1 Gleichungen in einer Unbekannten

Modulübersicht

In diesem Modul wird ein Überblick über die mathematischen Grundlagen zum elementaren Rechnen gegeben und die Notation eingeführt und erklärt.

1.1 Einfache Gleichungen

1.1.1 Einführung

Eine **Gleichung** ist ein Ausdruck der Form

$$\text{Linke Seite} = \text{Rechte Seite},$$

wobei auf beiden Seiten der Gleichung mathematische Ausdrücke stehen. In diesen Ausdrücken kommen in der Regel Variablen vor (z.B. x). In Abhängigkeit von den Variablen ist eine Gleichung erfüllt, falls auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der gleiche Wert steht. Sie ist nicht erfüllt, falls ungleiche Werte auf beiden Seiten stehen.

Gleichungen beschreiben Zusammenhänge zwischen Ausdrücken oder stellen ein zu lösendes Problem dar. Eine Gleichung an sich ist nicht wahr oder falsch, sondern sie wird durch manche Variablenwerte erfüllt und durch andere Werte nicht. Um Wahrheit oder Falschheit für solche Werte zu prüfen, müssen diese in die Gleichung eingesetzt werden. Beide Seiten der Gleichung wertet man dann zu konkreten Zahlen aus. Die Gleichung wird durch die eingesetzten Werte erfüllt, falls die ausgewerteten Zahlen auf den beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen:

Beispiel 1.1.1

Die Gleichung $2x - 1 = x^2$ besitzt die linke Seite $2x - 1$ und die rechte Seite x^2. Einsetzen von $x = 1$ ergibt den Zahlenwert 1 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, also ist $x = 1$ eine Lösung dieser Gleichung. Dagegen ist $x = 2$ keine Lösung, denn eine Auswertung ergibt 3 auf der linken Seite und 4 auf der rechten Seite der Gleichung.

Die **Lösungsmenge** L einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen, die, wenn sie für die Variable (z.B. x) in der Gleichung eingesetzt werden, die Beziehung

$$\text{Linke Seite} = \text{Rechte Seite},$$

erfüllt.

Typische Aufgabenstellungen für Gleichungen sind

- Angabe der Lösungen einer Gleichung, d.h. aller Werte für die Unbestimmten, welche die Gleichung erfüllen,
- Umformen der Gleichung, insb. Auflösen nach den Variablen,
- das Finden einer Gleichung, die ein textuell gegebenes Problem beschreibt.

Beispiel 1.1.2

Eine Spareinlage soll so konzipiert werden, dass eine feste Rendite pro Jahr entsteht. Ziel der Bank ist es zu erreichen, dass der Sparer bei einer Geldeinlage für 5 Jahre genau 600 Euro mehr Rendite bekommt, als wenn er es nur 2 Jahre angelegt hätte.

Die Aufgabenstellung wird zunächst in eine Gleichung übersetzt, wobei die Variable r für die Rendite pro Jahr stehen soll. Die Gleichung lautet dann $5 \cdot r = 2 \cdot r + 600$ und drückt aus, dass fünf Renditeauszahlungen (linke Seite der Gleichung) den gleichen Wert ergeben wie zwei Auszahlungen plus 600 (die Einheit Euro lässt man in der Rechnung dann weg).

Diese Gleichung kann sehr einfach nach r aufgelöst werden, indem man auf beiden Seiten $2r$ abzieht. Dann lautet die Gleichung $3r = 600$ und Teilen durch 3 ergibt die Lösung $r = 200$.

Die Bank muss also eine Rendite von 200 Euro im Jahr anbieten, damit das geforderte Sparziel erfüllt ist.

Zwei Gleichungen sind **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Eine **Äquivalenzumformung** ist eine spezielle Umformung, welche die Gleichung, aber nicht ihre Lösungsmenge verändert. Wichtige Äquivalenzumformungen sind

- Addieren/Subtrahieren von Termen auf beiden Seiten der Gleichung,
- Vertauschung der beiden Seiten der Gleichung,
- Umformen von Termen auf einer Seite der Gleichung,
- bekannte Zusammenhänge einsetzen.

Die folgenden Umformungen sind nur dann Äquivalenzumformungen, wenn der verwendete Term nicht Null ist (was von den Variablen abhängen kann):

- Multiplikation/Division mit einem Term (dieser Term darf nicht Null sein),
- Bilden des Kehrwerts auf beiden Seiten der Gleichung (beide Seiten müssen verschieden von Null sein).

Dabei verwendet man folgende **Notation**:

- Äquivalente Gleichungen werden durch das Symbol $\Leftrightarrow$ (gesprochen: genau dann wenn, d.h. die eine Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn auch die andere Gleichung erfüllt ist) gekennzeichnet.
- Unter das Symbol (oder bei mehrzeiligen Lösungen abgetrennt neben die Umformung) wird die Umformungsoperation geschrieben.

Dabei ist wichtig, dass ein Leser die durchgeführte Umformung genau nachvollziehen kann.

Beispiel 1.1.3

Zwei einfache einzeilige Äquivalenzumformungen. Auch wenn dass Symbol $\Leftrightarrow$ in beide Richtungen zeigt wird die Notation so interpretiert, dass man die Umformung von links nach rechts angewendet hat:

$$3x - x^2 \;=\; 2x - x^2 + 1 \underset{+x^2}{\Leftrightarrow} 3x \;=\; 2x + 1 \underset{-2x}{\Leftrightarrow} x \;=\; 1\,.$$

Die Gleichungen links und rechts sind äquivalent. Auf der linken Seite steht die ursprüngliche Gleichung (die zu einem konkreten textuellen Problem gehört), auf der rechten Seite steht eine dazu äquivalente Gleichung, an der man die einzige Lösung sofort ablesen kann.

Beispiel 1.1.4

Bei mehreren komplizierten Umformungen sollten die Umformungsschritte untereinander geschrieben werden. In diesem Fall notiert man die durchgeführte Operation mit einem Trennstrich:

$$\begin{array}{lll}
\text{Start:} & 12 + t \;=\; \dfrac{2t}{2t^2} + t & \Big\| \quad -t \\
\Leftrightarrow & 12 \;=\; \dfrac{2t}{2t^2} & \Big\| \quad \text{Gleichung umgedreht} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2t}{2t^2} \;=\; 12 & \Big\| \quad \text{Linke Seite umgeformt} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{t} \;=\; 12 & \Big\| \quad \text{Kehrwerte genommen} \\
\Leftrightarrow & t \;=\; \dfrac{1}{12}\,. &
\end{array}$$

Dabei können sowohl kurze Symbole wie z.B. $-t$ hinter dem Trennstrich stehen wie auch textuelle Beschreibungen. Wichtig dabei ist, dass ein Leser nachvollziehen kann, welche Umformungsschritte durchgeführt worden sind und ob diese richtig sind.

1.1.2 Bedingungen in Umformungen

Multiplikationen, Divisionen oder das Bilden von Kehrwerte sind nur Äquivalenzumformungen, wenn die Faktoren bzw. Terme nicht Null sind. In Beispiel 1.1.4 ist für den Leser nachvollziehbar, dass beide Seiten der Gleichung nicht Null sind, daher ist die Umformung erlaubt. Wenn die Unbestimmten selbst in der Umformung eingesetzt werden, so muss gesondert notiert werden, dass der betroffene Term nicht Null sein darf. Das Ende der Umformungskette ist dann nur für Werte gültig, welche die Bedingungen aus den Umformungen erfüllen. Alle anderen Werte müssen *gesondert* überprüft werden, typischerweise indem man sie direkt in die Gleichung einsetzt:

Beispiel 1.1.5

In diesem Beispiel sind die notwendigen Bedingungen für die Umformungen nicht problematisch:

$$\begin{aligned} \text{Start:} \quad 9x &= 81x^2 && \Big\| \; : x, \text{ Umformung erlaubt falls } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9 &= 81x && \Big\| \; : 81 \text{ und umdrehen} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{1}{9} && \text{und erfüllt die Bedingung } x \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Auch das durch die Bedingung aussortierte $x = 0$ muss geprüft werden: Die Gleichung $9x = 81x^2$ ist für $x = 0$ erfüllt, also ist auch $x = 0$ eine Lösung. In Mengenschreibweise hat diese Gleichung die Lösungsmenge $L = \{0; \frac{1}{9}\}$.

Werte, welche die Bedingungen verletzen, müssen in jedem Fall gesondert untersucht werden, auch wenn sie am Ende als Lösung in der Gleichung stehen:

Beispiel 1.1.6

$$\begin{aligned} \text{Start:} \quad x^2 - 2x &= 2x - 4 && \Big\| \; \text{Terme auf den beiden Seiten zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-2) &= 2 \cdot (x-2) && \mid \; : (x-2), \text{ Umformung nur zulässig falls } x \neq 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 2 \,. \end{aligned}$$

Dieses x verletzt die Bedingung $x \neq 2$, es kann daher sein, dass es sich nicht um eine Lösung handelt. Einsetzen von $x = 2$ in die Startgleichung ergibt $2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ auf der linken Seite, ebenso $2 \cdot 2 - 4 = 0$ auf der rechten Seite. Also ist $x = 2$ tatsächlich eine Lösung, auch wenn es die Umformungsbedingung verletzt.

Aufgabe 1.1.1
Finden Sie die Lösung der Gleichung $(x-2)(x-3) = x^2 - 9$, indem Sie die rechte Seite mit Hilfe der dritten binomischen Formel umformen und dann einen Faktor abdividieren.

Die Lösung ist $x = \boxed{}$.

Lösung:

Die richtige Umformungskette mit Bedingung ist

$$\text{Start:}\quad (x-2)(x-3) \;=\; x^2-9 \quad \Big\|\quad \text{Umformen der rechten Seite}$$

$$\Leftrightarrow\quad (x-2)(x-3) \;=\; (x+3)(x-3) \quad \Big\|\quad :(x-3),\ \text{Umformung erlaubt falls } x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow\quad x-2 \;=\; x+3 \quad \Big\|\quad -x$$

$$\Leftrightarrow\quad -2 \;=\; 3 \text{ ist eine falsche Gleichung.}$$

Wichtig hier ist, dass diese Gleichung nur für $x \neq 3$ falsch ist. Für $x = 3$ muss separat nachgerechnet werden, und tatsächlich ist die Startgleichung für $x = 3$ erfüllt.

1.1.3 Proportionalität und Dreisatz

Ein in der Praxis häufig vorkommender Fall der Beziehung zwischen zwei Größen ist die **Proportionalität** zwischen diesen Größen, wie z.B. zwischen Masse und Volumen, Zeit und zurückgelegter Wegstrecke oder Gewicht bzw. Masse (Menge) einer Ware und Preis. Die Beziehung kann exemplarisch für bestimmte feste Größen vorliegen. Ein erstes Ziel ist dann, diese daraus folgende Beziehung für ein anderes Anwendungsbeispiel zu formulieren. Das Vorgehen soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Beispiel 1.1.7

5 kg Äpfel kosten 3 Euro. Wie viel kosten dann 11 kg Äpfel?

Die Ausgangsbeziehung lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$5\,\text{kg} \;\widehat{=}\; 3\ \text{Euro}\,.$$

Es wird vorausgesetzt, dass diese Größen proportional zueinander sind. Im folgenden Schritt wird die Beziehung zwischen den Größen daher auf die Einheit einer der Größen zurückgeführt, nämlich jener der gegebenen Größe. In diesem Fall werden beide Größen mit 1/5 multipliziert – die Bezugseinheit ist also 1 kg –:

$$1\,\text{kg} \;\widehat{=}\; \frac{1}{5}\cdot 3\ \text{Euro} = 0{,}6\ \text{Euro}\,.$$

Schließlich werden beide Seiten mit dem Vielfachen der Bezugseinheit der gegebenen Größe multipliziert, in diesem Fall mit dem Faktor 11:

$$11\,\text{kg} \;\widehat{=}\; 11\cdot 0{,}6\ \text{Euro} = 6{,}6\ \text{Euro}\,.$$

Der gesuchte Preis für die 11 kg Äpfel ist also 6,60 Euro.

Das hier beispielhaft vorgeführte Verfahren, die Ausgangsbeziehung über die Beziehung für eine Einheit einer Größe zur gesuchten Beziehung zu führen, wird als **Dreisatz** bezeichnet.

Das gestellte Problem lässt sich aber auch über die Einführung eines Proportionalitätsfaktors lösen. Dazu wird das vorige Beispiel erneut betrachtet.

Beispiel 1.1.8

Der Preis P ist proportional zur Masse m. Es gibt daher eine Konstante k mit

$$P = km \ .$$

Da diese Beziehung auch für die vorgegebenen Werte $m_0 = 5\,\text{kg}$ und $P_0 = 3$ Euro gilt, folgt

$$\begin{aligned} P_0 &= km_0 \quad \Big\| \quad \text{Multiplikation mit } \frac{1}{m_0} \\ \iff \frac{P_0}{m_0} &= k \quad ; \end{aligned}$$

in diesem Fall ist also

$$k = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ ,$$

interpretiert in den Einheiten Euro pro kg. (In den Naturwissenschaften würde man korrekterweise $k = 0{,}6$ Euro/kg schreiben, weil Proportionalitätsfaktoren i.A. dimensionsbehaftet sind.) Daraus erhält man mit $m_1 = 11\,\text{kg}$ abschließend

$$P_1 = km_1 = 0{,}6 \cdot 11 = 6{,}6 \text{ (in Euro)} \ ,$$

also dasselbe Ergebnis wie mit dem Dreisatz.

Aufgabe 1.1.2
Ein Fahrzeug fährt in 9 Minuten eine Strecke von 6 km.

a. Welche Strecke s fährt das Fahrzeug in 15 Minuten?

   Die Lösung ist $s_{15} =$ ☐ km.

b. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Fahrstrecke s und Fahrzeit t ist die Geschwindigkeit v des Fahrzeugs.

   Diese beträgt $v =$ ☐ km/ h.

Lösung:
Mit den Angaben fährt das Fahrzeug in einer Minute $\frac{6}{9}\,\text{km} = \frac{2}{3}\,\text{km}$ und damit in 15 Minuten $15 \cdot \frac{2}{3}\,\text{km} = 10\,\text{km}$.

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v = \frac{10\,\text{km}}{15\,\text{min}} = \frac{10\,\text{km}}{(1/4)\,\text{h}} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \ .$$

1.1.4 Auflösen linearer Gleichungen

Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, in der nur Vielfache von Unbestimmten und Konstanten vorkommen.

Für eine lineare Gleichung in einer Unbestimmten (hier x) gibt es nur drei Möglichkeiten:

- Sie ist hat keine Lösung,
- sie besitzt eine einzige Lösung,
- sie hat jeden Wert x als Lösung.

Diese drei Situationen erkennt man an der Umformungskette:

- Endet die Umformungskette mit einer für alle x falschen Aussage (z.B. $1 = 0$), so ist die Gleichung unlösbar.
- Endet die Umformungskette mit einer für alle x wahren Aussage (z.B. $1 = 1$), so ist die Gleichung für alle Werte von x lösbar.
- Ansonsten kann die Gleichung aufgelöst werden, d.h. man kann sie zur Gleichung $x =$ Wert umformen und die Lösung ablesen.

Mengennotation 1

In Mengenschreibweise (mit der Lösungsmenge L) kann man diese Fälle so notieren:

- $L = \{\}$ oder $L = \emptyset$, falls es keine Lösung gibt,
- $L = \{\text{Wert}\}$, falls es eine Lösung gibt,
- $L = \mathbb{R}$, falls alle reellen Zahlen x Lösungen sind.

Beispiel 1.1.9

Die lineare Gleichung $3x + 2 = 2x - 1$ hat eine Lösung. Diese erhält man durch Äquivalenzumformungen:

$$3x + 2 \;=\; 2x - 1 \underset{-2x}{\Leftrightarrow} x + 2 \;=\; -1 \underset{-2}{\Leftrightarrow} x \;=\; -3\,.$$

Also ist $x = -3$ die einzige Lösung.

Beispiel 1.1.10

Die lineare Gleichung $3x+3=9x+9$ hat eine Lösung:

$$3x+3 \;=\; 9x+9 \;\underset{:(x+1)}{\Leftrightarrow}\; 3 \;=\; 9\,.$$

Dies ist eine falsche Aussage, also ist die Gleichung für alle $x \neq -1$ (Bedingung aus der Umformung) falsch. Einsetzen von $x=-1$ erfüllt jedoch die Gleichung, daher ist es die einzige Lösung.

Alternativ hätte man die Gleichung auch so umformen können:

$$3x+3 \;=\; 9x+9 \;\underset{-3x-9}{\Leftrightarrow}\; -6 \;=\; 6x \;\Leftrightarrow\; x \;=\; -1\,.$$

Aufgabe 1.1.3
Formen Sie um und geben Sie die Lösungsmengen dieser linearen Gleichungen an:

a. $x-1=1-x$ hat die Lösungsmenge $L \;=$ $\boxed{}$,

b. $4x-2=2x+2$ hat die Lösungsmenge $L \;=$ $\boxed{}$,

c. $2x-6=2x-10$ hat die Lösungsmenge $L \;=$ $\boxed{}$.

Lösung:
Die erste Gleichung kann man zu $2x=2$ bzw. $x=1$ umformen, also ist $L=\{1\}$ die Lösungsmenge. Die zweite Gleichung kann zu $2x=4$ mit $L=\{2\}$ umgeformt werden. Die dritte Gleichung kann zu $-6=-10$ umgeformt werden, einer an sich falschen Aussage mit $L=\{\}$.

Aufgabe 1.1.4
Berechnen Sie die Lösung der allgemeinen linearen Gleichung $ax=b$, wobei a, b reelle Zahlen sind. Geben Sie an, wann die drei Fälle eintreten:

- Jedes x ist Lösung ($L=\mathbb{R}$) falls $a \;=$ $\boxed{}$ und $b=0$ ist.
- Es gibt keine Lösung ($L=\emptyset$) falls $a \;=$ $\boxed{}$ und $b \neq$ $\boxed{}$ ist.
- Ansonsten gibt es nur eine Lösung, und zwar $x \;=$ $\boxed{}$.

Lösung:
Jedes x ist Lösung ($L=\mathbb{R}$) falls $a=0$ und $b=0$ ist. Es gibt keine Lösung ($L=\emptyset$) falls $a=0$ und $b \neq 0$ ist. Ansonsten gibt es nur eine Lösung, und zwar $x=\frac{b}{a}$.

1.1.5 Auflösen quadratischer Gleichungen

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung, die sich in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$,oder in normierter Form $x^2 + px + q = 0$ schreiben lässt. Diese erhält man durch Division der gesamten Gleichung durch a.

Für eine quadratische Gleichung in einer Unbestimmten (hier x) gibt es nur drei Möglichkeiten:

- Sie ist nicht lösbar: $L = \{\}$,
- sie besitzt eine einzige Lösung $L = \{x_1\}$,
- sie besitzt zwei verschiedene Lösungen $L = \{x_1; x_2\}$.

Die Lösungen erhält man dabei über **quadratische Lösungsformeln**.

Die pq-**Formel** für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lautet

$$x_{1,2} \;=\; -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\;.$$

Dabei besitzt die Gleichung

- keine (reelle) Lösung, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ ist (dann darf man die Wurzel nicht ziehen),
- eine einzige Lösung $x_1 = -\frac{p}{2}$, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ ist und die Wurzel verschwindet,
- zwei verschiedene Lösungen, falls der Ausdruck unter der Wurzel eine positive Zahl ist.

Der hierbei betrachtete Ausdruck unter der Wurzel, $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, heißt **Diskriminante**.

Die Lösung einer quadratischen Gleichung wird häufig durch eine alternative Formel beschrieben:

Für die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ lautet die abc-**Formel** oder **Mitternachtsformel**

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\;.$$

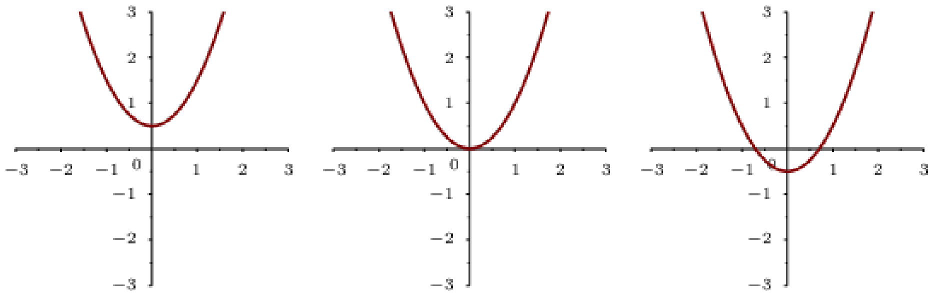
Dabei besitzt die Gleichung

- keine (reelle) Lösung, falls $b^2 - 4ac < 0$ ist (eine Quadratwurzel negativer Zahlen existiert im Reellen nicht),
- eine einzige Lösung $x_1 = -\frac{b}{2a}$, falls $b^2 = 4ac$ ist und die Wurzel verschwindet,
- zwei verschiedene Lösungen, falls der Ausdruck unter der Wurzel eine positive Zahl ist.

Auch der hierbei betrachtete Ausdruck unter der Wurzel, $D := b^2 - 4ac$, heißt **Diskriminante**.

Beide Formeln führen natürlich auf dieselben Lösungen. (Für die Anwendung der pq-Formel ist die Gleichung durch den Vorfaktor a des quadratischen Terms zu dividieren.)

Die drei unterschiedenen Situationen entsprechen den drei möglichen Schnitten, die der Graph einer (für der Fall der pq-Formel) nach oben geöffneten Parabel der Form $f(x) = x^2+px+q$ mit der x-Achse haben kann:



Die drei Situationen: Kein Schnittpunkt, ein Schnittpunkt und zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.

Beispiel 1.1.11

Die quadratische Gleichung $x^2-x+1 = 0$ hat keine Lösung, denn in der pq-Formel ist $\frac{1}{4}p^2-q = -\frac{3}{4}$ negativ. Dagegen besitzt $x^2 - x - 1 = 0$ die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \ , \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \ . \end{aligned}$$

Der Funktionsausdruck einer Parabel liegt in **Scheitelpunktform** vor, wenn er die Form $f(x) = a\cdot(x-s)^2 - d$ mit $a \neq 0$ besitzt. In dieser Situation ist $(s;-d)$ der **Scheitelpunkt** der Parabel. Die zugehörige quadratische Gleichung für $f(x) = 0$ lautet dann $a\cdot(x-s)^2 = d$.

Dividiert man diese Gleichung durch a, dann erhält man die äquivalente quadratische Gleichung $(x-s)^2 = \frac{d}{a}$. Da die linke Seite ein Quadrat eines reellen Ausdrucks ist, existieren nur Lösungen, wenn auch die rechte Seite nicht negativ ist, d.h. $\frac{d}{a} \geq 0$ gilt. Durch Wurzelziehen unter Beachtung beider möglicher Vorzeichen folgt dann $x - s = \pm\sqrt{\frac{d}{a}}$.

Falls $\frac{d}{a} > 0$ ist, gibt es damit die beiden Lösungen

$$x_1 = s - \sqrt{\frac{d}{a}} \ , \ \ x_2 = s + \sqrt{\frac{d}{a}}$$

der Gleichung; diese liegen symmetrisch um die x-Koordinate s des Scheitelpunkts. Für $d = 0$ gibt es nur eine Lösung.

Das Vorzeichen von a bestimmt, ob der Funktionsausdruck eine nach oben oder unten geöffnete Parabel beschreibt. So die Parabel für ein positives a nach oben und für ein negatives a nach unten geöffnet.

Die quadratische Gleichung hat nur eine einzige Lösung s, falls sie sich in die Form $(x-s)^2 = 0$ bringen lässt.

Beliebige quadratische Gleichungen kann man (ggf. Sortieren der Terme auf die linke Seite und Normieren) durch **quadratische Ergänzung** in Scheitelpunktform bringen. Dazu wird auf beiden Seiten eine Konstante addiert, so dass links ein Term der Form $x^2 \pm 2sx + s^2$ für die erste oder zweite binomische Formel entsteht.

Beispiel 1.1.12

Die Gleichung $x^2-4x+2=0$ kann man durch Addieren der Konstanten 2 in die Form $x^2-4x+4=2$ bzw. in die Scheitelpunktform $(x-2)^2 = 2$ bringen. Aus ihr kann man die Lösungen $x_1 = 2-\sqrt{2}$ und $2+\sqrt{2}$ leicht ablesen. Andererseits besitzt die quadratische Gleichung $x^2+x=-2$ keine Lösung, denn die quadratische Ergänzung führt auf $x^2+x+\frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$ bzw. $(x+\frac{1}{2})^2 = -\frac{7}{4}$ mit negativer rechter Seite bei $a=1$.

Aufgabe 1.1.5
Bestimmen Sie die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen über quadratische Ergänzung, nachdem Sie die Terme auf die linke Seite sortiert und normiert (d.h. $a=1$ gewählt) haben:

a. $x^2 = 8x-1$ hat die Scheitelpunktform $\boxed{}$ $=$ $\boxed{}$.
Die Lösungsmenge ist $L =$ $\boxed{}$.

b. $x^2 = 2x+2+2x^2$ hat die Scheitelpunktform $\boxed{}$ $=$ $\boxed{}$.
Die Lösungsmenge ist $L =$ $\boxed{}$.

c. $x^2-6x+18 = -x^2+6x$ hat die Scheitelpunktform $\boxed{}$ $=$ $\boxed{}$.
Die Lösungsmenge ist $L =$ $\boxed{}$.

Lösung:
Die Umformungen lauten:

$$
\begin{aligned}
& x^2 = 8x-1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-8x+1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-8x+16 = 15 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)^2 = 15 \\
& L = \{4-\sqrt{15}; 4+\sqrt{15}\}
\end{aligned}
$$

sowie für die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} & x^2 = 2x + 2 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x + 1 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)^2 = -1 \\ & L = \{\} \end{aligned}$$

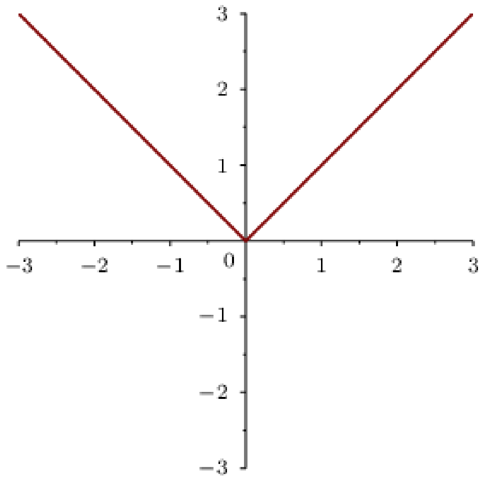
und für die dritte Gleichung

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 18 = -x^2 + 6x \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2 - 12x + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2 = 0 \\ & L = \{3\} \,. \end{aligned}$$

1.2 Betragsgleichungen

1.2.1 Einführung

Die Betragsfunktion $|x|$ ordnet einem $x \in \mathbb{R}$ seinen Wert ohne das Vorzeichen zu: Ist $x \geq 0$, so ist $|x| = x$, andernfalls ist $|x| = -x$:



Die Betragsfunktion $|x|$ in Abhängigkeit von x.

Betragsgleichungen sind Gleichungen, in denen ein oder mehrere Beträge vorkommen. Diese sind problematisch, da der Betrag eines Terms letztlich über eine Fallunterscheidung

$$|\,\mathrm{Term}\,| \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{Term} & \text{falls Term} \geq 0 \\ -\mathrm{Term} & \text{falls Term} < 0 \end{cases}$$

berechnet wird. Diese Fallunterscheidungen müssen beim Lösen von Betragsgleichungen schrittweise aufgelöst und auf Lösungen untersucht werden.

Beispiel 1.2.1

Die Betragsgleichung $|x| = 2$ hat offenbar die Lösungsmenge $L = \{2; -2\}$. Fast genauso einfach kann man von $|x - 1| = 3$ auf die Lösungsmenge $L = \{-2; 4\}$ schließen.

Sobald mehrere Terme neben dem Betrag auftreten, ist jedoch eine explizite Fallunterscheidung notwendig. Im folgenden Abschnitt wird ausführlich erklärt, wie man diese vornimmt und richtig notiert,da Fallunterscheidungen auch in den folgenden Modulen eine wichtige Rolle spielen werden.

1.2.2 Fallunterscheidungen vornehmen

Eine **Betragsgleichung** wird zur Lösung in zwei Fälle unterteilt:

- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag nicht negativ ist, kann der Betrag weggelassen bzw. durch einfache Klammern ersetzt werden.
- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag negativ ist, wird der Term in Klammern gesetzt und negiert.

Die Lösungsmengen aus den Fällen werden dann eingeschränkt, so dass sie der Fallbedingung genügen. Erst nachdem dieser Vorgang für alle Fälle abgeschlossen ist, werden die Teilmengen zur Lösungsmenge für die ursprüngliche Gleichung vereinigt.

Beim Auflösen von Betragsgleichungen ist es wichtig, den Lösungsweg richtig aufzuschreiben und die Fälle deutlich zu unterscheiden. Dieses Video demonstriert die ausführliche schriftliche Auflösung der Betragsgleichung $|2x-4| = 6$ durch eine Fallunterscheidung:

(Video nicht darstellbar)

Video 1: Ausführen einer Fallunterscheidung.

Die Kurzschreibweise für die im Video aufgestellte Fallunterscheidung wäre

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{falls } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{falls } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{falls } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aufgabe 1.2.1
Beschreiben Sie den Wert des Ausdrucks $2 \cdot |x-4|$ durch eine Fallunterscheidung:

$$2 \cdot |x-4| = \boxed{} .$$

Lösung:

$$2 \cdot |x-4| = \begin{cases} 2x-8 & \text{falls } x \geq 4 \\ -2x+8 & \text{falls } x < 4 \end{cases}$$

Aufgabe 1.2.2
Reproduzieren Sie die Schritte aus dem obigen Video, um die Betragsgleichung $|6+3x| = 12$ aufzulösen.

Die Fallunterscheidung in Kurzschreibweise lautet $|6+3x| = \boxed{}$
.

Lösung:

$$|6+3x| \;=\; \begin{cases} 6+3x & \text{falls } x \geq -2 \\ -6-3x & \text{falls } x < -2 \end{cases}$$

Bestimmung der Lösungen innerhalb der Fälle und Prüfung der Fallbedingungen ergibt die Lösungsmenge $L \;=\; \boxed{}$ für die Gleichung $|6+3x| = 12$.

Lösung:

$$L \;=\; \{-6; 2\}$$

1.2.3 Gemischte Gleichungen

Treten in einer Gleichung Beträge zusammen mit anderen Ausdrücken auf, so sind die Fallunterscheidungen passend zu den Termen in den Beträgen einzurichten und nur auf diese anzuwenden.

Dabei darf man nicht vergessen, die gefundenen Lösungsmengen mit den Fallbedingungen abzugleichen:

Beispiel 1.2.2

Zu lösen sei die Gleichung $|x-1|+x^2 = 1$. Die Fallunterscheidung lautet hier wie folgt:

- Ist $x \geq 1$, so kann man den Betrag durch Klammern ersetzen und erhält die quadratische Gleichung $(x-1)+x^2 = 1$, welche zu $x^2+x-2 = 0$ umgeformt wird. Die pq-Formel liefert die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} \;=\; -2\,, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} \;=\; 1\,, \end{aligned}$$

  von denen nur x_2 die Fallbedingung erfüllt.

- Ist $x < 1$, so erhält man die Gleichung $-(x-1)+x^2 = 1$, welche zu $x^2 - x = 0$ bzw. $x \cdot (x-1) = 0$ umgeformt wird. Man kann aus der Produktdarstellung die beiden Lösungen $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ ablesen, wegen der Fallbedingung ist hier nur $x_3 = 0$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Insgesamt ist also $L = \{0; 1\}$ die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung.

Aufgabe 1.2.3
Wie lautet die Lösungsmenge für die gemischte Gleichung $|x-3| \cdot x = 9$?

a. Ist x aus dem Intervall ☐ , so ist der Term im Betrag nicht negativ.
Man erhält die quadratische Gleichung ☐ $=0$.
Sie besitzt die Lösungsmenge ☐ .
Nur die Lösung ☐ erfüllt die Fallbedingung.

b. Ist x aus dem Intervall ☐ , so ist der Term im Betrag negativ.
Man erhält die normierte quadratische Gleichung ☐ $=0$.
Sie besitzt die Lösungsmenge ☐ .

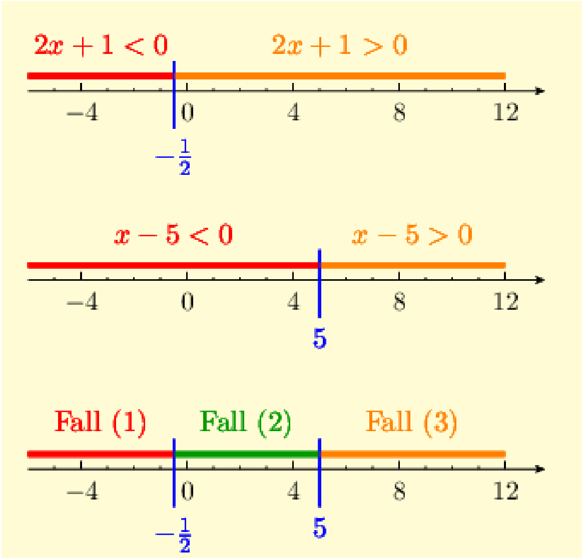
Damit ist die Lösungsmenge insgesamt $L =$ ☐ .

<u>Lösung:</u>
Ist x aus dem Intervall $[3;\infty[$, so ist der Term im Betrag nicht negativ und man erhält die quadratische Gleichung $x^2-3x-9=0$ mit Lösungsmenge $L = \{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}}; \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}}\}$. Nur die größere Lösung $\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{45}{4}}$ erfüllt die Fallbedingung $x \geq 3$. Das sieht man auch ohne Taschenrechner an der Abschätzung $\sqrt{\frac{45}{4}} \geq \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$. Ist x dagegen aus dem Intervall $]-\infty;3[$, so ist der Term im Betrag negativ. Man erhält die normierte quadratische Gleichung $x^2-3x+9=0$. Sie ist wegen $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 9 < 0$ in der pq-Formel unlösbar. Damit besitzt die ursprüngliche Gleichung nur die einzige Lösung $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}}$.

Aufgabe 1.2.4
Untersuchen Sie die gemischte Betragsgleichung $3|2x+1| = |x-5|$ auf Lösungen, indem Sie die auftretenden Fälle auf dem Zahlenstrahl visualisieren und dann aufgrund einer Fallunterscheidung die Lösungen ermitteln. Visualisieren Sie zunächst die Fallunterscheidungen für die Einzelbeträge.

Die Lösungsmenge ist ☐ .

<u>Lösung:</u>
Durch Untereinanderstellen der Fallunterscheidungen für die Betragsausdrücke $|2x+1|$ und $|x-5|$ kann man die insgesamt vorzunehmende Fallunterscheidung ablesen:



Graphische Darstellung der drei Fälle.

Man kann die folgenden drei Fälle ablesen:

- Fall 1: $x < -\frac{1}{2}$, hier sind die Terme in beiden Beträgen negativ.
- Fall 2: $-\frac{1}{2} \leq x < 5$, hier ist der Term im zweiten Betrag negativ, im ersten Betrag dagegen nicht.
- Fall 3: $5 \leq x$, hier sind beide Terme in den Beträgen nicht negativ.
- Es gibt offenbar kein x, für das der erste Term negativ, der zweite Term aber nicht negativ wird.

Damit kann man die Lösungen zusammenfassen:

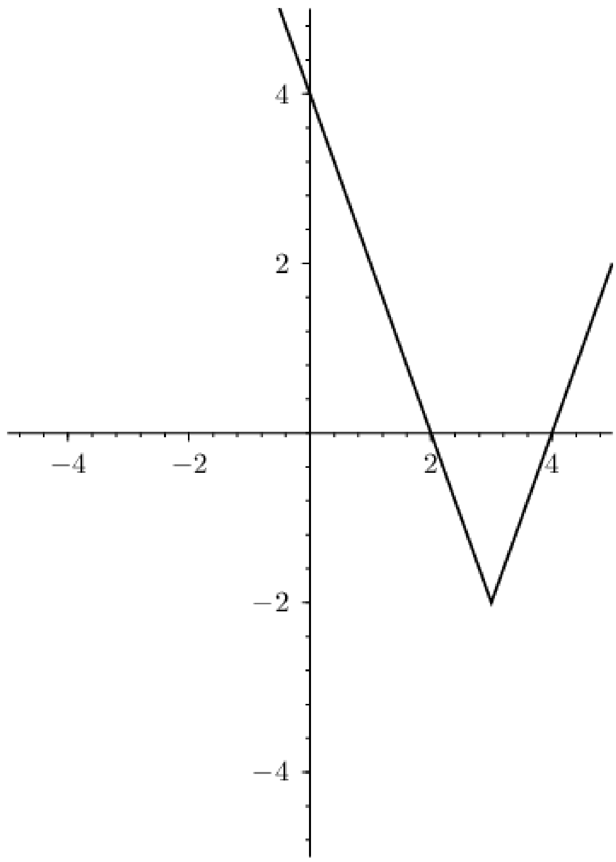
- Im Fall 1 drehen beide Beträge das Vorzeichen: $3|2x+1| = |x-5| \Leftrightarrow 3(-(2x+1)) = -(x-5)$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = -\frac{8}{5}$, sie erfüllt die Fallbedingung.
- Im Fall 2 dreht nur der zweite Betrag das Vorzeichen: $3|2x+1| = |x-5| \Leftrightarrow 3(2x+1) = -(x-5)$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = \frac{2}{7}$, sie erfüllt die Fallbedingung.
- Im Fall 3 kann man beide Beträge weglassen: $3|2x+1| = |x-5| \Leftrightarrow 3(2x+1) = (x-5)$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = -\frac{8}{5}$, sie erfüllt *nicht* die Fallbedingung und wird daher innerhalb ihres Falles verworfen.

Die Lösungsmenge ist $\{-\frac{8}{5}; \frac{2}{7}\}$.

1.3 Abschlusstest

1.3.1 Abschlusstest Modul 2

Aufgabe 1.3.1
Finden Sie einen möglichst einfachen Term mit einer Betragsfunktion, der folgenden Funktionsgraph beschreibt:



Funktionsgraph von $f(x)$.

Antwort: $f(x) =$ ☐ .

Aufgabe 1.3.2
Lösen Sie diese Gleichungen:

a. $|2x - 3| = 8$ hat die Lösungsmenge ☐ .

b. $|x - 2| \cdot x = 0$ hat die Lösungsmenge ☐ .

Aufgabe 1.3.3
Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel, also - der Einfachheit halber - von 6 Millionen Pixel, und produziert Bilder im Kleinbildformat 3 : 2. Wie groß ist ein quadratisches Pixel auf einem Ausdruck im Format (60 cm) $\times$ (40 cm)? Gesucht ist die Kantenlänge eines Pixels in Millimeter.
Antwort: ☐ (ohne die Einheit mm).

Aufgabe 1.3.4
Bestimmen Sie Lösungsmenge der gemischten Gleichung $|x-1| \cdot (x+1) = 3$.
Antwort: $L = \boxed{}$.