pi}{2} - \left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \beta \qquad \text{und} \qquad \gamma_2 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma_1 = \tfrac{\pi}{2} - \left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

2. Für den Beweis von „$a^2 = cq$“ nehmen wir das Dreieck BCD und drehen es so, dass die Ecke B bleibt, wo sie ist, und $\overline{BC}$ ein Teil der Strecke $\overline{AB}$ wird.



Folgern Sie $a^2 = cq$ und $bq = ah_c$!

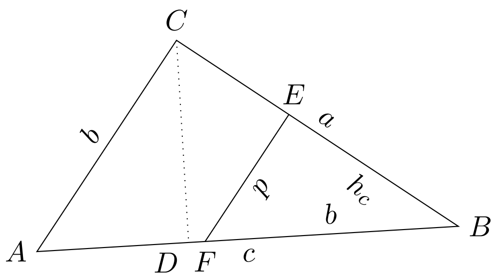
Lösung:
Nach dem ersten Strahlensatz $\left(\frac{\text{vorne}}{\text{vorne}} = \frac{\text{komplett}}{\text{komplett}}\right)$ folgt

$$\frac{|\overline{BG}|}{|\overline{BH}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BA}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{q}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{bzw.} \quad qc = a^2.$$

Nach dem zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{vorne}}{\text{komplett}} = \frac{\text{kurz}}{\text{lang}}\right)$ folgt

$$\frac{|\overline{BG}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{GH}|}{|\overline{CA}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{q}{a} = \frac{h_c}{b} \quad \text{bzw.} \quad qb = ah_c.$$

3. Für den Beweis von „$b^2 = cp$“ nehmen wir das Dreieck ADC und drehen es so, dass die Ecke C auf B zu liegen kommt und $\overline{AC}$ ein Teil der Strecke $\overline{AB}$ wird.



Folgern Sie $b^2 = cp$ und $bh_c = ap$!

Lösung:
Nach dem zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{vorne}}{\text{komplett}} = \frac{\text{kurz}}{\text{lang}}\right)$ folgt

$$\frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{CA}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h_c}{a} = \frac{p}{b} \quad \text{bzw.} \quad h_c b = ap.$$

und

$$\frac{|\overline{BF}|}{|\overline{BA}|} = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{CA}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{c} = \frac{p}{b} \quad \text{bzw.} \quad b^2 = cp.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

4. Zeigen Sie $a^2 + b^2 = c^2$ und $h_c^2 = pq$ mit den vorgenannten Ergebnissen!

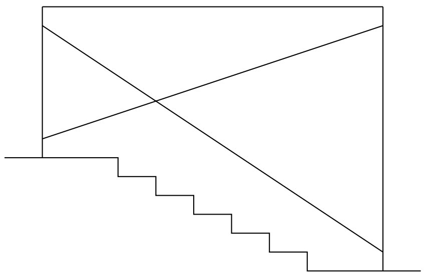
   Lösung:
   Addiert man die beiden Komponenten des Kathetensatzes „$a^2 = cp$“ und „$b^2 = cq$“ so erhält man unter Verwendung von $c = p + q$

   $$a^2 + b^2 = cp + cq = c \cdot (p + q) = c^2.$$

   Multipliziert man die anderen beiden Formeln aus den vorangegangenen Aufgabenteilen, so erhält man

   $$abpq = (bq) \cdot (ap) = (ah_c) \cdot (bh_c) = abh_c^2 \qquad \text{bzw.} \qquad pq = h_c^2.$$

Aufgabe 1.2.4

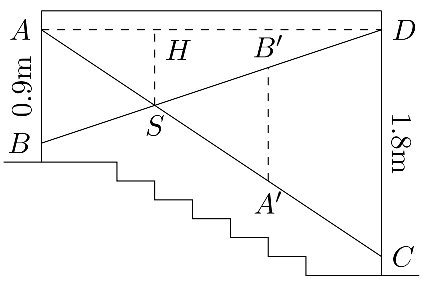


Ein Baugerüst soll über einer Treppe aufgestellt werden. Damit die Bohle parallel zur Erde ist, muss der eine Gerüstständer natürlich kürzer sein als der andere. Zur Stabilisation werden zwei Stangen kreuzförmig an den beiden Ständern befestigt. Die oberen Befestigungen befinden sich an beiden Ständern in der gleichen Höhe. Die beiden Befestigungen an dem langen Ständer sind 1.8m voneinander entfernt, die am kurzen Ständer 90cm.

Wie tief hängt der Kreuzungspunkt der Stangen unter der Bohle, wenn die oberen Befestigungen jeweils 10 Zentimeter unter der Bohle platziert werden?

Hinweis:
Spiegeln Sie die Befestigungspunkte des kleinen Ständers am Kreuzungspunkt!

Lösung:
Wir benennen die Punkte im Bild und zeichnen drei Hilfslinien ein.



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Der zweite Strahlensatz $\left(\frac{\text{lang}}{\text{kurz}} = \frac{\text{komplett}}{\text{vorne}}\right)$ liefert angewendet auf die von A ausgehenden Strahlen

$$\frac{\left|\overline{DC}\right|}{\left|\overline{HS}\right|} = \frac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{AS}\right|} = \frac{\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SC}\right|}{\left|\overline{AS}\right|} = 1 + \frac{\left|\overline{SC}\right|}{\left|\overline{AS}\right|}.$$

Spiegelt man A und B an S und nennt die Spiegelpunkte A' und B', so gilt

$$\left|\overline{AS}\right| = \left|\overline{SA'}\right|, \qquad \left|\overline{BS}\right| = \left|\overline{SB'}\right| \qquad \text{und} \qquad \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{A'B'}\right|.$$

Die Anwendung des zweiten Strahlensatzes $\left(\frac{\text{komplett}}{\text{vorne}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\right)$ auf die von S ausgehenden Strahlen liefert damit

$$\frac{\left|\overline{SC}\right|}{\left|\overline{AS}\right|} = \frac{\left|\overline{SC}\right|}{\left|\overline{SA'}\right|} = \frac{\left|\overline{CD}\right|}{\left|\overline{A'B'}\right|} = \frac{\left|\overline{DC}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}.$$

Setzt man beide Gleichungen zusammen, so ergibt sich

$$\frac{\left|\overline{DC}\right|}{\left|\overline{HS}\right|} = 1 + \frac{\left|\overline{DC}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{DC}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\overline{HS}\right| = \frac{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{DC}\right|}{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{DC}\right|}.$$

Die Zahlenwerte liefern dann

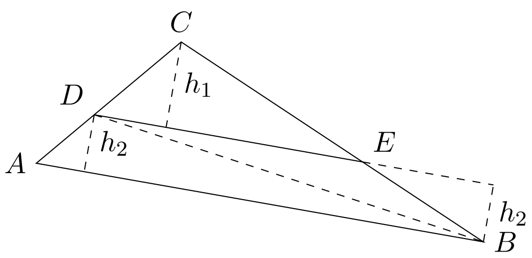
$$\left|\overline{HS}\right| = \frac{0.9\text{m} \cdot 1.8\text{m}}{0.9\text{m} + 1.8\text{m}} = \frac{0.9\text{m} \cdot 1.8\text{m}}{2.7\text{m}} = \frac{9 \cdot 1.8\text{m}}{27} = \frac{1.8\text{m}}{3} = 0.6\text{m}.$$

Der Kreuzungspunkt befindet sich also 70 Zentimeter unterhalb der Bohle.

Aufgabe 1.2.5
Wo müssen Sie ein Dreieck parallel zu einer Seite durchschneiden, damit die beiden entstehenden Stücke den gleichen Flächeninhalt haben?

Hinweis:
Falls Sie die Formel für den Flächeninhalt des entstehenden Vierecks benötigen, aber nicht wissen, so können Sie das Viereck in zwei Dreiecke zerlegen.

Lösung:



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Der Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks ist $\frac{h_1 \cdot |\overline{DE}|}{2}$.

Der Flächeninhalt des entstehenden Vierecks lässt sich über die beiden Dreiecke, die durch das Verbinden von D und B entstehen, berechnen zu $\frac{h_2 \cdot |\overline{DE}|}{2} + \frac{h_2 \cdot |\overline{AB}|}{2}$.

Gleichsetzen liefert die Bedingung

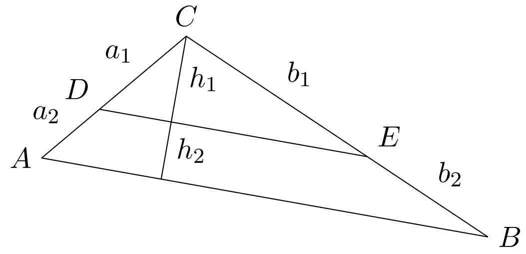
$$\frac{h_1 \cdot |\overline{DE}|}{2} = \frac{h_2}{2} \cdot \left(|\overline{DE}| + |\overline{AB}|\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|}.$$

Verwendet man, dass der Flächeninhalt des neuen Dreiecks halb so groß ist wie der des alten Dreiecks, so erhält man

$$\frac{h_1 \cdot |\overline{DE}|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(h_1 + h_2) \cdot |\overline{AB}|}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|}.$$

In beiden Bedingungen tritt also das Verhältnis $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|}$ auf.

Dieses Verhältnis lässt sich auch mit den Strahlensätzen berechnen.



Nach dem ersten Strahlensatz $\left(\frac{\text{hinten}}{\text{vorne}} = \frac{\text{hinten}}{\text{vorne}}\right)$ gilt

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} \left(= \frac{a_2}{a_1} \right).$$

Nach dem zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{lang}}{\text{kurz}} = \frac{\text{komplett}}{\text{vorne}}\right)$ gilt

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_1 + h_2}{h_1} \left(= \frac{a_1 + a_2}{a_1} \right).$$

Einsetzen in die erste der obigen Bedingungen liefert

$$\frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = 1 + \frac{h_1 + h_2}{h_1} = 2 + \frac{h_2}{h_1} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{h_1}{h_2} - 1 = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot 1 + 1^2 - 1 - 1 &= \left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right)^2 - \sqrt{2}^2 \\ &= \left(\frac{h_1}{h_2} - 1 - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{h_2} - 1 + \sqrt{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Wegen $h_1 > 0$ und $h_2 > 0$ ergibt sich aus der letzten Gleichung $h_1 = \left(\sqrt{2}+1\right) \cdot h_2$.

Das liefert

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot h_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} \cdot h_1 = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot h_1 \qquad \text{und} \qquad h_1 + h_2 = \sqrt{2} \cdot h_1.$$

Einsetzen des Strahlensatzergebnisses in die zweite Bedingung liefert dasselbe Ergebnis

$$\frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_1+h_2}{h_1} \qquad \text{bzw.} \qquad 2h_1^2 = (h_1+h_2)^2\,, \qquad \text{also} \qquad h_1 + h_2 = \sqrt{2} \cdot h_1.$$

(Es genügt natürlich, wenn Sie das Verhältnis auf einem der beiden vorgestellten Wege erhalten.)

1.2.3 Der Satz des Thales

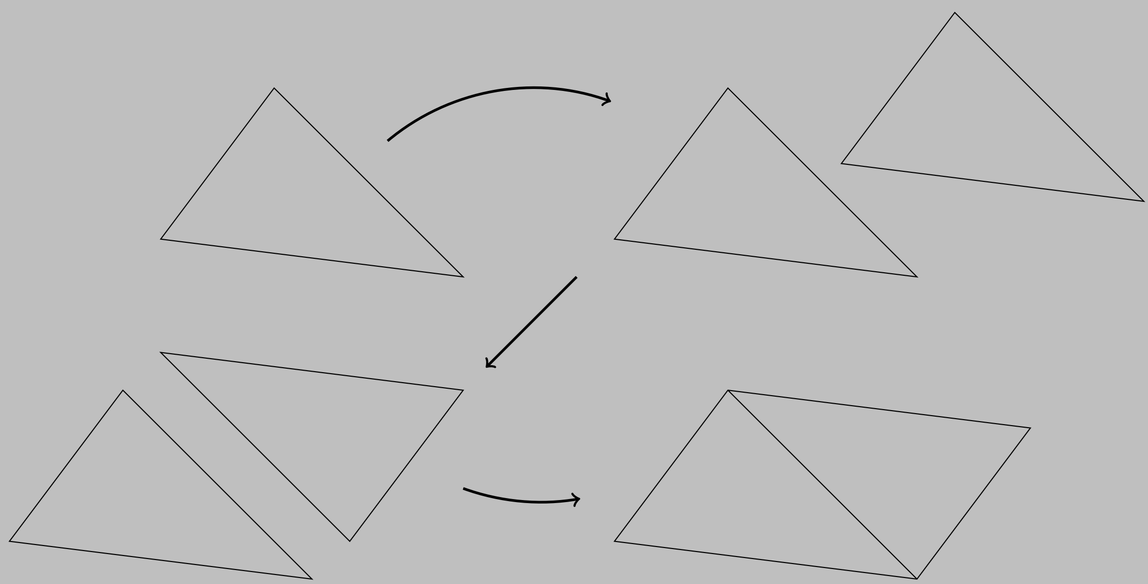
Der Satz des Thales **??** erklärt, wie man ein Dreieck zeichnen kann, das auf jeden Fall rechtwinklig ist. Wir wollen die Umkehrung des Satzes nutzen, um zu zeigen, wie viele Schritte für den Beweis dieser Aussage eigentlich nötig sind, wenn man sehr exakt ist und nur Dinge verwendet, die wir schon wissen. (Für den Beweis des Satzes von Thales benötigen wir ein Ergebnis, das wir erst im folgenden Abschnitt **??** über Trigonometrie am Dreieck beweisen werden. Trotzedem werden wir ihn in diesem Abschnitt mit erledigen.)

Als erste Zutat für den Beweis müssen wir uns mit Parallelogrammen beschäftigen.

Definition 1.2.9

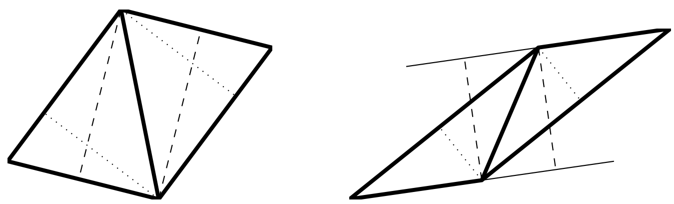
Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist das Viereck, das entsteht, wenn man ein beliebiges Dreieck kopiert, die Kopie um π dreht und dann eine Seite der Kopie auf die entsprechende Seite des Originals legt.



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Die beiden Dreiecke haben nun zwei gemeinsame Ecken. Die Höhe des ersten Dreiecks, die von einer gemeinsamen Ecke ausgeht, hat die selbe Länge wie die Höhe des zweiten Dreiecks, die von der anderen gemeinsamen Ecke ausgeht. In den Skizzen sind jeweils die gestrichelten bzw. die gepunkteten Linien gleich lang.



Damit ergibt sich die erste Aussage des folgenden Satzes.

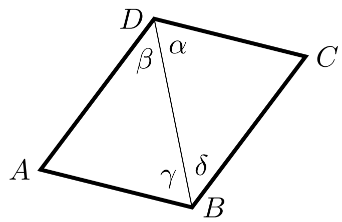
Satz 1.2.10

Charakterisierung von Parallelogrammen

- Je zwei gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind parallel.
- Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so handelt es sich um ein Parallelogramm.
- In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang.

Die dritte Aussage des Satzes ergibt sich direkt aus der Definition von Parallelogrammen.

Die zweite Aussage ergibt sich, wenn man in ein Viereck mit je zwei gegenüberliegenden parallelen Seiten eine Diagonale einzeichnet.



Da AB und CD parallel sind, sind α und γ Wechselwinkel. Da AD und BC parallel sind, sind β und δ ebenfalls Wechselwinkel.

Die beiden entstandenen Dreiecke haben außerdem die Diagonale gemeinsam und sind also nach dem Kongruenzsatz „wsw“ kongruent. Da die Orientierung der Winkel an der Seite übereinstimmt, geht das eine Dreieck durch eine Drehung um π in das andere Dreieck über.

Deshalb handelt es sich also tatsächlich um ein Parallelogramm nach Definition **??**.

Wir benötigen Parallelogramme wegen der folgenden Aussage:

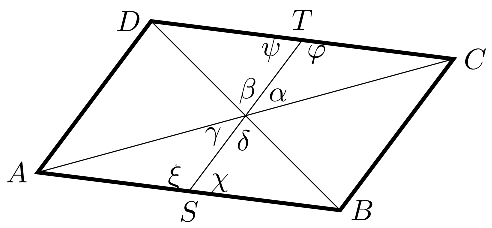
Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Satz 1.2.11

Diagonalen in einem Parallelogramm

Die beiden Diagonalen in einem Parallelogramm schneiden sich. Der Schnittpunkt halbiert beide Diagonalen.

Der Beweis dieser Aussage ergibt sich aus den Strahlen- und Kongruenzsätzen. Wir zeichnen in ein Parallelogramm die beiden Diagonalen ein und ergänzen die Parallele zu einer Seite, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen verläuft.



Das Viereck $ASTD$ ist ein Parallelogramm und deshalb gilt $\left|\overline{AS}\right| = \left|\overline{DT}\right|$.

Außerdem sind $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$, weil ja auch $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Nennen wir den Schnittpunkt der Diagonalen M, so ergibt sich, wenn man den zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{kurz}}{\text{lang}} = \frac{\text{vorne}}{\text{komplett}}\right)$ auf die von A bzw. von D ausgehenden Strahlen anwendet

$$\frac{\left|\overline{SM}\right|}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{\left|\overline{AS}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{\left|\overline{DT}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{\left|\overline{TM}\right|}{\left|\overline{BC}\right|}.$$

(Der Strahlensatz wurde jeweils in den äußeren Gleichheitszeichen angewendet.)

Multipliziert man die Gleichung mit $\left|\overline{BC}\right|$, so ergibt sich $\left|\overline{SM}\right| = \left|\overline{TM}\right|$.

Außerdem gilt sowohl $\alpha = \gamma$ als auch $\beta = \delta$, weil beide jeweils durch den gleichen Winkel auf π ergänzt werden können.

Da sowohl χ und ψ als auch ξ und φ Wechselwinkel sind, folgt $\chi = \psi$ und $\xi = \varphi$.

Mit dem Kongruenzsatz „wsw“ folgt, dass die Dreiecke ASM und MCT bzw. SBM und DMT jeweils kongruent sind.

Das bedeutet aber $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MC}\right|$ und $\left|\overline{DM}\right| = \left|\overline{MB}\right|$.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

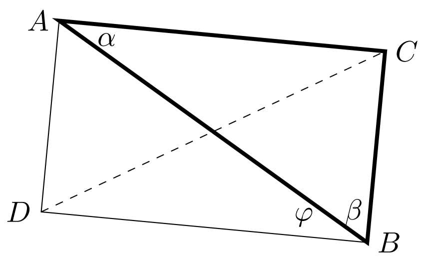
Damit lässt sich jetzt der Satz des Thales beweisen:

Satz 1.2.12

Satz des Thales

- Die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks sind alle gleich weit vom Mittelpunkt der Hypotenuse entfernt.
- Sind alle Eckpunkte eines Dreiecks vom Mittelpunkt einer Seite gleich weit entfernt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Wir widmen uns zunächst der ersten Aussage:



Wir wollen zeigen, dass die Diagonalen im gezeichneten Parallelogramm gleich lang sind, um dann die Abstände von A, B und C zum Schnittpunkt berechnen zu können.

In der Skizze ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von $\frac{\pi}{2}$ bei C. Mit dem Winkelsummensatz ergibt sich $\alpha + \beta = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Das Viereck $ADBC$ ist das Parallelogramm, das entsteht, wenn man die Hypotenusen von ABC und einer um π gedrehten Kopie von ABC aufeinanderlegt. Also sind AC und BD parallel und deshalb sind α und φ Wechselwinkel. Wegen $\varphi + \beta = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ist das Dreieck DBC rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B. Außerdem ergibt sich $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{DB}\right|$ aus der Parallelogrammeigenschaft.

Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich die Längen der Diagonalen von $ADBC$ berechnen:

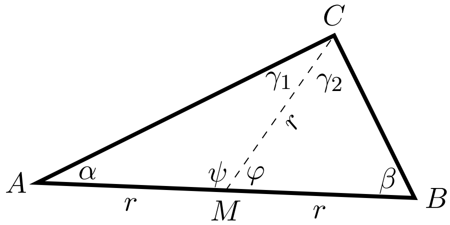
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{CB}\right|^2} = \sqrt{\left|\overline{DB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2} = \left|\overline{CD}\right|.$$

Die Diagonalen sind also gleich lang und da $ADBC$ ein Parallelogramm ist, werden sie durch ihren Schnittpunkt halbiert. Die Diagonalen schneiden sich also gegenseitig in vier gleichlange Teile.

Der Schnittpunkt ist damit der Mittelpunkt der Hypotenuse AB von ABC und C ist von diesem Schnittpunkt genauso weit entfernt wie A und B.

Der Beweis der zweiten Aussage verwendet ein Ergebnis aus dem nächsten Abschnitt:

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt



In der Skizze ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und die Eckpunkte des Dreiecks sind alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ von M entfernt. Zu beweisen ist $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$.

Dreiecke, in denen zwei Seiten die gleiche Länge haben, nennt man „gleichschenklig“ und es folgt, dass die beiden den gleichlangen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind. Wir werden diese Aussage im nächsten Abschnitt beweisen (siehe Info **??**) und dabei den Satz des Thales nicht verwenden. Wir können diese Aussage also hier schon verwenden, ohne einen Zirkelschluss zu produzieren.

Die Dreiecke AMC und MBC sind gleichschenklig, da A, B und C von M gleich weit entfernt sind. Deshalb gilt also $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$.

Außerdem gilt in den Dreiecken der Winkelsummensatz

$$\alpha + \gamma_1 + \psi = \pi \qquad \text{und} \qquad \beta + \gamma_2 + \varphi = \pi.$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man $\alpha + \gamma_1 + \beta + \gamma_2 + \psi + \varphi = 2\pi$.

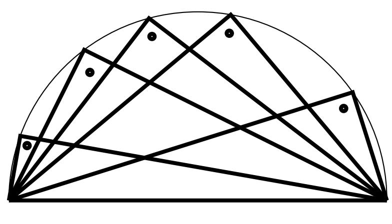
In dieser Gleichung kann man nun α durch γ_1, β durch γ_2 und $\psi + \varphi$ durch π ersetzen, da M ja auf der Seite $\overline{AB}$ liegt. Dadurch erhält man

$$\gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 + \pi = 2\pi \qquad \text{bzw.} \qquad 2 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = \pi.$$

Also gilt $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ und deshalb ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

Häufig wird der Satz des Thales formuliert als „Der Winkel in einem Halbkreis ist ein rechter.“

Das bedeutet: Wenn man über einer Strecke einen Halbkreis zeichnet, dessen Durchmesser die Strecke selbst ist, danach einen Punkt auf diesem Kreis markiert und diesen Punkt mit den beiden Endpunkten der Strecke verbindet, erhält man bei dem neuen Punkt einen rechten Winkel.



Das entspricht der zweiten Aussage aus Satz **??**.

Die erste Aussage liest man oft als „Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks liegt auf der Hypotenuse.“, denn in jedem Dreieck gibt es genau einen Kreis, der durch alle drei Ecken geht. Diesen Kreis bezeichnet man als „Umkreis“ des Dreiecks.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

1.3 Trigonometrie am Dreieck

Einführung

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet. Der Nachteil an der Formel ist allerdings, dass man höchst selten die Länge der Höhe eines Dreiecks auf eine der drei Seiten gegeben hat. Zeichnet man das Dreieck und misst danach die Höhe, so ergeben sich zwangsläufig Ungenauigkeiten. Außerdem gibt es Dreiecke, die man unmöglich zeichnen kann. (Zum Beispiel ein Dreieck mit einem Winkel vom Maß 0.1, auf dessen Schenkeln zwei Seiten mit den Längen 1 Dezimeter und 13 Meter liegen — um ein Extrembeispiel zu nennen.)

Die Strahlensätze geben uns hier ein einfaches Mittel an die Hand, mit denen sich aus der Angabe von drei Werten (sprich Seitenlängen und Winkelmaße), die das Dreieck eindeutig bestimmen, die anderen Werte sowie die Längen der Höhen berechnen lassen.

Dieses Hilfsmittel sind die trigonometischen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens.

Wenn Sie das Modul über trigonometrische Funktionen schon kennen, so haben Sie von diesen Funktionen bereits gehört. Dort werden die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis eingeführt, während hier nun rechtwinklige Dreiecke verwendet werden. Beide Definitionen führen aber zu denselben Funktionen.

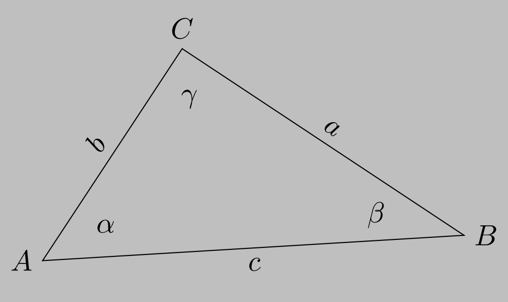
Inhalt

Durch die Strahlensätze haben wir gesehen, dass die Verhältnisse der Seiten in einem Dreieck lediglich von den Winkeln des Dreiecks abhängen. Ändert man in einem Strahlensatz den Winkel bei S oder den Winkel, in dem die parallelen Geraden einen Strahl schneiden, so ändern sich natürlich auch die Verhältnisse.

Legt man hingegen einen der beiden Winkel fest, so kann man die Verhältnisse in Abhängigkeit von dem anderen Winkel als Funktion von einer Variablen darstellen.

Definition 1.3.1

Die trigonometrischen Funktionen im Dreieck



Man definiert die *trigonometrischen Funktionen im Dreieck* als Verhältnis der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Ist c die Hypotenuse (also $\gamma = \frac{\pi}{2}$), so definiert man

- den ***Sinus*** des Winkels α als das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c},$$
- den ***Kosinus*** des Winkels α als das Verhältnis der an dem Winkel anliegenden Kathete zur Hypotenuse
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c},$$
- den ***Tangens*** des Winkels α als das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur an dem Winkel anliegenden Kathete
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \qquad \text{und}$$
- den ***Kotangens*** des Winkels α als das Verhältnis der an dem Winkel anliegenden Kathete zur dem Winkel gegenüberliegenden Kathete
$$\cot(\alpha) = \frac{b}{a}.$$

Die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks wird auch ***Gegenkathete*** des Winkels genannt und die an dem Winkel anliegende Kathete heißt auch ***Ankathete*** des Winkels.

Der Sinus eines Winkels berechnet sich also als das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse.

Ein „Firmenname“, mit dem sich die Definitionen von Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens leichter merken lassen, ist

„Gaga Hummel Hummel AG“.

Ersetzt man die „Hummel“n durch „H“s und schreibt dann die ersten vier Buchstaben über die letzten vier, so erhält man die Definitionen der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{array}{cccc} \text{sin} & \text{cos} & \text{tan} & \text{cot} \\ \frac{\text{G}}{\text{H}} & \frac{\text{A}}{\text{H}} & \frac{\text{G}}{\text{A}} & \frac{\text{A}}{\text{G}} \end{array}$$

Dabei steht natürlich ein „H“ für „Hypotenuse“, ein „G“ für „Gegenkathete“ und ein „A“ für „Ankathete“.

Beispiel 1.3.2

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

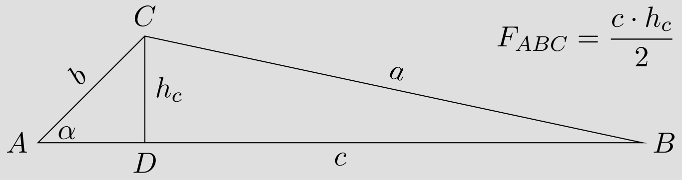
Ein Dreieck wird nach dem Kongruenzsatz „sws“ durch die Angaben

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \qquad b = 2 \qquad \text{und} \qquad c = 8$$

eindeutig festgelegt. ($\frac{\pi}{4}$ im Bogenmaß entsprechen $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{360°}{2\pi} = 45°$ im Gradmaß.)

Wir wollen den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen.

1. Der Flächeninhalt entspricht der Hälfte des Produktes von c mit der Länge der Höhe h_c auf c.

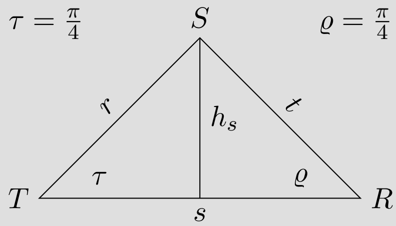


$$F_{ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

2. Im rechtwinkligen Dreieck ADC ist b die Hypotenuse und h_c die Gegenkathete des Winkels α. Mit den trigonometrischen Funktionen folgt

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \qquad \text{bzw.} \qquad h_c = b \cdot \sin(\alpha)\,.$$

3. Im Modul über trigonometrische Funktionen haben Sie $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gegebenenfalls schon verwendet. Wir wollen den Wert jetzt am Dreieck berechnen und zeichnen dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$. Der verbliebene Winkel hat dann ebenfalls ein Maß von $\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.



Mit der Definition des Sinus folgt

$$\frac{h_s}{r} = \sin(\tau) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(\varrho) = \frac{h_s}{t} \qquad \text{bzw.} \qquad t = r.$$

Im rechtwinkligen Dreieck RST gilt der Satz des Pythagoras **??**

$$s^2 = r^2 + t^2 = r^2 + r^2 = 2r^2.$$

Außerdem kann man $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ auch in diesem Dreieck bestimmen

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(\varrho) = \frac{r}{s} = \frac{r}{\sqrt{2} \cdot r} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Insgesamt folgt

$$F_{ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{bc \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot bc}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 8}{4} = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Die Tatsache, dass aus $\tau = \varrho = \frac{\pi}{4}$ auch $t = r$ folgt, lässt sich verallgemeinern:

Info 1.3.3

Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

- Ein Dreieck, in dem zwei Seiten die gleiche Länge haben, heißt ***gleichschenklig***. Die dritte Seite des Dreiecks heißt *Basis* des Dreiecks.

  In einem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden den gleichlangen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Diese beiden Winkel heißen *Basiswinkel* des gleichschenkligen Dreiecks.

  Hat umgekehrt ein Dreieck zwei gleich große Winkel, so ist es gleichschenklig.

  In einem gleichschenkligen Dreieck fallen Höhe der Basis, Seitenhalbierende der Basis, Mittelsenkrechte der Basis und Winkelhalbierende des der Basis gegenüberliegenden Winkels zusammen.

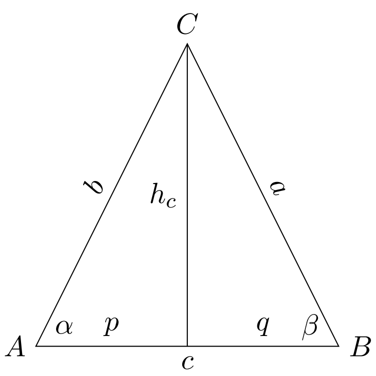
- Ein Dreieck, in dem alle Seiten die gleiche Länge haben, heißt ***gleichseitig***.

  In einem gleichseitigen Dreieck haben alle Winkel ein Maß von $\frac{\pi}{3}$.

  Sind alle Winkel eines Dreiecks gleich groß, so ist das Dreieck gleichseitig.

Wir wollen die Aussagen zum gleichschenkligen Dreieck beweisen. Die Aussagen zum gleichseitigen folgen direkt daraus, da jedes gleichseitige Dreieck auf drei verschiedene Arten auch ein gleichschenkliges Dreieck ist. Jede Seite kann hier als Basis angesehen werden.

Dazu schauen wir uns ein gleichschenkliges Dreieck an und zeichnen die Höhe auf die Basis ein.



Es sind zwei Eigenschaften zu zeigen:

Unter der Voraussetzung $a = b$ sind $\alpha = \beta$, $p = q = \frac{c}{2}$ und die Winkelhalbierendeneigenschaft von h_c zu zeigen.

Unter der Voraussetzung $\alpha = \beta$ ist $a = b$ zu zeigen.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

- Wir beginnen mit der zweiten Aussage.

  Gilt $\alpha = \beta$, so ergibt sich

  $$\frac{h_c}{b} = \sin(\alpha) = \sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \qquad \text{bzw.} \qquad a = b.$$

- Für den Beweis der ersten Aussage müssen wir nun also $a = b$ fordern.

  Die Höhe h_c spaltet das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen jeweils der Satz des Pythagoras gilt.

  Daraus ergibt sich

  $$p^2 + h_c^2 = b^2 \qquad \text{und} \qquad q^2 + h_c^2 = a^2.$$

  Mit $a = b$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ und $p + q = c$ folgt

  $$p = q = \tfrac{c}{2}.$$

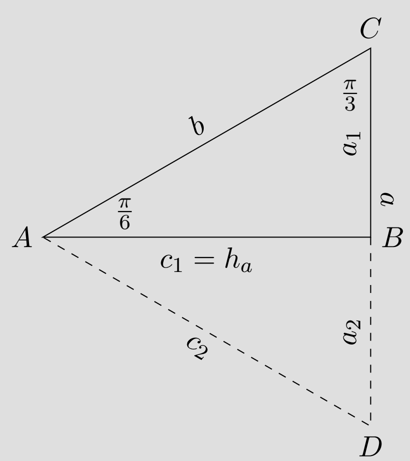
  Insbesondere haben die beiden rechtwinkligen Dreiecke gleich lange Katheten und nach dem Kongruenzsatz „sss“ folgt, dass die Basiswinkel gleich groß sein müssen, und dass die Höhe h_c sowohl den der Basis gegenüberliegenden Winkel des gleichschenkligen Dreiecks als auch die Basis selbst halbiert.

Mit Info **??** lassen sich jetzt die Sinuswerte zu den Winkeln $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$ berechnen.

Beispiel 1.3.4

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von $\frac{\pi}{3}$ und einem Winkel von $\frac{\pi}{6}$.

Wir spiegeln dieses an der Ankathete des $\frac{\pi}{6}$ großen Winkels und erhalten damit zwei rechtwinklige Dreiecke, die zusammen ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die Gleichseitigkeit folgt aus der Tatsache, dass alle drei Winkel im neuen Dreieck $\frac{\pi}{3}$ messen. Die Seite, an der das erste Dreieck gespiegelt wurde, bildet in den Dreiecken gleichzeitig eine Höhe.



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Nach Info **??** gilt mit den Bezeichnungen aus der Skizze

$$a_1 = a_2 = \frac{a}{2} \qquad \text{und} \qquad a = b = c_2$$

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich außerdem im Dreieck ABC

$$c_1^2 + a_1^2 = b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad h_a^2 + a_1^2 = b^2.$$

Wegen $a_1 = \frac{a}{2}$, $h_a \geq 0$ und $b = a \geq 0$ ergibt sich

$$h_a^2 = b^2 - a_1^2 = a^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4} \cdot a^2 \qquad \text{bzw.} \qquad h_a = \sqrt{\tfrac{3}{4} \cdot a^2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot |a| = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Daraus folgt im Dreieck ABC

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a_1}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h_a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Führt man nun noch die (anschaulich sinnvollen) Definitionen

$$\sin(0) := 0 =: \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) := 1 =: \cos(0) \qquad \text{und} \qquad \tan(0) := 0 =: \cot\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

ein, so ergibt sich

Info 1.3.5

Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangenswerte

- Für alle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha).$$

- Für alle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ und alle $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{und} \qquad \cot(\beta) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}.$$

-

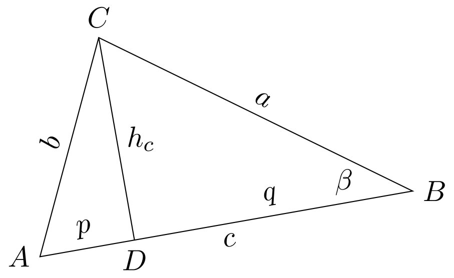
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Für die Berechnung der Werte der trigonometrischen Funktionen an anderen Stellen bieten sich entweder die Additionstheoreme, die im folgenden Abschnitt als weiterführende Inhalte präsentiert werden, oder die Verwendung eines Taschenrechners an.

Zuguterletzt definiert man noch Sinus- und Kosinuswerte für stumpfe Winkel.

Dafür schauen wir uns noch einmal an, bei der Berechnung welcher Strecken Sinus und Kosinus nützlich sind.



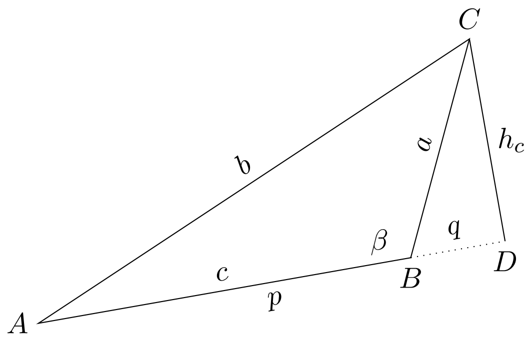
Kennt man im obigen Dreieck die Werte $a \in \mathbb{R}^+$ und $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, so kann man mit ihrer Hilfe die Höhe h_c und den Abschnitt $q = \left|\overline{BD}\right|$ auf der Seite c berechnen:

$$h_c = a \cdot \sin(\beta) \qquad \text{und} \qquad q = a \cdot \cos(\beta)\,.$$

Außerdem gilt natürlich

$$p + q = c.$$

Nun stellen wir uns β als einen stumpfen Winkel vor.



Damit sich die Höhe h_c weiterhin als „$a \cdot \sin(\beta)$“ berechnen lässt, müssen wir wegen der im rechtwinkligen Dreieck BDC geltenden Gleichung $h_c = a \cdot \sin(\pi - \beta)$ lediglich

$$\sin(\beta) := \sin(\pi - \beta)$$

definieren.

Dasselbe wäre wegen $q = a \cdot \cos(\pi - \beta)$ auch für den Kosinus sinnvoll, wenn es lediglich darum geht, die Länge von q auszurechnen. Dann müsste man allerdings für stumpfe Winkel $c = p - q$ berechnen und diese Unterscheidung zu $c = p + q$ bei spitzen Winklen ist äußerst lästig. Um stets $c = p + q$ zu erreichen, definiert man also

$$\cos(\beta) := -\cos(\pi - \beta)\,.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Dann lässt sich die Berechnung der Länge von q einfach über $|\cos(\beta)|$ für stumpfe und spitze Winkel gleichermaßen durchführen.

Definition 1.3.6

Die trigonometrischen Funktionen für stumpfe Winkel

Für einen Winkel $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ definiert man

$$\sin(\alpha) := \sin(\pi - \alpha), \qquad \cos(\alpha) := -\cos(\pi - \alpha), \qquad \tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

und, falls $\alpha \neq \pi$ ist,

$$\cot(\alpha) := \frac{1}{\tan(\alpha)}.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgaben

Aufgabe 1.3.1 1. Für ein bei C rechtwinkliges Dreieck seien $b = 2.53\text{cm}$ und $c = 3.88\text{cm}$ gegeben. Geben Sie $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und a an!

Lösung:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(3.88\text{cm})^2 - (2.53\text{cm})^2} = \sqrt{15.0544\text{cm}^2 - 6.4009\text{cm}^2} = \sqrt{8.6535}\text{cm}.$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{8.6535}\text{cm}}{3.88\text{cm}} = \frac{\sqrt{86535}}{388} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{2.53\text{cm}}{3.88\text{cm}} = \frac{253}{388}$$

Numerisch ergibt sich $a \approx 2.9417\text{cm}$, $\sin(\alpha) \approx 0.7587$ und $\sin(\beta) \approx 0.65201$.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit $\beta = \frac{11\pi}{36}$, $a = 4\text{m}$ und $c = 60\text{cm}$!

Lösung:

$$\frac{(a \cdot \sin(\beta)) \cdot c}{2} = \sin\left(\tfrac{11\pi}{36}\right) \cdot 1.2\text{m}^2 \approx 0.98298\text{m}^2$$

3. Die beiden Schenkel eines Winkels vom Maß $\alpha \in (0, \pi)$ schneiden einen Kreis vom Radius $r \in \mathbb{R}^+$, dessen Mittelpunkt im Scheitelpunkts S des Winkels liegt, in den Punkten A bzw. B.

Geben Sie eine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken A, B und S an!

Wie groß ist der Flächeninhalt eines regulären 72-Eck, deren Diagonalenlänge durch $d \in \mathbb{R}^+$ gegeben ist?

Lösung:
Für die Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABS gibt es zwei Möglichkeiten.

$$F_{ABS} = r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r^2 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{2}$$

$$F_{\text{72-Eck}} = 72 \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{72 \cdot 2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{72 \cdot 2}\right) \approx 0.7844d^2 = 3.1376 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgabe 1.3.2
Verwenden Sie die Höhen in einem Dreieck, um den Sinussatz **??** zu beweisen!

Vorsicht:
Funktioniert Ihr Ansatz auch in stumpfwinkligen Dreiecken?

Satz 1.3.7

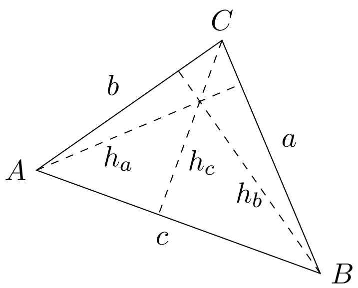
Sinussatz

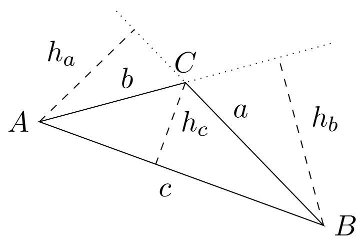
In einem Dreieck stimmt das Verhältnis der Längen zweier Seiten mit dem Verhältnis der Sinuswerte der den Seiten gegenüberliegenden Winkel überein.

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt also

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \qquad \text{und} \qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}.$$

Lösung:





Wie immer sind $\alpha := \measuredangle(BAC)$, $\beta := \measuredangle(CBA)$ und $\gamma := \measuredangle(ACB)$.

Die Definition des Sinus liefert

$$\frac{h_c}{a} = \sin(\beta), \qquad \frac{h_b}{c} = \sin(\alpha), \qquad \frac{h_a}{b} = \sin(\gamma) = \sin(\pi - \gamma),$$
$$\frac{h_c}{b} = \sin(\alpha), \qquad \frac{h_b}{a} = \sin(\gamma) = \sin(\pi - \gamma) \qquad \text{und} \qquad \frac{h_a}{c} = \sin(\beta).$$

Stellt man diese Gleichungen nach den Höhen um und setzt sie gleich, so folgt die Behauptung

$$a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha), \qquad c \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\gamma) \qquad \text{und} \qquad b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta).$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgabe 1.3.3
Zeigen Sie den Kosinussatz **??**!
(Was hat der Kosinussatz mit dem Satz des Pythagoras zu tun?)

Satz 1.3.8

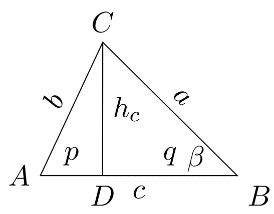
Kosinussatz

In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate der Längen von zwei Seiten um das Doppelte des Produktes der beiden Seitenlängen mit dem Kosinuswert des eingeschlossenen Winkels größer als das Quadrat der Länge der dritten Seite.

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt also

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)\,, \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta) \qquad \text{und} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)\,.$$

Für den Fall „$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta)$ und $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$“ hilft Ihnen die folgende Skizze, der Satz des Pythagoras und $c = p + q$. Funktioniert das auch bei stumpfwinkligen Dreiecken?



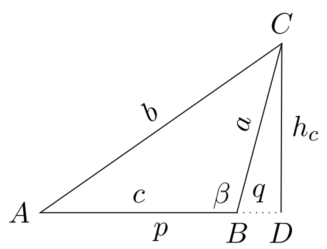
Lösung:
In den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADC und DBC ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras

$$p^2 + h_c^2 = b^2 \qquad \text{und} \qquad q^2 + h_c^2 = a^2 \quad \text{bzw.} \quad h_c^2 = a^2 - q^2.$$

Ineinander eingesetzt liefert das

$$b^2 = p^2 + a^2 - q^2 = p^2 + 2pq + q^2 + a^2 - 2pq - 2q^2 = (p+q)^2 + a^2 - 2 \cdot (p+q) \cdot q.$$

Mit $\cos(\beta) = \frac{q}{a}$ und $p + q = c$ folgt die Behauptung.



Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Auch für stumpfwinklige Dreiecke ergibt sich in den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADC und BDC mit dem Satz des Pythagoras

$$p^2 + h_c^2 = b^2 \qquad \text{und} \qquad q^2 + h_c^2 = a^2 \quad \text{bzw.} \quad h_c^2 = a^2 - q^2.$$

Ineinander eingesetzt liefert das

$$b^2 = p^2 + a^2 - q^2 = p^2 - 2pq + q^2 + a^2 + 2pq - 2q^2 = (p-q)^2 + a^2 + 2 \cdot (p-q) \cdot q.$$

Mit $-\cos(\beta) = \cos(\pi - \beta) = \frac{q}{a}$ und $p - q = c$ folgt die Behauptung.

Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes. Der Kosinus eines rechten Winkels ist 0 und deshalb verschwindet in dem Fall der gemischte Term aus der Behauptung des Kosinussatzes. Es bleibt nur der Satz des Pythagoras stehen.

1.3.1 Additionstheoreme

Die Fortsetzbarkeit der trigonometrischen Funktionen erstreckt sich nicht nur auf stumpfe Winkel.

Gibt man für das Maß eines Winkels eine Zahl an, die jetzt auch größer als π oder gar 2π sein kann, so meint man den Winkel, der sich ergibt, wenn man mit zwei aufeinanderliegenden Halbgeraden anfängt und dann die eine so lange um den Scheitelpunkt dreht, bis sie auf dem Kreis mit Radius 1 eine Strecke abgeschritten hat, deren Länge dem angegebenen Maß entspricht.

Negative Winkelmaße funktionieren genauso. In dem Fall dreht man die eine Halbgerade mathematisch negativ um den Scheitelpunkt.

Als sinnvolle Fortsetzungen von Sinus und Kosinus für $\alpha \in (-\pi, 0)$ haben sich

$$\sin(\alpha) := -\sin(-\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(\alpha) := \cos(-\alpha)$$

herauskristallisiert.

Da ein Winkel von α genauso aussieht wie ein Winkel von $\alpha + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ scheint es ebenso sinnvoll zu sein, Sinus und Kosinus 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortzusetzen.

Die trigonometrischen Funktionen erfüllen sogenannte Additionstheoreme. Diese Sätze führen die Werte, die sich ergeben, wenn man in eine trigonometrische Funktion eine Summe einsetzt, auf die Werte der trigonometrische Funktionen an den Summanden zurück.

Satz 1.3.9

Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

- $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1,$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$,
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$,
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$, falls $\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\} \cap \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\} = \emptyset$ ist, und
- $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$, falls $\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\} \cap \{k\pi : k\in\mathbb{Z}\} = \emptyset$ ist.

Die erste Identität folgt für $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ direkt aus dem Satz des Pythagoras.

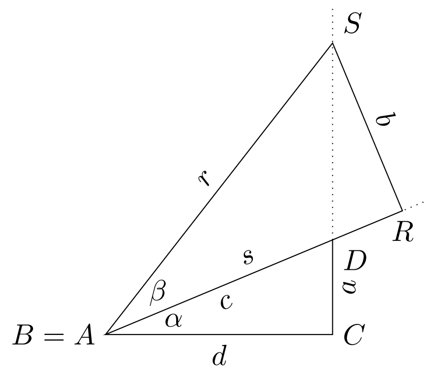
Wir beschränken unseren Beweis der dritten Identität auf $\alpha\in\mathbb{R}$ und $\beta\in\mathbb{R}$ mit $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ und $0<\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Zu dem Winkel α zeichnen wir ein Dreieck ACD, das diesen Winkel bei A enthält und außerdem bei C rechtwinklig ist.

Dann verlängern wir die Gegenkathete von α in diesem Dreieck ins Unendliche und legen den ersten Schenkel von β so auf den zweiten Schenkel von α, dass die Scheitelpunkte der Winkel aufeinanderliegen.

Der zweite Schenkel von β schneidet die ins Unendliche verlängerte Gegenkathete von α in einem Punkt S. Dieser zweite Schenkel von β bildet nun die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ARS, dessen dritte Ecke R auf dem gemeinsamen Schenkel von α und β liegt.

Kurz:



Zunächst wollen wir das Maß des Winkels $\measuredangle(DSR)$ bestimmen.

Betrachten wir die Winkel im Dreieck ARS, so ergibt sich aus dem Winkelsummensatz

$$\measuredangle(ASR) = \pi - \tfrac{\pi}{2} - \beta = \tfrac{\pi}{2} - \beta.$$

Im Dreieck ACS folgt genauso

$$\measuredangle(ASD) = \measuredangle(ASC) = \pi - \tfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta) = \tfrac{\pi}{2} - \beta - \alpha.$$

Wegen $\measuredangle(ASR) = \measuredangle(ASD) + \measuredangle(DSR)$ folgt daraus

$$\measuredangle(DSR) = \measuredangle(ASR) - \measuredangle(ASD) = \left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right) - \left(\tfrac{\pi}{2}-\beta-\alpha\right) = \alpha.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Im rechtwinkligen Dreieck DRS gilt also

$$\tan(\alpha) = \tan(\measuredangle(DSR)) = \frac{s-c}{b}.$$

Außerdem ergibt sich in den rechtwinkligen Dreiecken ACD, ARS und ACS

$$\cos(\alpha) = \frac{d}{c}, \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{r}, \qquad \cos(\beta) = \frac{s}{r} \qquad \text{und} \qquad \cos(\alpha+\beta) = \frac{d}{r}.$$

Damit folgt

$$\cos(\beta) = \frac{s}{r} = \frac{s-c}{r} + \frac{c}{r} = \frac{b}{r}\cdot\tan(\alpha) + \frac{d}{r}\cdot\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sin(\beta)\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Löst man die äußere Gleichung nach $\cos(\alpha+\beta)$ auf, so erhält man das Additionstheorem für den Kosinus. Die anderen Fälle ergeben sich dann mit den Fortsetzungsdefinitionen und den Gleichungen

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma\right) = \cos(\gamma) \qquad \text{und} \qquad \tan(\gamma) = \frac{1}{\cot(\gamma)} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

1.4 Die dritte Dimension: Körper

Einführung

Bisher haben wir uns mit der Geometrie in der Ebene beschäftigt. Dabei ging es darum, Objekte zu untersuchen, die man auf ein Blatt Papier zeichnen kann.

Solche Objekte nehmen wir aber in der Welt nicht wahr. Wir sehen dreidimensional. Alles, was wir sehen, hat eine Breite eine Höhe und eine Tiefe. Die zweidimensionalen Objekte sind lediglich Projektionen dieser dreidimensionalen Gegenstände.

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit den einfachsten dreidimensionalen Objekten Zylinder, Kegel und Kugel beschäftigen. Zur Berechnung deren Volumina lernen wir außerdem das Prinzip von Cavalieri kennen.

1.4.1 Zylinder

Wenn wir gefragt werden, was für dreidimensionale Körper wir kennen, fällt uns stets als erstes der Würfel ein. Das ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass der Würfel eine hohe Symmetrie aufweist und gleichzeitig aber eine eckige Form hat. (Die Kugel zum Beispiel ist noch „symmetrischer" als der Würfel. Runde Formen treten aber zum Beispiel in der Architektur wesentlich seltener auf als eckige.)

Dabei ist der Würfel lediglich ein Spezialfall des denkbar einfachsten Körpers.

Info 1.4.1

Der Zylinder

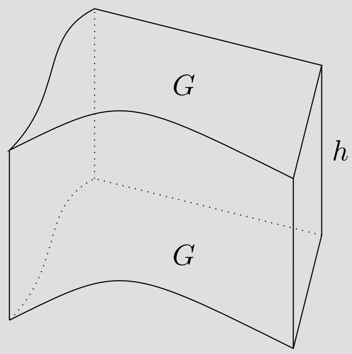
- Ein ***Zylinder*** ist durch eine beliebige (ebene) Grundfläche und eine Höhe charakterisiert. Er entsteht, indem man auf jeden Punkt der Grundfläche eine Strecke, deren Länge der Höhe des Zylinders entspricht, so aufsetzt, dass die Strecke senkrecht zur Grundfläche steht.
- Das **Volumen eines Zylinders** berechnet sich als Produkt des Flächeninhalts der Grundfläche mit der Höhe.
- Die **Oberfläche eines Zylinders** setzt sich aus der „unteren" Grundfläche, der „oberen" Grundfläche (der sogenannten *Deckfläche*) und der sogenannten *Mantelfläche* zusammen.

  Sind G der Flächeninhalt der Grundfläche, h die Höhe des Zylinders und U der Umfang der Grundfläche, so berechnet sich die Oberfläche des Zylinders also zu

  $$F = 2 \cdot G + h \cdot U.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Beispiel 1.4.2



Besser vertraut als dieses Beispiel dürften Ihnen die folgenden speziellen Zylinder sein.

Definition 1.4.3

Spezielle Zylinder

- Ein Zylinder, dessen Grundfläche ein Vieleck ist, heißt ***Prisma***.
- Ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche heißt ***Quader***.
- Ein Quader mit quadratischer Grundfläche, dessen Höhe der Seitenlänge des Grundflächenquadrates entspricht, heißt ***Würfel***.
- Ein Zylinder mit einer kreisförmigen Grundfläche heißt ***Kreiszylinder***.

Eine Verallgemeinerung des Zylinders ist der sogenannte *schiefe Zylinder*.

Er entsteht aus dem Zylinder, indem man die Deckfläche in einer zur Fläche parallelen Richtung verschiebt (ohne sie zu drehen). Man nennt diesen Vorgang auch *Scherung*.

Wie berechnet man nun das Volumen eines schiefen Zylinders?

Beispiel 1.4.4

Um das zu verstehen, bauen wir zunächst ein Modell. Wir nehmen uns einen Quader, der durch einen Stapel sauber aufeinandergelegter DIN-A4-Blätter besteht. Diesen scheren wir nun, indem wir an einer Seitenfläche ein Lineal senkrecht zur Grundfläche anlegen und das Lineal dann in

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Richtung des Quaders kippen. Wenn wir wollen, können wir den Vorgang noch an einer anderen Seitenfläche wiederholen. Jetzt haben wir einen schiefen Quader vor uns. (Wenn wir davon absehen, dass der Rand natürlich keine Gerade ist, sondern bei genauer Betrachtung stufenförmig.)

Das Volumen unseres Quaders hat sich aber natürlich nicht geändert. Sowohl der Ausgangsquader als auch der schiefe Quader bestehen ja aus denselben DIN-A4-Blättern.

Wir fassen diese Erkenntnis zusammen.

Satz 1.4.5

Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper der gleichen Höhe haben auch gleiches Volumen, wenn die Flächen, die entstehen, wenn man beide Körper auf gleicher Höhe mit einer Ebene schneidet, stets den gleichen Flächeninhalt haben.

Insbesondere haben zwei Körper, die durch Scherung ineinander über gehen, dasselbe Volumen.

Dabei muss man natürlich in allen möglichen Höhen schneiden und pro Schnitt müssen die Flächeninhalte übereinstimmen.

In dem Beispiel haben wir einen Quader und einen schiefen Quader, die beide aus $N \in \mathbb{N}$ Blättern bestehen. Der Schnitt mit einer Ebene entspricht gerade der Auswahl des n-ten Blatts von unten ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$). Das n-te Blatt von unten in dem geraden Quader ist aber natürlich genauso groß wie das n-te Blatt von unten im schiefen Quader. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$ gilt, sind die Volumina der beiden Quader identisch.

1.4.2 Kegel

Mit dem Prinzip von Cavalieri und den Strahlensätzen lässt sich nun auch das Volumen eines Kegels berechnen.

Info 1.4.6

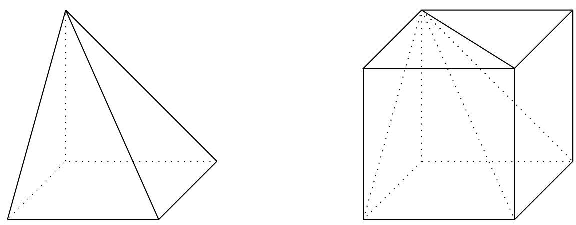
Der Kegel

- Ein ***Kegel*** ist durch eine beliebige (ebene) Grundfläche und eine Höhe charakterisiert. Er entsteht, indem man jeden Punkt der Grundfläche mit einer Spitze verbindet, deren Abstand von der Ebene, in der die Grundfläche liegt, der Höhe des Kegels entspricht.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

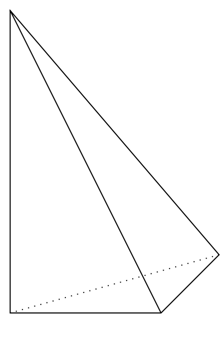
- Das Volumen eines Kegels entspricht einem Drittel des Produkts des Flächeninhalts der Grundfläche mit der Höhe.
- Die Oberfläche eines Kegels setzt sich aus der Grundfläche und der Mantelfläche zusammen. Die Mantelfläche muss für jeden Kegel individuell bestimmt werden.
- Ist in einer sinnvollen Weise ein Mittelpunkt der Grundfläche zu definieren und liegt die Spitze des Kegels senkrecht über diesem Mittelpunkt, so heißt der Kegel *gerade*.
- Ist die Grundfläche eines Kegels ein Vieleck, so nennt man den Kegel auch ***Pyramide***.

Wir berechnen zunächst das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Höhe der Länge einer Seite des Quadrats entspricht und deren Spitze senkrecht über einer Ecke des Quadrats liegt.



Drei solcher Pyramiden ergeben einen Würfel, wenn man alle drei Spitzen in einen Punkt legt. Damit ist das Volumen der Pyramide genau ein Drittel des Volumens des Würfels, das sich als Produkt des Flächeninhalts der Grundfläche mit der Höhe ergibt.

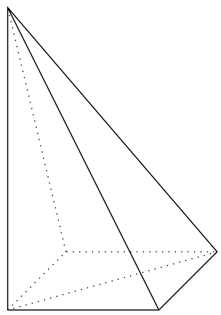
Etwas schwieriger zu berechnen ist das Volumen einer Pyramide, deren Grundfläche ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck ist und deren Spitze über einer der beiden Ecken liegt, in der die Hypotenuse eine der beiden Katheten trifft.

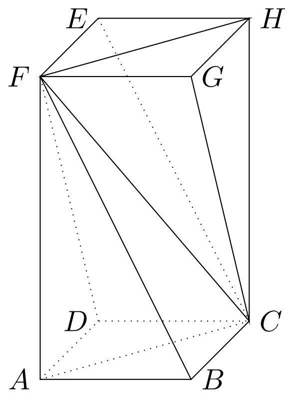


Wir werden jetzt zeigen, dass sich mit fünf weiteren volumengleichen Pyramiden der Quader, dessen Grundfläche entsteht, wenn man die Grundseite unserer Pyramide an der Hypotenuse spiegelt, zusammenstellen lässt.

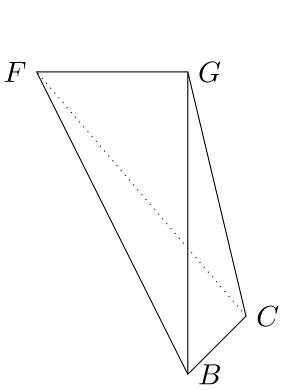
Zunächst führen wir die Spiegelung der Pyramide an der senkrecht auf der Hypotenuse stehenden Seite durch und erhalten eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Diese kopieren wir, drehen die Kopie herum und stellen beide Pyramiden aufeinander. Sie berühren sich nur an einer Kante.

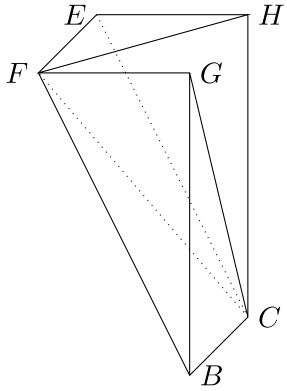
Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt





Nun betrachten wir zunächst das fehlende Stück $FBCG$.





Auch dieses Stück ist eine Pyramide. Betrachten wir das Dreieck BGF als Grundfläche dieser Pyramide und C als Spitze, so ist $|\overline{CB}|$ die Höhe der Pyramide. Es fällt auf, dass das Dreieck BGF mit dem Dreieck CHE übereinstimmt. Da auch $|\overline{EF}| = |\overline{CB}|$ gilt, folgt also, dass die beiden Pyramiden $FBCG$ und $CHEF$ die gleiche Grundfläche und dieselbe Länge der Höhe haben. Dabei wird CHE als Grundfläche und F als Spitze der Pyramide $CHEF$ interpretiert. Die beiden Pyramiden gehen damit durch Scherung ineinander über und nach dem Prinzip von Cavalieri **??** haben beide dasselbe Volumen.

Auf dieselbe Art folgt die Volumengleichheit des dann noch fehlenden Stücks $DCEF$ mit der Pyramide $ABCF$.

Wir haben also unsere Ursprungspyramide mit fünf volumengleichen Pyramiden ergänzt, um einen Quader zu erhalten, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, in dem die Seitenlänge der Kathetenlänge des rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks aus der Ursprungspyramide entspricht. Bezeichnen a diese Kathetenlänge und h die Höhe der Pyramide, so ergibt sich also für das Volumen V_P der Pyramide

$$6 \cdot V_P = V_Q = h \cdot a^2 \qquad \text{bzw.} \qquad V_P = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{a^2}{2},$$

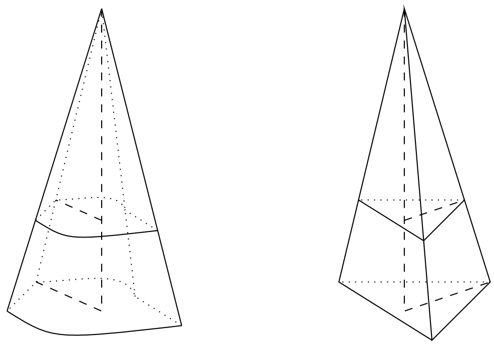
wobei V_Q das Volumen des Quaders bezeichnet und $\frac{a^2}{2}$ gerade dem Flächeninhalt des gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks entspricht, das die Grundfläche der Pyramide bildet.

Damit ist unsere Behauptung für diesen speziellen Kegel also gezeigt.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri und den Strahlensätzen lässt sich aber jeder Kegel für die Volumenberechnung auf diesen Kegel zurückführen.

Dafür berechnen wir den Flächeninhalt der Grundfläche eines beliebigen Kegels und basteln daraus einen weiteren Kegel, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck mit demselben Flächeninhalt darstellt, und der genauso hoch wie der gegebene Kegel ist. Durch Scherung kann man erreichen, dass die Spitzen der beiden Kegel über den jeweiligen Grundflächen stehen.



Zeichnen wir in beiden Kegeln die Höhe auf der Grundfläche ein, und schneiden beide in der selben Höhe mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene, so liefert uns der zweite Strahlensatz, dass alle Verbindungsstrecken von der eingezeichneten Höhe zum Rand der Schnittflächen sich um den gleichen Faktor im Vergleich zur Grundfläche verkürzen. Deshalb sind auch die Flächeninhalte der beiden Flächen im gleichen Verhältnis zur Grundfläche verkleinert. Da die Grundflächen aber gleichen Flächeninhalt haben, haben also auch die Schnittebenen in beliebiger Höhe gleichen Flächeninhalt.

Nach dem Prinzip von Cavalieri haben beide Kegel das gleiche Volumen, das sich wie oben gesehen als ein Drittel des Produkts von Höhe und Flächeninhalt der Grundfläche des dreieckigen Kegels berechnet. Da diese Werte aber mit Höhe und Grundflächeninhalt des gegebenen Kegels übereinstimmen, haben wir die Volumenformel für den beliebigen Kegel damit gezeigt.

1.4.3 Kugel

Das Prinzip von Cavalieri liefert zuguterletzt auch das Volumen einer Kugel.

Satz 1.4.7

Volumen einer Kugel

Ein Kreis mit einem Radius von $r \in \mathbb{R}^+$ hat einen Flächeninhalt von πr^2.

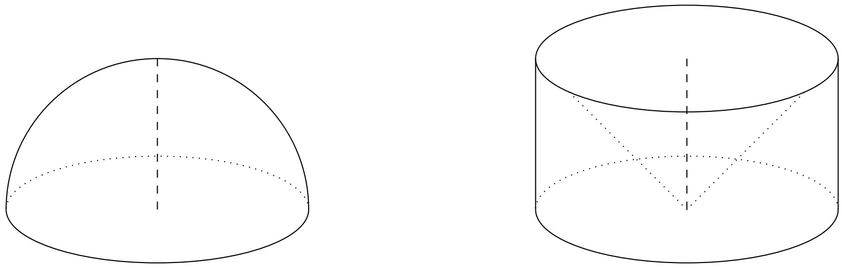
Eine Kugel vom Radius $R \in \mathbb{R}^+$ hat ein Volumen von $\frac{4}{3} \cdot \pi R^3$.

Um den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen, benötigt man den Grenzwertbegriff aus dem Modul Folgen. Für den Moment werden wir die Formel ohne Beweis verwenden.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Wir zeigen die Behauptung durch die Berechnung des Volumens der Halbkugel.

Wir transformieren die Halbkugel in einen Kreiszylinder mit derselben Grundfläche und der Höhe R, aus dem ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche des Zylinders liegt und dessen Grundfläche die Deckfläche des Zylinders bildet, ausgefräst wird.



Mit dem Prinzip von Cavalieri zeigen wir nun, dass die beiden Körper dasselbe Volumen haben. Dazu schneiden wir beide Körper senkrecht zu einem Durchmesser der Grundfläche durch, um einen Querschnitt zu erhalten. An diesem Querschnitt kann man die benötigten Größen einfacher berechnen.

In der obigen Zeichnung ist die Schnittkante mit einer Ebene in beliebiger Höhe h über der Grundfläche gepunktet eingetragen.

Diese Ebene schneidet aus der Halbkugel einen Kreis vom Radius r aus. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet sich r zu

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} \qquad \text{wegen} \qquad h^2 + r^2 = R^2.$$

Aus dem ausgefrästen Zylinder schneidet die Ebene einen Kreisring aus. Der äußere Radius dieses Kreisrings ist R.

Für die Berechnung des inneren Radius beachten wir, dass die beiden durchgehend gezeichneten Dreiecke rechtwinklig und gleichschenklig sind und damit Innenwinkel vom Maß $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$ haben. Daraus folgt, dass der Winkel, den die Höhe mit der Hypotenuse dieser Dreiecke bildet, ebenfalls das Maß $\frac{\pi}{4}$ hat und da die Schnittebene senkrecht auf dieser Höhe steht, sind die Dreiecke, die von einer gepunkteten, einer gestrichelten und einer durchgezogenen Linie begrenzt werden, ebenfalls rechtwinklig und gleichschenklig. Damit ergibt sich der innere Radius des Kreisrings zu h.

Der Flächeninhalt des Schnittkreises der Ebene in der Höhe h mit der Halbkugel berechnet sich also zu

$$\pi r^2 = \pi \cdot \left(R^2 - h^2\right) = \pi R^2 - \pi h^2$$

und entspricht damit dem Flächeninhalt des Schnittkreisrings der Ebene mit dem ausgefrästen Kreiszylinder.

Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt, dass die Kugel ein Volumen V hat, das sich aus dem Volumen V_Z des Zylinders und dem Volumen V_K des Kegels wie folgt zusammen setzt:

$$V = 2 \cdot (V_Z - V_K) = 2 \cdot \left(R \cdot \pi R^2 - \tfrac{1}{3} \cdot R \cdot \pi R^2\right) = 2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \pi R^3 = \tfrac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Aufgaben

Aufgabe 1.4.1
Ein Vierkantschlüssel kommt häufig in Zügen der Deutschen Bahn zum Einsatz. Der Schlüssel besteht aus einem Kreiszylinder, aus dem ein Würfel ausgefräst wurde und auf den eine Halbkugel aufgesetzt ist.

Wieviel Material benötigt man, wenn der Kreiszylinder einen Durchmesser von 2cm hat und doppelt so hoch wie der Würfel ist, sowie eine Seitenfläche des Würfels halb so groß wie die Grundfläche des Kreiszylinders ist?

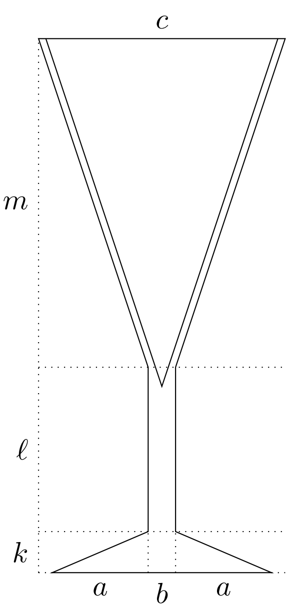
Lösung:
Bezeichnet $r := 1\text{cm}$ den Radius des Kreiszylinders, a die Kantenlänge des Würfels und h die Höhe des Kreiszylinders, so gilt

$$h = 2a \qquad \text{und} \qquad a^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Damit folgt $a = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot r$ und $h = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot r = \sqrt{2\pi} \cdot r$. Das Volumen des Schlüssels berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\pi r^2 \cdot h - a^2 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 &= \pi r^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot r\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi r^3 \\ &= \sqrt{2} \cdot \pi^{\frac{3}{2}} \cdot r^3 - \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^{\frac{3}{2}}}{4} \cdot r^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi r^3 = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2\pi}}{4} + \frac{2}{3}\right) \cdot \pi r^3.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.4.2
Diese Aufgabe ist etwas umfangreicher. Bitte lassen Sie sich Zeit bei der Bearbeitung.



Berechnen Sie, wieviel Glas für die Herstellung des oben abgebildeten Sektglases verwendet wurde, wenn $a = 2.5\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$, $c = 7\text{cm}$, $k = 1\text{cm}$, $\ell = 4\text{cm}$ und $m = 15\text{cm}$ zu messen sind und die Wand im Füllbereich des Glases 2mm dick ist!

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Hinweis:
Zerlegen Sie das Glas in geeignete Kegel und Zylinder!

Es ergibt sich ein etwas länglicher und unübersichtlicher Term.

Lösung:
Wir beginnen mit dem Volumen des Kegelstumpfs, der als Fuß des Glases dient. Der Kegelstumpf ist ein Kegel, dessen Spitze abgetrennt wurde. Diese Spitze ist wieder ein Kegel. Wir nennen die Höhe der abgetrennten Spitze h_u. Mit dem zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{komplett}}{\text{vorne}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\right)$ folgt

$$\frac{a+\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{h_u+k}{h_u} = 1 + \frac{k}{h_u} \qquad \text{bzw.} \qquad h_u = k \cdot \left(\frac{2a+b}{b} - 1\right)^{-1} = \frac{kb}{2a}.$$

Damit ergibt sich das Volumen des Kegelstumpfes zu

$$V_{\text{Fuß}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \cdot \left(k + \frac{kb}{2a}\right) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{kb}{2a} = \frac{\pi k \cdot (2a+b)^3}{24a} - \frac{\pi k b^3}{24a}.$$

Einfach zu berechnen ist der Griff, wenn wir die abgetrennte Spitze des Füllbereichs noch hinzunehmen. Der kreiszylinderförmige Griff hat das Volumen

$$V_{\text{Griff}} = \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \ell = \frac{\pi \ell b^2}{4}.$$

Weiter geht es mit dem Füllbereich des Glases. Der äußere Körper ist wieder ein Kreiskegelstumpf und genau wie oben folgt mit dem zweiten Strahlensatz, wenn h_a die Höhe der abgeschnittenen Spitze angibt

$$\frac{\frac{c}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{h_a+m}{h_a} = 1 + \frac{m}{h_a} \qquad \text{bzw.} \qquad h_a = \left(\frac{c}{b} - 1\right)^{-1} \cdot m = \frac{bm}{c-b}.$$

Das Volumen des Stumpfes ist also

$$V_{\text{Kelch}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \left(m + \frac{bm}{c-b}\right) - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{c-b} = \frac{\pi m \left(c^3 - b^3\right)}{12c - 12b}.$$

Es bleibt das Volumen des Füllbereichs zu berechnen, da dieses noch von der momentanen Summe abzuziehen ist. Nennen wir die Höhe dieses Füllbereichs h, so ergibt sich mit dem zweiten Strahlensatz, wenn d die Dicke des Glases angibt

$$\frac{\frac{b}{2} - d}{\frac{c}{2} - d} = \frac{h-m}{h} = 1 - \frac{m}{h} \qquad \text{bzw.} \qquad h = \left(1 - \frac{b-2d}{c-2d}\right)^{-1} \cdot m = \frac{(c-2d) \cdot m}{c-b}.$$

Damit ergibt sich als Füllvolumen

$$V_{\text{Luft}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2} - d\right)^2 \cdot \frac{(c-2d) \cdot m}{c-b} = \frac{\pi m \cdot (c-2d)^3}{12c - 12b}.$$

Das gesamte Glasvolumen ist also

$$\begin{aligned} V_{\text{Glas}} &= V_{\text{Fuß}} + V_{\text{Griff}} + V_{\text{Kelch}} - V_{\text{Luft}} \\ &= \frac{\pi k \cdot \left((2a+b)^3 - b^3\right)}{24a} + \frac{\pi \ell b^2}{4} + \frac{\pi m \cdot \left(c^3 - b^3 - (c-2d)^3\right)}{12c - 12b}. \end{aligned}$$

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt

Numerisch ergibt sich $\frac{9563\pi}{600}\text{cm}^3 = \pi \cdot 15.938\overline{3}\text{cm}^3 \approx 50.07175\text{cm}^3$.

Dieses Material ist urheberrechtlich geschützt