**Onlinekurs Mathematik - Lineare Gleichungssysteme - Was sind Lineare Gleichungssysteme?**



## Einführung

Ein Problem mit mehreren Unbekannten gleichzeitig!? Und eine ganze Reihe von Gleichungen dazu!? Problemstellungen dieser Art kommen nicht nur im naturwissenschaftlich-technischen Bereich vor, sondern auch in anderen wissenschaftlichen Disziplinen und im Alltag! Und sie müssen gelöst werden!

Zur Beruhigung vorneweg: Schwierig wird es nicht! Dagegen stimmt es, dass sich in den unterschiedlichsten Gebieten häufig Situationen und Aufgaben finden, die in der mathematischen Modellierung auf mehrere Gleichungen in mehreren Unbekannten führen. Betrachten wir hierzu ein erstes einfaches Beispiel:

**Beispiel 4.1.1**
Eine junge Artistengruppe möchte ihre halsbrecherische Radnummer zusätzlich aufmotzen, indem sie für ihre Ein- und Zweiräder neue Felgen mit grellbunten Lichteffekten zukauft. Für die insgesamt $10$ Räder benötigt sie $13$ Felgen. Wieviele Ein- und wieviele Zweiräder besitzt die Gruppe?

In einem ersten Schritt gilt es, die in der Aufgabenstellung enthaltenen Informationen, wenn möglich, in

**Onlinekurs Mathematik - Lineare Gleichungssysteme - Was sind Lineare Gleichungssysteme?**

Einführung

Mein Kurs

Einstellungen

Eingangstest

Suche

Das KIT

Feedback

Beta-Version

**Inhalt**

Bevor wir richtig loslegen können, müssen wir unseren Sprachgebrauch noch ein bisschen schärfen.

**Info 4.1.2**

Mehrere Gleichungen, die auf eine bestimmte Anzahl Unbekannter **gleichzeitig** zutreffen, bilden ein sogenanntes **Gleichungssystem**. Kommen in jeder einzelnen Gleichung eines solchen Systems die Unbekannten in jedem Term nur linear, d.h. höchstens zur Potenz $1$ und ausschließlich multipliziert mit (konstanten) Zahlen, vor, so spricht man von einem **Linearen Gleichungssystem**, oder kurz **LGS**.

Die beiden Gleichungen aus dem einführenden Beispiel 4.1.1 stellen ein Lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte $x$ und $y$ dar. Dagegen bilden die drei Gleichungen

$$x+y+z=3 \quad \text{und} \quad x+y-z=1 \quad \text{und} \quad x\cdot y+z=2$$

in den Unbekannten $x, y$ und $z$ zwar ein Gleichungssystem, jedoch **kein** lineares, da in der dritten Gleichung der Term $x\cdot y$ auftritt, der **bilinear** in $x$ und $y$ ist und daher der Bedingung der **Linearität** widerspricht.
Übrigens muss bei einem Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen nicht gleich der Anzahl der Unbekannten sein; darauf werden wir später noch zurückkommen.

**Aufgabe 4.1.4**

Bei welchen der folgenden Gleichungssysteme handelt es sich um Lineare Gleichungssysteme?

- [ ] $x + y - 3z = 0$ und $2x - 3 = y$ und $1,5x - z = 22 + y$ ?
- [ ] $\sin(x) + \cos(y) = 1$ und $x - y = 0$ ?
- [ ] $2z - 3y + 4x = 5$ und $z + y - x^2 = 25$ ?

Eingabe kontrollieren

Lineares Gleichungssysteme zeichnen sich gegenüber allgemeinen Gleichungssystemen durch eine meist deutlich größere Einfachheit aus. Nichtsdestotrotz spielen sie in mannigfachen Bereichen eine zentral wichtige Rolle, so in der Medizin z.B. im Zusammenhang mit der Computertomographie, in der Technik etwa bei der Beschreibung, wie sich Schall in komplex gestalteten Räumen ausbreitet, oder in der Physik beispielsweise bei der Frage, welche Wellenlängen angeregte Atome aussenden können. Daher ist es zweifelsohne lohnenswert, sich intensiv mit linearen Gleichungssystemen auseinanderzusetzen.

Im Vordergrund steht bei Gleichungssystemen generell die Frage, welche Zahlenwerte man für die Unbekannten wählen muss, damit alle Gleichungen des Systems simultan erfüllt sind. Ein solcher Satz von Zahlenwerten für die Unbekannten wird uns auf den Begriff der **Lösung eines Gleichungssystems** führen.

Zuvor sollte jedoch eine Feinheit beachtet werden: Abhängig von der Problemstellung ist es unter Umständen nicht sinnvoll, alle möglichen Zahlenwerte für die Unbekannten zuzulassen. Im Eingangsbeispiel 4.1.1 repräsentieren die Unbekannten $x$ und $y$ die

**Onlinekurs Mathematik - Lineare Gleichungssysteme - LGS mit zwei Unbekannten**

Einführung
Mein Kurs
Einstellungen
Eingangstest
Suche
Das KIT

Feedback

Beta-Version

### Einführung

Wir beschränken uns zunächst auf lineare Gleichungssysteme in **zwei** Unbekannten.

**Info 4.2.1**

Allgemein hat ein lineares Gleichungssystem (LGS), bestehend aus zwei Gleichungen in den Unbekannten $x$ und $y$, folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y &= b_1 \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y &= b_2 \end{aligned}$$

Dabei sind $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ und $a_{22}$ die sogenannten Koeffizienten des linearen Gleichungssystems, die ebenso wie die rechten Seiten $b_1$ und $b_2$ der Gleichungen meist aus den reellen Zahlen stammen und aufgrund der Problemstellung (weitgehend) vorgegeben sind.

Sind die rechten Seiten $b_1$ und $b_2$ beide gleich $0$ ($b_1 = 0 = b_2$), so spricht man von einem **homogenen**, andernfalls von einem **inhomogenen** Linearen Gleichungssystem.

Aufgrund der Linearität kann jede der beiden Gleichungen des Systems in Infobox 4.2.1 für sich als Gleichung einer Geraden in der $x$-$y$-Ebene interpretiert werden: Lösen wir z.B. die erste Gleichung nach $y$ auf,

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}\,x + \frac{b_1}{a_{12}} \qquad ,$$

so können wir aus dieser expliziten Form direkt ablesen, dass eine Gerade mit der Steigung $m = -a_{11}/a_{12}$ und dem $y$-Achsenabschnitt $y_0 = b_1/a_{12}$ beschrieben wird.

Am Rande halten wir fest, dass das eben erwähnte Freistellen nach $y$ natürlich nur funktioniert, falls $a_{12} \neq 0$ ist. Ist $a_{12} = 0$, so lautet die erste Gleichung $a_{11}\cdot x = b_1$; diese ist für $a_{11} \neq 0$ äquivalent zu $x = (b_1/a_{11})$, was bedeutet, dass $x$ einen konstanten Wert annimmt; dies stellt ebenfalls eine Gerade dar, nämlich eine Gerade parallel zur $y$-Achse im Abstand $(b_1/a_{11})$.
Und was, wenn sowohl $a_{12} = 0$ als auch $a_{11} = 0$ gilt? Nun, dann muss ebenfalls $b_1 = 0$ sein, da ansonsten die erste Gleichung von vornherein einen Widerspruch ergeben würde. Für $a_{11} = a_{12} = b_1 = 0$ ist aber die erste Gleichung (für alle Werte von $x$ und $y$) immer identisch erfüllt ($0 = 0$) und somit wertlos.

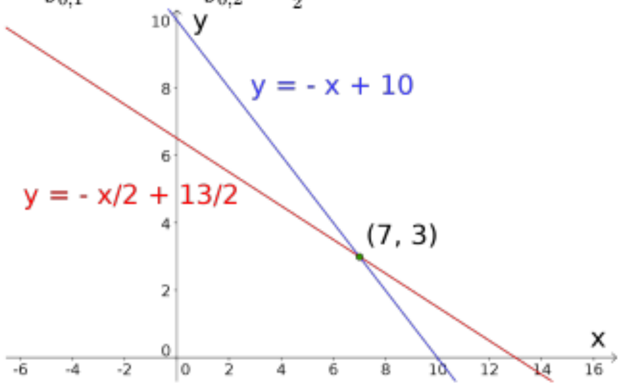
Im Fall der zweiten Gleichung in Infobox 4.2.1 gehen wir ganz entsprechend vor:

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\,x + \frac{b_2}{a_{22}} \qquad .$$

Insgesamt erhalten wir zwei Geraden als Repräsentanten der beiden linearen Gleichungen, und die Frage nach Lösbarkeit und Lösung des linearen Gleichungssystems, also die **Frage nach der gleichzeitigen Gültigkeit beider Gleichungen**, lässt sich als Frage nach Existenz und Lage des

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y &=& 13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \end{array}\right.$$

(Hier nehmen die allgemeinen Koeffizienten und rechten Seiten des Systems 4.2.1 somit die Werte $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 2, b_1 = 10$ und $b_2 = 13$ an.)
Es werden zwei Geraden mit den Steigungen $m_1 = -1$ bzw. $m_2 = -\frac{1}{2}$ und den $y$-Achsenabschnitten $y_{0,1} = 10$ bzw. $y_{0,2} = \frac{13}{2}$ beschrieben:




Wir erkennen aus dem Schaubild, dass sich die beiden Geraden in der Tat schneiden, und lesen die Koordinaten des Schnittpunktes zu $(x = 7, y = 3)$ ab. Dementsprechend besitzt das hier betrachtete Lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung; die Lösungsmenge $L$ enthält genau ein Zahlenpaar, $L = \{(x = 7, y = 3)\}$.

Diese anschauliche Betrachtungsweise eignet sich hervorragend, alle Fälle zu diskutieren, die überhaupt nur auftreten können: Denn entweder schneiden sich zwei Geraden in der $x$-$y$-Ebene - und dann ist der Schnittpunkt zwangsläufig **eindeutig** -, oder aber zwei solche Geraden verlaufen parallel - und besitzen somit keinen Schnittpunkt -, oder aber die beiden Geraden sind deckungsgleich - und schneiden sich daher sozusagen in unendlich vielen Punkten. Andere Möglichkeiten sind nicht denkbar. Demzufolge können wir im Hinblick auf die Mächtigkeit der Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems Folgendes festhalten:

**Info 4.2.3**

Ein **inhomogenes Lineares Gleichungssystem** besitzt entweder eine eindeutige Lösung oder aber keine Lösung oder aber unendlich viele Lösungen.

Ein **homogenes Lineares Gleichungssystem** weist **immer eine Lösung** auf, nämlich die sogenannte **triviale Lösung** $x = 0$ und $y = 0$. Darüberhinaus **kann** ein solches homogenes System auch **unendlich viele Lösungen** besitzen.

Verdeutlichen wir das Gesagte an zwei weiteren Beispielen, bei denen wir direkt mit den Linearen Gleichungssystemen starten:

**Beispiel 4.2.4**
In beiden Fällen wählen wir als **Grundmenge** die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+2 \\ y &=& -x+\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+2 \\ y &=& -x+2 \end{array}\right.$$

Kursinhalt

Einführung
Mein Kurs
Einstellungen
Eingangstest
Suche
Das KIT

Feedback

Beta-Version

$$\begin{aligned} \text{Gleichung}(1): \quad x+y &= 2 \\ \text{Gleichung}(2): \quad 2x+2y &= 1 \end{aligned}$$

Freistellen der Gleichung $(1)$ nach $x$ liefert $x = 2 - y$. Dies in Gleichung $(2)$ eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} & 2(2-y)+2y = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 4-2y+2y = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 = 1 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch; das LGS besitzt **keine** Lösung.

$$\begin{aligned} \text{Gleichung}(1): \quad x+y &= 2 \\ \text{Gleichung}(2): \quad 2x+2y &= 4 \end{aligned}$$

Freistellen der Gleichung $(1)$ nach $y$ liefert $y = 2 - x$. Dies in Gleichung $(2)$ eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} & 2x+2(2-x) = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x+4-2x = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 = 4 \end{aligned}$$

Dies ist immer wahr; das LGS besitzt **unendlich viele** Lösungen.

Die Einsetzmethode ist nicht das einzige Verfahren, um Lineare Gleichungssysteme rechnerisch zu lösen. Wir kommen nun zu einer weiteren Methode, die sehr eng mit der graphischen Lösung eines LGS ist.

**Info 4.2.9**

Bei der **Gleichsetzmethode** werden **beide** linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt. Die beiden resultierenden neuen Gleichungen werden dann im zweiten Schritt **gleichgesetzt**. In der Folge können dann die drei im Zusammenhang mit der Einsetzmethode diskutierten Fälle auftreten.

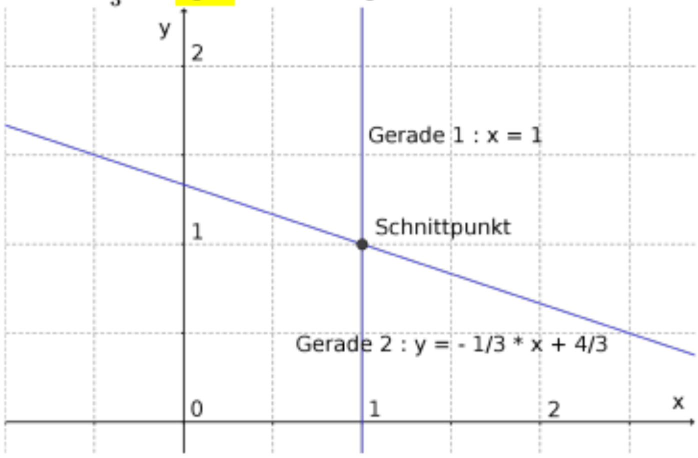
Auch dieses Verfahren beinhaltet gewisse Freiheiten; so ist zum Beispiel nicht vorgeschrieben, nach welcher Unbekannten die linearen Gleichungen freigestellt werden sollen.

Zur Demonstration lösen wir nochmals das Eingangsbeispiel, jetzt mit Hilfe der Gleichsetzmethode:

**Beispiel 4.2.10**
Das Lineare Gleichungssystem unseres einführenden Beispiels lautet:

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x+2y &= 13 \end{aligned}$$

Wir lösen beide Gleichungen nach $x$ auf, eine Gerade parallel zur $y$-Achse durch den Punkt $(1, 0)$ auf der $x$-Achse. Die 2. Gleichung ($x + 3y = 4$) kann umgeformt werden zu $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; dies beschreibt ebenfalls eine Gerade, diesmal mit der Steigung $-\frac{1}{3}$ und dem $y$-Achsenabschnitt $\frac{4}{3}$. Es egibt sich also folgendes Bild:




Aus diesem Bild liest man die Koordinaten des Schnittpunktes zu $(x = 1, y = 1)$ ab; daher: $L = \{(1, 1)\}$