**Onlinekurs Mathematik - Geometrie - Flächeninhalt und Strahlensätze**

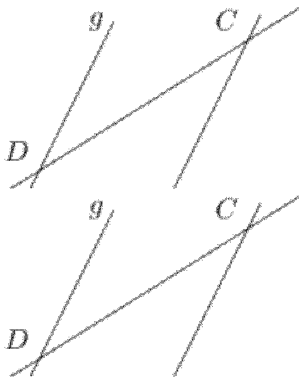


### 5.2.2 Die Strahlensätze

Die Strahlensätze haben etwa mit der zentrischen Streckung zu tun (siehe 5.1.14).

**Info 5.2.11**

**Strahlensätze**




Für zwei Punkte $P$ und $Q$ seien $\overline{PQ}$ die Strecke von $P$ nach $Q$ und $|\overline{PQ}|$ die Länge dieser Strecke.

Sind in dem obigen Bild die Geraden $g$ und $h$ parallel, so gilt:

- Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl:

$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SD}|} = \frac{|\overline{SB}|}{|\overline{SC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} .$$

- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von $S$ aus gehenden entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl;

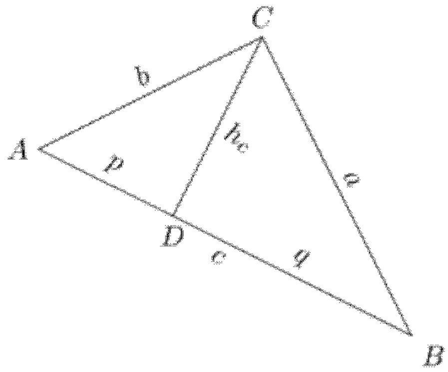
$$\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{SD}|}{|\overline{SC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BC}|} .$$

Mit dem Strahlensatz lassen sich auch einige wichtige Sätze herleiten, die für ein rechtwinkliges Dreieck gelten, zum Beispiel die **Satzgruppe des Pythagoras**. Diese wollen wir hier aber ohne Herleitung angeben:

Aufgaben

**Info 5.2.12**

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel bei $C$ , $D$ der Lotfußpunkt der Höhe $h_c$ auf $c$ , $p = |\overline{AD}|$ und $q = |\overline{BD}|$ , so gilt:




- **Satz des Pythagoras**
  Die Summe der Quadrate über den Katheten haben den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. So gilt für das hier abgebildete Dreieck:

  $$a^2 + b^2 = c^2$$

  Werden die Seiten des Dreiecks anders bezeichnet, muss die Gleichung entsprechend angepasst werden!

- **Kathetensatz**
  Das Quadrat über einer Kathete ist flächeninhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:

  $$a^2 = c \cdot q, \qquad b^2 = c \cdot p$$

- **Höhensatz**
  Das Quadrat über der Höhe ist flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten

  $$h^2 = p \cdot q$$

**Beispiel 5.2.13**
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 3$ und $b = 4$ .

Wir können die Hypotenuse mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$c^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Die einzelnen Hypotenusenabschnitte $p$ und $q$ berechnen wir mit dem Kathetensatz:



$$q = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}, \quad p = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5}$$

Die Höhe $h_c$ erhalten wir mit dem Höhensatz:

$$h_c = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

**Aufgabe 5.2.14**

Berechnen Sie für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 10.5$, der Höhe $h_c = 5.04$ und dem Hypotenusenabschnitt $q = 3.78$ die Länge der beiden Katheten.

Lösung

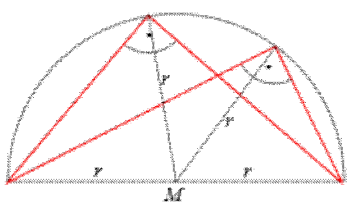
Kathetensatz: $a = \sqrt{c \cdot q} = \sqrt{10.5 \cdot 3.78} = 6.3$

Satz des Pythagoras: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10.5^2 - 6.3^2} = 8.4$

Es gibt noch einen weiteren wichtigen Satz, der für rechtwinklige Dreiecke gültig ist:

**Info 5.2.15**

**Satz des Thales**




Hat das Dreieck $ABC$ bei $C$ einen rechten Winkel, so liegt $C$ auf einem Kreis mit der Hypotenuse $c = \overline{AB}$ als Durchmesser.

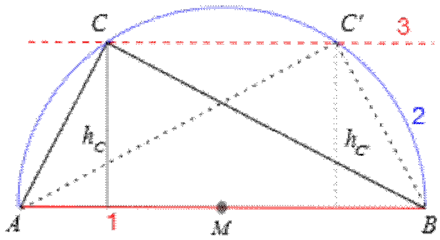
Wenn man also über einer Strecke $\overline{AB}$ einen Halbkreis konstruiert, und dann $A$ und $B$ mit einem beliebigen Punkt $C$ auf dem Halbkreis verbindet, dann ist das so entstandene Dreieck immer rechtwinklig.

**Beispiel 5.2.16**
Es soll ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge $c = 6$ cm und der Höhe $h_c = 2.5$ cm konstruiert werden.

1. Zuerst zeichnet man die Hypotenuse $c = \overline{AB}$.

Aufgaben

- Die Mitte der Hypotenuse wird nun zum Mittelpunkt eines Kreises mit der Länge $c/2$.
- Nun zeichnet man eine Parallele zur Hypotenuse im Abstand $h_c$ 4. Es gibt zwei Schnittpunkte $C$ und $C'$ dieser Parallelen mit dem Thaleskreis.




Diese sind jeweils die dritte Ecke eines Dreiecks, das die geforderten Eigenschaften hat, das heißt, man erhält zwei Lösungen. Würde man noch einen Thaleskreis nach unten zeichen, so ergäben sich noch mal zwei Lösungen.

**Aufgabe 5.2.17**
Welche Höhe $h_c$ kann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c$ maximal haben?

Lösung

Die Höhe $h_c$ kann maximal so groß werden wie der Radius des Thaleskreises über der Hypotenuse, also $h_c \leq c/2$.