Onlinebrückenkurs Mathematik

des VE&MINT-Projekts (www.ve-und-mint.de)

Kursversion:	OBMLGAMMA5(10000)	Erstellung:	05/2015
Lokale Version:	DE-MINT	Kursvariante:	std

admin@ve-und-mint.de

Das VE&MINT-Projekt ist eine Kooperation der TU Berlin, der TU Darmstadt, der Leibniz Universität Hannover, des Karlsruher Instituts für Technologie, der Universität Kassel, der Universität Paderborn und der Universität Stuttgart. Fragen und Rückmeldungen können jederzeit an die Mailadresse admin@veundmint.de gerichtet werden. Die Materialien stehen im Internet unter der Adresse https://mintlx3.scc.kit.edu/onlinekursmathe online zur verfügung, nicht alle Funktionalitäten der Onlineversion sind in diesem Dokument verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

1 Elementares Rechnen

Modulübersicht

In diesem Modul wird ein Überblick über die mathematischen Grundlagen zum elementaren Rechnen gegeben und die Notation eingeführt und erklärt.

1.1 Zahlen, Variablen, Terme

1.1.1 Einführung

Die Mathematik ist eine Wissenschaft, in der allgemein abstrakte Strukturen und deren logische Zusammenhänge untersucht werden. Bevor auf die eigentlichen Inhalte dieses Abschnitts näher eingegangen wird, soll kurz auf den grundlegenden Begriff der **Menge** Bezug genommen werden.

Info 1.1.1

Um Aussagen in kompakter Weise über eine Reihe von strukturell ähnlichen Objekten treffen zu können, kann man solche Objekte in Mengen zusammenfassen, die als Behältnis für die Objekte dienen. Seien die Objekte mit $a, b, c, \ldots$ benannt, dann bildet das Symbol $M = \{a; b; c; \ldots\}$ die Menge M, welche die vorigen Objekte als **Elemente** enthält. Letzteres schreibt man kurz $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$ usw.; das Zeichen „$\in$“ bedeutet also „ist Element von“. (Manchmal ist es schreibtechnisch geboten, die Reihenfolge von Element und Menge auszutauschen. Zum Erhalten der gleichen Aussage(n) wird dann das $\in$-Symbol umgedreht, d.h. $M \ni a$, $M \ni b$, $M \ni c$ usw. heißt dann dasselbe, wobei „$\ni$“ somit „enthält als Element“ bzw. „beinhaltet“ bedeutet.)

Neben der aufzählenden Schreibweise von Mengen existieren weitere Schreibweisen. Wenn die Elemente z.B. eine Bedingung B erfüllen sollen, dann schreibt man $T = \{x : x \text{ erfüllt } B\}$. Wird dabei x (explizit) aus einer umfassenderen Menge U entnommen, dann wird dies auch in der Form $T = \{x : x \in U \text{ und } x \text{ erfüllt } B\}$ oder kurz $T = \{x \in U : x \text{ erfüllt } B\}$ geschrieben.

Aussagen wie „$x \in U$“ oder „x erfüllt B“ sind Aussagen im mathematischen Sinn, d.h. ihnen kann ein eindeutiger Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden. Seien A_1 und A_2 solche Aussagen. Für den Fall, dass sowohl A_1 als auch A_2 gelten soll, also A_1 **und** A_2 gelten sollen, schreibt man auch $A_1 \wedge A_2$. Im Fall, dass nur eine von beiden Aussagen zu gelten braucht, d.h. A_1 **oder** A_2 (oder beide Aussagen) gelten sollen, schreibt man auch $A_1 \vee A_2$.

Für zwei Mengen M und N notiert man

- $M \subseteq N$, d.h. M ist (unechte) **Teilmenge** von N, wenn jedes Element von M auch in N enthalten ist; gibt es dann mindestens ein Element in N, das nicht in M enthalten ist, wenn also M eine echte Teilmenge von N ist, so schreibt man (auch) $M \subset N$;
- $M \cup N$ für die **Vereinigung** der beiden Mengen; diese bezeichnet jene Menge, die alle Elemente enthält, die in mindestens einer der beiden Mengen vorkommen;
- $M \cap N$ für den **Schnitt** der beiden Mengen; dieser bezeichnet jene Menge, in der alle Elemente enthalten sind, die in beiden Mengen vorkommen;
- $N \setminus M$ für die **Differenzmenge**, d.h. für diejenige Menge, welche die Elemente von N enthält, die *nicht* in M vorkommen.

Die obige Vereinigung ist also charakterisiert durch Elemente, die $(x \in M) \vee (x \in N)$ erfüllen. Für die Elemente der obigen Schnittmenge gilt dagegen $(x \in M) \wedge (x \in N)$. Demgegenüber enthält die obige Differenzmenge solche Elemente, für die $(x \in N) \wedge (x \notin M)$ gilt. Mit dem Symbol $\notin$-Symbol wird die Verneinung (Negation) der Element-Aussage beschrieben.

Mathematik beinhaltet die Welt der Zahlen:

$$\ldots; 0; -3; 4; \frac{4}{5}; \sqrt{2}; e; \pi; 12{,}3; 10^{23}; \ldots\ .$$

Wenn man verschiedene Zahlen näher betrachtet, so erkennt man jedoch grundlegende Unterschiede. Manche Zahlen lassen sich nicht als geschlossener Dezimalbruch darstellen, andere sind schier unvorstellbar (imaginär), wieder andere kann man an den Fingern abzählen oder aber als Lösungen von Gleichungen gewinnen.

Info 1.1.2

Die in diesem Kurs verwendeten Zahlenbereiche sind:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$	die **Menge der natürlichen Zahlen ohne Null**,
$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$	die **Menge der natürlichen Zahlen inklusive Null**,
$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$	die **Menge der ganzen Zahlen**,
$\mathbb{Q}$	die **Menge der rationalen Zahlen (Brüche)**,
$\mathbb{R}$	die **Menge der reellen Zahlen**.

Diese Zahlenbereiche sind nicht unabhängig voneinander, sondern bilden eine Kette ineinandergeschachtelter Zahlenmengen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\ .$$

Diese Zahlenbereiche erhält man, indem man sich nacheinander die Lösungen folgender Gleichungen anschaut und die Zahlenbereiche so erweitert, dass immer eine Lösung existiert:

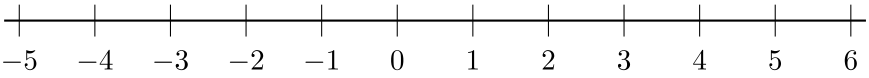
Zahlenbereich	lösbare Gleichung	nicht lösbar	Hinzunahme	neuer Bereich
$\mathbb{N}$	$x+2=4$	$x+2=1$	negativer Zahlen	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$4x=20$	$4x=5$	von Brüchen	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}$	$x^2=4$	$x^2=2$	irrationaler Zahlen	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x^2=2$	$x^2=-1$	usw.	

Natürliche Zahlen treten immer dann auf, wenn Anzahlen bestimmt oder Dinge nummeriert werden müssen. Sie spielen in der Kombinatorik eine große Rolle: die Anzahl der Möglichkeiten, aus 49 Kugeln 6 Kugeln zu ziehen, ist zum Beispiel eine natürliche Zahl. In der Informatik bilden sie die Grundlage für die verschiedenen Zahlensysteme: das Dualsystem hat die Basis 2, das Dezimalsystem die Basis 10 und das Hexadezimalsystem die Basis 16. Bestimmte natürliche Zahlen, die Primzahlen, bilden die Grundlage der modernen Verschlüsselungstechniken.

In der Menge der natürlichen Zahlen lässt es sich einfach rechnen, aber man stoßt an Grenzen, wenn man zum Beispiel eine Temperaturangabe von 3°C liest (handelt es sich um Plus- oder Minusgrade?) oder eine Gleichung der Form $x+5=1$ auflösen möchte. Daher muss die Menge der natürlichen Zahlen um die negativen natürlichen Zahlen erweitert werden und man erhält $\mathbb{Z}$. Die **Menge der ganzen Zahlen** wird mit

$$\mathbb{Z} := \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$$

bezeichnet. Ganze Zahlen werden immer dann benötigt, wenn das Vorzeichen der natürlichen Zahlen eine Rolle spielt. In $\mathbb{Z}$ können Zahlen voneinander subtrahiert werden, d.h. Gleichungssysteme der Form $a+x=b$ sind in $\mathbb{Z}$ immer lösbar ($x = b + (-a)$).



Auf den ganzen Zahlen lässt sich eindeutig ein Vergleichssymbol $<$ definieren, die ganzen Zahlen lassen sich damit zu einer Kette anordnen:

$$\cdots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \dots \ .$$

Eine rationale Zahl stellt das Verhältnis zweier ganzer Zahlen dar:

Info 1.1.3

Die Menge der **rationalen Zahlen** wird mit

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

bezeichnet. Die Elemente $\frac{p}{q}$ der Menge $\mathbb{Q}$ heißen **Brüche**, wobei p der **Zähler** des Bruchs und q der von Null verschiedene **Nenner** des Bruchs ist.

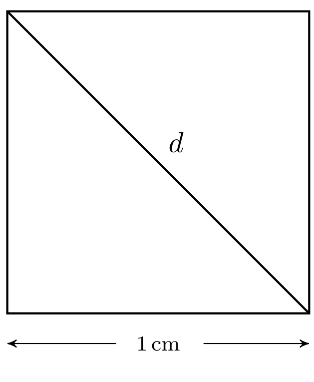
Rationale Zahlen spielen immer dann eine Rolle, wenn Angaben „genauer“ werden sollen, also Temperaturen in Bruchteilen von °C angegeben, Anteile von Flächen eingefärbt oder Medikamente aus bestimmten Bestandteilen zusammengemischt werden sollen.

Dabei ist zu beachten, dass die Darstellung als Bruch nicht eindeutig ist, man kann die gleiche Zahl durch mehrere Brüche beschreiben. Beispielsweise ist

$$2 \ = \ \frac{4}{2} \ = \ \frac{1024}{512}$$

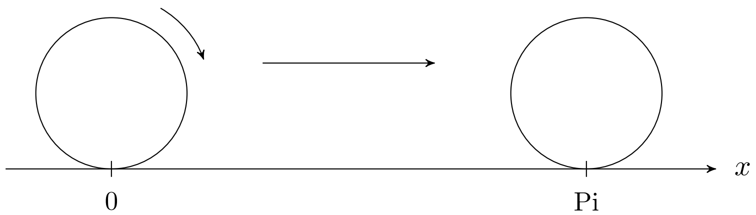
die gleiche rationale Zahl.

Andererseits kann nicht jede Zahl auf dem Zahlenstrahl als Bruch dargestellt werden. Betrachtet man zum Beispiel ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 und will die Länge der Diagonalen d berechnen, so erhält man nach dem Satz von Pythagoras:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \ \text{also formal } d = \sqrt{2}.$$

Eine weitere Zahl, die nicht als Bruch dargestellt werden kann, erhält man durch Abrollen eines Rades mit Durchmesser 1 auf der Zahlengeraden. Es handelt sich um die Zahl π. Man kann zeigen, dass diese beiden Zahlen ($\sqrt{2}$ und π) nicht in Form eines Bruchs geschrieben werden können. (Der Beweis für $\sqrt{2}$ ist dabei verhältnismäßig einfach.) Sie sind zwei Beispiele aus der Menge der sogenannten **irrationalen Zahlen**.



Eine Zahl ist irrational, wenn sie nicht rational ist, also nicht als Bruch aufgeschrieben werden kann. Die irrationalen Zahlen schließen nun die noch vorhandenen Lücken auf der Zahlengeraden, jedem Punkt entspricht genau eine reelle Zahl.

Info 1.1.4

Die Menge der **reellen Zahlen** wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet und setzt sich aus der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen zusammen. Sie enthält alle auf der Zahlengeraden darstellbaren Zahlen.

Reelle Zahlen dienen als Maßzahlen für Längen, Flächeninhalte, Temperaturen, Massen, etc. In diesem Kurs werden die mathematischen Probleme typischerweise mit reellen Zahlen gelöst.

Eine Grundeigenschaft reeller Zahlen ist, dass diese geordnet sind, d.h. für zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$ oder $a > b$. Eine weitere definierende Eigenschaft ist die Vollständigkeit, die - grob gesprochen - die „Lückenlosigkeit“ der Zahlengeraden beschreibt.

Info 1.1.5

Für zwei verschiedene reelle Zahlen betrachtet man insbesondere alle Zahlen, die auf der Zahlengeraden zwischen diesen beiden Zahlen liegen. Solche Teilmengen reeller Zahlen bezeichnet man als **Intervalle**. Deren Beschreibung wird so festgelegt, dass man ihnen eine linke Intervallgrenze (a) und eine rechte Intervallgrenze (b) zuordnet mit $a < b$. Je nachdem, ob eine oder beide Intervallgrenzen zum Intervall dazugehören, ergeben sich folgende Fälle:

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a \text{ und } x \leq b\} = [a; b]$ bezeichnet das **abgeschlossene** Intervall zwischen a und b, bei dem die Grenzen zum Intervall dazugehören.
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ und } x < b\} =]a; b[$ bezeichnet das **offene** Intervall zwischen a und b, bei dem die Grenzen *nicht* zum Intervall dazugehören.
- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a \text{ und } x < b\} = [a; b[$ bezeichnet das **links abgeschlossene und rechts**

offene Intervall zwischen a und b, bei dem die linke Grenze zum Intervall dazugehört, die rechte aber nicht.

- $\{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ und } x \leq b\} =]a; b]$ bezeichnet das **links offene und rechts abgeschlossene** Intervall zwischen a und b, bei dem die rechte Grenze zum Intervall dazugehört, die linke aber nicht.

Die Intervalle der letzten beiden Typen heißen auch **halboffene** Intervalle.

Im Falle offener Intervallenden kann man auch **unbeschränkte** Intervalle betrachten. In diesen Fällen entfällt die jeweilige Bedingung in der Mengenbeschreibung: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a; \infty[$, $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a; \infty[$, $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty; b]$, $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty; b[$, $\{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} =]-\infty; \infty[$.

Darüber hinaus sind folgende Bezeichnungen gebräuchlich: $\mathbb{R}^+ =]0; \infty[$, ${\mathbb{R}_0}^+ = [0; \infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0[$, ${\mathbb{R}_0}^- =]-\infty; 0]$.

1.1.2 Variablen und Terme

Die Verwendung von Variablen, Termen und Gleichungen ist notwendig, um Aussagen mit noch unbestimmten Werten zu formalisieren.

Info 1.1.6

Eine **Variable** ist ein Symbol (typischerweise ein Buchstabe), das als Platzhalter für einen unbestimmten Wert eingesetzt wird. Ein **Term** ist ein mathematischer Ausdruck, der Variablen, Rechenoperationen und weitere Symbole enthalten kann, und der nach Einsetzung von Zahlen für die Variablen einen konkreten Zahlenwert ergibt. Terme können zu Gleichungen bzw. Ungleichungen kombiniert oder in Funktionsbeschreibungen eingesetzt werden, dazu später mehr.

Beispiel 1.1.7

Die textuelle Frage

In einer Schulklasse gibt es vier Mädchen mehr als Jungs und insgesamt 20 Kinder, wieviele Mädchen bzw. Jungs sind in der Klasse?

kann man beispielsweise formalisieren, indem man die Variablen a für die Anzahl der Mädchen und b für die Anzahl der Jungs in der Schulklasse einführt und damit die beiden Gleichungen $a = b + 4$ und $a + b = 20$ aufstellt. Diese kann man durch Einsetzen nun auflösen zu $a = 12$ und $b = 8$ und daraus den textuellen Antwortsatz

In der Schulklasse befinden sich 12 *Mädchen und* 8 *Jungs*

aufbauen. Dabei ist beispielsweise $b + 4$ ein Term, b selbst ist eine Variable und $a + b = 20$ ist eine

Gleichung mit einem Term auf der linken und einer Zahl auf der rechten Seite.

Variablen (und manchmal Terme) werden statt mit kleinen lateinischen Buchstaben x, y, z, usw. oft auch mit griechischen Buchstaben bezeichnet, zum Beispiel wenn Winkel von Zahlen unterschieden werden sollen.

Info 1.1.8

Hier werden die Buchstaben des griechischen Alphabets in einer Übersicht gezeigt, die auch die Großbuchstaben enthält, sortiert nach dem griechischen Alphabet:

α, A	„alpha“	β, B	„beta“	γ, $\mathit{\Gamma}$	„gamma“	δ, $\mathit{\Delta}$	„delta“	ε, E	„epsilon“
ζ, Z	„zeta“	η, H	„eta“	ϑ, $\mathit{\Theta}$	„theta“	ι, I	„iota“	$\varkappa$, K	„kappa“
λ, $\mathit{\Lambda}$	„lambda“	μ, M	„mü“	ν, N	„nü“	ξ, $\mathit{\Xi}$	„xi“	o, O	„omikron“
π, $\mathit{\Pi}$	„pi“	ϱ, P	„rho“	σ, $\mathit{\Sigma}$	„sigma“	τ, T	„tau“	υ, $\mathit{\Upsilon}$	„üpsilon“
φ, $\mathit{\Phi}$	„phi“	χ, X	„chi“	ψ, $\mathit{\Psi}$	„psi“	ω, $\mathit{\Omega}$	„omega“		

Bei einem Term ist wesentlich, dass er zu einem konkreten Zahlenwert ausgewertet werden kann, wenn man Zahlen für die im Term auftretenden Variablen einsetzt:

Beispiel 1.1.9

Die folgenden Ausdrücke sind Terme:

- $x \cdot (y + z) - 1$, für $x = 1$, $y = 2$ und $z = 0$ erhält man beispielsweise den Wert 1 des Terms.
- $\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$, für $\alpha = 0°$ und $\beta = 0°$ erhält man beispielsweise den Wert 1 (für die Berechnung von Sinus und Kosinus sei auf das Kapitel 5 verwiesen).
- $1 + 2 + 3 + 4$, es treten keine Variablen auf, trotzdem handelt es sich um einen Term (der immer den Wert 10 ergibt).
- $\frac{\alpha+\beta}{1+\gamma}$, beispielsweise erhält man für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $\gamma = 3$ den Wert $\frac{3}{4}$ für den Term. Hier darf man aber nicht $\gamma = -1$ einsetzen.
- $\sin(\pi(x + 1))$, beispielsweise ergibt der Term den Wert Null wenn man für x eine ganze Zahl einsetzt.
- z, eine Variable für sich allein ist auch ein Term.
- $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$ ist ein Term, bei dem die Variable n im Term auftritt und gleichzeitig seine Länge festlegt.

Beispiel 1.1.10

Diese Ausdrücke sind keine Terme im Sinne der Mathematik:

- $a + b = 20$, ist eine Gleichung (Einsetzen von Werten für a und b ergibt keine Zahl, sondern die Gleichung ist eben wahr oder falsch).
- $a \cdot (b + c$ ist nicht richtig geklammert,
- „*Anteil der Mädchen in der Schulklasse*“ ist kein Term, kann aber durch den Term $\frac{a}{a+b}$ formalisiert werden,
- sin ist kein Term sondern ein Funktionsname, dagegen ist $\sin(\alpha)$ ein Term (der bei Einsetzen eines Winkels für α ausgewertet werden kann).

Aufgabe 1.1.1
Gegeben sind jeweils ein Term und Zahlenwerte für die im Term auftretenden Variablen. Wie lautet die Auswertung des Terms?

a. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ nimmt den Wert $\boxed{}$ an für $\alpha = 6$ und $\beta = 4$.

b. $y^2 + x^2$ nimmt den Wert $\boxed{}$ an für $y = 2x + 1$ und $x = -1$.

c. $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$ nimmt den Wert $\boxed{}$ an für $n = 6$.

Lösung:
Einsetzen der gegebenen Werte für die Variablen ergibt $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{6+4}{6-4} = \frac{10}{2} = 5$ in Teil 1), $y^2 + x^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$ in Teil 2) und $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ in Teil 3).

Aufgabe 1.1.2
Formalisieren Sie mit den vorgegebenen Variablen den Anteil der Mädchen, deren Anzahl durch die Variable a gegeben sei, sowie den der Jungen, deren Anzahl durch die Variable b gegeben sei, an der Gesamtzahl an Kindern:

Anteil der Mädchen ist $\boxed{}$ und Anteil der Jungen ist $\boxed{}$.

Lösung:
Die Gesamtanzahl der Kinder ist $a+b$, der Mädchenanteil ist daher $\frac{a}{a+b}$ und der Jungenanteil ist $\frac{b}{a+b}$.

Terme können auch ineinander eingesetzt werden:

Info 1.1.11

Beim **Einsetzen** von Termen wird ein Term anstelle eines Symbols in einem anderen Term eingesetzt, wobei das ersetzte Symbol ggf. vorher geklammert werden muss, wenn der einzusetzende Term mehrere Ausdrücke enthält.

Beispiel 1.1.12

Setzt man in den Term $x^2 + y^2$ beispielsweise den Wert $x = 1 + 2 + 3$ ein, so entsteht der neue Term $x^2 + y^2 = (1 + 2 + 3)^2 + y^2 = 36 + y^2$, und nicht etwa $1 + 2 + 3^2 + y^2 = 12 + y^2$.

Aufgabe 1.1.3
Welcher Term entsteht, wenn man in $x^2 + y^2$ Folgendes einsetzt:

a. Der Winkel α sowohl für x wie auch für y: Dann ist $x^2 + y^2 = \boxed{}$.

b. Die Zahl 2 für y und der Term $t + 1$ für x: Dann ist $x^2 + y^2 = \boxed{}$.

c. Der Term $z + 1$ für x und der Term $z - 1$ für y: Dann ist $x^2 + y^2 = \boxed{}$.

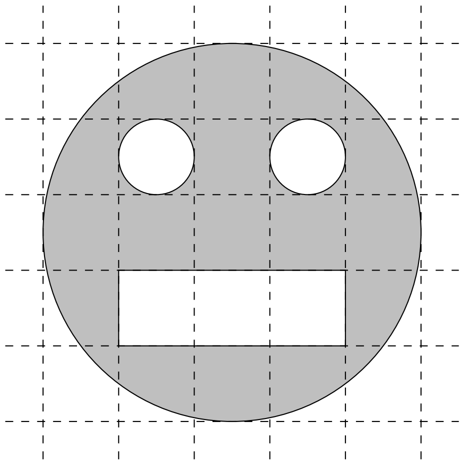
Lösung:
Am sichersten ist es, die Variablen vor der Termeinsetzung zu klammern, wenn der neue Term mehrere Symbole enthält:

a. $x^2 + y^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$.

b. $x^2 + y^2 = (x)^2 + y^2 = (t + 1)^2 + 2^2 = t^2 + 2t + 5$.

c. $x^2 + y^2 = (x)^2 + (y)^2 = (z + 1)^2 + (z - 1)^2 = z^2 + 2z + 1 + z^2 - 2z + 1 = 2z^2 + 2$.

Aufgabe 1.1.4
In dieser Figur habe ein Kästchen auf dem Papier die Seitenlänge x. Welchen Flächeninhalt (als Term in der Variablen x) besitzt die Figur?



(Ein Kästchen hat die Länge x)

Eine Figur auf kariertem Papier.

Antwort:

- Der große Kreis hat insgesamt den Flächeninhalt ______ ,
- je ein kleiner Kreis hat den Flächeninhalt ______ ,
- die Figur insgesamt hat den Flächeninhalt ______ .

Tipp zur Flächenberechnung:
In späteren Kapiteln wird die Berechnung von Flächen vorgestellt. Für diese Aufgabe benötigt man davon nur, dass ein Rechteck mit Seitenlängen a und b den Flächeninhalt $a \cdot b$ (geschrieben `a*b`) besitzt, und dass ein Kreis mit Radius r den Flächeninhalt πr^2 (geschrieben `pi*r2̂`) besitzt.

Lösung:
Der große Kreis hat insgesamt den Flächeninhalt $\frac{25}{4}\pi x^2$ (oder getippt `25/4*pi*x*x`). Je ein kleiner Kreis hat den Flächeninhalt $\frac{1}{4}\pi x^2$ und die Figur insgesamt hat den Flächeninhalt $(\frac{25}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi - 3) \cdot x^2$.

1.1.3 Terme umformen

Verschiedene Operationen in einem Term können den gleichen Wert beschreiben, beispielsweise ist $x + x$ eine von $2x$ verschiedene Symbolanordnung, die aber den gleichen Term beschreibt, d.h. wenn man eine konkrete Zahl für x einsetzt kommt bei $x + x$ und $2x$ der gleiche Wert heraus.

Info 1.1.13

Zwischen Termen wird ein Gleichheitszeichen geschrieben, wenn diese stets zum gleichen Wert ausgewertet werden.

Neue Terme entstehen in der Regel durch Umformen vorhandener Terme:

Info 1.1.14

Eine **Umformung** eines Terms entsteht, indem man eine oder mehrere Rechenregeln auf einen Term anwendet:

- Zusammenfassen: $a + a + \cdots + a = n \cdot a$ (n ist die Anzahl der Summanden).
- Distributivgesetze („Ausmultiplizieren“): $(a + b) \cdot c = ac + bc$ und $c \cdot (a + b) = ca + cb$.
- Kommutativgesetz: $a + b = b + a$.
- Assoziativgesetz („Klammern umsetzen bei gleichen Operationen“): $a+(b+c) = (a+b)+c = a + b + c$, ebenso für die Multiplikation.
- Rechenregeln für Potenzen und spezielle Funktionen.
- Rechenregeln für bestimmte Formen von Termen (z.B. die binomischen Formeln).
- Rechenregeln für Brüche: $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Die Regeln werden im Detail in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Ziel dieser Umformungen ist es meist, den Term einfacher zu machen, einzelne Variablen zu isolieren oder den Term in eine gewünschte Form zu bringen:

Beispiel 1.1.15

Zulässige Umformungen sind

- $a(a+a+a)+a^2+a^2+a^2 \;=\; 6a^2$, der Term auf der rechten Seite ist einfacher da er weniger Symbole benötigt.
- $(x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x$ (1. binomische Formel), beide Terme beschreiben eine Parabel. An der linken Seite kann man gut den Scheitelpunkt $(-3, -9)$ ablesen, an der rechten Seite die beiden Nullstellen ($x_1 = 0$ und $x_2 = -6$).
- $1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3$, an der rechten Seite kann man beispielsweise ablesen, dass die durch den Term beschriebene Funktion nur die Nullstelle $x_1 = -1$ besitzt.
- $\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$, an der linken Seite kann man ablesen, dass der Term die Nullstelle $a_1 = -1$ besitzt, an der rechten Seite kann man ablesen, dass der Term für sehr große a gegen den Wert 1 strebt (weil $\frac{1}{a}$ dann sehr klein ist).

Aufgabe 1.1.5
Formen Sie in eine Summendarstellung um: $a \cdot (b + c) + c \cdot (a + b) \;=$ $\boxed{}$.

Lösung:

$$a \cdot (b+c) + c \cdot (a+b) \;=\; ab + ac + ca + cb \;=\; ab + 2ac + bc$$

Aufgabe 1.1.6
Formen Sie in eine Summendarstellung um: $(x-y)(z-x)+(x-z)(y-z) \;=\; \boxed{}$
.
Lösung:

$$(x-y)(z-x)+(x-z)(y-z) \;=\; xz - x^2 - yz + yx + xy - xz - zy + z^2 \;=\; -x^2 - 2yz + 2xz + z^2$$

Aufgabe 1.1.7
Formen Sie in eine Summendarstellung um: $(a+b+2)(a+1) \;=\; \boxed{}$.
Lösung:

$$(a+b+2)(a+1) \;=\; a^2 + ba + 2a + a + b + 2 \;=\; a^2 + ab + 3a + b + 2$$

1.2 Bruchrechnung

1.2.1 Mit Brüchen rechnen

Ein Bruch ist eine rationale Zahl der Form $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind und der Nenner $\neq 0$ ist. Beispiele hierfür sind:

$$\frac{1}{2}\,,\quad \frac{5}{-10}\,,\quad \frac{-17}{12}\,,\quad \frac{1}{23}\,,\quad \frac{4}{6}\,,\quad \frac{-2}{3}\,,\quad \ldots\;.$$

Sehr schnell erkennt man, dass ein und dieselbe rationale Zahl beliebig viele äquivalente Darstellungen haben kann. Zum Beispiel gilt:

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}=\frac{24}{72}=\frac{-12}{-36}=\frac{3}{9}=\frac{2}{6}=\frac{120}{360}=\ldots\;.$$

Die verschiedenen Darstellungen gehen durch **Kürzen** bzw. **Erweitern** ineinander über.

Info 1.2.1

Brüche werden **gekürzt**, indem Zähler und Nenner durch dieselbe ganze Zahl ungleich Null dividiert werden.

Brüche werden **erweitert**, indem Zähler und Nenner mit derselbe ganze Zahl ungleich Null multipliziert werden.

Beispiel 1.2.2

Drei Freunde möchten sich eine Pizza teilen. Tom isst $\frac{1}{4}$ der Pizza, Tim $\frac{1}{3}$ der Pizza. Wieviel Pizza ist noch für ihren Freund Sven übrig, der eigentlich immer den meisten Hunger hat?
Der Ergebnis wird mithilfe der Bruchrechnung bestimmt: Zunächst müssen zwei Brüche addiert werden, um festzustellen, wieviel Tim und Tom schon von der Pizza gegessen haben:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}\;.$$

Hier erkennt man schon die beiden wichtigsten Schritte: zunächst müssen die beiden Brüche durch Erweitern auf den sogenannten **Hauptnenner** gebracht oder man sagt auch **gleichnamig** gemacht werden. Wenn die Brüche dann denselben Nenner besitzen, können sie addiert werden, indem ihre Zähler addiert und der gemeinsame Nenner übernommen wird. Mit dem Ergebnis, dass Tim und Tom $\frac{7}{12}$ der Pizza gegessen haben, kann durch Subtraktion berechnet werden, wie viel für Sven übrig bleibt:

$$1-\frac{7}{12}=\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}\;.$$

Auch hier werden die Brüche wieder auf den Hauptnenner gebracht und anschließend die Zähler subtrahiert. Die beiden Freunde haben also für den immer hungrigen Sven tatsächlich die meiste Pizza übriggelassen.

Schwieriger wird es, wenn Unbestimmte in Zähler in Nenner auftreten. Diese können genau wie Zahlen (aber nicht mit Zahlen) gekürzt werden, beispielsweise ist

$$\frac{4x^2y^3+3y^2}{10y^2} = \frac{4x^2y+3}{10}$$

nach Kürzung durch den Term y^2 Zähler und Nenner.

Info 1.2.3

Der **Hauptnenner** von zwei Brüchen ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der beiden Nenner.

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** (kgV) zweier Zahlen ist die kleinste Zahl, die beide Zahlen als Teiler besitzt. Der **größte gemeinsame Teiler** (ggT) zweier Zahlen ist die größte Zahl, die beide Zahlen als Vielfache besitzt.

Ist die Bestimmung des kgV bei den folgenden Rechenregeln zu kompliziert, so kann an seiner Stelle auch das einfache Produkt der Nenner benutzt werden:

Info 1.2.4

Brüche werden **addiert/subtrahiert**, indem man sie auf den gleichen Nenner bringt und die Zähler anschließend addiert/subtrahiert, d. h.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}\;, \quad bd \neq 0\;.$$

Üblicherweise werden die Brüche auf den Hauptnenner erweitert.

Beispielsweise ist das kleinste gemeinsame Vielfache von $6 = 2 \cdot 3$ und $15 = 3 \cdot 5$ die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, das Produkt ist dagegen $6 \cdot 15 = 90$. Man kann also

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{7}{30}$$

aber auch

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{15}{90} + \frac{6}{90} = \frac{21}{90}$$

rechnen und den letzten Bruch dann noch zu $\frac{7}{30}$ kürzen.

Beispiel 1.2.5

Das kleinste gemeinsame Vielfache für den Hauptnenner ist die kleinste Zahl, die von allen beteiligten Nennern geteilt wird. Falls die Zahlen keine gemeinsamen Faktoren haben, ist es einfach das Produkt der beiden Zahlen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}+\frac{1}{10} &= \frac{5}{30}+\frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}\,, \\
\frac{1}{6}+\frac{1}{10} &= \frac{10}{60}+\frac{6}{60} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15} \text{ (auch richtig)}, \\
\frac{4}{15}-\frac{1}{2} &= \frac{8}{30}-\frac{15}{30} = \frac{8-15}{30} = -\frac{7}{30}\,, \\
\frac{1}{3}+\frac{1}{9} &= \frac{3}{9}+\frac{1}{9} = \frac{4}{9}\,, \\
\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4} &= \frac{2^2}{2^4}+\frac{1}{2^4} = \frac{5}{16}\,, \\
\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} &= \frac{21}{42}+\frac{14}{42}+\frac{6}{42} = \frac{41}{42}\,.
\end{aligned}$$

Bei der Bildung von Hauptnennern können auch Terme mit Variablen zum Einsatz kommen. Da die Bruchumformungen für alle Werte dieser Variablen richtig sein sollen, müssen diese wie Zahlen ohne gemeinsame Faktoren behandelt werden:

Beispiel 1.2.6

Sind x und y eine Variablen, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}+\frac{1}{x} &= \frac{x}{3\cdot x}+\frac{3}{3\cdot x} = \frac{3+x}{3\cdot x}\,, \\
\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{y}{x\cdot y}+\frac{x}{x\cdot y} = \frac{x+y}{x\cdot y}\,, \\
\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2.1

Diese Summen sollen über Hauptnenner (oder das Produkt der Nenner) ausgerechnet werden:

a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{8} =$ [ ] .

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} =$ [ ] .

c. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x} =$ [ ] .

Lösung:

Bilden des Hauptnenners und Zusammenfassen/Kürzen ergibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\frac{1}{8} &= \frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\,,\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} &= \frac{10}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}\,,\\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{3x} &= \frac{3}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{5}{6x}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2.2

Bei gleichnamigen Brüchen darf man nur die Zähler addieren bzw. zerlegen, für den Nenner gibt es keine solche Regel. Berechnen Sie zum Nachweis die folgenden Zahlenwerte, indem Sie den Hauptnenner bilden und soweit möglich kürzen:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \boxed{}$ aber $\frac{1}{2+3} = \boxed{}$.

b. $\frac{1+2}{5+6} = \boxed{}$ aber $\frac{1}{5}+\frac{2}{6} = \boxed{}$.

Lösung:

Summen von Nennern darf man nicht zusammenfassen, auch nicht bei gleichem Zähler, hier ist

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\ \text{aber}\ \frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}\,.$$

Auch das einfache „Auseinandernehmen“ von Bestandteilen der Brüche ist nicht erlaubt, hier ist

$$\frac{1+2}{5+6}=\frac{3}{11}\ \text{aber}\ \frac{1}{5}+\frac{2}{6}=\frac{6}{30}+\frac{10}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}\,.$$

Info 1.2.7

Brüche werden **multipliziert**, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden, d. h.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\,,\quad bd\neq 0\,.$$

Die Division zweier Brüche wird auf die Multiplikation zurückgeführt:

Info 1.2.8

Brüche werden **dividiert**, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert wird, d.h.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\,,\quad b,c,d\neq 0\,.$$

Die Division zweier Brüche kann auch als **Doppelbruch** geschrieben werden:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \ .$$

Beispiel 1.2.9

Die Multiplikation bzw. Division zweier Brüche sieht unter Berücksichtigung von eventuellem Kürzen folgendermaßen aus:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \ , \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \ .$$

1.2.2 Umwandeln von Brüchen

Wird ein Bruch ausdividiert, so erhält man einen **Dezimalbruch** bzw. eine Dezimalzahl, zum Beispiel

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \ , \quad \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}\bar{3} \ , \quad \frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857} \ , \quad \frac{1}{8} = 0{,}125 \ .$$

Schon an diesen Beispielen zeigt sich, dass die Division entweder aufgehen kann und man einen **endlichen Dezimalbruch** erhält oder aber die Ziffern wiederholen sich in einer bestimmten Reihenfolge, dann liegt ein **unendlicher periodischer Dezimalbruch** vor.

Die Umwandlung von endlichen Dezimalbrüchen in Brüche geschieht mit der Stellentafel. Jeder Dezimalbruch hat die Form

…											…
…	1	2	3	4	5	,	6	7	8	9	…
…	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt	…

wobei ZT … Zehntausender, T … Tausender, H … Hunderter, Z … Zehner, E … Einer, z … Zehntel, h … Hundertstel, t … Tausendstel, zt … Zehntausendstel u.s.w. beschreiben.
Die Umwandlung sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} 4{,}375 &= 4 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} \\ &= 4 + \frac{300+70+5}{1000} \\ &= 4 + \frac{375}{1000} \\ &= 4 + \frac{75}{200} \\ &= 4 + \frac{15}{40} = \frac{35}{8} \ . \end{aligned}$$

Aber wie sieht es bei periodischen Dezimalbrüchen aus? Anscheinend müssten hier unendlich viele Brüche aufsummiert werden, was in der Praxis natürlich wenig Sinn macht. Daher bedient man sich bei der **Umwandlung unendlicher periodischer Dezimalbrüche in Brüche** eines Tricks:

Info 1.2.10

Die **Umwandlung** periodischer Dezimalbrüche in Brüche geschieht, indem man durch Multiplikation mit einer Zehnerpotenz die periodischen Nachkommastellen vor das Komma holt. Dies ergibt eine Gleichung der Form $10^k \cdot x = x + n$ für den Dezimalbruch x, der zu $x = \dfrac{n}{10^k - 1}$ (ein gewöhnlicher Bruch) aufgelöst werden kann.

Beispiel 1.2.11

Die Zahl $0{,}\bar{6}$ soll in einen Bruch umgewandelt werden. Hierzu multipliziert man die Zahl mit 10 und subtrahiert vom Ergebnis die Ausgangszahl, um die unendliche Periode zu eliminieren:

$$\begin{array}{rrclcl} & 10 & \cdot & 0{,}\bar{6} & = & 6{,}\bar{6} \\ - & 1 & \cdot & 0{,}\bar{6} & = & 0{,}\bar{6} \\ \hline \Rightarrow & 9 & \cdot & 0{,}\bar{6} & = & 6{,}0 \end{array}$$

Aus der letzten Beziehung folgt nach Division durch 9 sofort: $0{,}\bar{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Dieses Vorgehen funktioniert auch, wenn sich nicht alle Ziffern hinter dem Komma periodisch wiederholen:

Beispiel 1.2.12

Der Dezimalbruch $0{,}8\bar{3} = 0{,}83333\ldots$ soll in einen Bruch umgewandelt werden:

$$\begin{array}{rrclcr} & 100 & \cdot & 0{,}8\bar{3} & = & 83{,}\bar{3} \\ - & 10 & \cdot & 0{,}8\bar{3} & = & 8{,}\bar{3} \\ \hline \Rightarrow & 90 & \cdot & 0{,}8\bar{3} & = & 75{,}0 \end{array}$$

Division durch 90 liefert das Ergebnis: $0{,}8\bar{3} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$.

Die Vorgehensweise ist also immer dieselbe: durch geeignete Multiplikation mit Zehnerpotenzen und anschließender Subtraktion wird die unendliche Periode entfernt.

Aufgabe 1.2.3
Berechnen Sie mit dem obigen Verfahren einen gewöhnlichen und gekürzten Bruch, der den Wert 0,45555... darstellt.

Antwort: $0{,}4\overline{5} = \boxed{}$.

Lösung:
Multiplikation von $x = 0{,}4\overline{5}$ mit einer geeigneten Zehnerpotenz ergibt

$$10x - x = 4{,}1 \;\Rightarrow\; 9x = \frac{41}{10} \;\Rightarrow\; x = \frac{41}{90} \;.$$

Dieser Bruch ist auch schon maximal gekürzt.

Beim **überschlägigen Rechnen** (wenn man also nur ungefähr die Größe oder das Verhältnis einer Zahl zu anderen Zahlen abschätzen möchte ohne den exakten Wert als Dezimalbruch zu kennen) ist es dagegen hilfreich, statt einer Umwandlung mit dem Hauptnenner zu multiplizieren:

Beispiel 1.2.13

Die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{32}{12}$ und $\frac{12}{15}$ sollen der Größe nach angeordnet werden. Dazu multipliziert man die Brüche mit dem Hauptnenner (hier ist das 60). Die Nenner verschwinden und es entstehen die ganzen Zahlen

$$\frac{2}{3} \cdot 60 \;=\; 2 \cdot 20 \;=\; 40 \;\;,\;\; \frac{32}{12} \cdot 60 \;=\; 32 \cdot 5 \;=\; 160 \;\;,\;\; \frac{12}{15} \cdot 60 \;=\; 12 \cdot 4 \;=\; 48 \;.$$

Anordnen nach Größe ergibt $40 < 48 < 160$. Damit ist dann $\frac{2}{3} < \frac{12}{15} < \frac{32}{12}$ da die Multiplikation der Brüche mit der gleichen Zahl 60 die Anordnung der Brüche nicht verändert (im Abschnitt 3.1 über Ungleichungen und wie man diese umformt).

Aufgabe 1.2.4
Wie lautet die Anordnung der Brüche $\frac{16}{15}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{-3}$, $\frac{60}{90}$ und $\frac{4}{3}$ der Größe nach?

$\boxed{} < \boxed{} = \boxed{} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$.

Lösung:
Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner 180 ergibt die Zahlen 90, 60, -60, 270 und 60, was auf die Anordnung

$$-60 \;<\; 60 \;=\; 60 \;<\; 90 \;<\; 96 \;<\; 120$$

und damit auf

$$\frac{2}{-3} \;<\; \frac{2}{3} \;=\; \frac{60}{90} \;<\; \frac{1}{2} \;<\; \frac{16}{15} \;<\; \frac{4}{3}$$

führt.

1.2.3 Aufgaben

Aufgabe 1.2.5

Kürzen Sie die folgenden Brüche soweit wie möglich:

a. $\dfrac{216}{240} = \boxed{}$.

Lösung:

Wegen $\mathrm{ggT}(216, 240) = 24$ ist $\dfrac{216}{240} = \dfrac{216 : 24}{240 : 24} = \dfrac{9}{10}$.

b. $\dfrac{36}{72} = \boxed{}$.

Lösung:

36 teilt 72, also ist $\dfrac{36}{72} = \dfrac{1}{2}$.

c. $\dfrac{48}{144} = \boxed{}$.

Lösung:

48 teilt 144, also ist $\dfrac{48}{144} = \dfrac{1}{3}$.

d. $\dfrac{-a+2b}{-4b+2a} = \boxed{}$ falls a nicht gleich $\boxed{}$ ist.

Lösung:

Kürzen ergibt $\dfrac{-a+2b}{-4b+2a} = \dfrac{(-1)\cdot(-2b+a)}{2\cdot(-2b+a)} = -\dfrac{1}{2}$. Der Bruch an sich ist nur für $a \neq 2b$ definiert.

Aufgabe 1.2.6

Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke für geeignete Zahlen a, b, x, y so weit wie möglich:

a. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{4} = \boxed{}$.

Lösung:

Summieren über den Hauptnenner ergibt $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{28}{56} - \dfrac{16}{56} + \dfrac{21}{56} + \dfrac{42}{56} = \dfrac{75}{56}$ da $\mathrm{ggT}(2, 7, 8, 4) = 56$ ist.

b. $\dfrac{3}{13} : \dfrac{7}{26} = \boxed{}$.

Lösung:

Die Division durch einen Bruch ist das Gleiche wie die Multiplikation mit seinem Kehrwert: $\dfrac{3}{13} : \dfrac{7}{26} = \dfrac{3}{13} \cdot \dfrac{26}{7} = \dfrac{3\cdot 26}{13\cdot 7} = \dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 7} = \dfrac{6}{7}$.

c. $\left(1{,}\bar{4}\cdot 3 - \dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{6}{7} = \boxed{}$.

Lösung:

Umwandeln des Dezimalausdrucks in einen Bruch ergibt $\left(1{,}\bar{4}\cdot 3 - \dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{6}{7} = (1{,}\bar{4}\cdot 18 - 3)\cdot\dfrac{1}{7} = (26-3)\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{23}{7}$.

Aufgabe 1.2.7
Wandeln Sie die folgenden unendlichen periodischen Dezimalbrüche in Brüche um und kürzen Sie soweit wie möglich:

a. $0{,}\overline{4}$ = $\boxed{}$.

b. $0{,}\overline{23}$ = $\boxed{}$.

c. $0{,}12\overline{34}$ = $\boxed{}$.

d. $0{,}\overline{9}$ = $\boxed{}$.

Lösung:
Mithilfe des Umformungstricks für unendliche Dezimalbrüche erhält man diese Lösungen:

- $x = 0{,}\overline{4}$, also $10x - x = 4 \;\Rightarrow\; 9x = 4 \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{9}$,
- $x = 0{,}\overline{23}$, also $100x - x = 23 \;\Rightarrow\; 99x = 23 \;\Rightarrow\; x = \frac{23}{99}$,
- $x = 0{,}12\overline{34}$, also $100x - x = 12{,}22 \;\Rightarrow\; 99x = \frac{1222}{100} \;\Rightarrow\; x = \frac{1222}{9900} = \frac{611}{4950}$,
- $x = 0{,}\overline{9}$, also $10x - x = 9 \;\Rightarrow\; 9x = 9 \;\Rightarrow\; x = 1$.

Beim letzten Aufgabenteil ist zu beachten, dass $1 = 1{,}000\ldots$ und $1 = 0{,}999\ldots = 0{,}\overline{9}$ zwei verschiedene Dezimalbruchdarstellungen für die gleiche Zahl sind.

1.3 Umformen von Termen

1.3.1 Einführung

Was genau sind Terme?

Info 1.3.1

Terme sind Rechenausdrücke, die eine Kombination von Zahlen, Variablen, Klammern und geeigneten Rechenoperationen darstellen.

Terme kann man auf zwei Arten interpretieren:

- Als funktionale Ausdrücke: Wenn man für die im Term auftretenden Variablen konkrete Zahlen einsetzt, so ergibt der Term einen Zahlenwert. Beispielsweise ist $x + x - 1$ ein Term; sobald man $x = 2$ einsetzt erhält man den Wert 3. Auch $2x - 1$ ist ein Term, dieser Term kann zu $x + x - 1$ umgeformt werden und ergibt daher den gleichen Wert, wenn man $x = 2$ einsetzt. Als symbolischer Ausdruck an sich ist $x + x - 1$ verschieden von $2x - 1$, als funktionaler Ausdruck sind beide aber gleich: Egal welchen Wert man für x einsetzt, beide Terme ergeben immer das gleiche Endergebnis. Ein Term kann auch an sich einen Wert darstellen, wenn keine Variablen auftreten. Beispielsweise ist $3 \cdot (2 + 4)$ ein Term mit Wert 18.
- Als Auswertungsvorschrift: Ein Term kann als eine Art Anleitung interpretiert werden, wie man aus gegebenen Werten (in den Variablen) einen neuen Wert berechnet. Beispielsweise kann man den Term $x^2 - 1$ lesen als „Quadriere den Wert in x und ziehe Eins ab“. Er ist verschieden von dem Term $(x + 1)(x - 1)$, auch wenn gleiche Werte herauskommen. Der zweite Term beschreibt die Auswertung als „Addiere Eins zu x und multipliziere mit dem Wert, der entsteht, wenn man von x Eins abzieht“. Beide Terme sind mathematisch gleich. Man schreibt $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, stellt aber zwei verschiedene Möglichkeiten dar, den Wert auszurechnen. Je nach Problemstellung kann einer der beiden Terme besser geeignet sein, um das Problem zu lösen.

1.3.2 Termumformungen

Interessant wird der Umgang mit Termen, wenn die Frage der Gleichheit zweier Termausdrücke gestellt wird oder komplizierte Terme vereinfacht werden sollen.

Info 1.3.2

Zwei Terme sind **gleich**, wenn Sie durch zulässige Termumformungen ineinander überführt werden können. Komplizierte Terme können durch die Anwendung von Rechengesetzen vereinfacht werden. Hierbei sind zu beachten:

1. Es gilt Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung.
2. Beim Rechnen mit Klammern gelten die Distributivgesetze:
$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c\,, \quad (a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c\,.$$
3. Mit $d \neq 0$ gilt: $(a \pm b) : d = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d}$.
4. Bei geschachtelten Klammerausdrücken werden zunächst die inneren und dann die äußeren Klammern unter Beachtung der Rechengesetze aufgelöst.

Aufgabe 1.3.1
Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie die Terme soweit möglich:

a. $(1-a) \cdot (1-b) \;=\; \boxed{}\;.$
Lösung:
$$(1-a) \cdot (1-b) \;=\; 1 - a - b + ab\,.$$

b. $5a - (2b - (2a - 7b) + 4a) - 3b \;=\; \boxed{}\;.$
Lösung:
$$5a - (2b - (2a - 7b) + 4a) - 3b \;=\; 5a - 2b + 2a - 7b - 4a - 3b \;=\; 3a - 12b\,.$$

Info 1.3.3

Die **binomischen Formeln** lauten:
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\,.$$

Für a und b können dabei sowohl Zahlen wie auch ganze Terme auftreten:

Beispiel 1.3.4

Hier ein paar typische Anwendungen der binomischen Formeln:

- $(1+2x)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x + (2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$.
- $(1+2x)(1-2x) = 1^2 - (2x)^2 = 1 - 4x^2$.
- $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$, daran kann man ablesen, dass $x^4 - 1$ nur die Nullstellen $x = 1$ und $x = -1$ in den reellen Zahlen besitzt.

- $(1+x+y)^2 = ((1+x)+y)^2 = (1+x)^2 + 2(1+x)y + y^2 = 1 + 2x + x^2 + 2y + 2xy + y^2$.

Aufgabe 1.3.2
Wenden Sie die 2. binomische Formel an, um den Term zu vereinfachen:

$(-3x+4)(4-3x) \;=\; \boxed{}$.

Lösung:

$$(-3x+4)(4-3x) \;=\; (4-3x)(4-3x) \;=\; 16 - 24x + 9x^2 \;.$$

Beispiel 1.3.5

Die binomischen Formeln können zum geschickten Umformen von quadratischen Ausdrücken verwendet werden. Dies ist sehr hilfreich, wenn Zahlenquadrate ohne Taschenrechner auszurechnen sind. Dabei zerlegt man Dies ist sehr hilfreich, wenn Zahlenquadrate ohne Taschenrechner auszurechnen sind. Dabei zerlegt man die zu quadrierende Zahl in eine einfache Zahl (meist eine Zehnerpotenz) und den Rest:

$$\begin{aligned} 103^2 &= (100+3)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 3 + 3^2 = 10609 \;, \\ 49^2 &= (50-1)^2 = 50^2 - 2\cdot 50\cdot 1 + 1^2 = 2401 \;, \\ 61^2 - 59^2 &= (61-59)(61+59) = 2\cdot 120 = 240 \;. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.3
Berechnen Sie mit dieser Technik $1005^2 \;=\; \boxed{}$.

Lösung:

$$1005^2 \;=\; (1000+5)^2 \;=\; 1000000 + 2\cdot 1000\cdot 5 + 25 \;=\; 1010025 \;.$$

Im folgenden Aufgabenabschnitt können Sie die Umformungstechniken an zahlreichen Aufgaben einüben.

1.3.3 Aufgaben

Aufgabe 1.3.4
Vereinfachen Sie die folgenden Terme für geeignete Zahlen a, b, x, y, z:

a. $\dfrac{3x - 6xy^2 + 4xyz}{-2x} = \boxed{}$.
Lösung:

$$\frac{3x - 6xy^2 + 4xyz}{-2x} = -\frac{3}{2} + 3y^2 - 2yz \; .$$

b. $(3a - 2b) \cdot (4a - 6) = \boxed{}$.
Lösung:

$$(3a - 2b) \cdot (4a - 6) = 12a^2 - 18a - 8ab + 12b \; .$$

c. $(2a + 3b)^2 - (3a - 2b)^2 = \boxed{}$.
Lösung:

$$\begin{aligned} (2a + 3b)^2 - (3a - 2b)^2 &= (4a^2 + 12ab + 9b^2) - (9a^2 - 12ab + 4b^2) \\ &= -5a^2 + 24ab + 5b^2 \; . \end{aligned}$$

d. $\dfrac{3a}{3a + 6b} + \dfrac{2b}{a + 2b} = \boxed{}$.
Lösung:
Summieren über den Hauptnenner ergibt $\dfrac{3a}{3a+6b} + \dfrac{2b}{a+2b} = \dfrac{3a}{3a+6b} + \dfrac{6b}{3a+6b} = \dfrac{3a+6b}{3a+6b} = 1$.

Aufgabe 1.3.5
Diese Aufgaben erfordern etwas mehr Durchhaltevermögen. Vereinfachen Sie:

a. $\frac{1}{2}x(4x + 3y) + \frac{3}{2}(5x^2 - 6xy) = \boxed{}$.
Lösung:

$$\frac{1}{2}x(4x + 3y) + \frac{3}{2}(5x^2 - 6xy) = 2x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{15}{2}x^2 - 9xy = \frac{19}{2}x^2 - \frac{15}{2}xy \; .$$

b. $\dfrac{18x^2 - 48xy + 32y^2}{12y - 9x} \cdot \dfrac{18x + 24y}{9x^2 - 16y^2} = \boxed{}$.
Lösung:
Vereinfachen des Ausdrucks ergibt

$$\begin{aligned} \frac{18x^2 - 48xy + 32y^2}{12y - 9x} \cdot \frac{18x + 24y}{9x^2 - 16y^2} &= 4 \cdot \frac{9x^2 - 24xy + 16y^2}{4y - 3x} \cdot \frac{3x + 4y}{9x^2 - 16y^2} \\ &= 4 \cdot \frac{(3x - 4y)^2}{4y - 3x} \cdot \frac{3x + 4y}{9x^2 - 16y^2} \\ &= -4 \cdot \frac{(3x - 4y)^2}{3x - 4y} \cdot \frac{3x + 4y}{(3x + 4y)(3x - 4y)} = -4 \; . \end{aligned}$$

c. $(a^2+5a-2)(2a^2-3a-9)-\left(\frac{1}{2}a^2+3a-5\right)(a^2-4a+3) = \boxed{}$
.
Lösung:

$$(a^2+5a-2)(2a^2-3a-9)-\left(\frac{1}{2}a^2+3a-5\right)(a^2-4a+3)$$

$$\begin{aligned} &= 2a^4+10a^3-4a^2-3a^3-15a^2+6a-9a^2-45a+18 \\ &\quad -\left(\frac{1}{2}a^4+3a^3-5a^2-2a^3-12a^2+20a+\frac{3}{2}a^2+9a-15\right) \\ &= \frac{3}{2}a^4+6a^3-\frac{25}{2}a^2-68a+33\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.6
Berechnen Sie mit Hilfe einer binomischen Formel:

a. $43^2 = \boxed{}$.
Lösung:

$$43^2 = (40+3)^2 = 40^2+2\cdot 40\cdot 3+3^2 = 1600+240+9 = 1849\ .$$

b. $97^2 = \boxed{}$.
Lösung:

$$97^2 = (90+7)^2 = 90^2+2\cdot 90\cdot 7+7^2 = 8100+1260+49 = 9409\ .$$

c. $41^2-38^2 = \boxed{}$.
Lösung:

$$41^2-38^2 = (41+38)(41-38) = 79\cdot 3 = 237\ .$$

Aufgabe 1.3.7
Wenden Sie eine binomische Formel an, um das Produkt aufzulösen, und fassen Sie das Ergebnis zusammen:

a. $(-5xy-2)^2 = \boxed{}$.
Lösung:

$$(-5xy-2)^2 = (-1)^2\cdot(5xy+2)^2 = 25x^2y^2+20xy+4\ .$$

b. $(-6ab+7bc)(-6ab-7bc) = \boxed{}$.
Lösung:

$$(-6ab+7bc)(-6ab-7bc) = (-6ab)^2-(7bc)^2 = 36a^2b^2-49b^2c^2\ .$$

c. $(-6ab+7bc)(-6ab+7bc) = \boxed{}$.
Lösung:

$$(-6ab + 7bc)(-6ab + 7bc) = (-6ab + 7bc)^2 = 36a^2b^2 - 84ab^2c + 49b^2c^2 \;.$$

d. $(x^2 + 3)(-x^2 - 3) = \boxed{}$.
Lösung:

$$(x^2 + 3)(-x^2 - 3) = -(x^2 + 3)^2 = -x^4 - 6x^2 - 9 \;.$$

Aufgabe 1.3.8
Faktorisieren Sie die folgenden Terme so weit wie möglich mit Hilfe einer binomischen Formel:

a. $4x^2 + 12xy + 9y^2 = \boxed{}$.
Lösung:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2 \;.$$

b. $64a^2 - 96a + 36 = \boxed{}$.
Lösung:

$$64a^2 - 96a + 36 = (8a - 6)^2 \;.$$

c. $25x^2 - 16y^2 + 15x + 12y = \boxed{}$.
Lösung:

$$\begin{aligned} 25x^2 - 16y^2 + 15x + 12y &= (5x)^2 - (4y)^2 + 3 \cdot (5x + 4y) \\ &= (5x + 4y)(5x - 4y) + 3 \cdot (5x + 4y) \\ &= (5x + 4y)(5x - 4y + 3) \;. \end{aligned}$$

1.3.4 Summen- und Produktdarstellung

Mathematische Ausdrücke und Terme kann man auf verschiedene Arten notieren, die jeweils bestimmte Vor- und Nachteile haben. Dabei unterscheidet man im Wesentlichen, welche mathematischen Operationen zuletzt im Ausdruck ausgeführt werden. Die wichtigsten Typen sind Summen- und Produktdarstellungen.

Info 1.3.6

Bei einer **Produktdarstellung** ist die Produktoperation die zuletzt ausgeführte Operation. Wegen der Punkt-vor-Strich-Regel erreicht man diese Form nur dadurch, dass man Klammern um die Faktoren setzt. Aus der Produktdarstellung kann man besonders einfach ablesen, wann der fragliche Term den Wert Null annimmt. Das passiert genau dann, wenn einer der Faktoren Null wird.

Beispielsweise wird der Term $(x-1)\cdot(x-2)$ zu Null, falls $x=1$ oder $x=2$ eingesetzt wird. Für alle anderen Werte für x ist er nicht Null.

Info 1.3.7

Bei einer **Summendarstellung** ist Addition bzw. Subtraktion die zuletzt ausgeführte Operation. Wegen der Punkt-vor-Strich-Regel sind Terme ohne Klammern automatisch in dieser Form. In der Summendarstellung lässt sich das asymptotische Verhalten eines Ausdrucks besonders leicht ablesen. Mit dem asymptotischen Verhalten einer Funktion wird beschrieben, wie sich die Funktion verhält, wenn man zu betragsmäßig immer größeren Werten der Variable x bis an die im Unendlichen liegenden Grenzen des Definitionsbereichs herangeht. Bei Polynomen z.B. wird es nur durch den Term mit dem höchsten Exponenten festgelegt.

Um zwischen beiden Darstellungen zu wechseln, gibt es mehrere Techniken.

Info 1.3.8

Beim **Ausmultiplizieren** werden Faktoren multipliziert, indem jeder Summand eines Faktors mit jedem Summanden des anderen Faktors multipliziert und die Ergebnisse summiert werden. Liegen mehr als zwei Faktoren vor, so sollten diese schrittweise (immer nur zwei miteinander) ausmultipliziert werden.

Beispiel 1.3.9

Die Funktion $f(x)=(x+3)(x-2)(x+1)$ multipliziert man wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1) \\
&= (x^2+3x-2x-6)\cdot(x+1) \\
&= (x^2+x-6)\cdot(x+1) \\
&= x^3+x^2-6x\ +\ x^2+x-6 \\
&= x^3+2x^2-5x-6\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.9
Multiplizieren Sie diese Terme vollständig aus und fassen Sie zusammen. Geben Sie das asymptotische

Verhalten des Gesamtausdrucks an:

a. $f(x) = (3-x)(x+1) =$ $\boxed{}$.
Lösung:

$$(3-x)(x+1) = 3x + 3 - x^2 - x = 3 + 2x - x^2$$

Beschreibung des asymptotischen Verhaltens:
Wenn x gegen ∞ strebt, dann strebt $f(x)$ gegen $\boxed{}$.
Lösung:
Die Asymptotik kann, wenn sie sich in eindeutiger Weise ergibt, abkürzend mit dem Symbol „lim" bezeichnet werden:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \, .$$

Wenn x gegen $-\infty$ strebt, dann strebt $f(x)$ gegen $\boxed{}$.

Lösung:
In diesem Fall ergibt sich

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \, .$$

b. $(x+4)(2-x)(x+2) =$ $\boxed{}$.
Lösung:

$$(x+4)(2-x)(x+2) = (x+4)(4-x^4) = 4x - x^3 + 16 - 4x^2 = 16 + 4x - 4x^2 - x^3$$

c. $(3-x)(x+1)^2 =$ $\boxed{}$.
Lösung:

$$(3-x)(x+1)^2 = (3-x)(x^2+2x+1) = 3x^2 + 6x + 3 - x^3 - 2x^2 - x = 3 + 5x + x^2 - x^3$$

d. $t \cdot (t+1) \cdot (t^2+t+1) =$ $\boxed{}$.
Lösung:

$$t \cdot (t+1) \cdot (t^2+t+1) = (t^2+t)(t^2+t+1) = t^4 + t^3 + t^2 + t^3 + t^2 + t = t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t$$

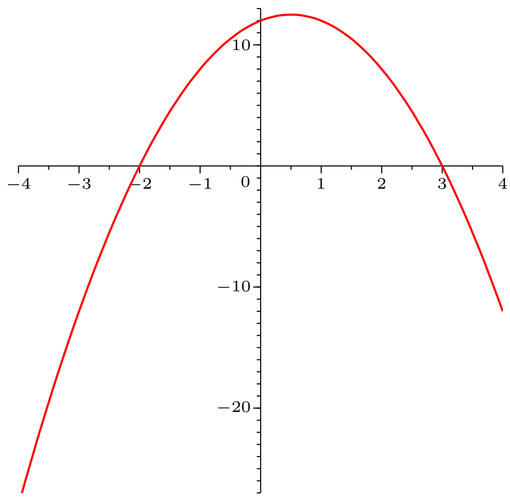
Lösung:
Ausmultiplizieren ergibt $f(x) = (3-x)(x+1) = -x^2 + 2x + 3$. Wegen des führenden Terms $-x^2$ besitzt diese Funktion als Graph eine nach unten geöffnete Parabel mit den Asymptoten $-\infty$ in beide Richtungen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \, , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \, .$$

In den anderen Aufgabenteilen ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
(x+4)(2-x)(x+2) &= -x^3 - 4x^2 + 4x + 16 \, , \\
(3-x)(x+1)^2 &= (3-x)(x^2+2x+1) = -x^3 + x^2 + 5x + 3 \, , \\
t \cdot (t+1) \cdot (t^2+t+1) &= t \cdot (t^3 + 2t^2 + 2t + 1) = t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t \, .
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.10
Dieser Graph gehört zu einem Polynom $g(x)$ zweiten Grades:



Graph von $g(x)$.

a. Der Graph besitzt zwei Nullstellen x_1 und x_2, die daraus entstehenden Faktoren ergeben ausmultipliziert das Polynom $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) =$ $\boxed{}$.

b. Dieses Polynom gehört nicht zum Graph, denn an der Stelle $x = 0$ besitzt $f(x)$ den Wert $\boxed{}$, aber $g(x)$ besitzt laut Graph den Wert $\boxed{}$. Diesen Unterschied kann man korrigieren, indem man $g(x) = c \cdot f(x)$ setzt mit dem Vorfaktor $c =$ $\boxed{}$.

c. Zusammensetzen ergibt schließlich $g(x) =$ $\boxed{}$ in Produktdarstellung.

Lösung:
Der Graph zeigt die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$, die daraus entstehenden Faktoren ergeben ausmultipliziert das Polynom $f(x) = (x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$. An der Stelle $x = 0$ ist $f(0) = -6$ aber $g(0) = 12$ laut Graph. Dies kann korrigiert werden, indem man noch den Faktor -2 hinzunimmt. Insgesamt erhält man $g(x) = -2x^2 + 2x + 12$.

Aufgabe 1.3.11
Multiplizieren Sie vollständig aus: $(a + 2b + 3c)^2 =$ $\boxed{}$.

Lösung:
Am einfachsten multipliziert man jeden Summanden links mit jedem Summanden rechts und fasst anschließend zusammen:

$$\begin{aligned}(a + 2b + 3c)^2 &= (a + 2b + 3c) \cdot (a + 2b + 3c) \\ &= a^2 + 2ab + 3ac + 2ab + 4b^2 + 6bc + 3ac + 6bc + 9c^2 \\ &= a^2 + 4ab + 6ac + 4b^2 + 12bc + 9c^2 \,.\end{aligned}$$

1.4 Potenzen und Wurzeln

1.4.1 Potenzrechnung und Wurzeln

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit Ausdrücken der Form a^s. Hierbei sei $a \in \mathbb{R}$. Aber für welche Zahlen s kann die Potenz sinnvoll definiert werden?

Potenzen mit natürlichem Exponenten werden folgendermaßen definiert:

Info 1.4.1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die n-te **Potenz** einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist das n-fache Produkt der Zahl a mit sich selbst:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} .$$

a wird als **Basis** und n als **Exponent** bezeichnet.

Dabei gibt es einige besondere Fälle, die man am besten auswendig können sollte:

Info 1.4.2

Ist der Exponent Null, so ist der Wert der Potenz gleich Eins, also beispielsweise $4^0 = 1$ aber auch $0^0 = 1$. Ist dagegen die Basis Null und der Exponent $n > 0$, so ist $0^n = 0$. Ist die Basis -1, so ist

$$(-1)^n \ = \ -1 \text{ falls Exponent ungerade} \ , \ \ (-1)^n \ = \ 1 \text{ falls Exponent gerade} .$$

Beispiel 1.4.3

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \ , \ \ (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 \ , \ \ \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} .$$

Viele Potenzen können mit obiger Rechenregel berechnet werden – aber wie sieht es mit 2^{-2} aus?

Info 1.4.4

Potenzen mit negativen natürlichen Exponenten werden definiert durch die Formel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}, a \neq 0$.

Folglich berechnet sich $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Analog ergibt sich $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 1.4.1
Welche Zahlenwerte haben diese Potenzen?

a. $5^3 = \boxed{}$.

Lösung:

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125 \ .$$

b. $(-1)^{1001} = \boxed{}$.

Lösung:

$$(-1)^{1001} = -1 \text{ da Exponent ungerade} \ .$$

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \boxed{}$.

Lösung:

$$(-\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8 \ .$$

d. $\left((-3)^2\right)^3 = \boxed{}$.

Lösung:

$$\left((-3)^2\right)^3 = 9^3 = 729 \ .$$

Aber schon bei einem rationalen Exponenten der Form $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, muss die Definition wieder erweitert werden, um zum Beispiel $4^{\frac{1}{2}}$ berechnen zu können. Diese Potenz lässt sich auch in Wurzelschreibweise umwandeln und man erhält $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$. Allgemein gilt:

Info 1.4.5

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Die n-te Wurzel besitzt die Potenzschreibweise $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Dies führt auf die Umkehrung der Potenzrechnung, das Wurzelziehen.

Info 1.4.6

Die n-te **Wurzel** einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$, ist diejenige Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b \Longrightarrow b^n = a\ .$$

a wird als **Wurzelbasis** oder **Radikand** und n als **Wurzelexponent** bezeichnet.
Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$ und es heißen $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ die **Quadratwurzel** und $\sqrt[3]{a}$ die **Kubikwurzel** von a.

Beispiel 1.4.7

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4\ ,\ \ 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3\ .$$

Info 1.4.8

Für $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ gelten die folgenden **Wurzelrechenregeln**:

1. Zwei Wurzeln mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem die Wurzel aus dem Produkt der Radikanden gezogen wird, der Wurzelexponent bleibt unverändert:
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ .$$

2. Zwei Wurzeln mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem die Wurzel aus dem Quotienten der Radikanden gezogen wird, der Wurzelexponent bleibt unverändert:
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0\ .$$

Aber wie kann die Zahl $\left(\sqrt[10]{4}\right)^5$ berechnet werden?

Info 1.4.9

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

1. Die m-te Potenz einer Wurzel bildet man, indem die m-te Potenz des Radikanden gebildet wird, der Wurzelexponent bleibt unverändert:
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \ .$$
2. Die **m-te Wurzel aus einer Wurzel** bildet man, indem die Wurzelexponenten multipliziert werden und die Basis gleich bleibt (**Radizieren einer Wurzel**).
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \ .$$

Somit erhält man

$$\sqrt[10]{4^5} = (4^5)^{\frac{1}{10}} = 4^{\frac{5}{10}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2 \ .$$

Beispiel 1.4.10

Die Berechnung einer allgemeinen Potenz mit rationalem Exponenten sieht dann folgendermaßen aus:
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{16}}} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} \ .$$

Die für Potenzen mit reeller Basis und rationalem Exponenten gültigen Rechenregeln werden unter der Bezeichnung Potenzgesetze zusammengefasst. Die Regeln differieren in Abhängigkeit von der Betrachtung von Potenzen mit derselben Basis bzw. demselben Exponenten.

Aufgabe 1.4.2
Berechnen Sie die folgenden Wurzeln (es kommen hier stets ganze Zahlen heraus):

a. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = \boxed{}$.

Lösung:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = (3^5)^{\frac{1}{5}} = 3^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 3 \ .$$

b. $\sqrt[4]{256} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\sqrt[4]{256} = \left(2^8\right)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4\ .$$

1.4.2 Rechnen mit Potenzen

Die folgenden Rechenregeln ermöglichen das Umformen und Vereinfachen von Ausdrücken, die Potenzen oder Wurzeln enthalten:

Info 1.4.11

Für $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$ gelten die **Potenzgesetze**:

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p\ ,\quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p\ ,\quad a^p \cdot a^q = a^{p+q}\ ,\quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}\ ,\quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}\ .$$

Insbesondere ist zu beachten, dass im Allgemeinen $(a^p)^q \neq a^{p^q}$ ist, d. h. bei mehrfachem Potenzieren sollten Klammern gesetzt werden. Zum Beispiel ist $\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$, aber $2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$.

Beispiel 1.4.12

Sind keine Klammern gesetzt, so wird a^{p^q} als $a^{(p^q)}$ interpretiert, also beispielsweise

$$\begin{aligned} 2^{3^4} &= 2^{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = 2^{81} = 2417851639229258349412352 \text{ (Exponent zuerst ausgewertet)} \\ (2^3)^4 &= 8^4 = 4096 \text{ (Klammer zuerst ausgewertet)}\ . \end{aligned}$$

Alternativ könnte man auch mit den Potenzgesetzen $(2^3)^4 = 2^{(3\cdot 4)} = 2^{12} = 4096$ ausrechnen.

Aufgabe 1.4.3
Die folgenden Ausdrücke kann man mit Hilfe der Potenzgesetze vereinfachen:

a. $3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^{-1} = \boxed{}$.

Lösung:

$$3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^{-1} = 3^{3+5-1} = 3^7 \,.$$

b. $4^2 \cdot 3^2 = \boxed{}$.

Lösung:

$$4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2 \,.$$

Beim Vergleichen von Potenzen und Wurzeln ist Vorsicht geboten: Nicht nur die Zahlenwerte, auch die Vorzeichen von Exponent und Basis haben einen Einfluss darauf, ob der Wert der Potenz groß oder klein ist:

Beispiel 1.4.13

Bei positiver Basis und negativen Exponenten nimmt der Wert der Potenz ab, wenn man die Basis vergrößert:

$$\begin{aligned} 2^{-1} &= \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ 3^{-1} &= \frac{1}{3} = 0{,}\bar{3} \\ 4^{-1} &= \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Bei negativer Basis wechselt dagegen das Vorzeichen der Potenz, wenn man den Exponenten erhöht:

$$\begin{aligned} (-2)^1 &= -2 \\ (-2)^2 &= 4 \\ (-2)^3 &= -8 \\ (-2)^4 &= 16 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Das Ziehen von Wurzeln (bzw. Potenzieren mit einer positiven Zahl kleiner Eins) verkleinert eine Basis > 1, aber vergrößert eine Basis < 1:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1{,}414\ldots < 2 \\ \sqrt{3} &= 1{,}732\ldots < 3 \\ \sqrt{0{,}5} &= 0{,}707\ldots > 0{,}5 \\ \sqrt{0{,}\bar{3}} &= 0{,}577\ldots > 0{,}\bar{3} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4.4

Ordnen Sie diese Potenzen der Größe nach an unter Beachtung der Vorzeichen von Basen und Exponenten: 2^3, 2^{-3}, 3^2, $(-3)^2$, $(-3)^{-2}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$:

$\boxed{} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{} = \boxed{}$.

Lösung:
Hier gibt es mehrere Wege zur richtigen Lösung. Beispielsweise lohnt es sich, zunächst alle Potenzen mit Drei zu potenzieren (analog zur Rechnung in Beispiel 1.2.13 auf Seite 25). Potenzieren mit der Drei ist dabei erlaubt, weil es eine ungerade Zahl ist, die als Exponent das Vorzeichen nicht aufhebt. Potenzieren mit der Zwei würde dagegen die richtige Anordnung der Zahlen aufheben. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(2^3)^3 &= 2^{3\cdot 3} = 2^9 = 512 \\
(2^{-3})^3 &= 2^{(-3)\cdot 3} = 2^{-9} = \frac{1}{512} \text{ da Exponent negativ} \\
(3^2)^3 &= 9^3 = 81\cdot 9 = 729 \\
((-3)^2)^3 &= 9^3 = 729 \text{ da Exponent gerade} \\
((-3)^{-2})^3 &= \frac{1}{((-3)^2)^3} = \frac{1}{729} \\
(3^{\frac{1}{2}})^3 &= 3^{\frac{3}{2}} > 3 \text{ (da Exponent größer als Eins)} \\
(2^{\frac{1}{3}})^3 &= 2\,.
\end{aligned}
$$

Vergleichen dieser Werte führt auf die Anordnung

$$(-3)^{-2} < 2^{-3} < 2^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{2}} < 2^3 < 3^2 = (-3)^2\,.$$

1.4.3 Aufgaben

Aufgabe 1.4.5
Berechnen Sie die folgenden Potenzen:

a. $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \boxed{}$.

Lösung:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625} \ .$$

b. $\left(2^{-2}\right)^{-3} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\left(2^{-2}\right)^{-3} = 2^{(-2)\cdot(-3)} = 2^6 = 64 \ .$$

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = \boxed{}$.

Lösung:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \ .$$

Aufgabe 1.4.6
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mit den Potenzregeln und durch Kürzen, die Potenzen brauchen Sie dabei nicht auszuwerten:

a. $\frac{(-2)^7}{(-2)^5} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\frac{(-2)^7}{(-2)^5} = (-2)^{7-5} = (-2)^2 \ .$$

b. $6^2 \cdot 3^{-2} = \boxed{}$.

Lösung:

$$6^2 \cdot 3^{-2} = 6^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(6 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = 2^2 \ .$$

c. $\frac{64^3}{8^3} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\frac{64^3}{8^3} = \left(\frac{64}{8}\right)^3 = 8^3 \; .$$

d. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \; .$$

Aufgabe 1.4.7
Berechnen Sie die folgenden Wurzeln (es kommen hier stets ganze Zahlen heraus):

a. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \; .$$

b. $\sqrt[3]{343} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7 \; .$$

Aufgabe 1.4.8
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und berechnen Sie den Zahlenwert als gekürzten Bruch ohne Potenzausdrücke:

a. $\frac{3^3 \cdot 6^3}{9 \cdot 2^3 \cdot 4^3} = \boxed{}$.

Lösung:

$$\frac{3^3 \cdot 6^3}{9 \cdot 2^3 \cdot 4^3} = \frac{3^4 \cdot 2^3}{2^3 \cdot 4^3} = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64} \; .$$

b. $3^2 \cdot 9^{-3} \cdot 27^6 \cdot 27^{-2} = \boxed{}$.

Lösung:

$$3^2 \cdot 9^{-3} \cdot 27^{-2} \cdot 27^6 = 3^{2+2\cdot(-3)+3\cdot 6-6} = 3^8 \; .$$

1.5 Abschlusstest

1.5.1 Abschlusstest Kapitel 1

Aufgabe 1.5.1
Kreuzen Sie an, ob diese mathematischen Ausdrücke jeweils Gleichungen, Ungleichungen, Terme oder Zahlen darstellen (Mehrfachnennung ist möglich):

Mathematischer Ausdruck	Gleichung	Ungleichung	Term	Zahl
$1+\frac{1}{2}-3(3-\frac{1}{2})$	☐	☐	☐	☐
$5^x - x^5$	☐	☐	☐	☐
$x^2 < \sqrt{x}$	☐	☐	☐	☐
$xyz-1$	☐	☐	☐	☐
$b^2 = 4ac$	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1.5.2
Vereinfachen Sie den Doppelbruch $\frac{3+\frac{3}{2}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}$ zu einem gekürzten Einfachbruch: ☐

Aufgabe 1.5.3
Multiplizieren Sie diesen Term vollständig aus und fassen Sie zusammen:

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2) =$ ☐ .

Aufgabe 1.5.4
Wenden Sie jeweils eine binomische Formel an, um den Term umzuformen:

a. $(x-3)(x+3) =$ ☐ .

b. $(x-1)^2 =$ ☐ .

c. $(2x+4)^2 =$ ☐ .

Aufgabe 1.5.5
Schreiben Sie diesen Potenz- und Wurzelausdruck als einfache Potenz mit einem rationalen Exponenten:

$\frac{x^3}{(\sqrt{x})^3} =$ ☐ .

2 Gleichungen in einer Unbekannten

Modulübersicht

In diesem Modul wird ein Überblick über die mathematischen Grundlagen zum elementaren Rechnen gegeben und die Notation eingeführt und erklärt.

2.1 Einfache Gleichungen

2.1.1 Einführung

Info 2.1.1

Eine **Gleichung** ist ein Ausdruck der Form

$$\text{Linke Seite} = \text{Rechte Seite}\ ,$$

wobei auf beiden Seiten der Gleichungen mathematische Ausdrücke stehen. In diesen Ausdrücken kommen in der Regel Variablen vor (z.B. x). In Abhängigkeit von den Variablen ist eine Gleichung erfüllt, falls auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der gleiche Wert steht. Sie ist nicht erfüllt, falls ungleiche Werte auf beiden Seiten stehen.

Gleichungen beschreiben Zusammenhänge zwischen Ausdrücken oder stellen ein zu lösendes Problem dar. Eine Gleichung an sich ist nicht wahr oder falsch, sondern sie wird durch manche Variablenwerte erfüllt und durch andere Werte nicht. Um Wahrheit oder Falschheit für solche Werte zu prüfen, müssen diese in die Gleichung eingesetzt werden. Beide Seiten der Gleichung wertet man dann zu konkreten Zahlen aus. Die Gleichung wird durch die eingesetzten Werte erfüllt, falls die ausgewerteten Zahlen auf den beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen:

Beispiel 2.1.2

Die Gleichung $2x - 1 = x^2$ besitzt die rechte Seite x^2 und die linke Seite $2x - 1$. Einsetzen von $x = 1$ ergibt den Zahlenwert 1 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, also ist $x = 1$ eine Lösung dieser Gleichung. Dagegen ist $x = 2$ keine Lösung, denn eine Auswertung ergibt 4 auf der linken Seite und 3 auf der rechten Seite der Gleichung.

Info 2.1.3

Die **Lösungsmenge** L einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen, die, wenn sie für die Variable (z.B. x) in der Gleichung eingesetzt wird, die Beziehung

$$\text{Linke Seite} = \text{Rechte Seite}\ ,$$

erfüllt.

Typische Aufgabenstellungen für Gleichungen sind

- Angabe der Lösungen einer Gleichung, d.h. aller Werte für die Unbestimmten, welche die Gleichung erfüllen,

- Umformen der Gleichung, insb. Auflösen nach den Variablen,
- das Finden einer Gleichung, die ein textuell gegebenes Problem beschreibt.

Beispiel 2.1.4

Eine Spareinlage soll so konzipiert werden, dass eine feste Rendite pro Jahr entsteht. Ziel der Bank ist es zu erreichen, dass der Sparer bei einer Geldeinlage für 5 Jahre genau 600 Euro mehr Rendite bekommt, als wenn er es nur 2 Jahre angelegt hätte.

Die Aufgabenstellung wird zunächst in eine Gleichung übersetzt, wobei die Variable r für die Rendite pro Jahr stehen soll. Die Gleichung lautet dann $5 \cdot r = 2 \cdot r + 600$ und drückt aus, dass fünf Renditeauszahlungen (linke Seite der Gleichung) den gleichen Wert ergeben wie zwei Auszahlungen plus 600 (die Einheit Euro lässt man in der Rechnung dann weg).

Diese Gleichung kann sehr einfach nach r aufgelöst werden, indem man auf beiden Seiten $2r$ abzieht. Dann lautet die Gleichung $3r = 600$ und Teilen durch 3 ergibt die Lösung $r = 200$.

Die Bank muss also eine Rendite von 200 Euro im Jahr anbieten, damit das geforderte Sparziel erfüllt ist.

Info 2.1.5

Zwei Gleichungen sind **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Eine **Äquivalenzumformung** ist eine spezielle Umformung, welche die Gleichung, aber nicht ihre Lösungsmenge verändert. Wichtige Äquivalenzumformungen sind

- Addieren/Subtrahieren von Termen auf beiden Seiten der Gleichung,
- Vertauschung der beiden Seiten der Gleichung,
- Umformen von Termen auf einer Seite der Gleichung,
- bekannte Zusammenhänge einsetzen.

Die folgenden Umformungen sind nur dann Äquivalenzumformungen, wenn der verwendete Term nicht Null ist (was von den Variablen abhängen kann):

- Multiplikation/Division mit einem Term (dieser Term darf nicht Null sein),
- Bilden des Kehrwerts auf beiden Seiten der Gleichung (beide Seiten müssen verschieden von Null sein).

Dabei verwendet man folgende **Notation**:

- Äquivalente Gleichungen werden durch das Symbol $\Leftrightarrow$ (gesprochen: genau dann wenn, d.h. die eine Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn auch die andere Gleichung erfüllt ist) gekennzeichnet.
- Unter das Symbol (oder bei mehrzeiligen Lösungen abgetrennt neben die Umformung) wird die Umformungsoperation geschrieben.

Dabei ist wichtig, dass ein Leser die durchgeführte Umformung genau nachvollziehen kann.

Beispiel 2.1.6

Zwei einfache einzeilige Äquivalenzumformungen, auch wenn dass Symbol $\Leftrightarrow$ in beide Richtungen zeigt wird die Notation so interpretiert, dass man die Umformung von links nach rechts angewendet hat:

$$3x - x^2 \;=\; 2x - x^2 + 1 \underset{+x^2}{\Leftrightarrow} 3x \;=\; 2x + 1 \underset{-2x}{\Leftrightarrow} x \;=\; 1\,.$$

Die Gleichungen links und rechts sind äquivalent. Auf der linken Seite steht die ursprüngliche Gleichung (die zu einem konkreten textuellen Problem gehört), auf der rechten Seite steht eine dazu äquivalente Gleichung, an der man die einzige Lösung sofort ablesen kann.

Beispiel 2.1.7

Bei mehreren komplizierten Umformungen sollten die Umformungsschritte untereinander geschrieben werden, in diesem Fall notiert man die durchgeführte Operation mit einem Trennstrich:

$$\begin{array}{rll}
\text{Start:} & 12 + t \;=\; \dfrac{2t}{2t^2} + t & \Big\| \quad -t \\[2ex]
\Leftrightarrow & 12 \;=\; \dfrac{2t}{2t^2} & \Big\| \quad \text{Gleichung umgedreht} \\[2ex]
\Leftrightarrow & \dfrac{2t}{2t^2} \;=\; 12 & \Big\| \quad \text{Linke Seite umgeformt} \\[2ex]
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{t} \;=\; 12 & \Big\| \quad \text{Kehrwerte genommen} \\[2ex]
\Leftrightarrow & t \;=\; \dfrac{1}{12}\,. &
\end{array}$$

Dabei können sowohl kurze Symbole wie z.B. $-t$ hinter dem Trennstrich stehen wie auch textuelle Beschreibungen. Wichtig dabei ist, dass ein Leser nachvollziehen kann, welche Umformungsschritte durchgeführt worden sind und ob diese richtig sind.

2.1.2 Bedingungen in Umformungen

Multiplikationen, Divisionen oder Kehrwerte sind nur Äquivalenzumformungen, wenn die Faktoren bzw. Terme nicht Null sind. In Beispiel 2.1.7 auf der vorherigen Seite ist für den Leser nachvollziehbar, dass beide Seiten der Gleichung nicht Null sind, daher ist die Umformung erlaubt. Wenn die Unbestimmten selbst in der Umformung eingesetzt werden, so muss gesondert notiert werden, dass der betroffene Term nicht Null sein darf. Das Ende der Umformungskette ist dann nur für Werte gültig, welche die Bedingungen aus den Umformungen erfüllen. Alle anderen Werte müssen *gesondert* überprüft werden, typischerweise indem man sie direkt in die Gleichung einsetzt:

Beispiel 2.1.8

In diesem Beispiel sind die notwendigen Bedingungen für die Umformungen nicht problematisch:

$$\begin{aligned} \text{Start:} \quad 9x &= 81x^2 \quad \Big\| \quad : x, \text{ Umformung erlaubt falls } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9 &= 81x \quad \Big\| \quad : 81 \text{ und umdrehen} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{1}{9} \quad \text{und erfüllt die Bedingung } x \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Auch das durch die Bedingung aussortierte $x = 0$ muss geprüft werden: Die Gleichung $9x = 81x^2$ ist für $x = 0$ erfüllt, also ist auch $x = 0$ eine Lösung. In Mengenschreibweise hat diese Gleichung die Lösungsmenge $L = \{0; \frac{1}{9}\}$.

Werte, welche die Bedingung verletzen, müssen in jedem Fall gesondert untersucht werden, auch wenn sie am Ende als Lösung in der Gleichung stehen:

Beispiel 2.1.9

$$\begin{aligned} \text{Start:} \quad x^2 - 2x &= 2x - 4 \quad \Big\| \quad \text{Terme auf den beiden Seiten zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-2) &= 2 \cdot (x-2) \quad \big| \quad : (x-2), \text{ Umformung nur zulässig falls } x \neq 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 2 \,. \end{aligned}$$

Dieses x verletzt die Bedingung $x \neq 2$, es kann daher sein, dass es sich nicht um eine Lösung handelt. Einsetzen von $x = 2$ in die Startgleichung ergibt $2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ auf der linken Seite, ebenso $2 \cdot 2 - 4 = 0$ auf der rechten Seite. Also ist $x = 2$ tatsächlich eine Lösung, auch wenn es die Umformungsbedingung verletzt.

Aufgabe 2.1.1
Finden Sie die Lösung der Gleichung $(x-2)(x-3) = x^2 - 9$, indem Sie die rechte Seite mit Hilfe der dritten binomischen Formel umformen und dann einen Faktor abdividieren.

Die Lösung ist $x = \boxed{}$.

Lösung:
Die richtige Umformungskette mit Bedingung ist

$$\text{Start:} \quad (x-2)(x-3) = x^2 - 9 \quad \Big\| \quad \text{Umformen der rechten Seite}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-3) = (x+3)(x-3) \quad \Big\| \quad :(x-3), \text{ Umformung erlaubt falls } x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 = x+3 \quad \Big\| \quad -x$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 = 3 \text{ ist eine falsche Gleichung.}$$

Wichtig hier ist, dass diese Gleichung nur für $x \neq 3$ falsch ist. Für $x = 3$ muss separat nachgerechnet werden, und tatsächlich ist die Startgleichung für $x = 3$ erfüllt.

2.1.3 Proportionalität und Dreisatz

Ein in der Praxis häufig vorkommender Fall der Beziehung zwischen zwei Größen ist die **Proportionalität** zwischen diesen Größen wie z.B. zwischen Masse und Volumen, Zeit und zurückgelegter Wegstrecke oder Gewicht bzw. Masse (Menge) einer Ware und Preis. Die Beziehung kann exemplarisch für bestimmte feste Größen vorliegen. Ein erstes Ziel ist dann, diese daraus folgende Beziehung für ein anderes Anwendungsbeispiel zu formulieren. Das Vorgehen soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Beispiel 2.1.10

5 kg Äpfel kosten 3 Euro. Wie viel kosten dann 11 kg Äpfel?

Die Ausgangsbeziehung lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$5\,\text{kg} \;\hat{=}\; 3\ \text{Euro}\ .$$

Es wird vorausgesetzt, dass diese Größen proportional zueinander sind. Im folgenden Schritt wird die Beziehung zwischen den Größen daher auf die Einheit einer der Größen zurückgeführt, nämlich jener der gegebenen Größe. In diesem Fall werden beide Größen mit 1/5 multipliziert – die Bezugseinheit ist also 1 kg –:

$$1\,\text{kg} \;\hat{=}\; \frac{1}{5} \cdot 3\ \text{Euro} = 0{,}6\ \text{Euro}\ .$$

Schließlich werden beide Seiten mit dem Vielfachen der Bezugseinheit der angegebenen Größe multipliziert, in diesem Fall mit dem Faktor 11:

$$11\,\text{kg} \;\hat{=}\; 11 \cdot 0{,}6\ \text{Euro} = 6{,}6\ \text{Euro}\ .$$

Der gesuchte Preis für die 11 kg Äpfel ist also 6,60 Euro.

Das hier beispielhaft vorgeführte Verfahren, die Ausgangsbeziehung über die Beziehung für eine Einheit einer Größe zur gesuchten Beziehung zu führen, wird als **Dreisatz** bezeichnet.

Das gestellte Problem lässt sich aber auch über die Einführung eines Proportionalitätsfaktors lösen. Dazu wird das vorige Beispiel erneut betrachtet.

Beispiel 2.1.11

Der Preis P ist proportional zur Masse m. Es gibt daher eine Konstante k mit

$$P = km \ .$$

Da diese Beziehung auch für die vorgegebenen Werte $m_0 = 5\,\mathrm{kg}$ und $P_0 = 3$ Euro gilt, folgt

$$\begin{aligned} P_0 = km_0 \quad &\Big\| \quad \text{Multiplikation mit } \frac{1}{m_0} \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{P_0}{m_0} = k \quad &; \end{aligned}$$

in diesem Fall ist also

$$k = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ ,$$

interpretiert in den Einheiten Euro pro kg. (In den Naturwissenschaften würde man korrekterweise $k = 0{,}6$ Euro/kg schreiben, weil Proportionalitätsfaktoren i.A. dimensionsbehaftet sind.) Daraus erhält man mit $m_1 = 11\,\mathrm{kg}$ abschließend

$$P_1 = km_1 = 0{,}6 \cdot 11 = 6{,}6 \text{ (in Euro)} \ ,$$

also dasselbe Ergebnis wie mit dem Dreisatz.

Aufgabe 2.1.2
Ein Fahrzeug fährt in 9 Minuten eine Strecke von 6 km.

a. Welche Strecke s fährt das Fahrzeug in 15 Minuten?

   Die Lösung ist $s_{15} =$ $\boxed{}$ km.

b. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Fahrstrecke s und Fahrzeit t ist die Geschwindigkeit v des Fahrzeugs.

   Diese beträgt $v =$ $\boxed{}$ km/ h.

Lösung:
Mit den Angaben fährt das Fahrzeug in einer Minute $\frac{6}{9}\,\mathrm{km} = \frac{2}{3}\,\mathrm{km}$ und damit in 15 Minuten $15 \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{km} = 10\,\mathrm{km}$.

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v = \frac{10\,\mathrm{km}}{15\,\mathrm{min}} = \frac{10\,\mathrm{km}}{(1/4)\,\mathrm{h}} = 40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \ .$$

2.1.4 Auflösen linearer Gleichungen

Info 2.1.12

Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, in der nur Vielfache von Unbestimmten und Konstanten vorkommen.

Für eine lineare Gleichung in einer Unbestimmten (hier x) gibt es nur drei Möglichkeiten:

- Sie ist hat keine Lösung,
- sie besitzt eine einzige Lösung,
- sie hat jeden Wert x als Lösung.

Diese drei Situationen erkennt man an der Umformungskette:

- Endet die Umformungskette mit einer für alle x falschen Aussage (z.B. $1 = 0$), so ist die Gleichung unlösbar.
- Endet die Umformungskette mit einer für alle x wahren Aussage (z.B. $1 = 1$), so ist die Gleichung für alle Werte für x lösbar.
- Ansonsten kann die Gleichung aufgelöst werden, d.h. man kann sie zur Gleichung $x = \text{Wert}$ umformen und die Lösung ablesen.

Mengennotation 2.1.13

In Mengenschreibweise (mit der Lösungsmenge L) kann man diese Fälle so notieren:

- $L = \{\}$ oder $L = \emptyset$, falls es keine Lösung gibt,
- $L = \{\text{Wert}\}$, falls es eine Lösung gibt,
- $L = \mathbb{R}$, falls alle reellen Zahlen x Lösungen sind.

Beispiel 2.1.14

Die lineare Gleichung $3x + 2 = 2x - 1$ hat eine Lösung. Diese erhält man durch Äquivalenzumformungen:

$$3x + 2 \;=\; 2x - 1 \underset{-2x}{\Leftrightarrow} x + 2 \;=\; -1 \underset{-2}{\Leftrightarrow} x \;=\; -3\,.$$

Also ist $x = -3$ die einzige Lösung.

Beispiel 2.1.15

Die lineare Gleichung $3x+3=9x+9$ hat eine Lösung:

$$3x+3 \;=\; 9x+9 \underset{:(x+1)}{\Leftrightarrow} 3 \;=\; 9\,.$$

Dies ist eine falsche Aussage, also ist die Gleichung für alle $x \neq -1$ (Bedingung aus der Umformung) falsch. Einsetzen von $x=-1$ erfüllt jedoch die Gleichung, daher ist es die einzige Lösung.

Alternativ hätte man die Gleichung auch so umformen können:

$$3x+3 \;=\; 9x+9 \underset{-3x-9}{\Leftrightarrow} -6 \;=\; 6x \;\Leftrightarrow\; x \;=\; -1\,.$$

Aufgabe 2.1.3
Formen Sie um und geben Sie die Lösungsmengen dieser linearen Gleichungen an:

a. $x-1=1-x$ hat die Lösungsmenge $L = \boxed{}$,
b. $4x-2=2x+2$ hat die Lösungsmenge $L = \boxed{}$,
c. $2x-6=2x-10$ hat die Lösungsmenge $L = \boxed{}$.

Lösung:
Die erste Gleichung kann man zu $2x=2$ bzw. $x=1$ umformen, also ist $L=\{1\}$ die Lösungsmenge. Die zweite Gleichung kann zu $2x=4$ mit $L=\{2\}$ umgeformt werden. Die dritte Gleichung kann zu $-6=-10$ umgeformt werden, einer an sich falschen Aussage mit $L=\{\}$.

Aufgabe 2.1.4
Berechnen Sie die Lösung der allgemeinen linearen Gleichung $ax=b$, wobei a,b reelle Zahlen sind. Geben Sie an, wann die drei Fälle eintreten:

- Jedes x ist Lösung ($L=\mathbb{R}$) falls $a = \boxed{}$ und $b=0$ ist.
- Es gibt keine Lösung ($L=\emptyset$) falls $a = \boxed{}$ und $b \neq \boxed{}$ ist.
- Ansonsten gibt es nur eine Lösung, und zwar $x = \boxed{}$.

Lösung:
Jedes x ist Lösung ($L=\mathbb{R}$) falls $a=0$ und $b=0$ ist. Es gibt keine Lösung ($L=\emptyset$) falls $a=0$ und $b\neq 0$ ist. Ansonsten gibt es nur eine Lösung, und zwar $x=\frac{b}{a}$.

2.1.5 Auflösen quadratischer Gleichungen

Info 2.1.16

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$, oder $x^2 + px + q = 0$ in normierter Form. Diese erhält man durch Division der gesamten Gleichung durch a.

Für eine quadratische Gleichung in einer Unbestimmten (hier x) gibt es nur drei Möglichkeiten:

- Sie ist nicht lösbar: $L = \{\}$,
- sie besitzt eine einzige Lösung $L = \{x_1\}$,
- sie besitzt zwei verschiedene Lösungen $L = \{x_1; x_2\}$.

Die Lösungen erhält man dabei über **quadratische Lösungsformeln**.

Info 2.1.17

Die *pq*-**Formel** für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lautet

$$x_{1,2} \;=\; -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\;.$$

Dabei besitzt die Gleichung

- keine (reelle) Lösung, falls $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$ ist (dann darf man die Wurzel nicht ziehen),
- eine einzige Lösung $x_1 = -\frac{p}{2}$, falls $\frac{1}{4}p^2 = q$ ist und die Wurzel verschwindet,
- zwei verschiedene Lösungen, falls die Wurzel eine positive Zahl ist.

Der hierbei betrachtete Ausdruck unter der Wurzel, $D := \frac{1}{4}p^2 - q$, heißt **Diskriminante**.

Die Lösung einer quadratischen Gleichung wird häufig durch eine alternative Formel beschrieben:

Info 2.1.18

Für die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ lautet die *abc*-**Formel** oder **Mitternachtsformel**

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\;.$$

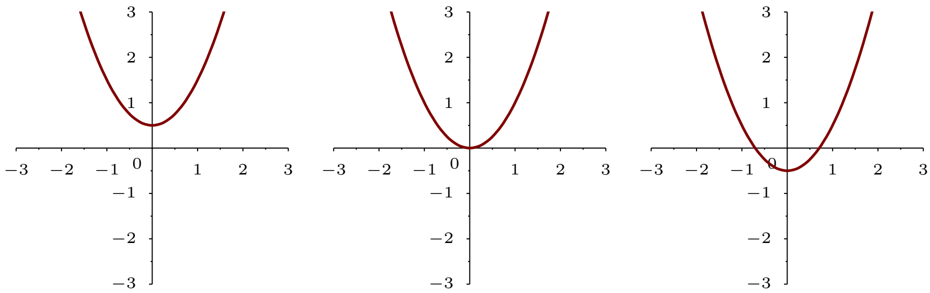
Dabei besitzt die Gleichung

- keine (reelle) Lösung, falls $b^2 - 4ac < 0$ ist (eine Quadratwurzel negativer Zahlen existiert im Reellen nicht),
- eine einzige Lösung $x_1 = -\frac{b}{2a}$, falls $b^2 = 4ac$ ist und die Wurzel verschwindet,
- zwei verschiedene Lösungen, falls die Wurzel eine positive Zahl ist.

Auch der hierbei betrachtete Ausdruck unter der Wurzel, $D := b^2 - 4ac$, heißt **Diskriminante**.

Beide Formeln führen natürlich auf dieselben Lösungen. (Für die Anwendung der pq-Formel ist die Gleichung durch den Vorfaktor a des quadratischen Terms zu dividieren.)

Die drei unterschiedenen Situationen entsprechen den drei möglichen Schnitten, die der Graph einer (für der Fall der pq-Formel) nach oben geöffneten Parabel der Form $f(x) = x^2 + px + q$ mit der x-Achse haben kann:



Die drei Situationen: Kein Schnittpunkt, ein Schnittpunkt und zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.

Beispiel 2.1.19

Die quadratische Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ hat keine Lösung, denn in der pq-Formel ist $\frac{1}{4}p^2 - q = -\frac{3}{4}$ negativ. Dagegen besitzt $x^2 - x - 1 = 0$ die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\ , \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\ . \end{aligned}$$

Info 2.1.20

Der Funktionsausdruck einer Parabel liegt in **Scheitelpunktform** vor, wenn er die Form $f(x) = a \cdot (x - s)^2 - d$ mit $a \neq 0$ besitzt. In dieser Situation ist $(s; -d)$ der **Scheitelpunkt** der Parabel. Die zugehörige quadratische Gleichung für $f(x) = 0$ lautet dann $a \cdot (x - s)^2 = d$.

Dividiert man diese Gleichung durch a, dann erhält man die äquivalente quadratische Gleichung $(x-s)^2 = \frac{d}{a}$. Da die linke Seite ein Quadrat eines reellen Ausdrucks ist, existieren nur Lösungen, wenn auch die rechte Seite nicht negativ ist, d.h. $\frac{d}{a} \geq 0$ gilt. Durch Wurzelziehen unter Beachtung beider möglicher Vorzeichen folgt dann $x - s = \pm\sqrt{\frac{d}{a}}$.

Falls $\frac{d}{a} > 0$ ist, gibt es damit die beiden Lösungen

$$x_1 = s - \sqrt{\frac{d}{a}}\,, \quad x_2 = s + \sqrt{\frac{d}{a}}$$

der Gleichung; diese liegen symmetrisch um die x-Koordinate s des Scheitelpunkts. Für $d = 0$ gibt es nur eine Lösung.

Das Vorzeichen von a bestimmt, ob der Funktionsausdruck eine nach oben oder unten geöffnete Parabel beschreibt.

Die quadratische Gleichung hat nur eine einzige Lösung s, falls sie sich in die Form $(x-s)^2 = 0$ bringen lässt.

Info 2.1.21

Beliebige quadratische Gleichungen kann man (ggf. Sortieren der Terme auf die linke Seite und Normieren) durch **quadratische Ergänzung** in Scheitelpunktform bringen. Dazu wird auf beiden Seiten eine Konstante addiert, so dass links ein Term der Form $x^2 \pm 2sx + s^2$ für die erste oder zweite binomische Formel entsteht.

Beispiel 2.1.22

Die Gleichung $x^2-4x+2 = 0$ kann man durch Addieren der Konstanten 2 in die Form $x^2-4x+4 = 2$ bzw. in die Scheitelpunktform $(x-2)^2 = 2$ bringen. Aus ihr kann man sofort die Lösungen $x_1 = 2-\sqrt{2}$ und $2+\sqrt{2}$ ablesen. Andererseits besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + x = -2$ keine Lösung, denn die quadratische Ergänzung führt auf $x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$ bzw. $(x+\frac{1}{2})^2 = -\frac{7}{4}$ mit negativer rechter Seite bei $a = 1$.

Aufgabe 2.1.5
Bestimmen Sie die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen über quadratische Ergänzung, nachdem Sie die Terme auf die linke Seite sortiert und normiert (d.h. $a = 1$ gewählt) haben:

a. $x^2 = 8x - 1$ hat die Scheitelpunktform ______ = ___ .
Die Lösungsmenge ist L = ______ .

b. $x^2 = 2x + 2 + 2x^2$ hat die Scheitelpunktform ______ = ___ .

Die Lösungsmenge ist $L =$ $\boxed{}$.

c. $x^2 - 6x + 18 = -x^2 + 6x$ hat die Scheitelpunktform $\boxed{} = \boxed{}$.
Die Lösungsmenge ist $L =$ $\boxed{}$.

Lösung:
Die Umformungen lauten:

$$\begin{aligned} & x^2 = 8x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 8x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 8x + 16 = 15 \\ \Leftrightarrow\ & (x-4)^2 = 15 \\ & L = \{4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15}\} \end{aligned}$$

sowie für die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} & x^2 = 2x + 2 + 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 1 = -1 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2 = -1 \\ & L = \{\} \end{aligned}$$

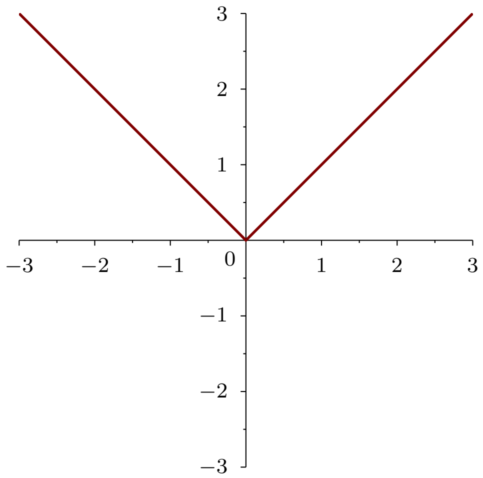
und für die dritte Gleichung

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 18 = -x^2 + 6x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 12x + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)^2 = 0 \\ & L = \{3\}\ . \end{aligned}$$

2.2 Betragsgleichungen

2.2.1 Einführung

Die Betragsfunktion $|x|$ ordnet einem $x \in \mathbb{R}$ seinen Wert ohne das Vorzeichen zu: Ist $x \geq 0$, so ist $|x| = x$, andernfalls ist $|x| = -x$:



Die Betragsfunktion $|x|$ in Abhängigkeit von x.

Betragsgleichungen sind Gleichungen, in denen ein oder mehrere Beträge vorkommen. Diese sind problematisch, da der Betrag eines Terms letztlich über eine Fallunterscheidung

$$|\,\mathrm{Term}\,| \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{Term} & \text{falls Term} \geq 0 \\ -\mathrm{Term} & \text{falls Term} < 0 \end{cases}$$

berechnet wird. Diese Fallunterscheidungen müssen beim Lösen von Betragsgleichungen schrittweise aufgelöst und auf Lösungen untersucht werden.

Beispiel 2.2.1

Die Betragsgleichung $|x| = 2$ hat offenbar die Lösungsmenge $L = \{2; -2\}$. Ebenso einfach kann man von $|x-1| = 3$ auf die Lösungsmenge $L = \{-2; 4\}$ schließen.

Sobald mehrere Terme neben dem Betrag auftreten, ist jedoch eine Fallunterscheidung notwendig. Im folgenden Abschnitt wird ausführlich erklärt, wie man diese vornimmt und richtig notiert, da Fallunterscheidungen auch in den folgenden Modulen eine wichtige Rolle spielen werden.

2.2.2 Fallunterscheidungen vornehmen

Info 2.2.2

Eine **Betragsgleichung** wird zur Lösung in zwei Fälle unterteilt:

- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag nicht negativ ist, kann der Betrag weggelassen bzw. durch einfache Klammern ersetzt werden.
- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag negativ ist, wird der Term in Klammern gesetzt und negiert.

Die Lösungsmengen aus den Fällen werden dann eingeschränkt, so dass sie der Fallbedingung genügen. Erst nachdem dieser Vorgang für alle Fälle abgeschlossen ist, werden die Teilmengen zur Lösungsmenge für die ursprüngliche Gleichung vereinigt.

Beim Auflösen von Betragsgleichungen ist es wichtig, den Lösungsweg richtig aufzuschreiben und die Fälle deutlich zu unterscheiden. Dieses Video demonstriert die ausführliche schriftliche Auflösung der Betragsgleichung $|2x-4|=6$ durch eine Fallunterscheidung:

(Video nicht darstellbar)

Video 1: Ausführen einer Fallunterscheidung.

Die Kurzschreibweise für die im Video aufgestellte Fallunterscheidung wäre

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{falls } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{falls } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{falls } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aufgabe 2.2.1
Beschreiben Sie den Wert des Ausdrucks $2 \cdot |x-4|$ durch eine Fallunterscheidung:

$$2 \cdot |x-4| = \boxed{} .$$

Lösung:

$$2 \cdot |x-4| = \begin{cases} 2x-8 & \text{falls } x \geq 4 \\ -2x+8 & \text{falls } x < 4 \end{cases}$$

Aufgabe 2.2.2
Reproduzieren Sie die Schritte aus dem obigen Video, um die Betragsgleichung $|6+3x|=12$ aufzulösen.

Die Fallunterscheidung in Kurzschreibweise lautet $|6+3x| =$ [ ]
.
Lösung:

$$|6+3x| \;=\; \begin{cases} 6+3x & \text{falls } x \geq -2 \\ -6-3x & \text{falls } x < -2 \end{cases}$$

Bestimmung der Lösungen innerhalb der Fälle und Prüfung der Fallbedingungen ergibt die Lösungsmenge $L =$ [ ] für die Gleichung $|6+3x| = 12$.
Lösung:

$$L \;=\; \{-6;2\}$$

2.2.3 Gemischte Gleichungen

Info 2.2.3

Treten in einer Gleichung Beträge zusammen mit anderen Ausdrücken auf, so sind die Fallunterscheidungen passend zu den Termen in den Beträgen einzurichten und nur auf diese anzuwenden.

Dabei darf man nicht vergessen, die gefundenen Lösungsmengen mit den Fallbedingungen abzugleichen:

Beispiel 2.2.4

Zu lösen sei die Gleichung $|x-1| + x^2 = 1$. Die Fallunterscheidung lautet hier wie folgt:

- Ist $x \geq 1$, so kann man den Betrag durch Klammern ersetzen und erhält die quadratische Gleichung $(x-1)+x^2 = 1$, welche zu $x^2+x-2 = 0$ umgeformt wird. Die pq-Formel liefert die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} \;=\; -2\,, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} \;=\; 1\,, \end{aligned}$$

von denen nur x_2 die Fallbedingung erfüllt.

- Ist $x < 1$, so erhält man die Gleichung $-(x-1)+x^2 = 1$, welche zu $x^2 - x = 0$ bzw. $x \cdot (x-1) = 0$ umgeformt wird. Man kann aus der Produktdarstellung die beiden Lösungen $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ ablesen, wegen der Fallbedingung ist hier nur $x_3 = 0$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Insgesamt ist also $L = \{0; 1\}$ die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung.

Aufgabe 2.2.3
Wie lautet die Lösungsmenge für die gemischte Gleichung $|x-3| \cdot x = 9$?

a. Ist x aus dem Intervall ☐, so ist der Term im Betrag nicht negativ.
Man erhält die quadratische Gleichung ☐ $= 0$.
Sie besitzt die Lösungsmenge ☐ .
Nur die Lösung ☐ erfüllt die Fallbedingung.

b. Ist x aus dem Intervall ☐, so ist der Term im Betrag negativ.
Man erhält die normierte quadratische Gleichung ☐ $= 0$.
Sie besitzt die Lösungsmenge ☐ .

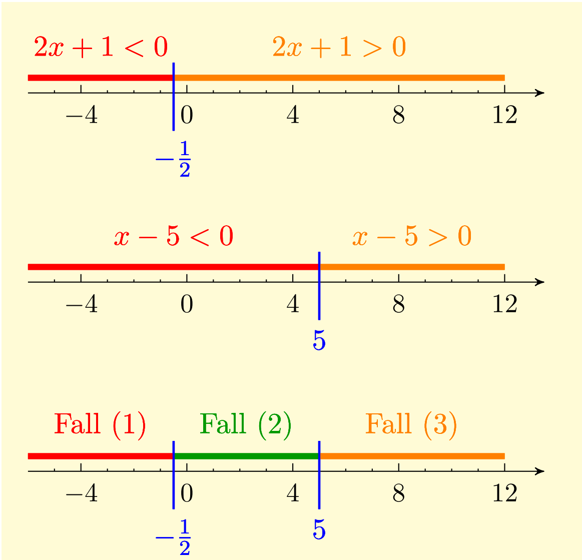
Damit ist die Lösungsmenge insgesamt $L =$ ☐ .

Lösung:
Ist x aus dem Intervall $[3;\infty[$, so ist der Term im Betrag nicht negativ und man erhält die quadratische Gleichung $x^2 - 3x - 9 = 0$ mit Lösungsmenge $L = \{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}}; \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}}\}$. Nur die größere Lösung $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}}$ erfüllt die Fallbedingung $x \geq 3$. Das sieht man auch ohne Taschenrechner an der Abschätzung $\sqrt{\frac{45}{4}} \geq \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$. Ist x dagegen aus dem Intervall $]-\infty; 3[$, so ist der Term im Betrag negativ. Man erhält die normierte quadratische Gleichung $x^2 - 3x + 9 = 0$. Sie ist wegen $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$ in der pq-Formel unlösbar. Damit besitzt die ursprüngliche Gleichung nur die einzige Lösung $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}}$.

Aufgabe 2.2.4
Untersuchen Sie die gemischte Betragsgleichung $3|2x+1| = |x-5|$ auf Lösungen, indem Sie die auftretenden Fälle auf dem Zahlenstrahl visualisieren und dann aufgrund einer Fallunterscheidung die Lösungen ermitteln. Visualisieren Sie zunächst die Fallunterscheidungen für die Einzelbeträge.

Die Lösungsmenge ist ☐ .

Lösung:
Durch Untereinanderstellen der Fallunterscheidungen für die Betragsausdrücke $|2x+1|$ und $|x-5|$ kann man die insgesamt vorzunehmende Fallunterscheidung ablesen:



Graphische Darstellung der drei Fälle.

Man kann die folgenden drei Fälle ablesen:

- Fall 1: $x < -\frac{1}{2}$, hier sind die Terme in beiden Beträgen negativ.
- Fall 2: $-\frac{1}{2} \leq x < 5$, hier ist der Term im zweiten Betrag negativ, im ersten Betrag dagegen nicht.
- Fall 3: $5 \leq x$, hier sind beide Terme in den Beträgen nicht negativ.
- Es gibt offenbar kein x, für das der erste Term negativ, der zweite Term aber nicht negativ wird.

Damit kann man die Lösungen zusammenfassen:

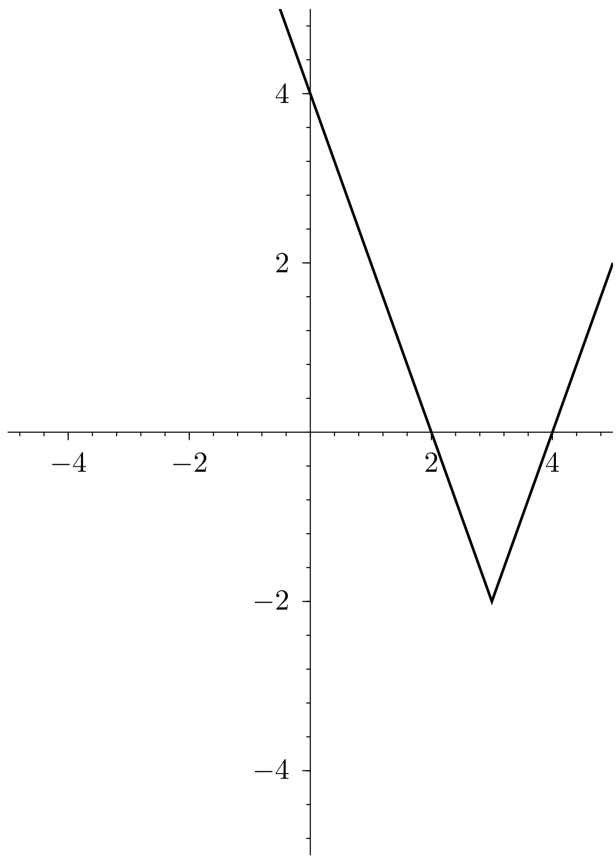
- Im Fall 1 drehen beide Beträge das Vorzeichen: $3|2x+1| = |x-5| \Leftrightarrow 3(-(2x+1)) = -(x-5)$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = -\frac{8}{5}$, sie erfüllt die Fallbedingung.
- Im Fall 2 dreht nur der zweite Betrag das Vorzeichen: $3|2x+1| = |x-5| \Leftrightarrow 3(2x+1) = -(x-5)$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = \frac{2}{7}$, sie erfüllt die Fallbedingung.
- Im Fall 3 kann man beide Beträge weglassen: $3|2x+1| = |x-5| \Leftrightarrow 3(2x+1) = (x-5)$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = -\frac{8}{5}$, sie erfüllt *nicht* die Fallbedingung und wird daher innerhalb ihres Falles verworfen.

Die Lösungsmenge ist $\{-\frac{8}{5}; \frac{2}{7}\}$.

2.3 Abschlusstest

2.3.1 Abschlusstest Modul 2

Aufgabe 2.3.1
Finden Sie einen möglichst einfachen Term mit einer Betragsfunktion, der folgenden Funktionsgraph beschreibt:



Funktionsgraph von $f(x)$.

Antwort: $f(x) =$ [ ] .

Aufgabe 2.3.2
Lösen Sie diese Gleichungen:

a. $|2x - 3| = 8$ hat die Lösungsmenge [ ] .

b. $|x - 2| \cdot x = 0$ hat die Lösungsmenge [ ] .

Aufgabe 2.3.3
Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel, also - der Einfachheit halber - von 6 Millionen Pixel, und produziert Bilder im Kleinbildformat 3 : 2. Wie groß ist ein quadratisches Pixel auf einem Ausdruck im Format (60 cm) $\times$ (40 cm)? Gesucht ist die Kantenlänge eines Pixels in Millimeter.
Antwort: [ ] (ohne die Einheit mm).

Aufgabe 2.3.4
Bestimmen Sie Lösungsmenge der gemischten Gleichung $|x-1|\cdot(x+1)=3$.
Antwort: $L = \boxed{}$.

3 Ungleichungen in einer Unbekannten

Modulübersicht

In diesem Modul wird ein Überblick über die mathematischen Grundlagen zum elementaren Rechnen gegeben und die Notation eingeführt und erklärt.

3.1 Ungleichungen und ihre Lösungsmengen

3.1.1 Einführung

Info 3.1.1

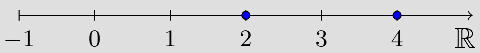
Verbindet man zwei Zahlen durch eines der **Vergleichssymbole** $\leq$, $<$, $\geq$ oder $>$, so entsteht eine Aussage, die in Abhängigkeit von den Zahlen wahr oder falsch ist:

- $a < b$ (gesprochen: a ist echt kleiner als b oder einfach nur a kleiner b) ist wahr, wenn die Zahl a kleiner und nicht gleich b ist.
- $a \leq b$ (gesprochen: a ist kleiner gleich b) ist wahr, wenn die Zahl a kleiner oder gleich b ist.
- $a > b$ (gesprochen: a ist echt größer als b oder einfach nur a größer b) ist wahr, wenn die Zahl a größer und nicht gleich b ist.
- $a \geq b$ (gesprochen: a ist größer gleich b) ist wahr, wenn die Zahl a größer oder gleich b ist.

Die Vergleichszeichen drücken auf dem Zahlenstrahl aus, wie die gegebenen Werte zueinander liegen: $a < b$ bedeutet, dass a links von b auf dem Zahlenstrahl liegt.

Beispiel 3.1.2

Die Aussagen $2 < 4$, $-12 \leq 2$, $4 > 1$ und $3 \geq 3$ sind richtig, dagegen sind $2 < \sqrt{2}$ und $3 > 3$ falsch.



Auf dem Zahlenstrahl liegt die Zahl 2 links von der 4, also ist $2 < 4$.

Dabei ist $a < b$ gleichbedeutend mit $b > a$, ebenso ist $a \leq b$ gleichbedeutend mit $b \geq a$. Dabei ist aber zu beachten, dass das Gegenteil von $a < b$ die Aussage $a \geq b$ und nicht $a > b$ ist. Treten Terme mit Unbestimmten in einer Ungleichung auf, so besteht die Aufgabe darin, den Zahlenbereich für die Unbestimmte zu ermitteln, so dass die Ungleichung wahr ist.

3.1.2 Auflösen einfacher Ungleichungen

Ist die Unbestimmte in einer Ungleichung isoliert, so ist die Lösungsmenge ein Intervall, vgl. auch Infobox 1.1.5 auf Seite 11:

Info 3.1.3

Die **aufgelösten Ungleichungen** haben folgende **Intervalle** als Lösungsmenge:

- $x < a$ besitzt die Lösungsmenge $]-\infty; a[$, alle x, die kleiner als a sind.
- $x \leq a$ besitzt die Lösungsmenge $]-\infty; a]$, alle x, die kleiner oder gleich a sind.
- $x > a$ besitzt die Lösungsmenge $]a; \infty[$, alle x, die größer als a sind.
- $x \geq a$ besitzt die Lösungsmenge $[a; \infty[$, alle x, die größer oder gleich a sind.

Dabei ist x die Unbestimmte und a ein konkreter Zahlenwert. Tritt die Unbestimmte in der Ungleichung nicht mehr auf, so ist die Lösungsmenge entweder $\mathbb{R} = \,]-\infty; \infty[$, falls die Ungleichung erfüllt ist, oder die leere Menge $\{\}$, falls die Ungleichung nicht erfüllt ist.

Das Zeichen ∞ bedeutet dabei **unendlich**. Ein endliches Intervall hat die Form $]a; b[$, was „alle Zahlen zwischen a und b“ bedeutet. Möchte man die Zahlenmenge nur auf einer Seite begrenzen, so kann man für die andere Seite die Symbole ∞ (rechts) oder $-\infty$ (links) einsetzen.

Wie schon bei den Gleichungen versucht man durch Umformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern, eine aufgelöste Ungleichung zu erhalten, aus der man die Lösungsmenge einfach ablesen kann:

Info 3.1.4

Um aus einer gegebenen Ungleichung eine aufgelöste Ungleichung zu erhalten, sind folgende **Äquivalenzumformungen** erlaubt:

- Addition einer Konstanten auf beiden Seiten der Ungleichung: $a < b$ ist äquivalent zu $a + c < b + c$.
- Multiplikation mit einer positiven Konstanten auf beiden Seiten der Ungleichung: $a < b$ ist äquivalent zu $a \cdot c < b \cdot c$, falls $c > 0$ ist.
- Multiplikation mit einer negativen Konstanten auf beiden Seiten der Ungleichung und Umdrehung des Vergleichssymbols: $a < b$ ist äquivalent zu $a \cdot c > b \cdot c$, falls $c < 0$ ist.

Beispiel 3.1.5

Die Ungleichung $-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} < 2$ löst man schrittweise mit den obigen Umformungen auf:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} < 2 && \Big\| \quad +\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{4}x < 2 + \frac{1}{2} && \Big\| \quad \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & x > -\frac{4}{3}\left(2 + \frac{1}{2}\right) && \Big\| \quad \text{Vereinfachen} \\ \Leftrightarrow \quad & x > -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3} \,. \end{aligned}$$

Damit besitzt die ursprüngliche Ungleichung die Lösungsmenge $\left]-\frac{10}{3};\infty\right[$. Wichtig ist bei den Umformungen, dass die Multiplikation mit der negativen Zahl $-\frac{4}{3}$ das Vergleichssymbol umdreht.

Aufgabe 3.1.1
Sind diese Ungleichungen richtig oder falsch?

- [ ] $\frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{3}$
- [ ] $a^2 \geq 2ab - b^2$ (wobei a und b unbekannte Zahlen sind)
- [ ] $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$
- [ ] Angenommen $a < b$, dann ist immer auch $a^2 < b^2$.

Lösung:
Die erste Ungleichung vereinfacht sich zu $\frac{1}{2} > \frac{2}{3}$, was nach Multiplikation mit 6 äquivalent ist zu $3 > 4$, dies ist eine falsche Aussage. Die zweite Ungleichung kann man durch Übertragen aller Zahlenwerte auf die linke Seite vereinfachen zu $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, dies ist eine wegen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ für alle Zahlen a und b wahre Aussage. Multiplikation der dritten Ungleichungskette mit dem Hauptnenner 12 ergibt die Kette $6 < 8 < 9$, die erfüllt ist. Die letzte Aussage ist dagegen falsch, beispielsweise für $a = -1$ und $b = 1$ ist $a^2 = 1$ nicht kleiner als $b^2 = 1$. Quadrieren von Termen ist keine Äquivalenzumformung.

Aufgabe 3.1.2
Welche Lösungsmengen besitzen die folgenden Ungleichungen?

a. $2x + 1 > 3x - 1$ besitzt das Lösungsintervall $L =$ ______ .

b. $-3x - \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ besitzt das Lösungsintervall $L =$ ______ .

c. $x - \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ besitzt das Lösungsintervall $L =$ ______ .

Lösung:

Umformen der ersten Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} & 2x+1 > 3x-1 \quad \Big\| \quad +1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x+2 > 3x \quad \Big\| \quad -2x \\ \Leftrightarrow \quad & 2 > x \end{aligned}$$

und damit das Lösungsintervall $L = \left]-\infty;2\right[$. Umformen der zweiten Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} & -3x-\frac{1}{2} \leq x+\frac{1}{2} \quad \Big\| \quad +3x-\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \leq 4x \quad \Big\| \quad \cdot\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{4} \leq x \end{aligned}$$

und damit $L = \left[-\frac{1}{4};\infty\right[$. Umformen der dritten Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} & x-\frac{1}{2} \leq x+\frac{1}{2} \quad \Big\| \quad -x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Diese Aussage ist unabhängig von $x \in \mathbb{R}$ immer erfüllt, also ist $L = \mathbb{R} = \left]-\infty;\infty\right[$ die Lösungsmenge.

Info 3.1.6

Eine Ungleichung in der Unbestimmten x ist **linear**, falls auf beiden Seiten der Ungleichung nur Vielfache von x und Konstanten vorkommen. Jede lineare Ungleichung lässt sich durch Äquivalenzumformungen zu einer der aufgelösten Gleichungen aus 3.1.3 auf Seite 71 umformen.

3.1.3 Spezielle Umformungen

Die folgenden Äquivalenzumformungen sind nützlich, wenn die Unbestimmte im Nenner eines Ausdrucks auftritt. Sie dürfen aber nur unter bestimmten Voraussetzungen eingesetzt werden:

Info 3.1.7

Unter der Vorbedingung, dass keiner der beteiligten Nenner den Wert Null annimmt (diese Fälle sind prinzipiell keine Lösungen) und dass beide Brüche das gleiche Vorzeichen haben, darf man auf beiden Seiten der Ungleichung den Kehrwert nehmen und dabei das Vergleichssymbol umdrehen.

Beispiel 3.1.8

Beispielsweise ist die Ungleichung $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{3x}$ äquivalent zu $2x \geq 3x$ (Vergleichssymbol wurde gedreht) sofern $x \neq 0$ ist. Die neue Ungleichung hat die Lösungsmenge $]-\infty; 0]$, aber da der Fall $x = 0$ ausgeschlossen wurde (und er auch nicht zur Definitionsmenge der ursprünglichen Ungleichung gehört) ist $L = \,]-\infty; 0[$ die Lösungsmenge von $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{3x}$.

Aufgabe 3.1.3
Wie lauten die Lösungsintervalle dieser Ungleichungen?

a. $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}$ besitzt die Lösungsmenge $L =$ [ ] .

b. $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ besitzt die Lösungsmenge $L =$ [ ] .

Lösung:
Bei der ersten Ungleichung ist $x = 0$ nicht in der Definitionsmenge, dieser Wert wird daher ausgeschlossen. Ist $x > 0$, so ist das Bilden der Kehrwerte und Umdrehen der Ungleichung erlaubt und ergibt $x \leq 3$. Zusammen mit der Vorbedingung erhält man das Lösungsintervall $L = \,]0; 3]$. Für die $x < 0$ darf man die Kehrwertregel nicht anwenden. Man sieht hier aber auch ohne Regel, dass kein $x < 0$ eine Lösung sein kann, da dann auch $\frac{1}{x}$ negativ und nicht größer oder gleich $\frac{1}{3}$ ist.

Die Definitionsmenge der zweiten Ungleichung ist $]0; \infty[$, da nur für diese x sowohl die Wurzel wie auch die Nenner zulässig sind. Das Bilden der Kehrwerte und Umdrehen der Ungleichung ist auf der Definitionsmenge erlaubt und ergibt $x > \sqrt{x}$. Da $\sqrt{x} > 0$ ist, darf man die gesamte Ungleichung durch $\sqrt{x}$ teilen und erhält $\sqrt{x} > 1$. Diese Ungleichung besitzt die Lösungsmenge $L = \,]1; \infty[$, die auch in der Definitionsmenge enthalten ist.

Beim letzten Aufgabenteil ist zu beachten:

Info 3.1.9

Das Quadrieren einer Ungleichung auf beiden Seiten ist keine Äquivalenzumformung und verändert unter Umständen die Lösungsmenge.

Beispielsweise ist $x = -2$ keine Lösung von $x > \sqrt{x}$, aber sehr wohl von $x^2 > x$. Diese Umformung darf man dennoch einsetzen, wenn man eine richtig formulierte Fallunterscheidung für die Umformung ansetzt und die Definitionsmenge der ursprünglichen Ungleichung beachtet. Diese Technik wird im nächsten Abschnitt genauer betrachtet.

3.2 Umformen von Ungleichungen

3.2.1 Umformungen mit Fallunterscheidungen

Die einfachen linearen Umformungen aus dem vorangehenden Abschnitt sind Äquivalenzumformungen. Sie verändern die Lösungsmenge der betrachteten Ungleichung nicht. Ist die Ungleichung jedoch nicht linear, so werden weitergehende Techniken zum Auflösen benötigt. Diese benötigen meist eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit eines Vorzeichens, da sich im Gegensatz zu den Gleichungen aus Modul 2 nun auch die Richtung der Ungleichung beim Umformen ändern kann.

Info 3.2.1

Multipliziert man eine Ungleichung mit einem Term, der eine Unbestimmte x enthält, so ist eine Fallunterscheidung zu führen und die Umformung für jeden Fall separat zu betrachten:

- Für diejenigen x, für die der multiplizierte Term positiv ist, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.
- Für diejenigen x, für die der multiplizierte Term negativ ist, wird das Vergleichssymbol umgedreht.
- Der Fall, dass der multiplizierte Term den Wert Null annimmt, muss bei der Umformung ausgeschlossen und ggf. separat betrachtet werden.

Die in den einzelnen Fällen gefundenen Lösungsmengen müssen wie bei der Auflösung von Betragsgleichungen auf Verträglichkeit mit der Fallbedingung untersucht werden.

Die Addition von Termen, welche die Unbestimmte enthalten, erfordert dagegen keine Fallunterscheidung. Umformungen mit Fallunterscheidungen sind meist notwendig, wenn die Unbestimmte im Nenner oder in zusammengesetzten Termen auftritt:

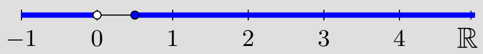
Beispiel 3.2.2

Die Ungleichung $\frac{1}{2x} \leq 1$ kann vereinfacht werden, indem beide Seiten der Ungleichung mit dem Term $2x$ multipliziert werden:

- Unter der Bedingung $x > 0$ erhält man die neue Ungleichung $1 \leq 2x$. Sie hat die Lösungsmenge $L_1 = \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$. Die Bedingung $x > 0$ ist für alle Elemente der Lösungsmenge erfüllt.
- Unter der Bedingung $x < 0$ erhält man die neue Ungleichung $1 \geq 2x$. Sie hat die Lösungsmenge $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. Wegen der zusätzlichen Bedingung $x < 0$ sind in diesem Fall aber nur die Elemente von $L_2 = \left]-\infty; 0\right[$ Lösungen.

- Der Einzelfall $x = 0$ ist keine Lösung, da er nicht zu der Definitionsmenge der Ungleichung gehört. In diesem Fall darf die Multiplikation mit x nicht durchgeführt werden.

Insgesamt erhält man also die Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{R} \setminus \left[0; \frac{1}{2}\right[$ als Lösungsmenge:



Dabei gilt wie im Modul 2 für die Bildung der Lösungsmenge:

Info 3.2.3

Die Fälle müssen so eingeteilt werden, dass alle Elemente der Definitionsmenge der Ungleichung abgedeckt sind. Bei der Bildung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle ist in jedem Fall zu berücksichtigen, dass die Lösungsmenge auch der entsprechenden Fallbedingung genügt. Für jeden Fall ist die erhaltene Lösungsmenge auf die Teilmenge zu reduzieren, die der Fallbedingung genügt. Die Vereinigung dieser Lösungsmengen der einzelnen Fälle bildet die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung.

3.2.2 Aufgaben

Wird mit zusammengesetzten Termen multipliziert, so ist genauer zu untersuchen, für welche x die Fallunterscheidung vorgenommen werden muss:

Aufgabe 3.2.1
Untersucht werden soll die Ungleichung $\frac{1}{4-2x} < 3$. Zunächst besitzt sie die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, da nur für diese x der Nenner zulässig ist. Für die Multiplikation mit dem Term $4 - 2x$ gibt es drei Fälle. Füllen Sie den Lückentext dazu passend aus:

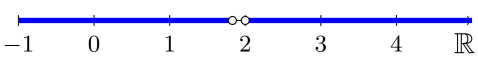
a. Auf dem Intervall ______ ist der Term positiv, das Vergleichssymbol bleibt erhalten und die neue Ungleichung lautet $1 <$ ______ . Lineares Umformen ergibt die Lösungsmenge $L_1 =$ ______ . Die Elemente der Menge erfüllen die Vorbedingung.

b. Auf dem Intervall ______ ist der Term negativ, das Vergleichssymbol wird gedreht. Die neue Ungleichung hat zunächst die Lösungsmenge ______ , wegen der Vorbedingung ist aber nur die Teilmenge $L_2 =$ ______ davon zulässig.

c. Der Einzelwert $x = 2$ ist keine Lösung der ursprünglichen Ungleichung, da er nicht zu der ______ gehört.

Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Ungleichung und markieren Sie die Randpunkte.

<u>Lösung:</u>
Auf dem Intervall $]-\infty; 2[$ ist der Term positiv mit Lösungsmenge $\left]-\infty; \frac{11}{6}\right[$. Auf dem Intervall $]2; \infty[$ ist der Term dagegen negativ, das Vergleichssymbol wird gedreht. Die neue Ungleichung hat zunächst die Lösungsmenge $\left]\frac{11}{6}; \infty\right[$, wegen der Vorbedingung $x > 2$ ist aber nur die Teilmenge $L_2 =]2; \infty[$ davon zulässig. Insgesamt ist die Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{11}{6}; 2\right]$ die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung, die Randpunkte gehören nicht dazu:



Aufgabe 3.2.2
Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{x-1}{x-2} \leq 1$ ist $L =$ ______ .

<u>Lösung:</u>
Die Definitionsmenge der Ungleichung ist $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Im Fall $x > 2$ multipliziert man mit $x - 2$ und erhält $x - 1 \leq x - 2$, was äquivalent zur falschen Aussage $-1 \leq -2$ ist. Der erste Fall trägt nichts zur Lösungsmenge bei.

- Im Fall $x < 2$ multipliziert man mit $x - 2$ und erhält $x - 1 \geq x - 2$, was äquivalent zur wahren Aussage $-1 \geq -2$ ist. Wegen der Vorbedingung ist das Lösungsintervall für diesen Fall aber nur $L_2 =]-\infty; 2[$.

- Der Einzelwert $x = 2$ ist keine Lösung.

Die Lösungsmenge ist also insgesamt $L = \,]-\infty; 2[$ ohne die Randpunkte (auch wenn die Ursprungsungleichung mit $\leq$ aufgebaut war).

Aufgabe 3.2.3
Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 1 + \sqrt{x}$ ist $L =$ $\boxed{}$.

Lösung:
Die Definitionsmenge der Ungleichung ist $D = [0; \infty[\setminus \{1\}$, da nur für diese x die Wurzeln und der Nenner zulässig sind.

- Im Fall $0 \leq x < 1$ multipliziert man mit $1-\sqrt{x}$ und erhält $1 < (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$, was äquivalent zur Aussage $1 < 1 - x$ ist. Diese ist für $x < 0$ erfüllt, aber diese x verletzen die Fallbedingung und kommen daher nicht in die Lösungsmenge.
- Im Fall $x > 1$ multipliziert man mit $1 - \sqrt{x}$ und erhält $1 > 1 - x$, was äquivalent zu $x > 0$ ist. Aber nur die x aus $]1; \infty[$ erfüllen auch die Fallbedingung, also ist $L = \,]1; \infty[$ das einzige Lösungsintervall für die ursprüngliche Ungleichung.
- Der Einzelwert $x = 1$ ist keine Lösung.

3.3 Betragsungleichungen und quadratische Ungleichungen

3.3.1 Einführung

Analog zum Vorgehen in Modul 2 und dem vorangehenden Abschnitt löst man **Beträge** in Ungleichungen durch eine Fallunterscheidung auf:

Info 3.3.1

Eine Ungleichung mit einem Betragsausdruck wird in zwei Fälle unterteilt:

- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag nicht negativ ist, kann der Betrag weggelassen bzw. durch einfache Klammern ersetzt werden.
- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag negativ ist, wird der Term in Klammern gesetzt und negiert.

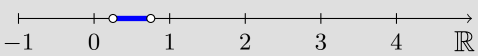
Die Lösungsmengen aus den Fällen werden wie im vorangehenden Modul eingeschränkt und zur Lösungsmenge für die ursprüngliche Ungleichung vereinigt.

Beispiel 3.3.2

Die Betragsungleichung $|4x - 2| < 1$ teilt man in zwei Fälle auf:

- Für $x \geq \frac{1}{2}$ ist der Term im Betrag nicht negativ: In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $(4x - 2) < 1$ bzw. zu $x < \frac{3}{4}$. Wegen der Bedingung ist nur $L_1 = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$ Lösungsmenge für diesen Fall.
- Für $x < \frac{1}{2}$ ist der Term im Betrag negativ: In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $-(4x - 2) < 1$ bzw. zu $x > \frac{1}{4}$. Nur die Teilmenge $L_2 = \left]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right[$ erfüllt die Bedingung und ist Lösung.

Vereinigen der beiden Lösungsintervalle ergibt die Lösungsmenge $L = \left]\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right[$ für die ursprüngliche Betragsungleichung:



Aufgabe 3.3.1
Die Betragsungleichung $|x - 1| < 2|x - 1| + x$ teilt man in zwei Fälle auf:

a. Auf dem Intervall ________ sind beide Terme in den Beträgen nicht negativ. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist in diesem Fall L_1 = ________ .

b. Auf dem Intervall [ ] sind beide Terme in den Beträgen negativ. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist in diesem Fall L_2 = [ ] .

Zusammensetzen der beiden Intervalle ergibt das Lösungsintervall L = [ ] .

Lösung:
Für $x \in [1;\infty[$ sind beide Terme in den Beträgen nicht negativ, man erhält die Ungleichung $x-1 < 2(x-1)+x$, welche äquivalent zu $x > \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Fallbedingung erhält man $L_1 = [1;\infty[$ als Lösungsmenge. Für $x \in \,]-\infty;1[$ sind beide Terme in den Beträgen negativ und man erhält $-(x-1) < -2(x-1)+x$. Diese Ungleichung ist äquivalent zur immer richtigen Ungleichung $x-1 < x$. Damit ist $L_2 = \,]-\infty;1[$ die Lösungsmenge des zweiten Falls.

Wegen $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{R} = \,]-\infty;\infty[$ ist die Ungleichung immer erfüllt.

3.3.2 Quadratische Ungleichungen

Info 3.3.3

Eine Ungleichung heißt **quadratisch** in x, falls sie sich zu $x^2 + px + q < 0$ (oder mit anderen Vergleichssymbolen) umformen lässt.

Quadratische Ungleichungen kann man daher auf zwei Weisen lösen: durch Untersuchung von Nullstellen und Öffnungsverhalten des Polynoms sowie durch quadratische Ergänzung. Die quadratische Ergänzung ist meist einfacher:

Info 3.3.4

Bei der **quadratischen Ergänzung** wird versucht, die Ungleichung auf die Form $(x+a)^2 < b$ zu bringen. Ziehen der Wurzel führt dann auf die Betragsungleichung $|x+a| < \sqrt{b}$ mit der Lösungsmenge $\left]-a-\sqrt{b};-a+\sqrt{b}\right[$ falls $b \geq 0$ ist, ansonsten ist die Ungleichung unlösbar.

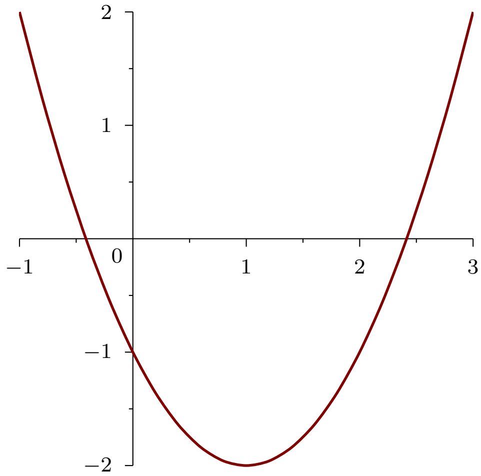
Bei umgekehrter Richtung der Ungleichung besitzt $|x+a| > \sqrt{b}$ die Lösungsmenge $\left]-\infty;-a-\sqrt{b}\right[\cup \left]-a+\sqrt{b};\infty\right[$. Für $\leq$ und $\geq$ sind die Randpunkte entsprechend mit aufzunehmen.

Dabei ist die Rechenregel $\sqrt{x^2} = |x|$ aus Modul 1 zu beachten.

Beispiel 3.3.5

Zu lösen sei die Ungleichung $2x^2 \geq 4x + 2$. Sortieren der Terme auf die linke Seite und Division durch 2 ergibt $x^2 - 2x - 1 \geq 0$. Quadratische Ergänzung zur zweiten binomischen Formel auf der linken Seite ergibt die äquivalente Ungleichung $x^2-2x+1 \geq 2$, bzw. $(x-1)^2 \geq 2$. Ziehen der Wurzel ergibt die Betragsungleichung $|x-1| \geq \sqrt{2}$ mit Lösungsmenge $L = \left]-\infty; 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; \infty\right[$.

Andererseits kann man die Ungleichung $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ auch wie folgt untersuchen: Die linke Seite beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, deren Nullstellen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ man mit der pq-Formel erhält:



Die Ungleichung $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ wird wegen der Öffnung nach oben von den Parabelästen links und rechts von den Nullstellen erfüllt, also von der Menge $L = \left]-\infty; 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; \infty\right[$.

Info 3.3.6

Die quadratische Ungleichung $x^2 + px + q < 0$ (oder andere Vergleichssymbole) besitzt in Abhängigkeit der Nullstellen von $x^2 + px + q$, der Öffnung der Parabel sowie der Richtung der Ungleichung eine der folgenden Lösungsmengen:

- die reellen Zahlen $\mathbb{R}$,
- zwei Äste $]-\infty; x_1[\cup]x_2; \infty[$ (ggf. mit beiden Randpunkten enthalten bei $\leq$ und $\geq$),
- ein Intervall $]x_1; x_2[$ (ggf. mit beiden Randpunkten enthalten bei $\leq$ und $\geq$),
- einen Einzelpunkt x_1,
- die punktierte Menge $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$,

- die leere Lösungsmenge $\{\}$.

Der folgende Lückentext beschreibt die Lösung einer quadratischen Ungleichung über die Untersuchung der Parabel:

Aufgabe 3.3.2
Zu lösen sei $x^2 + 6x < -5$. Umformen ergibt die Ungleichung $\boxed{\qquad\qquad}$ < 0. Mit der pq-Formel findet man die Nullstellenmenge $\boxed{\qquad}$. Die linke Seite beschreibt eine nach $\boxed{\qquad}$ geöffnete Parabel. Sie gehört zu einer Ungleichung mit dem Vergleichssymbol $<$, also ist die Lösungsmenge $L =$ $\boxed{\qquad\qquad}$.

Lösung:
Umformen ergibt $x^2 + 6x + 5 < 0$. Mit der pq-Formel findet man die Nullstellen $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-5}$, also $x_1 = -1$ und $x_2 = -5$. Die linke Seite beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, sie erfüllt die Ungleichung mit $<$, also nur auf dem Intervall $]-5;-1[$ ohne die Randpunkte.

3.3.3 Weitere Ungleichungstypen

Viele weitere Typen von Ungleichungen lassen sich in quadratische Ungleichungen umformen, dabei sind jedoch manchmal Fallunterscheidungen sowie ausgeschlossene Werte in der Definitionsmenge zu beachten:

Info 3.3.7

Eine Ungleichung mit **Brüchen**, bei der x im Nenner zusammengesetzter Ausdrücke vorkommt, kann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner in eine bruchfreie Form gebracht werden. Dabei müssen die Nullstellen der Nenner aber aus der Definitionsmenge der neuen Ungleichung ausgeschlossen werden.

Zudem entstehen bei der Multiplikation mit Termen Fallunterscheidungen in Abhängigkeit von ihrem Vorzeichen.

Beispiel 3.3.8

Die Ungleichung $2 - \frac{1}{x} \leq x$ kann man durch Multiplikation mit x umformen, dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Fall $x > 0$, dann bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten. Die neue Ungleichung lautet

$2x - 1 \leq x^2$ und ist äquivalent zu $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ bzw. $(x-1)^2 \geq 0$. Diese Ungleichung ist immer erfüllt. Wegen der Fallbedingung erhält man die Lösungsmenge $L_1 =]0;\infty[$.

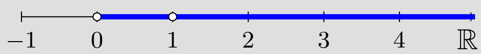
- Fall $x < 0$, dann kehrt sich die Richtung der Ungleichung um. Die neue Ungleichung lautet $2x - 1 \geq x^2$ und ist äquivalent zu $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ bzw. $(x-1)^2 \leq 0$. Diese Ungleichung ist nur für $x = 1$ erfüllt. Dieser Wert wird jedoch durch die Fallbedingung ausgeschlossen, d.h. $L_2 = \{\}$.
- Der Einzelwert $x = 0$ ist nicht Teil der Definitionsmenge der ursprünglichen Ungleichung und damit keine Lösung.

Insgesamt erhält man die Vereinigungsmenge $L =]0;\infty[$ als Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung.

Über gemischte Bruch- und Wurzelterme definierte Ungleichungen haben oft Lösungsmengen, die nicht mehr die Formen aus Info 3.3.6 auf Seite 81 besitzen:

Beispiel 3.3.9

Zu lösen sei die Ungleichung $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$. Die Definitionsmenge der Ungleichung ist $]0;\infty[$. Multiplikation mit $\sqrt{x}$ ergibt die Ungleichung $x + 1 > 2\sqrt{x}$. Hier ist keine Fallunterscheidung notwendig, da $\sqrt{x} > 0$ auf der Definitionsmenge ist. Umformen ergibt $x - 2\sqrt{x} + 1 > 0$ bzw. $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0$, was für alle $x \neq 1$ aus der Definitionsmenge erfüllt ist. Also ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung $L =]0;\infty[\setminus \{1\}$:



3.4 Abschlusstest

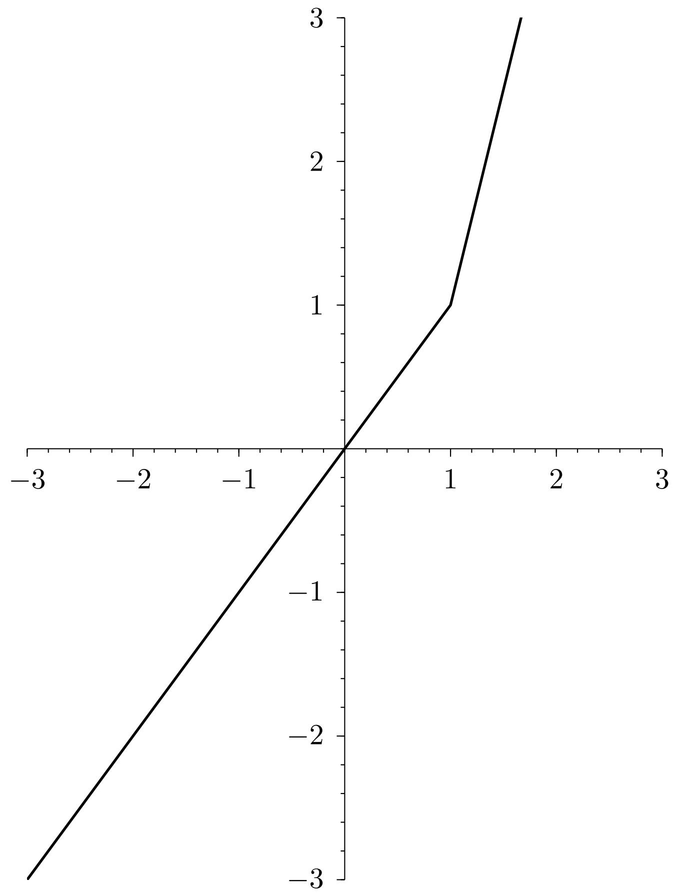
3.4.1 Abschlusstest Modul 3

Aufgabe 3.4.1
Bestimmen Sie den Parameter α, so dass die Ungleichung $2x^2 \leq x - \alpha$ genau eine Lösung hat:

a. Dafür ist α = [ ] einzusetzen.

b. In diesem Fall ist x = [ ] die einzige Lösung der Ungleichung.

Aufgabe 3.4.2
Finden Sie eine möglichst einfache Funktion $g(x)$ mit einem Betragsterm, die folgenden Funktionsgraph besitzt:



Funktionsgraph von $g(x)$.

Versuchen Sie, eine Darstellung der Form $g(x) = |x + a| + bx + c$ zu finden. Am Knick im Graph können Sie erkennen, wie der Term innerhalb des Betrags aussieht.

a. Bestimmen Sie anhand des Graphen die Lösungsmenge der Ungleichung $g(x) \leq x$.
Es ist L = [ ] .

b. $g(x)$ = [ ] .

Aufgabe 3.4.3
Für welche positiven reellen Zahlen x sind die folgenden Ungleichungen erfüllt?

a. $|3x-6| \leq x+2$ hat die Lösungsmenge $L\ =$ $\boxed{}$ (als Intervall geschrieben).

b. $\frac{x+1}{x-1} \geq 2$ hat die Lösungsmenge $L\ =$ $\boxed{}$ (als Intervall geschrieben).

4 Lineare Gleichungssysteme

Modulübersicht

4.1 Was sind Lineare Gleichungssysteme?

4.1.1 Einführung

Ein Problem mit mehreren Unbekannten gleichzeitig!? Und eine ganze Reihe von Gleichungen dazu!? Problemstellungen dieser Art kommen nicht nur im naturwissenschaftlich-technischen Bereich vor, sondern auch in anderen wissenschaftlichen Disziplinen und im Alltag! Und sie müssen gelöst werden!

Zur Beruhigung vorneweg: Schwierig wird es nicht! Dagegen stimmt es, dass sich in den unterschiedlichsten Gebieten häufig Situationen und Aufgaben finden, die in der mathematischen Modellierung auf mehrere Gleichungen in mehreren Unbekannten führen. Hierzu wird ein erstes einfaches Beispiel betrachtet:

Beispiel 4.1.1

Eine junge Artistengruppe möchte ihre halsbrecherische Radnummer zusätzlich aufmotzen, indem sie für ihre Ein- und Zweiräder neue Felgen mit grellbunten Lichteffekten zukauft. Für die insgesamt 10 Räder benötigt sie 13 Felgen. Wieviele Ein- und wieviele Zweiräder besitzt die Gruppe?

In einem ersten Schritt gilt es, die in der Aufgabenstellung enthaltenen Informationen, wenn möglich, in mathematische Gleichungen zu übersetzen. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Einräder mit x, diejenige der Zweiräder mit y, so kann man als erste Information aus der Problembeschreibung herauslesen, dass

$$\text{Gleichung (1)} \quad : \quad x + y = 10$$

gelten muss, da die Gruppe insgesamt 10 Räder ihr Eigentum nennt. Außerdem hat ein Einrad eine Felge, ein Zweirad dagegen zwei Felgen. Weil alles in allem 13 Felgen angeschafft werden sollen, weiß man auch, dass

$$\text{Gleichung (2)} \quad : \quad x + 2y = 13$$

ist. Aus der vorliegenden Problemstellung ergeben sich also zwei Gleichungen, die die zwei unbekannten Größen x (Anzahl der Einräder) und y (Anzahl der Zweiräder) in Beziehung setzen.

Früher oder später will man natürlich wissen, über wieviele Ein- bzw. Zweiräder die Artistengruppe tatsächlich verfügt. Im gegebenen Beispiel kann man die Werte für x und y durch ein wenig Probieren erraten. Aber eigentlich interessiert man sich für **systematische Methoden**, um Fragestellungen wie die obige gezielt zu beantworten.

4.1.2 Inhalt

Bevor man richtig loslegen kann, muss man den Sprachgebrauch noch ein bisschen schärfen.

Info 4.1.2

Mehrere Gleichungen, die auf eine bestimmte Anzahl Unbekannter **gleichzeitig** zutreffen, bilden ein sogenanntes **Gleichungssystem**. Kommen in jeder einzelnen Gleichung eines solchen Systems die Unbekannten in jedem Term nur linear, d.h. höchstens zur Potenz 1 und ausschließlich multipliziert mit (konstanten) Zahlen vor, so spricht man von einem **Linearen Gleichungssystem**, oder kurz **LGS**.

Die beiden Gleichungen aus dem einführenden Beispiel 4.1.1 auf der vorherigen Seite stellen ein Lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte x und y dar. Dagegen bilden die drei Gleichungen

$$x + y + z = 3 \text{ und } x + y - z = 1 \text{ und } x \cdot y + z = 2$$

in den Unbekannten x, y und z zwar ein Gleichungssystem, jedoch **kein** lineares, da in der dritten Gleichung der Term $x \cdot y$ auftritt, der **bilinear** in x und y ist und daher der Bedingung der **Linearität** widerspricht.
Übrigens muss bei einem Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen nicht gleich der Anzahl der Unbekannten sein; darauf wird man später noch zurückkommen.

Info 4.1.3

Ist die Anzahl der Gleichungen in einem Gleichungssystem gleich der Anzahl der Unbekannten, so bezeichnet man das Gleichungssystem als **quadratisch**.

Aufgabe 4.1.1
Bei welchen der folgenden Gleichungssysteme handelt es sich um Lineare Gleichungssysteme?

- ☐ $x + y - 3z = 0$ und $2x - 3 = y$ und $1{,}5x - z = 22 + y$,
- ☐ $\sin(x) + \cos(y) = 1$ und $x - y = 0$,
- ☐ $2z - 3y + 4x = 5$ und $z + y - x^2 = 25$.

Lineare Gleichungssysteme zeichnen sich gegenüber allgemeinen Gleichungssystemen durch eine meist deutlich größere Einfachheit aus. Nichtsdestotrotz spielen sie in mannigfachen Bereichen eine zentral wichtige Rolle, so in der Medizin z.B. im Zusammenhang mit der Computertomographie, in der Technik etwa bei der Beschreibung, wie sich Schall in komplex gestalteten Räumen ausbreitet, oder in der Physik beispielsweise bei der Frage, welche Wellenlängen angeregte Atome aussenden können. Daher ist es zweifelsohne lohnenswert, sich intensiv mit Linearen Gleichungssystemen auseinanderzusetzen.

Im Vordergrund steht bei Gleichungssystemen generell die Frage, welche Zahlenwerte man für die Unbekannten wählen muss, damit alle Gleichungen des Systems simultan erfüllt sind. Ein solcher Satz von Zahlenwerten für die Unbekannten wird auf den Begriff der **Lösung eines Gleichungssystems** führen.

Zuvor sollte jedoch eine Feinheit beachtet werden: Abhängig von der Problemstellung ist es unter

Umständen nicht sinnvoll, alle möglichen Zahlenwerte für die Unbekannten zuzulassen. Im Eingangsbeispiel 4.1.1 auf Seite 88 repräsentieren die Unbekannten x und y die Stückzahlen der Ein- bzw. Zweiräder im Besitz der Artistengruppe. Solche Stückzahlen können nur ganze nichtnegative Zahlen, also Elemente von $\mathbb{N}_0$, sein. Daher muss man in diesem Fall die Menge der Zahlen, aus denen die Lösungen stammen können, von vornherein auf $\mathbb{N}_0$ einschränken (und zwar sowohl für x als auch y).

Info 4.1.4

Diejenige Zahlenmenge, aus der die Lösungen eines Gleichungssystems überhaupt nur stammen können, nennt man die **Grundmenge**. Die **Definitionsmenge** ist diejenige Teilmenge der Grundmenge, für die alle Terme in den Gleichungen des Systems **definiert** sind. Für Lineare Gleichungssysteme fallen Grundmenge und Definitionsmenge zusammen. Als **Lösungsmenge** schließlich bezeichnet man diejenige Teilmenge der Definitionsmenge, die die **Lösungen** des Systems zusammenfasst. Diese Lösungsmenge wird mit L bezeichnet.

Ist keine weitere Aussage über die Grundmenge getroffen - und lässt sich auch keine Aussage aus der Problembeschreibung ableiten -, so wird stillschweigend davon ausgegangen, dass die Grundmenge gleich $\mathbb{R}$, also gleich der Menge der reellen Zahlen, ist.

4.2 LGS mit zwei Unbekannten

4.2.1 Einführung

Man beschränkt sich zunächst auf Lineare Gleichungssysteme in **zwei** Unbekannten.

Info 4.2.1

Allgemein hat ein Lineares Gleichungssystem (LGS), bestehend aus zwei Gleichungen in den Unbekannten x und y, folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y &= b_1 \ , \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y &= b_2 \ . \end{aligned}$$

Dabei sind a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} die sogenannten Koeffizienten des Linearen Gleichungssystems, die ebenso wie die rechten Seiten b_1 und b_2 der Gleichungen meist aus den reellen Zahlen stammen und aufgrund der Problemstellung (weitgehend) vorgegeben sind.

Sind die rechten Seiten b_1 und b_2 beide gleich 0 ($b_1 = 0 = b_2$), so spricht man von einem **homogenen**, andernfalls von einem **inhomogenen** Linearen Gleichungssystem.

Aufgrund der Linearität kann jede der beiden Gleichungen des Systems in Infobox 4.2.1 für sich als Gleichung einer Geraden in der x-y-Ebene interpretiert werden: Löst man z.B. die erste Gleichung nach y auf,

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x + \frac{b_1}{a_{12}} \ ,$$

so kann man aus dieser expliziten Form direkt ablesen, dass eine Gerade mit der Steigung $m = -a_{11}/a_{12}$ und dem y-Achsenabschnitt $y_0 = b_1/a_{12}$ beschrieben wird.

Am Rande wird festgehalten, dass das eben erwähnte Freistellen nach y natürlich nur funktioniert, falls $a_{12} \neq 0$ ist. Ist $a_{12} = 0$, so lautet die erste Gleichung $a_{11} \cdot x = b_1$; diese ist für $a_{11} \neq 0$ äquivalent zu $x = (b_1/a_{11})$, was bedeutet, dass x einen konstanten Wert annimmt; dies stellt ebenfalls eine Gerade dar, nämlich eine Gerade parallel zur y-Achse im Abstand (b_1/a_{11}).
Und was, wenn sowohl $a_{12} = 0$ als auch $a_{11} = 0$ gilt? Nun, dann muss ebenfalls $b_1 = 0$ sein, da ansonsten die erste Gleichung von vornherein einen Widerspruch ergeben würde. Für $a_{11} = a_{12} = b_1 = 0$ ist aber die erste Gleichung (für alle Werte von x und y) immer identisch erfüllt $(0 = 0)$ und somit wertlos.

Im Fall der zweiten Gleichung in Infobox 4.2.1 geht man ganz entsprechend vor:

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x + \frac{b_2}{a_{22}} \ .$$

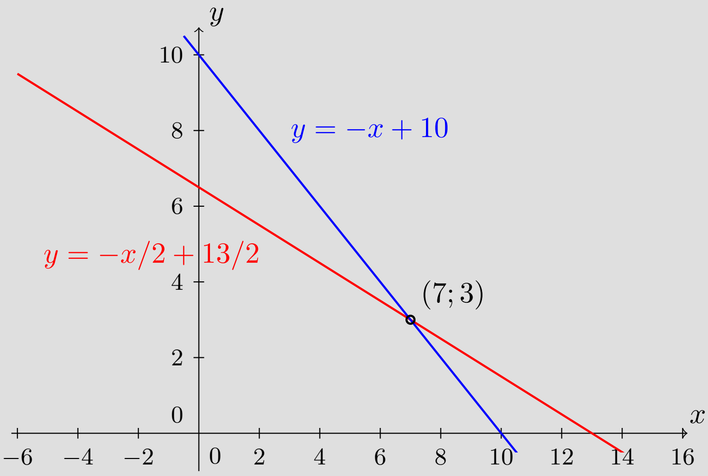
Insgesamt erhält man zwei Geraden als Repräsentanten der beiden linearen Gleichungen, und die Frage nach Lösbarkeit und Lösung des Linearen Gleichungssystems, also die **Frage nach der gleichzeitigen Gültigkeit beider Gleichungen**, liest sich als **Frage nach Existenz und Lage des Schnittpunkts der beiden Geraden**. Dazu schaut man sich ein konkretes Beispiel an:

Beispiel 4.2.2

Das Lineare Gleichungssystem aus dem einführenden Beispiel 4.1.1 auf Seite 88 lautet:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 10 \\ x+2y &=& 13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+10 \\ y &=& -\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \end{array}\right. .$$

(Hier nehmen die allgemeinen Koeffizienten und rechten Seiten des Systems 4.2.1 auf der vorherigen Seite somit die Werte $a_{11}=1, a_{12}=1, a_{21}=1, a_{22}=2, b_1=10$ und $b_2=13$ an.)
Es werden zwei Geraden mit den Steigungen $m_1=-1$ bzw. $m_2=-\frac{1}{2}$ und den y-Achsenabschnitten $y_{0,1}=10$ bzw. $y_{0,2}=\frac{13}{2}$ beschrieben:



Man erkennt aus dem Schaubild, dass sich die beiden Geraden in der Tat schneiden, und liest die Koordinaten des Schnittpunktes zu $(x=7; y=3))$ ab. Dementsprechend besitzt das hier betrachtete Lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung; die Lösungsmenge L enthält genau ein Zahlenpaar, $L=\{(x=7; y=3)\}$.

Diese anschauliche Betrachtungsweise eignet sich hervorragend, alle Fälle zu diskutieren, die überhaupt nur auftreten können: Denn entweder schneiden sich zwei Geraden in der x-y-Ebene - und dann ist der Schnittpunkt zwangsläufig **eindeutig** -, oder aber zwei solche Geraden verlaufen parallel - und besitzen somit keinen Schnittpunkt -, oder aber die beiden Geraden sind deckungsgleich - und schneiden sich daher sozusagen in unendlich vielen Punkten. Andere Möglichkeiten sind nicht denkbar. Demzufolge kann man im Hinblick auf die Mächtigkeit der Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems Folgendes festhalten:

Info 4.2.3

Ein **inhomogenes Lineares Gleichungssystem** besitzt entweder eine eindeutige Lösung oder aber keine Lösung oder aber unendlich viele Lösungen.

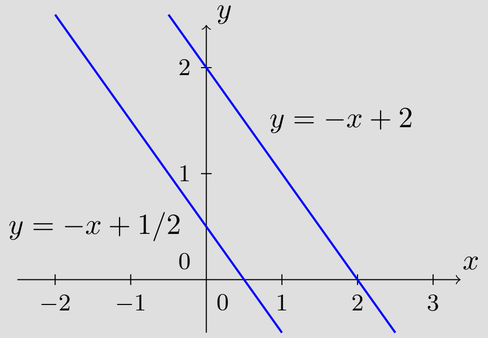
Ein **homogenes Lineares Gleichungssystem** weist **immer eine Lösung** auf, nämlich die sogenannte **triviale Lösung** $x = 0$ und $y = 0$. Darüber hinaus **kann** ein solches homogenes System auch **unendlich viele Lösungen** besitzen.

Das Gesagte soll an zwei weiteren Beispielen, bei denen man direkt mit den Linearen Gleichungssystemen startet, verdeutlicht werden:

Beispiel 4.2.4

In beiden Fällen wählt man als **Grundmenge** die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

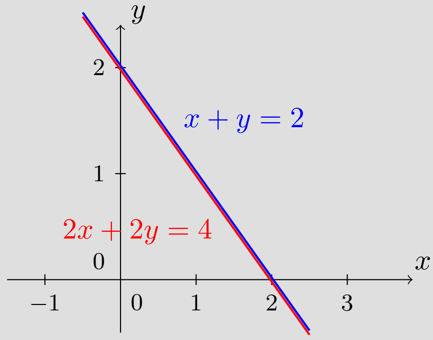
$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+2 \\ y &=& -x+\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$



Die beiden Geraden besitzen dieselbe Steigung $m = -1$, aber verschiedene y-Achsenabschnitte ($y_0 = 2$ bzw. $y_0 = 1/2$); sie verlaufen parallel; das Lineare Gleichungssystem besitzt **keine** Lösung:

$$L = \emptyset\ .$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x+2 \\ y &=& -x+2 \end{array}\right. .$$



Die beiden Geraden besitzen sowohl dieselbe Steigung $m = -1$ als auch denselben y-Achsenabschnitt $y_0 = 2$; sie sind deckungsgleich; das Lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, die z.B. wie folgt angegeben werden können:

$$L = \{(t; -t+2)\ :\ t \in \mathbb{R}\}\ .$$

Im Falle des Beispiels in der rechten Spalte sind andere Parametrisierungen der Lösungsmenge möglich und erlaubt. Es kommt im Grunde nur darauf an, die Punkte der (deckungsgleichen) Geraden geeignet zu beschreiben. Bei der obigen Angabe von L wurde einfach die Geradengleichung selbst verwendet und die Laufvariable t statt x genannt.

Und was hat es mit den oben erwähnten möglichen Einschränkungen wegen der Grundmenge auf sich? Auch hierzu ein Beispiel:

Beispiel 4.2.5

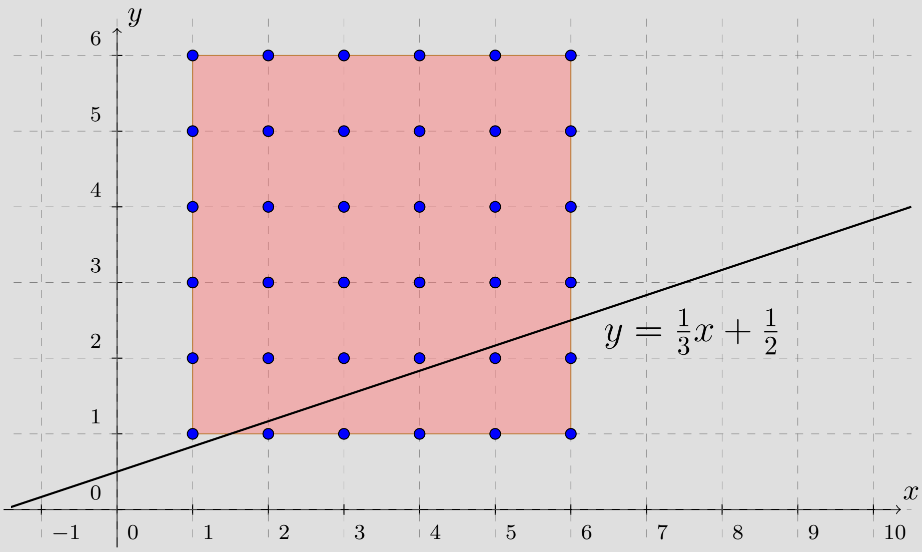
Auf einem Volksfest verspricht ein besonders pfiffiger Standbesitzer geradezu traumhafte Preise und das gegen einen lächerlich geringen Spieleinsatz, wenn, ja wenn einer der Passanten ihm nur folgendes kleine Rätsel löst: *Ich habe mit einem Würfel zweimal gewürfelt. Ziehe ich vom Sechsfachen der zweiten Augenzahl das Zweifache der ersten ab, so erhalte ich die Zahl* 3*. Addiere ich andererseits zum Vierfachen der ersten Augenzahl die Zahl* 6*, so bekomme ich das Zwölffache der zweiten Augenzahl. Welche beiden Zahlen habe ich gewürfelt?*

Bezeichnet man die Augenzahl des ersten Würfelwurfs mit x, diejenige des zweiten mit y, so kann man die Aussagen des Standbesitzers sehr schnell in Gleichungen übersetzen:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6y-2x & = & 3 \\ 4x+6 & = & 12y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \\ y & = & \frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Man stellt fest, dass das entstehende Lineare Gleichungssystem - anschaulich interpretiert - auf zwei deckungsgleiche Geraden führt. Vordergründig scheint es daher unendlich viele Lösungen zu geben.

Hier kommt jetzt allerdings die Grundmenge ins Spiel: Da sowohl x als auch y Augenzahlen eines Würfels repräsentieren, können beide Unbekannte jeweils nur einen Wert aus der Menge $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ annehmen. Betrachtet man die Gerade $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ in der x-y-Ebene,



so erkennt man, dass kein mögliches Augenzahlpaar auf dieser Geraden liegt; daher ist die Lösungsmenge hier tatsächlich leer, $L = \emptyset$.

4.2.2 Die Einsetzmethode und die Gleichsetzmethode

Bisher wurden Fragen der **Lösbarkeit** und der **graphischen Lösung** von Linearen Gleichungssystemen der Gestalt 4.2.1 auf Seite 91 untersucht. Eine rechnerische Behandlung solcher Systeme steht noch aus, was jetzt nachgeholt werden soll. Dazu betrachtet man ein weiteres Beispiel:

Beispiel 4.2.6

Familie Müller hat für die Renovierung ihres Hauses zwei Kredite in einer Gesamthöhe von 50000 Euro aufnehmen müssen, für die sie pro Jahr zusammen 3700 Euro allein an Zinsen zu bezahlen hat. Für den einen Kreditvertrag fallen 5%, für den anderen 8% jährliche Zinsen an. Über welche Beträge laufen die einzelnen Kredite?

Man bezeichnet die gesuchten Kredithöhen der beiden Verträge mit x und y. Die Summe dieser beiden Beträge beläuft sich laut Aufgabentext auf 50000 Euro, also lautet die erste Gleichung:

$$\text{Gleichung (1)} \quad : \quad x + y = 50000 \quad (\text{in Euro }) \; .$$

Die Zinslast aus dem mit 5% verzinsten Vertrag beträgt $0{,}05 \cdot x$, die aus dem anderen Vertrag mit 8% Zinsen $0{,}08 \cdot y$. Beide Lasten summieren sich gemäß Aufgabetext auf 3700 Euro; dies liefert eine zweite Gleichung:

$$\text{Gleichung (2)} \quad : \quad 0{,}05x + 0{,}08y = 3700 \quad (\text{in Euro }) \; .$$

Wiederum landet man bei einem Linearen Gleichungssystem vom Typ 4.2.1 auf Seite 91.

Für die rechnerische Lösung stellt man Gleichung (1) nach y frei; es entsteht eine zu (1) äquivalente Gleichung (1′):

$$\text{Gleichung } (1') \quad : \quad y = 50000 - x \; .$$

Diesen Ausdruck für y kann man nun in Gleichung (2) für y **einsetzen**, sodass die resultierende Gleichung nur noch x als Unbekannte enthält und dementsprechend aufgelöst werden kann:

$$\begin{aligned} & 0{,}05x + 0{,}08(50000 - x) = 3700 \\ \Leftrightarrow \quad & 0{,}05x + 4000 - 0{,}08x = 3700 \\ \Leftrightarrow \quad & 0{,}03x = 300 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 10000 \; . \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis für x in Gleichung (1′) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} & y = 50000 - 10000 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 40000 \; . \end{aligned}$$

Die gesuchten Kreditvolumina betragen daher 10000 Euro (Vertrag mit 5% Verzinsung) und 40000 Euro (Vertrag mit 8% Verzinsung).

Das voranstehende Beispiel demonstriert auf charakteristische Art und Weise das Vorgehen bei der sogenannten **Einsetzmethode**:

Info 4.2.7

Bei der **Einsetzmethode** wird eine der beiden linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt; dieses Ergebnis wird im zweiten Schritt in die andere lineare Gleichung **eingesetzt**. Es können nun drei Fälle auftreten:

(i) Die resultierende Gleichung enthält (nach dem Zusammenfassen gleichartiger Terme) noch die andere der beiden Unbekannten. Das Auflösen der resultierenden Gleichung nach dieser anderen Unbekannten liefert den ersten Teil des Ergebnisses; den zweiten Teil erhält man zum Beispiel, indem man das erste Teilergebnis in die Gleichung aus dem ersten Schritt einsetzt. Die Lösung ist eindeutig. (Gehört diese Lösung allerdings nicht zur Grundmenge, so muss sie ausgeschlossen werden.)

(ii) Die resultierende Gleichung enthält die andere der beiden Unbekannten nicht mehr und stellt einen Widerspruch in sich dar. Dann besitzt das Lineare Gleichungssystem keine Lösung.

(iii) Die resultierende Gleichung enthält die andere der beiden Unbekannten nicht mehr und ist automatisch immer gültig. Dann besitzt das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen (wenn nicht Überlegungen zur Grundmenge Einschränkungen diktieren).

Bei dieser Vorgehensweise bestehen gewisse Freiheiten. Es ist nicht festgelegt, welche der linearen Gleichungen des Systems nach welcher Unbekannten - oder Vielfachen davon - aufgelöst werden soll; solange es sich generell um Äquivalenzumformungen handelt, führt jeder der möglichen Wege zum selben Resultat. Die Bevorzugung eines bestimmten Lösungsweges ist zum Teil eine Frage des Geschmacks und zum Teil eine Frage der Geschicklichkeit: Einige Zwischenrechnungen können sich vereinfachen, wenn eine clevere Wahl getroffen wird.

Im Zusammenhang mit der **Einsetzmethode** sollen die oben angesprochenen Fälle (ii) und (iii) noch an den Linearen Gleichungssystemen aus Beispiel 4.2.4 auf Seite 93 illustriert werden:

Beispiel 4.2.8

Als Grundmenge bei beiden Linearen Gleichungssystemen legt man wiederum $\mathbb{R}$ fest.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x+y & = & 2 \\ \text{Gleichung (2)}: & 2x+2y & = & 1 \end{array} .$$

Freistellen der Gleichung (1) nach x liefert $x = 2 - y$. Dies in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{rl} & 2(2-y)+2y = 1 \\ \Leftrightarrow & 4-2y+2y = 1 \\ \Leftrightarrow & 4 = 1\,. \end{array}$$

Dies ist ein Widerspruch; das LGS besitzt **keine** Lösung.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x+y & = & 2 \\ \text{Gleichung (2)}: & 2x+2y & = & 4 \end{array} .$$

Freistellen der Gleichung (1) nach y liefert $y = 2 - x$. Dies in Gleichung (2) eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{rl} & 2x+2(2-x) = 4 \\ \Leftrightarrow & 2x+4-2x = 4 \\ \Leftrightarrow & 4 = 4\,. \end{array}$$

Dies ist immer wahr; das LGS besitzt **unendlich viele** Lösungen.

Die Einsetzmethode ist nicht das einzige Verfahren, um Lineare Gleichungssysteme rechnerisch zu lösen. Nachfolgend betrachtet man eine weitere Methode, die sehr eng mit der graphischen Lösung eines LGS verwandt ist.

Info 4.2.9

Bei der **Gleichsetzmethode** werden **beide** linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt. Die beiden resultierenden neuen Gleichungen werden dann im zweiten Schritt **gleichgesetzt**. In der Folge können dann die drei im Zusammenhang mit der Einsetzmethode diskutierten Fälle auftreten.

Auch dieses Verfahren beinhaltet gewisse Freiheiten; so ist zum Beispiel nicht vorgeschrieben, nach welcher Unbekannten die linearen Gleichungen freigestellt werden sollen.

Zur Demonstration wird das Eingangsbeispiel nochmals gelöst, jetzt mit Hilfe der Gleichsetzmethode:

Beispiel 4.2.10

Das Lineare Gleichungssystem des einführenden Beispiels lautet:

$$\begin{aligned} x+y &= 10\ , \\ x+2y &= 13\ . \end{aligned}$$

Man löst beide Gleichungen nach x auf,

$$\begin{aligned} x &= 10-y\ , \\ x &= 13-2y\ , \end{aligned}$$

und setzt die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich,

$$10-y = 13-2y\ ,$$

was auf $y=3$ führt. Dieses Ergebnis kann man in eine der beiden nach x aufgelösten Gleichungen einsetzen, um $x=7$ zu erhalten.

Aufgabe 4.2.1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 2y &= 14\,, \\ 3x - 5y &= 6 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Gleichsetzmethode.

Lösung:
Man löst beispielsweise beide Gleichungen nach x auf: dazu multipliziert man die erste Gleichung mit $(1/7)$ und stellt nach x frei,

$$x = \tfrac{14}{7} - \tfrac{2}{7}y \Leftrightarrow x = 2 - \tfrac{2}{7}y \ : \ \text{Gleichung } (1')\ ;$$

die zweite Gleichung multipliziert man dagegen mit $\frac{1}{3}$, bevor man nach x freistellt,

$$x = \tfrac{6}{3} + \tfrac{5}{3}y \Leftrightarrow x = 2 + \tfrac{5}{3}y \ : \ \text{Gleichung } (2')\ .$$

Gleichsetzen der beiden rechten Seiten der Gleichungen $(1')$ und $(2')$ liefert:

$$2 - \tfrac{2}{7}y = 2 + \tfrac{5}{3}y \Leftrightarrow 0 = (\tfrac{2}{7} + \tfrac{5}{3})y \Leftrightarrow y = 0\ .$$

Mit diesem Ergebnis für y ergibt z.B. die erste Gleichung:

$$7x + 2 \cdot 0 = 14 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2\ .$$

Also ist das gegebene Lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar und $L = \{(x = 2; y = 0)\}$.

Alternativ hätte man die beiden Gleichungen vor dem Gleichsetzen auch nach y auflösen können (oder nach einem Vielfachen von x oder nach einem Vielfachen von y). Das Endresultat ist jedesmal dasselbe.

4.2.3 Die Additionsmethode

Es soll noch ein weiteres, drittes, Verfahren zur rechnerischen Lösung von Linearen Gleichungssystemen vorgestellt werden, das sein eigentliches Potential aber erst bei größeren Systemen, d.h. vielen linearen Gleichungen in vielen Unbekannten entwickeln wird, da es sich sehr gut systematisieren lässt. Hier soll es um die prinzipielle Vorgehensweise gehen. Zu Beginn wird ein Beispiel betrachtet:

Beispiel 4.2.11

Man sucht die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \text{Gleichung (1)}: \quad 2x + y &= 9\,, \\ \text{Gleichung (2)}: \quad 3x - 11y &= 1\,, \end{aligned}$$

wobei als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gewählt wird.

Diesmal wird zur Lösung folgender Weg eingeschlagen: Man multipliziert Gleichung (1) mit dem Faktor 11 durch und erhält eine zu Gleichung (1) äquivalente Gleichung:

$$\begin{aligned} (2x + y) \cdot 11 &= 9 \cdot 11 \\ \Leftrightarrow \quad 22x + 11y &= 99 \qquad : \ \text{Gleichung } (1')\ . \end{aligned}$$

Anschließend **addiert** man die neue Gleichung $(1')$ zu Gleichung (2) hinzu, d.h. man setzt die **Summe** der linken Seiten von $(1')$ und (2) gleich der **Summe** der rechten Seiten von $(1')$ und (2). Dabei fällt die Unbekannte y heraus; dies ist übrigens der Grund für die Wahl des Faktors 11 im vorherigen Schritt:

$$3x - 11y + 22x + 11y = 1 + 99 \Leftrightarrow 25x = 100 \Leftrightarrow x = 4 \ .$$

Um den Lösungswert für y zu bekommen, kann man das gerade erzielte Resultat für x z.B. in Gleichung (1) einsetzen:

$$2 \cdot 4 + y = 9 \Leftrightarrow 8 + y = 9 \Leftrightarrow y = 1 \ .$$

Das Lineare Gleichungssystem des vorliegenden Beispiels besitzt also eine eindeutige Lösung, $L = \{(x = 4; y = 1)\}$.

Auch bei diesem Verfahren liegt das Vorgehen nicht eindeutig fest: So hätte man z.B. auch Gleichung (1) mit 3 und Gleichung (2) mit (-2) durchmultiplizieren können,

$$\begin{array}{rcrcrcrl} (2x+y)\cdot 3 & = & 9\cdot 3 & \Leftrightarrow & 6x+3y & = & 27 & : \text{Gleichung } (1'') \ , \\ (3x-11y)\cdot(-2) & = & 1\cdot(-2) & \Leftrightarrow & -6x+22y & = & -2 & : \text{Gleichung } (2'') \ , \end{array}$$

um bei der anschließenden **Addition** der Gleichungen $(1'')$ und $(2'')$ die Variable x zu eliminieren:

$$6x + 3y - 6x + 22y = 27 - 2 \Leftrightarrow 25y = 25 \Leftrightarrow y = 1 \ .$$

Das Ergebnis für y hätte man dann z.B. in Gleichung (2) einsetzen können, um x zu bestimmen:

$$3x - 11 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4 \ .$$

Info 4.2.12

Bei der Additionsmethode wird eine der linearen Gleichungen durch geschickte Multiplikation mit einem geeigneten Faktor so umgeformt, dass bei der anschließenden **Addition** der anderen Gleichung (zumindest) eine Unbekannte herausfällt. (Manchmal ist es einfacher, **beide** Gleichungen vor der **Addition** mit passend gewählten Faktoren zu multiplizieren.) Wie im Fall der Einsetzmethode 4.2.7 auf Seite 96 (oder der 4.2.9 auf Seite 97) können in der Folge drei Fälle auftreten, die auf eine Lösungsmenge L mit genau einem Element, keinem Element oder unendlich vielen Elementen führen.

4.2.4 Aufgaben

Aufgabe 4.2.2
Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Einsetzmethode:

a. $3x + y = 4$ und $-x + 2y = 1$,

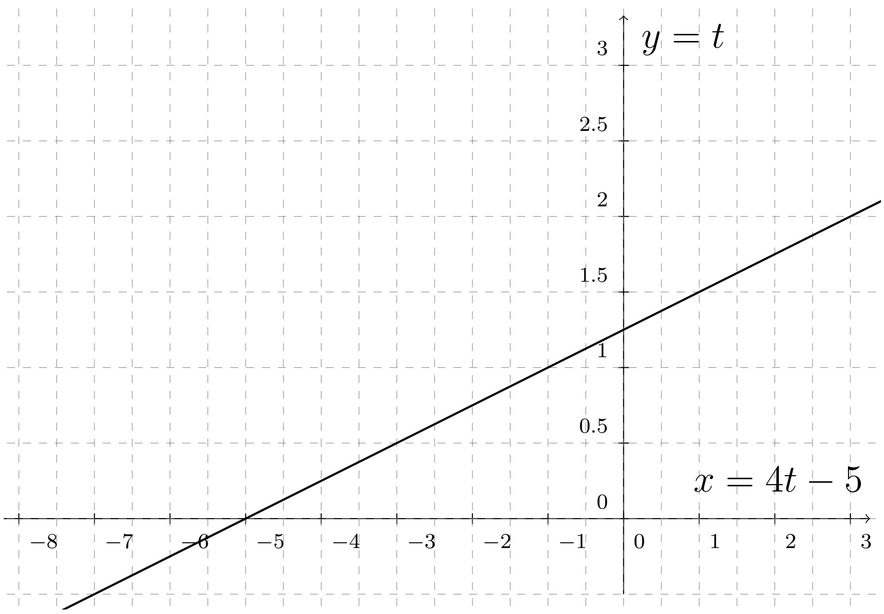
b. $-x + 4y = 5$ und $2x - 8y = -10$.

Lösung:

a. Auflösen z.B. der 1. Gleichung ($3x+y = 4$) nach y liefert $y = 4-3x$. Dies kann man dann in die 2. Gleichung ($-x + 2y = 1$) einsetzen: $-x + 2(4 - 3x) = 1 \Leftrightarrow -x + 8 - 6x = 1 \Leftrightarrow -7x = -7 \Leftrightarrow x = 1$. Mit diesem Ergebnis für x liefert in der Folge z.B. die 1. Gleichung $3 \cdot 1 + y = 4 \Leftrightarrow y = 1$. Die Lösungsmenge L lautet hier also $L = \{(1; 1)\}$.

   Selbstverständlich könnte man auch anders beginnen: Man könnte z.B. die 1. Gleichung nach x auflösen und das Ergebnis für x dann in die 2. Gleichung einsetzen, um y zu bestimmen; oder man könnte generell mit der 2. Gleichung beginnen und diese im 1. Schritt nach x oder nach y auflösen. Es bestehen also einige Freiheiten in der Vorgehensweise.

b. Auflösen z.B. der 1. Gleichung ($-x + 4y = 5$) nach x liefert $x = 4y - 5$. Dies kann man dann in die 2. Gleichung ($2x-8y = -10$) einsetzen: $2(4y-5)-8y = -10 \Leftrightarrow 8y-10-8y = -10 \Leftrightarrow 0 = 0$. Es entsteht also keine neue Aussage; mit anderen Worten: Die 2. Gleichung enthält keine neue Information. Damit enthält die Lösungsmenge L in diesem Fall unendlich viele Lösungspaare $(x; y)$, die sich durch eine reelle Zahl t parametrisieren lassen. Wählt man z.B. $y = t$, so lautet die Lösungsmenge $L = \{(4t - 5; t) : t \in \mathbb{R}\}$. Diese Lösungsmenge lässt sich als Gerade im zweidimensionalen Raum veranschaulichen:



   Dementsprechend sind andere Parametrisierungen der Lösungsmenge möglich, z.B. indem man als freien Parameter $x \in \mathbb{R}$ wählt und die obige Gerade mit Hilfe ihrer Steigung und ihres y-Achsenabschnittes charakterisiert, also $L = \{(x; \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}) : x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4.2.3
Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Additionsmethode:

a. $2x + 4y = 1$ und $x + 2y = 3$,

b. $-7x + 11y = 40$ und $2x + 5y = 13$.

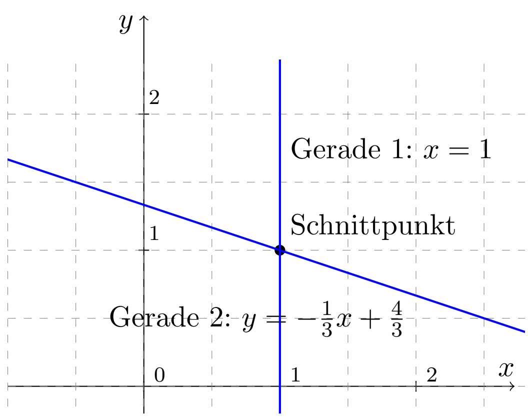
Lösung:

a. Multipliziert man z.B. die 2. Gleichung ($x + 2y = 3$) mit (-2), so entsteht die Gleichung $(2')$: $-2x - 4y = -6$. Die letzte Gleichung addiert man dann zur 1. Gleichung ($2x + 4y = 1$): $2x + 4y - 2x - 4y = 1 - 6 \Leftrightarrow 0 = -5$. Dies ist ein Widerspruch! Somit ist die Lösungsmenge L für dieses Lineare Gleichungssystem leer: $L = \emptyset$.

b. Multiplikation der 1. Gleichung ($-7x+11y = 40$) mit 2 führt auf die Gleichung $(1')$: $-14x+22y = 80$; Multiplikation der 2. Gleichung mit 7 auf die Gleichung $(2')$: $14x + 35y = 91$. Anschließende Addition der Gleichungen $(1')$ und $(2')$ liefert: $-14x+22y+14x+35y = 80+91 \Leftrightarrow 57y = 171 \Leftrightarrow y = 3$. Setzt man dieses Ergebnis für y z.B. in die 2. Gleichung ein, so entsteht: $2x+5\cdot 3 = 13 \Leftrightarrow 2x = 13 - 15 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$. Damit lautet die Lösungsmenge L hier: $L = \{(-1; 3)\}$.

Aufgabe 4.2.4
Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem graphisch: $2x = 2$ und $x + 3y = 4$.

Lösung:
Die 1. Gleichung ($2x = 2$) ist äquivalent zu $x = 1$: Diese Gleichung beschreibt eine Gerade parallel zur y-Achse durch den Punkt $(1; 0)$ auf der x-Achse. Die 2. Gleichung ($x + 3y = 4$) kann umgeformt werden zu $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; dies beschreibt ebenfalls eine Gerade, diesmal mit der Steigung $-\frac{1}{3}$ und dem y-Achsenabschnitt $\frac{4}{3}$. Es ergibt sich also folgendes Bild:



Aus diesem Bild liest man die Koordinaten des Schnittpunktes zu ($x = 1; y = 1$) ab; daher: $L = \{(1; 1)\}$.

4.3 LGS mit drei Unbekannten

4.3.1 Einführung

In der Folge wird der Schwierigkeitsgrad ein wenig gesteigert, indem man zur Behandlung etwas komplizierterer Systeme übergeht:

Beispiel 4.3.1

Drei Kinder finden beim Spielen ein Portemonnaie mit 30 Euro. Da meint das erste Kind: „Wenn ich das Geld für mich alleine behalte, so besitze ich doppelt so viel wie ihr beide zusammen!“ Woraufhin das zweite Kind mit vor Stolz geschwellter Brust prahlt: „Und wenn ich das gefundene Geld einfach einstecke, habe ich dreimal so viel wie ihr beide!“ Das dritte Kind kann da nur überlegen schmunzeln: „Und wenn ich’s nehme, so bin ich fünfmal so reich wie ihr beiden Gauner!“ Wieviel Geld besitzen die Kinder vor dem Fund?

Bezeichnet man die Geldsummen (in Euro) des ersten, zweiten bzw. dritten Kindes vor dem Portemonnaiefund mit x, y bzw. z, so kann man die Aussage des ersten Kindes wie folgt in eine mathematische Gleichung übersetzen:

$$x + 30 = 2(y + z) \Leftrightarrow x - 2y - 2z = -30 \ : \ \text{Gleichung (1)} \ .$$

Analog wird die Aussage des zweiten Kindes übertragen,

$$y + 30 = 3(x + z) \Leftrightarrow -3x + y - 3z = -30 \ : \ \text{Gleichung (2)} \ ,$$

und schließlich diejenige des dritten Kindes:

$$z + 30 = 5(x + y) \Leftrightarrow -5x - 5y + z = -30 \ : \ \text{Gleichung (3)} \ .$$

Es entsteht also ein System aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten, die hier x, y und z heißen.

Wen die Lösung dieses kleinen Rätsels interessiert, der wird sie weiter unten sowohl im Rahmen der **Einsetzmethode** (siehe 4.3.5 auf Seite 108) als auch im Rahmen der Additionsmethode (siehe 4.3.7 auf Seite 110) ausführlich vorgerechnet finden.

Info 4.3.2

Ein Lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen in den drei Unbekannten x, y und z, besitzt folgende allgemeine Gestalt:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z &= b_1 \ , \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z &= b_2 \ , \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z &= b_3 \ . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ und a_{33} die **Koeffizienten** sowie b_1, b_2 und b_3 die rechten Seiten des **Linearen Gleichungssystems**.

Wiederum nennt man das **Lineare Gleichungssystem homogen**, falls die rechten Seiten b_1, b_2 und b_3 verschwinden ($b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$). Andernfalls heißt das System **inhomogen**.

4.3.2 Lösbarkeit und Gleichsetzmethode, Graphische Interpretation

Im Falle von Systemen aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten kann man - wie in 4.2 auf Seite 91 gesehen - die Frage nach Lösbarkeit und Lösung des Systems sehr schön anschaulich in die Frage nach Existenz und Lage des Schnittpunkts zweier Geraden übersetzen. Und natürlich sollte man sich überlegen, ob für Systeme aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten eine ähnlich bildhafte Interpretation gegeben werden kann.

Erweitert man den bisherigen Raum (x und y) um eine weitere Dimension oder Variable, nämlich z, dann kann man mit einer linearen Gleichung dieser drei Variablen,

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 ,$$

eine **Ebene in Koordinatenform** darstellen, ganz analog zu den Geradengleichungen, die bisher untersucht wurden. Für $a_{13} \neq 0$ kann diese Gleichung nach z aufgelöst werden,

$$z = \tfrac{b_1}{a_{13}} - \tfrac{a_{11}}{a_{13}} \cdot x - \tfrac{a_{12}}{a_{13}} \cdot y ,$$

sodass die **explizite Form** der Gleichung ebenjener Ebene resultiert. Die letzte Gleichung besagt, dass jedem Paar $(x; y)$, also jedem Punkt der x-y-Koordinatenebene, gemäß der Vorschrift der rechten Seite ein Wert z, also gewissermaßen eine Höhe, zugeordnet wird; dadurch entsteht eine Fläche über der x-y-Ebene, die aufgrund der Linearität der Gleichung selbst eine Ebene ist.

Nun muss aber nicht nur die erste Gleichung im System 4.3.2 auf der vorherigen Seite gelten, sondern es müssen **gleichzeitig** auch die zweite und die dritte Gleichung erfüllt sein, die bildlich ebenfalls als Ebenen interpretiert werden können. Wonach also bei der Suche nach Lösungen eines Systems aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten gefahndet wird, ist - in der anschaulichen Sprache - das **Schnittverhalten** dreier Ebenen. Hierzu wird zunächst ein Beispiel betrachtet:

Beispiel 4.3.3

Es wird nach der Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x + y - z & = & 0 , \\ \text{Gleichung (2)}: & x + y + z & = & 6 , \\ \text{Gleichung (3)}: & 2x - y + z & = & 4 \end{array}$$

gesucht; als Grundmenge wählt man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

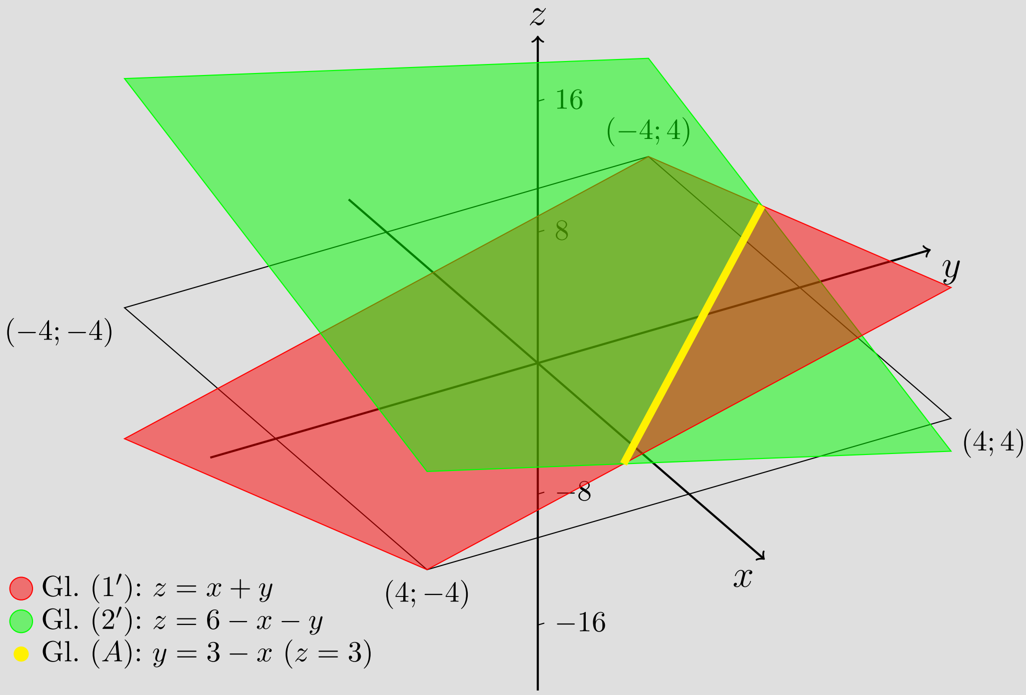
Jede der drei linearen Gleichungen lässt sich problemlos nach z freistellen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung } (1'): & z & = & x + y , \\ \text{Gleichung } (2'): & z & = & 6 - x - y , \\ \text{Gleichung } (3'): & z & = & 4 - 2x + y . \end{array}$$

Setzt man jetzt die rechten Seiten der Gleichungen $(1')$ und $(2')$ **gleich**, so bedeutet dies - anschaulich gesprochen -, dass man die **Schnittgerade** der beiden durch diese Gleichungen beschriebenen Ebenen bestimmt:

$$x + y = 6 - x - y \Leftrightarrow 2x + 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3 - x \;:\; \text{Gleichung } (A)\,.$$

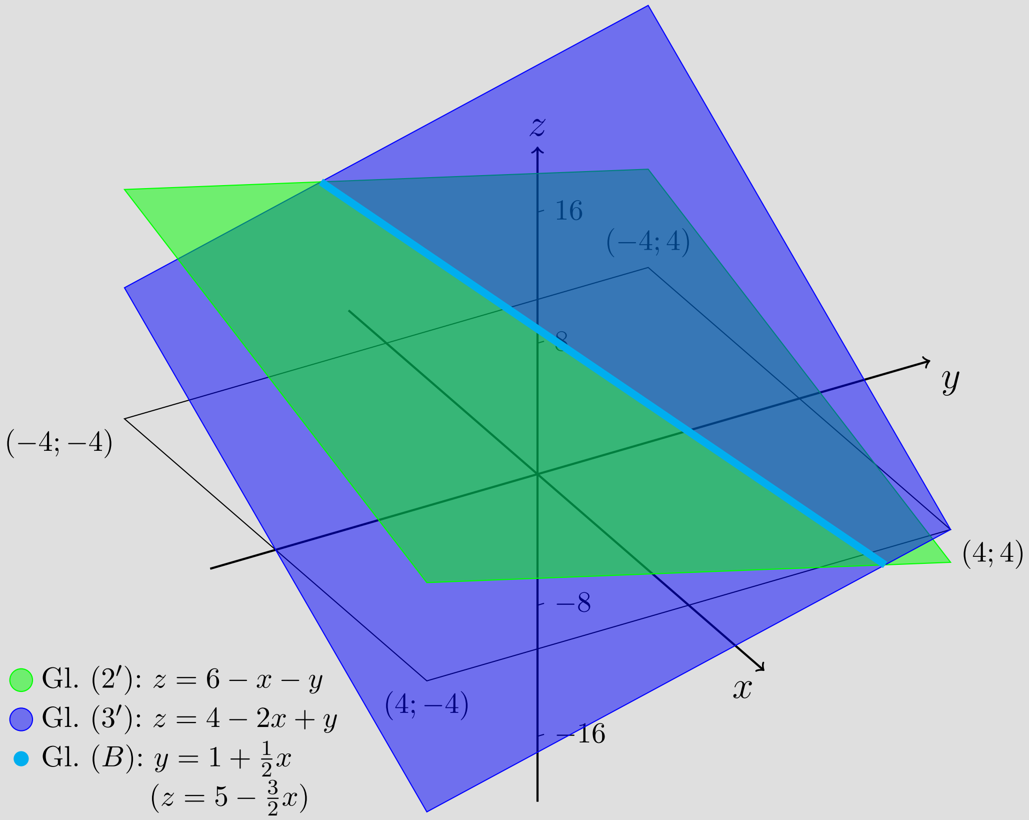
Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung $(1')$ oder $(2')$ erhält man die zugehörigen z-Koordinaten der Schnittgeraden; hier ergibt sich $z = 3$. Die folgende perspektivische Skizze zeigt diese Schnittgerade, Gleichung (A), als den Schnitt der durch die Gleichungen $(1')$ und $(2')$ beschriebenen, nicht parallelen Ebenen:



Die vollkommen analoge Aussage gilt, falls man die rechten Seiten von Gleichung $(2')$ und $(3')$ **gleichsetzt**; man erhält dann die **Schnittgerade** der Ebenen (2) und (3):

$$6 - x - y = 4 - 2x + y \Leftrightarrow x - 2y = -2 \Leftrightarrow y = 1 + \tfrac{1}{2}x \;:\; \text{Gleichung } (B)\,.$$

Deren z-Koordinaten ergeben sich entsprechend durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung $(2')$ oder $(3')$ zu $z = 5 - \frac{3}{2}x$. Eine diesem Sachverhalt entsprechende perspektivische Skizze aus derselben Blickrichtung zeigt diese Schnittgerade, Gleichung (B), als den Schnitt der durch die Gleichungen $(2')$ und $(3')$ beschriebenen, nicht parallelen Ebenen:



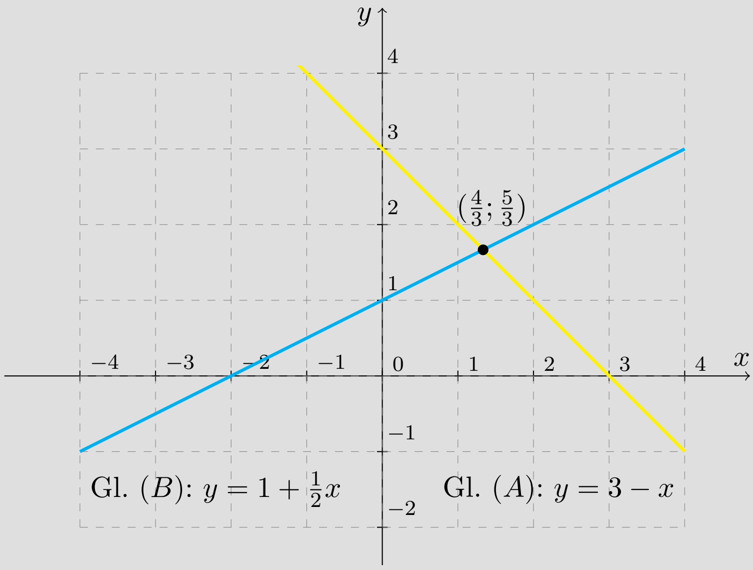
Da im Ausgangssystem alle drei Gleichungen simultan gelten sollen, müssen auch die zwei gerade hergeleiteten Geradengleichungen gleichzeitig erfüllt sein. Im bildlichen Kontext suchen man daher den Schnittpunkt dieser beiden Geraden; diesen Schnittpunkt bekommt man, indem man die rechten Seiten der Gleichungen (A) und (B) **gleichsetzt**:

$$3 - x = 1 + \tfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{4}{3}\ .$$

Den Lösungswert für y kann man durch Einsetzen des Ergebnisses für x z.B. in Gleichung (A) berechnen:

$$y = 3 - \tfrac{4}{3} \Leftrightarrow y = \tfrac{5}{3}\ .$$

Die folgende Skizze zeigt die Schnittgeraden, Gleichungen (A) und (B), in der x-y-Ebene, Projektion - Ansicht von oben -, und deren Schnittpunkt:



Der Wert für z schließlich resultiert, indem man die Werte für x und y z.B. in Gleichung $(1')$ einsetzt:

$$z = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow z = \frac{9}{3} \Leftrightarrow z = 3 \ .$$

Das gegebene Lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar; für die Lösungsmenge erhält man $L = \{(x = \frac{4}{3}; y = \frac{5}{3}; z = 3)\}$.

Um die Frage der Lösbarkeit eines Systems aus drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten allgemeiner und etwas genauer unter die Lupe zu nehmen, soll noch für einen Moment in der bildhaften Welt verweilt werden:

- Liegen (mindestens) **zwei** der drei **Ebenen parallel** zueinander (ohne deckungsgleich zu sein), so besitzt das System **keine Lösung**: Parallele (nicht deckungsgleiche) Ebenen schneiden sich nicht; daher ist es unmöglich, die zu den Ebenen gehörenden Gleichungen simultan zu erfüllen.
- Sind **zwei** der drei **Ebenen deckungsgleich**, so wird die Schnittmenge mit der dritten (nicht parallelen und nicht deckungsgleichen) Ebene durch eine **Schnittgerade** gebildet; alle Punkte dieser Schnittgeraden repräsentieren Lösungen des Systems, die **Lösungsmenge** ist daher **unendlich mächtig**.
- Sind alle **drei Ebenen deckungsgleich**, so sind alle Punkte der (deckungsgleichen) Ebene(n) Lösungen des Systems; wiederum ist die **Lösungsmenge unendlich mächtig**.
- Eine eindeutige Lösung kann höchstens in diesem letzten Fall eintreten: Die drei (nicht parallelen und nicht deckungsgleichen) Ebenen führen auf **drei Schnittgeraden** (Ebene (1) mit Ebene (2), Ebene (2) mit Ebene (3), Ebene (1) mit Ebene (3)):
  - Liegen **zwei Schnittgeraden parallel** zueinander, so besitzt das System **keine Lösung**.
  - Sind **zwei Schnittgeraden deckungsgleich**, so weist das System **unendlich viele Lösungen** auf.

- **Schneiden sich die Schnittgeraden in einem Punkt**, so ist die **Lösung eindeutig** und die **Lösungsmenge** besteht **aus genau einem Element**.

Man sieht, dass trotz der anschaulichen Interpretation das genaue Auseinanderdividieren der einzelnen Fälle doch einigermaßen kompliziert ist. Um so wichtiger wird es sein, gerade wenn die Systeme noch größer werden und die Anschauung schwieriger bzw. unmöglich wird, rechnerische Methoden an der Hand zu haben, um die Lösbarkeit Linearer Gleichungssysteme zu untersuchen und deren Lösungsmengen zu bestimmen. Das **Additionsverfahren**, dessen Diskussion weiter unten erneut aufgegriffen wird, wird ein solch geeignetes Verfahren sein.

Übrigens ist es im obigen Beispiel 4.3.3 auf Seite 103 nicht nötig, die dritte Schnittgerade zu bestimmen und zu überprüfen, dass diese dritte Schnittgerade die beiden anderen Geraden in deren Schnittpunkt schneidet: Dies ist automatisch gewährleistet, da durch das Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung $(1')$ mit derjenigen von Gleichung $(2')$ (erste Schnittgerade / Gleichung (A)) und durch das Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung $(2')$ mit derjenigen von Gleichung $(3')$ (zweite Schnittgerade / Gleichung (B)) die Gültigkeit der Gleichung für die dritte Schnittgerade (rechte Seite von $(1')$ = rechte Seite von $(3')$),

$$x + y = 4 - 2x + y \Leftrightarrow 3x = 4 \;:\; \text{Gleichung } (C)\;,$$

garantiert ist.

Im Beispiel wurde als rechnerisches Verfahren die Gleichsetzmethode verwendet, da sie sehr eng mit der anschaulich geometrischen Interpretation zusammenhängt. Durch das **Gleichsetzen** expliziter Ebenen- bzw. Geradengleichungen werden ja genau die Schnittgeraden bzw. -punkte bestimmt.

Info 4.3.4

Bei der Gleichsetzmethode werden die drei linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt. Die resultierenden neuen Gleichungen werden dann im zweiten Schritt paarweise **gleichgesetzt**, wobei es genügt, dies für zwei Paare durchzuführen. Insgesamt entsteht ein **Lineares Gleichungssystem**, das nur noch aus **zwei** Gleichungen in (den verbliebenen) **zwei** Unbekannten aufgebaut ist und das anschließend mit den Methoden des Abschnitts 4.2 auf Seite 91 bearbeitet werden kann.

Aufgabe 4.3.1
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x + z &= 2\,, \\ -x + y + 2z &= 1\,, \\ y + z &= 11\,. \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Gleichsetzmethode und gehen Sie geschickt vor!

Lösung:
Die erste Gleichung hängt von vornherein nicht von der Unbekannten y ab; daher bietet es sich an, aus der zweiten und dritten Gleichung zunächst ebenfalls y zu eliminieren. Man löst dazu die zweite und die dritte Gleichung jeweils nach y auf,

$$y = 1 + x - 2z \;\text{ und }\; y = 11 - z\;,$$

und setzt anschließend die rechten Seiten gleich:

$$1 + x - 2z = 11 - z \Leftrightarrow -x + z = -10 \; .$$

Als Nächstes muss man diese letzte Gleichung und die erste Gleichung des ursprünglichen Systems weiterverarbeiten. Beim Betrachten dieser beiden Gleichungen fällt auf, dass die linken Seiten (die Kombination $-x + z$ der Unbekannten x und z) identisch sind, wohingegen die rechten Seiten (die Zahlenwerte 2 und -10) offensichtlich nicht übereinstimmen. Daher stößt man auf einen Widerspruch und das gegebene Lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung, $L = \emptyset$.
Andere, ebenso geschickte, Lösungswege sind möglich.

4.3.3 Die Einsetzmethode

Die **Einsetzmethode** wurde bereits im Rahmen von Systemen, bestehend aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten, behandelt, siehe 4.2.2 auf Seite 94. Auch im vorliegenden Fall eines Systems vom Typ 4.3.2 auf Seite 102 ändert sich an der Vorgehensweise nichts Prinzipielles:

Beispiel 4.3.5

Das einleitende Beispiel 4.3.1 auf Seite 102 dieses Abschnitts wird wieder aufgegriffen; das Lineare Gleichungssystem im Falle des Rätsels um die drei in Versuchung geführten Kinder lautet:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x - 2y - 2z & = & -30 \; , \\ \text{Gleichung (2)}: & -3x + y - 3z & = & -30 \; , \\ \text{Gleichung (3)}: & -5x - 5y + z & = & -30 \; . \end{array}$$

Man kann mit der Lösung z.B. so beginnen, dass man Gleichung (1) nach x freistellt,

$$x = 2y + 2z - 30 \;:\; \text{Gleichung } (1') \; .$$

Setzt man diese Gleichung in die Gleichungen (2) und (3) **ein**, so wird aus den letztgenannten Gleichungen die Unbekannte x eliminiert:

$$-3(2y + 2z - 30) + y - 3z = -30 \Leftrightarrow -5y - 9z = -120 \;:\; \text{Gleichung } (2') \; ,$$

$$-5(2y + 2z - 30) - 5y + z = -30 \Leftrightarrow -15y - 9z = -180 \;:\; \text{Gleichung } (3') \; .$$

Man erhält also in diesem Zwischenschritt ein System aus **zwei** linearen Gleichungen in den **zwei** Unbekannten y und z, das mit den Methoden des vorigen Abschnitts 4.2 auf Seite 91 weiterbehandelt wird.
So kann man z.B. Gleichung $(2')$ nach y auflösen,

$$y = 24 - \tfrac{9}{5} z \; ,$$

und diesen Ausdruck in Gleichung $(3')$ **einsetzen**:

$$-15(24 - \tfrac{9}{5} z) - 9z = -180 \Leftrightarrow 360 - 27z + 9z = 180 \Leftrightarrow 18z = 180 \Leftrightarrow z = 10 \; .$$

Damit ergibt sich y zu

$$y = 24 - \tfrac{9}{5} \cdot 10 = 24 - 9 \cdot 2 = 6$$

und schließlich x (mit Hilfe von beispielsweise Gleichung $(1')$):

$$x = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 - 30 = 12 + 20 - 30 = 2 \; .$$

Das Lineare Gleichungssystem besitzt daher eine eindeutige Lösung; die Lösungsmenge L enthält genau ein Element, $L = \{(x = 2; y = 6; z = 10)\}$.

Vielleicht fragt sich der eine oder andere im Zusammenhang mir dem voranstehenden Beispiel, ob es in Anbetracht der identischen rechten Seiten - alle gleich -30 - nicht praktischer wäre, einfach die linken Seiten paarweise gleichzusetzen und mit den resultierenden Gleichungen weiterzuarbeiten.

Ein solches Vorgehen ist allerdings nicht zielführend und - wenn man nicht genau aufpasst, was man tut - unter Umständen sogar falsch. Jedenfalls würde es keine Reduktion in der Anzahl der Unbekannten nach sich ziehen. Und das ist ja gerade die Intention, die sowohl hinter der Einsetz- als auch hinter der Gleichsetzmethode steckt: In beiden Verfahren (und auch in der Additionsmethode) geht es darum, in einem ersten und zweiten Schritt eine der Unbekannten zu eliminieren, sodass nur noch ein System aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten (und damit ein einfacheres Problem) verbleibt.

Übrigens, wie man dann dieses reduzierte Problem löst, das kann unabhängig von der Art und Weise, wie man begonnen hat, gewählt werden. Mit anderen Worten, es ist durchaus zulässig und - vom rechentechnischen Standpunkt aus gesehen - eventuell sogar clever, beim Lösen eines Linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen in drei Unbekannten mit einer Methode, z.B. der Einsetzmethode, zu beginnen, um die Problemstellung auf ein System aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten sozusagen „herunterzukochen“, und dieses einfachere System dann mit einer anderen Methode, z.B. der Gleichsetzmethode, weiterzubehandeln. In diesem Sinne können die Verfahren also gemischt werden.

Info 4.3.6

Bei der Einsetzmethode wird eine der drei linearen Gleichungen in einem ersten Schritt nach einer der Unbekannten - oder nach einem Vielfachen einer der Unbekannten - freigestellt; dieses Ergebnis wird im zweiten Schritt in die beiden anderen linearen Gleichungen **eingesetzt**. Es entsteht ein **Lineares Gleichungssystem**, das nur noch aus **zwei** Gleichungen in (den verbliebenen) **zwei** Unbekannten aufgebaut ist und das anschließend mit den Methoden des Abschnitts 4.2 auf Seite 91 bearbeitet werden kann.

4.3.4 Die Additionsmethode

Der Grundgedanke der Additionsmethode, der auch schon früher andiskutiert wurde (siehe 4.2.3 auf Seite 98), besteht darin, Gleichungen des Systems so zu **addieren**, dass in der resultierenden Gleichung nur noch eine reduzierte Anzahl an Unbekannten auftritt. Dazu ist es meist erforderlich, vor der **Addition** eine der Gleichungen mit einem geschickt gewählten Faktor zu multiplizieren.

Die Additionsmethode soll für Systeme aus drei Gleichungen in drei Unbekannten gleich in einer Form vorgestellt werden, die sich leicht auf größere Systeme übertragen lässt. Dazu bedient man sich zur

Illustration der Vorgehensweise noch einmal des einführenden Beispiels 4.3.1 auf Seite 102, also des Beispiels der möglicherweise diebischen Kinder:

Beispiel 4.3.7

Das zu einer erneuten Lösung auffordernde System linearer Gleichungen lautet also:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y-2z & = & -30\,, \\ \text{Gleichung (2)}: & -3x+y-3z & = & -30\,, \\ \text{Gleichung (3)}: & -5x-5y+z & = & -30\,. \end{array}$$

Gleichung (1) wird im Folgenden unverändert beibehalten. Gleichung (2) jedoch soll durch eine neue Gleichung ersetzt werden, die durch **Addition** von Gleichung (2) mit der mit dem Faktor 3 durchmultiplizierten Gleichung (1) - kurz notiert als $(2)+3\cdot(1)$ - gewonnen wird:

$$(-3x+y-3z)+3\cdot(x-2y-2z)=-30+3\cdot(-30)\Leftrightarrow -5y-9z=-120 \ : \ \text{Gleichung } (2')\,.$$

Ähnlich geht man mit Gleichung (3) vor: Sie wird durch $(3)+5\cdot(1)$, also durch die **Summe** aus Gleichung (3) und der mit dem Faktor 5 durchmultiplizierten Gleichung (1) ersetzt:

$$(-5x-5y+z)+5\cdot(x-2y-2z)=-30+5\cdot(-30)\Leftrightarrow -15y-9z=-180 \ : \ \text{Gleichung } (3')\,.$$

Das System sieht jetzt folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y-2z & = & -30\,, \\ \text{Gleichung } (2'): & -5y-9z & = & -120\,, \\ \text{Gleichung } (3'): & -15y-9z & = & -180\,. \end{array}$$

Aus den Gleichungen $(2')$ und $(3')$ ist die Abhängigkeit von der Unbekannten x verschwunden - das war das Ziel und der Grund für die Faktoren 3 bzw. 5 bei den obigen Summationen.

Man könnte nun das Untersystem, bestehend aus den zwei Gleichungen $(2')$ und $(3')$ in den zwei Unbekannten y und z mit einer anderen Methode, z.B. der Einsetzmethode, weiterbehandeln. Doch es soll lieber vollständig innerhalb der Additionsmethode gearbeitet werden: Dazu nimmt man in der Folge Gleichung $(2')$ - ebenso wie Gleichung (1) - von Änderungen aus; Gleichung $(3')$ soll aber nochmals ersetzt werden und zwar durch die Summe $(3')+(-3)\cdot(2')$:

$$(-15y-9z)+(-3)\cdot(-5y-9z)=-180+(-3)\cdot(-120)\Leftrightarrow 18z=180 \ : \ \text{Gleichung } (3'')\,.$$

Das System hat ein weiteres Mal sein Aussehen gewandelt,

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y-2z & = & -30\,, \\ \text{Gleichung } (2'): & -5y-9z & = & -120\,, \\ \text{Gleichung } (3''): & 18z & = & 180\,, \end{array}$$

und besitzt nun - zumindest was die linken Seiten anbelangt - so eine Art **Dreiecksform**.

Die Bestimmung der Unbekannten ist nun äußerst einfach: Die unterste Gleichung (Gleichung $(3'')$) hängt nur noch von einer einzigen Unbekannten, nämlich z, ab und kann daher sofort aufgelöst werden, $z=10$.
Mit diesem Resultat für z geht man in die darüber stehende Gleichung (Gleichung $(2')$), die dann unmittelbar das Ergebnis für die nächste Unbekannte, hier y, liefert: $-5y-9\cdot 10=-120\Leftrightarrow -5y=-30\Leftrightarrow y=6$.
Schließlich ergeben y und z in die oberste Gleichung (Gleichung (1)) eingesetzt sofort die Lösung für die verbleibende Unbekannte, im vorliegenden Beispiel x: $x-2\cdot 6-2\cdot 10=-30\Leftrightarrow x=2$.

Die aufmerksame Leserin, der aufmerksame Leser mag sich beim Studium des obigen Beispiels unter Umständen die Frage vorlegen, ob - und wenn ja, warum - es zulässig ist, in einem System eine Gleichung durch eine andere zu ersetzen. Im Beispiel geschieht dies an drei Punkten, etwa wenn an die Stelle der Gleichung (2) die Kombination Gleichung (2) plus 3 mal Gleichung (1), also Gleichung $(2')$, tritt.

Wenn man nach der Lösung eines Gleichungssystems forscht, verlangt man die **gleichzeitige Gültigkeit** aller Gleichungen des Systems. Damit insistiert man - um im Beispiel 4.3.7 auf der vorherigen Seite zu sprechen - mit der Forderung, dass Gleichung (1) **und** Gleichung (2) gelten sollen, klarerweise auch auf der Gültigkeit von

$$\text{Gleichung } (2) + 3 \cdot \text{ Gleichung } (1) \Leftrightarrow \text{ Gleichung } (2')\ .$$

Gelten nun stattdessen simultan Gleichung (1) **und** Gleichung $(2')$, dann folgt umgekehrt auch die Gültigkeit von Gleichung (2) mit

$$\text{Gleichung } (2') + (-1) \cdot \text{ Gleichung } (1) \Leftrightarrow 3 \cdot \text{ Gleichung } (2) \Leftrightarrow \text{ Gleichung } (2)\ .$$

Also ist es zulässig, im System Gleichung (2) durch Gleichung $(2')$ zu ersetzen.

Zugleich erkennt man hier einen weiteren wichtigen Punkt: Würde man die **eine** Gleichung $(2')$ an die Stelle der **beiden** Gleichungen - Gleichung (1) und Gleichung (2) - treten lassen, so würde man an Information einbüßen und sogar einen Fehler begehen. (Die Forderung von **nur** $(2')$ statt (1) **und** (2) ist eine wesentlich schwächere.) Dies ist der Grund dafür, warum man in die „neuen“ Systeme einige Gleichungen ungeändert übernimmt: Gleichung (1) **und** Gleichung (2) sind in den jeweiligen Systemen äquivalent zu Gleichung (1) und Gleichung $(2')$. Analoges trifft natürlich auch auf die anderen Ersetzungen in obigem Beispiel zu - und allgemeiner bei derartigen Umformungen Linearer Gleichungssysteme innerhalb der Additionsmethode.

Info 4.3.8

Bei der **Additionsmethode** werden Paare linearer Gleichungen des Systems - gegebenenfalls nach der Multiplikation (mindestens) einer der beiden Gleichungen mit einem geschickt gewählten Faktor (bzw. mit geschickt gewählten Faktoren) - mit dem Ziel addiert, dass in den resultierenden Gleichungen (zumindest) eine Unbekannte herausfällt. Dabei ist darauf zu achten, dass bei der fortschreitenden Lösungsfindung keine Information verlorengeht, sprich, dass die Anzahl der (informationsrelevanten) Gleichungen stets erhalten bleibt. Am geschicktesten bringt man in diesem Zuge das Gleichungssystem auf eine **Dreiecksform**. Dann ist das anschließende Auffinden der Lösung besonders einfach.

4.3.5 Aufgaben

Aufgabe 4.3.2
Geben Sie die Lösungsmenge für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 1\ , \\ 11x + 8z &= 2\ , \\ -4x + y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

an. Verwenden Sie zum Lösen

a. die Einsetzmethode,

b. die Additionsmethode.

Lösung:

a. Man stellt z.B. die erste Gleichung ($2x - y + 5z = 1$) nach y frei, $y = 2x + 5z - 1$, und setzt dieses Ergebnis in die dritte Gleichung ($-4x + y - 3z = -1$) ein:

$$-4x + (2x + 5z - 1) - 3z = -1 \Leftrightarrow -2x + 2z = 0 \Leftrightarrow z = x\ .$$

Das letzte Ergebnis, das schon nach der Unbekannten z aufgelöst wurde, setzt man in die zweite Gleichung ein ($11x + 8z = 2$), die von vornherein unabhängig von y ist:

$$11x + 8x = 2 \Leftrightarrow 19x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{19}\ .$$

Damit gilt auch

$$z = \tfrac{2}{19}\ ,$$

und für y erhält man - gemäß der Gleichung aus der ersten Umformung -:

$$y = 2 \cdot \tfrac{2}{19} + 5 \cdot \tfrac{2}{19} - 1 = \tfrac{4+10-19}{19} = \tfrac{-5}{19}\ .$$

Also ist das Lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar mit $L = \{(x = \frac{2}{19}; y = -\frac{5}{19}; z = \frac{2}{19})\}$.
Alternative Lösungswege sind ebenso gut möglich.

b. Addition der ersten und der dritten Gleichung eliminiert die Unbekannte y:

$$(2x - y + 5z) + (-4x + y - 3z) = 1 + (-1) \Leftrightarrow -2x + 2z = 0\ .$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit (-4), so entsteht

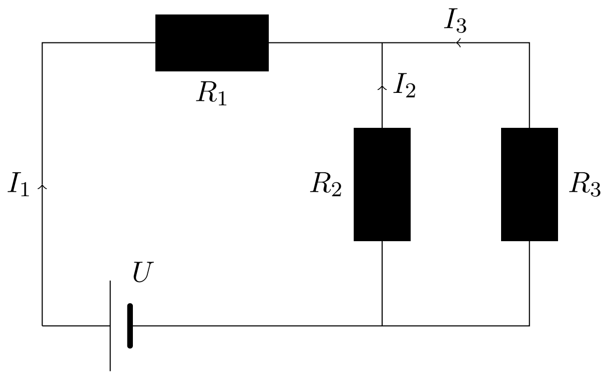
$$8x - 8z = 0\ ,$$

und die anschließende Addition der zweiten Gleichung ($11x + 8z = 2$) sorgt dafür, dass die Abhängigkeit von z herausfällt:

$$(8x - 8z) + (11x + 8z) = 0 + 2 \Leftrightarrow 19x = 2 \Leftrightarrow x = \tfrac{2}{19}\ .$$

Wie im ersten Aufgabenteil können in der Folge z und y bestimmt werden; natürlich bekommt man dasselbe Ergebnis $L = \{(x = \frac{2}{19}; y = -\frac{5}{19}; z = \frac{2}{19})\}$.
Alternative Lösungswege sind ebenso gut möglich.

Aufgabe 4.3.3
Die folgende einfache Schaltung soll betrachtet werden:



Sie ist aus einer Spannungsquelle, die eine Spannung $U = 5{,}5\,\mathrm{V}$ liefern soll, sowie aus drei Widerständen $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ und $R_3 = 3\,\Omega$ aufgebaut. Gefragt ist nach den in den einzelnen Zweigen fließenden Strömen I_1, I_2 und I_3.
Hinweise: Die Zusammenhänge zwischen den interessierenden Größen, sprich den Spannungen, den Widerständen und den Stromstärken, werden für solche Schaltungen von den sogenannten **Kirchhoffschen Regeln** geliefert, die im vorliegenden Beispiel drei Gleichungen bereitstellen:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 &&: \text{ Gleichung (1)} ,\\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U &&: \text{ Gleichung (2)} ,\\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 &&: \text{ Gleichung (3)} . \end{aligned}$$

Außerdem wird die Beziehung zwischen den physikalischen Einheiten Volt (V) (für die Spannung), Ampère (A) (für die Stromstärke) und Ohm (Ω) (für den Widerstand) benötigt: $1\,\Omega = (1\,\mathrm{V})/(1\,\mathrm{A})$.

Lösung:
Man löst z.B. die erste Gleichung nach I_1 auf,

$$I_1 = I_2 + I_3 \ ,$$

und setzt das Ergebnis in die zweite Gleichung ein:

$$R_1(I_2 + I_3) + R_2 I_2 = U \Leftrightarrow (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_3 = U \ : \ \text{Gleichung } (2') \ .$$

Die letzte Gleichung und die dritte Gleichung im ursprünglichen System hängen nur noch von den Unbekannten I_2 und I_3 ab. Sie bilden ein System aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten, das man jetzt weiter löst: Dazu stellt man z.B. die dritte Gleichung des ursprünglichen Systems nach I_3 frei,

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3} I_2 \ : \ \text{Gleichung } (3') \ ,$$

und setzt das Resultat in Gleichung $(2')$ ein:

$$\begin{aligned} & (R_1+R_2)I_2 + R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3} I_2 = U \\ \Leftrightarrow\quad & \left(R_1 + R_2 + R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = U \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\frac{R_1R_3}{R_3} + \frac{R_2R_3}{R_3} + \frac{R_1R_2}{R_3}\right) I_2 = U \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} I_2 = U \\ \Leftrightarrow\quad & I_2 = \frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} U \ . \end{aligned}$$

Damit folgt für I_3 wegen Gleichung $(3')$

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} U = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} U$$

und für I_1 schließlich:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 + I_3 \quad &= \quad \frac{R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot U + \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot U \\ &= \quad \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot U \ . \end{aligned}$$

Nun kann man die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Werte für die Widerstände ($R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ und $R_3 = 3\,\Omega$) und die Spannung ($U = 5{,}5\,\mathrm{V}$) einsetzen; für I_1 erhält man unter Verwendung von $1\,\mathrm{V} = 1\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{A}$:

$$I_1 = \frac{(2+3)\,\Omega}{(1\cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)\,\Omega^2} \cdot 5{,}5 \cdot \Omega \cdot \mathrm{A} = 2{,}5\,\mathrm{A} \ .$$

Analog findet man für I_2 und I_3: $I_2 = 1{,}5\,\mathrm{A}$ und $I_3 = 1\,\mathrm{A}$.
Alternative Lösungswege sind ebenso gut möglich.

Aufgabe 4.3.4
Lösen Sie das folgende Lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Additionsmethode:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 5 \ , \\ 3x + y - 2z &= -1 \ , \\ -x - 2y + 4z &= 7 \ . \end{aligned}$$

Lösung:
Da die erste Gleichung ($x + 2z = 5$) von vornherein nicht von der Unbekannten y abhängt, bietet es sich an, aus der zweiten und dritten Gleichung y ebenfalls zu eliminieren. Dazu multipliziert man die zweite Gleichung ($3x + y - 2z = -1$) mit 2 und addiert die resultierende Gleichung zur dritten Gleichung ($-x - 2y + 4z = 7$) hinzu:

$$\begin{aligned} & (-x - 2y + 4z) + 2 \cdot (3x + y - 2z) = 7 + 2 \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow\quad & -x - 2y + 4z + 6x + 2y - 4z = 7 - 2 \\ \Leftrightarrow\quad & 5x = 5 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 1 \ . \end{aligned}$$

Zufälligerweise fällt gleichzeitig auch die Unbekannte z heraus. Mit dem Ergebnis für x liefert die erste Gleichung

$$1 + 2z = 5 \Leftrightarrow 2z = 4 \Leftrightarrow z = 2 \; .$$

Den Wert für y erhält man sodann, indem man z.B. die zweite Gleichung verwendet:

$$3 \cdot 1 + y - 2 \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 3 + y - 4 = -1 \Leftrightarrow y = 0 \; .$$

Also lautet die Lösungsmenge $L = \{(x = 1; y = 0; z = 2)\}$.

4.4 Allgemeinere Systeme

4.4.1 Einführung

Zu Systemen linearer Gleichungen könnte man noch eine ganze Menge mehr sagen. Um aber die Fülle an Informationen nicht allzu übermächtig werden zu lassen, beschränkt man sich zum Abschluss dieses Moduls auf zwei weitere, kleinere Punkte.

Zum einen können Gleichungssysteme sogenannte freie Parameter enthalten, das sind variable Größen - oder mit anderen Worten eine Art Stellschrauben -, die das Verhalten der Systeme und insbesondere der Lösungsmengen unter Umständen stark beeinflussen. Manchmal ist es von Vorteil, nicht alle Koeffizienten und nicht alle rechten Seiten der Gleichungen als feste, konkrete Zahlenwerte vorzugeben, sondern sie variabel zu lassen, um zu studieren, was in verschiedenen Situationen passieren kann; manchmal kennt man auch nicht alle Koeffizienten oder rechten Seiten aufgrund der Aufgaben- oder Problemstellung.

Zum anderen ist es möglich, dass entweder die Anzahl der linearen Gleichungen oder aber die Anzahl der Unbekannten in einem Gleichungssystem dominiert.

4.4.2 Systeme mit freiem Parameter

Am Anfang steht ein Beispiel, das zugegebenermaßen sehr einfach ist, aber dennoch auf einen, wenn nicht **den**, entscheidenden Punkt im Zusammenhang mit freien Parametern in Systemen linearer Gleichungen hinführen wird:

Beispiel 4.4.1

Es soll nach der Lösungsmenge für das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung (1)}: & x-2y & = & 3\,, \\ \text{Gleichung (2)}: & -2x+4y & = & \alpha \end{array}$$

in Abhängigkeit von dem Parameter α gesucht werden.

Dazu multipliziert man Gleichung (1) mit dem Faktor 2 durch und addiert Gleichung (2):

$$2\cdot(x-2y)+(-2x+4y)=2\cdot 3+\alpha \Leftrightarrow 2x-4y-2x+4y=6+\alpha \Leftrightarrow 0=6+\alpha\,.$$

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Fall A: $\alpha\neq -6$: Ist der vorgegebene freie Parameter α ungleich -6, so stößt man auf einen Widerspruch. In diesem Fall besitzt das Lineare Gleichungssystem **keine Lösung**, $L=\emptyset$.

Fall B: $\alpha=-6$: Ist der vorgegebene freie Parameter α gleich -6, so ist die Gleichung identisch erfüllt ($0=0$). In der Tat sind in diesem Fall die beiden Ausgangsgleichungen gerade Vielfache voneinander, sodass nur eine von ihnen tatsächlich Information trägt. Dementsprechend ist jetzt die **Lösungsmenge unendlich mächtig** und kann beispielsweise folgendermaßen angegeben werden: $L=\{(x=3+2t;y=t)\,:\,t\in\mathbb{R}\}$.

Das Beispiel zeigt, dass das Aussehen der Lösungsmenge sehr stark von der Wahl des freien Parameters abhängen kann.

Ein solcher freier Parameter kann aber nicht nur auf einer der rechten Seiten des Linearen Gleichungssystems auftreten, sondern auch auf den linken Seiten, ja er kann auch mehrfach, in funktionalen Abwandlungen, sowohl links als auch rechts usw. vorkommen. Auch mehrere freie Parameter sind denkbar. Ein etwas komplizierteres Beispiel ist gegeben durch:

Beispiel 4.4.2

Im Folgenden soll die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 1\,, \\ x + \alpha y + z &= 1\,, \\ \alpha x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

studiert werden und zwar in Abhängigkeit von dem Wert des Parameters α.

Dazu löst man beispielsweise die erste Gleichung nach der Unbekannten x auf,

$$x = 1 - y - \alpha z \ : \ \text{Gleichung } (1')\,,$$

und **setzt** das Ergebnis für x in die zweite und in die dritte Gleichung **ein**:

$$\begin{array}{rcllrcll} (1 - y - \alpha z) + \alpha y + z &=& 1 & \Leftrightarrow & -(1-\alpha)y + (1-\alpha)z &=& 0 & : \ \text{Gleichung } (2')\,, \\ \alpha(1 - y - \alpha z) + y + z &=& 1 & \Leftrightarrow & (1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z &=& 1-\alpha & : \ \text{Gleichung } (3')\,. \end{array}$$

Es entsteht ein System aus **zwei** linearen Gleichungen in den **zwei** Unbekannten y und z. Diesem System sieht man sofort an, dass für den Wert $\alpha = 1$ etwas Besonderes passiert. Man führt daher eine Fallunterscheidung durch:

Fall 1: $\alpha = 1$: In diesem Fall sind die beiden Gleichungen $(2')$ und $(3')$ identisch erfüllt $(0 = 0)$ und liefern keine weiteren Informationen; als einzige Beziehung zwischen den Unbekannten x, y und z verbleibt Gleichung $(1')$ bzw. Gleichung (1), die für $\alpha = 1$

$$x + y + z = 1 \ : \ \text{Gleichung } (\hat{1})$$

lautet. Daher besitzt die Lösungsmenge hier unendlich viele Elemente. Sie kann mit Hilfe **zweier freier Parameter** angegeben werden, z.B.

$$L = \{(s; t; 1 - s - t) \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Anschaulich gesprochen entspricht die Lösungsmenge gerade der durch Gleichung $(\hat{1})$ beschriebenen Ebene.

Fall 2: $\alpha \neq 1$: In diesem Fall kann man sowohl Gleichung $(2')$ als auch Gleichung $(3')$ durch $(1-\alpha)$ dividieren; man erhält unter Verwendung der 3. Binomischen Formel $((1-\alpha^2) = (1-\alpha)(1+\alpha))$:

$$\begin{aligned} -y + z &= 0 \quad : \ \text{Gleichung } (2'')\,, \\ y + (1+\alpha)z &= 1 \quad : \ \text{Gleichung } (3'')\,. \end{aligned}$$

Gleichung $(2'')$ besagt, dass $y = z$ gilt; dies setzt man in Gleichung $(3'')$ ein:

$$z + (1+\alpha)z = 1 \Leftrightarrow (2+\alpha)z = 1 \ : \ \text{Gleichung } (\star)\,.$$

Jetzt muss man nochmals vorsichtig sein und eine weitere Fallunterscheidung durchführen, da $\alpha = -2$ und $\alpha \neq -2$ unterschiedliche Konsequenzen nach sich ziehen:

Fall 2a: $\alpha = -2$: In diesem (Unter-)Fall lautet Gleichung ($\star$): $0 = 1$. Somit tritt ein Widerspruch auf und das Lineare Gleichungssystem, von dem ausgegangen wurde, hat keine Lösung, $L = \emptyset$.

Fall 2b: $\alpha \neq -2$: In diesem (Unter-)Fall kann man die letzte Gleichung problemlos nach z auflösen,

$$z = \frac{1}{2+\alpha} \, .$$

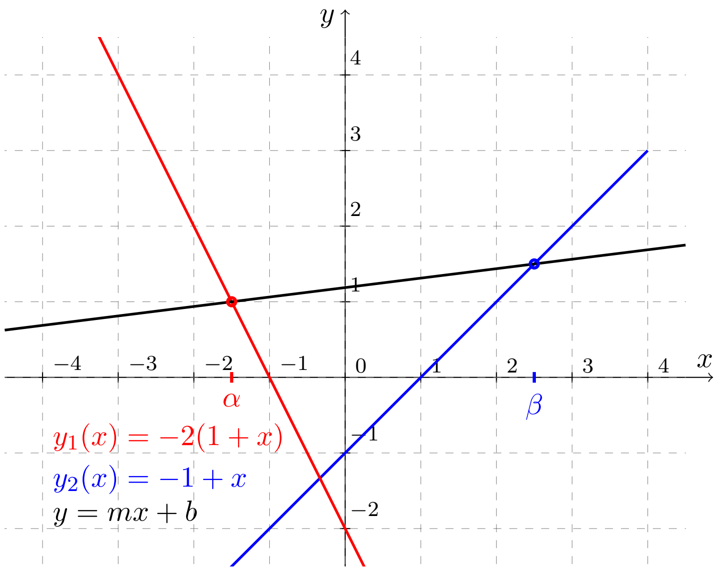
Damit liegen auch y ($y = z$) und x ($x = 1-y-\alpha z$) fest; das ursprüngliche Lineare Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung, $L = \{(x = \frac{1}{2+\alpha}; y = \frac{1}{2+\alpha}; z = \frac{1}{2+\alpha})\}$.

Im Vorhergehenden wurde das Beispiel auch deshalb so ausführlich ausbuchstabiert, um eindringlich auf die Wichtigkeit einer sauberen und genauen Fallunterscheidung hinzuweisen. Je nachdem, ob $\alpha = 1$, $\alpha = -2$ oder $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ gilt, sieht die Lösungsmenge völlig verschieden aus! Im ersten Fall ist sie unendlich mächtig, im zweiten leer und im dritten besteht sie aus genau einem Element!

Übrigens hätte man die Besonderheit des Falles $\alpha = 1$ auch direkt an dem ursprünglichen System ablesen können: Für $\alpha = 1$ tritt dreimal dieselbe Gleichung, nämlich $x + y + z = 1$, auf; d.h. zwei der drei Gleichungen im Ausgangssystem enthalten keinerlei neue Information und sind daher überflüssig; nur die Ebenengleichung $x + y + z = 1$ stellt für $\alpha = 1$ eine Beziehung zwischen den drei Unbekannten her.

4.4.3 Aufgaben

Aufgabe 4.4.1
Es sollen der Achsenabschnitt b und die Steigung m einer Geraden mit der Darstellung $y = mx + b$ bestimmt werden, welche durch zwei Punkte festgelegt wird. Der erste Punkt an der Stelle $x_1 = \alpha$ liegt auf der Geraden, welche durch die Gleichung $y_1(x) = -2(1 + x)$ beschrieben wird; der zweite Punkt an der Stelle $x_2 = \beta$ liegt auf der Geraden, die durch $y_2(x) = x - 1$ beschrieben wird. Die Situation wird durch die nachfolgende Graphik verdeutlicht.



a. Bestimmen Sie das Gleichungssystem für die Geradenparameter b und m.

   Die erste Gleichung lautet $m\alpha + b =$ ☐ ;
   die zweite Gleichung lautet $m\beta + b =$ ☐ .

b. Lösen Sie dieses Gleichungssystem für b und m. Für welche α und β ergibt sich eine eindeutige, keine bzw. unendlich viele Lösungen?

   Z.B. erhält man für den Fall $\alpha = -2$ und $\beta = 2$ die Lösung $m =$ ☐ und $b =$ ☐ , für den Fall $\alpha = 2$ und $\beta = -2$ ergibt sich die Lösung $m =$ ☐ und $b =$ ☐ .

   Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen, falls $\alpha =$ ☐ und $\beta =$ ☐ ist.
   Die zugehörigen Lösungen lassen sich parametrisieren mit $m = r$ und $b =$ ☐ , $r \in \mathbb{R}$.

c. Was bedeuten die letzten beiden Fälle, d.h. keine bzw. unendlich viele Lösungen, anschaulich?

Lösung:

a. Das LGS für m und b ergibt sich aus den Bedingungen

$$y(x_1 = \alpha) = y_1(x_1 = \alpha) \text{ und } y(x_2 = \beta) = y_2(x_2 = \beta)$$

zu

$$\begin{array}{rcll} m\alpha + b &=& -2(1+\alpha) & \text{Gl. (1) ,} \\ m\beta + b &=& -1+\beta & \text{Gl. (2) .} \end{array}$$

b. Ersetzt man Gl. (2) durch die Differenz von Gl. (2) und Gl. (1), dann erhält man

$$\begin{array}{rcll} m\alpha + b &=& -2(1+\alpha) & \text{Gl. (1) ,} \\ m(\beta-\alpha) &=& 1+2\alpha+\beta & \text{Gl. (2') .} \end{array}$$

Das LGS liegt damit bereits in Dreiecksform vor.

A. Für den Fall $\beta - \alpha \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \beta \neq \alpha$ kann Gl. $(2')$ durch $(\beta - \alpha)$ dividiert werden, womit man die Steigung m zu

$$m = \frac{1+2\alpha+\beta}{\beta-\alpha}$$

erhält. Dieses Ergebnis kann man z.B. in die nach b aufgelöste Gl. (1) einsetzen:

$$b = -2(1+\alpha) - m\alpha = -2(1+\alpha) - \frac{1+2\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\alpha \; .$$

Die so gefundenen Werte für m und b stellen eine eindeutige Lösung des betrachteten LGS dar.

Für das Beispiel $\alpha = -2, \beta = 2$ erhält man die Lösung $m = -1/4, b = 5/2$ und für $\alpha = 2, \beta = -2$ das Ergebnis $m = -3/4, b = -9/2$.

B. In diesem Fall gilt $\beta - \alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta = \alpha$. Damit verschwindet die linke Seite von Gl. $(2')$. Dies macht die folgende weitere Fallunterscheidung nötig:

Ba. Gilt nun für die rechte Seite von Gl. $(2')$ $1+2\alpha+\beta \neq 0$, dann besitzt das LGS keine Lösung, $L = \emptyset$. Setzt man noch $\beta = \alpha$ ein, dann erhält man $\beta = \alpha \neq -\frac{1}{3}$.

Bb. Verschwindet die rechte Seite von Gl. $(2')$, dann besteht das LGS faktisch nur noch aus Gl. (1) mit $\beta = \alpha = -\frac{1}{3}$. In diesem Fall kann man $m = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, beliebig vorgeben, und b ergibt sich direkt aus Gl. (1) zu $b = \frac{1}{3}\lambda - \frac{4}{3}$. Die Lösungsmenge stellt sich damit wie folgt dar:

$$L = \left\{ \left(m = \lambda ; b = \frac{1}{3}\lambda - \frac{4}{3} \right) \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \; .$$

c. Die rechten Seiten der Gln. (1) und (2) enthalten die y-Werte der Ausgangsgeraden an den Stellen α und β, d.h. $y_1(\alpha)$ und $y_2(\beta)$, sodass in Gl. $(2')$ auf der rechten Seite die Differenz $y_2(\beta) - y_1(\alpha)$ steht. Im Fall 2., $\beta = \alpha$, erhält man dann $y_2(\alpha) - y_1(\alpha)$. Das LGS hat also keine Lösung (Fall 2a), wenn dann $y_2(\alpha) - y_1(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow y_2(\alpha) \neq y_1(\alpha)$ gilt, die beiden Geraden also verschiedene y-Werte besitzen. Dahingegen existieren unendlich viele Lösungen (Fall 2b), wenn sich die beiden Ausgangsgeraden an der Stelle α schneiden.

Aufgabe 4.4.2

Bestimmen Sie für das folgende parameterabhängige LGS die Lösungsmenge für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} x - y + tz &=& t & \text{Gl. (1) ,} \\ tx + (1-t)y + (1+t^2)z &=& -1+t & \text{Gl. (2) ,} \\ (1-t)x + (-2+t)y + (-1+t-t^2)z &=& t^2 & \text{Gl. (3) .} \end{array}$$

Das LGS besitzt Lösungen nur für folgende Werte des Parameters: $t \in$ [ ] .

Für den kleinsten dieser Parameterwerte kann die Lösung angegeben werden durch:
$x =$ [ ] , $y =$ [ ] , $z = r$, $r \in \mathbb{R}$.
Für den größten dieser Parameterwerte kann die Lösung angegeben werden durch:
$x =$ [ ] , $y =$ [ ] , $z = r$, $r \in \mathbb{R}$.

Lösung:
In einem ersten Schritt kann man Gl. (2) zu Gl. (3) addieren und damit Gl. (3) ersetzen:

$$\begin{aligned} x - y + tz &= t & \text{Gl. } (1)\ , \\ tx + (1-t)y + (1+t^2)z &= -1 + t & \text{Gl. } (2)\ , \\ x - y + tz &= -1 + t + t^2 & \text{Gl. } (3')\ . \end{aligned}$$

Da die linken Seiten der Gln. (1) und (3′) übereinstimmen, bietet es sich an, das Negative von Gl. (1) zu Gl. (3′) zu addieren und damit Gl. (3′) zu ersetzen:

$$\begin{aligned} x - y + tz &= t & \text{Gl. } (1)\ , \\ tx + (1-t)y + (1+t^2)z &= -1 + t & \text{Gl. } (2)\ , \\ 0 &= -1 + t^2 & \text{Gl. } (3'')\ . \end{aligned}$$

Nachfolgend erhält man für das LGS eine Dreiecksform, wenn man das $(-t)$-fache von Gl. (1) zu Gl. (2) hinzuaddiert und damit Gl. (2) ersetzt:

$$\begin{aligned} x - y + tz &= t & \text{Gl. } (1)\ , \\ y + z &= -1 + t - t^2 & \text{Gl. } (2')\ , \\ 0 &= -1 + t^2 & \text{Gl. } (3'')\ . \end{aligned}$$

Schließlich führt die Addition von Gl. (2′) zu Gl. (1) zur einer weiteren Vereinfachung,

$$\begin{aligned} x + (1+t)z &= -1 + 2t - t^2 & \text{Gl. } (1')\ , \\ y + z &= -1 + t - t^2 & \text{Gl. } (2')\ , \\ 0 &= -1 + t^2 & \text{Gl. } (3'')\ . \end{aligned}$$

Dieses äquivalente LGS besitzt nur dann eine Lösung, wenn auch Gl. (3′′) erfüllt ist, also $0 = -1 + t^2$ $\Leftrightarrow$ $t^2 = 1$ gilt. In allen anderen Fällen ist die Lösungsmenge leer, d.h.

$$L = \emptyset \text{ für } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}\ .$$

Ist nun Gl. (3′′) erfüllt, also $t = 1$ oder $t = -1$, dann kann z frei gewählt werden, d.h. $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Umstellung der Gln. (1′) und (2′) nach x bzw. y liefert im Fall $t = 1$ die Ausdrücke $x = -2z$ und $y = -1 - z$, also

$$L = \{(x = -2\lambda; y = -1 - \lambda; z = \lambda) \ :\ \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ für } t = 1\ .$$

Entsprechend ergeben sich im Fall $t = -1$ die Ausdrücke $x = -4$ und $y = -3 - z$, also

$$L = \{(x = -4; y = -3 - \lambda; z = \lambda) \ :\ \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ für } t = -1\ .$$

4.5 Abschlusstest

4.5.1 Abschlusstest Modul 5

Aufgabe 4.5.1
Bestimmen Sie die Lösungsmenge für folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= -5\,, \\ 3x + y &= 1\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ☐ ist leer,
☐ enthält genau eine Lösung: $x =$ ☐ , $y =$ ☐ ,
☐ enthält unendlich viele Lösungspaare $(x; y)$.

Aufgabe 4.5.2
Geben Sie diejenige zweistellige Zahl an, die bei Vertauschen von Einer- und Zehnerziffer auf eine um 18 kleinere Zahl führt und deren Quersumme 6 ist. Antwort: ☐ .

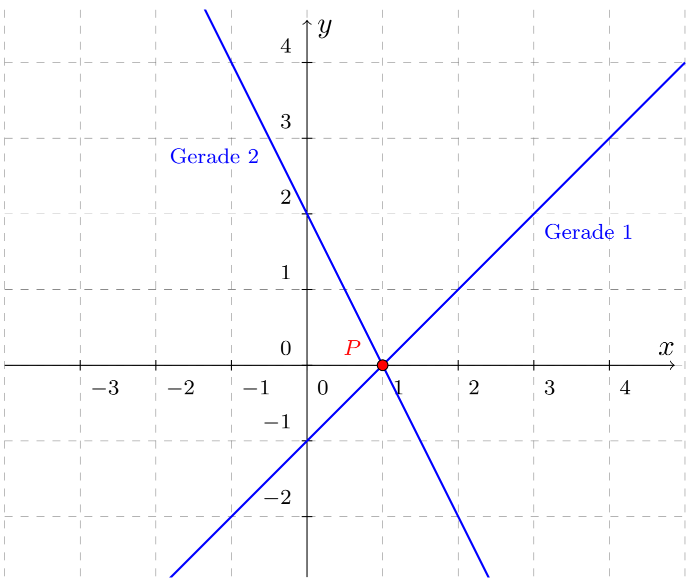
Aufgabe 4.5.3
Für welchen Wert des reellen Parameters α besitzt das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3\,, \\ 4x + 2y &= \alpha \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen?

Antwort: $\alpha =$ ☐ .

Aufgabe 4.5.4
Die Abbildung zeigt zwei Geraden im zweidimensionalen Raum.



Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf:

Gerade 1: $y =$ ☐ ,

Gerade 2: $y =$ ☐ .

Wieviele Lösungen besitzt das zugehörige Lineare Gleichungssystem?

Es besitzt
☐ keine Lösung,
☐ genau eine Lösung oder
☐ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4.5.5
Geben Sie die Lösungsmenge für folgendes Lineare Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten, an:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 3\,, \\ -x + y + z &= 1\,, \\ 2y + 3z &= 5\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge
☐ ist leer,
☐ enthält genau eine Lösung: $x =$ ☐ , $y =$ ☐ , $z =$ ☐ ,
☐ enthält unendlich viele Lösungen $(x; y; z)$.

5 Geometrie

Modulübersicht

In den ersten Abschnitten wird in die elementare Geometrie eingeführt. Hierzu wird auch Bezug auf die bisherigen Module genommen. Im Zentrum stehen die Eigenschaften von Dreiecken, bevor Flächen von Vielecken und Volumina von einfachen Körpern berechnet werden. Weitergehende Fragestellungen können mit den Winkelfunktionen bearbeitet werden. Diese bieten einen Ausblick auf die kommenden Module zur Analysis und zur Analytischen Geometrie.

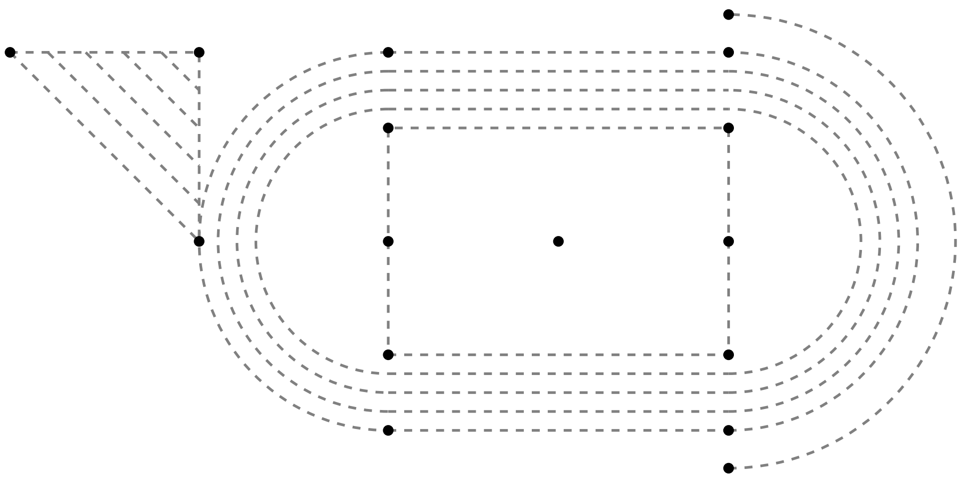
5.1 Grundbegriffe der ebenen Geometrie

5.1.1 Einführung

Ein klarer Sternenhimmel vermittelt einen anschaulichen Eindruck von den elementaren Objekten, den Punkten, in der Geometrie. Seit Menschengedenken wurden die Lichtpunkte am Himmel in Gedanken durch Linien miteinander verbunden, die als Umrisse unterschiedlichster Figuren interpretiert wurden. Vom praktischen Nutzen der Himmelsgeometrie zeugt praktisch jedes Gebäude mit seinen Ecken, Kanten, Fensterflächen, ...

Die Erfindung von beständigen Zeichenstiften, Tafeln aus Wachs, Papyrus oder Papier ermöglicht es, umgekehrt das Gesehene oder eigene Gedanken „auf Papier“ zu festzuhalten und anderen zu zeigen. Verbunden mit dem Willen, zum Beispiel das Gezeichnete als Bauwerk zu realisieren, war die Idee eines Plans geboren. Der Plan ist eine Zeichnung einer idealisierten Vorstellung, beispielsweise wie ein Sportstadion von oben betrachtet aussehen soll.

Für den Bau eines Sportstadions werden markante Punkte im Gelände abgesteckt. Den aktuellen Stand der Arbeiten zeigt die folgende Ansicht, in die die Umrisse aus einem Plan projiziert sind.



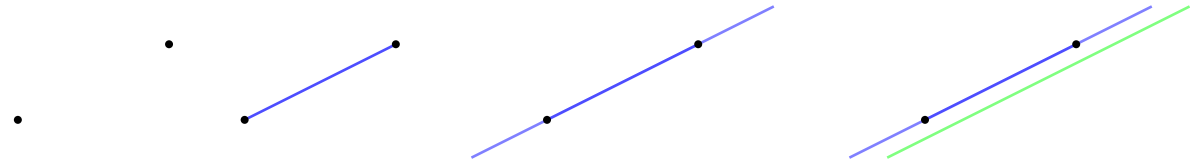
(Mess-)Punkte und Linien aus dem Plan für einen Stadionbau.

Die Zeichnung kann man als idealisiertes Abbild der Wirklichkeit ansehen. In diesem Sinne wird an einige geometrische Grundbegriffe erinnert. Sie sind der Ausgangspunkt, um anschließend kompliziertere Figuren und Körper zu konstruieren.

5.1.2 Punkte und Geraden

Ein Standpunkt oder eine Position in einer Ebene wird in der Geometrie zum einfachsten Objekt, einem Punkt, idealisiert. Über einen einzelnen Punkten lässt sich nichts weiter sagen.

Betrachtet man mehrere Punkte, kann man auf verschiedene Weise Beziehungen zwischen den Punkten betrachten – und man kann neue Objekte wie zum Beispiel Strecken und Geraden beschreiben (siehe die folgende Abbildung). Mathematisch gesprochen, sind es Mengen von Punkten.

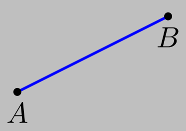


Punkte Strecke Gerade zwei Geraden

Als Erstes wird eine Strecke und der Abstand zwischen Punkten betrachtet. Dazu bedarf es noch eines Vergleichsmaßstabs, um den Abstand messen zu können. In der Mathematik wird dazu eine Vergleichsstecke ausgewählt, deren Länge als Einheitslänge bezeichnet wird. Für Anwendungen wird man entsprechend der Aufgabe passende Einheiten wie zum Beispiel Meter oder Zentimeter als Längeneinheit festlegen.

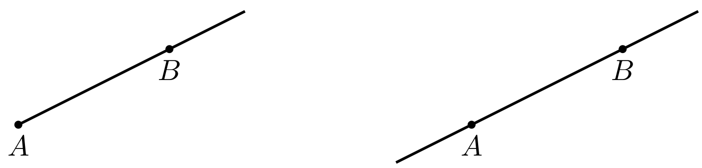
Strecken und Abstände 5.1.1

Gegeben sind Punkte A und B. Die **Strecke** $\overline{AB}$ zwischen A und B ist der kürzeste Weg zwischen den Punkten A und B.



Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ wird mit $[\overline{AB}]$ notiert. Die **Streckenlänge** ist gleich dem Abstand zwischen den Punkten A und B.

Das Bild von einem Lichtstrahl, ausgesandt von einem fernen Stern oder von der Sonne, ist eine passende Vorstellung für einen **Strahl**, der in einem Punkt A beginnt und in Richtung eines zweiten Punktes A gedanklich immer weiter geht. Ein Strahl wird auch **Halbgerade** genannt.



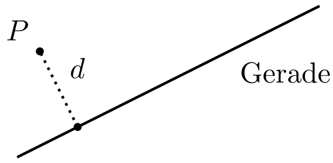
Strahl Gerade

Wenn man den Weg auf einer Strecke $\overline{AB}$ in beide Richtungen fortsetzt, spricht man von einer Geraden.

Gerade 5.1.2

Seien A und B zwei Punkte (das heißt, es ist A ein Punkt, der vom Punkt B verschieden ist). Dann bestimmen A und B genau eine **Gerade** AB.

Wenn man zu zwei Punkten A und B einen weiteren Punkt P betrachtet, kann man nach dem Abstand d von P zur Geraden AB fragen. Dies ist die kleinste Entfernung zwischen P und den Punkten der Geraden AB.



Wenn drei Punkte P, Q und S in der Ebene betrachtet werden, sind damit Geraden SP und SQ festgelegt.

Sie haben den Punkt S gemeinsam. Liegt auch der Punkt Q auf der Geraden SP, dann bezeichnen SQ und SP dieselbe Gerade. Wenn Q nicht zur Geraden SP gehört, sind SQ und SP verschiedene Geraden. Die beiden Geraden haben nur den Punkt S, den **Schnittpunkt**, gemeinsam.

Für irgendwelche Geraden g und h gibt es noch den Fall, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben. Der kleinste Abstand von Punkten auf g beziehungsweise h ist der Abstand zwischen den Geraden g und h. Somit haben g und h keinen gemeinsamen Punkt, wenn ihr Abstand größer als 0 ist. Geraden heißen **parallel**, wenn jeder Punkt auf einer der Geraden denselben Abstand zur anderen Geraden hat.

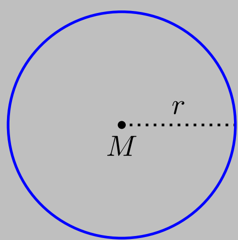
Auch eine einzelne Gerade kann über den Abstand von zwei Punkten M und M' beschrieben werden: Die Menge aller Punkte, die von zwei Punkten M und M' gleich weit entfernt sind, ist eine Gerade.

Dies ist ein typische Vorgehensweise in der Geometrie, mit Hilfe von Eigenschaften wie einem Abstand neue Objekte zu definieren. Auf diese Weise kann auch ein Kreis ganz einfach beschrieben werden.

Kreis 5.1.3

Gegeben ist ein Punkt M und eine positive reelle Zahl r.

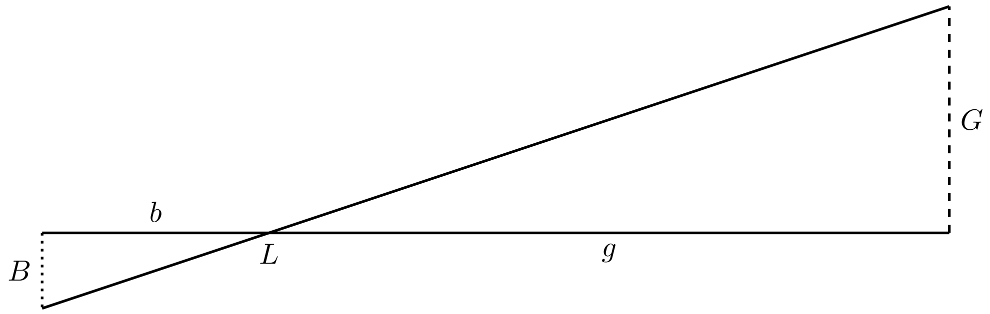
Dann heißt die Menge aller Punkte, die von M den Abstand r haben, ein **Kreis** um M mit **Radius** r.



5.1.3 Strahlensätze

Eine Lochkamera liefert ein kleines Bild der Umwelt. Die Größenverhältnisse vom Bild B zum Gegenstand G sind proportional zu den Abständen b beziehungsweise g, die jeweils von der Lochblende L gemessen werden:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \,.$$



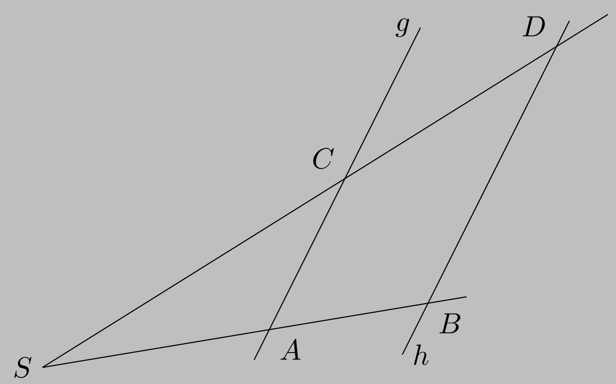
Eigenschaften von Bildern einer zentrischen Streckung kann man ebenfalls mit den Strahlensätzen beschreiben (siehe auch die Abbildung 5.3.4 auf Seite 148).

Die gemeinsame Eigenschaft der Beispiele findet sich darin, dass Strahlen (oder Geraden) mit einem gemeinsamen Schnittpunkt von parallelen Geraden geschnitten werden.

Strahlensätze 5.1.4

Vom gemeinsamen Punkt S gehen zwei Strahlen s_1 und s_2 aus, die durch die Punkte A beziehungsweise C verlaufen. Der Punkt B liegt auf dem Strahl s_1 und D liegt auf dem Strahl s_2. Zuerst werden die Strecken zwischen den Punkten auf den beiden Strahlen betrachtet, dann auch zwischen den Strahlen.

Für zwei Punkte P und Q sei $\overline{PQ}$ die Strecke von P nach Q, und $[\overline{PQ}]$ bezeichne die Länge dieser Strecke.



Wenn die Geraden g und h parallel sind, gelten die folgenden Aussagen:

- Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl:
$$\frac{[\overline{SA}]}{[\overline{SC}]} = \frac{[\overline{AB}]}{[\overline{CD}]} = \frac{[\overline{SB}]}{[\overline{SD}]} \, .$$
Dies kann auch so ausgedrückt werden:
$$\frac{[\overline{SA}]}{[\overline{AB}]} = \frac{[\overline{SC}]}{[\overline{CD}]} \quad \text{und} \quad \frac{[\overline{SA}]}{[\overline{SB}]} = \frac{[\overline{SC}]}{[\overline{SD}]} \, .$$
- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von S ausgehenden entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl:
$$\frac{[\overline{SA}]}{[\overline{SB}]} = \frac{[\overline{AC}]}{[\overline{BD}]} = \frac{[\overline{SC}]}{[\overline{SD}]} \, .$$

Dies kann auch so ausgedrückt werden:

$$\frac{[\overline{SA}]}{[\overline{AC}]} = \frac{[\overline{SB}]}{[\overline{BD}]} \quad \text{und} \quad \frac{[\overline{SC}]}{[\overline{CA}]} = \frac{[\overline{SD}]}{[\overline{DB}]} ,$$

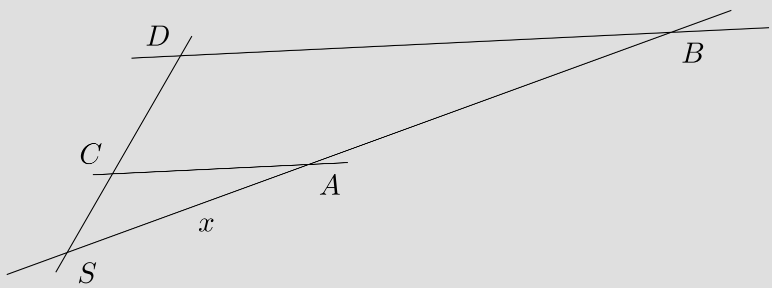
wobei $[\overline{AC}] = [\overline{CA}]$ und $[\overline{BD}] = [\overline{DB}]$ gilt.

Die Aussagen der Strahlensätze gelten auch, wenn anstelle von Strahlen zwei Geraden betrachtet werden, die sich im Punkt S schneiden. Als Anwendungsbeispiel ist oben eine Lochkamera genannt worden.

Auf diese Weise können Entfernungen zwischen Punkten berechnet werden, ohne dass die Strecke direkt gemessen wird.

Beispiel 5.1.5

Die gegebenen Punkte A, B, C und D bestimmen die Geraden AB und CD, die sich im Punkt S schneiden. Weiter ist bekannt, dass die Geraden AC und BD parallel sind. Zwischen den Punkten wurden die Abstände $[\overline{AB}] = 51$, $[\overline{SC}] = 12$ und $[\overline{CD}] = 18$ gemessen.



Daraus wird berechnet, wie weit A von S entfernt ist. Wenn der gesuchte Abstand mit x bezeichnet wird, gilt mit den Strahlensätzen dann

$$\frac{x}{[\overline{AB}]} = \frac{[\overline{SC}]}{[\overline{CD}]} ,$$

woraus

$$x = \frac{[\overline{SC}]}{[\overline{CD}]} \cdot [\overline{AB}] = \frac{12}{18} \cdot 51 = \frac{2}{3} \cdot 51 = 34$$

folgt.

5.1.4 Aufgaben

Aufgabe 5.1.1
Der Sohn des Hauses beobachtet den Baum auf des Nachbarn Grundstück. Er stellt fest, dass der Baum von der Hecke, die die beiden Grundstücke trennt, vollständig verdeckt wird, wenn er nur nahe genug an die Hecke herantritt. Jetzt sucht er den Punkt, an dem der Baum gerade so nicht mehr zu sehen ist.

Der 1,40 Meter große Junge muss 2,50 Meter von der 2,40 Meter hohen, 1 Meter breiten und oben spitz zulaufenden Hecke entfernt stehen, damit der Baum vollständig verdeckt ist.

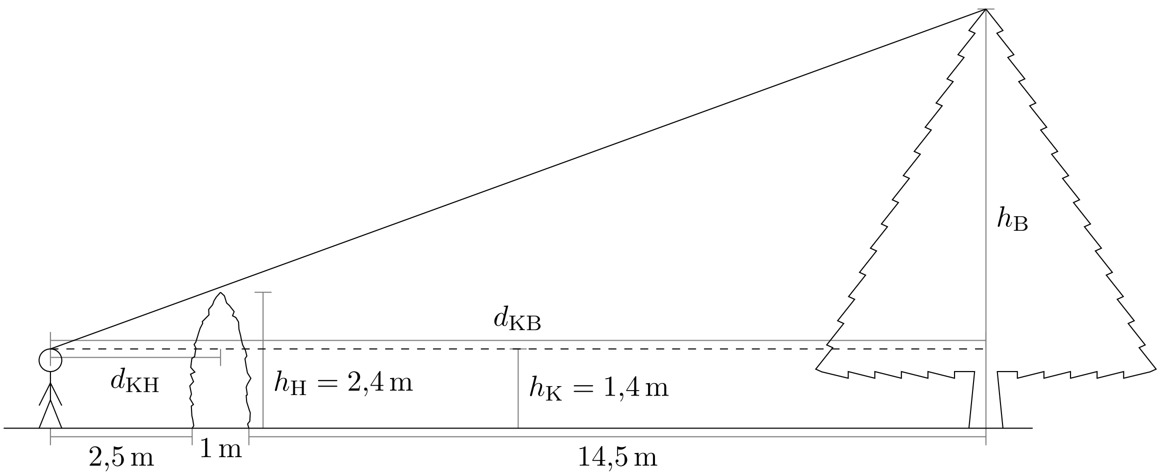
Wie hoch ist der Baum, wenn die Mitte des Stamms 14,5 Meter von der Hecke entfernt steht?

Führen Sie die Rechnung bitte zunächst allgemein durch und setzen Sie erst am Ende die Zahlenwerte ein!

Ergebnis: ______ m.

Hinweis:
Beachten Sie die Breite der Hecke!

Lösung:
Es werden die in der Zeichnung eingeführten Bezeichnungen für die Längen der jeweiligen Strecken verwendet.



Eine Anwendung des zweiten Strahlensatzes „$\frac{\text{komplett}}{\text{vorne}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}$“ liefert:

$$\frac{d_{\mathrm{KB}}}{d_{\mathrm{KH}}} = \frac{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{K}}}{h_{\mathrm{H}} - h_{\mathrm{K}}} \qquad \text{bzw.} \qquad h_{\mathrm{B}} = (h_{\mathrm{H}} - h_{\mathrm{K}}) \cdot \frac{d_{\mathrm{KB}}}{d_{\mathrm{KH}}} + h_{\mathrm{K}}\ .$$

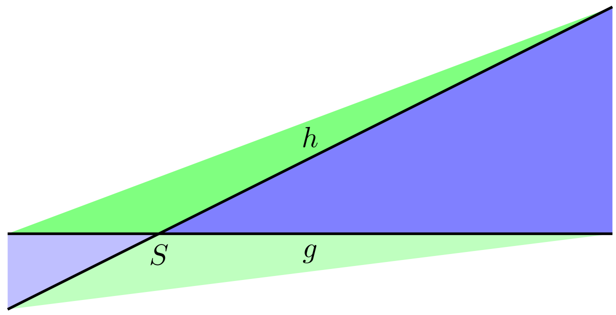
Nun gelten $d_{\mathrm{KH}} = 2{,}5\,\mathrm{m} + \frac{1\,\mathrm{m}}{2} = 3\,\mathrm{m}$ und $d_{\mathrm{KB}} = 2{,}5\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} + 14{,}5\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}$. Damit folgt

$$h_{\mathrm{B}} = (2{,}4\,\mathrm{m} - 1{,}4\,\mathrm{m}) \cdot \frac{18\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}} + 1{,}4\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m} \cdot 6 + 1{,}4\,\mathrm{m} = 7{,}4\,\mathrm{m}\ .$$

5.2 Winkel und Winkelmessung

5.2.1 Einführung

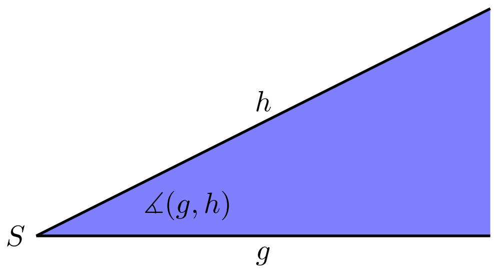
Geraden, die sich in einem Punkt S schneiden, teilen die Ebene in charakteristischer Weise auf. Zur Beschreibung dieser Beobachtung wird der Begriff Winkel eingeführt. Die Frage nach Möglichkeiten, Winkel zu messen, wird auf verschiedene Weisen beantwortet, die letztlich alle auf einer Einteilung von Kreisen beruhen. Hier werden das Gradmaß und das Bogenmaß beschrieben.



Jeder farbige Bereich zeigt einen der Winkel, die durch g und h festgelegt werden.

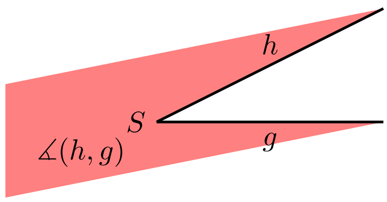
5.2.2 Winkel

Zwei Strahlen (Halbgeraden) g und h in der Ebene, die von demselben Punkt S ausgehen, schließen einen **Winkel** $\measuredangle(g, h)$ ein.



Winkel zwischen den Strahlen g und h.

In der Bezeichnung des Winkels $\measuredangle(g, h)$ ist die Reihenfolge wichtig, in der g und h aufgeschrieben werden. $\measuredangle(g, h)$ bezeichnet den oben beschriebenen Winkel, der dadurch festgelegt ist, dass man die Halbgerade g gegen den Uhrzeigersinn zur Halbgeraden h dreht. Mit $\measuredangle(h, g)$ wird der Winkel von h zu g bezeichnet.



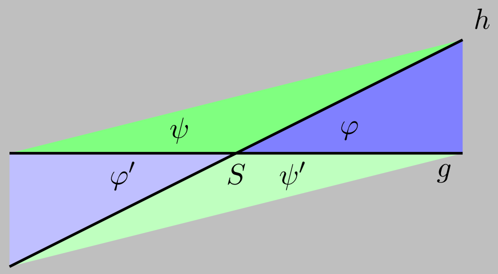
Winkel zwischen den Strahlen h und g.

Der Punkt S heißt **Scheitelpunkt** des Winkels, und die beiden Halbgeraden, die den Winkel bilden, heißen **Schenkel** des Winkels. Wenn A ein Punkt auf der Geraden g und B ein Punkt auf der Geraden h ist, so kann man auch $\measuredangle(ASB)$ für $\measuredangle(g,h)$ schreiben. In diesem Sinne werden Winkel zwischen Strecken $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ beschrieben.

Winkel werden oft mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, soweit sie sich vom lateinischen Alphabet unterscheiden, vgl. dazu Tabelle 1.1.8 auf Seite 13 im Kapitel 1. Indem man Geraden in die Betrachtungen miteinbezieht, lassen sich weitere Winkel entdecken.

Scheitelwinkel und Nebenwinkel 5.2.1

Es seien g und h zwei Geraden, die sich im Punkt S schneiden.



- Die Winkel φ und φ' heißen **Scheitelwinkel** zueinander.
- Die Winkel φ und ψ heißen **Nebenwinkel** bezüglich g.

In der obigen Zeichnung gibt es noch weitere Scheitelwinkel und Nebenwinkel.

Aufgabe 5.2.1
Notieren Sie alle Scheitelwinkel und alle Nebenwinkel.

Lösung:
Zusätzlich zu φ und φ' sind auch ψ und ψ' Scheitelwinkel. Nebenwinkel von g sind zusätzlich zu φ und ψ auch die Winkel φ' und ψ'. Außerdem sind ψ und φ' sowie ψ' und φ Nebenwinkel.

Einige besondere Winkel erhalten eigene Namen. Dabei ist eine Winkelhalbierende w diejenige Halbgerade, deren Punkte von beiden gegebenen Halbgeraden g und h denselben Abstand haben. Dann kann man sagen, dass w den Winkel zwischen g und h halbiert.

Namen besonderer Winkel 5.2.2

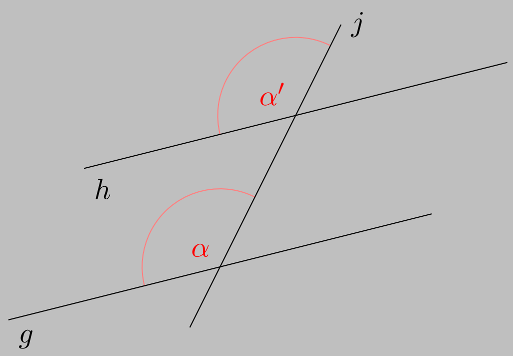
Seien g und h Halbgeraden mit dem Scheitelpunkt S.

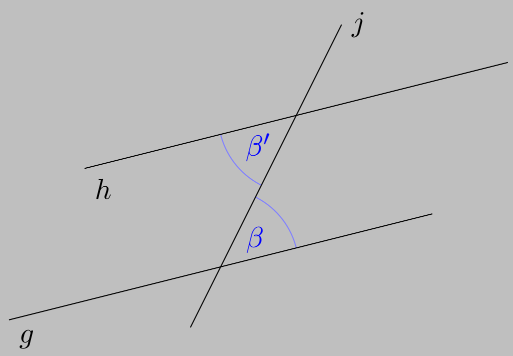
- Der Winkel, der die gesamte Ebene überdeckt, heißt **Vollwinkel**.
- Wenn g und h eine Gerade bilden, heißt der Winkel zwischen g und h gestreckter Winkel.
- Der Winkel zwischen zwei Halbgeraden, die einen gestreckten Winkel halbieren, heißt **rechter Winkel**. Man sagt dann auch, dass g und h **senkrecht aufeinander stehen** oder dass g und h **orthogonal zueinander** sind.

Als Nächstes sollen nun drei verschiedene Geraden betrachtet werden, von denen zwei parallel sind, wohingegen die dritte nicht parallel zu diesen beiden ist. Es ergeben sich dann acht Schnittwinkel. Je vier dieser Winkel sind gleich groß.

Winkel an parallelen Geraden 5.2.3

Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h, die von einer Geraden j geschnitten werden.

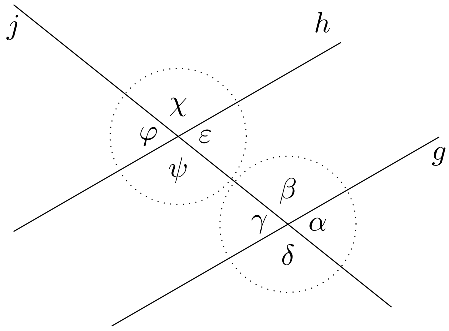




- Dann heißt der Winkel α' ein **Stufenwinkel** zu α, und
- der Winkel β' ein **Wechselwinkel** zu β.

Da g und h parallel sind, sind die Winkel α und α' gleich groß. Ebenso sind β und β' gleich groß.

Aufgabe 5.2.2
In der Zeichnung werden zwei parallele Geraden g und h dargestellt, die von einer weiteren Geraden j geschnitten werden. Erläutern Sie, welche Winkel gleich groß sind und welche Winkel Stufenwinkel beziehungsweise Wechselwinkel zueinander sind.



Lösung:

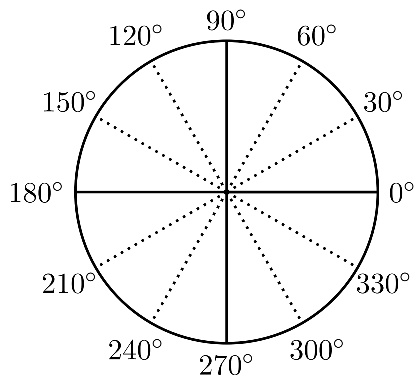
- Die Winkel α, γ, ε und φ sind gleich groß, ebenso die Winkel β, δ, χ und ψ.
- Es sind β und ψ bzw. γ und ε Wechselwinkel.
- Die Winkel α und ε sind Stufenwinkel, ebenso β und χ, δ und ψ und γ und φ.

5.2.3 Winkelmessung

Die Erklärung zur Bezeichnung des Winkel $\measuredangle(g, h)$, der durch Drehung von g gegen den Uhrzeigersinn zu h festgelegt wird, führt zu einer Idee, Winkel zu messen, das heißt quantitativ miteinander zu vergleichen.

So wie auf einem runden Ziffernblatt einer analogen Uhr die Markierungen zu den zwölf Zahlen für die Stunden im gleichen Abstand voneinander angebracht sind, kann man einen Kreis gleichmäßig einteilen. Auf diese Weise erhält man eine Skala für Winkel. Je nach der verwendeten Skalierung ergeben sich verschiedene Zahlen, mit denen die Größe eines Winkels angegeben werden kann.

Gradmaß Es wird eine Kreisscheibe in 360 gleiche Segmente eingeteilt. Eine Drehung um ein Segment beschreibt einen Winkel von 1 Grad. Hierfür wird 1° geschrieben. In der folgenden Zeichnung sind Winkel mit einem Gradmaß von 30° und Vielfachen davon dargestellt.



Bogenmaß Bereits im antiken Babylonien, Ägypten und Griechenland stellte man fest, dass das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Durchmesser D stets das gleiche ist, und somit Umfang und Durchmesser zueinander proportional sind. Dieses Verhältnis wird die Kreiszahl π genannt.

Kreiszahl 5.2.4

Gegeben ist ein Kreis mit Umfang U und Durchmesser D. Die **Kreiszahl** ist

$$\pi = \frac{U}{D} = \frac{U}{2r}$$

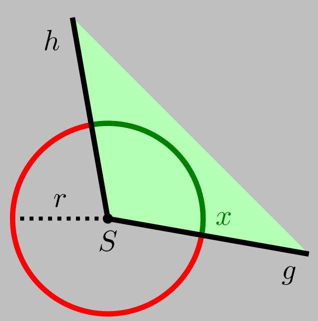
mit dem Kreisradius $r = \frac{1}{2}D$. Dabei ist π keine rationale Zahl. Sie kann nicht als endlicher oder periodischer Dezimalbruch geschrieben werden. Numerische Berechnungen ergeben, dass näherungsweise $\pi \approx 3{,}141592653589793$ ist.

Wenn der Radius des Kreises genau 1 ist, so hat der Kreis den Umfang 2π. Beim **Bogenmaß** wird die Linie eines Kreises vom Radius 1 eingeteilt. Als Bogenmaß eines Winkels $\measuredangle(g,h)$ wird die Länge des **Kreisbogens** verwendet, die durch den Winkel „ausgeschnitten" wird.

Damit wird Winkeln durch das Bogenmaß eine Zahl zwischen 0 und 2π zugeordnet. In der Technik wird auch die Kennzeichnung rad (für Radiant) verwendet, um explizit auszudrücken, dass ein Winkel im Bogenmaß gemessen wird.

Bogenmaß 5.2.5

Gegeben sind zwei Halbgeraden g und h, die vom gemeinsamen Punkt S ausgehen und den Winkel $\measuredangle(g,h)$ einschließen. Zeichnet man einen Kreis mit Radius $r = 1$ um S, wird der Kreis von den beiden Halbgeraden in zwei Teile zerschnitten. Wichtig ist nun derjenige Kreisbogen x, auf dem man von der Halbgeraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Halbgeraden h kommt (im Bild grün eingefärbt). Dies kann man auch so ausdrücken, dass der Scheitelpunkt S stets links liegt, wenn man sich auf dem Kreisbogen x von g in Richtung h bewegt.



Die Länge des Kreisbogens x ist das **Bogenmaß** des Winkels $\measuredangle(g,h)$.

Mit einem Winkelmaß wie dem Bogenmaß oder dem zuvor eingeführten Gradmaß kann man Winkel einfach in verschiedene Klassen einteilen und dafür eigene Namen vergeben. Zur Wiederholung werden auch bereits eingeführte Bezeichnungen nochmals mit aufgeführt.

Namen für verschiedene Klassen von Winkeln 5.2.6

Für Winkel, deren Bogenmaß in einem bestimmten Bereich liegt, werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- Ein Winkel mit einem Maß zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ heißt **spitzer Winkel**.
- Ein Winkel mit einem Maß von $\frac{\pi}{2}$ heißt **rechter Winkel**.
- Ein Winkel mit einem Maß zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π heißt **stumpfer Winkel**.
- Ein Winkel mit einem Maß zwischen π und 2π heißt **überstumpfer Winkel**.

Man sagt, zwei Halbgeraden **stehen senkrecht aufeinander**, wenn sie einen rechten Winkel bilden.

Zwei Halbgeraden bilden eine Gerade, wenn sie einen Winkel vom Maß π bilden.

Wenn man das Bogenmaß des Winkels $\measuredangle(g,h)$ kennt, kann man auch das Bogemaß des Winkels $\measuredangle(h,g)$ bestimmen. Aus der obigen Definition 5.2.5 auf der vorherigen Seite ergibt sich, dass

$$\measuredangle(h,g) = 2\pi - \measuredangle(g,h)$$

gilt. In der Zeichnung zur Definition 5.2.5 auf der vorherigen Seite ist das Bogenmaß des Winkels $\measuredangle(h,g)$ die Länge des rot dargestellten Kreisbogens des Kreises mit dem Radius $r = 1$.

Die Formulierungen der letzten Sätze klingen möglicherweise umständlich. Dies liegt vermutlich auch daran, dass genau zwischen Winkel und einem Maß, hier dem Bogenmaß, für den Winkel unterschieden wird.

Wenn es darum geht, einen gesuchten Wert zu berechnen, werden bei Strecken oft dieselbe Bezeichnung für die Strecke und ihre Länge verwendet. Dies ist meistens verständlich und hilft, einen Sachverhalt einfach zu beschreiben oder in einer Zeichnung darzustellen. Wichtig ist dabei, dass die verwendete Einheit bekannt ist oder explizit angegeben wird. Eine solche Vereinbarung, auch Konvention genannt, wird im Zusammenhang mit Winkeln ebenfalls oft verwendet, wenn aus dem Zusammenhang verständlich wird, dass es um die Berechnung eines Wertes in einem bestimmten Winkelmaß geht.

Konvention 5.2.7

Wenn eine Berechnung unabhängig von einem bestimmten Winkelmaß ist oder dieses vorab festgelegt wurde, wird in Rechnungen auch kurz vom Winkel gesprochen und dieselbe Bezeichnung für den Winkel und seinen Wert im gewählten Winkelmaß verwendet.

In diesem Sinne kann dann beispielsweise $\measuredangle(g,h) = 90°$ geschrieben und vom rechten Winkel $\measuredangle(g,h)$ gesprochen werden, der von Geraden g und h eingeschlossen wird. Dies gilt entsprechend, wenn das Bogenmaß verwendet wird.

Ein Wert eines Winkels im Gradmaß kann in das Bogenmaß umgerechnet werden (und umgekehrt), indem man die Verhältnisse der Maßzahlen eines Winkels zum Wert des Vollwinkels im jeweiligen Winkelmaß betrachtet. Die Umrechnung zwischen Bogenmaß und Gradmaß wird im Folgenden beschrieben.

Zusammenhang zwischen Bogenmaß und Gradmaß 5.2.8

Es werden Halbgeraden g und h betrachtet, die den Winkel $\measuredangle(g,h)$ einschließen. Das Bogenmaß des Winkels wird mit x bezeichnet, und das Gradmaß des Winkels mit α.

Dann ist der Anteil x von 2π gleich dem Anteil α von $360°$ und damit:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}\ .$$

Somit ist

$$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot x\ .$$

Deshalb sind die Angaben im Bogenmaß und im Gradmaß zueinander proportional, sodass die Umrechnung mit dem jeweiligen Proportionalitätsfaktor $\frac{\pi}{180°}$ beziehungsweise $\frac{180°}{\pi}$ sehr einfach ist.

Aufgabe 5.2.3
Der Winkel $\measuredangle\,(g,h)$ beträgt im Gradmaß 60°. Rechnen Sie den Winkel in das Bogenmaß um:

$\measuredangle\,(g,h) = \boxed{}$.

Lösung:
Aus

$$\frac{\measuredangle\,(g,h)}{2\pi} = \frac{60°}{360°}$$

ergibt sich

$$\measuredangle\,(g,h) = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}\ .$$

Aufgabe 5.2.4
Der Winkel β beträgt im Bogenmaß $\pi/4$. Wie groß ist der Winkel im Gradmaß?

$\beta = \boxed{}\ °.$

Lösung:
Aus

$$\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{\beta}{360°}$$

erhält man

$$\beta = \frac{\pi/4}{2\pi} \cdot 360° = \frac{1}{8} \cdot 360° = 45° \,.$$

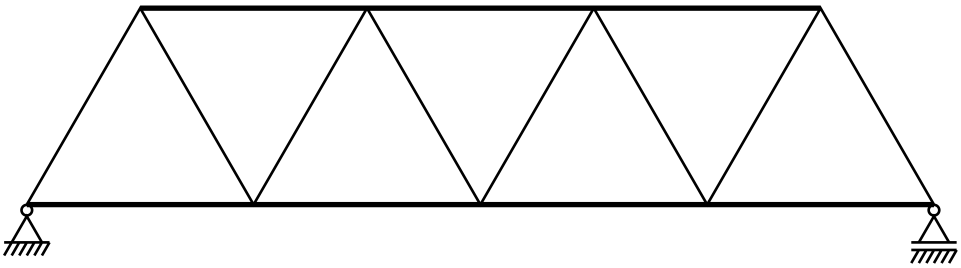
Aufgabe 5.2.5
Es werden sechs Winkel α_1 bis α_6 betrachtet, von denen jeweils der Wert im angegebenen Winkelmaß bekannt ist. Berechnen Sie den Wert im anderen genannten Winkelmaß.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
Bogenmaß	π	$\boxed{}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\boxed{}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\boxed{}$
Gradmaß	$\boxed{}$	324	$\boxed{}$	270	$\boxed{}$	30

5.3 Rund um Dreiecke

5.3.1 Einführung

Technische Bauwerke wie zum Beispiel Fachwerke oder manche Brücken nutzen Dreiecke als Konstruktionselemente.



Umgekehrt kann man sich fragen, wie irgendeine Fläche in Dreiecke zerlegt werden kann. Diese Fragestellung ist für viele geometrische Berechnungen hilfreich. Einige Beispiele zeigt der Abschnitt 5.4 auf Seite 151.

Außerdem führt die Frage, wie irgendwelche Flächen in einfach zu bestimmende „Grundformen“ zerlegt werden können, in Anwendungen zu konstruktiven Antworten, die weit über elementare geometrische Betrachtungen hinaus bedeutend sind. Einen ersten Eindruck vermittelt die Integralrechnung im Kapitel 8 auf Seite 287 und ihre Anwendung in der Berechnung von Flächeninhalten. Dort wird oft von einer „näherungsweisen“ Zerlegung in Rechtecken ausgegangen (die man sich jeweils in zwei Dreiecke zerlegt denken kann, wenn man bei Dreiecken bleiben möchte). Für die dreidimensionale computerunterstützte Modellierung von Oberflächen von Körpern, beispielsweise im Automobilbau von einer Fahrzeugkarosserie, bilden Zerlegungen in Dreiecke die Grundlage für viele Berechnungen und täuschend echt aussehende virtuelle Animationen.

5.3.2 Dreiecke

Viele Aussagen über geometrische Figuren und Körper ergeben sich aus Eigenschaften von Dreiecken, der „einfachsten geschlossenen Figur“, die durch drei Punkte bestimmt wird, die nicht auf einer Geraden liegen.

Zunächst werden die wichtigsten Begriffe zusammengestellt, bevor Fragen beantwortet werden, wann Dreiecke eindeutig bestimmt sind und wie einzelne Seitenlängen oder Winkel berechnet werden können. Hierbei sind die Strahlensätze ein wichtiges Hilfsmittel, die auch als Aussagen über Beziehungen zwischen Dreiecken gesehen werden können.

Funktionale Beziehungen zwischen Seitenlängen und Winkel werden dann im Abschnitt 5.6 auf Seite 171 betrachtet, um weitergehende Fragestellungen beantworten zu können, die für Anwendungen relevant sind.

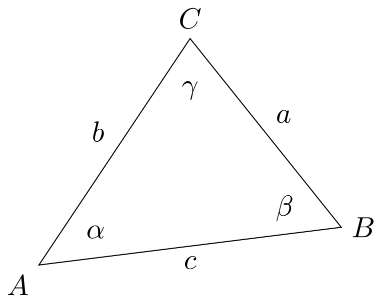
Dreieck 5.3.1

Ein **Dreieck** entsteht, wenn man drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen, verbindet. Dieses Dreieck wird dann mit ABC bezeichnet.

- Die drei Punkte, die verbunden werden, heißen **Ecken** des Dreiecks, und die drei Verbindungslinien heißen **Seiten** des Dreiecks.
- Je zwei Seiten des Dreiecks bilden je zwei Winkel.

  Der kleinere dieser beiden Winkel heißt **Innenwinkel** (oft kurz Winkel genannt), und der größere der beiden Winkel heißt **Außenwinkel**.
- Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks ist $180°$ beziehungsweise π.

Eine oft verwendete Art, die Größen eines Dreiecks zu bezeichnen, ist folgende: Man benennt die Ecken eines Dreiecks in „mathematisch positiver“ Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) mit lateinischen Großbuchstaben. Die einer Ecke gegenüberliegende Seite eines Dreiecks bekommt den entsprechenden Kleinbuchstaben zugeordnet, und der Innenwinkel in einer Ecke erhält den entsprechenden Kleinbuchstaben des griechischen Alphabets.
Da die Außenwinkel eines Dreiecks wesentlich weniger interessant sind als die Innenwinkel, nennt man die **Innenwinkel** eines Dreiecks auch schlicht **Winkel** des Dreiecks.



Die Summe aller (Innen-)Winkel in einem Dreieck beträgt $180°$ beziehungsweise π. Somit kann höchstens ein Winkel gleich oder größer als $90°$ beziehungsweise $\frac{\pi}{2}$ sein. Dementsprechend werden die Dreiecke nach ihrem größten Winkel in drei verschiedene Klassen eingeteilt:

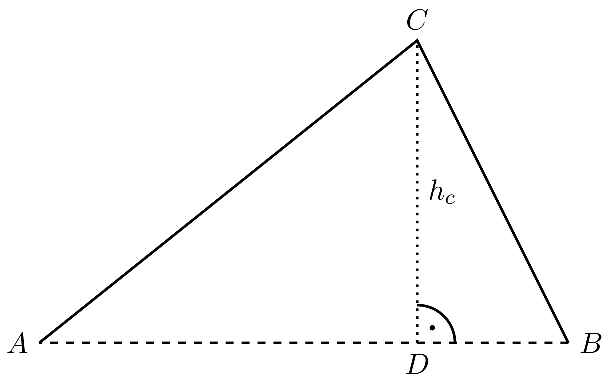
Bezeichungen für Dreiecke 5.3.2

Dreiecke werden folgendermaßen nach ihren Winkeln benannt:

- Ein Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, heißt **spitzwinklig**.
- Ein Dreieck, das einen rechten Winkel enthält, heißt **rechtwinklig**.

  In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen, **Katheten**, und die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse**.
- Ein Dreieck, das einen Winkel mit einem Maß von über $\frac{\pi}{2}$ besitzt, heißt **stumpfwinklig**.

Es wird eine einfache Konstruktion eines Wagenhebers in der Form eines Dreiecks betrachtet: Er besteht aus zwei Stäben, die durch ein Gelenk miteinander verbunden sind. Die anderen Endpunkte der beiden Stäbe können zusammengezogen werden können. Je großer der Winkel eines Stabs gegenüber der Straße ist, desto höher befindet sich das Gelenk über dem Boden.



So wird in einem Dreieck ABC die kürzeste Strecke zwischen der Ecke C und der Geraden, die durch die gegenüberliegende Seite c bestimmt ist, die **Höhe eines Dreiecks** h_c auf die Seite c genannt. Der andere Endpunkt D der Strecke h_c heißt **Höhenfußpunkt**. Entsprechend werden die Höhen h_a und h_b definiert.

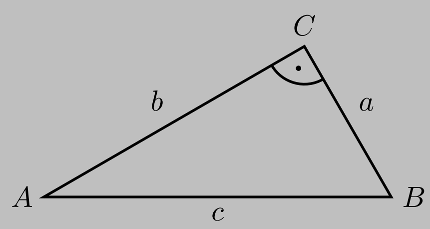
Man kann auch sagen, dass die Höhen diejenigen Strecken sind, die senkrecht auf der Geraden einer Seite stehen und bis zu einer Ecke des Dreiecks gehen.

5.3.3 Satz des Pythagoras

Eine Aussage über die Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck bietet der **Satz des Pythagoras**. Dieser wird hier in einer oft verwendeten Formulierung angegeben.

Satz des Pythagoras 5.3.3

Es wird ein rechtwinkliges Dreieck betrachtet, in dem der rechte Winkel bei C liegt.



Dann ist die Summe der Quadrate über den Katheten a und b gleich dem Quadrat über der Hypotenuse c. Mit den genannten Bezeichnungen gilt somit (siehe auch das abgebildete Dreieck):

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

Werden die Seiten des Dreiecks anders bezeichnet, muss die Gleichung entsprechend angepasst werden!

Beispiel 5.3.4

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 6$ und $b = 8$.

Die Länge der Hypotenuse kann mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$c = \sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\ .$$

Aufgabe 5.3.1
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel in C, der Hypotenuse $c = \frac{25}{3}$ und der Höhe $h_c = 4$ sowie der Strecke $\overline{DB}$ mit $q = [\overline{DB}] = 3$. Dabei bezeichnet D den Höhenfußpunkt der Höhe h_c. Berechnen Sie die Länge der beiden Katheten a und b.

Lösung:
Es wird der Satz des Pythagoras auf das Dreieck DBC angewandt, das in D einen rechten Winkel hat. Dann ist

$$a = \sqrt{h_c^2 + q^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\ .$$

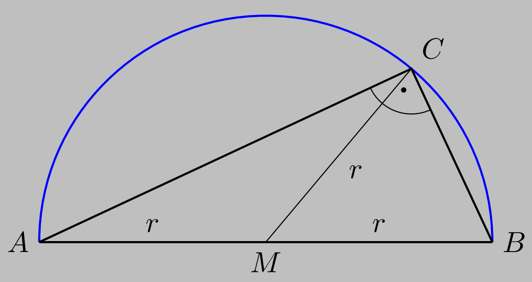
Nun wird der Satz des Pythagoras auf das gegebene rechtwinklige Dreieck ABC angewandt, woraus

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$$

folgt.

Der **Satz des Thales** ist ein weiterer wichtiger Satz, der eine Aussage über rechtwinklige Dreiecke ausdrückt.

Satz des Thales 5.3.5



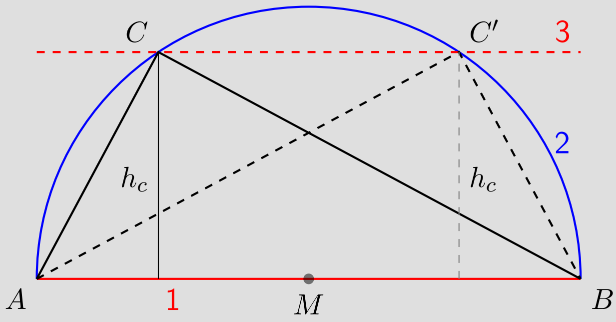
Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf einem Kreis mit Radius r und der Hypotenuse $\overline{AB}$ als Durchmesser der Länge $2r$.

Die umgekehrte Aussage gilt ebenso. Wenn man über einer Strecke $\overline{AB}$ einen Halbkreis konstruiert und dann A und B mit einem beliebigen Punkt C auf dem Halbkreis verbindet, dann ist das so entstandene Dreieck immer rechtwinklig.

Beispiel 5.3.6

Es soll ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge $c = 6\,\text{cm}$ und der Höhe $h_c = 2{,}5\,\text{cm}$ konstruiert werden.

1. Zuerst zeichnet man die Hypotenuse
$$c = \overline{AB}\ .$$
2. Die Mitte der Hypotenuse wird nun zum Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = c/2$.
3. Nun zeichnet man eine Parallele zur Hypotenuse im Abstand h_c. Es gibt zwei Schnittpunkte C und C' dieser Parallelen mit dem Thaleskreis.



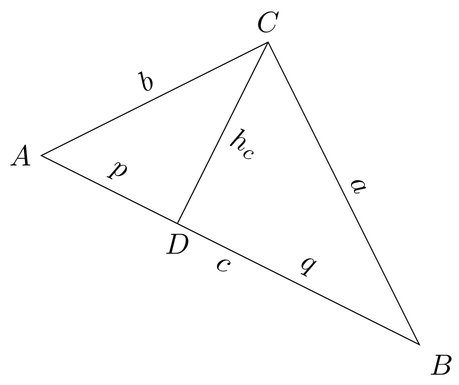
Diese Schnittpunkte sind jeweils die dritte Ecke eines Dreiecks, das die geforderten Eigenschaften hat, das heißt, man erhält zwei Lösungen. Würde man noch einen Thaleskreis nach unten zeichen, so ergäben sich noch mal zwei Lösungen. Wenn es nicht um die Lage, sondern nur um die „Form“ der Dreiecke geht, dann sind alle diese Dreiecke „deckungsgleich“ (siehe auch 5.3.10 auf Seite 146).

Aufgabe 5.3.2
Welche Höhe h_c kann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c maximal haben?

Lösung:
Die Höhe h_c kann maximal so groß werden wie der Radius des Thaleskreises über der Hypotenuse. Es ist also $h_c \leq \frac{c}{2}$.

Weiterführende Inhalte:
In einem rechtwinkligen Dreieck gelten neben dem Satz des Pythagoras weitere Aussagen. Dazu werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Es wird ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C betrachtet. Die Höhe h_c schneidet die Hypotenuse des Dreiecks ABC im Punkt D, dem Höhenfußpunkt. Weiter werden die Bezeichnungen $p = [\overline{AD}]$ und $q = [\overline{BD}]$ vereinbart.



Höhensatz 5.3.7

Das Quadrat über der Höhe ist flächeninhaltsgleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten:

$$h^2 = p \cdot q \; .$$

Kathetensatz 5.3.8

Das Quadrat über einer Kathete ist flächeninhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:

$$a^2 = c \cdot q \; , \;\; b^2 = c \cdot p \; .$$

Beispiel 5.3.9

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 3$ und $b = 4$.

Die Länge der Hypotenuse kann mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \; .$$

Die einzelnen Hypotenusenabschnitte p und q berechnen sich gemäß dem Kathetensatz zu:

$$q = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} = 1{,}8 \quad \text{und} \quad p = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5} = 3{,}2 \; .$$

Die Höhe h_c erhält man mit dem Höhensatz:

$$h_c = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \; .$$

Aufgabe 5.3.3
Berechnen Sie für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 10{,}5$, der Höhe $h_c = 5{,}04$ und dem Hypotenusenabschnitt $q = 3{,}78$ die Länge der beiden Katheten.

Lösung:

$$\text{Kathetensatz:} \quad a = \sqrt{c \cdot q} = \sqrt{10{,}5 \cdot 3{,}78} = 6{,}3 \; ;$$

$$\text{Satz des Pythagoras:} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10{,}5^2 - 6{,}3^2} = 8{,}4 \; .$$

5.3.4 Kongruente und ähnliche Dreiecke

Zu einem Dreieck gehören unter anderem drei Seitenlängen und drei Winkel. Die Außenwinkel sind durch die Innenwinkel bereits festgelegt, sodass durch diese sechs Größen die „Form“ eines Dreieck bestimmt ist. Wenn bei zwei Dreiecken alle diese Größen übereinstimmen, so sind diese Dreiecke deckungsgleich oder **kongruent**. Dabei spielt es keine Rolle, wo sich die Dreiecke befinden. Kongruente Dreiecke können also durch Drehung, Spiegelung und Verschiebung ineinander überführt werden.
Kennt man vier von den sechs Größen, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt bis auf Spielgelung oder Drehung, das heißt bis auf die Lage des Dreiecks im Raum. Alle Dreiecke, die man mit diesen Angaben erhält, sind dann kongruent. In einigen Fällen genügen sogar drei Angaben, um das Dreieck eindeutig zu bestimmen. Sie werden in den **Kongruenzsätzen** beschrieben:

Kongruenzsätze für Dreiecke 5.3.10

Ein Dreieck ist bis auf seine Lage in der Ebene eindeutig bestimmt, wenn eine der folgenden Situationen vorliegt:

- Von den drei Winkeln und den drei Seitenlängen sind mindestens vier Angaben gegeben.
- Alle drei Seitenlängen sind gegeben. (Diesen Satz bezeichnet man gerne mit „sss“ für „Seite, Seite, Seite“.)
- Eine Seitenlänge und ihre Winkel zu den anderen Seiten sind gegeben („wsw“ für „Winkel, Seite, Winkel“).
- Zwei Seitenlängen und der von den Seiten eingeschlossene Winkel sind gegeben („sws“ für „Seite, Winkel, Seite“).
- Ein Winkel und zwei Seitenlängen sind so gegeben, dass nur eine der Seiten auf einem Schenkel des Winkels liegt und die andere gegebene Seite die längere der beiden gegebenen Seiten ist.

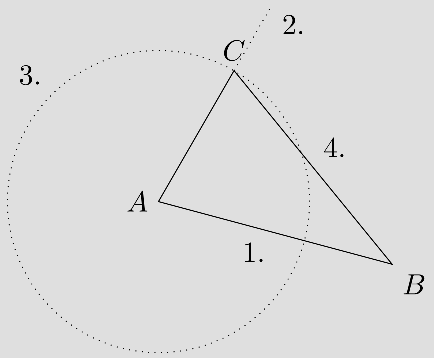
  (Diesen Satz bezeichnet man mit „Ssw“ für „Seite, Seite, Winkel“, wobei das groß geschriebene „S“ signalisieren soll, dass die dem Winkel gegenüberliegende Seite die längere Seite darstellt.)

Wenn von einem Dreieck nur zwei oder drei Angaben gegeben sind, die keinem der oben angegebenen Fälle entsprechen, so gibt es verschiedene Dreiecke, für die die Angaben zutreffen und die nicht deckungsgleich sind.

Im Folgenden wird zuerst in einen Beispiel erläutert, wie mit den Kongruenzsätzen ein Dreieck konstruiert werden kann. Danach wird ein Beispiel zu Dreiecken betrachtet, bei denen nur die Winkel gegeben sind und somit keine der obigen Bedingungen erfüllt ist.

Beispiel 5.3.11

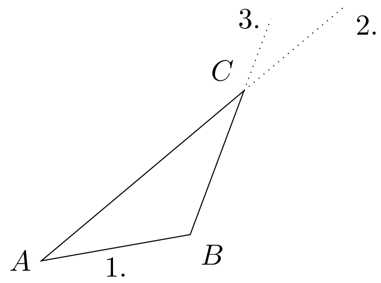
Gegeben seien die Seiten b und c und der Winkel α. Das Dreieck „sws“ erhält man, indem man zunächst eine Seite, hier zum Beispiel die Seite c, zeichnet und an der nach der Bezeichnungskonvention passenden Ecke (A) den Winkel α anfügt. Dann schlägt man um diese Ecke einen Kreis, dessen Radius der Länge der zweiten Seite (hier b) entspricht. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem zweiten Schenkel des Winkels bildet die dritte Ecke des Dreiecks (C).



Aufgabe 5.3.4
Konstruieren Sie ein Dreieck mit einer Seite $c = 5$ und den Winkeln $\alpha = 30°$ und $\beta = 120°$, wobei die oben eingeführte Notation verwendet wird.

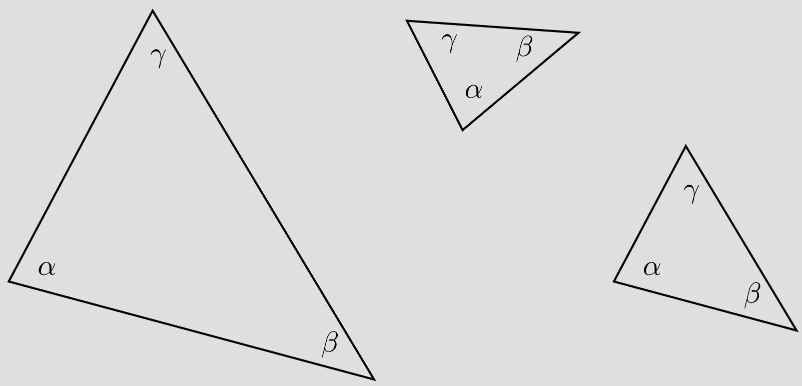
Lösung:

Man zeichnet zuerst die gegebene Strecke c. Dann trägt man an den beiden Enden der Strecke die zwei der Bezeichnungskonvention entsprechenden Winkel an. Der Schnittpunkt C der beiden neuen Schenkel ist die dritte Ecke des Dreiecks.



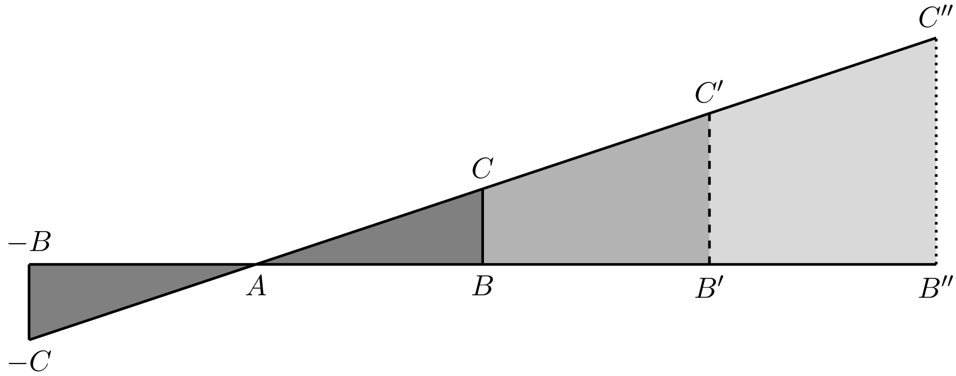
Beispiel 5.3.12

Gegeben seien nun die drei Winkel $\alpha = 77°$, $\beta = 44°$ und $\gamma = 59°$, deren Summe $180°$ ist. Diese Auswahl von drei Winkeln ohne Angabe zu einer Seite findet man nicht bei den Kongruenzsätzen 5.3.10 auf der vorherigen Seite. Beispiele solcher Dreiecke sind hier dargestellt:



Es gibt sogar unendlich viele derartige Dreiecke, die die angegebenen Winkel haben und die nicht kongruent zueinander sind, also nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Allerdings sehen diese Dreiecke irgendwie ähnlich aus. Solche **ähnlichen** Dreiecke erhält man auch, wenn man zum Beispiel die Verhältnisse aller Seiten zueinander kennt. Dies ergibt sich aus den Strahlensätzen, wie die folgende Zeichnung verdeutlicht:

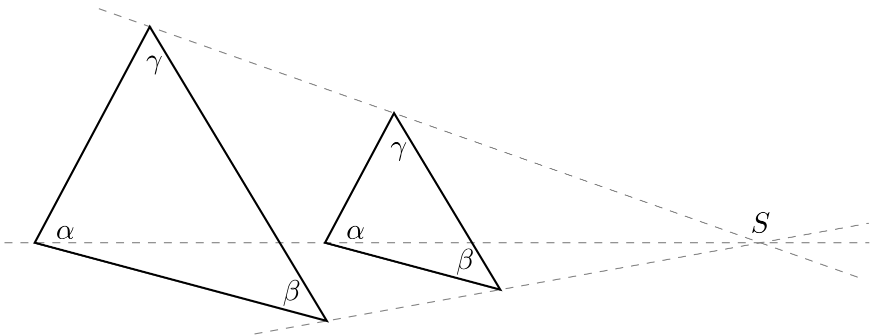


Ähnlichkeitssätze für Dreiecke 5.3.13

Zwei Dreiecke heißen zueinander **ähnlich**, wenn sie

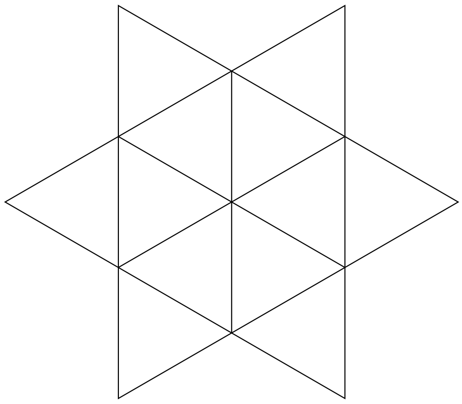
- in zwei (und damit wegen der Winkelinnensumme in drei) Winkeln übereinstimmen, oder
- in allen **Verhältnissen** ihrer entsprechenden Seiten übereinstimmen, oder
- in einem Winkel und im **Verhältnis** der anliegenden Seiten übereinstimmen, oder
- im **Verhältnis** zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Eine Besonderheit gibt es bei dem rechten und dem linken Dreieck in Beispiel 5.3.12 auf der vorherigen Seite: Hier geht das eine Dreieck durch zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und einem Streckfaktor k in das andere über.

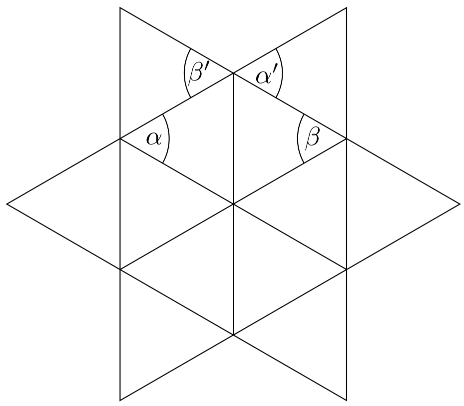


5.3.5 Aufgaben

Aufgabe 5.3.5
Untersuchen Sie die folgende Figur auf Stufenwinkel und Wechselwinkel!



Lösung:

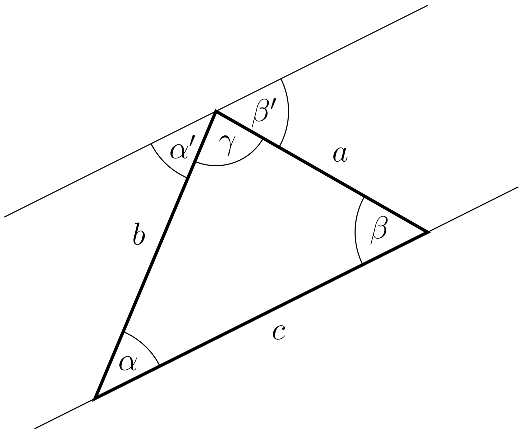


Die Winkel α und α' zum Beispiel sind Stufenwinkel, ebenso β und β'.
Die Winkel α' und β zum Beispiel sind Wechselwinkel, ebenso α und β'.

Aufgabe 5.3.6
Zeigen Sie mithilfe von Wechselwinkeln, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck stets π beziehungsweise $180°$ beträgt.

Tipp:
Zeichnen Sie zu einer Seite des Dreiecks eine parallele Gerade, die durch die dritte Ecke verläuft, und betrachten Sie die Winkel an dieser Ecke.

Lösung:



Zeichnet man parallel zur Seite c eine Gerade durch die obere Ecke des Dreiecks, so erhält man jeweils einen Wechselwinkel α' zu α und β' zu β.
An der Geraden gilt

$$\alpha' + \gamma + \beta' = \pi \ .$$

Weiter ist $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$. Damit folgt $\alpha + \gamma + \beta = \pi$.

5.4 Vielecke, Flächeninhalt und Umfang

5.4.1 Einführung

In der Natur kann man vielfältige Formen entdecken. Dabei sind runde Formen sehr offensichtlich. Wenn es darum geht, eine Fläche lückenlos auszufüllen, entdeckt man auch Begrenzungen, die näherungsweise Strecken sind. Ein markantes Beispiel sind Wabenstrukturen, die von Insekten angelegt werden. Technische Anwendungen bauen oft auf Figuren mit geraden Begrenzungen auf.

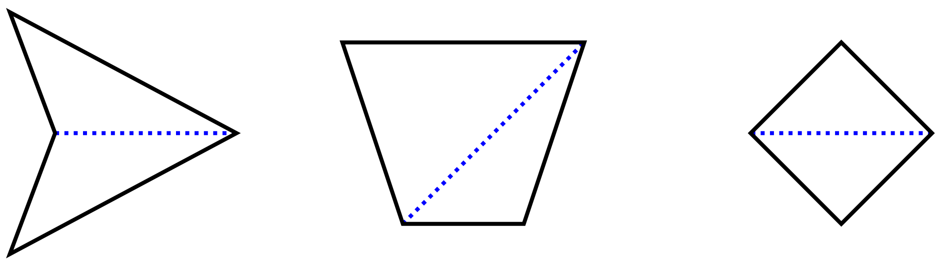
In diesem Abschnitt werden einige Spezialfälle von Vielecken betrachtet, mit denen geradlinig begrenzte Flächen beschrieben werden können. Dabei sollen zunächst charakteristische Besonderheiten benannt werden. Anschließend wird der Frage nachgegangen, wie der Flächeninhalt eines Vielecks einfach berechnet werden kann.

5.4.2 Vierecke

Im vorherigen Abschnitt 5.3 auf Seite 140 wurden Dreiecke betrachtet. Dazu wurde von drei Punkten ausgegangen, die nicht auf einer Geraden liegen. Verbindet man drei solche Punkte durch alle möglichen Strecken zwischen zwei der drei Punkte, ergibt sich immer ein geschlossener Weg, in dem jeder gegebene Punkt genau zwei Strecken verbindet. Dabei haben die Strecken nur ihre Endpunkte mit anderen Strecken gemeinsam. Außerdem gibt es keine Kreuzungspunkte.

Bei mehr als drei Punkten ist dies nicht immer der Fall. Bereits vier Punkte können so verbunden werden, dass sich die Verbindungsstrecken kreuzen oder dass sich mehrere geschlossene Wege ergeben.

Hier sollen die Strecken alle gegebenen Punkte durch einen einzigen geschlossenen Weg miteinander verbinden, der kreuzungsfrei verläuft.



Offenbar kann ein Viereck in zwei Dreiecke zerlegt werden. Im Allgemeinen erhält man die beiden Dreiecke, wenn man eine Ecke mit dem größten Winkel mit der gegenüberliegenden Ecke durch eine Strecke verbindet. Eine solche Strecke zwischen Ecken, die nicht miteinander verbunden sind, heißt eine **Diagonale** des Vierecks. Aus der Kenntnis, dass die Summe der (Innen-)Winkel eines Dreicks π beziehungsweise $180°$ ist, folgt damit, dass die Summe der (Innen-)Winkel eines Vierecks doppelt so groß ist, also 2π beziehungsweise $360°$ beträgt.

Vierecke 5.4.1

Es werden **Vierecke** betrachtet, die sich dadurch ergeben, dass vier gegebene Punkte so durch Strecken miteinander werden, dass ein einziger geschlossener, kreuzungsfreier Weg durch alle vier

Punkte entsteht. Dabei sollen je drei der gegebenen Punkte, die durch zwei Strecken miteinander verbunden sind, nicht auf einer Geraden liegen.

Wie bei Dreiecken werden auch bei Vierecken die Innenwinkel kurz als Winkel bezeichnet, wenn in einem besonderen Kontext nichts anderes vermerkt wird.

Ebenso wie bei Dreiecken wird auch die Idee zu Vierecken in vielfältiger Weise in technischen Konstruktionen verwendet. Dadurch sind weitere alltägliche Namen gebräuchlich, die verschiedene Klassen von Vierecken bezeichnen.

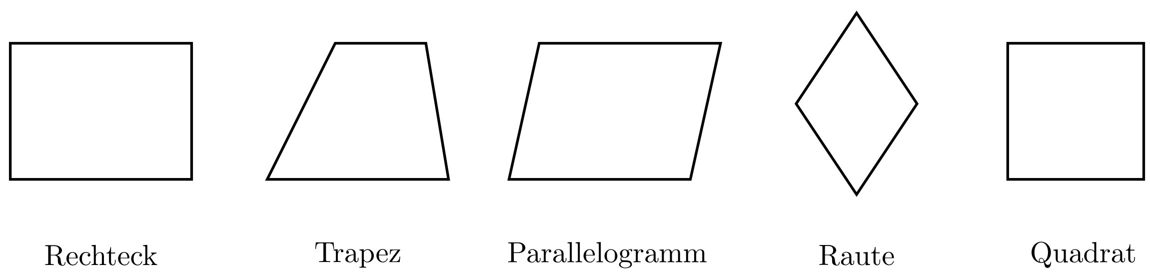
Wie bei Dreiecken werden auch Vierecke nach der Länge von Seiten oder nach der Größe von Winkeln eingeteilt. Dabei erkennt man typische Unterschiede zu Dreiecken. Anders als dort kann es bei Vierecken beispielsweise parallele Seiten geben. Außerdem ist es möglich, dass es mehr als eine Ecke mit einem rechten Winkel gibt.

Besondere Klassen von Vierecken 5.4.2

Für Vierecke mit den folgenden weiteren Eigenschaften werden eigene Begriffe eingeführt: Ein Viereck heißt

- **Trapez**, falls wenigstens zwei Seiten parallel sind;
- **Parallelogramm**, falls je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind;
- **Raute** oder **gleichseitiges Viereck** oder auch **Rhombus**, falls alle vier Seiten gleich lang sind;
- **Rechteck**, falls alle vier (Innen-)Winkel rechte Winkel sind;
- **Quadrat**, falls es ein Rechteck ist, bei dem alle Seiten gleich lang sind;
- **Einheitsquadrat**, falls es ein Quadrat mit Seitenlänge 1 ist.

Für das Einheitsquadrat muss also auch ein Längenmaßstab vereinbart werden.



Unter den gerade eingeführten speziellen Vierecken gibt es eine ganze Reihe von Zusammenhängen:

Beziehungen zwischen Vierecken 5.4.3

Es gelten folgende Beziehungen zwischen Vierecken:

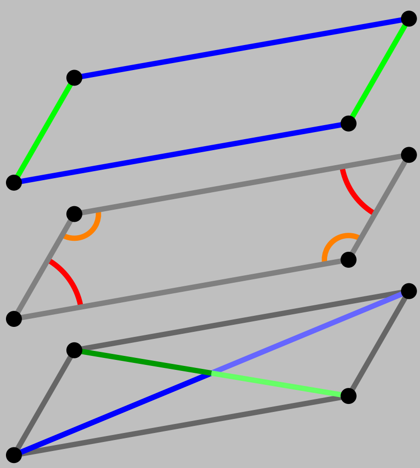
- Jedes Quadrat ist ein Rechteck.
- Jedes Quadrat ist eine Raute.
- Jede Raute ist ein Parallelogramm.
- Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
- Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.

Diese Vierecke können auf vielerlei Weisen anhand von Eigenschaften der Seiten, Winkel oder auch Diagonalen charakterisiert werden.

Parallelogramm 5.4.4

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn

- gegenüberliegende Seiten parallel sind;
- gegenüberliegende Seiten jeweils gleich lang sind;
- gegenüberliegende Innenwinkel gleich groß sind;
- zwei benachbarte Innenwinkel zusammen π bzw. $180°$ ergeben;
- die Diagonalen einander halbieren.

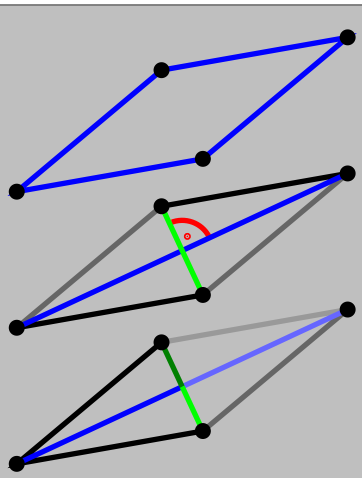


Rauten können als besondere Parallelogramme beschrieben werden.

Raute 5.4.5

Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn

- alle Seiten gleich lang sind;
- es ein Parallelogramm ist, in welchem die Diagonalen senkrecht zueinander stehen;
- wenigstens zwei benachbarte Seiten gleich lang sind und sich die Diagonalen einander halbieren.

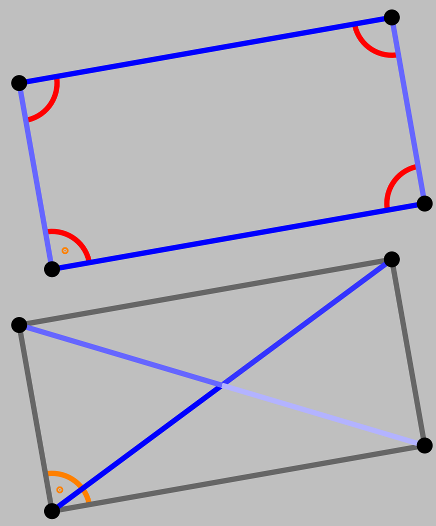


Bei Rechtecken denkt man oft an rechte Winkel, wie es ihr Name andeutet. Darüber hinaus können Rechtecke mit Hilfe von Eigenschaften ihrer Diagonalen einfach beschrieben werden.

Rechteck 5.4.6

Ein Viereck ist genau dann ein Rechteck, wenn

- alle Innenwinkel gleich groß sind;
- es ein Parallelogramm ist, bei dem wenigstens ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist;
- es ein Parallelogramm ist, bei dem die Diagonalen gleich lang sind;
- die Diagonalen einander halbieren und gleich lang sind;
- die Diagonalen einander halbieren und wenigstens ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist.

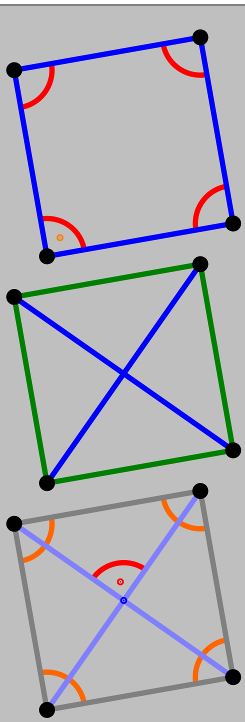


Quadrate sind sowohl besondere Recktecke als auch spezielle Rauten.

Quadrat 5.4.7

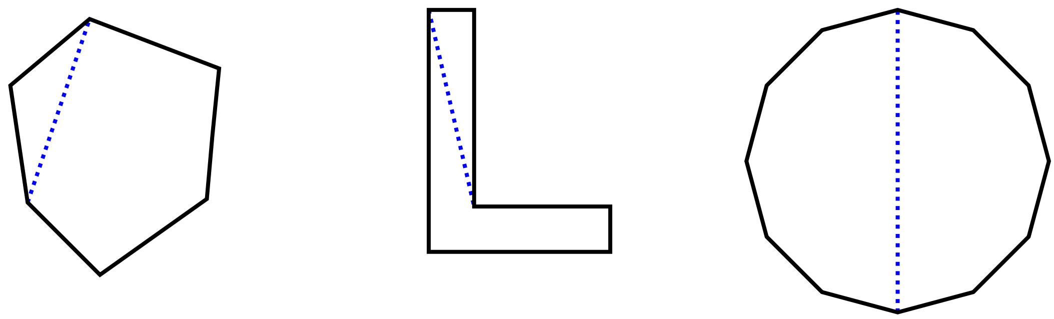
Ein Viereck ist genau dann ein Quadrat, wenn

- alle Seiten gleich lang und
  - alle Innenwinkel gleich groß sind oder
  - wenigstens ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist;
- die Diagonalen gleich lang sind und zudem alle Seiten gleich lang sind;
- die Diagonalen senkrecht zueinander stehen und
  - sich halbieren und gleich lang sind oder
  - alle Innenwinkel gleich groß sind;
- es eine Raute mit gleich langen Diagonalen ist;
- es sowohl eine Raute als auch ein Rechteck ist.



5.4.3 Vielecke

Bei Dreiecken trägt bereits eine Ecke oder Seite wesentlich zu den Eigenschaften des gesamten Dreiecks bei, zum Beispiel eine Ecke mit einem rechten Winkel. In Vierecken ist eine Ecke nicht mehr ganz so bestimmend. Dafür gibt es mehr Variationen der Formen. Wenn „viele“ Punkte durch Strecken zu einer geschlossenen Figur, einem Vieleck, verbunden werden, ergeben sich viele Möglichkeit, vielfältige Flächen zu gestalten und sogar runde Formen anzunähern.



Eine so detaillierte Einteilung wie für Dreiecke oder Vierecke ist dabei kaum mehr möglich. Zumal bei Vielecken solche neuen Möglichkeiten wie die Annäherung an runde Formen besonders interessant sind. Dazu werden nicht einzelne Vielecke sondern Konstruktionsprinzipien für eine Abfolge von vielen Vielecken betrachtet werden. Und andererseits kann jedes Vieleck bei Bedarf in Dreiecke zerlegt werden, wie dies schon bei Vierecken beobachtet wurde. Eine Eigenschaft einer besonderen Ecke wird somit vielfach unter dem Aspekt betrachtet, was dies insgesamt für das Vielfach bedeutet.

Zur Einteilung in verschiedene Klassen bietet sich hier die Fragestellung an, ob eine gewissene Eigenschaft von **allen** Ecken oder Seiten erfüllt wird oder eben nicht, was dies für die Vielecke bedeutet. Beispielsweise werdn Vielecke danach klassifiziert, ob die Winkel in allen Ecken kleiner π beziehungsweise $180°$ sind. In diesem Fall verlaufen dann alle Diagonalen im Innern des Vielecks. Andernfalls gibt es mindestens eine Diagonale außerhalb.

Die obigen Zeichnungen sind Beispiele von Vielecken, die verschiedene Eigenschaften zeigen. Im linken Vieleck sind alle (Innen-) Winkel kleiner als π beziehungsweise $180°$. In dieser Situation spricht man auch von einem konvexen Vieleck. Anders ist es im mittleren Vieleck, in dem es eine solche Ecke gibt. Im links dargestellten Vieleck sind alle Innenwinkel gleich, woraus sich ein sehr gleichmäßiger Verlauf der Seiten ergibt.

Vielecke 5.4.8

Es seien n Punkte in der Ebene gegeben, wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 3$ sei. Hier werden **Vielecke** betrachtet, die dadurch entstehen, dass die Punkte nacheinander durch Strecken miteinander verbunden werden, sodass ein geschlossener Weg ohne Kreuzungspunkte entsteht und jeder der gegebenen Punkte zu genau zwei Strecken gehört. Dabei sollen je drei Punkte, die durch aufeinander folgende Strecken verbunden sind, nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Ein Vieleck wird auch als **n-Eck** oder **Polygon** bezeichnet.

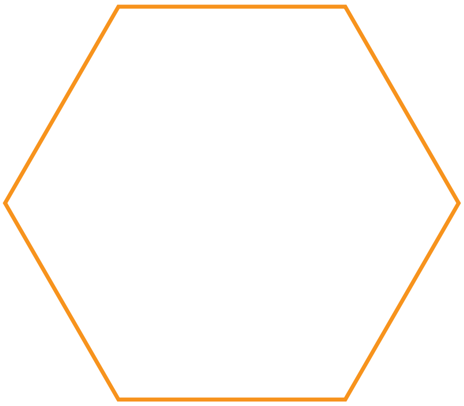
- Die n Punkte, die verbunden werden, heißen **Ecken** des Vielecks, und die n Verbindungsstrecken heißen **Seiten** des Vielecks.
- Jedes Vieleck kann man in $(n-2)$ einander nicht überlappende Dreiecke zerlegen. Die Summe aller Innenwinkel eines Vielecks beträgt daher $(n-2) \cdot \pi$ beziehungsweise $(n-2) \cdot 180°$.
- Die Verbindungsstrecken zwischen je zwei Ecken, die nicht auf derselben Seite des Vielecks liegen, heißen die **Diagonalen** des Vielecks.

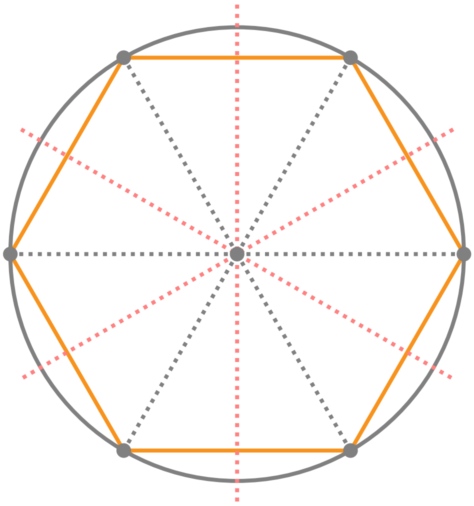
Weitere Aussagen ergeben sich für Vielecke mit gleich langen Seiten und gleich großen Innenwinkeln. Für $n = 3$ sind dies die gleichseitigen Dreiecke, und von den Vierecken sind es die Quadrate.

Regelmäßige Vielecke 5.4.9

Ein Vieleck, dessen Seiten alle die gleiche Länge haben und dessen Innenwinkel zudem alle gleich groß sind, nennt man **regelmäßiges Vieleck** oder **regelmäßiges n-Eck**.

Bienenwaben sind – von oben betrachtet – näherungsweise regelmäßige Sechsecke.





Regelmäßige Vielecke haben verschiedene Symmetrieeigenschaften. Alle Geraden durch die Seitenmitten, die senkrecht auf einer Seite stehen, schneiden sich in einem Punkt M. Eine Spiegelung an einer solchen Geraden bildet das Vieleck auf sich ab.

Außerdem sind regelmäßige Vielecke in der Weise rotationssymmetrisch, dass das Vieleck auf sich abgebildet wird, wenn man es um M um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ dreht.

Die Ecken eines regelmäßigen Vielecks haben von M alle denselben Abstand und liegen somit auf einem Kreis um M.

5.4.4 Umfang

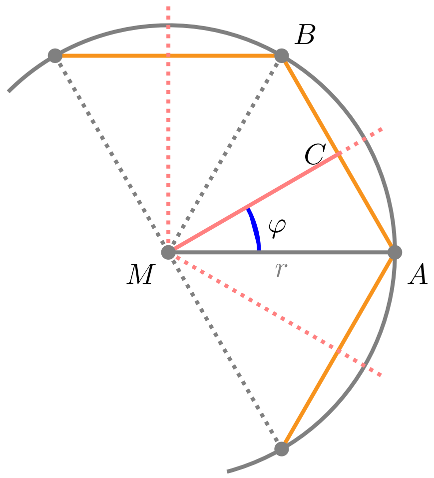
Der Umfang eines Vielecks ist die Summe der Längen aller Verbindungsstecken. Wenn ein Vieleck weitere Eigenschaften hat, die einen Bezug zur Länge der Seiten haben, kann es weitere Aussagen zum Umfang geben.

Es werden zunächst Vierecke betrachtet. Wenn a und b benachbarte Seiten eines Parallelogramms sind, dass ist sein Umfang $U = a + b + a + b = 2 \cdot a \cdot b$.

Bei einer Raute und auch bei einem Quadrat sind alle vier Seiten gleich lang, sodass sein Umfang durch $U = 4 \cdot a$ gegeben ist, wenn a die Länge einer Seite ist.

Ebenso sind bei jedem regelmäßigen Vieleck alle Seiten gleich lang. Wenn n die Anzahl der Eckpunkte und a die Länge einer Seite ist, dann ist der Umfang U_n einfach durch $U_n = n \cdot a$ zu berechnen.

Als Ausblick auf die Winkelfunktionen, die im Abschnitt 5.6 auf Seite 171 besprochen werden, soll der Umfang eines regelmäßigen Vielecks noch auf eine andere Weise berechnet werden. Seine Ecken liegen alle auf einem Kreis mit einem Radius r.



Der Winkel φ zwischen den Strecken, die vom Mittelpunkt des Kreises zu den Ecken A und B einer Seite verlaufen, ist der n-te Teil des Vollwinkels: $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Der Mittelpunkt des Kreises, A und der Mittelpunkt C der Strecke $\overline{AB}$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck MAC mit dem Winkel $\measuredangle(AMC) = \frac{1}{2} \cdot \varphi = \frac{\pi}{n}$. Wenn aus

$$\sin(\measuredangle(AMC)) = \frac{\frac{1}{2}a}{r}$$

der Wert von a berechnet und in $U = n \cdot a$ eingesetzt wird, erhält man die Formel

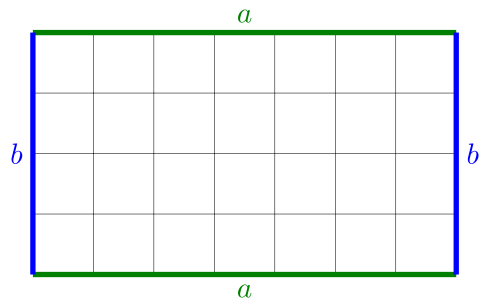
$$U_n = n \cdot a = 2 \cdot r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

für den Umfang eines regelmäßigen Vielecks. Beispielsweise ist $U_6 = 2 \cdot r \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot r$. Je größer n ist, um so mehr nähert sich der Umfang des Vielecks dem Wert $2 \cdot r \cdot \pi \approx 6{,}283 \cdot r$ an, der den Umfang eines Kreises mit Radius r angibt. Dies kann mit weiterführenden Methoden der Differentialrechnung begründet werden, in deren Grundideen im Kapitel 7 auf Seite 252 eingeführt wird. Die Idee hinter der beschriebenen Annäherung kann man hier so beschreiben: Zu einem schwierig zu berechnenden Wert wie dem Kreisumfang sucht man nach vielen vergleichbaren Objekten, hier den regelmäßigen Vielecken, die zwei Eigenschaften haben: Ihr Umfang ist einfach zu berechnen, und bei hinreichend großer Eckenzahl unterscheiden sie sich hinsichtlich des Umfangs vom Kreis . Dieses Vorgehen eignet sich auch für die Berechnung von Flächen, die nicht durch Strecken berandet werden (siehe 8 auf Seite 287). Dazu wird im Folgenden zunächst die Berechnung von Flächeninhalten von Vielecken erläutert, die in dieser Hinsicht relativ einfach ist und die Ausgangspunkt für eine Annäherung sein kann, wie das obige Bild eines Sechsecks in einem Kreis zeigt.

5.4.5 Flächeninhalt

Der Inhalt einer Fläche ist die Zahl der Einheitsquadrate, die man benötigt, um diese Fläche vollständig zu bedecken.

Zuerst sollen Rechtecke betrachtet werden. Wenn ein Rechteck eine Seite der Länge a und eine benachbarte Seite der Länge b hat, dann gibt es b Reihen mit a Einheitsquadraten, also $b \cdot a$ Einheitsquadrate.

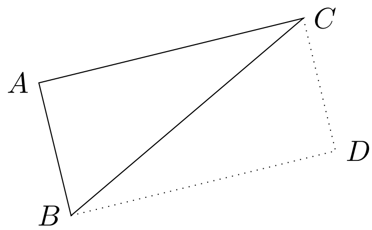


Fläche eines Rechtecks 5.4.10

Die Fläche F eines Rechtecks mit den Längen a und b benachbarter Seiten ist

$$F = b \cdot a = a \cdot b \,.$$

Damit lässt sich nun auch leicht der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, welches um 180° gedreht werde. Legt man anschließend das ursprüngliche und das neue Dreieck entlang der beiden Hypotenusen aneinander, so erhält man ein Rechteck.

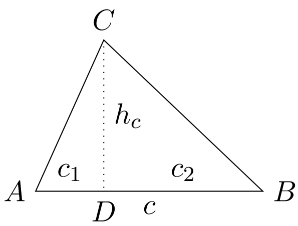


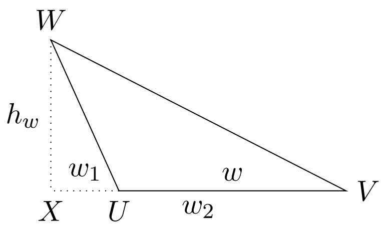
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist nun die Hälfte des Flächeninhaltes des Rechtecks, also $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Und wie berechnet man die Fläche, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?

Aus jedem beliebigen Dreieck kann man zwei rechtwinklige Dreiecke gewinnen, indem man von einer Ecke aus eine Linie auf die gegenüberliegende Seite zieht, so dass sie diese senkrecht trifft. Diese Linie nennt man die **Höhe** h_i eines Dreiecks auf die bestimmte Seite i, wobei der Index i derjenigen Seite a, b oder c entspricht, über der die Höhe bestimmt wird.

Je nachdem, ob die neue Linie innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks dann aus der Summe oder der Differenz der Flächeninhalte der beiden sich ergebenden rechtwinkligen Dreiecke:





Links gilt also (wenn F_Δ den Flächeninhalt des Dreiecks Δ bezeichnet)

$$F_{ABC} = F_{DBC} + F_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_2 + \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_1 = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot (c_2 + c_1) = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c \,.$$

Rechts gilt

$$F_{UVW} = F_{XVW} - F_{XUW} = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_2 - \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_1 = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot (w_2 - w_1) = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w \ .$$

Somit kann der Flächeninhalt stets mittels einer Seitenlänge und der Länge der hierzu senkrechten Höhe berechnet werden.

Dreiecksfläche 5.4.11

Der Flächeninhalt F_{ABC} eines Dreiecks berechnet sich aus der Hälfte des Produkts der Länge einer Seite mit der Länge der zugehörigen Höhe des Dreiecks:

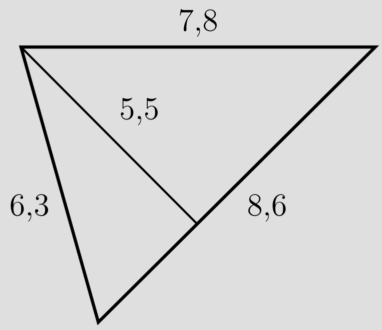
$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \ .$$

Dabei ist die **Höhe eines Dreiecks auf einer Seite** die Strecke, die von dem der Seite gegenüberliegenden Punkt ausgeht und die Gerade, auf der die Seite liegt, im rechten Winkel trifft.

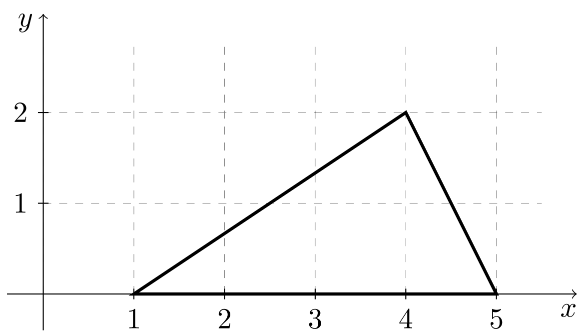
Beispiel 5.4.12

Bei dem hier gezeigten Dreieck ist die Höhe gegeben, die zur Seite mit dem Wert 8,6 gehört. Bei den Angaben handelt es sich jeweils um gerundete numerische Werte. Der Flächeninhalt F des Dreiecks ist also rund

$$F = \frac{8{,}6 \cdot 5{,}5}{2} = 23{,}65 \ .$$



Aufgabe 5.4.1
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks:



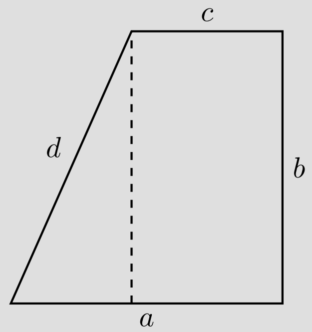
Lösung:

An diesem Dreieck lässt sich eine Höhe leicht ablesen, und zwar die Höhe, die senkrecht auf der Seite steht, die auf der x-Achse liegt. Die Länge h dieser Höhe ist $h = 2$, und die Länge der genannten Seite ist $c = 5 - 1 = 4$. Damit ergibt sich der Flächeninhalt F des Dreiecks zu $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

Mit der Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken lassen sich auch Flächen von anderen Vielecken – auch Polygone genannt – bestimmen. Denn jedes Vieleck kann in Dreiecke unterteilt werden, indem man so lange Diagonalen einzeichnet, bis die Teilflächen Dreiecke sind. Die Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke ergibt den Flächeninhalt des Vielecks. Hier soll die Betrachtung jedoch auf einige einfache Formen beschränkt bleiben. Im folgenden Beispiel kann man das Vieleck in ein Dreieck und ein Rechteck zerlegen. Dadurch wird die Berechnung besonders einfach.

Beispiel 5.4.13

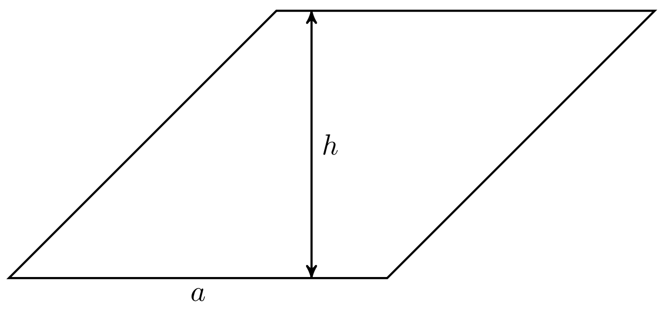
Man betrachte das rechts dargestellte Vieleck, ein Trapez. In diesem Beispiel kann man das Vieleck in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $(a - c)$ und b und der Hypotenuse d sowie ein Rechteck mit den Seiten b und c unterteilen.



Der Flächeninhalt des Polygons ist dann:

$$F = F_{\text{Dreieck}} + F_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}(a - c) \cdot b + b \cdot c = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bc + bc = \frac{1}{2}(a + c) \cdot b\ .$$

Aufgabe 5.4.2
Berechnen Sie den Flächeninhalt des dargestellten **Parallelogramms** für $a = 4$ und $h = 5$.

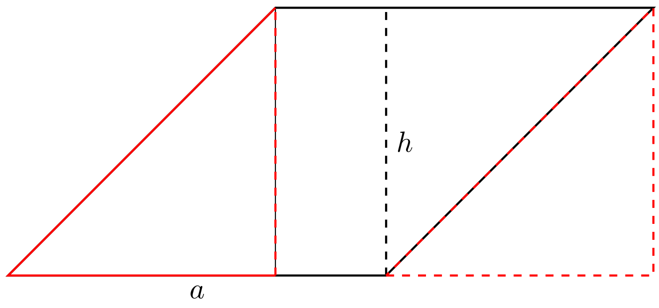


Tipp:
Teilen Sie das Parallelogramm sinnvoll auf, und schauen Sie sich die entstandenen Dreiecke genau an!

Lösung:

Man kann das Parallelogramm in das linke rote Dreieck, einem folgenden Rechteck und das rechte Dreieck aufspalten. Schneidet man das rote Dreieck aus und setzt es von rechts an das Parallelogramm, erhält man ein Rechteck mit den Seiten a und h. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$F = a \cdot h = 4 \cdot 5 = 20 \; .$$



Zum Schluss sollen noch Kreisflächen berechnet werden. In 5.2.4 auf Seite 136 wurde bereits die Kreiszahl π vorgestellt, die das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmessung eines Kreises beschreibt. Auch in der Formel für den Flächeninhalt von Kreisen kommt die Kreiszahl vor.

Flächeninhalt eines Kreises 5.4.14

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r berechnet sich zu

$$F = \pi \cdot r^2 \; .$$

Beispiel 5.4.15

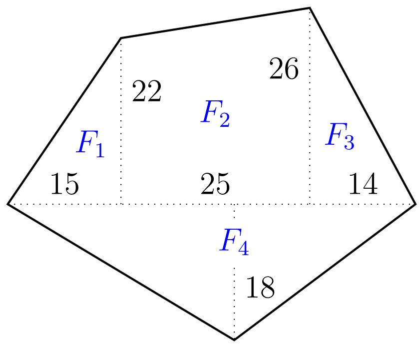
Ein Kreis mit dem Radius habe einen Flächeninhalt von rund 12,566. Hieraus lässt sich die Kreiszahl π näherungsweise berechnen: Aus $F = \pi \cdot r^2$ folgt $\pi = \frac{F}{r^2}$. Mit den angegebenen Werten ergibt sich der Näherungswert

$$\pi = \frac{F}{r^2} \approx \frac{12{,}566}{4} = 3{,}1415 \; .$$

5.4.6 Aufgaben

Aufgabe 5.4.3

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Polygons:



Lösung:

Die Flächeninhalte der angegebenen Teilflächen werden separat bestimmt.

- F_1 ist ein Dreieck: $F_1 = \frac{15 \cdot 22}{2} = 165$.
- F_2 ist ein Trapez, welches in zwei Dreiecke mit der Höhe 25 zerlegt werden kann: $F_2 = \frac{22 \cdot 25}{2} + \frac{26 \cdot 25}{2} = 275 + 325 = 600$.
- F_3 ist ein Dreieck: $F_3 = \frac{14 \cdot 26}{2} = 182$.
- Auch F_4 ist ein Dreieck: $F_4 = \frac{(15+25+14) \cdot 18}{2} = 486$.

Damit erhält man den Flächeninhalt des gesamten Polygons als Summe der Flächeninhalte der Teilflächen: $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 165 + 600 + 182 + 486 = 1433$.

5.5 Elementargeometrische Körper

5.5.1 Einführung

Die Gestalt alltäglicher Gegenstände wie ein Notizblock, ein Handy oder auch technische Konstruktionen wie Tunnel können durch einfache Grundformen beschrieben werden, wenn man von „abgerundeteten Ecken“ absieht. Woran liegt das?

Wenn man einen Besen über einen ebenen Boden mit Sand bewegt, wird ein viereckiger Ausschnitt des Bodens sichtbar. Geometrisch idealisiert formuliert, entsteht aus einer Strecke (dem Besen) durch Verschieben ein Viereck. Wenn man den Besen dreht, kann man eine Kreisscheibe erzeugen. Auf diese Weise ergeben sich aus einfachen Objekten kompliziertere, die trotzdem einfach beschrieben werden können.

5.5.2 Elementargeometrische Körper

Punkte sind die einfachsten grundlegenden geometrischen Objekte. Verschiebungen führen auf Strecken, und Operationen wie das Verschieben oder Drehen von Strecken in der Ebene führen auf elementargeometrische Figuren. Beispielsweise ergeben sich Vielecke und Kreise, wie sie oben beschrieben wurden.

Wenn man Figuren außerhalb ihrer Ebene verschiebt oder dreht, entstehen neue Objekte, die als Körper bezeichnet werden. Im Folgenden werden einige einfache Körper beschrieben, deren Form in vielen alltäglichen Gegenständen oder technischen Konstruktionen erkennbar ist.

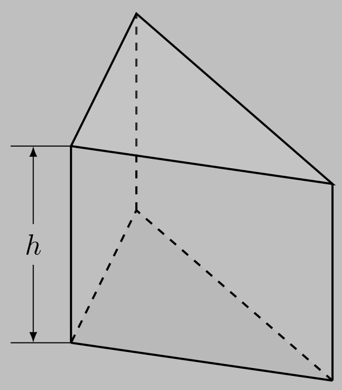
Beispiel 5.5.1

Es wird ein Rechteck betrachtet und senkrecht zur Zeichenebene verschoben. Dadurch entsteht ein Quader. Seine Oberfläche besteht aus dem gegebenen Rechteck und einer Kopie davon. Außerdem entstanden aus den vier Seiten des ursprünglichen Rechtecks jeweils vier weitere Rechtecke.

Betrachtet man irgend ein Vieleck und verschiebt dieses senkrecht, entsteht ein Prisma genannter Körper. Der Name wird auch für durchsichtige physikalische Körper dieser Form verwendet, mit denen Lichtwellen gebrochen werden. Die einzelnen Lichtwellen von scheinbar weißem Licht werden in verschiedenen Farben sichtbar.

Prisma 5.5.2

Gegeben ist ein Vieleck G. Ein **Prisma** ist ein Körper, der aus einer senkrechten Verschiebung eines Vielecks G um eine Strecke der Länge h entsteht. Die beiden Flächen, die aus dem gegebenen Vieleck und einer Kopie einen Teil der Oberfläche bilden, werden dann als Grundfläche des Prismas bezeichnet. Sie sind zueinander parallel. Die anderen Flächen bilden zusammen den Mantel M.



In der Zeichnung ist ein Prisma mit einem Dreieck als Grundfläche gezeigt. Die anderen Seitenflächen, die an die Grundfläche angrenzen, sind Rechtecke.

Das Volumen V des Prismas ist das Produkt aus dem Flächeninhalt des Vielecks G und der Höhe h: Es ist $V = G \cdot h$.

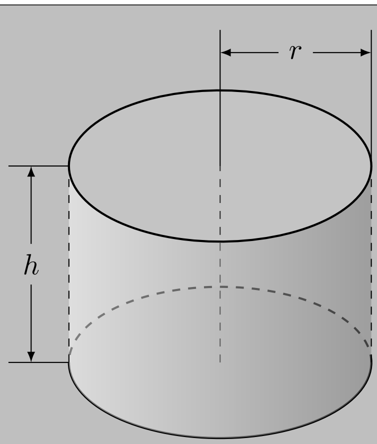
Der Flächeninhalt O der Oberfläche ergibt sich aus dem doppelten Inhalt der Grundfläche G und dem Flächeninhalt des Mantels M. Wenn U der Umfang des gegebenen Vielecks ist, gilt $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$.

Im einführenden Beispiel wurde ein Quader beschrieben. Mit obiger Definition kann er als spezielles Prisma angesehen werden, nämlich als ein Prisma mit einem Rechteck als Grundfläche. Wenn alle Seitenflächen Quadrate sind, spricht man von einem Würfel.

Das Bauprinzip kann auf verschiedene Weisen variiert werden. Beispielsweise kann das Vieleck durch eine Kreisscheibe ersetzt werden, die verschoben wird. Durch die senkrechte Verschiebung entsteht ein besonders symmetrischer Körper, ein Zylinder. Eine Tunnelbohrmaschine stellt – vereinfacht – eine zylinderförmige Röhre her.

Zylinder 5.5.3

Gegeben ist eine Kreisscheibe G. Ein **Zylinder** ist ein Körper, der aus einer senkrechten Verschiebung einer Kreisscheibe G um eine Strecke der Länge h entsteht. Die beiden Flächen, die aus der gegebenen Kreisscheibe und einer Kopie einen Teil der Oberfläche bilden, werden dann als Grundfläche des Zylinders bezeichnet. Sie sind zueinander parallel. Der gekrümmte Teil der Oberfläche zwischen den beiden Kreisscheiben bildet den Mantel M des Zylinders.



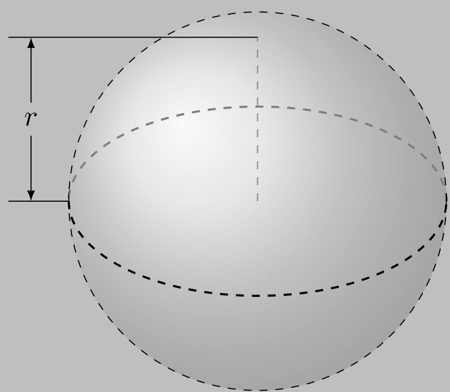
Das Volumen V des Zylinders ist das Produkt aus dem Flächeninhalt der Kreisscheibe G mit dem Radius r und der Höhe h: Es ist $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Der Flächeninhalt O der Oberfläche ergibt sich als Summe aus dem doppelten Inhalt der Kreisscheibe G und dem Inhalt des Mantels M. Mit dem Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ der gegebenen Kreisscheibe gilt $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$.

Wenn die Kreisscheibe nicht verschoben, sondern rotiert wird, wobei die Drehachse durch den Mittelpunkt und einen Randpunkt verläuft, ergibt sich eine Kugel.

Kugel 5.5.4

Gegeben ist eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt M und Radius r. Rotiert die Kreisscheibe um M und einen Randpunkt, erhält man eine Kugel mit Radius r.



Das Volumen V der Kugel ist $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Der Flächeninhalt O der Oberfläche ist durch $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ gegeben.

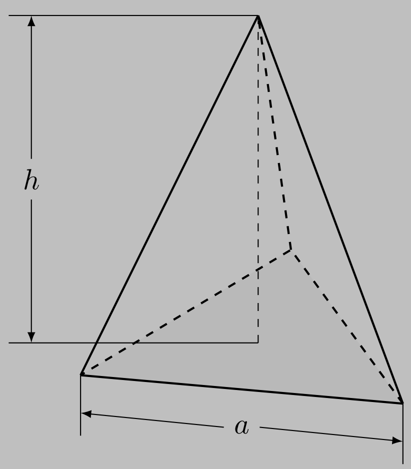
Eine Kugel kann auch als der Körper beschrieben werden, der aus allen Punkten besteht, deren Abstand von M kleiner oder gleich r ist (siehe auch Kapitel 10 auf Seite 386).

In dieser Betrachtungsweise ist ein Prisma ein Körper aus allen Punkten, die auf einer Verbindungslinie von Grundfläche und ihrer Kopie liegen.

Im Folgenden werden zwei Variationen dieses Vorgehens betrachtet. Zunächst wird wieder von einem Vieleck als Grundfläche ausgegangen. Anstelle einer Kopie der Grundfläche wird jetzt nur ein einzelner Punkt vorgegeben.

Pyramide 5.5.5

Gegeben ist ein Vieleck G und ein Punkt S mit dem Abstand $h > 0$ von G. Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Spitze S ist der Körper, der aus allen Punkten besteht, die auf einer Strecke von S zu einem Punkt auf der Grundfläche G liegen.



In der Zeichnung ist eine Pyramide mit einer dreieckigen Grundfläche dargestellt.

Das Volumen V der Pyramide ist proportional zum Flächeninhalt der Grundfläche G und der Höhe h. Es gilt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Der Flächeninhalt O der Oberfläche ergibt sich als Summe aus dem Inhalt der Grundfläche G und des Mantels M. Dabei ist der Flächeninhalt des Mantels die Summe seiner Dreiecksflächen D_k $(1 \leq k \leq n)$. Damit ist $O = G + M = G + D_1 + \ldots + D_n$.

In besonderen Situationen ergeben sich einfache Formeln, mit denen das Volumen und die Oberfläche berechnet werden können. Ein Beispiel ist die oben abgebildete Pyramide. Dort ist die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck. Die folgende Aufgabe bietet die Gelegenheit, für einen speziellen Fall dieser Situation eine Formel für die Oberfläche mit den Eigenschaften gleichseitiger Dreiecke zu finden.

Aufgabe 5.5.1

Berechnen Sie die Oberfläche O einer Pyramide, deren Seiten alle gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a sind.

Antwort: O = [ ]

Lösung:
Eine Pyramide, deren Seiten alle gleichseitige Dreiecke sind, hat insgesamt vier Seiten: eine dreieckige Grundfläche, an die drei weitere Seitenflächen grenzen. Da alle Seitenflächen gleich sind, ist die Oberfläche der Pyramide durch $O = 4 \cdot F$ gegeben, wobei F den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks angibt. Die Höhe ℓ eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras aus

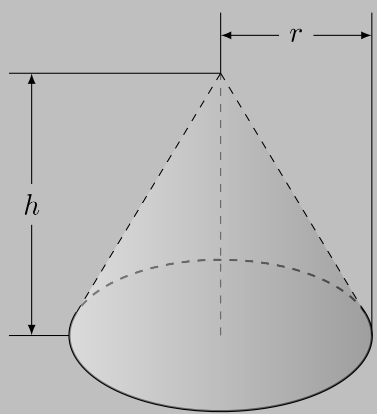
$$a^2 = \ell^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

zu $\ell = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$. Damit ist $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \ell = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$, sodass $O = 4 \cdot F = a^2 \cdot \sqrt{3}$ gilt.

Die Überlegungen von oben, dass Prismen und Zylinder ein gemeinsames Bauprinzip bei unterschiedlichen Grundflächen haben, kann auf die neue Situation einer Pyramide übertragen werden. Man erhält einen weiteren Körper, wenn anstatt eines Vielecks wie bei der Pyramide eine Kreisscheibe als Grundfläche verwendet wird.

Kegel 5.5.6

Gegeben ist eine Kreisscheibe G mit Radius r. Außerdem wird ein Punkt S mit dem Abstand $h > 0$ von G betrachtet. Ein Kegel mit der Grundfläche G und der Spitze S ist der Körper, der aus allen Punkten besteht, die auf einer Strecke von S zu einem Punkt auf der Grundfläche G liegen.



Das Volumen V des Kegels ist proportional zum Flächeninhalt der Kreisscheibe G und der Höhe h. Es gilt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Ein Kegel in der hier betrachteten Situation, in der sich die Spitze des Kegels senkrecht über dem Mittelpunkt der Kreisscheibe befindet, wird genauer als **gerader Kreiskegel** bezeichnet.

Der Flächeninhalt der Oberfläche eines geraden Kreiskegels ist die Summe des Inhalts der Kreisscheibe G und des Mantels M. Wenn ℓ der Abstand der Kegelspitze vom Rand der Kreisscheibe ist, gilt mit dem Kreisumfang $U = 2\pi r$ dann $O = G + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \ell = \pi \cdot r \cdot (r + \ell)$.

In obiger Zeichnung eines Kegels wird die Höhe h genannt. Die angebenen Formeln enthalten jedoch den Abstand der Spitze vom Rand der Kreisscheibe. Wie hängen beide Größen zusammen?

Aufgabe 5.5.2

Stellen Sie sich vor, der gerade Kegel wird von der Spitze eben durch den Mittelpunkt der Kreisscheibe in zwei gleiche Teile zerlegt. Dann ist eine Seite der beiden Teile jeweils ein Dreieck, durch dessen Seiten die Höhe h, der Abstand ℓ und der Radius r beziehungsweise der Durchmesser der Kreisscheibe bestimmt werden. Hierbei werden r und h als gegeben angesehen.

a. Beschreiben Sie ℓ in Abhängigkeit von h und r:

   $\ell =$ $\boxed{}$

   Lösung:
   Die Länge ℓ ist die Hypotenuse des Dreiecks, dessen Katheten die Höhe h des geraden Kegels und der Radius r der Kreisschreibe sind. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$.

b. Geben Sie die Oberfläche O des Kegels in Abhängigkeit von h und r an:

   $O =$ $\boxed{}$

   Lösung:
   Es wird das Ergebnis $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$ der ersten Teilaufgabe in die oben angegebene Formel für die Oberfläche O eingesetzt. Damit erhält man

   $$O = \pi \cdot r \cdot (r + \ell) = \pi \cdot r \cdot \left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)}\right).$$

   Mit der zuletzt genannten Formel sieht man, wie sich die Oberfläche O im Vergleich zur Kreisfläche $G = \pi \cdot r^2$ mit dem Verhältnis von Höhe h zu Radius r ändert.

5.5.3 Aufgaben

Aufgabe 5.5.3
Berechnen Sie das Volumen eines Prismas der Höhe $h = 8\,\text{cm}$, dessen Grundfläche ein Dreieck ist, von dem zwei Seiten 5 cm lang sind, und eine Seite 6 cm lang ist.

Antwort: ☐ cm^3

Aufgabe 5.5.4
Die Oberfläche eines Zylinders mit einer Höhe von $h = 6\,\text{cm}$ soll mit einer Farbfolie beklebt werden. Die Oberfläche soll $O = 200\,\text{cm}^2$ groß sein. Berechnen Sie den Durchmesser d der Kreisfläche und das Volumen V des Zylinders. Verwenden Sie als Näherung für π den Wert 3,1415 und runden Sie Ihre Ergebnisse auf Millimeter.

Antworten:

a. $d =$ ☐ cm

b. $V =$ ☐ cm^3

Aufgabe 5.5.5
Es ist ein Holzstück in Form eines Quaders mit dem Volumen V_0 gegeben. Der Quader ist $h = 120\,\text{cm}$ hoch, und die Grundfläche besteht aus einem Quadrat mit einer Seitenlänge von $s = 40\,\text{cm}$. Aus dem Holzstück wird ein zylinderförmiges Loch der Höhe h mit einem Durchmesser von $d = 20\,\text{cm}$ „mittig" ausgebohrt (das heißt, der Schnittpunkt der Diagonalen der quadratischen Grundfläche bildet den Mittelpunkt der Kreisscheibe des Zylinders). Verwenden Sie als Näherung für π den Wert 3,1415 und runden Sie Ihre Ergebnisse auf die ganze Zahlen. Berechnen Sie

a. das Volumen V_Z des ausgebohrten Hohlraums:

   $V_Z =$ ☐ cm^3
   Lösung:
   Das Volumen des Zylinders ist

$$V_Z = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = 3{,}1415 \cdot \left(\frac{20\,\text{cm}}{2}\right)^2 \cdot 120\,\text{cm} = 3{,}1415 \cdot 12000\,\text{cm}^3 = 37698\,\text{cm}^3$$

b. den prozentualen Anteil des Volumens V_1 des neuen Holzstücks, das nach dem Ausbohren von V_0 noch vorhanden ist:

   Antwort: ☐ %
   Lösung:
   Das Volumen V des Holzstücks ist

$$V = s^2 \cdot h = (40\,\text{cm})^2 \cdot 120\,\text{cm} = 1600 \cdot 120\,\text{cm}^3 = 16 \cdot 12000\,\text{cm}^3$$

   Damit ist der Anteil p_Z des ausgebohrten Zylinders durch

$$p_Z = \frac{V_Z}{V} = \frac{\pi \cdot 12000\,\text{cm}^3}{16 \cdot 12000\,\text{cm}^3} \approx \frac{3{,}1415}{16} \approx 19\%$$

   und somit $p = (100 - 19)\% = 81\%$ der prozentuale Anteil des neuen Holzstücks im Vergleich zum ursprünglichen Holzquader.

5.6 Winkelfunktionen: Sinus und Co.

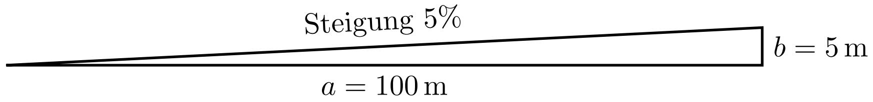
5.6.1 Einführung

An Bergstraßen werden Schilder aufgestellt, wenn es sehr steil bergab geht. Mit einer Prozentzahl wird beschrieben, wie stark das Gelände relativ zu einer horizontalen Bewegung abfällt. Systematisch wurden Fragen nach den Bedingungen von Bewegungen an einer „schiefen Ebene" in der Physik von Galileo Galilei untersucht. Die Ergebnisse sind auch für technische Konstruktionen relevant.

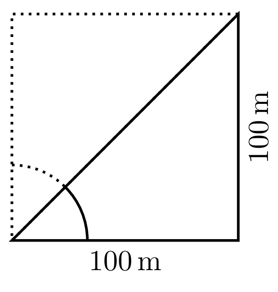
Als mathematisches Hilfsmittel dienen Winkelfunktionen. Sie beschreiben einen geometrischen Sachverhalt mittels eines rechnerischen Ausdrucks. Wie dieser Zusammenhang zwischen der prozentualen Angabe des Gefälles und dem zugehörigen Winkel formuliert werden kann, wird in diesem Abschnitt beschrieben. Eine erste Untersuchung der Eigenschaften von Winkelfunktionen gibt einen Eindruck von den vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten, die weit über die Geometrie hinausreichen und in den kommenden Abschnitten immer wieder aufgegriffen werden.

5.6.2 Trigonometrie am Dreieck

Fährt man eine Straße mit einem Gefälle von fünf Prozent bergab, nimmt die Höhe alle hundert Meter um fünf Meter ab. Dabei wird der Höhenunterschied im Vergleich zur Horizontalen betrachtet.



Demnach beträgt das Gefälle 100%, wenn der Höhenunterschied 100 m zwischen zwei Positionen beträgt, deren horizontaler Abstand 100 m beträgt. Geometrisch formuliert, ist die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkte eine Diagonale eines Quadrats. Damit hat der Winkel zwischen der horizontalen Vergleichsstrecke und der Diagonalen, auf der man sich bewegt, das Winkelmaß von 45°.

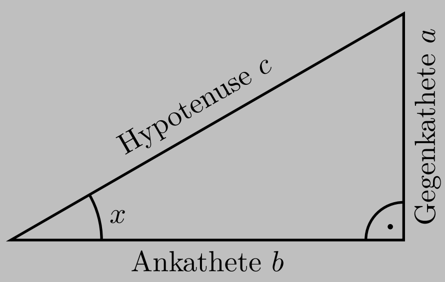


Dies kann man auch so formulieren: Einem Winkel von 45° entspricht eine Steigung von $\frac{100\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{m}} = 1$, das heißt ein Streckenverhältnis von 1 von vertikaler zu horizontaler Strecke. Aufgrund der Strahlensätze ist das Streckenverhältnis von den Längen der einzelnen Strecken unabhängig. Es hängt nur davon ab, wie die Strahlen zueinander verlaufen, also wie groß der Winkel zwischen ihnen ist. Wenn diese Zuordnung zwischen Winkel und Streckenverhältnis auch für andere Winkel bekannt ist, kann man damit viele konstruktive Aufgabenstellungen lösen. Beispielsweise kann die Höhe zu einem gegebenen Winkel bestimmt werden.

Schon die Frage, welches Verhältnis zu einem Winkel von 30° gehört, zeigt allerdings, dass die Bestimmung der Zuordung zwischen Winkel und Streckenverhältnis im Allgemeinen jedoch nicht so einfach ist. Deshalb wurden die aufwändig bestimmten Werte anfangs in großen Tafelwerken aufgeschrieben, um dann einfach nachgeschlagen werden zu können. Inzwischen sind die Werte mittels Taschenrechner und Computer praktisch überall verfügbar. Die gebräuchlichsten Zuordnungen von Winkel zu einem Streckenverhältnis werden im Folgenden vorgestellt. Sie werden Winkelfunktionen oder trigonometrische Funktionen genannt, und das mathematische Gebiet, das sich mit ihren Eigenschaften befasst, heißt **Trigonometrie**.

Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck 5.6.1

Es werden die gebräuchlichsten **Winkelfunktionen** als Zuordnungen zwischen Winkel und Seitenverhältnissen in einem rechtwinkligen Dreieck beschrieben. Die Winkelfunktionen heißen auch **trigonometrische Funktionen**. Dabei bezeichnet x einen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, der kein rechter Winkel ist. Die **Gegenkathete** ist die Seite, die dem Winkel x gegenüberliegt, und die andere Kathete wird **Ankathete** genannt.



- Die Zuordnung zwischen Winkel x und dem Verhältnis zwischen Gegenkathete a und Ankathete b wird als Tangens bezeichnet:

$$\tan(x) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

- Die Zuordnung zwischen Winkel x und dem Verhältnis zwischen Ankathete b und Hypotenuse c wird als Kosinus bezeichnet:

$$\cos(x) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hyptenuse}} = \frac{b}{c}$$

- Die Zuordnung zwischen Winkel x und dem Verhältnis zwischen Gegenkathete a und Hypotenuse c wird als Sinus bezeichnet:

$$\sin(x) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hyptenuse}} = \frac{a}{c}$$

Demnach beschreibt der Tangens die Zuordnung zwischen dem Neigungswinkel und dem Verhältnis zwischen Höhe und Breite, also der Steigung. Dies ist auch im Kapitel 8 auf Seite 287 im Kontext der geometrischen Interpretation der Ableitung von Bedeutung.

Der Tangens des Winkels α ist nach der Definition

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} .$$

Somit genügt es, die Werte von Sinus und Kosinus zu kennen, um auch den Tangens berechnen zu können.

Beispiel 5.6.2

Von einem Dreieck ist bekannt, dass es einen rechten Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°$ hat. Die Seite c ist 5 cm, die Seite a ist 2,5 cm lang. Es sollen jeweils der Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α bestimmt werden:

Der Sinus lässt sich sofort aus den Angaben berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{2{,}5\,\mathrm{cm}}{5\,\mathrm{cm}} = 0{,}5 .$$

Für den Kosinus wird die Länge der Seite b benötigt, welche man mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Daraus folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{(5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}5\,\mathrm{cm})^2}}{5\,\mathrm{cm}} = 0{,}866 .$$

Damit ergibt sich für den Tangens

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{0{,}5}{0{,}866} = 0{,}5773 .$$

Aufgabe 5.6.1

Es sollen einige Werte der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens näherungsweise grafisch bestimmt werden. Gehen Sie von rechtwinkligen Dreiecken mit einer Hypotenuse $c = 5$ aus. Zeichnen Sie mithilfe des Thaleskreises rechtwinklige Dreiecke für die Winkel

$$\alpha \in \{10°; 20°; 30°; 40°; 45°; 50°; 60°; 70°; 80°\} .$$

Fertigen Sie Ihre Zeichnungen im Maßstab 1 Längeneinheit $\widehat{=}$ 2 cm an, und schreiben Sie die Messwerte zu den Seiten a und b in eine Tabelle.

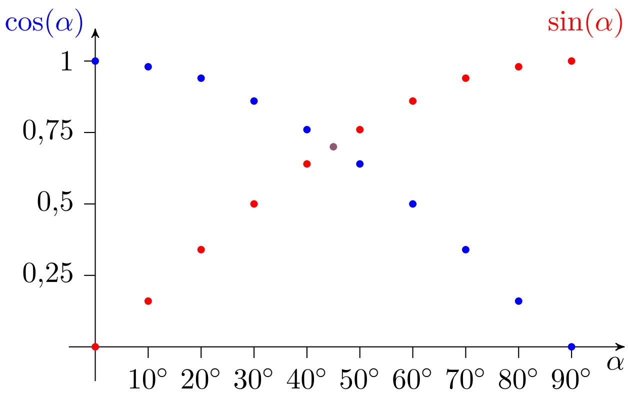
Berechnen Sie zu jedem Winkel mit den gemessenen Werten den Sinus, Kosinus und Tangens, und überlegen Sie sich anschließend, wo auch Werte zu $\alpha = 0°$ und zu $\alpha = 90°$ existieren. Tragen Sie anschließend die Werte von Sinus und Kosinus in Abhängigkeit des Winkels α in ein Diagramm ein.

Lösung:

Beim Messen entstehen immer Messfehler! Deshalb wird Ihre Tabelle teilweise etwas andere Werte enthalten. Die Tabelle könnte folgendermaßen aussehen:

α	a	b	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0,0	5,0	0,0	1,0	0,0
10°	0,8	4,9	0,160	0,98	0,1633
20°	1,7	4,7	0,34	0,94	0,3617
30°	2,5	4,3	0,5	0,86	0,5814
40°	3,2	3,8	0,64	0,76	0,8421
45°	3,5	3,5	0,7	0,7	1,0
50°	3,8	3,27	0,76	0,64	1,1875
60°	4,3	2,5	0,86	0,5	1,7200
70°	4,7	1,7	0,94	0,34	2,7647
80°	4,9	0,8	0,98	0,160	6,1250
90°	5,0	0,0	1,0	0,0	–

Das zugehörige Diagramm sieht dann folgendermaßen aus:



Wenn man sich die Ergebnisse aus der letzten Aufgabe nochmals genauer ansieht, kann man auf verschiedene Ideen kommen, sie zu interpretieren, und dann einige Zusammenhänge erkennen.

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt die Gegenkathete a zu und die Ankathete b ab.

  Ebenso verhalten sich $\sin(\alpha) \sim a$ und $\cos(\alpha) \sim b$.

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt a in dem gleichen Maß zu wie b mit dem von 90° aus fallenden Winkel α abnimmt. Im Thaleskreis sind die beiden Dreiecke mit den entgegengesetzten Werten für a und b die zwei Lösungen für die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse und gegebener Höhe (siehe auch das Beispiel 5.3.6 auf Seite 144).

- Für den Winkel $\beta = 90° - \alpha$ ist die Ankathete die Seite im rechtwinkligen Dreieck, die aus Sicht des Winkels α als Gegenkathete bezeichnet wird (und umgekehrt). Somit gilt

  $$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

  und

  $$\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) .$$

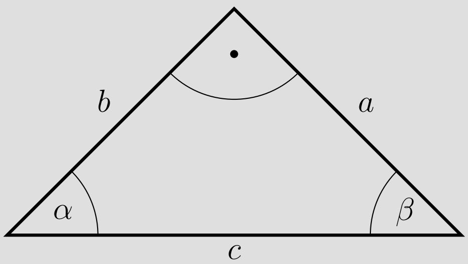
- Bei $\alpha = 45°$ sind die Katheten und damit auch Sinus und Kosinus von α gleich. Diese Beobachtung führte eingangs umgekehrt zur Bestimmung des Steigungswinkels.
- Der Tangens, also das Verhältnis von a zu b, steigt mit zunehmendem Winkel α von Null ins „Unendliche“.

Im folgenden Beispiel wird die Überlegung aus der Einleitung fortgesetzt, die auf ein Dreieck mit einem Winkel von 45° führte, um den zugehörigen Sinuswert exakt zu berechnen.

Beispiel 5.6.3

Es soll der Sinus des Winkels $\alpha = 45°$ nun exakt berechnet, also nicht wie in Aufgabe 5.6.1 auf Seite 173 aus gemessenen (und damit fehlerbehafteten) Werten bestimmt werden.

Wenn im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ der Winkel α gleich 45° ist, so muss wegen der Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180°$ der Winkel β auch gleich $45° = \pi/4$ sein, und die beiden Katheten a und b sind gleich lang. Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten nennt man **gleichschenklig**:



Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \sin(45°) = \frac{a}{c}\ .$$

Außerdem gilt:

$$a^2 + b^2 = 2a^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2} \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad \sin(45°) = \sin(\pi/4) = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\ .$$

In der Aufgabe 5.6.1 auf Seite 173 wurde der Sinus von 45° durch einen Wert von 0,7 angenähert, was dem tatsächlichen Wert von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ schon recht nahe kommt.

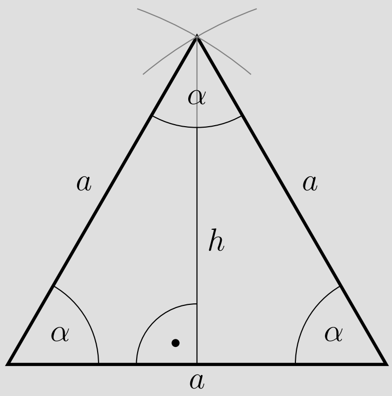
Im nächsten Beispiel wird der Sinuswert zum Winkel $\alpha = 60°$ berechnet. Hierfür wird zunächst nicht ein rechtwinkliges Dreieck sondern ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten betrachtet. Mit einer geschickten Zerlegung und Berechnung einer weiteren „Hilfsgröße“ erhält man daraus das gesuchte Ergebnis.

Beispiel 5.6.4

In diesem Beispiel soll ein **gleichseitiges** Dreieck betrachtet werden, um $\sin(60°)$ zu berechnen. Wie der Name sagt, sind in diesem Dreieck alle Seiten gleich lang, und auch die Winkel sind alle gleich groß, nämlich $\alpha = \beta = \gamma = \frac{180°}{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$. Das Dreieck ist nach dem Kongruenzsatz „sss“ mit der Angabe einer Seite a eindeutig bestimmt, und man erhält dieses, indem man die Seite a zeichnet und mit dem Zirkel einen Kreis vom Radius a um jede Ecke schlägt. Der Schnittpunkt der Kreise ist nun die dritte Ecke.

Dieses Dreieck hat keinen rechten Winkel. Zeichnet man eine Höhe h auf eine der Seiten a ein, so erhält man zwei kongruente Dreiecke mit je einem rechten Winkel.
Es gilt nun:

$$\sin(\alpha) = \sin(60°) = \frac{h}{a} .$$



Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 .$$

Daraus folgt

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \text{und somit} \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a .$$

Damit erhält man den gesuchten Wert

$$\sin(60°) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} .$$

Aus diesem Dreieck kann man noch den Sinus eines weiteren Winkels berechnen: Die Höhe h teilt den oberen Winkel in zwei gleiche Teile, sodass man in den beiden kleinen kongruenten Dreiecken jeweils den Winkel $30° = \frac{\pi}{6}$ erhält. Es ist nun

$$\sin(30°) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} .$$

Aufgabe 5.6.2
Berechnen Sie den exakten Wert des Kosinus für die Winkel $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 45°$ und $\alpha_3 = 60°$. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus dem vorherigen Beispiel und aus der Aufgabe 5.6.1 auf Seite 173.

Lösung:
Aus der Aufgabe 5.6.1 auf Seite 173 ist bekannt, dass $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$ gilt. Mit den Ergebnissen aus den obigen Beispielen folgt daraus

$$\begin{aligned}
\cos(30°) &= \sin(90° - 30°) = \sin(60°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} ,\\
\cos(45°) &= \sin(90° - 45°) = \sin(45°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} ,\\
\cos(60°) &= \sin(90° - 60°) = \sin(30°) = \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

In einer kleinen Tabelle werden die gefundenen Werte für oft verwendete Winkel zusammengestellt: Hier wird in der mit x bezeichneten ersten Zeile der Winkel im Bogenmaß und in der mit α bezeichneten letzten Zeile der Winkel im Gradmaß notiert.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1$
cos	$1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} = 0$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

Diese Werte sollte man sich merken. Die Werte der trigonometrischen Funktionen für andere Winkel sind in Tabellen bzw. im Taschenrechner gespeichert.

Damit kann man dann aus einem Winkel und einem Abstand ganz einfach eine Höhe berechnen. Ist nämlich s der Abstand zu einem Gebäude mit Flachdach, das unter einem Winkel x beobachtet wird, ergibt sich aus $\tan(x) = \frac{h}{s}$ nämlich $h = s \cdot \tan(x)$. Ebenso können auch cos und sin verwendet werden, um Längen zu bereichnen. Dieser Zusammenhang zwischen Winkeln und Längen wird oft verwendet.

Beispielsweise kann man so einen Flächeninhalt berechnen, auch wenn eine benötigte Länge nicht unmittelbar gegeben ist. Im folgenden Beispiel ist es eine Höhe h in einem Dreieck, die zu berechnen ist. Da h, ausgehend von einer Ecke, hier C genannt, senkrecht auf der Geraden der gegenüberliegenden Seite $c = \overline{AB}$ steht, bilden die Ecken von h und A bzw. B ein rechtwinkliges Dreieck. Mit einer Angabe zu einem Winkel und der entsprechenden Seite kann dann die Höhe aus $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ oder aus $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$ berechnet werden, wobei von den konventionellen Bezeichnungen ausgegangen wurde.

Aufgabe 5.6.3
Berechnen Sie den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seiten $c = 7$ und $b = 3$ sowie dem Winkel $\alpha = 30°$ zwischen den Seiten c und b.

Ergebnis: F = [ ]

<u>Lösung:</u>
Der Flächeninhalt F kann gemäß $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ berechnet werden, wobei noch h_c zu bestimmen ist: Aus $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$ ergibt sich

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = 3 \cdot \sin(30°) = 3 \cdot \frac{1}{2} .$$

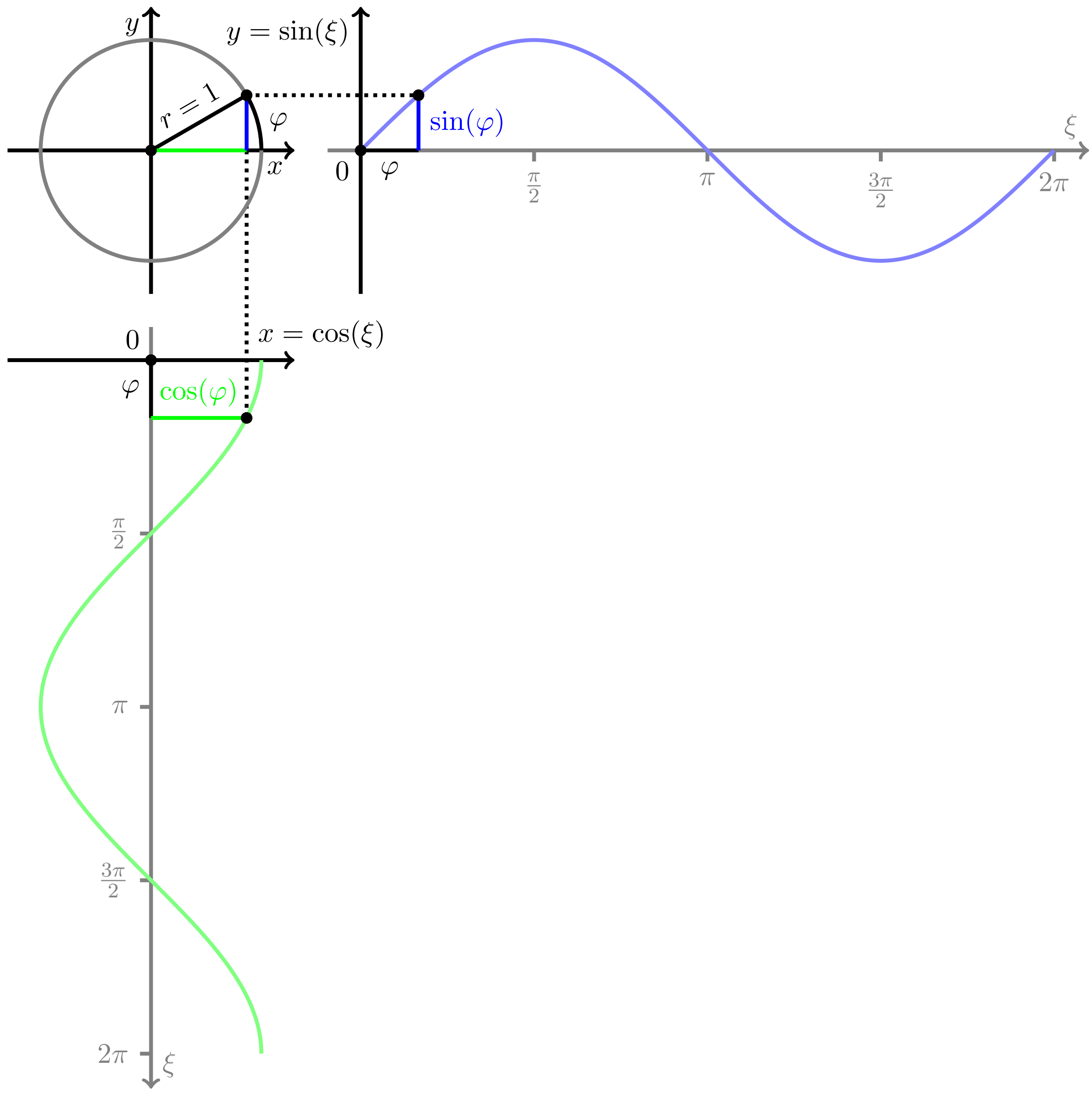
Damit ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{4} .$$

5.6.3 Trigonometrie am Einheitskreis

Im vorherigen Abschnitt wurden die trigonometrischen Funktionen anhand eines rechtwinkligen Dreiecks eingeführt. Die beschriebenen Eigenschaften gelten also für einen Winkelbereich von 0° bis 90° beziehungsweise 0 bis $\frac{\pi}{2}$.

Um die gewonnenen Erkenntnisse auf größere Winkel als $\pi/2$ ausdehnen zu können, erweist sich der Blick auf den sogenannten Einheitskreis als besonders nützlich.



Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius 1. Sein Mittelpunkt wird im Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems positioniert. Hier wird eine Strecke vom Mittelpunkt aus mit der Länge 1 betrachtet. Diese Strecke wird nun von ihrer horizontalen Ausgangslage auf der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn, um den Nullpunkt gedreht. Dabei überstreicht ihr rotierendes Ende den Einheitskreis und bildet mit der positiven x-Achse den Winkel α, der bei der Rotation von 0 bis 2π bzw. $360°$ wächst. Zu jedem Winkel φ gehört also ein Punkt P_φ mit den Koordinaten x_φ und y_φ auf dem Einheitskreis.

Für φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ kann man die Strecke, den zugehörigen Abschnitt auf der x-Achse und den zugehörigen y-Achsenabschnitt als rechtwinkliges Dreieck ansehen. Die Hypotenuse ist die Strecke mit der Länge 1, der x-Achsenabschnitt ist die Ankathete und der y-Achsenabschnitt die Gegenkathete. Dies entspricht der Situation aus dem vorherigen Abschnitt.

Der Sinus des Winkels φ ist also

$$\sin(\varphi) = \frac{y_\varphi}{1} = y_\varphi$$

und der Kosinus ist

$$\cos(\varphi) = \frac{x_\varphi}{1} = x_\varphi \,.$$

Anhand der obigen Beschreibung am Einheitskreis gelten diese Definitionen jetzt auch für Winkel $\varphi > \pi/2$. Dabei können die Werte für x_φ und y_φ auch negativ werden und damit auch Sinus und Kosinus. Trägt man die y-Werte in Abhängigkeit vom Winkel φ in ein Diagramm ein, so erhält man die blaue Kurve für die Sinusfunktion. Für die x-Werte erhält man die grüne Kurve für die Kosinusfunktion. Indem man die Strecke in umgekehrter Richtung dreht, kann man entsprechend Werte für negative Winkel definieren.

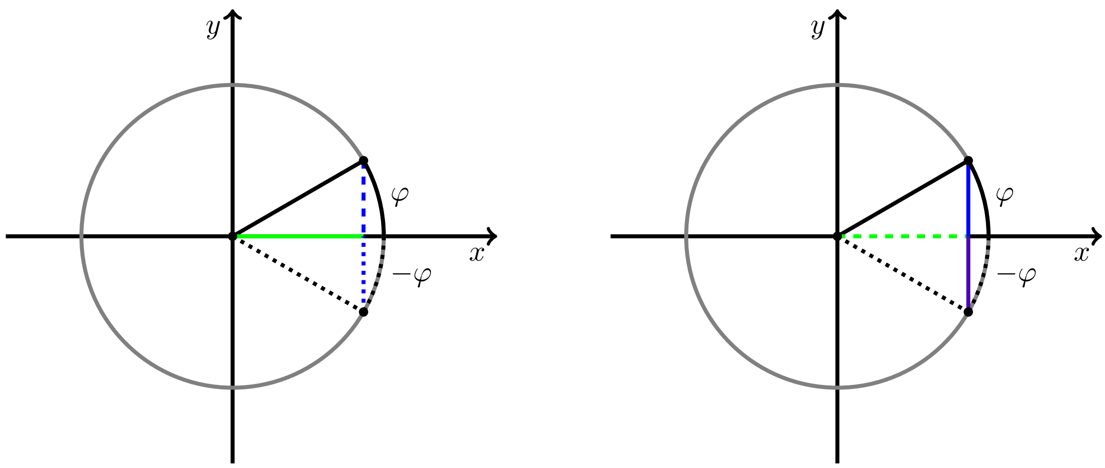
Mit dem Satz von Pythagoras gilt außerdem

$$x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = 1 \; .$$

Setzt man hier die Beziehungen für x_φ und y_φ mit den Winkelfunktionen ein, so ergibt sich für beliebige Winkel φ die wichtige Beziehung

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \; .$$

Aus der Beschreibung von Sinus und Kosinus am Einheitskreis wird zudem ersichtlich, dass sich die Kosinuswerte bei Spiegelung an der x-Achse nicht ändern. Somit ist der Wert von cos zum Winkel φ gleich dem Kosinuswert zum Winkel $-\varphi$ (in der Zeichnung grün dargestellt). Beim Sinus führt eine Spiegelung an der x-Achse zur Änderung des Vorzeichens des Sinuswertes (in der Zeichnung blau beziehungsweise violett dargestellt).



Formelmäßig ausgedrückt, bedeutet dies

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

für jeden Winkel φ. Diese Symmetrieeigenschaften sind für viele Rechnungen hilfreich. Ein elementares Beispiel ist die Berechnung des Winkels zwischen x-Achse und der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt zu einem Punkt im kartesischen Koordinatensystem (siehe auch Aufgabe 5.6.4 auf der nächsten Seite).

Beispiel 5.6.5

Gesucht sind jeweils die Werte des Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels $\alpha = 315°$.

Für $\alpha = 315°$ liegt der Punkt P_α im vierten Quadranten. Er wird auf dem Einheitskreis auch durch den negativen Winkel $\varphi = 315° - 360° = -45°$ beschrieben. Damit ist $\sin(315°) = \sin(-45°) = -\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\cos(315°) = \cos(-45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sowie $\tan(315°) = \tan(-45°) = -1$.

5.6.4 Aufgaben

Aufgabe 5.6.4
Wie groß ist der Winkel φ im Gradmaß, den der Punkt $P_\varphi = (-0{,}643; -0{,}766)$ auf dem Einheitskreis mit dem Nullpunkt im kartesischen Koordinatensystem einschließt? Verwenden Sie dazu den Taschenrechner, aber vertrauen Sie ihm nicht blind!

Ergebnis: φ = [ ] °

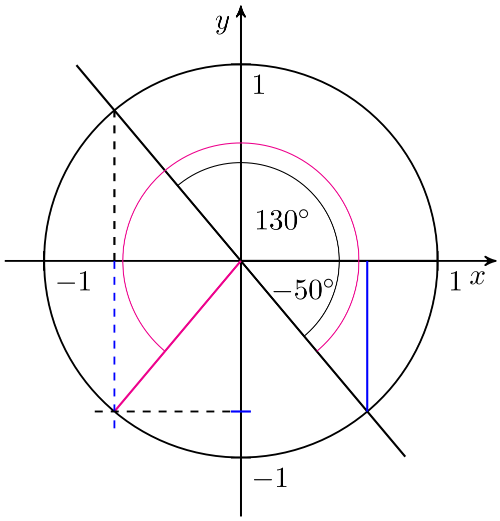
Lösung:
Aus den Koordinaten des Punktes P_φ ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = -0{,}643 \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = -0{,}766 .$$

Wenn Sie in den Taschenrechner

- `invers(cos(-0,643))` bzw. $\cos^{-1}$(-0,643) eingeben, erhalten Sie ungefähr 130°, und
- bei Eingabe von `invers(sin(-0,766))` bzw. $\sin^{-1}$(-0,766) erhalten Sie ungefähr $-50°$.

Außerdem wissen Sie, dass der Punkt im dritten Quadranten liegt. Somit muss der Wert für den Winkel im Bereich zwischen 180° und 270° liegen.



Anhand der Zeichnung erkennt man, dass der negative Kosinuswert zum Winkel $-130°$ und zu $\varphi = -130° = -130° + 360° = 230°$ gehört.
Ebenso kann der negative Sinuswert zu $-50°$ und zu $\varphi = -(-50°) + 180° = 230°$ gehören.
Da dieser Wert im oben genannten Bereich liegt, ist $\varphi = 230°$ der gesuchte Wert des Winkels, der in der Zeichnung rosa gekennzeichnet ist.

Aufgabe 5.6.5 1. Für ein bei C rechtwinkliges Dreieck seien $b = 2{,}53\,\text{cm}$ und $c = 3{,}88\,\text{cm}$ gegeben. Geben Sie $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und a an!

Ergebnisse:

- $\sin(\alpha)$ = [ ]
- $\sin(\beta)$ = [ ]
- a = [ ] cm

Lösung:

Es ist

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(3{,}88\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}53\,\mathrm{cm})^2} = \sqrt{15{,}0544\,\mathrm{cm}^2 - 6{,}4009\,\mathrm{cm}^2} = \sqrt{8{,}6535}\,\mathrm{cm}\ ,$$

und

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{8{,}6535}\,\mathrm{cm}}{3{,}88\,\mathrm{cm}} = \frac{\sqrt{86535}}{388} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{2{,}53\,\mathrm{cm}}{3{,}88\,\mathrm{cm}} = \frac{253}{388}\ .$$

Numerisch ergibt sich $a \approx 2{,}9417\,\mathrm{cm}$, $\sin(\alpha) \approx 0{,}7587$ und $\sin(\beta) \approx 0{,}65201$.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seiten $a = 4\,\mathrm{m}$ und $c = 60\,\mathrm{cm}$ und dem Winkel $\beta = \measuredangle(a, c) = \frac{11\pi}{36}$!

   Ergebnis: $F\ =$ $\boxed{}$ m^2

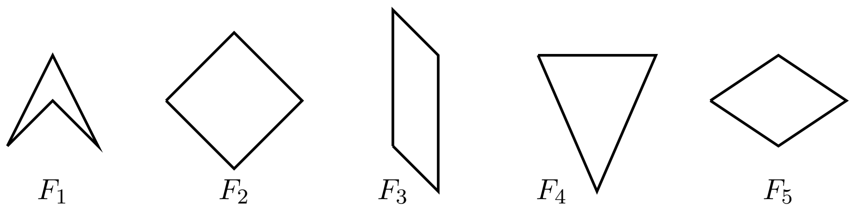
   Lösung:

$$\frac{(a \cdot \sin(\beta)) \cdot c}{2} = \sin\left(\tfrac{11\pi}{36}\right) \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}^2 \approx 0{,}98298\,\mathrm{m}^2\ .$$

5.7 Abschlusstest

5.7.1 Abschlusstest Modul 7

Aufgabe 5.7.1
Kennzeichnen Sie die dargestellten Figuren möglichst genau, indem Sie jeweils den Namen der Klasse (gegebenenfalls mit einem vorangestellten Adjektiv) angeben, die möglichst viele Eigenschaften der Figur beschreibt.



Figur:	Klassenbeschreibung:
F_1	
F_2	
F_3	
F_4	
F_5	

Aufgabe 5.7.2
Welche der Aussagen und Ergebnisse sind richtig?

richtig	falsch	
☐	☐	Jedes Rechteck ist eine Raute.
☐	☐	Jedes Quadrat ist ein Parallelogramm.
☐	☐	Es gibt genau ein Quadrat mit einer Diagonalen von 5 cm.
☐	☐	Ein Dreieck mit den Winkeln 36° und 54° ist rechtwinklig.
☐	☐	In einem Viereck ist die Summe aller (Innen-)Winkel im Bogenmaß gleich 4π.

Aufgabe 5.7.3
Im Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 6\,\mathrm{cm}$ und $c = 9\,\mathrm{cm}$ sind auf der Seite c ein Punkt P und auf der Seite b ein Punkt Q so gewählt, dass PQ parallel zur Seite a ist und $[\overline{PQ}] = 0{,}50\,\mathrm{cm}$ gilt. Bestimmen Sie die Streckenlängen $[\overline{PB}]$ und $[\overline{QC}]$ in Zentimeter:

a. $[\overline{PB}]$ = ☐ cm

b. $[\overline{QC}]$ = ☐ cm

Aufgabe 5.7.4
Ein Quadrat mit Seitenlänge a sei gegeben. Geben Sie Formeln an für Flächeninhalt und Umfang des größtmöglichen Kreises innerhalb des Quadrats, sowie für den kleinstmöglichen Kreis, der das Quadrat enthält:

a. Umfang des Kreises im Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

b. Flächeninhalt des Kreises im Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

c. Umfang des Kreises um das Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

d. Flächeninhalt des Kreises um das Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

In den Antwortfeldern dürfen keine Klammern oder Wurzelausdrücke auftauchen. Schreiben Sie beispielsweise $2^{0.5}$ statt $\sqrt{2}$, um die Wurzel zu vermeiden.

6 Elementare Funktionen

Modulübersicht

6.1 Grundlegendes zu Funktionen

6.1.1 Einführung

Aus Modul 1 kennen wir bereits die reellen Zahlen als Menge sowie Intervalle als wichtige Teilmengen der reellen Zahlen.

Beispiel 6.1.1

Wir möchten die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$ außer der Zahl $0 \in \mathbb{R}$ in einer Menge zusammenfassen. Wie schreiben wir eine solche Zahlenmenge auf? Hierfür gibt es die Schreibweise

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ .$$

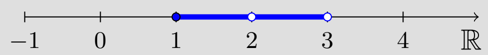
Diese wird gelesen als "$\mathbb{R}$ ohne 0". Eine weitere Schreibweise für diese Menge ist die Vereinigung zweier offener Intervalle:

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \ .$$

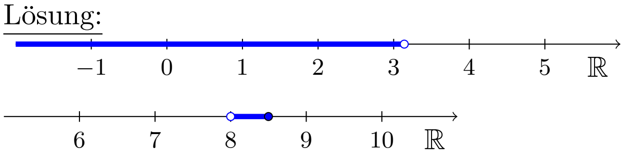
Genauso kann man aus beliebigen anderen Mengen einzelne Zahlen entfernen. So beinhaltet etwa die Menge

$$[1; 3) \setminus \{2\} \ ,$$

alle Zahlen aus dem halboffenen Intervall $[1; 3)$ außer der Zahl 2:



Aufgabe 6.1.1
Wie sehen die Intervalle $(-\infty; \pi)$ und $(8; 8{,}5]$ auf der Zahlengeraden aus?
Lösung:



Die Betrachtung von Mengen sowie Gleichungen und Ungleichungen für Zahlen aus diesen Mengen, wie in den vorhergehenden Modulen (etwa Modul 1) geschehen, reicht nicht aus um Mathematik zu betreiben und anzuwenden. Darüber hinaus brauchen wir sogenannte Funktionen (diese werden oft auch als Abbildungen bezeichnet).

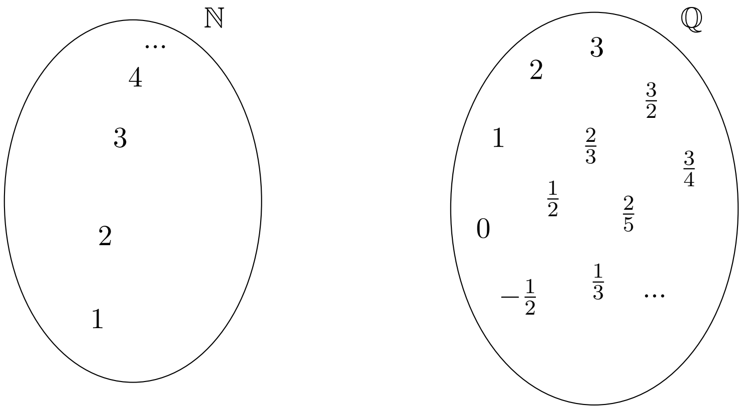
Info 6.1.2

Funktionen (bzw. **Abbildungen**) sind Zuordnungen zwischen den Elementen zweier Mengen.

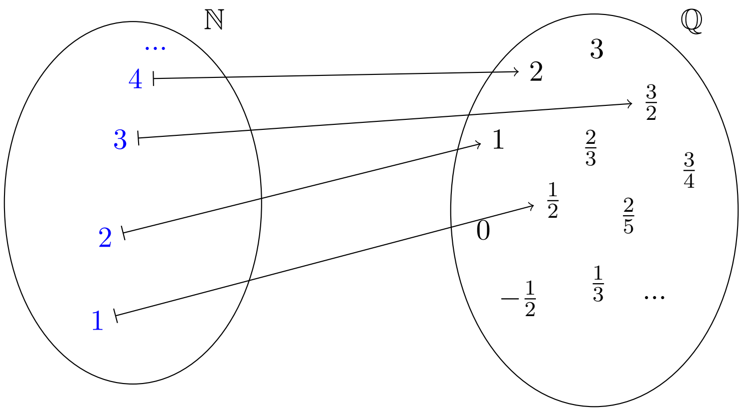
Diesem grundlegenden mathematischen Begriff der Zuordnung zwischen Mengen werden wir uns im ersten Abschnitt 6.1.2 widmen. Im Abschnitt 6.1.3 stellen wir Bezüge zu Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften her und machen uns die Nützlichkeit des mathematischen Funktionsbegriffs, als Formalisierung von abhängigen Größen, bewusst. Schließlich untersuchen wir in Abschnitt 6.1.4 die bildliche Darstellung von Funktionen mittels Graphen. Im weiteren Verlauf dieses Moduls werden wir dann die wichtigsten elementaren Funktionen zusammen mit ihren Graphen betrachten. Es ist fundamental, den Verlauf der Graphen der elementaren Funktionen zu kennen.

6.1.2 Zuordnungen zwischen Mengen

Wir beginnen mit einem ersten Beispiel einer Funktion als Zuordnung zwischen zwei Mengen. Dazu betrachten wir die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und veranschaulichen uns diese als zwei „Container" mit Zahlen.



Nun wollen wir eine Zuordnung zwischen den Elementen dieser beiden Mengen auf folgende Art durchführen. Jeder beliebigen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird die Hälfte dieser Zahl $\frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$ zugeordnet, also der Zahl $1 \in \mathbb{N}$ die Zahl $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, der Zahl $2 \in \mathbb{N}$ die Zahl $1 \in \mathbb{Q}$ und immer so weiter. Dies können wir im Bild durch Pfeile veranschaulichen, die andeuten, welche Zahlen in $\mathbb{N}$ welchen Zahlen in $\mathbb{Q}$ zugeordnet werden.



Wir benutzen für die Zuordnung der einzelnen Elemente der Mengen, die wir oben in Worten beschrieben haben, den sogenannten Zuordnungspfeil. Dies ist ein Pfeil, der auf einer Seite einen senkrechten Strich als Abschluss hat: $\longmapsto$. Er bedeutet, dass der Zahl auf der Seite mit dem senkrechten Strich die Zahl auf der Seite der Pfeilspitze zugeordnet wird:

$$\mathbb{N} \ni 1 \longmapsto 0{,}5 \in \mathbb{Q}\,, \quad \mathbb{N} \ni 2 \longmapsto 1 \in \mathbb{Q}\,, \quad \text{usw.}$$

Mit diesen Zuordnungen haben wir nun eine Funktion von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruiert. In der Mathematik gibt man dieser Zuordnung nun einen Namen, d.h. man reserviert ein Symbol (oft f für Funktion), das genau diese Zuordnung beschreiben soll. Dazu muss man die Zahlenmengen notieren, aus denen und in die zugeordnet werden soll. In diesem Fall werden den Elementen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ rationale Zahlen zugeordnet. Dies schreibt man mathematisch mit einem sogenannten Abbildungspfeil $\longrightarrow$, an dessen Spitze die Menge auftaucht, die das Ziel der Zuordnung ist und an dessen Basis die Menge steht, deren Elemente zugeordnet werden. In diesem Fall also

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}\,.$$

Man liest dies als „die Funktion f bildet von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ ab".

Weiterhin können wir uns nun die Frage stellen, ob wir die Zuordnungen dieser Funktion $1 \longmapsto \frac{1}{2}$, $2 \longmapsto 1$, usw. kürzer aufschreiben können. Dazu erinnern wir uns an den Beginn dieses Beispiels. Wir haben uns überlegt, jeder natürlichen Zahl n ihre Hälfte $\frac{n}{2}$ zuzuordnen. Damit können wir links und rechts des Zuordnungspfeils nun einfach diese beliebige natürliche Zahl n bzw. die sich daraus ergebende rationale Zahl $\frac{n}{2}$ hinschreiben:

$$n \longmapsto \frac{n}{2}\,.$$

Man liest dies als „n wird auf $\frac{n}{2}$ abgebildet". Diese Schreibweise bezeichnet man auch als Abbildungsvorschrift der Funktion. Eine weitere Schreibweise für die Abbildungsvorschrift benutzt den Namen der Funktion:

$$f(n) = \frac{n}{2}\,.$$

Man liest dies als „f von n ist gleich $\frac{n}{2}$". Wir können also die hier betrachtete Funktion f nun zusammengefasst folgendermaßen schreiben:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2}\,. \end{array} \right.$$

Man liest dies nun als „die Funktion f bildet von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ ab, jedes $n \in \mathbb{N}$ wird auf $\frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$ abgebildet". Diese zusammenfassende Schreibweise werden wir im Rest diese Moduls für Funktionen weiter verwenden.

Wir betrachten einige weitere einfache Beispiele für Funktionen:

Beispiel 6.1.3

- Eine Funktion g soll jeder reellen Zahl x ihr Quadrat $x \cdot x = x^2$ zuordnen. Dies ergibt die sogenannte Standardparabel (siehe 6.2.6):

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\,. \end{array} \right.$$

  Die Abbildungsvorschrift von g lautet damit $g(x) = x^2$. Man kann dann die Zuordnungen für konkrete Zahlen ausrechnen. Zum Beispiel $g(2) = 2^2 = 4$ oder $g(-\pi) = (-\pi)^2 = \pi^2$, usw.

- Eine Funktion φ soll jeder reellen Zahl y zwischen 0 und 1 ihren dreifachen Wert plus 1 zuordnen. Dies ist ein Beispiel für eine sogenannte linear-affine Funktion (siehe 6.2.4):

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1\,. \end{array} \right.$$

Die Abbildungsvorschrift von φ lautet damit $\varphi(y) = 3y + 1$. Somit errechnet man beispielsweise $\varphi(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2$, usw. Allerdings kann man in diesem Fall $\varphi(8)$ oder auch $\varphi(1)$ nicht angeben, da 8 und 1 keine Elemente der Menge $(0; 1)$ sind.

Aufgabe 6.1.2 (i) Geben Sie eine Funktion h an, die jeder positiven reellen Zahl x ihren Kehrwert zuordnet. Berechnen Sie $h(2)$ und $h(1)$. Vervollständigen Sie die beiden Zuordnungen

$$3 \longmapsto \ ? \quad \text{und} \quad ? \longmapsto 2$$

von h.

(ii) Beschreiben Sie in Worten die Zuordnung, die von folgender Funktion ausgeführt wird:

$$w : \begin{cases} [4; 9] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{\alpha} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $w(9)$ und $w(5)$. Kann man auch $w(10)$ angeben?

Lösung:

(i) Der Kehrwert von x ist $\frac{1}{x}$. Die positiven reellen Zahlen sind die Menge $(0; \infty)$. Damit kann man die Funktion h schreiben als

$$h : \begin{cases} (0; \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Dies ist ein Beispiel für eine Funktion vom hyperbolischen Typ und wird in Abschnitt 6.3 genauer behandelt. Die Abbildungsvorschrift von h ist $h(x) = \frac{1}{x}$, womit gilt $h(2) = \frac{1}{2}$ und $h(1) = \frac{1}{1} = 1$. Außerdem berechnet man $h(3) = \frac{1}{3}$, womit $3 \longmapsto \frac{1}{3}$ gilt. Weiterhin führt die Überlegung $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ auf $\frac{1}{2} \longmapsto 2$.

(ii) Die Funktion w ordnet jeder reellen Zahl α, die größer oder gleich 4 und kleiner oder gleich 9 ist, ihre Quadratwurzel $\sqrt{\alpha}$ zu. Die Abbildungsvorschrift lautet $w(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, womit $w(9) = \sqrt{9} = 3$ sowie $w(5) = \sqrt{5}$ gilt. $w(10)$ kann nicht angegeben werden, da $10 \notin [4; 9]$.

Die obigen Beispiele zeigen einige Grundeigenschaften von Funktionen, für die wir nun spezielle Begriffe einführen wollen:

Info 6.1.4

Beim Aufschreiben einer Funktion gibt man eine Menge von Zahlen an, deren Elemente von der Funktion anderen Zahlen zugeordnet werden sollen. Diese Menge heißt **Definitionsbereich** oder Definitionsmenge der Funktion. Hat die Funktion einen Namen, etwa f, so wird der Definitionsbereich mit dem Symbol D_f bezeichnet. So ist zum Beispiel die Definitionsmenge der Funktion

$$h : \begin{cases} (0; \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

aus Aufgabe 6.1.2 die Menge $D_h = (0; \infty)$. Auch für die Elemente des Definitionsbereichs gibt es eine spezielle Bezeichnung. In diesem Fall werden die Zahlen $x \in D_h$ mittels der Abbildungsvorschrift $h(x) = \frac{1}{x}$ zugeordnet. Hierbei wird die Variable x als die **Veränderliche** der Funktion h bezeichnet.

Aufgabe 6.1.3
Geben Sie die Definitionsbereiche der Funktionen w aus Aufgabe 6.1.2 und g aus Beispiel 6.1.3 an.
Lösung:
Es gilt

$$w : \left\{ \begin{array}{rcl} [4;9] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{\alpha} \end{array} \right.$$

und

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. ,$$

womit man $D_w = [4; 9]$ und $D_g = \mathbb{R}$ erhält.

Betrachten wir die Abbildungsvorschrift $h(x) = \frac{1}{x}$ der Funktion h, so sehen wir, dass eigentlich nichts dagegen spricht, jede beliebige reelle Zahl für x in $\frac{1}{x}$ einzusetzen außer der Zahl $x = 0$, da die Rechenoperation „$\frac{1}{0}$" kein Ergebnis liefert. Man kann bei der Angabe einer Definitionsmenge also unterscheiden zwischen Zahlen, die ausgeschlossen sind, da man sie überhaupt nicht in die Abbildungsvorschrift einsetzen darf, und solchen, die ausgeschlossen sind, weil die Funktion eben so definiert ist. Dies führt nun auf den Begriff des größtmöglichen Definitionsbereichs einer Funktion, der größtmöglichen Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die man als Definitionsmenge einer Funktion mit bekannter Abbildungsvorschrift benutzen kann.

Beispiel 6.1.5

Der größtmögliche Definitionsbereich $D_h \subset \mathbb{R}$ der Funktion

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} D_h & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. ,$$

ist $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 6.1.4
Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion

$$w : \left\{ \begin{array}{rcl} D_w & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{\alpha} \end{array} \right.$$

an.
Lösung:
Die Wurzel liefert für alle nicht-negativen reellen Zahlen ein sinnvolles reelles Ergebnis. Somit gilt $D_w = [0; \infty)$.

Beim Aufschreiben von Funktionen ist neben dem Definitionsbereich noch eine zweite Menge notwendig, nämlich diejenige Menge, die das Ziel der durch die Funktion beschriebenen Zuordnung ist. Diese wird als Zielmenge oder Zielbereich bezeichnet. Betrachten wir nochmal die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1 \end{cases}$$

aus Beispiel 6.1.3. Deren Zielmenge sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Zielmenge der Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2} \end{cases}$$

aus dem einführenden Beispiel dieses Abschnitts sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wir erkennen hier einen wichtigen Unterschied zwischen der Definitionsmenge und der Zielmenge einer Funktion. Die Definitionsmenge enthält alle Zahlen, und nur diese, die man in die Abbildungsvorschrift der Funktion einsetzen darf und möchte. Wohingegen die Zielmenge alle Zahlen enthalten kann, die potentiell als Ergebnis der Abbildungsvorschrift auftauchen können.

In diesem Zusammenhang stellen wir uns die Frage, was denn der kleinstmögliche Zielbereich ist, den man für eine Funktion mit gegebenem Definitionsbereich und bekannter Abbildungsvorschrift benutzen kann. Unter dem kleinstmöglichen Zielbereich verstehen wir all diejenigen Zahlen, die – bei gegebener Definitionsmenge und Abbildungsvorschrift – tatsächlich als Ziele der Zuordnung auftauchen. Diese Menge bezeichnet man als **Wertebereich** oder Wertemenge und dessen Elemente als Werte der Funktion. Für eine Funktion f benutzt man das Symbol W_f für die Wertemenge. Für die Werte einer Funktion f mit Veränderlicher x schreibt man allgemein meist $f(x) \in W_f$, wie in der Abbildungsvorschrift, oder führt eine weitere Variable ein, zum Beispiel $y = f(x) \in W_f$.

Beispiel 6.1.6

Betrachten wir hierzu nochmal das Beispiel

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1\ . \end{cases}$$

Der Wertebereich dieser Funktion ist

$$W_\varphi = (1;4)\ .$$

Dies sieht man ein, indem man einige Werte aus $D_\varphi = (0;1)$ in die Abbildungsvorschrift einsetzt und die Ergebnisse berechnet. Dies führt auf eine sogenannte **Wertetabelle**:

y	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\varphi(y)$	1,3	1,9	2,5	3,1	3,7

Solche Wertetabellen sind sinnvoll, um sich einen Überblick über die Werte einer Funktion zu verschaffen. Sie reichen aber nicht aus, um mathematisch ganz sicher zu sein, was der tatsächliche Wertebereich einer Funktion ist. Eine Methode, den Wertebereich einer Funktion zu bestimmen, benutzt das Lösen von Ungleichungen:

Beispiel 6.1.7

In der Funktion

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1 \end{cases}$$

gilt aufgrund des Definitionsbereichs $D_\varphi = (0;1)$ für die Veränderliche:

$$0 < y < 1 \,.$$

Nun benutzen wir Äquivalenzumformungen, um in diesen Ungleichungen die Abbildungsvorschrift $\varphi(y) = 3y + 1$ zu erzeugen:

$$0 < y < 1 \,|\cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 3y < 3 \,|+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 3y+1 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \varphi(y) < 4 \,.$$

Somit gilt für die Werte der Funktion $\varphi(y) \in (1;4)$ und deshalb $W_\varphi = (1;4)$.

6.1.3 Funktionen in Mathematik und Anwendungen

Mathematische Funktionen beschreiben oft Zusammenhänge zwischen Größen, die aus anderen Wissenschaften oder dem Alltagsbereich stammen. So ist etwa das Volumen V eines Würfels abhängig von der Kantenlänge a des Würfels. Damit kann das Volumen als mathematische Funktion aufgefasst werden, in der jeder Kantenlänge $a > 0$ das entsprechende Volumen $V(a) = a^3$ zugeordnet wird:

$$V : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & V(a) = a^3 \,. \end{cases}$$

Es ergibt sich die kubische Standardparabel (siehe Abschnitt 6.2.6) als Zusammenhang zwischen Kantenlänge und Volumen. Auf diese Art lassen sich noch viele weitere Beispiele aus Naturwissenschaften und aus dem Alltagsbereich finden: Ort in Abhängigkeit von der Zeit in der Physik, Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration in der Chemie, Mehlmenge in Abhängigkeit von der gewünschten Teigmenge in einem Rezept, usw.

Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Beispiel 6.1.8

Die Intensität radioaktiver Strahlung ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands von der Quelle. Dies wird auch als Abstandsgesetz bezeichnet. Unter Benutzung einer physikalischen Proportionalitätskonstanten $c > 0$ kann man den Zusammenhang zwischen Intensität I der Strahlung und Abstand $r > 0$ von der Quelle folgendermaßen als mathematische Funktion formulieren:

$$I : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \frac{c}{r^2} \,. \end{cases}$$

Für die Intensität gilt also die Abbildungsvorschrift $I(r) = \frac{c}{r^2}$, die somit die Abhängigkeit der Größen I und r voneinander beschreibt.

Aufgabe 6.1.5
Beim Bau von Windkraftanlagen gilt in guter Näherung, dass die Leistung proportional zur dritten Potenz der Windgeschwindigkeit ist. Unter Benutzung einer Proportionalitätskonstanten $\rho > 0$, welche der folgenden mathematischen Funktionen gibt diese Abhängigkeit physikalischer Größen korrekt wieder?

a)

$$P : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & P(v) = \frac{\rho}{v^3} \end{cases}$$

b)

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & P(v) = \rho v^3 \end{cases}$$

c)

$$P : \begin{cases} [0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & P(v) = \rho v^3 \end{cases}$$

d)

$$x : \begin{cases} [0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & x(f) = \rho f^3 \end{cases}$$

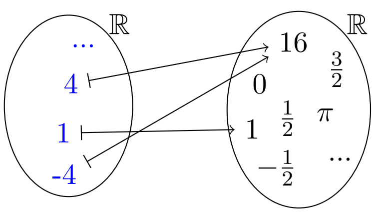
Lösung:
c) und d). a) ist falsch, da es sich um eine umgekehrte Proportionalität handelt. b) ist nicht der Problemstellung angepasst. Negative Windgeschwindigkeiten ergeben in diesem Zusammenhang keinen Sinn und sollten aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden. c) ist korrekt; in diesem Fall ergibt sich die Abhängigkeit $P(v) = \rho v^3$ für die Leistung P und die Windgeschwindigkeit v. Wir bemerken, dass d) genauso richtig ist. In diesem Fall haben wir eine Funktion, die völlig identisch zu Fall c) ist, nur die Leistung wird in diesem Fall mit x und die Windgeschwindigkeit mit f bezeichnet. Dies verdeutlicht nochmals, dass die Variablen, die für die Bezeichnung der Funktion und für die Veränderliche benutzt werden, mathematisch völlig willkürlich sind. Allerdings gibt es in den Naturwissenschaften Konventionen, welche Variablen üblicherweise für bestimmte Größen verwendet werden. So ist es hier doch üblicher, die Geschwindigkeit mit v (vom englischen velocity) und die Leistung mit P (vom englischen power) zu bezeichnen.

6.1.4 Umkehrbarkeit

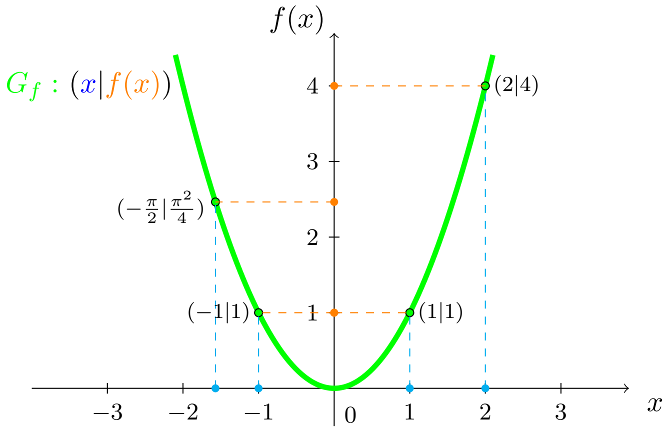
Die bildliche Darstellung einer Funktion, wie zum Beispiel

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases},$$

als sogenanntes Venn-Diagramm (vgl. Abschnitt 6.1.2)



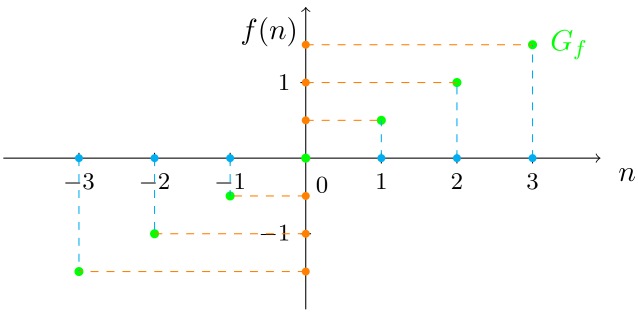
ist zwar nützlich, um den Funktionsbegriff zu verstehen, sagt aber nicht viel über die besonderen Eigenschaften der Funktion aus. Hierfür gibt es eine andere Möglichkeit der grafischen Darstellung, nämlich die des Graphen der Funktion. Dazu fertigen wir ein zweidimensionales Koordinatensystem (vgl. Modul 9) an, in dem die Zahlen aus dem Definitionsbereich der Funktion auf der Querachse und die Zahlen aus dem Zielbereich auf der Hochachse eingetragen werden. In einem solchen Koordinatensystem markieren wir alle Punkte $(x|f(x))$, die durch die Zuordnung der Funktion $x \longmapsto f(x)$ entstehen, in diesem Fall also alle Punkte $(x|x^2)$, d.h. $(1|1)$, $(-1|1)$, $(-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi^2}{4})$, usw. Dadurch entsteht eine Kurve, die Graph von f genannt und mit dem Symbol G_f bezeichnet wird:



Betrachten wir die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2} \end{cases}$$

aus Abschnitt 6.1.2 und deren Graphen

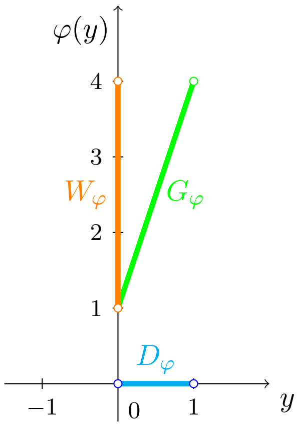


so stellen wir fest, dass Graphen nicht immer durchgehende Kurven sein müssen, sondern wie in diesem Fall auch nur aus einzelnen Punkten bestehen können.

Anhand des Graphen sind nun viele Grundeigenschaften einer Funktion erkennbar. Rufen wir uns die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} (0;1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+1 \end{cases}$$

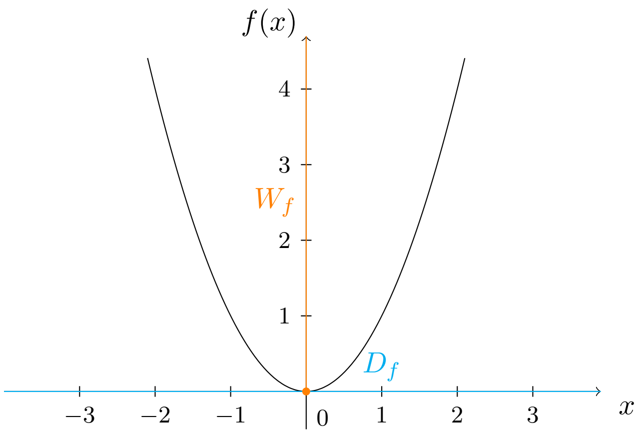
mit dem Definitionsbereich $D_\varphi = (0;1)$ und dem Wertebereich $W_\varphi = (1;4)$ aus Abschnitt 6.1.2 ins Gedächtnis. Wenn wir ihren Graphen zeichnen, so erkennen wir, dass der Definitionsbereich und der Wertebereich auf der Quer- bzw. Hochachse auftauchen:



Aufgabe 6.1.6
Betrachten Sie nochmal den Graphen der Funktion

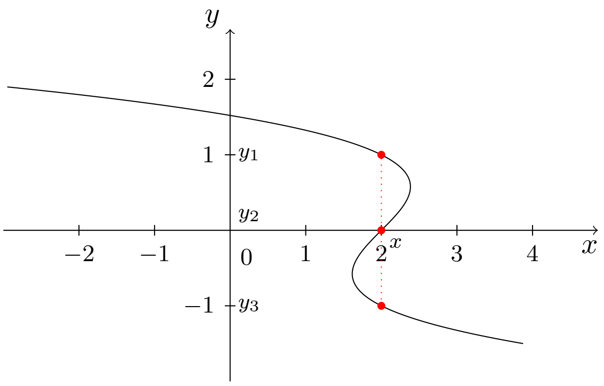
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases} ,$$

markieren Sie Definitions- und Wertebereiche auf Quer- und Hochachse und geben Sie diese an.
Lösung:



$D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [0; \infty)$

Weiterhin ist die Eigenschaft der Eindeutigkeit von Funktionen am Graphen zu erkennen. Um dies einzusehen, machen wir uns klar, dass eine Kurve wie in der folgenden Abbildung

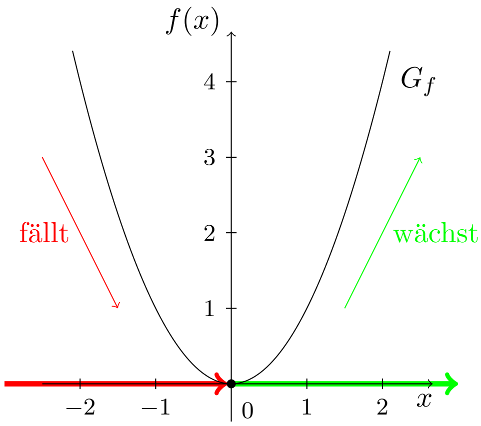


niemals als Graph einer Funktion auftauchen kann. Zu einem x-Wert aus dem Definitionsbereich müsste es hier mehrere Werte y_1, y_2, y_3 aus dem Wertebereich geben. Graphen von Funktionen geben die Eindeutigkeit also immer dadurch wieder, dass sie „nicht in horizontaler Richtung zurücklaufen können".

Eine weitere wichtige Eigenschaft eines Graphen ist sein Wachstumsverhalten. Betrachten wir die Funktion

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

und ihren Graphen.

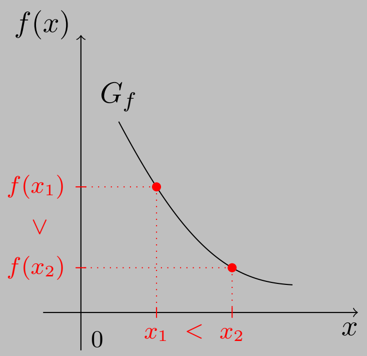


Auf der Querachse in diesem Graphen erkennen wir zwei Bereiche, in denen der Graph unterschiedliches Wachstumsverhalten zeigt. Im Bereich von x-Werten mit $x \in (-\infty; 0)$ fällt der Graph. Das heißt, werden die x-Werte größer, so werden die zugehörigen Funktionswerte auf der Hochachse kleiner. Im Bereich von x-Werten mit $x \in (0; \infty)$ stellen wir das gegenteilige Verhalten fest. Bei größer werdenden x-Werten werden auch die zugehörigen Funktionswerte größer. Der Graph wächst. Beim Wert $0 \in \mathbb{R}$ geht der fallende Bereich in den wachsenden Bereich über. Solche Werte werden bei der Untersuchung von Scheitelpunkten in Abschnitt 6.2.7 und beim Bestimmen von Extremwerten in Modul 7 besonders wichtig werden.

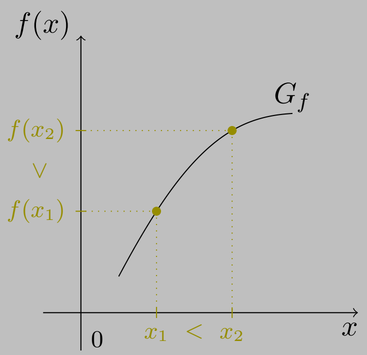
Wir bezeichnen diese beiden Eigenschaften als streng monoton fallend bzw. streng monoton wachsend und schreiben sie mathematisch folgendermaßen auf:

Info 6.1.9

- Für $x_1 < x_2$ aus einer Teilmenge des Definitionsbereichs einer Funktion f gilt $f(x_1) > f(x_2)$. Dann heißt f in dieser Teilmenge streng monoton fallend.



- Für $x_1 < x_2$ aus einer Teilmenge des Definitionsbereichs einer Funktion f gilt $f(x_1) < f(x_2)$. Dann heißt f in dieser Teilmenge streng monoton wachsend.



Dies gilt so für alle Funktionen, die wir in diesem Modul betrachten werden. Oft treffen die beschriebenen Monotonieeigenschaften nur in bestimmten Bereichen der Definitionsmenge der Funktion zu, wie oben bei der Standardparabel gesehen. Es gibt jedoch auch Funktionen, die nur eine der Monotonieeigenschaften im gesamten Definitionsbereich besitzen (siehe Beispiel 6.1.10 unten). In diesem Fall nennt man dann die gesamte Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Weiterhin heißt eine Funktion, die entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend ist, einfach streng monoton.

Ein weiteres Beispiel zeigt, wie man strenge Monotonie mit Hilfe des Lösens von Ungleichungen aus Modul 3 auf Seite 69 bei einer Funktion explizit nachrechnen kann.

Beispiel 6.1.10

Gegeben sei die Funktion

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{2}x + 1 \, . \end{cases}$$

Ist h streng monoton wachsend oder streng monoton fallend?

Wir beginnen, zwei beliebige Zahlen $x_1, x_2 \in D_h = \mathbb{R}$ aufzuschreiben mit der Eigenschaft, dass

$$x_1 < x_2$$

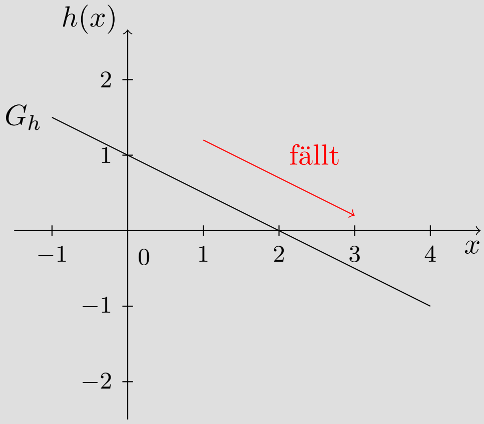
gilt. Durch ΩÄquivalenzumformungen3.1.4 von Ungleichungen können wir $x_1 < x_2$ nun entweder zu $h(x_1) < h(x_2)$ oder zu $h(x_1) > h(x_2)$ umformen und damit folgern, dass h streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Es gelten die folgenden Äquivalenzumformungen für $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \,|\cdot (-\frac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2 \;.$$

Weiterhin wird in der Abbildungsvorschrift $+1$ addiert. Wir erhalten also

$$-\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2 \,| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_1 + 1 > -\frac{1}{2}x_2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad h(x_1) > h(x_2) \;.$$

Da nun $h(x_1) > h(x_2)$ gilt, ist h streng monoton fallend. Dies können wir auch am Graphen von h erkennen:



Aufgabe 6.1.7
Rechnen Sie durch Äquivalenzumformungen von Ungleichungen explizit nach, dass

$$\eta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x + 2 \end{cases}$$

streng monoton wachsend ist.
<u>Lösung:</u>
Es gilt

$$x_1 < x_2 \,|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 < 2x_2 \,| + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2 < 2x_2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \eta(x_1) < \eta(x_2) \;,$$

womit η streng monoton wachsend ist.

6.2 Lineare Funktionen und Polynome

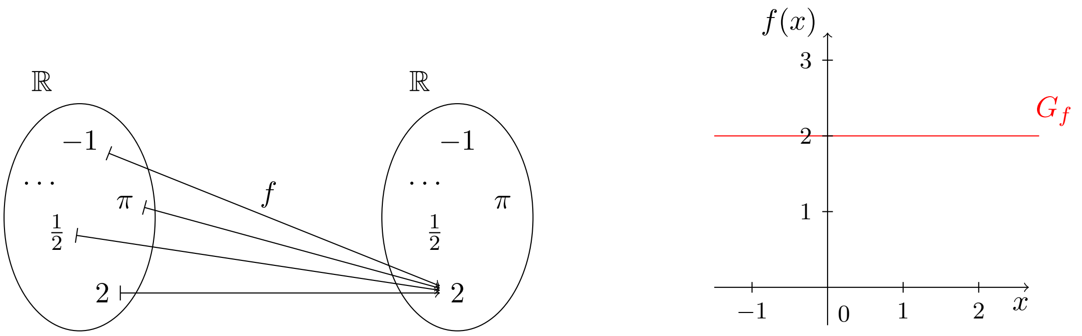
6.2.1 Einführung

In diesem Abschnitt untersuchen wir folgende Klassen von Funktionen: konstante, lineare, linear-affine Funktionen sowie Monome und Polynome.

6.2.2 Konstante Funktionen und die Identität

Die sogenannten konstanten Funktionen ordnen jeder Zahl aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ eine konstante Zahl aus dem Zielbereich $\mathbb{R}$ zu. Zum Beispiel die konstante Zahl 2 auf folgende Art:

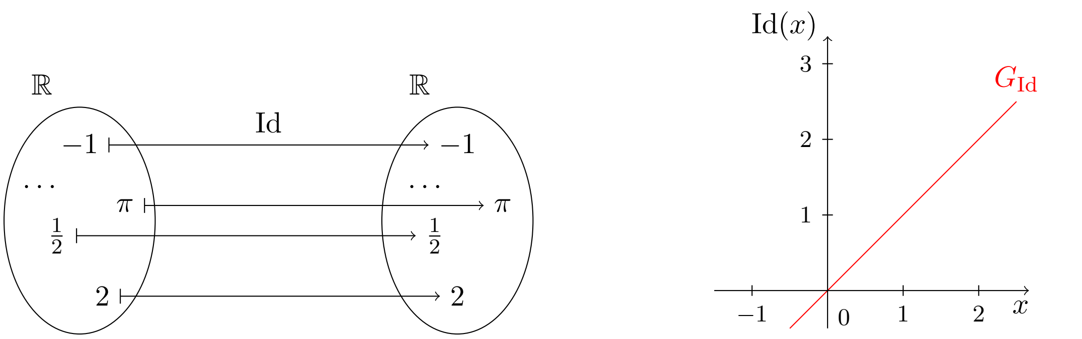
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\,. \end{cases}$$



Es gilt hier also $f(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit die Wertemenge dieser Funktion f nur aus der Menge $W_f = \{2\} \subset \mathbb{R}$ besteht.

Die Identität auf $\mathbb{R}$ ist die Funktion, welche jeder reellen Zahl wieder genau die identische reelle Zahl zuordnet. Man schreibt das so:

$$\mathrm{Id} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,. \end{cases}$$



Es gilt hier also $\mathrm{Id}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit der Wertebereich von Id die gesamten reellen Zahlen sind ($W_{\mathrm{Id}} = \mathbb{R}$). Weiterhin ist die Identität offenbar eine streng monoton wachsende Funktion.

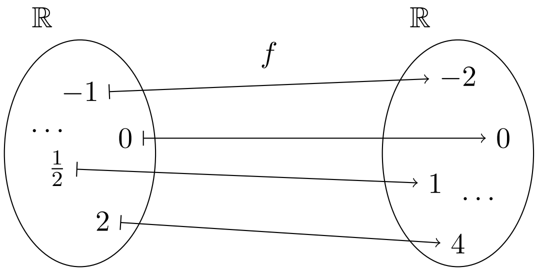
6.2.3 Lineare Funktionen

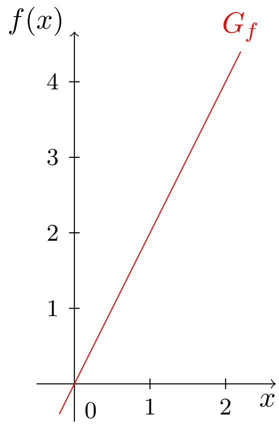
Ausgehend von der Identität, kann man sich nun komplexere Funktionen, die sogenannten linearen Funktionen, konstruieren. So kann man sich zum Beispiel überlegen, dass jede reelle Zahl ihrem doppelten Wert, oder ihrem π-fachen Wert, usw. zugeordnet werden kann. Etwa

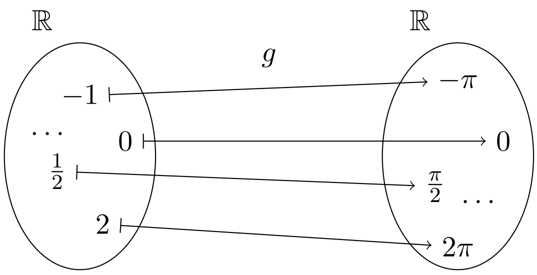
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{cases}$$

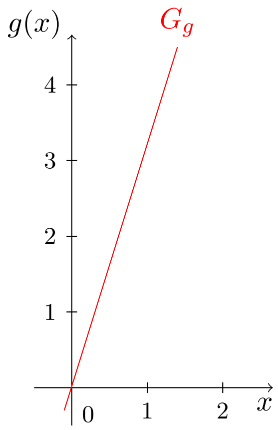
oder

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \pi x\ . \end{cases}$$



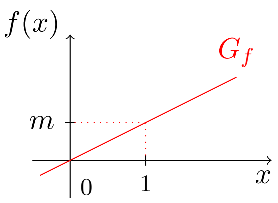






Alle linearen Funktionen (außer der Nullfunktion, s.u.) haben also als Wertebereich ebenfalls die gesamten reellen Zahlen ($W_f, W_g = \mathbb{R}$). Der Faktor, mit dem jede reelle Zahl in einer solchen linearen Funktion multipliziert wird, heißt Steigung der linearen Funktion. Oft möchte man auch bei linearen Funktionen nicht eine bestimmte Funktion mit spezifischer Steigung angeben, sondern irgendeine mit beliebiger Steigung $m \in \mathbb{R}$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx\ . \end{cases}$$



Woher kommt der Begriff Steigung für eine lineare Funktion? Teilt man die Differenz, um welche der Graph in vertikaler Richtung anwächst, durch die entsprechende Längeneinheit in horizontaler Richtung, so erhält man die Steigung m.

Info 6.2.1

Eine lineare Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx \end{cases}$$

ist genau dann streng monoton wachsend, wenn ihre Steigung positiv ist, also $m > 0$ gilt; und sie ist genau dann streng monoton fallend, wenn ihre Steigung negativ ist, also $m < 0$ gilt.

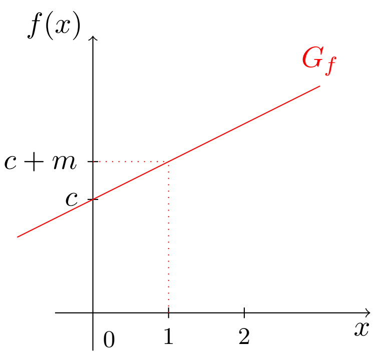
Aufgabe 6.2.1
Welche lineare Funktion ergibt sich für die Steigung $m = 1$?
Lösung:
Es ergibt sich $f(x) = 1 \cdot x = x = \mathrm{Id}(x)$, also genau die Identität.

Aufgabe 6.2.2
Welche Funktion ergibt sich für die Steigung $m = 0$?
Lösung:
Es ergibt sich $f(x) = 0 \cdot x = 0$, also genau die konstante Funktion, die konstant 0 ist.

6.2.4 Linear-affine Funktionen

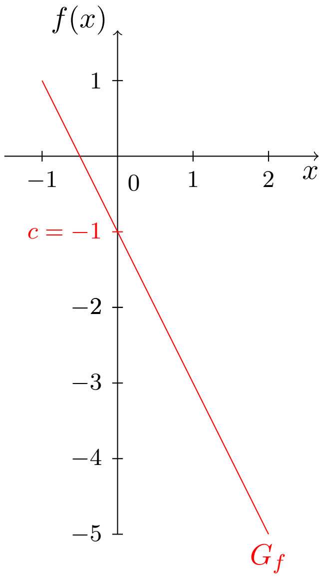
Kombiniert man lineare Funktionen mit konstanten Funktionen, so erhält man die sogenannten linear-affinen Funktionen. Diese ergeben sich als die Summe einer linearen und einer konstanten Funktion. Im allgemeinen Fall, ohne konkret spezifizierte Steigung ($m \in \mathbb{R}$) und mit einer Konstanten ($c \in \mathbb{R}$) schreibt man das so:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx + c\,. \end{cases}$$



Die Graphen linear-affiner Funktionen werden auch als Geraden bezeichnet. Die Konstante m wird für linear-affine Funktionen weiterhin als Steigung bezeichnet, die Konstante $c \in \mathbb{R}$ als Achsenabschnitt. Der Grund für diese Bezeichnung ist folgender: Betrachtet man den Schnittpunkt des Graphen der linear-affinen Funktion mit der vertikalen Achse, so hat dieser vom Ursprung den Abstand c (siehe Abbildung oben). So ergibt sich zum Beispiel für die unten abgebildete linear-affine Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x-1 \end{cases}$$



die Steigung $m = -2$ und der Achsenabschnitt $c = -1$. Der Achsenabschnitt ergibt sich als Funktionswert bei $x = 0$ und somit durch

$$c = f(0) = -2 \cdot 0 - 1 = -1 \ .$$

Aufgabe 6.2.3
Was sind die Steigung und der Achsenabschnitt von

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \pi x - 42 \ ? \end{cases}$$

Lösung:
Steigung: π und Achsenabschnitt: -42

Aufgabe 6.2.4
Welche Funktionen ergeben sich als linear-affine Funktionen mit Steigung $m = 0$ und welche mit Achsenabschnitt $c = 0$?
Lösung:
Ist $m = 0$, so gilt $f(x) = 0 \cdot x + c = c$. Damit ergeben sich die konstanten Funktionen als diejenigen mit Steigung 0. Ein verschwindender Achsenabschnitt $c = 0$ impliziert $f(x) = mx + 0 = mx$. Somit ergeben sich in diesem Fall genau die linearen Funktionen.

6.2.5 Betragsfunktionen

In Modul 2 wurde der Betrag einer reellen Zahl x auf folgende Art eingeführt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0\ . \end{cases}$$

Im Kontext dieses Moduls kann der Betrag nun als Funktion aufgefasst werden. Man erhält die **Betragsfunktion**

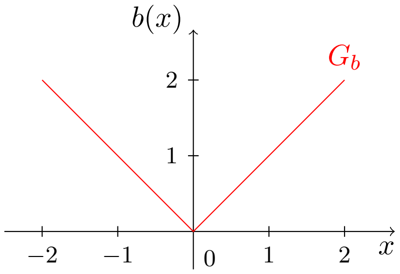
$$b : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|\ . \end{cases}$$

Aufgabe 6.2.5
Was ist die Wertemenge W_b der Betragsfunktion b?
Lösung:
Da für alle Zahlen x aus $D_b = \mathbb{R}$ gilt $b(x) = |x| \geq 0$, ergibt sich $W_b = [0; \infty)$.

Durch die Fallunterscheidung

$$b(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist die Betragsfunktion ein Beispiel für eine abschnittsweise definierte Funktion. Schreibt man Beträge mit Hilfe dieser Fallunterscheidung um, so spricht man auch vom Auflösen des Betrags. Der Graph der Betragsfunktion b sieht dann so aus:



Eine Eigenschaft des Graphen der Betragsfunktion, die auch bei den meisten allgemeineren Funktionen auftritt, in denen ein Betrag vorkommt, ist der „Knick” an der Stelle $x = 0$. Die oben definierte Betragsfunktion b ist nur der einfachste Fall einer Funktion, in der der Betrag vorkommt. Man kann sich kompliziertere Beispiele von Funktionen überlegen, in denen ein Betrag oder mehrere Beträge vorkommen, so etwa

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |2x-1|\ . \end{cases}$$

Eine wichtige Aufgabe bei solchen gegebenen Funktionen ist, eine Vorstellung von deren Graphen zu bekommen. Dabei benutzt man die abschnittsweise Definition des Betrags und geht ähnlich vor wie beim Lösen von Betragsgleichungen und -ungleichungen. Wir zeigen dies hier am Beispiel obiger Funktion f:

Beispiel 6.2.2

Die Funktion

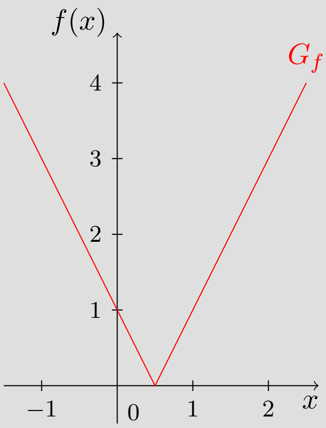
$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |2x-1|\end{cases}$$

ist gegeben. Wie sieht ihr Graph aus?

Wir berechnen:

$$f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \text{falls } 2x-1\geq 0\\ -(2x-1) & \text{falls } 2x-1<0\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & \text{falls } x\geq \frac{1}{2}\\ -2x+1 & \text{falls } x<\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Somit erhalten wir eine abschnittsweise definierte Funktion, deren Graph eine steigende Gerade mit Steigung 2 und Achsenabschnitt -1 im Bereich $x \geq \frac{1}{2}$ und eine fallende Gerade mit Steigung -2 und Achsenabschnitt 1 im Bereich $x < \frac{1}{2}$ ist. Mit diesen Informationen können wir den Graphen von f zeichnen:



Info 6.2.3

WICHTIG! Beim Auflösen von Beträgen wie in der Rechnung in obigem Beispiel sind folgende zwei wichtige Rechengesetze zu beachten:

1. Die Bereiche der Fallunterscheidung des Betrags ergeben sich als Ungleichungen für den gesamten Ausdruck im Betrag, hier also $2x-1 \geq 0$ und $2x-1<0$ und nicht etwa nur $x \geq 0$ und $x < 0$. Dies funktioniert beim Auflösen von Beträgen immer so.

2. Im Fall < 0 erhält der gesamte Ausdruck im Betrag ein Minuszeichen. Hier muss also auf das Setzen einer Klammer geachtet werden. Im obigen Beispiel ergibt sich deshalb $-(2x-1) = -2x+1$ und nicht etwa $-2x-1$. Auch dies funktioniert beim Auflösen von Beträgen immer so.

Aufgabe 6.2.6

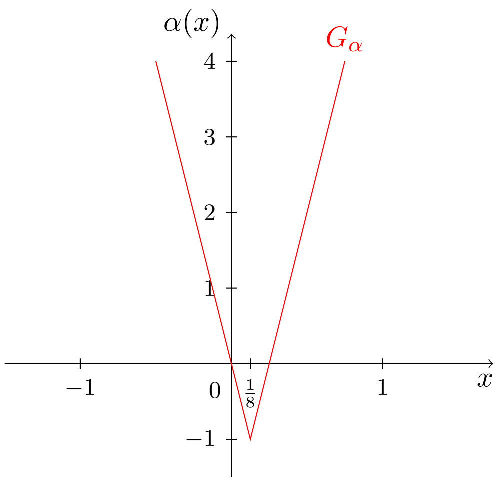
Wie sieht der Graph der Funktion

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |-8x+1|-1 \end{cases}$$

aus? Geben Sie außerdem W_α an.
Lösung:
Es gilt

$$\alpha(x) = |-8x+1|-1 = \begin{cases} -8x+1-1 & \text{falls } -8x+1 \geq 0 \\ -(-8x+1)-1 & \text{falls } -8x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -8x & \text{falls } x \leq \frac{1}{8} \\ 8x-2 & \text{falls } x > \frac{1}{8} \end{cases},$$

folglich:

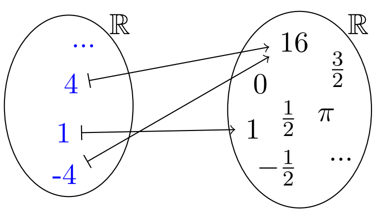


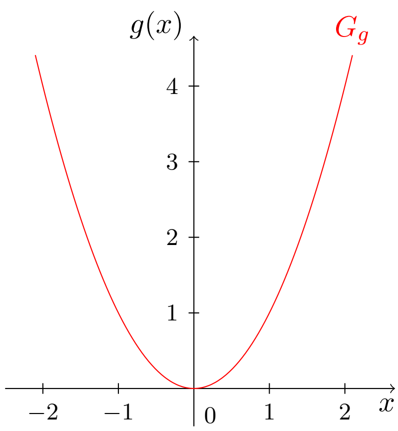
Da $|-8x+1| \geq 0$ gilt, folgt $|-8x+1|-1 \geq -1$ und damit ist $W_\alpha = [-1; \infty)$.

6.2.6 Monome

Neben den linear-affinen Funktionen aus dem vorigen Abschnitt kann man sich nun auch Funktionen überlegen, die allen reellen Zahlen natürliche Potenzen ihrer selbst zuordnen. So zum Beispiel

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}.$$





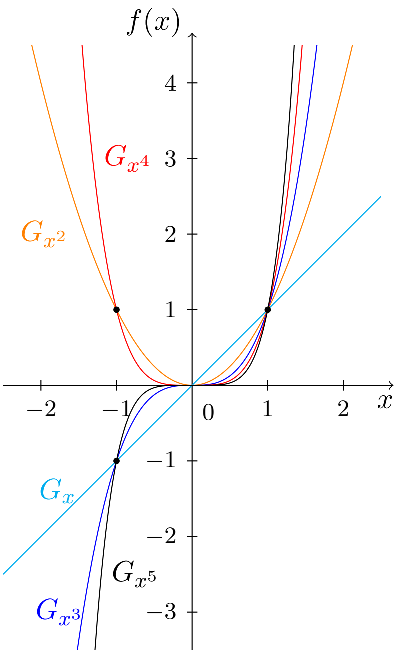
Dies funktioniert für jeden natürlichen Exponenten und man schreibt dann allgemein

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und bezeichnet diese Funktionen als Monome. Der Exponent n eines Monoms wird als Grad des Monoms bezeichnet. So ist etwa die Funktion g vom Anfang dieses Abschnitts ein Monom vom Grad 2, usw.

Aufgabe 6.2.7
Welche Funktion ergibt sich als Monom vom Grad 1 bzw. vom Grad 0 ?
Lösung:
Da $x^1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich die Identität Id als Monom vom Grad 1. Genauso gilt $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit ist die konstante Funktion $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ das Monom vom Grad 0.

Man bezeichnet das Monom vom Grad 2 auch als die Standardparabel. Das Monom vom Grad 3 wird auch als kubische Standardparabel bezeichnet. Hier einige Graphen von Monomen:



Auf Basis dieser Graphen fassen wir nun einige Erkenntisse über Monome zusammen: Es gibt einen grundlegenden Unterschied zwischen Monomen (mit Abbildungsvorschrift $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) von geradem und von ungeradem Grad. Die Monome von geradem Grad größer Null haben als Wertebereich immer die Menge $[0; \infty)$, während die Monome von ungeradem Grad ganz $\mathbb{R}$ als Wertebereich besitzen. Weiterhin gilt stets

$$f(1) = 1^n = 1 \; ,$$

$$f(0) = 0^n = 0$$

und

$$f(-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Ferner gilt

$$\begin{cases} x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots & \text{für } x \in (0;1) \\ x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots & \text{für } x \in (1;\infty)\ . \end{cases}$$

Aufgabe 6.2.8
Wie ergeben sich diese Erkenntnisse über Monome unmittelbar aus den Potenzrechengesetzen?
Lösung:
Nach den Potenzrechengesetzen gilt stets $1^n = 1$ und $0^n = 0$ für beliebige natürliche Zahlen n und $(-1)^n = 1$ für gerade n sowie $(-1)^n = -1$ für ungerade n. Dadurch ergeben sich die beschriebenen Punkte, die alle Graphen der Monome gemeinsam haben. Auch die Ungleichungen $x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots$ für positive x kleiner 1 und $x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$ für x größer 1 folgen aus den Potenzrechengesetzen, da höher werdende Potenzen für positive Zahlen kleiner 1 stets kleiner werdende Ergebnisse liefern und für Zahlen größer 1 umgekehrt stets größer werdende Ergebnisse.

6.2.7 Polynome und ihre Nullstellen

Während in den bis jetzt betrachteten Monomen immer nur genau eine Potenz der Veränderlichen in der Abbildungsvorschrift vorkommt, lassen sich aus diesen Monomen problemlos komplexere Funktionen konstruieren in denen mehrere verschiedene Potenzen der Veränderlichen vorkommen. Diese ergeben sich als Summen von Vielfachen von Monomen. Man spricht dann von sogenannten Polynomen; hier einige Beispiele und deren Graphen:

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^3 + 4x^2 - 3x + 42 \end{cases} \qquad \text{(Grad: 3)}$$

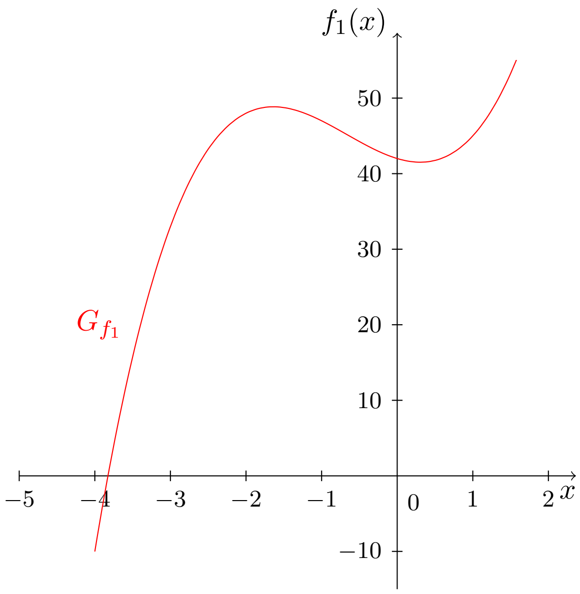
$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^{101} + 3x - 14 \end{cases} \qquad \text{(Grad: 101)}$$

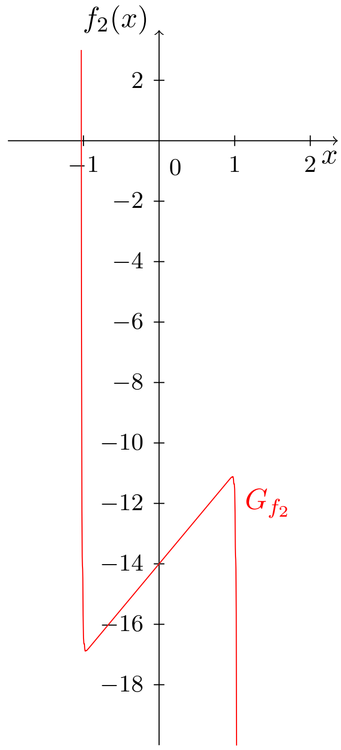
$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 9x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 19x \end{cases} \qquad \text{(Grad: 4)}$$

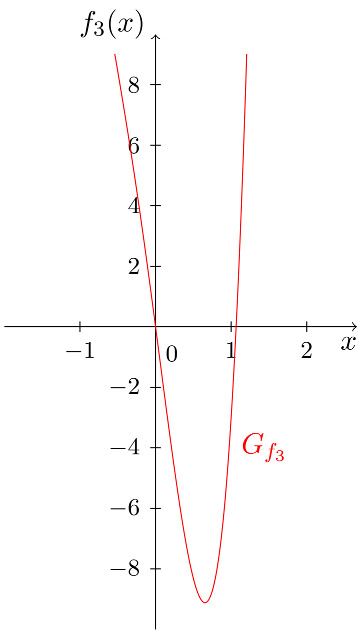
$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 2x + 2 \end{cases} \qquad \text{(Grad: 2)}$$

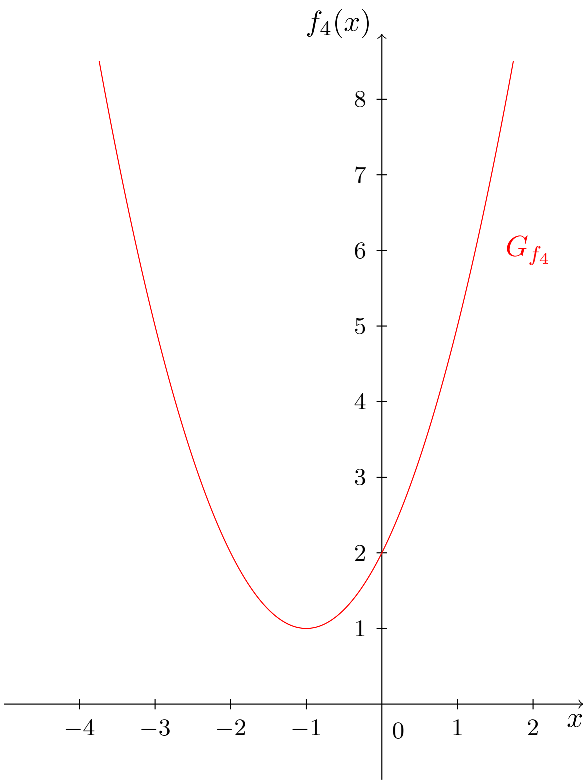
$$f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 8x - 2 \end{cases} \qquad \text{(Grad: 1)}$$

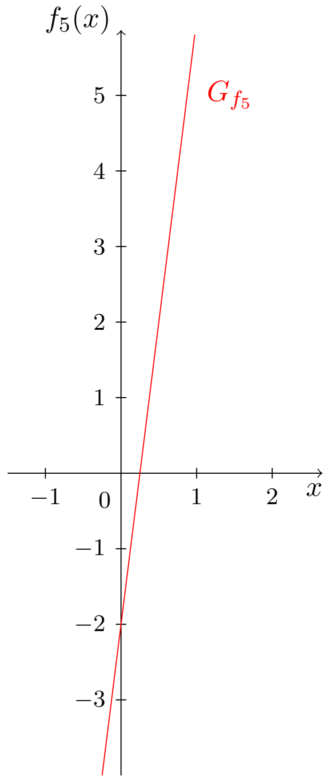
$$f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 13 \end{cases} \qquad \text{(Grad: 0)}$$

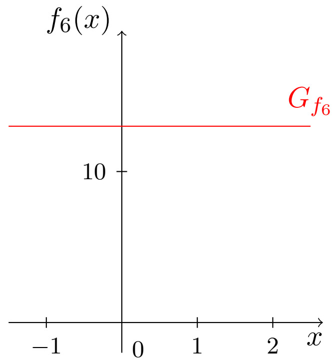

$f_1(x)$
50
40
30
20
10
−10
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 x
G_{f_1}


$f_2(x)$
2
−1 0 1 2 x
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−16
−18
G_{f_2}


$f_3(x)$
8
6
4
2
−1 0 1 2 x
−2
−4
−6
−8
G_{f_3}


$f_4(x)$
8
7
6
5
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1 0 1 2 x
G_{f_4}





Der Grad eines Polynoms richtet sich also nach dem vorkommenden Monom mit dem höchsten Grad. Außerdem erkennen wir, dass die bisher behandelten Funktionstypen der konstanten, linearen und linear-affinen Funktionen – genauso wie die Monome – auf natürliche Weise wieder als Spezialfälle der Polynome auftauchen. Die Polynome umfassen also alle bisher betrachteten Funktionstypen.

Möchte man allgemein ein unspezifiziertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ angeben, so schreibt man dies folgendermaßen:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \, . \end{array} \right.$$

Dabei sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ die reellen Vorfaktoren vor den einzelnen Monomen, die als Koeffizienten des Polynoms bezeichnet werden.

Aufgabe 6.2.9
Wie lautet das Polynom $f(x)$ mit den Koeffizienten $a_0 = -4$, $a_2 = \pi$ und $a_4 = 9$ und welchen Wertebereich besitzt es?

Das Polynom lautet $f(x) = \boxed{}$,
sein Wertebereich ist $W_f = \boxed{}$.

Lösung:
Das Polynom lautet

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 9x^4 + \pi x^2 - 4 \end{array} \right.$$

und besitzt den Wertebereich $W_f = [-4; \infty)$, da die geraden Potenzen von x nur nichtnegative Werte annehmen können.

Bei allgemeinen Polynomen sind insbesondere die Nullstellen von Interesse. Diese findet man durch das Lösen von Gleichungen n-ten Grades. Für den Grad $n = 2$, also für Polynome vom Grad 2 (diese werden auch als allgemeine Parabeln bezeichnet), ist dies durch das Lösen einer quadratischen Gleichung möglich. In Modul 2 werden die relevanten Techniken der quadratischen Ergänzung, der pq-Formel und der Scheitelpunktsform quadratischer Ausdrücke genauer erklärt.

Beispiel 6.2.4

Gegeben ist die Parabel

$$\zeta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 2y^2 - 8y + 6 \ . \end{cases}$$

Wir bestimmen Nullstellen und Scheitelpunkt und zeichnen den Graphen.

Wir führen an der Abbildungsvorschrift $\zeta(y) = 2(y^2 - 4y + 3)$ eine quadratische Ergänzung durch:

$$y^2 - 4y + 3 = y^2 - 4y + 4 - 1 = (y-2)^2 - 1 \ .$$

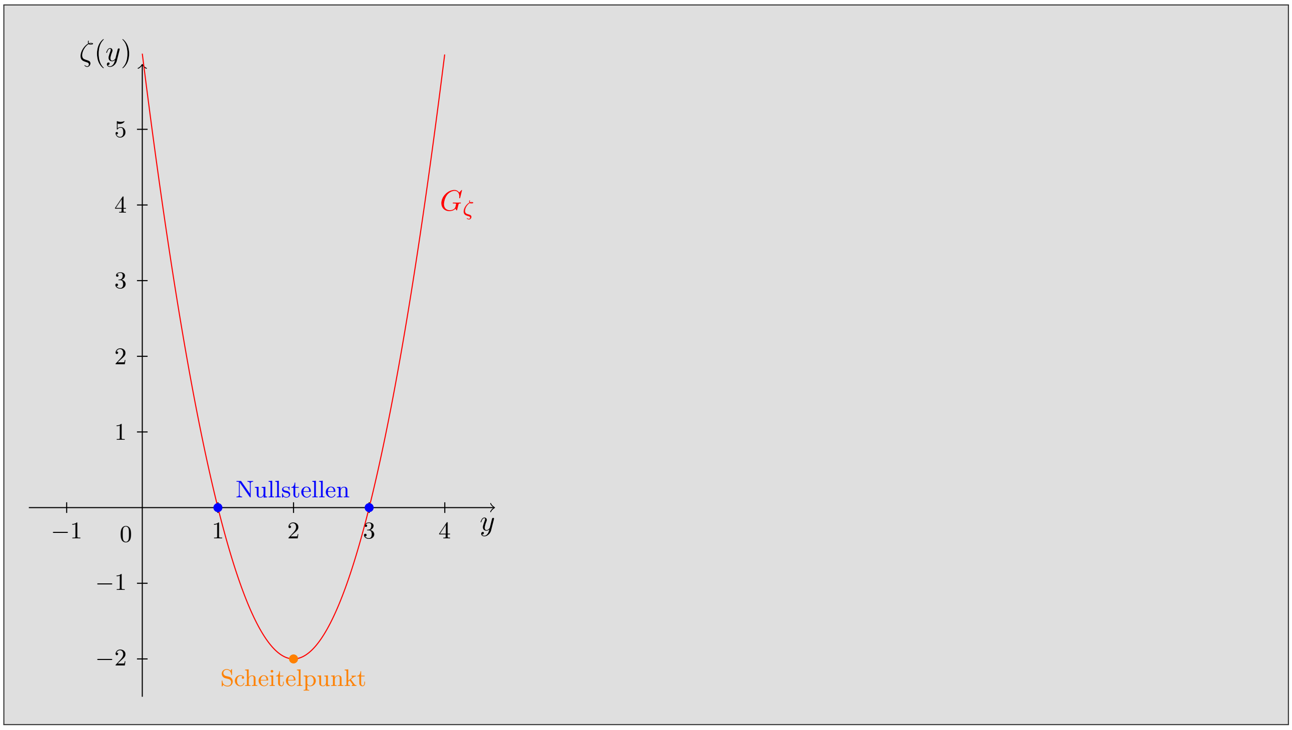
Folglich lässt sich die Abbildungsvorschrift als

$$\zeta(y) = 2(y-2)^2 - 2$$

schreiben. Wir erkennen, dass die Parabel gegenüber der Standardparabel um 2 Längeneinheiten nach rechts und nach unten verschoben ist. Der Scheitelpunkt lässt sich bei $(2|-2)$ ablesen. Die Nullstellen lassen sich berechnen:

$$\zeta(y) = 2((y-2)^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} - 2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \ .$$

Der Graph ergibt sich schließlich zu:



6.2.8 Hyperbeln

Wir betrachten Funktionen, die als Abbildungsvorschrift einen reziproken Zusammenhang besitzen. Darunter versteht man das Vorkommen von Kehrwerten in der Abbildungsvorschrift. Zu beachten ist bei der Bestimmung des größtmöglichen Definitionsbereichs solcher Funktionen, dass der Nenner nicht 0 werden darf.

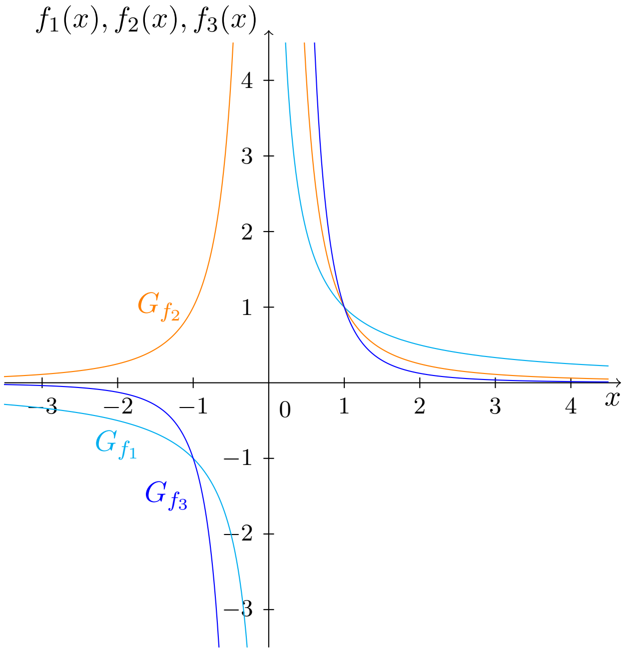
Beispiele reziproker Funktionen sind im Folgenden zusammengestellt; diese ergeben sich als Kehrwerte der Monome und werden auch als Funktionen vom hyperbolischen Typ bezeichnet:

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. ,$$

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2} \end{array} \right. ,$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^3} \end{array} \right. ,$$

usw. Ihre Graphen sehen so aus:



Insbesondere der Graph der Funktion

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. ,$$

wird als Hyperbel bezeichnet.

Allgemein kann man für den Kehrwert eines beliebigen Monoms vom Grad $n \in \mathbb{N}$ also eine entsprechende Funktion hyperbolischen Typs angeben:

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^n} \end{array} \right. .$$

Aufgabe 6.2.10
Wie lautet die Wertemenge W_{f_n} der Funktion f_n für gerade $n \in \mathbb{N}$ bzw. für ungerade $n \in \mathbb{N}$?
Lösung:
Stets gilt $\frac{1}{x^n} \neq 0$, da ein Quotient nur Null werden kann, wenn der Zähler Null wird. Folglich kommt $0 \in \mathbb{R}$ nie in der Wertemenge vor. Da stets $x^n \geq 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\frac{1}{x^n} > 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$. Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ kann allerdings auch $\frac{1}{x^n} < 0$ sein. Es ergibt sich

$$W_{f_n} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (0; \infty) & \text{falls } n \text{ gerade .} \end{array} \right.$$

Dies ist auch aus den Graphen der Funktionen vom hyperbolischen Typ ersichtlich.

Weitere Beispiele für Funktionen vom hyperbolischen Typ haben wir bereits in Beispiel 6.1.8 und Aufgabe 6.1.5 in Abschnitt 6.1.3 betrachtet.

6.2.9 Gebrochenrationale Funktionen

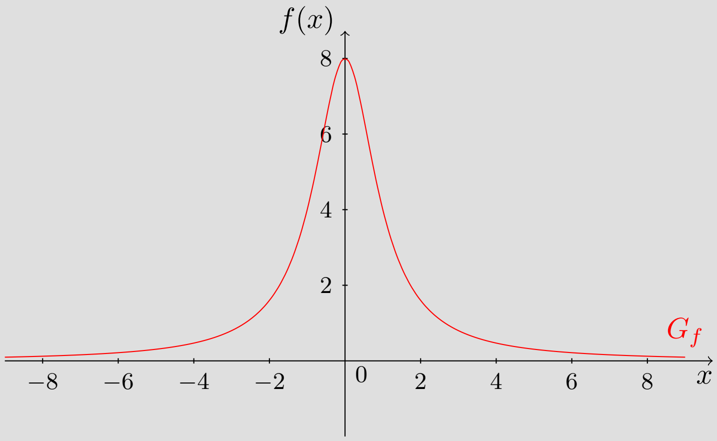
Allgemeine gebrochenrationale Funktionen besitzen Abbildungsvorschriften, die aus dem Quotienten zweier Polynome bestehen. Hier einige Beispiele mit ihren Graphen. Natürlich müssen auch bei diesen Funktionen diejenigen Zahlen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der Nenner in der Abbildungsvorschrift gleich Null wird.

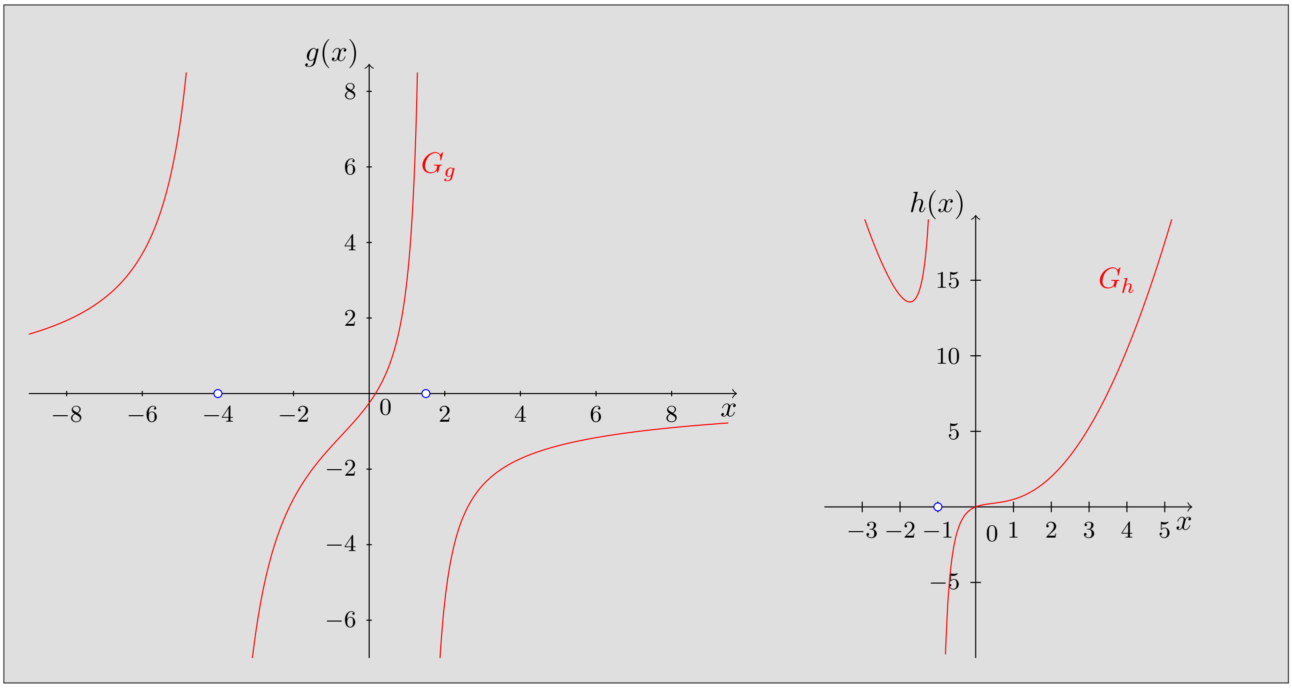
Beispiel 6.2.5

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{8}{x^2+1} \end{array} \right. ,$$

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-4, \frac{3}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-18x+3}{2x^2+5x-12} \end{array} \right. ,$$

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^3-x^2+x}{x+1} \end{array} \right. .$$





Aufgabe 6.2.11
Gegeben ist die Funktion

$$\psi : \begin{cases} D_\psi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-42x}{x^2-\pi} \end{cases} .$$

Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_\psi \subset \mathbb{R}$ für ψ.
Lösung:
Die Nullstellen des Nenners ergeben sich durch

$$x^2 - \pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\pi} \; .$$

Damit ist $D_\psi = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\}$.

Aufgabe 6.2.12
Bestimmen Sie für die gebrochenrationalen Funktionen im einführenden Beispiel 6.2.5 jeweils den Zähler- sowie den Nennergrad und berechnen Sie die Nullstellen des Zählers und des Nenners.
Lösung:
Die Funktion f hat den Zählergrad 0 und den Nennergrad 2. Es gibt keine Zählernullstelle ($8 \neq 0$) und keine Nennernullstelle ($x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung).
Die Funktion g hat den Zählergrad 1 und den Nennergrad 2. Die Zählernullstelle liegt bei $x = \frac{1}{6}$ ($-18x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{18}$) und die Nennernullstellen $x_{1,2} = -4, \frac{3}{2}$ erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung $2x^2 + 5x - 12 = 0$, zum Beispiel mit Hilfe der Mitternachtsformel.
Die Funktion h hat den Zählergrad 3 und den Nennergrad 1. Die Nennernullstelle liegt einfach bei $x = -1$ ($x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$). Für die Zählernullstellen muss die Gleichung $x^3 - x^2 + x = 0$ gelöst werden. Nach Ausklammern von x erhält man $x(x^2 - x + 1) = 0$ und folgert, dass eine Nullstelle bei $x = 0$ liegt. Schließlich muss noch die quadratische Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ mit der Mitternachtsformel gelöst werden. Es ergibt sich hier allerdings eine negative Diskriminante von $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, so dass keine weitere reelle Lösung – und damit keine weitere Zählernullstelle – existiert.

Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion ergeben sich als die Zählernullstellen. So hat zum Beispiel die Funktion

$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1;3\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x-1}{x^2-2x-3} \end{cases}$$

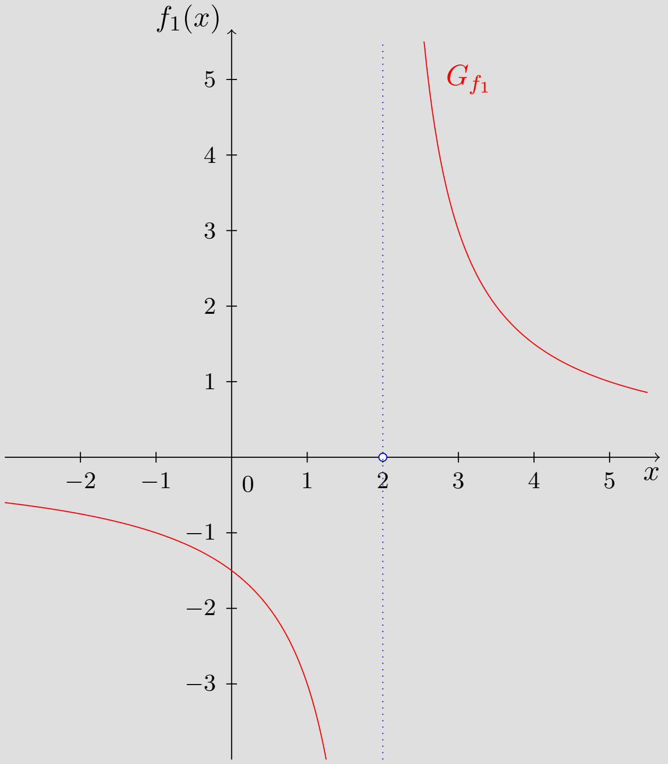
die einzige Nullstelle bei $x = 1$. Die Nennernullstellen gebrochenrationaler Funktionen, welche aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, müssen oft noch genauer untersucht werden. Vor allem ist von Interesse, wie die Graphen der Funktionen in der Nähe der Definitionslücken verlaufen. Die Nennernullstellen gebrochenrationaler Funktionen bezeichnet man auch als Polstellen. Die folgenden Beispiele zeigen, dass es verschiedene Typen von Polstellen gibt.

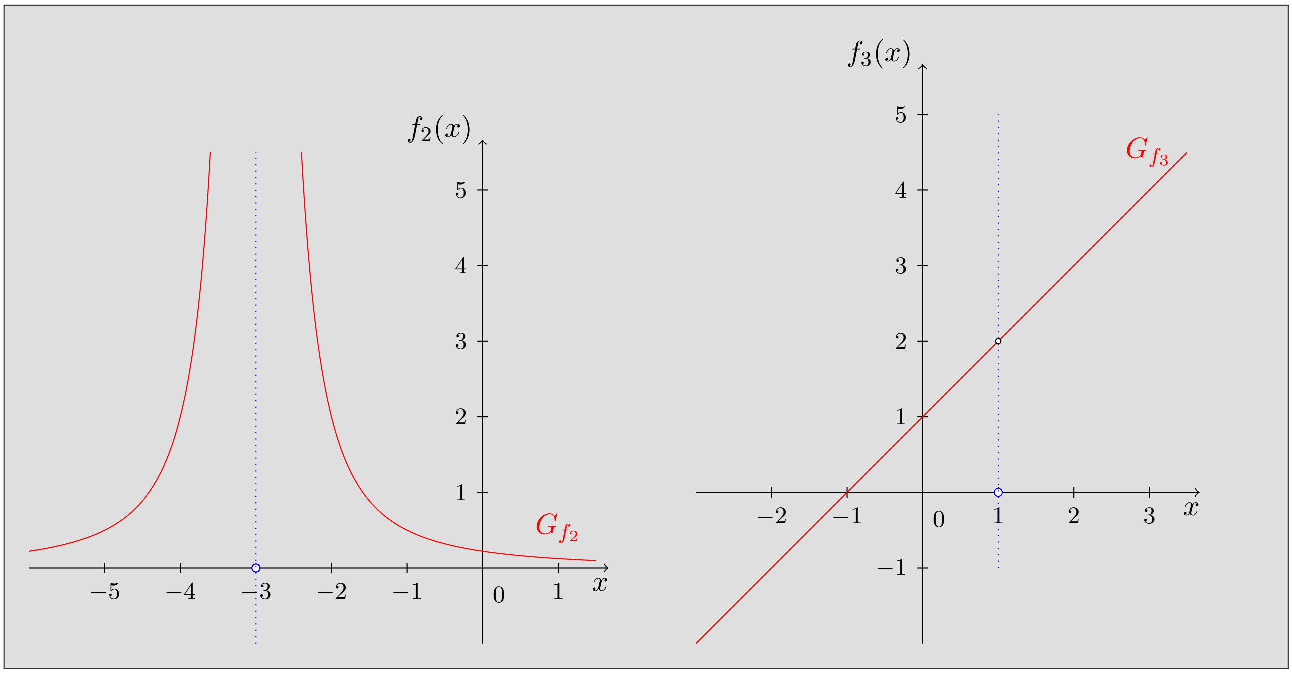
Beispiel 6.2.6

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{3}{x-2} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{2}{(x+3)^2} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$$





Die Stellen $x = 2$ und $x = -3$ sind sogenannte echte Polstellen der Funktionen f_1 und f_2, die Stelle $x = 1$ ist eine sogenannte hebbare Definitionslücke der Funktion f_3. Anhand der Graphen wird der Unterschied zwischen diesen Typen von Polstellen deutlich. Bei echten Polstellen wächst oder fällt der Graph in der Nähe der Polstelle unbeschränkt, und bei stetig hebbaren Definitionslücken mündet er von links und rechts in das „Loch" im Graphen ein.

Anhand der Abbildungsvorschriften der drei Funktionen kommt dieser Unterschied folgendermaßen zum Ausdruck: Die Werte $x = 2$ und $x = -3$ sind Nennernullstellen, aber keine Zählernullstellen der Funktionen f_1 bzw. f_2. Tatsächlich besitzen f_1 und f_2 gar keine Zählernullstellen. In einem solchen Fall sind die Nennernullstellen immer echte Polstellen.

Aufgabe 6.2.13
Ist die Nennernullstelle der Funktion

$$q : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^4-1}{2x-1} \end{array} \right.$$

eine echte Polstelle? Wenn ja, warum?
Lösung:
Die Stelle $x = \frac{1}{2}$ ist eine Nullstelle des Nenners:

$$2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \; .$$

Aber für den Zähler gilt:

$$x^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \; ,$$

womit die Zählernullstellen bei $x = -1$ und $x = 1$ liegen und $x = \frac{1}{2}$ keine Zählernullstelle ist. Damit ist $x = \frac{1}{2}$ eine echte Polstelle.

Ein weiterer Unterschied wird zwischen den beiden Polstellen von f_1 und f_2 deutlich. Bei der Polstelle $x = 2$ von f_1 findet ein Vorzeichenwechsel der Funktion statt. Der Graph von f_1 fällt links der Polstelle unbeschränkt ins Negative und wächst rechts der Polstelle (von rechts kommend) unbeschränkt ins Positive.
Der Graph von f_2 wächst auf beiden Seiten der Polstelle $x = -3$ (bei Annäherung an diese) ins Positive, es findet also kein Vorzeichenwechsel statt.

In der Abbildungsvorschrift von f_3 hingegen kann man den Term, der dafür verantwortlich ist, dass man die Polstelle $x = 1$ nicht einsetzen darf, herauskürzen. Dies ist bei gebrochenrationalen Funktionen, die eine hebbare Definitionslücke als Polstelle aufweisen, immer so.

Aufgabe 6.2.14
Bestimmen Sie alle Polstellen/Definitionslücken von

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl} D_\gamma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+6}{x^2-x-6} \end{array} \right.$$

sowie deren Typ. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_\gamma \subset \mathbb{R}$ an.
Lösung:
Die Nennernullstellen sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$, also

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{r} 3 \\ -2 \end{array} \right. .$$

Folglich ist der größtmögliche Definitionsbereich

$$D_\gamma = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} .$$

Die Zählernullstelle ergibt sich durch $3x + 6 = 0$, liegt also ebenfalls bei $x = -2$. Wir können damit die Abbildungsvorschrift von γ also für $x \in D_\gamma$ folgendermaßen umformen:

$$\gamma(x) = \frac{3x+6}{x^2-x-6} = \frac{3(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{x-3} .$$

Damit lässt sich die Funktion auch als

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{x-3} \end{array} \right.$$

schreiben und es liegt bei $x = -2$ eine stetig hebbare Definitionslücke und bei $x = 3$ eine echte Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor.

6.2.10 Asymptoten

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wie sich gebrochenrationale Funktionen im Unendlichen verhalten, falls der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-\pi\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+\pi} \end{array} \right. .$$

In f ist der Zählergrad 1 und der Nennergrad 1. Beispiele hierfür haben wir im vorhergehenden Abschnitt 6.2.9 betrachtet.

Beispiel 6.2.7

Wir betrachten die Funktion

$$g: \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \frac{1}{x-1} \end{array} \right.$$

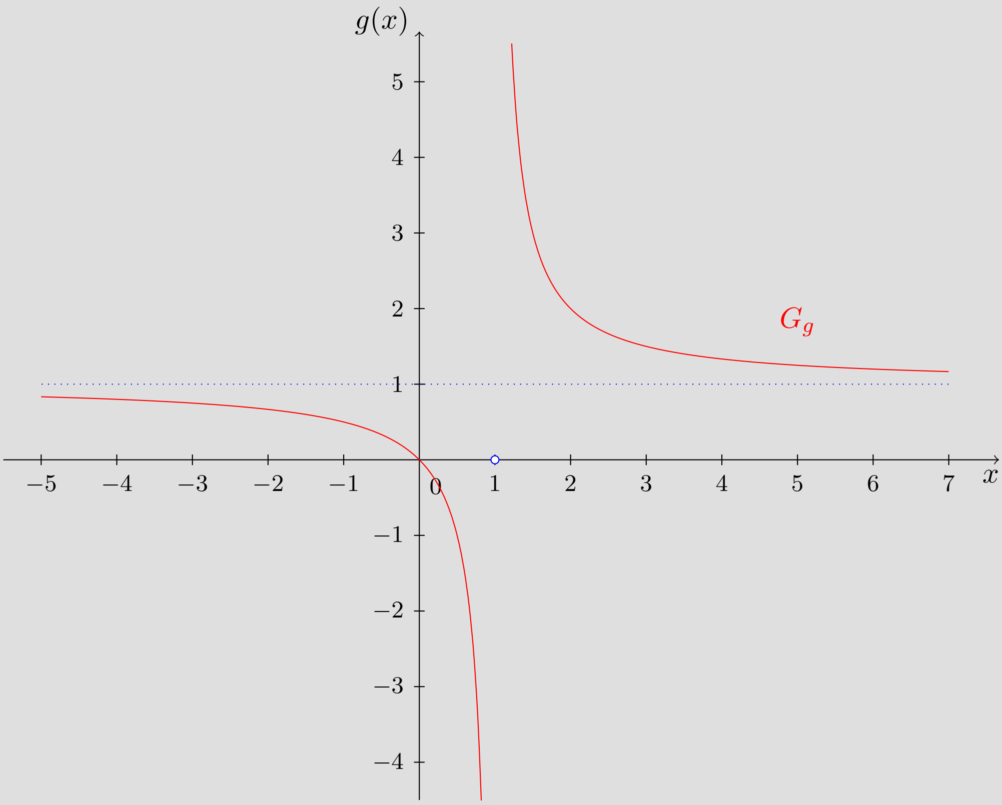
und stellen fest, dass deren Abbildungsvorschrift in der Form einer Summe aus einem Polynom (vom Grad 0) und einem gebrochenrationalen Term vorliegt. Durch Bilden des Hauptnenners ist es nun einfach, $g(x)$ auf eine gebrochenrationale Form zu bringen, in der der Zählergrad und der Nennergrad gleich sind:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \; .$$

Wir können g also auch schreiben als

$$g: \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x-1} \end{array} \right.$$

und betrachten den zugehörigen Graphen:



Neben der Polstelle und Definitionslücke bei $x = 1$ erkennen wir, dass der Wert $y = 1$ eine besondere Rolle spielt. Dieser wird offenbar von der Funktion g nie angenommen. Für die Wertemenge von g gilt $W_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Stattdessen nähert sich g für „sehr große" und „sehr kleine" Werte der Veränderlichen x immer stärker dem Wert 1 an, ohne diesen jemals für eine reelle Zahl x zu erreichen.

Dies erkennt man in der Abbildungsvorschrift $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ folgendermaßen. Für „sehr große" (5, 10, 100, usw.) oder „sehr kleine" (-5, -10, -100, usw.) Werte für x nähert sich der gebrochenrationale Anteil $\frac{1}{x-1}$ immer mehr der 0 an, da x dort im Nenner vorkommt. Tendenziell bleibt also für solche Werte nur noch der polynomielle Anteil 1 aus der Abbildungsvorschrift übrig. Dieser Anteil kann nun durch eine – in diesem Fall konstante – Funktion beschrieben werden, die als Asymptote g_{As} der Funktion g bezeichnet wird:

$$g_{As} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1\,. \end{array} \right.$$

Da es sich in diesem Fall um eine konstante Funktion handelt, wird diese auch als waagrechte Asymptote bezeichnet.

Aufgabe 6.2.15
Bestimmen Sie die Asymptote der Funktion

$$i : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 - \frac{6}{x+2} \end{array} \right.$$

sowie die Asymptote der Hyperbel aus Abschnitt 6.2.8.
Lösung:
Es gilt

$$i(x) = 3 - \frac{6}{x+2}$$

mit gebrochenrationalem Anteil $\frac{6}{x+2}$. Folglich hat die waagrechte Asymptote von i die Abbildungsvorschrift $i_{As}(x) = 3$. Die Hyperbel

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

besitzt auch eine Asymptote. Wir können die Abbildungsvorschrift schreiben als

$$f(x) = 0 + \frac{1}{x}\,,$$

womit für die Asymptote gilt $f_{As}(x) = 0$. Hier ist die Asymptote also diejenige Funktion, die konstant 0 ist: die Nullfunktion bzw. die Querachse des Koordinatensystems.

Info 6.2.8

Eine gebrochenrationale Funktion f mit Zählerpolynom $p(x)$ vom Grad $z \geq 0$ und Nennerpolynom $q(x)$ vom Grad $n \geq 0$ der Form

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\text{Nennernullstellen}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \end{array} \right.$$

hat als Asymptote eine konstante Funktion (bzw. eine waagrechte Asymptote) falls $z \leq n$ gilt. Iinsbesondere ist die Nullfunktion die Asymptote im Fall $z < n$.

6.3 Potenzfunktionen

6.3.1 Einführung

In den Abschnitten 6.2.6 und 6.2.8 haben wir Monome und Funktionen vom hyperbolischen Typ kennengelernt. Zusammenfassend kann man diese als folgende Klasse von Funktionen aufschreiben:

$$f : \begin{cases} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{cases},$$

wobei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $D_f = \mathbb{R}$ falls $k \in \mathbb{N}$ sowie $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$. In diesem Abschnitt wollen wir beliebige rationale Werte im Exponenten der Abbildungsvorschrift zulassen. Man erhält dann die sogenannten Potenzfunktionen, die wiederum die Monome und Funktionen vom hyperbolischen Typ als Spezialfälle enthalten. Wir stellen auch deren fundamentale Eigenschaften und einige Anwendungen zusammen.

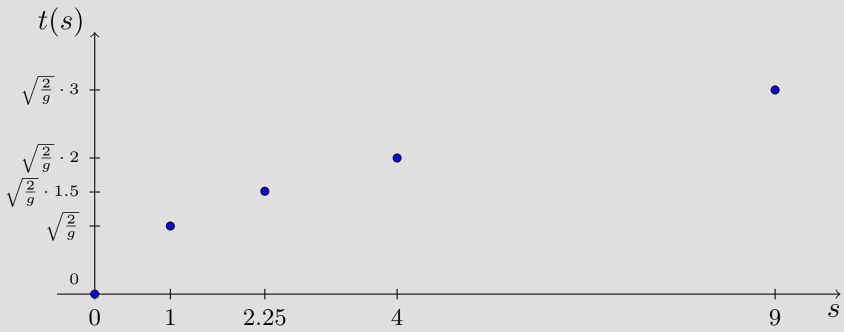
6.3.2 Wurzelfunktionen

Beispiel 6.3.1

Untersucht man einen Körper, der sich im freien Fall im homogenen Gravitationsfeld der Erde befindet, so kann man folgenden Zusammenhang zwischen seiner Fallzeit und seinem zurückgelegten Weg feststellen:

Fallzeit t in Sekunden	0	$\sqrt{\frac{2}{g}}$	$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 1{,}5$	$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 2$	$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot 3$
zurückgelegter Weg s in Metern	0	1	2,25	4	9

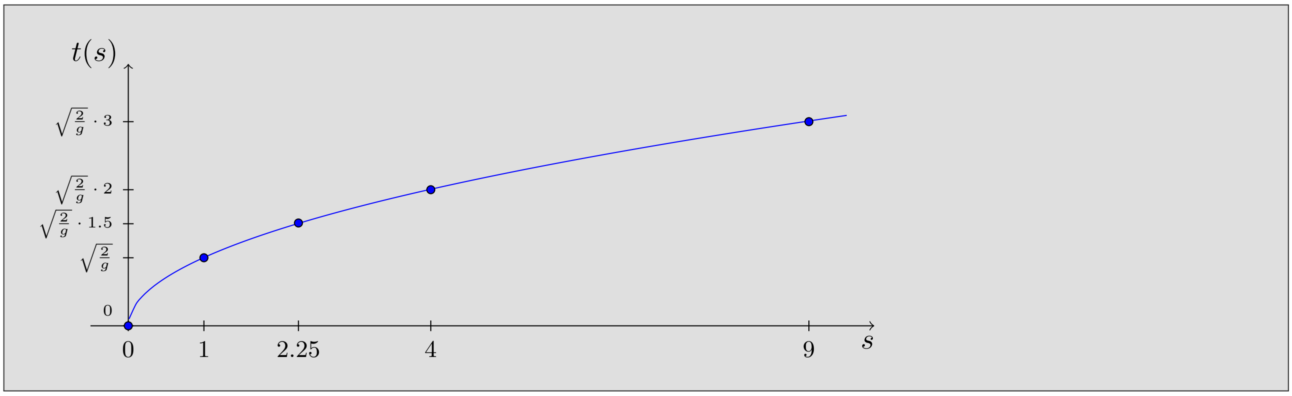
Dabei ist $g \approx 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die physikalische Konstante der Fallbeschleunigung. Trägt man nun diese Werte in einem Diagramm mit t auf der Hochachse und s auf der Querachse auf, erhält man:



Dies legt nahe, dass man den Zusammenhang zwischen t und s, mit s als Veränderlicher, mathematisch durch die Funktion

$$t : \begin{cases} [0; \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{s} \end{cases}$$

beschreiben kann, also eine Funktion, in deren Abbildungsvorschrift die Wurzel (genauer gesagt die Quadratwurzel) der Veränderlichen vorkommt. Deren Graph beinhaltet dann die obigen gemessenen Punkte:



Dieses Beispiel zeigt, dass Funktionen mit Abbildungsvorschriften, die Wurzeln der Veränderlichen enthalten, natürlicherweise in Anwendungen der Mathematik auftauchen.

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ bezeichnet man die Funktionen

$$f_n : \begin{cases} D_{f_n} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

als die Klasse der Wurzelfunktionen. Diese beinhalten offenbar die Quadratwurzel $f_2(x) = \sqrt{x}$, die dritte Wurzel $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, die vierte Wurzel $f_4(x) = \sqrt[4]{x}$, usw. als Abbildungsvorschriften von Funktionen (vgl. Potenzgesetze).

Aufgabe 6.3.1
Benutzen Sie die Potenzrechengesetze, um die Abbildungsvorschrift der Wurzelfunktionen ohne Wurzelzeichen und stattdessen mit Hilfe von Exponenten aufzuschreiben.
Lösung:
Nach den Potenzrechengesetzen gilt

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Also zum Beispiel

$$f_2(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\ ,\quad f_3(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}\ ,\quad f_4(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}\ ,\quad \ldots$$

Aufgabe 6.3.2
Welche Funktion f_n ergäbe sich für $n = 1$?
Lösung:
Für $n = 1$ gilt nach den Potenzrechengesetzen

$$f_1(x) = \sqrt[1]{x} = x^{\frac{1}{1}} = x = \mathrm{Id}(x)\ .$$

Es ergibt sich also die Identität. Diese schließt man für gewöhnlich aus der Klasse der Wurzelfunktionen aus.

Von großem Interesse ist nun der größtmögliche Definitionsbereich D_{f_n}, der für diese Wurzelfunktionen möglich ist. Denn offenbar kommt es auf den Wurzelexponenten n an, welche Werte man für x in die

Abbildungsvorschriften einsetzen darf, um reelle Werte als Ergebnisse zu erhalten. So erkennen wir, dass bei der Quadratwurzel $\sqrt{\ }$ nur nicht-negative Werte ein reelles Ergebnis liefern. Betrachten wir allerdings die Kubikwurzel $\sqrt[3]{\ }$, so erhalten wir in diesem Fall, dass alle reellen Zahlen eingesetzt wieder reelle Zahlen als Ergebnis liefern, so etwa $\sqrt[3]{-27} = -3$. Allgemein gilt:

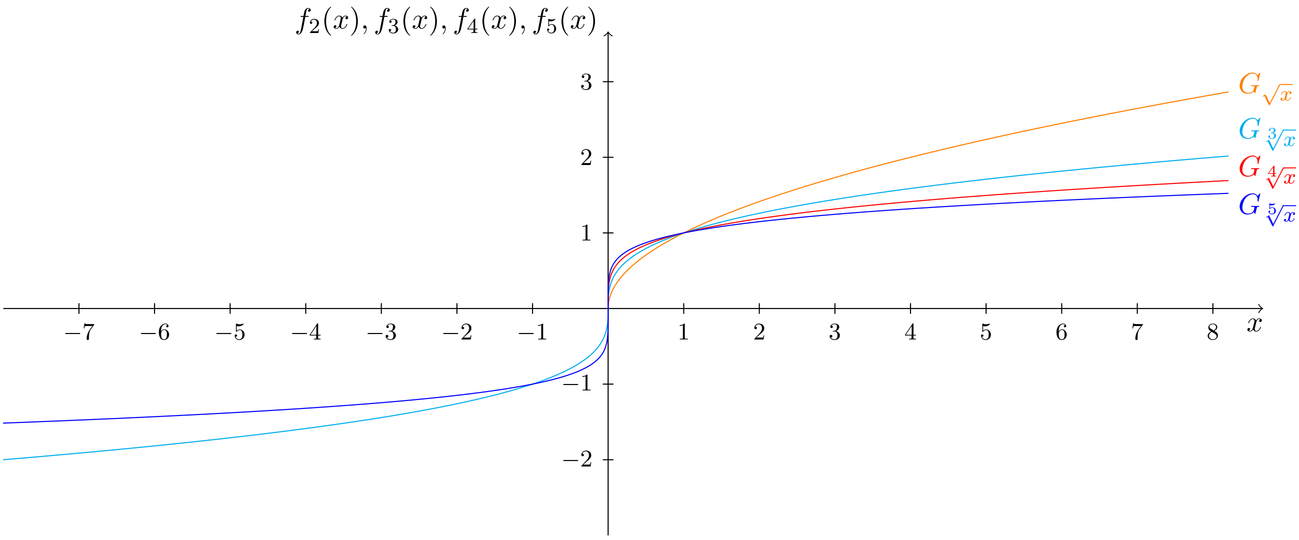
Info 6.3.2

Die Wurzelfunktionen

$$f_n : \begin{cases} D_{f_n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ besitzen den größtmöglichen Definitionsbereich $D_{f_n} = [0; \infty)$ falls n gerade ist und $D_{f_n} = \mathbb{R}$ falls n ungerade ist.

Damit erhält man folgendes Aussehen für die Graphen der ersten vier Wurzelfunktionen f_2, f_3, f_4, f_5:



Aus dem Verlauf der Graphen sieht man, dass alle Wurzelfunktionen streng monoton wachsend sind.

Aufgabe 6.3.3
Bestimme für die Wurzelfunktionen

$$f_n : \begin{cases} D_{f_n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, den Wertebereich W_{f_n}, in Abhängigkeit davon ob n gerade oder ungerade ist.
Lösung:
Für die geradzahligen Wurzelfunktionen ergeben sich offenbar als Werte nur nicht-negative reelle Zahlen, denn nach den Potenzrechengesetzen kann $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{x}$, usw. für $x \geq 0$ nie negativ werden. Die ungeradzahligen Wurzelfunktionen können auch alle negativen reellen Zahlen als Werte liefern. Tatsächlich gilt $\sqrt[3]{x} < 0$, $\sqrt[5]{x} < 0$, usw. genau dann wenn $x < 0$ ist. Zusammenfassend gilt dann also unter Berücksichtigung der strengen Monotonie der Wurzelfunktionen $W_{f_n} = \mathbb{R}$ falls n ungerade sowie

$W_{f_n} = [0;\infty)$ falls n gerade ist.

6.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

6.4.1 Einführung

Bei **Exponentialfunktionen** stellt die Veränderliche im Gegensatz zu den Potenzfunktionen nicht die Basis des Exponentialausdrucks dar, sondern sie bildet den Exponenten. Dementsprechend werden wir Zuordnungsvorschriften betrachten wie z.B.:

$$x \longmapsto 2^x \text{ oder } x \longmapsto 10^x \ .$$

Exponentialfunktionen spielen in vielen unterschiedlichen Bereichen eine wichtige Rolle, so etwa bei der Beschreibung biologischer Wachstumsprozesse - diverse Modelle zur Bevölkerungsentwicklung eingeschlossen -, bei Prozessen des radioaktiven Zerfalls oder bei einer bestimmten Form der Zinseszinsberechnung. Betrachten wir ein Beispiel:

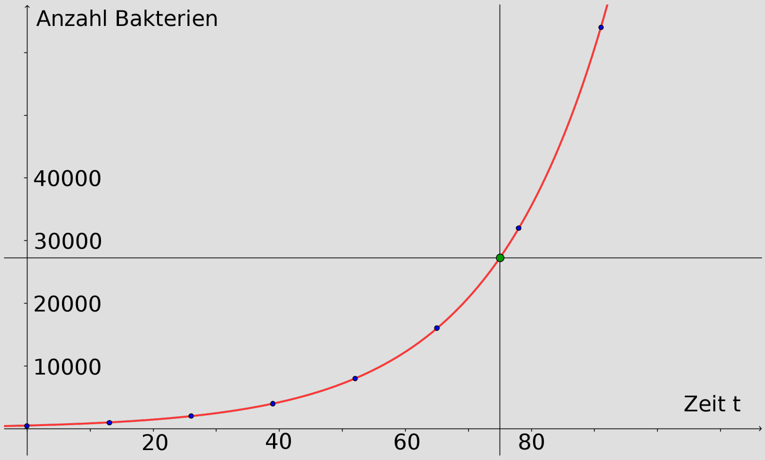
Beispiel 6.4.1

Eine Bakterienkultur enthält zu Versuchsbeginn 500 Bakterien und verdoppelt ihre Population alle 13 Minuten. Wir möchten gerne wissen, wieviele Bakterien nach 1 Stunde und 15 Minuten (also nach 75 Minuten) in der Kultur vorhanden sind?

In einem ersten Anlauf können wir eine einfache Wertetabelle erstellen, die uns die Bakterienpopulation zu Beginn ($t = 0$ min), nach $t = 13$ min, nach $t = 26$ min usw., also zu Vielfachen der 13-Minuten-Verdopplungszeitspanne, angibt:

Zeit t in min	0	13	26	39	52	65	78	91	usw.
Anzahl Bakterien	500	1000	2000	4000	8000	16000	32000	64000	usw.

Aus der Tabelle können wir abschätzen, dass die Antwort auf unsere Frage zwischen 16000 und 32000, wahrscheinlich näher bei 32000, liegen wird. Doch wie sieht es mit einer präzis(er)en Antwort aus? Dazu müssen wir den funktionalen Zusammenhang zwischen allgemeinen t-Werten und Bakterienanzahl kennen. In der unten stehenden Abbildung ist auch der Graph einer Funktion p wiedergegeben; dieser Funktionsgraph füllt sozusagen die Lücken zwischen den isolierten Punkten, die den Wertepaaren aus der Tabelle entsprechen und die ebenfalls eingezeichnet sind. Die zugehörige Abbildungsvorschrift ordnet jedem reellen Zeitpunkt eine Populationsgröße zu. Wie wir sehen werden, handelt es sich bei der Funktion um eine Exponentialfunktion.



Aus der graphischen Darstellung können wir die gesuchte Anzahl an Bakterien schon etwas genauer ablesen. Aber für die exakte Angabe benötigen wir die Abbildungsvorschrift, die hinter dem Graphen aus der Abbildung steht und die wir hier zunächst nur angeben:

$$p : [0; \infty) \longrightarrow (0; \infty) \text{ mit } t \longmapsto p(t) = 500 \cdot 2^{(t/13)} \ .$$

(In Aufgabe 6.4.2 auf Seite 227 werden wir diesen funktionalen Zusammenhang begründen.) Damit erhalten wir für $t = 75$ (gemessen in Minuten) den Funktionswert

$$p(75) = 500 \cdot 2^{(75/13)} \approx 500 \cdot 54{,}539545 \approx 27270 \ .$$

Also leben nach 75 Minuten 27270 Bakterien in der fraglichen Population.

6.4.2 Inhalt

Im vorangegangen Beispiel tritt eine Exponentialfunktion zur Basis $a = 2$ auf, die Veränderliche - im Beispiel t - erscheint im Exponenten. Wir wollen nun die allgemeine Abbildungvorschrift für Exponentialfunktionen zu einer beliebigen Basis a angeben; dabei setzen wir allerdings $a > 0$ voraus:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & (0; \infty) \\ & x & \longmapsto & f(x) = f_0 \cdot a^{\lambda x} \ . \end{array}$$

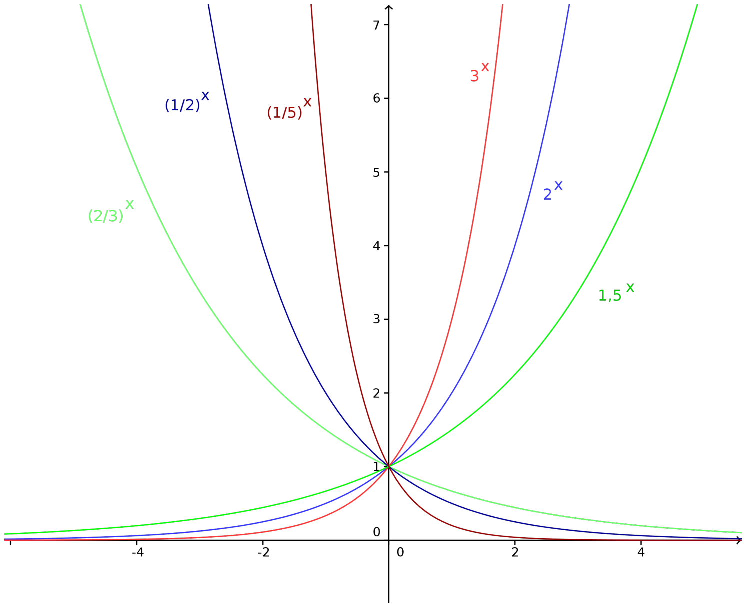
Dabei bezeichnen f_0 und λ sogenannte Parameter der Exponentialfunktion, auf die wir weiter unten eingehen werden.

Der Definitionsbereich aller Exponentialfunktionen wird von allen reellen Zahlen gebildet, $D_f = \mathbb{R}$, wohingegen der Wertebereich nur aus den positiven reellen Zahlen besteht ($W_f = (0; \infty)$), da jedwede Potenz einer postiven Zahl nur positiv sein kann.

Aufgabe 6.4.1
Warum setzt man bei den Exponentialfunktionen voraus, dass die Basis a größer Null sein soll?
Lösung:
Eine Exponentialfunktion soll nicht nur für ausgewählte, spezielle oder isolierte Werte der Veränderlichen

x definiert sein, sondern, wenn möglich, für alle reellen Zahlen. Würde man negative Basiswerte $a < 0$ zulassen, so würden sofort Probleme beim Wurzelziehen - siehe $a^{(1/2)} = \sqrt{a}, a^{1/4}, a^{1/12}$ etc. - auftreten. Zum Beispiel sind Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert, vergleiche auch Abschnitt 6.3 auf Seite 220.

Einige generelle Eigenschaften von Exponentialfunktionen können wir im folgenden Bild erkennen, in dem Exponentialfunktionen $g : \mathbb{R} \to (0; \infty)$, $x \longmapsto g(x) = a^x$ für verschiedene Werte von a gegenübergestellt sind:



- Alle diese Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $(x = 0, y = 1)$: Dies gilt, da $g(x = 0) = a^0$ und $a^0 = 1$ für jede Zahl a.
- Ist $a > 1$, so steigt der Graph von g von links nach rechts (also für wachsende x-Werte) an; man sagt auch, dass die Funktion g streng monoton wachsend ist. Je größer der Wert für a ist, desto schneller wächst g für positive x-Werte. Geht man von rechts nach links (also zu immer größeren negativen x-Werten), so bildet die negative x-Achse eine Asymptote des Graphen.
- Ist $a < 1$, so fällt der Graph von g von links nach rechts (also für wachsende x-Werte) ab; man sagt auch, dass die Funktion g streng monoton fallend ist. Je größer der Wert für a ist, desto langsamer fällt g für negative x-Werte. Geht man von links nach rechts (also zu immer größeren positiven x-Werten), so bildet die positive x-Achse eine Asymptote.

Und was hat es nun noch mit den Parametern f_0 und λ auf sich? Der Parameter f_0 ist schnell erklärt: Setzt man den Wert $x = 0$ für die Veränderliche in die allgemeinen Exponentialfunktionen f ein,

$$f(x = 0) = f_0 \cdot a^{\lambda \cdot 0} = f_0 \cdot a^0 = f_0 \cdot 1 = f_0 ,$$

so erkennt man, dass f_0 eine Art Start- oder Anfangswert darstellt (zumindest falls man die Veränderliche x zeitlich interpretiert); der exponentielle Verlauf $a^{\lambda x}$ wird generell mit dem Faktor f_0 multipliziert und dementsprechend gewichtet, d.h. gestreckt (für $|f_0| > 1$) bzw. gestaucht (für $|f_0| < 1$).

Der Parameter λ im Exponenten heißt **Wachstumsrate**; er bestimmt, wie stark die Exponentialfunktion - bei gleichbleibender Basis - wächst (für $\lambda > 0$) oder fällt (für $\lambda < 0$).

Aufgabe 6.4.2
Begründen Sie die Form der Exponentialfunktion $f(t) = 500 \cdot 2^{(t/13)}$, die im Beispiel 6.4.1 auf Seite 224 auftritt!
Lösung:
In jeder Verdopplungszeitspanne von 13 Minuten verdoppelt sich - wie der Name schon sagt - die Bakterienpopulation. Jeweils bezogen auf den Ausgangswert (500 Bakterien) hat sich also die Anzahl an Bakterien nach einer Zeitspanne von 13 Minuten verdoppelt, nach zwei solchen Zeitspannen vervierfacht, nach $3 \cdot 13$ Minuten verachtfacht (immer - wie erwähnt - im Vergleich zum Anfangswert) usw. Daran erkennen wir, dass bei dem Wachstumsprozess 2er-Potenzen involviert sind; dementsprechend wählen wir als Basis für den funktionalen Zusammenhang $a = 2$.

Diese Überlegung legt auch den Exponenten der gesuchten Exponentialfunktion fest: Unsere Zeitmessung muss sich auf die 13-Minuten-Zeitspanne beziehen, der Exponent ist daher $\frac{t}{13}$. Nach 13 Minuten ergibt sich somit für den Exponenten $\frac{13}{13} = 1$. Der Wachstumsfaktor ergibt sich zu $2^{(13/13)} = 2$. Nach zwei Zeitspannen (gleich 26 Minuten) ist der Exponent $\frac{26}{13} = 2$ und damit der Wachstumsfaktor insgesamt $2^{(26/13)} = 2^2 = 4$ usw.

Schließlich müssen wir $2^{(t/13)}$ noch mit dem richtigen Anfangswert (500 Bakterien) gewichten; dies geschieht mit Hilfe des Faktors 500.

6.4.3 Eulersche Funktion

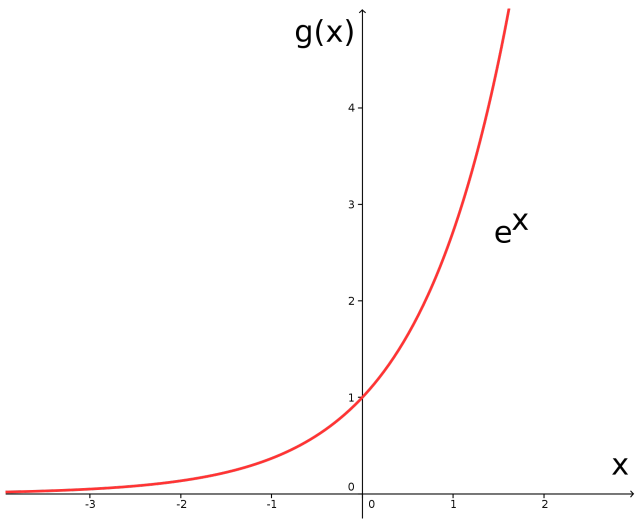
Es gibt eine ganz besondere Exponentialfunktion, manchmal auch als *die* Exponentialfunktion bezeichnet, um die wir uns jetzt kümmern wollen. In der Tat lassen sich, wie wir sehen werden, alle anderen Exponentialfunktionen auf diese besondere Exponentialfunktion zurückführen. Sie besitzt als Basis die **eulersche Zahl** e. Ihr (ungefährer) Wert beträgt

$$e = 2{,}718281828459045235\dots\ .$$

Betrachten wir also - zunächst ohne irgendwelche zusätzlichen Parameter - den Graphen der Exponentialfunktion,

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & (0;\infty) \\ & x & \longmapsto & g(x) = e^x\ , \end{array}$$

wegen der Basis e auch **e-Funktion** oder **natürliche Exponentialfunktion** genannt:

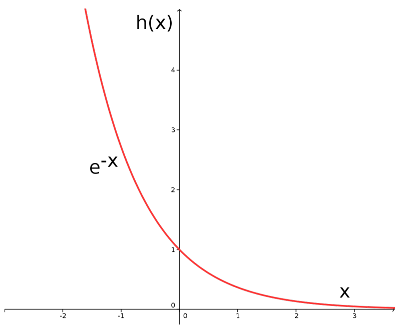


Wenig überraschend zeigt auch die e-Funktion das bereits in 6.4.2 auf Seite 225 diskutierte Verhalten der Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ $(a > 1)$; schließlich haben wir für die Basis ja auch nur einen speziellen Wert, nämlich $a = e$, gewählt. Insbesondere halten wir nochmals fest, dass die e-Funktion streng monoton wachsend ist, sich für große negative x-Werte an die negative x-Achse anschmiegt und für $x = 0$ den Wert 1 annimmt.

Aufgabe 6.4.3

Wie sieht der Graph der Funktion $h : \mathbb{R} \to (0; \infty)$, $x \mapsto h(x) = e^{-x}$ aus, und welche generellen Eigenschaften besitzt diese Funktion?

Lösung:



Die Funktion h ist streng monoton fallend, für große positive x-Werte schmiegt sich der Graph von h an die positive x-Achse an und für $x = 0$ nimmt h den Wert $h(x = 0) = 1$ an.

Eingangs dieses Unterabschnitts haben wir behauptet, dass sich die weiter oben besprochenen Exponentialfunktionen auf die e-Funktion zurückführen lassen. Dies gelingt mit Hilfe der Identität

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)} ,$$

die für beliebige reelle $a > 0$ und beliebige reelle x gilt. Dabei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus, dessen Funktionsgestalt uns im folgenden Abschnitt 6.4.4 auf Seite 230 noch ausgiebig beschäftigen wird.

Aufgabe 6.4.4

Begründen Sie die Identität $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

Lösung:

Nach dem Potenzgesetz $(b^r)^s = b^{r \cdot s}$ kann die rechte Seite der in Frage stehenden Identität als $e^{x \cdot \ln(a)} = (e^{\ln(a)})^x$ umgeschrieben werden. Da ln die Umkehrung zu e *hoch* ist, folgt $e^{\ln(a)} = a$. Damit folgt $(e^{\ln(a)})^x = a^x$, was in der Tat die linke Seite der Identität darstellt.

Allgemeine e-Funktionen enthalten die bereits in Unterabschnitt 6.4.2 auf Seite 225 eingeführten Parameter f_0 und λ; ihre funktionale Gestalt sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & (0; \infty) \\ & x & \longmapsto & f(x) = f_0 \cdot e^{\lambda x} . \end{array}$$

Wiederum repräsentiert f_0 die Möglichkeit von 1 verschiedener Start- oder Anfangswerte, und der Faktor λ im Exponenten gestattet unterschiedlich starke (positive oder negative) Wachstumsraten. Wir wollen dies abschließend an einem Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 6.4.2

Bei einer Versuchsreihe mit radioaktiven Jodatomen (^{131}I) ergeben sich im Mittel folgende Daten:

Anzahl Jodatome	10000	5000	2500	1250	usw.
Anzahl Tage seit Beginn	0	8,04	16,08	24,12	usw.

Mit anderen Worten: Alle 8,04 Tage halbiert sich die Anzahl der Jodatome aufgrund radioaktiven Zerfalls; man spricht daher in diesem Zusammenhang davon, dass die Halbwertszeit h von Jod-131 $h = 8{,}04$ Tage beträgt.

Der radioaktive Zerfall folgt einem Exponentialgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t} \ .$$

Unsere Exponentialfunktion heißt hier N; sie gibt die Anzahl der noch vorhandenen Jodatome an. N_0 steht dementsprechend für die Anzahl der Jodatome zu Beginn, also $N_0 = 10000$. Die Veränderliche im vorliegenden Beispiel ist die Zeit t (gemessen in Tagen). Von dem Parameter λ erwarten wir, dass er negativ ist, da es um die Beschreibung eines Zerfallsprozesses, also eines Prozesses mit negativem Wachstum, geht. Wir wollen λ in der Folge aus den Messdaten bestimmen:

Nach $h = 8{,}04$ Tagen sind nur noch 5000 Jodatome vorhanden, d.h. $N(t = 8{,}04) = 5000 = \frac{N_0}{2}$. Verwenden wir das Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall, so erhalten wir:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot h} \ .$$

Wir können N_0 auf beiden Seiten der Gleichung kürzen und anschließend logarithmieren (siehe Abschnitt 6.4.4 auf der nächsten Seite):

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{\lambda \cdot h}) \ .$$

Die linke Seite formen wir gemäß den Rechenregeln für den Logarithmus um (siehe Abschnitt 6.4.4 auf der nächsten Seite), $\ln(1/2) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$. Für die rechte Seite beachten wir, dass Logarithmieren die Umkehrung zum Exponentieren darstellt, $\ln(e^{\lambda \cdot h}) = \lambda \cdot h$; damit folgt:

$$\begin{aligned} -\ln(2) &= \lambda \cdot h \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= -\frac{\ln(2)}{h} \ . \end{aligned}$$

Mit $h = 8{,}04$ Tage für Jod-131 folgt für den Parameter λ im vorliegenden Fall

$$\lambda \approx -0{,}0862 \, \frac{1}{\text{Tage}} \ .$$

Andere radioaktive Substanzen besitzen andere Halbwertszeiten - Plutonium-239 z.B. weist eine Halbwertszeit von ungefähr 24000 Jahren auf - und führen folglich auf andere Werte für den Parameter λ im Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall.

6.4.4 Logarithmus

In Abschnitt 6.4.3 auf Seite 227 haben wir beim Studium der e-Funktion,

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & (0;\infty) \\ & x & \longmapsto & g(x) = e^x \ , \end{array}$$

insbesondere auf eine sehr wichtige Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion hingewiesen, nämlich dass diese Funktion streng monoton wachsend ist. Spiegelt man den Graph der Funktion an der Winkelhalbierenden zwischen dem ersten und dritten Quadranten, so erhält man den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion - und versieht sie mit einem eigenen Symbol, nämlich ln:

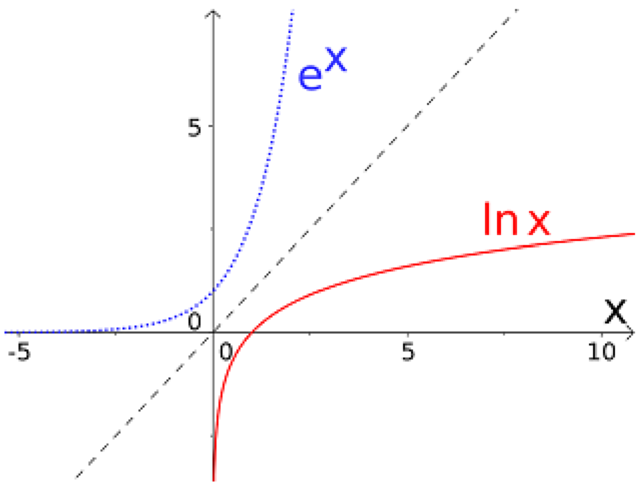
Info 6.4.3

Die über die Gleichung $e^{\ln(x)} = x$ erklärte Funktion

$$\ln : \left\{ \begin{array}{rcl} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

heißt die **natürliche Logarithmusfunktion**.

Die Gleichung ist dabei so zu lesen, dass $\ln(x) = a$ derjenige Wert a ist mit $e^a = x$. Diese Konstruktion wird im folgenden Bild dargestellt:



Folgende Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion können wir dem Graphen entnehmen:

- Die Funktion ln ist streng monoton wachsend.
- Nähert man sich von rechts auf der x-Achse dem Nullpunkt, so nimmt $\ln(x)$ immer größere negative Werte an: Wir halten fest, dass sich der Graph von ln an die negative Hochachse (y-Achse) anschmiegt.
- An der Stelle $x = 1$ besitzt die natürliche Logarithmusfunktion den Wert 0, $\ln(1) = 0$.

Neben der natürlichen Logarithmusfunktion gibt es noch andere Logarithmusfunktionen, die jeweils zu einem bestimmten Exponenten gehören:

Info 6.4.4

Ist $b > 0$ ein beliebiger Exponent, so nennt man die über die Gleichung $b^{\log_b(x)} = x$ (sprich: $\log_b(x) = a$ ist derjenige Exponent a mit $b^a = x$) erklärte Funktion

$$\log_b : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_b(x) \end{cases}$$

die **allgemeine Logarithmusfunktion** zur Basis b.

Die Logarithmusfunktion kann man in der Regel nicht direkt ausrechnen. Da sie als die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion definiert ist, versucht man in der Regel, ihre Eingabe als Potenz zu schreiben und den Exponenten abzulesen.

Beispiel 6.4.5

Typische Berechnungen für den natürlichen Logarithmus sind

$$\ln(e^5) \;=\; 5\,,\;\; \ln(\sqrt{e}) \;=\; \ln(e^{\frac{1}{2}}) \;=\; \frac{1}{2}$$

sowie für den allgemeinen Logarithmus

$$\log_5(25) \;=\; \log_5(5^2) \;=\; 2\,,\;\; \log_3(81) \;=\; \log_3(3^4) \;=\; 4\,.$$

Dabei muss man auf die Basis des Logarithmus achten, beispielsweise ist

$$\log_2(64) \;=\; \log_2(2^6) \;=\; 6\,,\;\; \text{aber}\;\; \log_4(64) \;=\; \log_4(4^3) \;=\; 3\,.$$

Aufgabe 6.4.5
Berechnen Sie diese Logarithmen:

a. $\ln(\sqrt[3]{e}) \;=\; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\ln(\sqrt[3]{e}) = \ln(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}$.

b. $\log_2(256) \;=\; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\log_2(256) = \log_2(2^8) = 8$.

c. $\log_9(3) = \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\log_9(3) = \log_9(9^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$.

In der Mathematik und den Naturwissenschaften werden folgende Logarithmen häufig eingesetzt und erhalten deshalb besondere Symbole:

- Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ oder manchmal auch nur $\log(x)$, dieser Logarithmus gehört zu den Zehnerpotenzen und wird beispielsweise zur Berechnung von pH-Werten in der Chemie eingesetzt.
- Logarithmus zur Basis 2: $\log_2(x) = \mathrm{ld}(x)$, dieser Logarithmus ist in der Informatik wichtig.
- Logarithmus zur Basis e: $\log_e(x) = \ln(e)$, der natürliche Logarithmus ist für praktische Rechnungen meist ungeeignet (es sei denn, der Ausdruck ist eine e-Potenz). Er wird als natürlich bezeichnet, weil die Exponentialfunktion zur Basis e aus mathematischer Sicht einfacher ist als die allgemeinen Exponentialfunktionen (z.B. weil e^x seine eigene Ableitung ist, b^x aber nicht $b \neq e$).

Für die Logarithmusfunktion gibt es zahlreiche Rechenregeln, die im folgenden Abschnitt erklärt werden.

6.4.5 Logarithmengesetze

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten gewisse Gesetze, die sich aus den Potenzgesetzen herleiten lassen:

Info 6.4.6

Die folgenden Rechenregeln bezeichnet man als **Logarithmengesetze**:

$$\begin{aligned} \log(u \cdot v) &= \log(u) + \log(v) \quad (u, v > 0)\ , \\ \log\left(\frac{u}{v}\right) &= \log(u) - \log(v) \quad (u, v > 0)\ , \\ \log(u^x) &= x \cdot \log(u) \quad (u > 0, x \in \mathbb{R})\ . \end{aligned}$$

Diese Gesetze sind neben dem natürlichen auch für alle anderen Logarithmen richtig und eignen sich dazu, einen gegebenen Term so umzuformen, dass Potenzen alleine in den Logarithmen stehen:

Beispiel 6.4.7

Den Wert $\mathrm{ld}(4^5)$ kann man beispielsweise mit Hilfe der Logarithmengesetze so ausrechnen:

$$\mathrm{ld}(8^5) \;=\; \log_2(8^5) \;=\; 5 \cdot \log_2(8) \;=\; 5 \cdot \log_2(2^3) \;=\; 5 \cdot 3 \;=\; 15\;.$$

Produkte in Logarithmen kann man in Summen außerhalb der Logarithmen zerlegen:

$$\lg\left(100 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{10}\right) \;=\; \lg(100) + \lg(\sqrt{10}) - \lg(10) \;=\; 2 + \frac{1}{2} - 1 \;=\; \frac{3}{2}\;.$$

Wichtig bei der Zerlegungsregel $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$ ist, dass sie Produkte in Summen umwandelt. Der umgekehrte Weg ist beim Logarithmus nicht möglich, den Logarithmus einer Summe kann man nicht weiter umformen.

6.5 Trigonometrische Funktionen

6.5.1 Einführung

Die **Trigonometrie** ist der griechischen Wortherkunft nach die Maßlehre der Dreiecke. Eine zentrale Rolle nehmen dabei die sogenannten **trigonometrischen Funktionen**, wie Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion, ein.

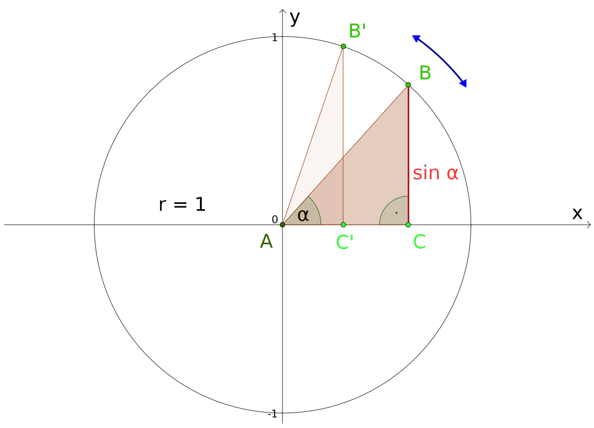
Das Anwendungsfeld von Sinus, Kosinus, Tangens & Co. ist jedoch nicht auf „simple“ Dreiecksberechnungen beschränkt. Vielmehr entfalten die trigonometrischen Funktionen ihr eigentliches Potenzial erst in den mannigfachen Anwendungsbereichen, deren wichtigste vielleicht in der Beschreibung von Schwingungs– und Wellenvorgängen durch trigonometrische Funktionen in Physik und Technik liegen. Aber auch in vielen anderen Gebieten, der Landvermessung etwa oder der Astronomie, kommen sie zum Tragen.

6.5.2 Die Sinusfunktion

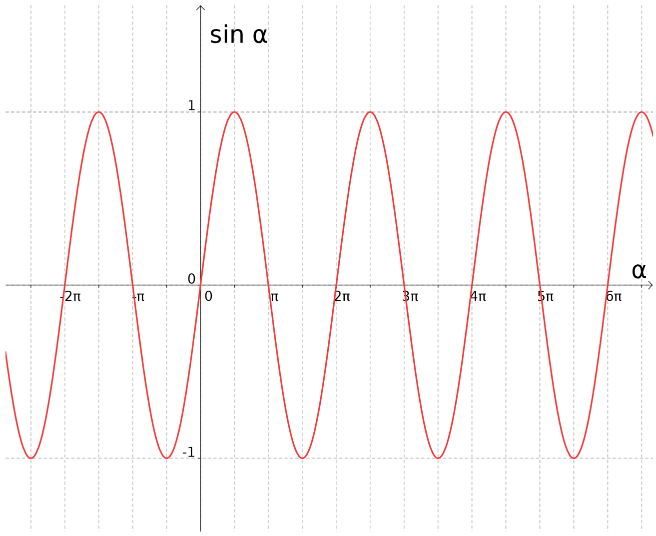
In Modul 5 auf Seite 125 wurden die trigonometrischen Funktionen elementar im 5.6 auf Seite 171 über rechtwinklige Dreiecke durch

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} .$$

sowie am Einheitskreis erklärt. Ausgehend von dieser Definition von $\sin(\alpha)$ gelangt man zur **Sinusfunktion**, indem man den Winkel α zur Veränderlichen einer Funktion mit Namen sin macht. Man kann sich dies an Hand einer Familie von rechtwinkligen Dreiecken ABC verdeutlichen, die dem **Einheitskreis**, das ist ein Kreis mit Radius $r = 1$, auf bestimmte Art und Weise einbeschrieben sind:



Beginnen wir mit dem Winkel $\alpha = 0°$, also einem zur Strecke entarteten Dreieck, so ist die Länge der Strecke $\overline{BC}$ gleich 0. Lassen wir nun den Punkt B entgegen dem Uhrzeigersinn um den Kreis wandern, so wächst α - und auch $\sin(\alpha)$ - zunächst an, bis für $\alpha = 90°$ ein maximaler Wert ($\sin(90°) = 1$) erreicht wird, bevor α weiter zu-, aber $\sin(\alpha)$ wieder abnimmt. Für $\alpha = 180°$ ist das Dreieck ABC wieder zur Strecke degeneriert, und $\sin(180°) = 0$. Wird α noch größer, „klappt“ das Dreieck „nach unten“, die Stecke $\overline{BC}$ ist parallel zur negativen Hochachse (y-Achse) ausgerichtet, ihre Länge daher negativ. Für $\alpha = 270°$ tritt der maximal negative Wert auf, bevor er sich wieder 0 nähert. Bei $\alpha = 360°$ beginnt das Spiel von Neuem.



Das voranstehende Schaubild gibt den Graphen der Sinusfunktion,

$$\begin{array}{rccl} \sin: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;+1] \\ & \alpha & \longmapsto & \sin(\alpha)\ , \end{array}$$

wieder. Allerdings haben wir auf der Querachse (α-Achse) den Winkel α nicht - wie in der bisherigen Diskussion - im Gradmaß aufgetragen, sondern wir haben das in diesem Zusammenhang üblichere Bogenmaß verwendet.

Halten wir einige der wichtigsten Eigenschaften der Sinusfunktion fest:

- Die Sinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $D_{\sin} = \mathbb{R}$; der Wertebereich besteht dagegen nur aus dem Intervall von -1 bis $+1$, diese beiden Endpunkte eingeschlossen: $W_{\sin} = [-1;+1]$
- Nach gewissen Abständen wiederholt der Graph der Sinusfunktion exakt sein Aussehen; man spricht in diesem Zusammenhang von der Periodizität der Sinusfunktion. Die **Periode** beträgt $360°$ bzw. 2π. Formelmäßig kann man diesen Sachverhalt als

  $$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$$

  ausdrücken.

Schon die Betrachtung des Graphen der einfachen Sinusfunktion legt die Verwendung dieser Funktion für die Beschreibung von Wellenvorgängen nahe. Um jedoch die gesamte Leistungsfähigkeit der Sinusfunktion ausschöpfen zu können, werden zuvor noch einige zusätzliche Parameter eingeführt. So können die „Ausschläge“ der Sinusfunktion mit einem sogenannten Amplitudenfaktor A verstärkt oder abgemildert, die „Schnelligkeit“ oder „Dichte“ der Auf- und Abbewegungen durch einen frequenzartigen Faktor a beeinflusst und der gesamte Verlauf des Graphen kann mit einer Verschiebekonstanten b nach rechts oder links verrückt werden. Die allgemeine Sinusfunktion besitzt daher folgende Gestalt:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-A;+A] \\ & x & \longmapsto & f(x) = A\,\sin(ax+b)\ . \end{array}$$

Beispiel 6.5.1

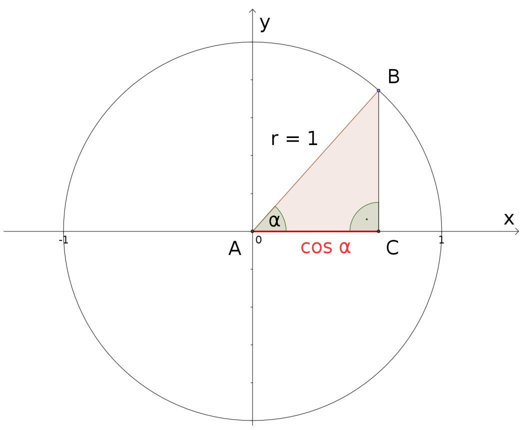
Beim Fadenpendel schwingt eine kleine schwere Masse im Gravitationsfeld der Erde an einem langen dünnen Faden, der z.B. fest an der Decke eines (hohen) Raumes verankert ist. Unter gewissen idealisierenden Annahmen und für kleine Werte des Auslenkwinkels φ aus der Ruhelage (der Lotrechten) hängt φ von der Veränderlichen t, der Zeit, über eine allgemeine Sinusfunktion ab:

$$\varphi(t) = A \sin(\frac{2\pi}{T} t + b) \; .$$

Dabei bezeichnet T die sogenannte Schwingungsdauer des Pendels, also diejenige Zeitspanne, die für eine vollständige Schwingung vom Pendel benötigt wird.

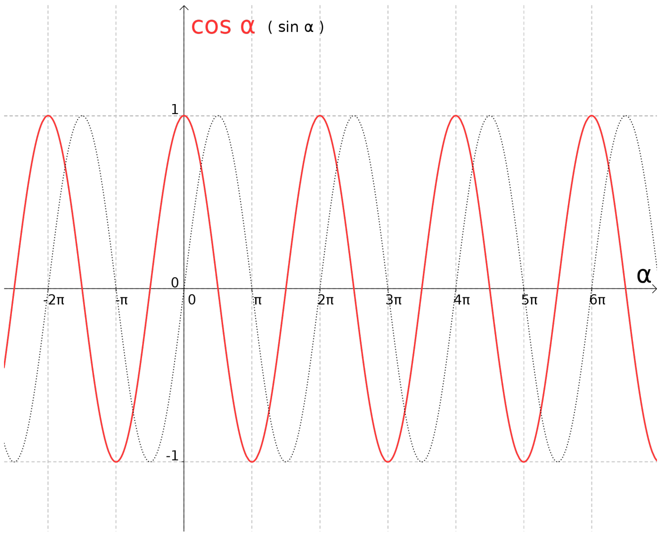
6.5.3 Kosinus und Tangens

Im Grunde genommen müssen wir für Kosinus- und Tangensfunktion die zur Sinusfunktion analogen Überlegungen angehen, die wir aus dem vorigen Unterabschnitt 6.5.2 auf Seite 234 kennen. Da wir schon etwas Übung besitzen, können wir die Diskussion etwas straffen. Beginnen wir mit der **Kosinusfunktion** und betrachten erneut unsere dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreiecke:



Wiederum besitzen alle Hypotenusen dieser so konstruierten rechtwinkligen Dreiecke die Länge 1, sodass die Kosinus der Winkel α im Bild als Längen der Strecken $\overline{AC}$ auftreten. Bewegen wir wie zuvor den Punkt B im Gegenuhrzeigersinn gleichmäßig um den Kreis und variieren so den Winkel α, erhalten wir letztlich die Kosinusfunktion:

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1;+1] \\ \alpha & \longmapsto & \cos(\alpha) \end{array} \; .$$



Das Schaubild gibt neben dem Graphen der Kosinus- (durchgezogene Linie) nochmals denjenigen der Sinusfunktion (gepunktete Linie) zu Vergleichszwecken wieder; wir erkennen eine sehr enge Verwandtschaft, die wir noch thematisieren werden.

Welche wichtigen Eigenschaften besitzt die Kosinusfunktion?

- Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion. Die Periode ist wieder 2π bzw. $360°$.
- Der Definitionsbereich der Kosinusfunktion ist ganz $\mathbb{R}$, $D_{\cos} = \mathbb{R}$, der Wertebereich das Intervall von -1 bis $+1$, die Endpunkte inbegriffen, $W_{\cos} = [-1; +1]$.
- Aus dem obigen Bild der Graphen von $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ ergibt sich unmittelbar, dass
$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$
für alle reellen Werte von α gilt. Ebenso richtig, aber etwas schwieriger einzusehen, ist
$$\cos(\alpha) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Aufgabe 6.5.1
An welchen Stellen nimmt die Kosinusfunktion ihren maximalen Wert 1 an, wo ihren maximal negativen Wert -1? An welchen Punkten besitzt sie Nullstellen (d.h. wo ist der Funktionswert gleich 0)?
Lösung:
Es gilt $\cos(0) = 1$; aufgrund der Periodizität mit Periode 2π trifft dies auch für $\pm 2\pi, \pm 2\cdot 2\pi, \pm 3\cdot 2\pi, \ldots$ zu. Also nimmt die Kosinusfunktion den maximalen Wert 1 für alle ganzzahligen Vielfachen von 2π (bzw. für alle geradzahligen Vielfachen von π) an; man kann dies auch so schreiben:

$$\cos(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{2k \cdot \pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Den Wert -1 erreicht die Kosinusfunktion an den Stellen $\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, also für ungeradzahlige Vielfache von π:

$$\cos(\alpha) = -1 \Leftrightarrow \alpha \in \{(2k+1) \cdot \pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Nullstellen treten für $\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$, d.h. für halbganzzahlige Vielfache von π auf:

$$\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{\tfrac{2k+1}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Wie im Falle des Sinus gibt es auch für den Kosinus eine allgemeine Kosinusfunktion, in deren Definition zusätzliche Freiheiten in Form von Parametern auftauchen (Amplitudenfaktor B, Frequenzfaktor c sowie Verschiebekonstante d); auf diese Art und Weise eröffnet sich wiederum die Möglichkeit, den Funktionsverlauf an unterschiedliche Situationen (in Anwendungsbeispielen) anzupassen:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-A;+A] \\ & x & \longmapsto & g(x) = B\,\cos(cx+d) \end{array} .$$

Aufgabe 6.5.2

In Beispiel 6.5.1 auf Seite 236 haben wir das Fadenpendel andiskutiert. Insbesondere kann man den zeitlichen Verlauf der Pendelauslenkung φ unter den Voraussetzungen bestimmen, dass die Schwingungsdauer T gerade π Sekunden beträgt, und dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Pendel bei einer Auslenkung von 30° losgelassen wird:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Kann man diese Situation auch mit Hilfe der (allgemeinen) Kosinusfunktion (anstelle der Sinusfunktion) beschreiben, und wenn ja, wie sieht dann $\varphi(t)$ aus?

Lösung:

Die Antwort auf die erste Frage lautet: Ja, es ist möglich, die Kosinusfunktion zur Beschreibung des vorliegenden Sachverhaltes heranzuziehen (wie wir sogleich sehen werden).

Im Prinzip könnten wir mit der oben wiedergegebenen allgemeinen Kosinusfunktion g starten und mit Überlegungen, die analog zu denjenigen in Beispiel 6.5.1 auf Seite 236 verlaufen, die Parameter B, c und d im vorliegenden Fall bestimmen. Einfacher ist es jedoch, sich auf den Zusammenhang $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ zwischen Kosinus- und Sinusfunktion zu besinnen. Denn dann folgt sofort

$$\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2t) ,$$

und damit:

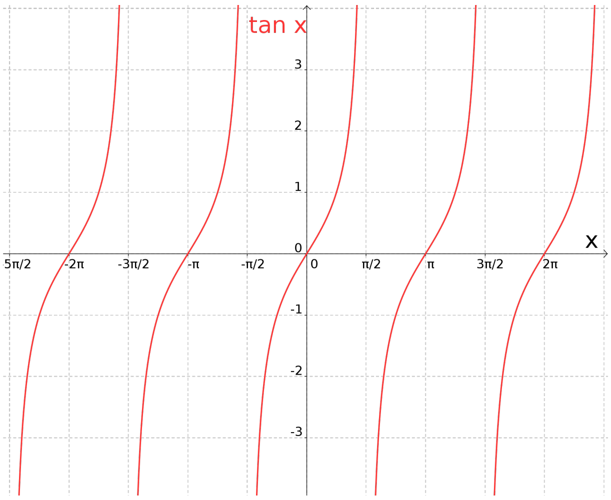
$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} \cdot \cos(2t) .$$

Der Tangens ist gegeben als das Verhältnis von Sinus zu Kosinus. Damit ist sofort klar, dass die **Tangensfunktion** nicht auf allen reellen Zahlen definiert sein kann, denn schließlich besitzt die Kosinusfunktion unendliche viele Nullstellen, wie man z.B. in Aufgabe 6.5.1 auf der vorherigen Seite sehen kann. In Aufgabe 6.5.1 auf der vorherigen Seite wird auch die Lage der Nullstellen von cos bestimmt ($\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$); demzufolge ist der Definitionsbereich der Tangensfunktion $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Und wie sieht es mit dem Wertebereich aus? Bei den cos-Nullstellen wird die Tangensfunktion gegen positiv bzw. negativ unendliche Werte streben und Polstellen haben und bei den sin-Nullstellen wird sin / cos Null. Dazwischen sind alle reellen Werte möglich, daher ist $W_{\tan} = \mathbb{R}$. Insgesamt ergibt sich für den Graphen der Tangensfunktion

$$\begin{array}{rrcl} \tan: & \mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) \end{array}$$

folgendes Bild:



Die Tangensfunktion verläuft zudem periodisch, allerdings mit der Periode π bzw. 180°.

Aufgabe 6.5.3

Der sogenannte Kotangens (Abkürzung cot) ist definiert durch $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

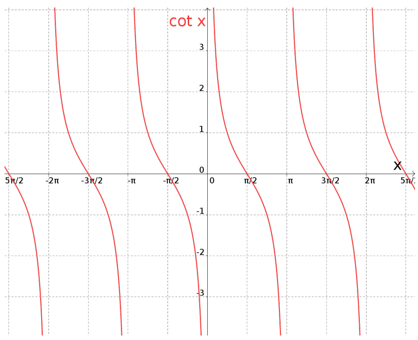
Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Kotangensfunktion an!

Lösung:

Die Polstellen des Kotangens liegen dort, wo der Sinus 0 wird, und das ist genau dann der Fall, wenn α ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Daher müssen wir bei der Definition der Kotangensfunktion genau diese Punkte ausschließen:

$$D_{\text{cot}} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \,.$$

Zur Bestimmung des Wertebereichs können Betrachtungen durchgeführt werden, die denjenigen beim Tangens stark ähneln; man findet $W_{\text{cot}} = \mathbb{R}$.



6.6 Eigenschaften und Konstruktion elementarer Funktionen

6.6.1 Einführung

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Eigenschaft elementarer Funktionen betrachten, die in den vorhergehenden Abschnitten noch nicht behandelt wurde. Dies ist die Symmetrie von Funktionen. Weiterhin werden Möglichkeiten untersucht, wie aus den nun bekannten elementaren Funktionen neue konstruiert werden können. Dazu führt man unter anderem Summen, Produkte und Verkettungen von Funktionen ein.

6.6.2 Symmetrie

Info 6.6.1

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gerade oder achsensymmetrisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(-x)$$

gilt. Analog heißt die Funktion ungerade oder punktsymmetrisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Diese beiden Symmetriebedingungen für Funktionen sagen also etwas über das Aussehen ihrer Graphen aus. Bei geraden Funktionen ändert sich der Graph bei Spiegelung an der Hochachse nicht, und bei ungeraden Funktionen ändert sich der Graph bei Spiegelung am Ursprung nicht. Wir listen einige Beispiele auf.

Beispiel 6.6.2

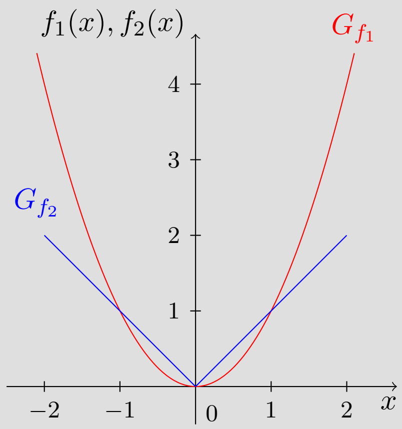
- Die Funktionen

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

und

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \,, \end{cases}$$

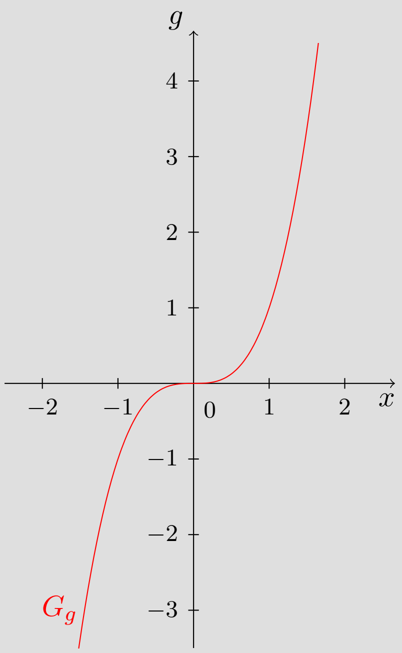
also die Standardparabel (vgl. Abschnitt 6.2.6) und die Betragsfunktion (vgl. Abschnitt 6.2.5), sind Beispiele für gerade Funktionen. Es gilt $f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$ und $f_2(-x) = |-x| = |x| = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Graphen weisen die Spiegelsymmetrie an der Hochachse auf:



- Die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases},$$

also die kubische Parabel (vgl. Abschnitt 6.2.6), ist ein Beispiel für eine ungerade Funktion. Es gilt $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs:



Natürlich sind die Symmetrieeigenschaften von Funktionen auch benutzbar, wenn der Definitionsbereich der Funktion nicht die gesamten reellen Zahlen umfasst. Es muss dann aber eine Definitionsmenge vorliegen, die die 0 in der Mitte des Intervalls enthält. Ein Beispiel dafür ist die Tangens-Funktion in der Aufgabe unten.

Aufgabe 6.6.1

Geben Sie von den folgenden Funktionen jeweils an, ob diese gerade, ungerade oder nicht-symmetrisch sind.

a)
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$

b)
$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \sin(y) \end{cases}$$

c)
$$h : \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) \end{cases}$$

d)
$$i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \cos(u) \end{cases}$$

e)
$$j : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 42 \end{cases}$$

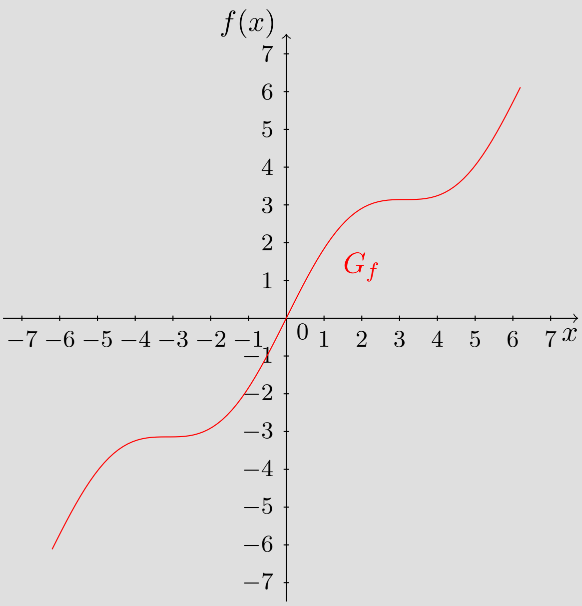
Lösung:
a) nicht-symmetrisch, b) ungerade, c) ungerade, d) gerade, e) gerade

6.6.3 Summen, Produkte, Verkettungen

In diesem Abschnitt wollen wir nun das große Sortiment an elementaren Funktionen, die wir uns in diesem Modul erarbeitet haben, nutzen, um neue komplexere Funktionen aus den elementaren zu konsturieren. An verschiedenen Stellen im Verlauf dieses Moduls haben wir bereits Funktionen untersucht, deren Abbildungsvorschriften durch Summen- oder Produktbildung aus einfacheren Abbildungsvorschriften zusammengesetzt sind. Man kann natürlich auch Differenzen und unter bestimmten Umständen Quotienten von Abbildungsvorschriften bilden. Das folgende Beispiel stellt nochmal einige solche zusammengesetzte Funktionen zusammen.

Beispiel 6.6.3

- Die Funktion
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin(x) \end{cases}$$
ist die Summe aus der Identität (vgl. Abschnitt 6.2.3) und der Sinusfunktion (vgl. Abschnitt 6.5). Sie besitzt den folgenden Graphen:



- Die Funktion

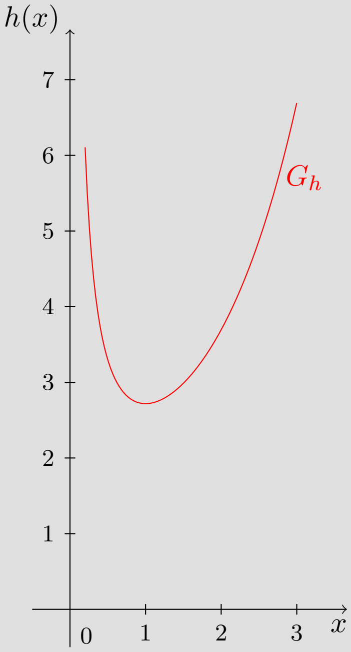
$$g : \begin{cases} [1;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 - \ln(y) \end{cases}$$

ist die Differenz aus der Standardparabel (vgl. Abschnitt 6.2.6) und der natürlichen Logarithmusfunktion (vgl. Abschnitt 6.4.4). Sie besitzt den folgenden Graphen:

- Die Funktion

$$h : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \frac{1}{x} \end{cases}$$

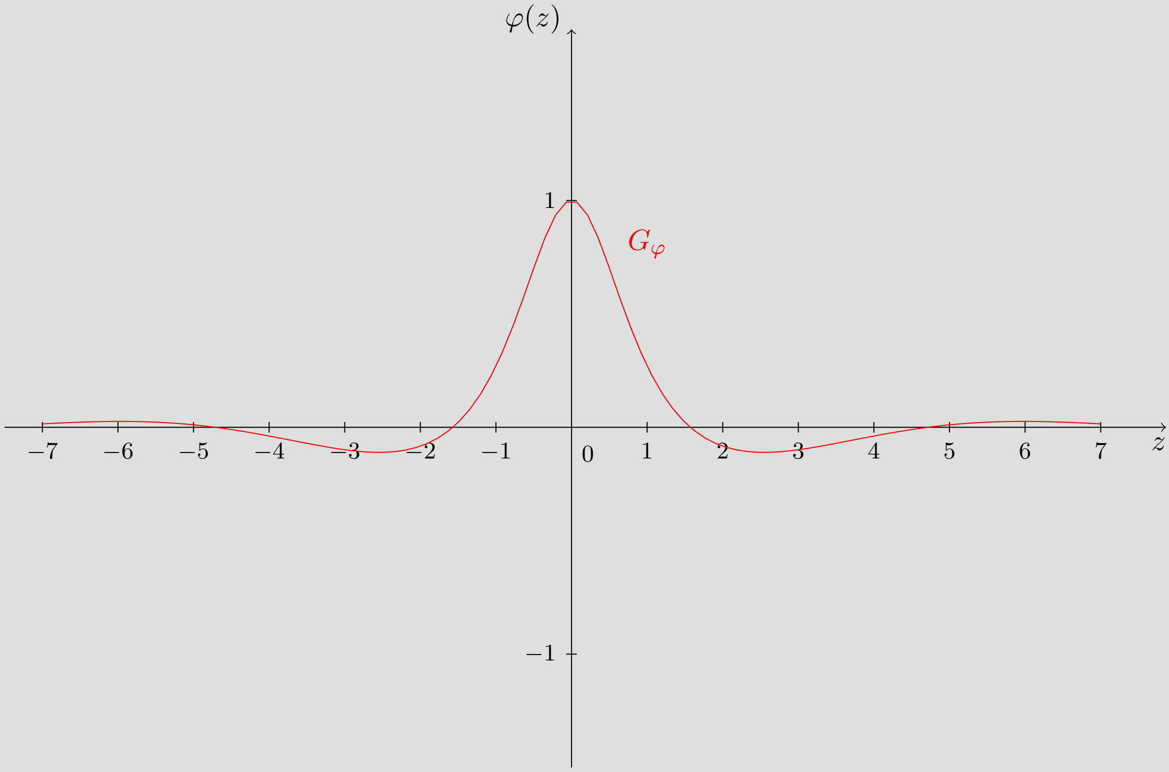
ist das Produkt aus der natürlichen Exponentialfunktion mit Abbildungsvorschrift e^x (vgl. Abschnitt 6.4.3) und der Hyperbel mit Abbildungvorschrift $\frac{1}{x}$ (vgl. Abschnitt 6.2.8). Sie besitzt folgenden Graphen:



- Die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \frac{cos(z)}{z^2+1} \end{cases}$$

  ist der Quotient aus der Cosinusfunktion (vgl. Abschnitt 6.5.3) und dem Polynom zweiten Grades (vgl. Abschnitt 6.2.7) mit der Abbildungsvorschrift $z^2 + 1$. Sie besitzt folgenden Graphen:



Aufgabe 6.6.2
Finden Sie weitere Beispiele in diesem Modul für bereits behandelte elementare Funktionen, die mittels Summen-, Differenz-, Produkt- oder Quotientenbildung aus einfacheren elementaren Funktionen hervorgehen.

Lösung:
Zum Beispiel:

- Die Funktionen vom hyperbolischen Typ (vgl. Abschnitt 6.2.8) sind alle Quotienten aus der konstanten Funktion 1 und einem Monom.
- Die Monome (vgl. Abschnitt 6.2.6) sind alle mehrfache Produkte aus der Identität $\mathrm{Id}(x) = x$.
- Die linearen Funktionen (vgl. Abschnitt 6.2.3) sind Produkte aus konstanten Funktionen, die die Steigung beschreiben, und der Identität.
- Alle Polynome (vgl. Abschnitt 6.2.7) sind Summen und Differenzen von Funktionen, die ihrerseits Produkte aus konstanten Funktionen und Monomen sind.

Zuletzt gibt es noch eine weitere Art, elementare Funktionen zu verknüpfen um neue Funktionen zu erhalten. Dies ist die sogenannte Verkettung oder Komposition von Funktionen.

Wir betrachten dazu einige Beispiele.

Beispiel 6.6.4

- Die Funktionen

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{array} \right.$$

und

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = e^x \end{array} \right.$$

lassen sich auf zweierlei Art verketten. Wir können die Funktion $f \circ g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oder die Funktion $g \circ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilden. Wir erhalten

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1 \,,$$

also

$$f \circ g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{2x} + 1 \end{array} \right.$$

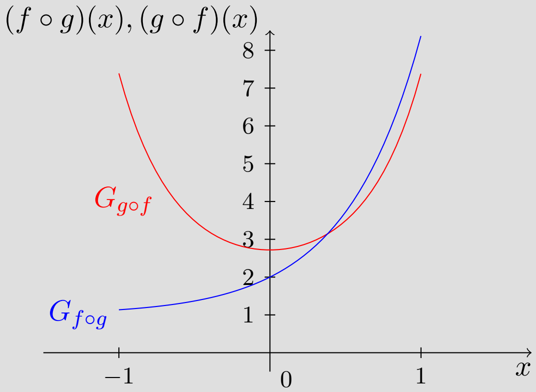
und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = e^{x^2+1} \,,$$

also

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2+1} \end{array} \right. .$$

Anhand der Graphen sehen wir, dass dies zwei völlig unterschiedliche Funktionen sind. Es kommt also auf die Reihenfolge der Verkettung an.



- Bei zwei Funktionen wie

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$$

und

$$w : \begin{cases} [0;\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

ist allerdings auf die Definitionsbereiche bei der Verkettung zu achten. Denn wollen wir etwa die verkettete Funktion $w \circ h$ betrachten, so gilt

$$(w \circ h)(x) = w(h(x)) = w(\sin(x)) = \sqrt{\sin(x)} \ .$$

Da die Funktionswerte des Sinus aber auch negativ werden können, man aber in die Quadratwurzelfunktion nur nicht-negative Werte einsetzen darf, muss also der Definitionsbereich der Sinusfunktion entsprechend eingeschränkt werden, so dass sich nicht-negative Werte ergeben, zum Beispiel mittels $x \in [0;\pi] = D_{w \circ h}$. Wir erhalten also

$$w \circ h : \begin{cases} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\sin(x)} \ . \end{cases}$$

Aufgabe 6.6.3
Gegeben sind die Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

und

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \ . \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verkettungen $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ f$, $h \circ g$, $f \circ f$ und $g \circ g$. Schränken Sie dazu eventuell die Definitionsbereiche so ein, dass die Verkettung zulässig ist. Benutzen Sie jedoch für die verketteten

Funktion stets die größtmöglichen Definitionsbereiche.

Lösung:

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2}{x} - 3 \end{cases}$$

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2x-3} \end{cases}$$

$$h \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x - 3) \end{cases}$$

$$h \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

$$f \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x - 9 \end{cases}$$

$$g \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$

6.7 Abschlusstest

6.7.1 Abschlusstest zu Modul 7

Aufgabe 6.7.1
Bestimmen Sie für die beiden Funktionen

$$f : \begin{cases} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{9x^2-\sin(x)+42}{x^2-2} \end{cases}$$

und

$$g : \begin{cases} D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{\ln(y)}{y^2+1} \end{cases}$$

jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D_f bzw. D_g.

Aufgabe 6.7.2
Bestimmen Sie für die Funktion

$$i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 4x + 4 + \pi \end{cases}$$

die Wertemenge W_i.

Aufgabe 6.7.3
Bestimmen Sie in der Exponentialfunktion

$$c : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A \cdot e^{\lambda x} - 1 \end{cases}$$

die Parameter $A, \lambda \in \mathbb{R}$, so dass $c(0) = 1$ und $c(4) = 0$ gilt.

Antwort: $A = \boxed{}$, $\lambda = \boxed{}$.

Aufgabe 6.7.4
Bestimmen Sie die Verkettung $h = f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Erläuterung: $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$) der Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & C \cdot \sin(x) \end{cases}$$

und

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & B \cdot x + \pi\ . \end{cases}$$

Antwort: $h(x) = \boxed{}$.

Bestimmem Sie die Parameter, so dass die durch h beschriebene Sinusschwingung diesen Graph besitzt:

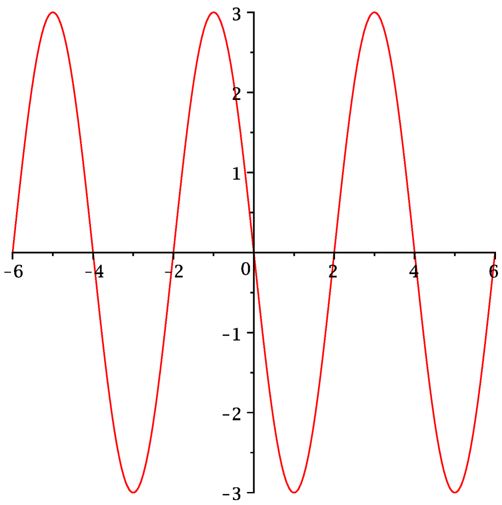


Abbildung 1: Eine Sinusschwingung.

Antwort: $h(x) =$ [ ] .

Aufgabe 6.7.5
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f = u^{-1}$ von

$$u : \begin{cases} (0;\infty) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \quad -\log_2(y) \,. \end{cases}$$

Die Funktion $f = u^{-1}$ besitzt:

a. Den Definitionsbereich $D_f =$ [ ] .

b. Den Wertebereich $W_f =$ [ ] .

c. Die Funktionsvorschrift $f(y) = u^{-1}(y) =$ [ ] .

Aufgabe 6.7.6
Kreuzen Sie an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:

Die Funktion

$$f : \begin{cases} [0;3) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad 2x+1 \end{cases}$$

- ☐ ... kann man kürzer auch als $f(x) = 2x + 1$ schreiben.
- ☐ ... ist eine linear-affine Funktion.
- ☐ ... hat die Wertemenge $\mathbb{R}$.
- ☐ ... hat die Steigung 2.
- ☐ ... kann nur Werte größer oder gleich 1 und kleiner 7 annehmen.
- ☐ ... hat als Graph ein Stück einer Gerade.
- ☐ ... hat bei $x = 0$ den Wert 1.
- ☐ ... hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6.7.7

Bestimmen Sie diese Logarithmen:

a. $\ln(e^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}) = \boxed{}$.

b. $\log_{10}(0{,}01) = \boxed{}$.

c. $\log_2(\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 256 \cdot 1024}) = \boxed{}$.

7 Differentialrechnung

Modulübersicht

7.1 Ableitung einer Funktion

7.1.1 Einführung

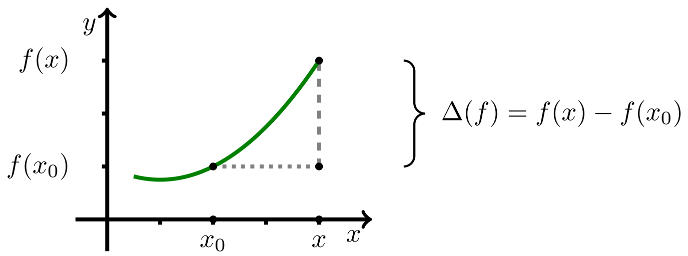
Eine Familie ist mit dem Auto unterwegs in den Urlaub. Der Wagen fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h durch eine Baustelle. Am Ende der Baustelle steht ein Schild, das ab sofort wieder eine Geschwindigkeit von 120 km/h erlaubt. Auch wenn die Fahrerin oder der Fahrer so kräftig wie nur irgend möglich auf das Gaspedal tritt, die Geschwindigkeit des Wagens wird sich nicht sprunghaft ändern, sondern in Abhängigkeit von der Zeit steigen. Wird die Geschwindigkeit innerhalb von 5 Sekunden von 60 km/h auf 120 km/h mit einer konstanten Änderungsrate erhöht, dann ist die *Beschleunigung* (= Geschwindigkeitsänderung pro Zeit) im vorliegenden Fall diese konstante Änderungsrate der Geschwindigkeit: Die Beschleunigung ergibt sich als Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung und der dafür benötigten Zeit. Ihr Wert ist hier also 12 Kilometer pro Stunde pro Sekunde. In der Realität wird die Geschwindigkeit des Autos jedoch nicht mit einer konstanten Änderungsrate erhöht werden können, sondern mit einer *zeitabhängigen* Änderungsrate. Beschreibt man die Geschwindigkeit als Funktion v der Zeit t, erhält man die Beschleunigung als Steigung dieser Funktion, unabhängig davon, ob diese Steigung (zeitlich) konstant ist oder nicht. Mit anderen Worten: Die Beschleunigung ist die *Ableitung* der Geschwindigkeits*funktion* v nach der Zeit t.

Ähnliche Zusammenhänge finden sich auch in anderen technischen Bereichen, z.B. bei der Berechnung von inneren Kräften, die in Stahlgerüsten von Bauwerken wirken, der Vorhersage von Atmosphären- oder Meeresströmungen oder auch bei der heute so wichtigen Modellierung der Finanzmärkte.

Dieses Kapitel wiederholt die grundlegenden Ideen, die hinter diesen Berechnungen stecken, Gegenstand ist also die **Differentialrechnung**. Mit anderen Worten: Es werden Ableitungen von Funktionen gebildet und so deren Steigungen bzw. Änderungsraten bestimmt. Auch wenn hier diese Berechnungen streng mathematisch durchgeführt werden, ist die Motivation dafür nicht rein mathematischer Natur. Ableitungen nehmen in vielen wissenschaftlichen Bereichen in der Interpretation als Änderungsraten verschiedener Funktionen eine wichtige Rolle ein und werden oft als herausragende Größen untersucht.

7.1.2 Relative Änderungsrate einer Funktion

Es sollen eine Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ sowie eine Skizze des Graphen von f (siehe unten) betrachtet werden. Das Ziel ist die Beschreibung der Änderungsrate dieser Funktion an einer beliebigen Stelle x_0 zwischen a und b. Dies wird auf den Begriff der Ableitung einer Funktion führen. Generell sollen möglichst einfache Rechenregeln Anwendung finden.



Werden x_0 und der entsprechende Funktionswert $f(x_0)$ festgehalten und eine weitere beliebige, aber variable Stelle x zwischen a und b sowie ihr Funktionswert $f(x)$ ausgewählt, so lässt sich durch diese beiden Punkte, also durch $(x_0; f(x_0))$ und $(x; f(x))$, eine Gerade legen, die durch ihre Steigung und ihren y-Achsenabschnitt charakterisiert wird. Als Steigung dieser Geraden erhält man den sogenannten **Differenzenquotienten**

$$\frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \,,$$

der beschreibt, wie sich die Funktionswerte von f **im Mittel** zwischen x_0 und x ändern. Damit ist eine mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[x_0;x]$ gefunden. Dieser Quotient wird auch als **relative Änderung** bezeichnet.

Strebt nun die variable Stelle x gegen die Stelle x_0, so stellt man fest, dass die Gerade, die den Graphen der Funktion in den Punkten $(x_0; f(x_0))$ und $(x; f(x))$ schneidet, immer mehr zu einer Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0; f(x_0))$ wird. Auf diese Weise kann die Änderungsrate der Funktion f - oder die **Steigung** des Graphen von f - an der Stelle x_0 **selbst** bestimmt werden. Führt der geschilderte Prozess der Annäherung von x an x_0 bildlich gesprochen auf eine eindeutige Tangente (mit einer eindeutigen Steigung, die insbesondere nicht unendlich sein darf), so spricht man in der Mathematik davon, dass der **Grenzwert** des Differenzenquotienten **existiert**. Beschrieben wird dieser Grenzwertprozess, dass x gegen x_0 strebt, hier und im Folgenden mit dem Symbol

$$\lim_{x\to x_0} \,,$$

wobei lim abkürzend für *Limes*, das lateinische Wort für Grenze, steht. Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten, so bezeichnet

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

den Wert der **Ableitung** von f in x_0. Die Funktion f ist dann an der Stelle x_0 **ableitbar** bzw. **differenzierbar**.

Beispiel 7.1.1

Für $f(x) = \sqrt{x}$ ist die relative Änderung an der Stelle $x_0 = 1$ gegeben durch

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \,.$$

Bewegt sich nun x auf $x_0 = 1$ zu, so resultiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{1}{2} \,.$$

Für den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 1$ schreibt man $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 7.1.1

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = x^2$ und $x_0 = 1$. In diesem Punkt beträgt die relative Änderung für ein reelles x

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \boxed{\qquad\quad} \; .$$

Bewegt sich x auf $x_0 = 1$ zu, so erhält man die Steigung $\boxed{\qquad}$ des Graphen von f an der Stelle $x_0 = 1$.

<u>Lösung:</u>
Für $f(x) = x^2$ ist die relative Änderung an der Stelle $x_0 = 1$ gegeben durch

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1 \; .$$

Bewegt sich nun x auf x_0 zu, so führt dies auf den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = 2 \; .$$

Das ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0; f(x_0)) = (1; 1)$. Für den Wert der Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 1$ schreibt man $f'(1) = 2$.

Über die Formel für die relative Änderungsrate kann man die Ableitung nur sehr mühsam und auch nur für sehr einfache Funktionen ausrechnen. Typischerweise bestimmt man die Ableitung durch Anwenden von Rechenregeln und durch Einsetzen bekannter Ableitungswerte für die einzelnen Bausteine.

7.1.3 Ableitung

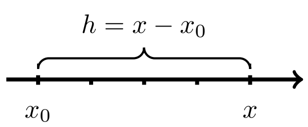
Schreibweisen der Ableitung 7.1.2

In der Mathematik sowie auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden verschiedene Schreibweisen der Ableitung äquivalent verwendet:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) \; .$$

Diese Schreibweisen haben jeweils die Bedeutung der Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.

Wenn die Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ berechnet werden muss, bietet es sich oft an, den Differenzenquotienten anders aufzuschreiben. Verwendet man die Differenz von x und x_0 und bezeichnet sie als $h := x - x_0$,



kann der Differenzenquotient mit $x = x_0 + h$ umgeschrieben werden zu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Es wurde keine Voraussetzung darüber getroffen, ob x größer oder kleiner als x_0 ist. Die Größe h kann daher positive oder negative Werte annehmen. Um die Ableitung der Funktion f zu bestimmen, muss nun der Grenzwert für $h \to 0$ berechnet werden:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Wenn dieser Grenzwert **für alle** Stellen x_0 aus dem Definitionsbereich einer Funktion existiert, so nennt man diese Funktion (insgesamt) **differenzierbar**. Viele der häufig benutzten Funktionen sind differenzierbar. Ein einfaches Beispiel dafür, dass eine Funktion nicht unbedingt differenzierbar ist, ist die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := |x|$.

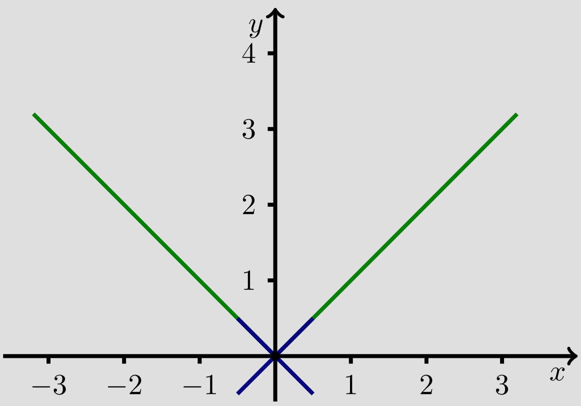
Beispiel 7.1.3

Die Betragsfunktion (siehe Modul 6 auf Seite 185, Abschnitt 6.2.5 auf Seite 203) ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Der Differenzenquotient für f an der Stelle $x_0 = 0$ lautet:

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} .$$

Da h größer oder kleiner als 0 sein kann, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Im Fall $h > 0$ ist $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$, im Fall $h < 0$ erhält man $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$. Der Grenzwertprozess, dass h sich 0 nähert, führt in den beiden Fällen also auf zwei verschiedene Ergebnisse (1 und -1). Daher existiert **der** Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ nicht. Als Folge davon ist die Betragsfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Der Verlauf des Graphen ändert seine Richtung im Punkt $(0; 0)$ sprunghaft: Salopp ausgedrückt, weist der Funktionsgraph im Punkt $(0; 0)$ einen Knick auf.



Auch wenn eine Funktion eine Sprungstelle hat, gibt es keine eindeutige Tangente an den Graphen und somit keine Ableitung.

7.1.4 Aufgaben

Aufgabe 7.1.2
Berechnen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 4 - x^2$ an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$.

Antwort:

a. Der Differenzenquotient von f an der Stelle $x_1 = -2$ ist $\boxed{}$ und hat für $x \to -2$ den Grenzwert $f'(-2) = \boxed{}$.

b. Der Differenzenquotient von f an der Stelle $x_2 = 1$ ist $\boxed{}$ und hat für $x \to 1$ den Grenzwert $f'(1) = \boxed{}$.

Lösung:

a. An der Stelle $x_1 = -2$ gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{4 - x^2 - 0}{x + 2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{2 + x} = 2 - x \ .$$

Für $x \to x_1$, also $x \to -2$, strebt dieser Differenzenquotient gegen $2-(-2) = 4$; daher $f'(-2) = 4$.

b. An der Stelle $x_2 = 1$ gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{4 - x^2 - 3}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{x - 1} = -\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = -x - 1 \ .$$

Für $x \to x_2$, also $x \to 1$, besitzt dieser Differenzenquotient den Grenzwert $-1 - 1 = -2$; daher $f'(1) = -2$.

Aufgabe 7.1.3
Erläutern Sie, warum

a. $f : [-3; \infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{x + 3}$ in $x_0 = -3$ und

b. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := 6 \cdot |2x - 10|$ in $x_0 = 5$

nicht differenzierbar sind.

Antwort:

a. Die Ableitung von f existiert an der Stelle $x_0 = -3$ nicht, da der Differenzenquotient $\boxed{}$ für $h \to 0$ nicht konvergiert.

b. Die Ableitung von g existiert an der Stelle $x_0 = 5$ nicht, da der Differenzenquotient für $h < 0$ den Wert $\boxed{}$ und für $h > 0$ den Wert $\boxed{}$ hat. Somit existiert der Grenzwert für $h \to 0$ nicht.

Lösung:

a. Der Differenzenquotient von f an der Stelle $x_0 = -3$ ist

$$\frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{-3+h+3} - \sqrt{-3+3}}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} .$$

Für $h \to 0$ $(h > 0)$ wächst dieser Differenzenquotient über alle Maßen, d.h. der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht.

b. Der Differenzenquotient von g an der Stelle $x_0 = 5$ ist

$$\frac{\Delta(g)}{\Delta(x)} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{6 \cdot |2(5+h) - 10| - 6 \cdot |2 \cdot 5 - 10|}{h} = \frac{12|h| - 0}{h} = \frac{12|h|}{h} .$$

Für $h < 0$ hat der Differenzenquotient wegen $|h| = -h$ also den Wert -12, für $h > 0$ dagegen wegen $|h| = h$ den Wert 12. Somit existiert kein Grenzwert des Differenzenquotienten. (Ein Grenzwert ist immer eindeutig.)

7.2 Standardableitungen

7.2.1 Einführung

Die meisten bekannten Funktionen, wie z.B. Polynome, trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen (siehe Modul 6 auf Seite 185), sind differenzierbar. Im Folgenden werden die Ableitungsregeln für diese Funktionen wiederholt.

7.2.2 Ableitung von Potenzfunktionen

Aus der Einführung der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt sich für eine affin lineare Funktion (siehe Modul 6 auf Seite 185, Abschnitt 6.2.4 auf Seite 201) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=mx+b$, wobei m und b gegebene Zahlen sind, dass der Wert der Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich $f'(x_0)=m$ ist. (Die geneigte Leserin, der geneigte Leser möge dies gerne selbst überprüfen!)

Für Monome x^n mit $n\geq 1$ ist es am einfachsten, die Ableitung über den Differenzenquotienten zu bestimmen. Ohne hier eine detaillierte Rechnung oder einen Beweis anzugeben, erhält man die folgenden Aussagen:

Ableitung von x^n 7.2.1

Gegeben sind eine natürliche Zahl n und eine reelle Zahl r.

Die konstante Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f(x):=r=r\cdot x^0$ besitzt die Ableitung $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f'(x)=0$.

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f(x):=r\cdot x^n$ besitzt die Ableitung

$$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \text{ mit }\ x\mapsto f'(x)=r\cdot n\cdot x^{n-1}\ .$$

Diese Ableitungsregel gilt im Übrigen auch für $n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Auch die Überprüfung dieser Aussagen sei dem Selbststudium überlassen!

Beispiel 7.2.2

Die folgende Untersuchung gilt der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f(x)=5x^3$. Der Vergleich der gegebenen Funktion mit den oben verwendeten Bezeichnungen ergibt $r=5$ und $n=3$. Damit erhält man für den Wert der Ableitung an der Stelle x

$$f'(x)=5\cdot 3x^{3-1}=15x^2\ .$$

Für Wurzelfunktionen ergibt sich eine entsprechende Aussage. Allerdings ist zu beachten, dass Wurzelfunktionen nur für $x > 0$ differenzierbar sind. Denn die Tangente an den Funktionsgraphen durch den Punkt $(0; 0)$ verläuft parallel zur y-Achse und ist somit kein Schaubild einer Funktion.

Ableitung von $x^{\frac{1}{n}}$ 7.2.3

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ ist die Funktion $f : [0; \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^{\frac{1}{n}}$ für $x > 0$ differenzierbar, und es gilt

$$f' :]0; \infty[\to \mathbb{R} , \quad x \mapsto f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} .$$

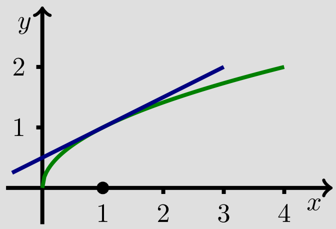
Für $n \in \mathbb{N}$ werden durch $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ Wurzelfunktionen beschrieben. Die hier wiedergegebene Ableitungsregel gilt natürlich auch für $n = 1$ oder $n = -1$.

Beispiel 7.2.4

Die Wurzelfunktion $f : [0; \infty[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist für $x > 0$ differenzierbar. Der Wert der Ableitung an einer beliebigen Stelle $x > 0$ ist durch

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

gegeben. Die Ableitung in $x_0 = 0$ existiert nicht, da die Tangente an den Graphen von f dort eine unendliche Steigung hätte.



Die Tangente im Punkt $(1; 1)$ an den Graphen der vorliegenden Wurzelfunktion weist die Steigung $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ auf.

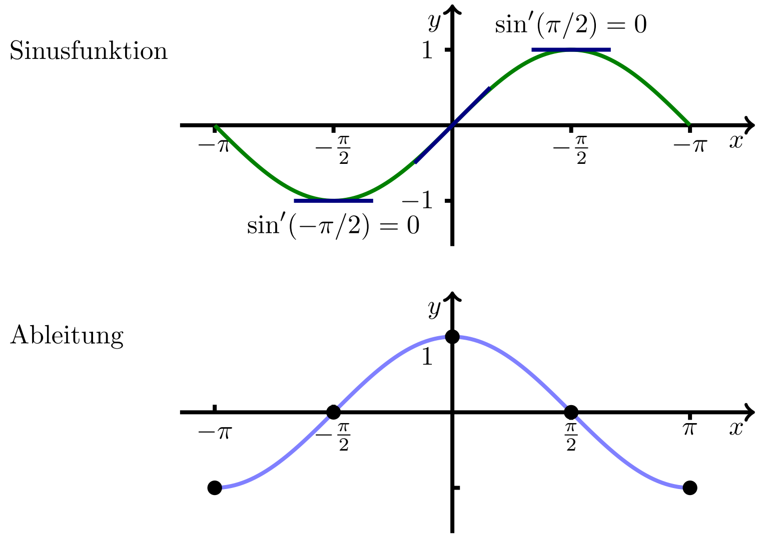
Die bisherigen Aussagen können für $x > 0$ auf Exponenten $p \in \mathbb{R}$ mit $p \neq 0$ ausgedehnt werden: Der Wert $f'(x)$ der Ableitung einer Funktion f mit Funktionsterm $f(x) = x^p$ für $x > 0$ ist

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1} .$$

7.2.3 Ableitung spezieller Funktionen

Ableitung trigonometrischer Funktionen

Die Sinusfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sin(x)$ ist periodisch mit Periode 2π. Somit genügt es, die Funktion auf einem Intervall der Länge 2π zu betrachten. Einen Ausschnitt des Graphen für $-\pi \leq x \leq \pi$ zeigt die folgende Abbildung:



Wie in der Abbildung zu sehen, ist die Steigung des Sinus bei $x_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ gerade $f'(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$. Legt man eine Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ an den Graphen der Sinusfunktion, erhält man als deren Steigung $f'(0) = 1$. Untersucht man die Stellen $x_0 = \pm\pi$, so findet man, dass dort die gleiche Steigung wie bei $x_0 = 0$, aber mit umgedrehtem Vorzeichen, vorliegt. Die Steigung ist dort also $f'(\pm\pi) = -1$. Die Ableitung des Sinus ist also eine Funktion, die genau diese Eigenschaften erfüllt. Eine genaue Untersuchung der Bereiche zwischen diesen speziell ausgesuchten Stellen ergibt, dass der Kosinus die Ableitung des Sinus darstellt:

Ableitung trigonometrischer Funktionen 7.2.5

Für die Sinusfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \sin(x)$ gilt

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ \ x \mapsto f'(x) = \cos(x)\ .$$

Für die Kosinusfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) := \cos(x)$ gilt

$$g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ \ x \mapsto g'(x) = -\sin(x)\ .$$

Für die Tangensfunktion $h : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) := \tan(x)$ gilt

$$h' : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\ ,\ \ x \mapsto h'(x) = 1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}\ .$$

Letzteres ergibt sich auch aus den nachfolgend erläuterten Rechenregeln und der Definition des Tangens als Quotient von Sinus und Kosinus.

Ableitung der Exponentialfunktion

Info 7.2.6

Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := e^x = \exp(x)$ hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Ableitung f' wiederum die Exponentialfunktion ist, also $f'(x) = e^x = \exp(x)$ gilt.

Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Ableitung der Logarithmusfunktion wird hier ohne Beweis angegeben. Für $f :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = \ln(x)$ erhält man $f' :]0;\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) = \frac{1}{x}$.

7.2.4 Aufgaben

Aufgabe 7.2.1
Bestimmen Sie die Ableitung, indem Sie die Funktionsterme vereinfachen und dann Ihre Kenntnisse über die Ableitung bekannter Funktionen anwenden ($x > 0$):

a. $f(x) := x^6 \cdot x^{\frac{7}{2}} =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} =$ $\boxed{}$.

Damit ist:

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:

a. Es ist $f(x) = x^6 \cdot x^{\frac{7}{2}} = x^{6+\frac{7}{2}} = x^{\frac{19}{2}}$. Damit gilt $f'(x) = \frac{19}{2}x^{\frac{19}{2}-1} = \frac{19}{2}x^{\frac{17}{2}}$.

b. Es ist $g(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-2}$. Damit gilt $g'(x) = (-2) \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

Aufgabe 7.2.2
Vereinfachen Sie die Funktionsterme, um dann die Ableitung zu bestimmen:

a. $f(x) := 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := \cos^2(3x) + \sin^2(3x) =$ $\boxed{}$.

Damit ist:

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:

a. Es ist allgemein
$$\sin(u) \cdot \cos(v) = \frac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right) \ .$$
Im vorliegenden Fall gilt somit $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(0) + \sin(x)) = \sin(x)$ und daher $f'(x) = \cos(x)$.

b. Wegen $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$ gilt $g(x) = 1$ und daher $g'(x) = 0$.

Aufgabe 7.2.3
Vereinfachen Sie die Funktionsterme, um dann die Ableitung zu bestimmen (für $x > 0$ in der ersten Teilaufgabe):

a. $f(x) := 3\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := (e^x)^2 \cdot e^{-x} =$ $\boxed{}$.

Damit ist:

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:

a. Es ist
$$f(x) = 3\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^3 \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^2\right) .$$
Für den Wert der Ableitung von f an der Stelle x ($x > 0$) folgt daher mit Hilfe der Kettenregel $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$. (Die Kettenregel wird im Abschnitt 7.3.4 auf Seite 267 ausführlich erläutert.)

b. Es ist
$$g(x) = (e^x)^2 \cdot e^{-x} = e^x \cdot e^x \cdot e^{-x} = e^{x+x-x} = e^x .$$
Daher folgt $g'(x) = e^x$.

7.3 Rechenregeln

7.3.1 Einführung

Zusammen mit einigen wenigen Rechenregeln und den im letzten Abschnitt vorgestellten Ableitungen lässt sich eine Vielzahl an Funktionen differenzieren.

7.3.2 Vielfaches und Summe von Funktionen

Im Folgenden bezeichnen $u, v : D \to \mathbb{R}$ zwei beliebige differenzierbare Funktionen sowie r eine beliebige reelle Zahl.

Summenregel und Vielfaches von Funktionen 7.3.1

Sind u und v als differenzierbare Funktionen vorgegeben, dann ist auch die Summe $f := u+v$ mit $f(x) = (u+v)(x) := u(x) + v(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)\ .$$

Auch das r-fache einer Funktion, also $f := r \cdot u$ mit $f(x) = (r \cdot u)(x) := r \cdot u(x)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = r \cdot u'(x)\ .$$

Mit diesen beiden Rechenregeln und der Ableitungsregel für Monome x^n lässt sich z.B. jedes beliebige Polynom ableiten. Es folgen einige Beispiele:

Beispiel 7.3.2

Das Polynom f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 5$ ist differenzierbar, und man erhält

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4x\ .$$

Die Ableitung der Funktion $g :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3 + \ln(x)$ ist

$$g' :]0;\infty[\to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3x^3+1}{x}\ .$$

Ableiten der Funktion $h : [0;\infty[\to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 4^{-1} \cdot x^2 - \sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 + (-1) \cdot x^{\frac{1}{2}}$ führt für $x > 0$ auf

$$h'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{2\sqrt{x}}\ .$$

7.3.3 Produkt und Quotient von Funktionen

Produkt- und Quotientenregel 7.3.3

Auch das Produkt von Funktionen, $f := u \cdot v$ mit $f(x) = (u \cdot v)(x) := u(x) \cdot v(x)$, ist differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) .$$

Der Quotient von Funktionen, $f := \frac{u}{v}$ mit $f(x) = \left(\frac{u}{v}\right)(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$, ist für alle x mit $v(x) \neq 0$ definiert und differenzierbar, und es gilt die **Quotientenregel**

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} .$$

Auch diese Rechenregeln sollen anhand einiger Beispiele veranschaulicht werden:

Beispiel 7.3.4

Gesucht ist die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Anwenden der Produktregel mit (z.B.) $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$ führt auf $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = e^x$. Werden diese Teilergebnisse mit der Produktregel zusammengesetzt, dann resultiert die Ableitung der Funktion f:

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad x \mapsto f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x .$$

Als Nächstes soll die Tangensfunktion g mit $g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $(\cos(x) \neq 0)$ untersucht werden. Durch Vergleich mit der Quotientenregel liest man $u(x) = \sin(x)$ und $v(x) = \cos(x)$ ab. Mit $u'(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = -\sin(x)$ können die Teilergebnisse mit Hilfe der Quotientenregel zur Ableitung der Funktion g zusammengefügt werden; es folgt:

$$g'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} .$$

Dieses Ergebnis lässt sich zu einem der folgenden Ausdrücke zusammenfassen:

$$g'(x) = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} .$$

Für das letzte Gleichheitszeichen wurde der in Modul 5 (Abschnitt 5.6.2 auf Seite 171) besprochene Zusammenhang $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ verwendet.

Aufgabe 7.3.1
Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x) \cdot x^3$, indem Sie dieses Produkt in zwei Faktoren zerlegen, die Ableitungen bilden und diese mit Hilfe der Produktregel zusammensetzen:

a. Der linke Faktor $u(x) = \boxed{}$ führt auf $u'(x) = \boxed{}$.

b. Der rechte Faktor $v(x) = \boxed{}$ führt auf $v'(x) = \boxed{}$.

c. Für das Produkt f gilt daher $f'(x) = \boxed{}$.

Lösung:
Die vier Bausteine sind

$$u(x) = \sin(x)\ ,\quad u'(x) = \cos(x)\ ,\quad v(x) = x^3\ ,\quad v'(x) = 3x^2\ ,$$

und Zusammensetzen mit der Produktregel ergibt

$$f'(x) = \cos(x) \cdot x^3 + \sin(x) \cdot 3x^2\ .$$

Aufgabe 7.3.2
Berechnen Sie die Ableitung von $f :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$, indem Sie diesen Quotienten in Zähler und Nenner zerlegen, die Ableitungen bilden und diese mit Hilfe der Quotientenregel zusammensetzen:

a. Der Zähler $u(x) = \boxed{}$ führt auf $u'(x) = \boxed{}$.

b. Der Nenner $v(x) = \boxed{}$ führt auf $v'(x) = \boxed{}$.

c. Für den Quotienten f gilt $f'(x) = \boxed{}$.

Lösung:
Die vier Bausteine sind

$$u(x) = \ln(x)\ ,\quad u'(x) = \frac{1}{x}\ ,\quad v(x) = x^2\ ,\quad v'(x) = 2x\ ,$$

und Zusammensetzen mit der Quotientenregel ergibt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}\ ,$$

wobei der letzte Umformungsschritt (Kürzen um x) nur der Vereinfachung dient.

7.3.4 Verkettung von Funktionen

Zum Abschluss wird die Verkettung (Modul 6 auf Seite 185, Abschnitt 6.6.3 auf Seite 242) von Funktionen untersucht: Was passiert, wenn eine Funktion u (die innere Funktion) in eine andere Funktion v (die äußere Funktion) sozusagen eingesetzt wird? Eine solche Verkettung wird in der Mathematik durch die Schreibweise $f := v \circ u$ mit $f(x) = (v \circ u)(x) := v(u(x))$ dargestellt. Dies bedeutet, dass zunächst der Wert einer Funktion u in Abhängigkeit von der Variable x bestimmt wird. Dieser so berechnete Wert $u(x)$ wird dann als Argument der Funktion v verwendet. Auf diese Weise entsteht der endgültige Funktionswert $v(u(x))$.

Kettenregel 7.3.5

Die Ableitung der Funktion $f := v \circ u$ mit $f(x) = (v \circ u)(x) := v(u(x))$ kann mit der **Kettenregel** bestimmt werden; es gilt:

$$f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x) \; .$$

Hierbei ist $v'(u(x))$ so zu verstehen, dass man v als Funktion von u auffasst und dementsprechend nach u differenziert; anschließend wertet man $v'(u)$ für $u = u(x)$ aus.
Hilfreich ist der Merksatz: Ableitung der Verkettung ist äußere Ableitung mal innere Ableitung.

Diese Ableitungsregel soll anhand einiger Beispiele verdeutlicht werden:

Beispiel 7.3.6

Gesucht wird die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (3 - 2x)^5$. Soll die Kettenregel angewendet werden, sind eine innere und eine äußere Funktion zu identifizieren. Setzt man für die innere Funktion u den Funktionsterm $u(x) = 3 - 2x$, dann ist die äußere Funktion v durch $v(u) = u^5$ gegeben. Damit gilt wie verlangt $v(u(x)) = f(x)$.

Ableiten der inneren Funktion u nach x liefert $u'(x) = -2$. Für die äußere Ableitung differenziert man v nach u und findet $v'(u) = 5u^4$. Einsetzen dieser Zwischenergebnisse in die Kettenregel führt auf die Ableitung f' der Funktion f mit:

$$f'(x) = 5(u(x))^4 \cdot (-2) = 5(3 - 2x)^4 \cdot (-2) = -10(3 - 2x)^4 \; .$$

Als zweites Beispiel soll die Ableitung von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{x^3}$ berechnet werden. Dazu bieten sich die Zuordnungen $x \mapsto u(x) = x^3$ für die innere Funktion u und $u \mapsto v(u) = e^u$ für die äußere Funktion v an. Die Bestimmung der inneren und der äußeren Ableitung führt auf $u'(x) = 3x^2$ und $v'(u) = e^u$. Setzt man beides in die Kettenregel ein, erhält man die Ableitung der Funktion g:

$$g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; , \;\; x \mapsto g'(x) = e^{u(x)} \cdot 3x^2 = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3} \; .$$

7.3.5 Aufgaben

Aufgabe 7.3.3
Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h mit den gegebenen Funktionstermen:

a. $f(x) := 3 + 5x$ führt auf $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := \frac{1}{4x} - x^3$ führt auf $g'(x) =$ $\boxed{}$.

c. $h(x) := 2\sqrt{x} + 4x^{-3}$ führt auf $h'(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:

a. Es ist $f'(x) = 0 + 5 \cdot 1 \cdot x^0 = 0 + 5 = 5$.

b. Wegen $g(x) = \frac{1}{4x} - x^3 = \frac{1}{4}x^{-1} - x^3$ folgt $g'(x) = \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot x^{-2} - 3 \cdot x^2 = -\frac{1}{4x^2} - 3x^2$.

c. Wegen $h(x) = 2\sqrt{x} + 4x^{-3} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-3}$ folgt $h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{12}{x^4}$.

Aufgabe 7.3.4
Berechnen und vereinfachen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h mit den gegebenen Funktionstermen:

a. $f(x) := \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ führt auf $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := \sin(3x) \cdot \cos(3x)$ führt auf $g'(x) =$ $\boxed{}$.

c. $h(x) := \frac{\sin(3x)}{\sin(6x)}$ führt auf $h'(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:

a. Es ist mit Hilfe der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(-\sin(x)) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x))^2} = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} \ .$$

b. Produkt- und Kettenregel liefern

$$g'(x) = \cos(3x) \cdot 3 \cdot \cos(3x) + \sin(3x) \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = 3\left(\cos^2(3x) - \sin^2(3x)\right) \ .$$

Da allgemein $\cos^2(u) - \sin^2(u) = \cos(2u)$ gilt, folgt also $g'(x) = 3\cos(6x)$.

c. Aufgrund der allgemeinen Relation $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$ ist

$$h(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(6x)} = \frac{\sin(3x)}{2\sin(3x)\cos(3x)} = \frac{1}{2\cos(3x)} = \frac{1}{2} \cdot (\cos(3x))^{-1} \ .$$

Mehrmaliges Anwenden der Kettenregel führt dann auf

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (\cos(3x))^{-2} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = \frac{3\sin(3x)}{2\cos^2(3x)} = \frac{3\tan(3x)}{2\cos(3x)} \ .$$

Aufgabe 7.3.5
Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h mit den gegebenen Funktionstermen:

a. $f(x) := e^{5x}$ führt auf $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := x \cdot e^{6x}$ führt auf $g'(x) =$ $\boxed{}$.

c. $h(x) := (x^2 - x) \cdot e^{-2x}$ führt auf $h'(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:

a. Die Kettenregel liefert sofort $f'(x) = 5e^{5x}$.

b. Produkt- und Kettenregel führen auf $g'(x) = 1 \cdot e^{6x} + x \cdot e^{6x} \cdot 6 = e^{6x}(1 + 6x)$.

c. Produkt- und Kettenregel führen auf $h'(x) = (2x - 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 - x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -(2x^2 - 4x + 1)e^{-2x}$.

Aufgabe 7.3.6
Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(1 - 2x)$.

Antwort: Die k-te Ableitung von f wird mit $f^{(k)}$ bezeichnet. Dabei ist $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)}$ die Ableitung von $f^{(1)}$, $f^{(3)}$ die Ableitung von $f^{(2)}$ usw. Damit:

- $f^{(1)}(x) =$ $\boxed{}$.
- $f^{(2)}(x) =$ $\boxed{}$.
- $f^{(3)}(x) =$ $\boxed{}$.
- $f^{(4)}(x) =$ $\boxed{}$.

Lösung:
Mit Hilfe der Kettenregel bestimmt man sukzessive:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \cos(1 - 2x) \cdot (-2) = -2\cos(1 - 2x) \;, \\
f^{(2)}(x) &= -2 \cdot (-\sin(1 - 2x)) \cdot (-2) = -4\sin(1 - 2x) \;, \\
f^{(3)}(x) &= -4 \cdot \cos(1 - 2x) \cdot (-2) = 8\cos(1 - 2x) \;, \\
f^{(4)}(x) &= 8 \cdot (-\sin(1 - 2x)) \cdot (-2) = 16\sin(1 - 2x) \;.
\end{aligned}
$$

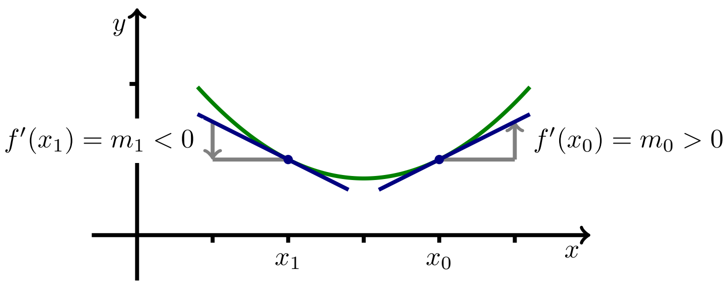
7.4 Eigenschaften von Funktionen

7.4.1 Einführung

Die Ableitung wurde weiter oben mittels einer Tangente an den Graphen einer Funktion eingeführt. Diese Tangente beschreibt die gegebene Funktion in einem gewissen Bereich „näherungsweise“. Aus den Eigenschaften dieser Geraden kann auch auf Eigenschaften der angenäherten Funktion geschlossen werden.

7.4.2 Monotonie

Mit der Ableitung kann das lokale Wachstumsverhalten untersucht werden, das heißt, ob für steigende Argumente die zugehörigen Funktionswerte größer oder kleiner werden. Dazu wird eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ betrachtet, die auf $]a;b[\subseteq D$ differenzierbar ist:



Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle x zwischen a und b gilt, dann ist f auf dem Intervall $]a;b[$ monoton fallend.

Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle x zwischen a und b gilt, dann ist f auf dem Intervall $]a;b[$ monoton wachsend.

Somit genügt es, das Vorzeichen der Ableitung f' zu bestimmen, um zu erkennen, ob eine Funktion auf dem Intervall $]a;b[$ monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beispiel 7.4.1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$. Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $f'(x) \geq 0$ und damit f monoton wachsend.

Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 10$ besitzt $g'(x) = 6x^2 + 12x - 18 = 6(x+3)(x-1)$ die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$. Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens werden also drei Bereiche unterschieden, in denen die Ableitung g' jeweils ein anderes Vorzeichen hat.

Mit Hilfe folgender Tabelle wird bestimmt, in welchen Bereichen die Ableitung von g positiv bzw. negativ ist. Diese Bereiche entsprechen den Monotoniebereichen von g. Der Eintrag $+$ besagt, dass der betrachtete Term im angegebenen Intervall positiv ist. Wenn er negativ ist, wird $-$ eingetragen:

x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
g ist monoton	wachsend	fallend	wachsend

Für die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{1}{x}$ gilt $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Hier ist $h'(x) < 0$ für alle $x \neq 0$.

Auch wenn für die beiden Teilbereiche $x < 0$ und $x > 0$ dasselbe Monotonieverhalten auftritt, ist h nicht über den gesamten Definitionsbereich monoton fallend. Als Gegenbeispiel kann $h(-2) = -\frac{1}{2}$ und $h(1) = 1$ angeführt werden. Hier gilt $-2 < 1$, aber auch $h(-2) < h(1)$. Dies entspricht einem wachsenden Verhalten beim Übergang vom einen zum anderen Teilbereich. Dass die Funktion h auf $]-\infty; 0[$ monoton fallend ist, bedeutet also, die Einschränkung von h auf dieses Intervall ist monoton fallend. Zudem ist h für alle $x > 0$ ebenfalls monoton fallend.

7.4.3 Zweite Ableitung und Krümmungseigenschaften

Gegenstand der Untersuchung ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $]a; b[\subseteq D$ differenzierbar ist. Ist deren Ableitung f' ebenfalls auf dem Intervall $]a; b[\subseteq D$ differenzierbar, so heißt f **zweimal differenzierbar**. Bildet man die Ableitung der ersten Ableitung von f, dann nennt man $(f')' = f''$ die **zweite Ableitung** der Funktion f.

Die zweite Ableitung der Funktion f kann verwendet werden, um das Krümmungsverhalten der Funktion zu untersuchen:

Krümmungseigenschaften 7.4.2

Ist $f''(x) \geq 0$ für alle x zwischen a und b, dann heißt f auf dem Intervall $]a; b[$ **konvex** (**linksgekrümmt**).

Ist $f''(x) \leq 0$ für alle x zwischen a und b, dann heißt f auf dem Intervall $]a; b[$ **konkav** (**rechtsgekrümmt**).

Somit genügt es, das Vorzeichen der zweiten Ableitung f'' zu bestimmen, um zu erkennen, ob eine Funktion konvex (linksgekrümmt) oder konkav (rechtsgekrümmt) ist.

Anmerkung zur Notation 7.4.3

Die zweite Ableitung und weitere „höhere“ Ableitungen werden oft mit hochgestellten natürlichen Zahlen in runden Klammern notiert: $f^{(k)}$ bezeichnet dann die k-te Ableitung von f. Diese Notation wird besonders in allgemein gehaltenen Formeln auch für die (erste) Ableitung ($k = 1$) und für die Funktion f selbst ($k = 0$) verwendet.

Damit bezeichnet

- $f^{(0)} = f$ die Funktion f,
- $f^{(1)} = f'$ die (erste) Ableitung,

- $f^{(2)} = f''$ die zweite Ableitung,
- $f^{(3)}$ die dritte Ableitung,
- $f^{(4)}$ die vierte Ableitung von f.

Diese Liste kann selbstverständlich beliebig lange fortgeführt werden, solange die Ableitungen von f existieren.

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine monoton wachsende Funktion in einem Bereich konvex und in einem anderen konkav sein kann.

Beispiel 7.4.4

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist sicherlich mindestens zweimal differenzierbar. Wegen $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f auf dem gesamten Definitionsbereich monoton wachsend.

Weiter ist $f''(x) = 6x$. Somit ist für $x < 0$ auch $f''(x) < 0$ und damit f hier konkav (nach rechts gekrümmt). Für $x > 0$ ist $f''(x) > 0$, sodass f für $x > 0$ konvex (nach links gekrümmt) ist.

7.4.4 Aufgaben

Aufgabe 7.4.1
In welchen möglichst großen offenen Intervallen ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$ monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend?

Antwort:

- f ist auf $]-\infty;0[$ monoton $\boxed{}$.
- f ist auf $]0;\infty[$ monoton $\boxed{}$.

Lösung:
Die Ableitung f' der Funktion f besitzt den Funktionsterm

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\left(x^2+1-x^2+1\right)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,.$$

Da der Nenner von $f'(x)$ immer positiv ist, bestimmt ausschließlich der Zähler das Vorzeichen von $f'(x)$: Für alle negativen $x \in \mathbb{R}$ ist $f'(x) < 0$ und f daher dort monoton fallend; für alle positiven $x \in \mathbb{R}$ dagegen ist $f'(x) > 0$ und f daher dort monoton wachsend.

Aufgabe 7.4.2
In welchen möglichst großen offenen Intervallen $]c;d[$ ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$ für $x > 0$ konvex beziehungsweise konkav? Antwort:

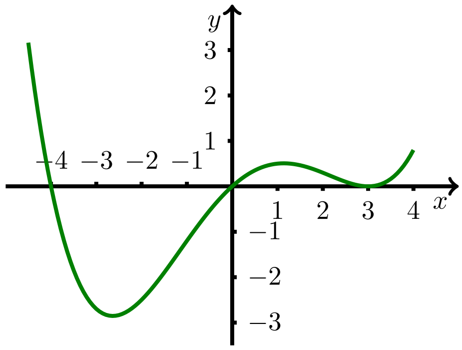
- f ist auf $\boxed{}$ konvex.
- f ist auf $\boxed{}$ konkav.

Lösung:
Man berechnet für die erste und die zweite Ableitung von f mit Hilfe der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,, \\ f''(x) &= \frac{4\cdot(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Da $4/(x^2+1)^3$ stets positiv ist, wird das Vorzeichen von $f''(x)$ einzig durch den Faktor $(1-3x^2)$ bestimmt. Die einfachen Nullstellen von $f''(x)$ liegen bei $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Daher ist für $x > 0$ $f''(x)$ auf dem offenen Intervall $\left]0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ echt größer 0 und f daher dort linksgekrümmt (konvex). Auf $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right[$ gilt $f''(x) < 0$; somit ist f dort rechtsgekrümmt (konkav).

Aufgabe 7.4.3
Gegeben ist eine Funktion $f : [-4{,}5;4] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 2$; deren Ableitung f' besitze folgenden Graphen:



a. Wo ist f monoton wachsend, wo monoton fallend? Gesucht sind jeweils möglichst große offene Intervalle $]c; d[$, auf denen f diese Eigenschaft hat.

b. Welche Aussagen erhalten Sie über die Maximal- beziehungsweise Minimalstellen der Funktion f?

Antwort:

- f ist auf $]-4{,}5;$ ☐ $[$ monoton ☐ .
- f ist auf $]$ ☐ $;0[$ monoton ☐ .
- f ist auf $]0;3[$ monoton ☐ .
- f ist auf $]3;4[$ monoton ☐ .

Die Maximalstelle von f ist bei ☐ . Die Minimalstelle von f ist bei ☐ .

Lösung:

Das Monotonieverhalten wird durch die Ableitung f' der Funktion f bestimmt. Da der Graph der Ableitung f' in der Aufgabenstellung als Schaubild gegeben ist, muss man nur ablesen, in welchen Intervallen der Graph oberhalb (bzw. unterhalb) der x-Achse verläuft: Auf den Intervallen $[-4{,}5; -4[$, $]0;3[$ und $]3;4[$ ist $f'(x) > 0$ und f daher dort monoton wachsend; auf dem Intervall $]-4;0[$ dagegen ist $f'(x) < 0$ und f daher dort monoton fallend.

An einer Extremstelle x_e (Maximal- oder Minimalstelle) einer Funktion f (die nicht auf dem Rand des Definitionsbereichs liegt) verschwindet die erste Ableitung: $f'(x_e) = 0$. Anschaulich bedeutet dies, dass an einer solchen Stelle die Tangente an den Graphen von f waagrecht verläuft. Die Nullstellen von $f'(x)$ liegen laut Aufgabenstellung bei $x_1 = -4$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$. Da f auf $]-4{,}5; -4[$ monoton wächst und auf $]-4;0[$ monoton fällt, ist $x_1 = -4$ eine Maximalstelle. Analog begründet man, dass bei $x_2 = 0$ eine Minimalstelle vorliegt. (Bei $x_3 = 3$ handelt es sich um eine Sattelstelle.)

7.5 Anwendungen

7.5.1 Kurvendiskussion

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ mit Abbildungsvorschrift $x \mapsto y = f(x)$ für $x \in]a; b[$. Eine vollständige Kurvendiskussion für f besteht in diesem Kurs aus folgenden Angaben:

- Maximaler Definitionsbereich
- Achsenschnittpunkte des Graphen
- Symmetrie des Graphen
- Grenzverhalten/Asymptoten
- Die ersten Ableitungen
- Extremwerte
- Monotonieverhalten
- Wendestellen
- Krümmungsverhalten
- Skizze des Graphen

Viele dieser Punkte wurden bereits in Modul 6 auf Seite 185 behandelt. Daher wiederholt das Folgende nur kurz, was unter den einzelnen Schritten der Kurvendiskussion zu verstehen ist. Im Anschluss wird eine Kurvendiskussion detailliert an einem Beispiel durchgesprochen.

Der erste Teil der Kurvendiskussion besteht aus algebraischen und geometrischen Aspekten von f:

Maximaler Definitionsbereich Es werden alle reellen Zahlen x bestimmt, für die $f(x)$ existiert. Die Menge D all dieser Zahlen wird maximaler Definitionsbereich genannt.

Schnittpunkte mit den Achsen

- x-Achse: Alle Nullstellen von f werden bestimmt.
- y-Achse: Der Funktionswert $f(0)$ (falls $0 \in D$) wird berechnet.

Symmetrie des Graphen Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ ist. Dann heißt die Funktion f auch **gerade**. Ist $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$, so ist der Graph zum Ursprung $(0; 0)$ des Koordinatensystems punktsymmetrisch. In diesem Falle nennt man die Funktion f auch **ungerade**.

Asymptotisches Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs Die Grenzwerte der Funktion f an den Grenzen ihres Definitionsbereichs werden untersucht.

Im zweiten Teil wird die Funktion mittels Folgerungen aus der Ableitung analytisch untersucht. Dazu müssen natürlich zunächst die erste und die zweite Ableitung berechnet werden, sofern diese existieren.

Ableitungen Berechnung der ersten und zweiten Ableitung (soweit vorhanden).

Extremwerte und Monotonie Notwendige Bedingung für Extremstellen x (sofern $x \in D$ kein Randpunkt von D ist): $f'(x) = 0$

Wir berechnen also diejenigen Stellen x_0, an denen die Ableitung f' den Wert Null annimmt. Wenn an diesen Stellen auch die zweite Ableitung f'' existiert, gilt:

- $f''(x_0) > 0$: x_0 ist eine Minimalstelle von f.
- $f''(x_0) < 0$: x_0 ist eine Maximalstelle von f.

Die Funktion f ist auf denjenigen Intervallen des Definitionsbereichs monoton wachsend, auf denen $f'(x) \geq 0$ gilt. Sie ist dort monoton fallend, wo $f'(x) \leq 0$ ist.

Wendestellen und Krümmungseigenschaften Notwendige Bedingung für Wendestellen (sofern die zweite Ableitung f'' existiert): $f''(x) = 0$
Wenn $f''(w_0) = 0$ und $f^{(3)}(w_0) \neq 0$ ist, dann ist w_0 eine Wendestelle, d.h. f ändert an dieser Stelle das Krümmungsverhalten.
Die Funktion f ist auf denjenigen Intervallen des Definitionsbereichs konvex (linksgekrümmt), auf denen $f^{(2)}(x) \geq 0$ gilt. Sie ist konkav (rechtsgekrümmt) dort, wo $f^{(2)}(x) \leq 0$ ist.

Skizze des Graphen Eine Skizze des Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem wird angefertigt, und zwar unter Berücksichtigung der während der Kurvendiskussion gewonnenen Daten.

7.5.2 Ausführliches Beispiel

Es soll eine Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) \;=\; \frac{4x}{x^2+2}$$

untersucht werden.

Maximaler Definitionsbereich
Der maximale Definitionsbereich dieser Funktion ist $D_f = \mathbb{R}$, da der Nenner der Funktion $x^2 + 2 \geq 2$ ist, also niemals Null wird, und daher keine Stellen ausgeschlossen werden müssen.

Achsenschnittpunkte
Die Nullstellen der Funktion entsprechen den Nullstellen des Zählers. Daher schneidet der Graph von f die x-Achse nur im Nullpunkt $(0;0)$, denn der Zähler wird nur für $x = 0$ zu Null. Dies ist auch der einzige Schnittpunkt mit der y-Achse, da $f(0) = 0$ ist.

Symmetrie
Um das Symmetrieverhalten zu untersuchen, wird das Argument x durch $(-x)$ ersetzt. Es gilt

$$f(-x) \;=\; \frac{4\cdot(-x)}{(-x)^2+2} \;=\; -\frac{4x}{x^2+2} \;=\; -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f ist folglich punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grenzverhalten
Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, daher ist nur das Grenzverhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ zu untersuchen. Da $f(x)$ ein Bruch aus zwei Polynomen ist und der Nenner die höhere Potenz besitzt, ist die x-Achse die waagerechte Asymptote in beide Richtungen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\;.$$

Ableitungen
Die ersten beiden Ableitungen der Funktion folgen mit Hilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+2) - x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = 4 \cdot \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} .$$

Erneutes Ableiten und Vereinfachen ergibt

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \cdot \frac{-2x(x^2+2)^2 - (-x^2+2) \cdot 2(x^2+2) \cdot 2x}{(x^2+2)^4} \\ &= 4 \cdot \frac{-2x(x^2+2) - (-x^2+2) \cdot 4x}{(x^2+2)^3} \\ &= 4 \cdot \frac{-2x^3 - 4x + 4x^3 - 8x}{(x^2+2)^3} \\ &= 4 \cdot \frac{2x^3 - 12x}{(x^2+2)^3} \\ &= 8 \cdot \frac{x(x^2-6)}{(x^2+2)^3} . \end{aligned}$$

Extremwerte
Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle, $f'(x) = 0$, ist hier gleichbedeutend mit $-x^2+2 = 0$. Man erhält also $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$. Es muss noch das Verhalten der zweiten Ableitung an diesen Stellen untersucht werden:

$$f''(x_1) = 8\frac{\sqrt{2} \cdot (2-6)}{(2+2)^3} < 0 , \quad f''(x_2) = 8\frac{(-\sqrt{2}) \cdot (2-6)}{(2+2)^3} > 0 .$$

Folglich ist x_1 eine Maximalstelle und x_2 eine Minimalstelle von f. Durch Einsetzen in f resultieren das Maximum $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ und das Minimum $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ von f.

Monotonieverhalten
Da f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann das Monotonieverhalten aus der Lage der Extremstellen und aus deren Typ abgelesen werden: f ist monoton fallend auf $\left]-\infty; -\sqrt{2}\right[$, monoton wachsend auf $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$ und monoton fallend auf $\left]\sqrt{2}; \infty\right[$. Monotonieintervalle werden stets in offener Form angegeben.

Wendestellen
Aus der notwendigen Bedingung für Wendestellen $f''(x) = 0$ erhält man die Gleichung $8x(x^2-6) = 0$. Somit sind $w_0 = 0$, $w_1 = \sqrt{6}$ und $w_2 = -\sqrt{6}$ die einzigen Lösungen. Das Polynom im Nenner von f'' ist stets größer als Null. Da das Zählerpolynom nur einfache Nullstellen besitzt, ändert $f''(x)$ in allen diesen Stellen das Vorzeichen. Es handelt sich daher um Wendestellen von f. Die Wendepunkte $(0; 0)$, $\left(\sqrt{6}; \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$ ergeben sich durch Einsetzen der Wendestellen in f.

Krümmungsverhalten
Die zweimal differenzierbare Funktion f ist konvex, wenn die zweite Ableitung größer oder gleich Null ist. Sie ist konkav, wenn die zweite Ableitung kleiner oder gleich Null ist. Da das Polynom im Nenner von $f''(x)$ stets positiv ist, genügt es, das Vorzeichen des Polynoms $p(x) = 8x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$ im Zähler zu untersuchen. Für $0 < x < \sqrt{6}$ ist es negativ (dort ist f konkav). Für $x > \sqrt{6}$ ist es positiv (dort ist f konvex). Da f punktsymmetrisch ist, folgt, dass f auf den Intervallen $\left]-\sqrt{6}; 0\right[$ und

$\left]\sqrt{6};\infty\right[$ konvex sowie auf $\left]-\infty;-\sqrt{6}\right[$ und $\left]0;\sqrt{6}\right[$ konkav ist.

Skizze des Graphen

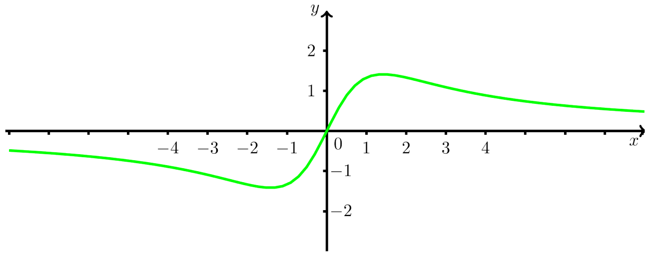


Abbildung 1: Der Graph der Funktion f, skizziert auf dem Intervall $[-8;8]$.

7.5.3 Aufgaben

Aufgabe 7.5.1
Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für eine Funktion f mit $f(x) = (2x - x^2)e^x$ durch und füllen Sie die Eingabefelder mit Ihren Ergebnissen aus:

Maximaler Definitionsbereich: [ ] .

Menge der Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen von $f(x)$): [ ] .

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei $y =$ [ ] .

Symmetrie: Die Funktion ist
[ ] achsensymmetrisch zur y-Achse,
[ ] punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grenzverhalten: Für $x \to \infty$ streben die Funktionswerte $f(x)$ gegen [ ] und für $x \to -\infty$ gegen [ ] .

Ableitungen: Es ist $f'(x) =$ [ ] sowie $f''(x) =$ [ ] .

Monotonieverhalten: Die Funktion ist auf dem Intervall [ ] monoton wachsend und ansonsten monoton fallend.

Extremwerte: Die Stelle $x_1 =$ [ ] ist eine Minimalstelle und $x_2 =$ [ ] ist eine Maximalstelle.

Wendepunkte: Die Menge der Wendestellen ist [ ]
.

Skizzieren Sie den Graphen und vergleichen Sie ihn anschließend mit der Musterlösung.

Lösung:
Maximaler Definitionsbereich
Es gilt $f(x) = -x(x-2)e^x$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; \infty[$ der maximale Definitionsbereich.

Achsenschnittpunkte
Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen der Funktion) liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$, was auf die Punkte $(0; 0)$ und $(2; 0)$ führt. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0; 0)$.

Symmetrie
Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade, und damit ist der Graph von f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.

Grenzverhalten
Da die Funktion für alle reellen Zahlen definiert ist, müssen nur die Asymptoten bei $\pm\infty$ untersucht werden:

$$\lim_{x\to\infty} -x(x-2)e^x \; = \; -\infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} -x(x-2)e^x \; = \; 0 \,.$$

Somit ist $y = 0$ für $x \to -\infty$ eine Asymptote.

Ableitungen
Die ersten beiden Ableitungen von f führen auf

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-2x)e^x + (2x - x^2)e^x = (2-x^2)e^x = -(x^2-2)e^x \ , \\ f''(x) &= -2xe^x + (2-x^2)e^x = -(x^2+2x-2)e^x \ . \end{aligned}$$

Monotonieverhalten und Extremwerte
Lösungen von $f'(x) = 0$ sind $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Weiter ist $x_1 < x_2$ und

$$f'(x) \ = \ -(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})e^x \ .$$

Auf $\left]-\infty; -\sqrt{2}\right[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend. Auf $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$ ist f' positiv und damit f monoton wachsend. Auf $\left]\sqrt{2}; \infty\right[$ ist f' negativ und damit f monoton fallend. Somit ist $x_1 = -\sqrt{2}$ Minimalstelle und $x_2 = \sqrt{2}$ Maximalstelle.

Wendepunkte
Die notwendige Bedingung für Wendestellen $f''(x) = 0$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 2 = 0$. Die Lösungen sind $w_1 = \frac{-2-\sqrt{4+8}}{2} = -1 - \sqrt{3}$ und $w_2 = \frac{-2+\sqrt{4+8}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.

Skizze des Graphen

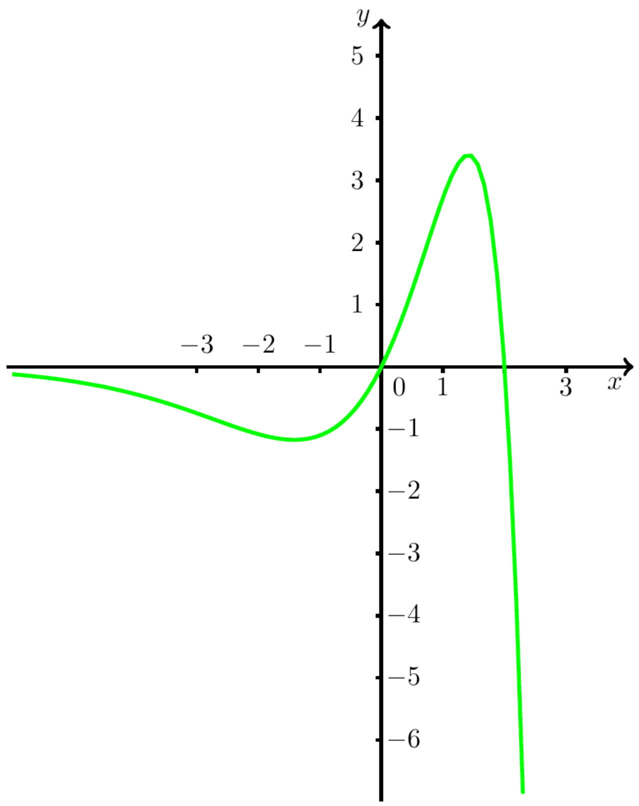


Abbildung 2: Der Graph der Funktion f, skizziert auf dem Intervall $]-6{,}2; 3[$.

7.5.4 Optimierungsaufgaben

In vielen Anwendungen der Technik oder Wirtschaft findet man Problemlösungen, die nicht eindeutig sind. Häufig hängen sie von variablen Bedingungen ab. Um eine ideale Lösung zu finden, werden zusätzliche Eigenschaften (Nebenbedingungen) definiert, die von der Lösung erfüllt werden müssen. Dies führt sehr oft zu sogenannten **Optimierungsaufgaben**, bei denen aus einer Schar von Lösungen diejenige gesucht werden muss, die eine vorab festgelegte Eigenschaft am besten erfüllt.

Als Beispiel werde die Aufgabe betrachtet, eine zylinderförmige Dose zu konstruieren. Die Dose soll zusätzlich die Bedingung erfüllen, ein Fassungsvermögen (Volumen) V von einem Liter, also einem Kubikdezimeter ($1\,\mathrm{dm}^3$), zu haben. Wählt man für V die Einheit dm^3 und sind r der Radius und h die Höhe der Dose, jeweils gemessen in Dezimetern (dm), so soll also $V = \pi r^2 \cdot h = 1$ sein. Um Arbeitsmaterial zu sparen, wird nach derjenigen Dose gesucht, die eine möglichst kleine Oberfläche $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$ hat. Hier ist die Oberfläche O in Quadratdezimetern (dm^2) eine Funktion in Abhängigkeit vom Radius r und von der Höhe h der Dose.

Mathematisch formuliert, führt die Aufgabe auf die Suche nach einem Minimum für die Funktion O der Oberfläche, wobei für die Berechnung des Minimums nur Werte für r und h zugelassen werden, für die auch die Bedingung über das Volumen $V = \pi r^2 \cdot h = 1$ erfüllt ist. Eine solche zusätzliche Bedingung bei der Suche nach Extremstellen wird auch **Nebenbedingung** genannt.

Optimierungsaufgabe 7.5.1

In einer **Optimierungsaufgabe** wird eine Extremstelle x_{ext} einer Funktion f gesucht, die eine gegebene Gleichung $g(x_{\text{ext}}) = b$ erfüllt.

Wird ein Minimum gesucht, spricht man auch von einer **Minimierungsaufgabe**. Wenn ein Maximum gesucht wird, heißt die Optimierungsaufgabe eine **Maximierungsaufgabe**.

Die Funktion f heißt **Zielfunktion**, und die Gleichung $g(x) = b$ wird **Nebenbedingung** der Optimierungsaufgabe genannt.

7.5.5 Beispiel

Das obige Beispiel soll etwas genauer betrachtet werden: Es geht also um die Minimierung der Oberfläche einer zylinderförmigen Dose bei einem vorgegebenen Volumen (Grundfläche mal Höhe)

$$V = \pi r^2 h = 1 \ ,$$

wobei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Dose sind. Die Oberfläche setzt sich aus dem Deckel und dem Boden (jeweils mit einer Fläche der Größe πr^2) und der Mantelfläche (der Größe $2\pi r h$) zusammen, und man erhält $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Die Oberfläche der Dose ist eine Funktion vom Radius r und von der Höhe h. Im Gegensatz dazu wird dem Volumen ein fester Wert zugeordnet (Nebenbedingung). Es kann also geschrieben werden:

$$O\,(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \ .$$

Wegen der Nebenbedingung, dass $V = \pi r^2 h = 1$ sein soll, kann man dieses Problem in ursprünglich zwei Variablen (r und h) auf ein Problem mit nur noch einer Variablen reduzieren. Umformen des

Volumens nach der Höhe der Dose führt auf:

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad h &= \frac{1}{\pi r^2} \,. \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen dieser Formel in die Funktion $O(r,h)$ resultiert eine Funktion, die nur noch von einer Variablen abhängt und die **der Einfachheit halber** ebenfalls O genannt werde:

$$O\left(r,h\right) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{1}{r}\right) = O\left(r\right) \,.$$

Nach dieser Manipulation kann die Frage nach der minimalen Oberfläche der Dose ganz analog zu den Extremwertaufgaben von Funktionen bearbeitet werden. Es wird also die erste Ableitung der Funktion O nach der Variablen r gebildet und diese gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} O'\left(r\right) = 2\left(2\pi r - \frac{1}{r^2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2\pi r &= \frac{1}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad 2\pi r^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad r^3 &= \frac{1}{2\pi} \\ \Leftrightarrow \quad r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \,. \end{aligned}$$

Für die letzte Äquivalenzumformung wurde verwendet, dass der Radius r keine negativen Werte annehmen kann. Einsetzen dieses Ergebnisses in die zweite Ableitung von O dient der Überprüfung, ob wirklich ein Minimum gefunden wurde ($O''(r) = 4\pi + 4/r^3$):

$$O''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^3} = 12\pi > 0 \,.$$

Für den Radius $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ wird die Oberfläche der zylindrischen Dose mit dem gegebenen Volumen $V = 1$ minimal. Die Höhe erhält man in diesem Fall zu $h = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$. Wird eine Dose mit diesen Maßen hergestellt, wird für das im Beispiel vorgegebene Volumen der Materialverbrauch minimiert.

7.6 Abschlusstest

7.6.1 Abschlusstest Kapitel 6

Aufgabe 7.6.1
In einem Behälter wird um 9 Uhr eine Temperatur von $-10°$C gemessen. Um 15 Uhr beträgt die Temperatur $-58°$C. Nach weiteren vierzehn Stunden ist die Temperatur auf $-140°$C gefallen.

a. Wie groß ist die mittlere Änderungsrate der Temperatur aufgrund der ersten und zweiten Messung?

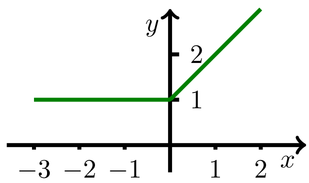
   Antwort: ☐

b. In der (mittleren) Änderungsrate drückt sich die Eigenschaft der fallenden Temperatur dadurch aus, dass die Änderungsrate ☐ ist.
   Hinweis:
   Geben Sie ein Adjektiv an.

c. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur über die gesamte Messdauer.

   Antwort: ☐

Aufgabe 7.6.2
Zu einer Funktion $f : [-3; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ gehört die Ableitung f', deren Graph hier gezeichnet ist:



Die Funktionswerte von f zwischen -3 und 0
- ☐ sind konstant,
- ☐ nehmen um 3 zu,
- ☐ nehmen ab.

Die Funktion f besitzt an der Stelle 0
- ☐ eine Sprungstelle,
- ☐ keine Ableitung,
- ☐ 1 als Wert der Ableitung.

Aufgabe 7.6.3
Berechnen Sie für

a. $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \ln\left(x^3 + x^2\right)$ den Wert der Ableitung f' an der Stelle x:
   $f'(x) =$ ☐ .

b. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x \cdot e^{-x}$ den Wert der zweiten Ableitung g'' an der Stelle x:
   $g''(x) =$ ☐ .

Aufgabe 7.6.4
Betrachten Sie die Funktion $f :]0;\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ mit $f'(x) = x \cdot \ln x$. In welchen Bereichen ist f monoton fallend, in welchen Bereichen ist f konkav? Geben Sie als Bereiche möglichst große offene Intervalle $]c;d[$ an:

a. f ist auf $\boxed{}$ monoton fallend.

b. f ist auf $\boxed{}$ konkav.

8 Integralrechnung

Modulübersicht

8.1 Stammfunktionen

8.1.1 Einführung

Im letzten Kapitel wurden Ableitungen von Funktionen behandelt. Natürlich stellt sich, wie bei jeder Rechenoperation, auch hier die Frage nach der Umkehrung, so wie die Subtraktion als Umkehrung der Addition aufgefasst werden kann oder die Division als Umkehrung der Multiplikation. Die Suche nach der Umkehrung der Ableitung führt zur Einführung der Integralrechnung und damit zur Stammfunktionsbildung. Der Zusammenhang ist sehr einfach erklärt. Kann man einer Funktion f eine Ableitung f' zuordnen und fasst auch f' als Funktion auf, so kann man auch der Funktion f' eine Funktion f zuordnen, indem man die Operation „Ableitung" rückgängig macht. Man dreht in diesem Kapitel also die Fragestellung um: Kann man zu einer Funktion f eine andere Funktion finden, deren Ableitung wieder die Funktion f ist?

Die Anwendungen der Integralrechnung sind genauso vielfältig wie die Anwendungen der Differentialrechnung. Untersucht man zum Beispiel in der Physik die Kraft F, die auf einen Körper mit der Masse m wirkt, dann kann man unter Verwendung des bekannten Zusammenhangs $F = ma$, wo a die Beschleunigung des Körpers ist, zunächst aus der Kraft die Beschleunigung $a = F/m$ berechnen. Interpretiert man die Beschleunigung als Änderungsrate der Geschwindigkeit, $a = \frac{dv}{dt}$, dann kann man anschließend die Geschwindigkeit über die Umkehrung der Ableitung – also durch die Integralrechnung – bestimmen. Ähnliche Zusammenhänge lassen sich in vielen Bereichen aus Naturwissenschaften, Technik und auch Wirtschaftswissenschaften finden. So benötigt man die Integralrechnung zur Bestimmung von Flächen, von Schwerpunkten, Biegeeigenschaften von Balken oder zur Lösung sogenannter Differentialgleichungen, mit denen viele Probleme im naturwissenschaftlich-technischen Umfeld beschrieben werden.

8.1.2 Stammfunktionen

Im Kontext dieses Kurses werden die Fragestellungen der Integralrechnung für Funktionen auf „zusammenhängenden" Definitionsbereichen betrachtet, wie dies für viele praktische Fragestellungen von besonderer Bedeutung ist. Mathematisch formuliert, werden die Definitionsbereiche der Funktionen Intervalle sein. Dazu passend werden hier Stammfunktionen auf Intervallen definiert, mit denen die Frage nach der „Umkehrung" der Ableitung betrachtet wird.

Stammfunktion 8.1.1

Gegeben ist ein Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Wenn es eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ gibt, deren Ableitung gleich f ist, für die also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, dann heißt F eine **Stammfunktion** von f.

Zunächst sollen einige Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 8.1.2

Die Funktion F mit $F(x) = -\cos(x)$ hat die Ableitung

$$F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x) \; .$$

Somit ist F eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \sin(x)$.

Beispiel 8.1.3

Die Funktion G mit $G(x) = \frac{1}{3}e^{3x+7}$ hat die Ableitung

$$G'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot e^{3x+7} \; .$$

Deshalb ist G eine Stammfunktion von g mit $g(x) = e^{3x+7}$.

Es wird noch ein ganz einfaches Beispiel betrachtet, an dem ein wichtiger Aspekt deutlich wird, wenn eine Stammfunktion gesucht wird.

Beispiel 8.1.4

Es sei H eine konstante Funktion auf einem Intervall mit dem Funktionswert $H(x) = 18$ gegeben. Dann hat H die Ableitung

$$H'(x) = 0 \; .$$

Deshalb ist H eine Stammfunktion von h mit $h(x) = 0$.

Das letzte Beispiel ist wenig überraschend, denn die Ableitung einer konstanten Funktion ist die Nullfunktion. Somit ist *jede* konstante Funktion F eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 0$ auf einem Intervall, das heißt, es ist $F(x)$ gleich irgendeiner Zahl C für jeden x-Wert. Andere Möglichkeiten, als dass es sich um irgendeine *konstante* Funktion handelt, gibt es aber nicht, wenn f auf einem Intervall definiert ist.

Alle Stammfunktionen der Nullfunktion 8.1.5

Es ist F genau dann eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 0$ auf einem Intervall, wenn F eine konstante Funktion ist, das heißt, wenn es eine reelle Zahl C gibt, sodass $F(x) = C$ für alle x-Werte des Intervalls ist.

Wenn die Funktionen F und G dieselbe Ableitung $f = F' = G'$ haben, dann ist $G'(x) - F'(x) = 0$. Bildet man nun auf beiden Seiten der Gleichung die Stammfunktion auf einem Intervall, dann erhält man den Zusammenhang $G(x) - F(x) = C$. Somit ist $G(x) = F(x) + C$. Hat man also mit F eine Stammfunktion von f gefunden, dann ist auch G mit $G(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion von f.

Aussage über Stammfunktionen 8.1.6

Wenn F und G Stammfunktionen von $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall D sind, dann gibt es eine reelle Zahl C, sodass

$$F(x) = G(x) + C \qquad \text{für alle } x \in D$$

gilt. Hierfür schreibt man auch

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ ,$$

um auszudrücken, wie sämtliche Stammfunktionen von f aussehen.

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen wird auch **unbestimmtes Integral** genannt und in der oben eingeführten Form

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

notiert, wobei F irgendeine Stammfunktion von f ist.

Durch die Schreibweise des unbestimmten Integrals wird betont, dass zur gegebenen Funktion f eine Funktion F mit $F' = f$ gesucht wird. Wie damit das (bestimmte) Integral einer stetigen Funktion f berechnet werden kann, beschreibt der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, der im nächsten Abschnitt in 8.2.3 auf Seite 298 erläutert wird.

Und woher kennt man den Wert dieser Konstanten C? Ist nur nach einer Stammfunktion von f mit $f(x) = 0$ auf einem Intervall gefragt, ohne dass weitere Anforderungen bekannt sind, ist C nicht festgelegt. Erst wenn zusätzlich ein Funktionswert $y_0 = F(x_0)$ von F an einer Stelle x_0 vorgegeben wird, ist dann auch C festgelegt.

Beispiel 8.1.7

Beispielsweise ergibt sich für f mit $f(x) = 2x + 5$ dann

$$\int (2x+5)\,dx = x^2 + 5x + C\ .$$

Wenn nun diejenige Stammfunktion F von f gesucht wird, für die $F(0) = 6$ gilt, dann muss $6 = F(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + C = C$ und somit $C = 6$ sein. Damit ist dann $F(x) = x^2 + 5x + 6$.

Notiert man die Beziehung zwischen Ableitung $f = F'$ und Stammfunktionen F in der eben besprochenen umgekehrten Sichtweise für die bisher betrachteten Funktionsklassen, ergibt sich die folgende

Tabelle:

Eine kleine Tabelle von Stammfunktionen 8.1.8

Es werden Funktionen f auf einem Intervall betrachtet, zu denen die Stammfunktionen in der Schreibweise des unbestimmten Integrals angegeben werden:

Funktion f	Stammfunktionen F
$f(x) = 0$	$F(x) = \int 0\,dx = C$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
$f(x) = \sin(kx)$	$F(x) = \int \sin(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
$f(x) = \cos(kx)$	$F(x) = \int \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}\sin(kx) + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = \int e^x\,dx = e^x + C$
$f(x) = e^{kx}$	$F(x) = \int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$
$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$	$F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$ für $x > 0$ oder $x < 0$

Hier bezeichnen k und C beliebige reelle Zahlen mit $k \neq 0$ und n eine ganze Zahl mit $n \neq -1$.

Das nächste Beispiel zeigt, wie die Tabelle gelesen wird.

Beispiel 8.1.9

Zur Funktion f mit $f(x) = 10x^2 - 6 = 10x^2 - 6x^0$ wird das unbestimmte Integral gesucht. Aus der obigen Tabelle können Stammfunktionen zu g mit $g(x) = x$ und h mit $h(x) = x^0 = 1$ abgelesen werden: Es ist G mit $G(x) = \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} = \frac{1}{2} \cdot x^2$ eine Stammfunktion von g und H mit $H(x) = \frac{1}{0+1} \cdot x^{0+1} = x$ eine Stammfunktion von h. Somit ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = 10 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 6 \cdot x = 5x^2 - 6x$$

eine Stammfunktion von f. Damit wird durch

$$\int (10x - 6)\,dx = 5x^2 - 6x + C$$

die Gesamtheit der Stammfunktionen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10x - 6$ beschrieben, wobei C für eine beliebige reelle Zahl steht.

Die Schreibweise mit der Konstanten C drückt aus, dass beispielsweise auch $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(x) := 5x^2 - 6x - 7$ eine Stammfunktion von f ist, wobei $C = -7$ ist, denn es ist $G'(x) = 5 \cdot 2x - 6 = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

In Tabellenwerken wird auf die Angaben der Konstanten oft verzichtet. In einer Rechnung ist es allerdings wichtig, anzugeben, dass es mehrere Funktionen geben kann. Bei der Lösung anwendungsbezogener Aufgaben wird die Konstante C häufig durch die Angabe weiterer Bedingungen wie beispielsweise die Angabe eines Funktionswertes einer Stammfunktion festgelegt.

Ein praktischer Hinweis 8.1.10

Die Überprüfung, ob man eine Stammfunktion einer vorgegebenen Funktion f richtig gebildet hat, ist sehr einfach. Man bestimmt die Ableitung der gefundenen Stammfunktion und vergleicht diese mit der ursprünglich vorgegebenen Funktion f. Stimmen beide überein, dann war die Rechnung richtig. Stimmt das Ergebnis der Probe nicht mit der Funktion f überein, so muss die Stammfunktion noch einmal überprüft werden.

8.1.3 Aufgaben

Aufgabe 8.1.1
Geben Sie eine Stammfunktion an:

a. $\int \left(12x^2 - 4x^7\right) dx \; = \; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist

$$\int \left(12x^2 - 4x^7\right) dx = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot x^8 = 4 \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^8 + C \,.$$

b. $\int (\sin(x) + \cos(x))\, dx \; = \; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist

$$\int (\sin(x) + \cos(x))\, dx = -\cos(x) + \sin(x) + C = \sin(x) - \cos(x) + C \,.$$

c. $\int \frac{1}{6\sqrt{x}}\, dx \; = \; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\frac{1}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Somit ist

$$\int \frac{1}{6\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{6} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x} + C \,.$$

Aufgabe 8.1.2
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a. $\int e^{x+2}\, dx \; = \; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\int e^{x+2}\, dx = \int e^x \cdot e^2\, dx = e^2 \cdot \int e^x\, dx = e^2 \cdot e^x + C = e^x \cdot e^2 + C = e^{x+2} + C$.

b. $\int 3x \cdot \sqrt[4]{x}\, dx \; = \; \boxed{}$.
Lösung:
Es ist $\int 3x \cdot \sqrt[4]{x}\, dx = 3 \cdot \int x \cdot x^{\frac{1}{4}}\, dx = 3 \cdot \int x^{\frac{5}{4}}\, dx = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{9}{4}} + C$.

Aufgabe 8.1.3
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für reelle Funktionen richtig sind.

richtig:	falsch:	Aussage:
☐	☐	F mit $F(x) = -\frac{\cos(\pi x)+2}{\pi}$ ist eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \sin(\pi x) + 2$.
☐	☐	F mit $F(x) = -\frac{\cos(\pi x)+2}{\pi}$ ist eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \sin(\pi x)$.
☐	☐	F mit $F(x) = -7$ ist eine Stammfunktion von f mit $f(x) = -7x$ für $x \in \mathbb{R}$.
☐	☐	F mit $F(x) = (\sin(x))^2$ ist eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
☐	☐	Wenn F eine Stammfunktion von f ist, G eine Stammfunktion von g, dann ist $F+G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

Lösung:

- Die Ableitung von F mit $F(x) = -\frac{\cos(\pi x)+2}{\pi}$ ist $F'(x) = \sin(\pi x) \neq \sin(\pi x) + 2 = f(x)$, sodass F keine Stammfunktion von f ist.
- Die Ableitung von F mit $F(x) = -\frac{\cos(\pi x)+2}{\pi}$ ist $F'(x) = \sin(\pi x) = f(x)$, sodass F eine Stammfunktion von f ist.
- Die Ableitung von F mit $F(x) = -7$ ist $F'(x) = 0 \neq -7x = f(x)$ (für $x \neq 0$). Deshalb ist F keine Stammfunktion von f.
- Die Ableitung von F mit $F(x) = (\sin(x))^2$ ergibt sich mit der Kettenregel zu $F'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = f(x)$. Somit ist F eine Stammfunktion von f.
- Wenn F eine Stammfunktion von f ist, G eine Stammfunktion von g, dann sind F und G differenzierbar, wobei $F' = f$ und $G' = g$ gilt. Somit ist auch $F + G$ differenzierbar, und es gilt $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$. Das heißt, dass $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$ ist.

Aufgabe 8.1.4

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

a. $f(x) := \dfrac{8x^3 - 6x^2}{x^4}$,

b. $g(x) := \dfrac{18x^2}{3\sqrt{x^5}}$,

c. $h(x) := \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{4x}$,

für $x > 0$, nachdem Sie die Funktionsterme als gekürzte Summen von Brüchen geschrieben haben:

a. Mit der Vereinfachung $f(x) =$ ☐
ergibt sich $F(x) =$ ☐ für $x > 0$.

Lösung:
Der Funktionsterm lässt sich zu $f(x) = \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} = \frac{8}{x} - 6x^{-2}$ vereinfachen, was auf

$$F(x) \;=\; 8 \cdot \ln(x) + \frac{6}{x}$$

für $x > 0$ führt (bis auf eine Konstante).

b. Mit der Vereinfachung $g(x) =$ ☐
ergibt sich $G(x) =$ ☐ für $x > 0$.

Lösung:
Der Funktionsterm lässt sich zu $g(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} = 6 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ vereinfachen, was auf

$$G(x) \;=\; 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = 12 \cdot \sqrt{x}$$

für $x > 0$ führt (bis auf eine Konstante).

c. Mit der Vereinfachung $h(x) =$ [ ]
ergibt sich $H(x) =$ [ ] für $x > 0$.

Lösung:
Der Funktionsterm lässt sich zu $h(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ vereinfachen, was auf

$$H(x) \;=\; \frac{1}{4} \cdot x + \sqrt{x}$$

für $x > 0$ führt (bis auf eine Konstante).

Aufgabe 8.1.5
Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$. Weiter sind Funktionen F_1 und F_2 mit $F_1(x) = \ln(7x)$ bzw. $F_2(x) = \ln(x+7)$ für $x > 0$ gegeben. Berechnen Sie die Ableitung von F_1 und von F_2, und beantworten Sie die Frage ob, es sich um Stammfunktionen von f handelt:

Es ist: $F_1'(x) =$ [ ] und $F_2'(x) =$ [ ] .

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

- [ ] F_1 ist eine Stammfunktion von f.
- [ ] F_2 ist eine Stammfunktion von f.

Lösung:
Die Ableitung von F_1 mit $F_1(x) = \ln(7x)$ für $x > 0$ ist $F_1'(x) = \frac{1}{7x} \cdot 7 = \frac{1}{x} = f(x)$. Somit ist F_1 eine Stammfunktion von f.

Die Funktion F_2 mit $F_2(x) = \ln(x+7)$ für $x > 0$ hat die Ableitung $F_2'(x) = \frac{1}{x+7} \cdot 1 = \frac{1}{x+7} \neq \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Deshalb ist F_2 keine Stammfunktion von f.

Aufgabe 8.1.6
Es wird angenommen, dass F eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 1+x^2$ ist und F den Funktionswert $F(0) = 1$ hat. Dann ist $F(3) =$ [ ] .
Lösung:
Nach Voraussetzung ist F eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 1 + x^2$. Somit gilt $F'(x) = f(x) = 1 + x^2 = x^0 + x^2$, woraus

$$F(x) = \frac{1}{0+1} \cdot x^{0+1} + \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} + C = x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$

für eine Zahl C folgt. Außerdem soll $F(0) = 1$ gelten, sodass $1 = F(0) = 0 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 + C = C$ ist. Damit erhält man $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + x + 1$. Einsetzen von $x = 3$ ergibt den gesuchten Wert $F(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 + 1 = 13$.

8.2 Bestimmtes Integral

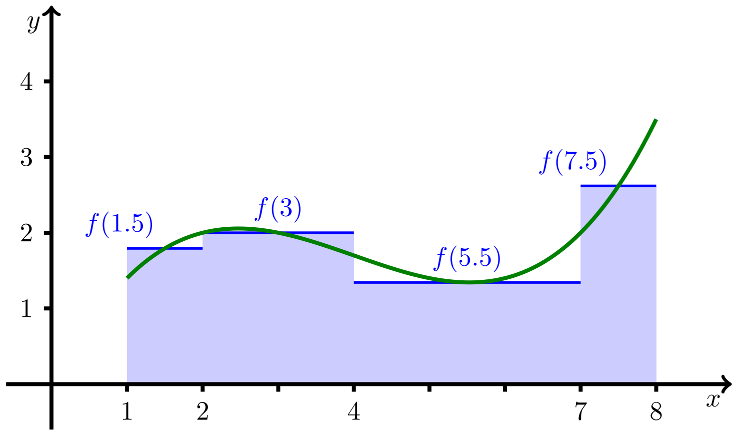
8.2.1 Einführung

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion f beschreibt, wie sich die Funktionswerte „in der Nähe" der Stelle x_0 ändern: Wenn beispielsweise die Ableitung positiv ist, dann ist f monoton wachsend. Geometrisch betrachtet drückt sich dies durch eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 mit positiver Steigung aus. Die Ableitung bietet eine lokale Sichtweise auf die Funktion an jeder Stelle x_0. Dadurch gewinnt man sehr viele Detailinformationen.

Umgekehrt erhält man eine „globale Kenngröße", wenn man eine „Bilanz" erstellt, indem man die Funktionswerte gewichtet aufsummiert. In der Mathematik spricht man vom Integral oder Integralwert der Funktion. Geometrisch betrachtet, führt diese Idee auf eine Möglichkeit, den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion zu berechnen. Präzisiert wurde dieses Vorgehen von Bernhard Riemann, nach dem dieses Integral auch **Riemann-Integral** genannt wird.

8.2.2 Integral

Das Integral einer Funktion f mit $f(x) \geq 0$ kann als „Fläche unter der Kurve" interpretiert werden. In dem nach Riemann benannten Integral wird der Funktionsverlauf durch eine Treppenfunktion angenähert, und deren Funktionswerte werden, gewichtet mit der jeweiligen Intervalllänge bzw. „Breite einer Treppenstufe", aufsummiert. Dies ist in der unten gezeigten Abbildung beispielhaft dargestellt.



Zur Definition des Integrals: Funktion angenähert durch eine Treppenfunktion, unterteilt in vier Teilintervalle.

Man erkennt, dass die Fläche unter der Kurve zunächst durch Rechtecke angenähert wird, deren eine (horizontale) Seitenlänge durch ein Intervall auf der x-Achse bestimmt wird, während die Länge der zweiten (vertikalen) Seite durch einen Funktionswert $f(z_k)$ an der Stelle z_k innerhalb des dazu gehörenden x-Intervalls beschrieben wird. Man bestimmt nun die Flächen dieser Rechtecke und summiert diese Teilflächen auf. Je kleiner die Intervalle auf der x-Achse werden, umso mehr nähert sich die so berechnete Summe dem „wahren" Wert der Fläche unter der Kurve, also dem Integral der Funktion, an.

Formal heißt das, dass man eine Summe S_n der Form

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \cdot \Delta(x_k) \qquad \text{mit } \Delta(x_k) = x_{k+1} - x_k$$

bestimmt. Im betrachteten Beispiel wird das Intervall $[0;8]$ in vier Teile eingeteilt. Dabei sind $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 7$. Wendet man darauf diese Summenformel an, so erhält man

$$\begin{aligned} S_4 &= f(z_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(z_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(z_2) \cdot (x_3 - x_2) + f(z_3) \cdot (x_4 - x_3) \\ &= f(z_0) \cdot (2-1) + f(z_1) \cdot (4-2) + f(z_2) \cdot (7-4) + f(z_3) \cdot (8-7) \\ &= f(z_0) \cdot 1 + f(z_1) \cdot 2 + f(z_2) \cdot 3 + f(z_3) \cdot 1 \; . \end{aligned}$$

Offensichtlich genügt es nicht, nur einige wenige Teilintervalle zu betrachten. Im Allgemeinen wird man die maximale Länge der Teilintervalle $x_{k+1} - x_k$ immer kleiner wählen müssen und damit für immer mehr Teilintervalle die Summanden $f(z_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$ berechnen und addieren, um einen möglichst genauen Wert der Fläche zu berechnen. Deshalb betrachtet man den Grenzwert, dass die maximale Intervalllänge der Teilintervalle gegen Null geht.

Prinzipiell kann obiges Vorgehen auch auf Funktionen mit negativen Funktionswerten angewandt werden. Wie man dann den Flächeninhalt berechnet, wird im Abschnitt 8.3 auf Seite 310 erläutert. In jedem Fall sind einige Aspekte in der Definition des Integrals zu beachten, die über den Rahmen dieses Kurses hinausgehen. Deshalb wird für die Details zu den Voraussetzungen in der nachfolgenden Definition auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Integral 8.2.1

Gegeben ist eine Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall $[a;b]$. Zu „feiner werdenden“ Unterteilungen des Intervalls, sodass $x_{k+1} - x_k$ gegen 0 geht, nennt man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \text{mit } x_k \leq z_k \leq x_{k+1} \qquad (8.2.1)$$

das **bestimmte Integral** von f mit der Untergrenze a und der Obergrenze b (wenn der Grenzwert existiert und unabhängig von der jeweiligen Unterteilung ist), und die Funktion f heißt dann **integrierbar**. Die Funktion f wird in diesem Kontext auch **Integrand** genannt.

Prinzipiell kann es vorkommen, dass auf diese Weise gar kein bestimmter Wert berechnet werden kann, das Integral also nicht exisitert. Weiterführende Überlegungen zeigen, dass jedenfalls für jede stetige Funktion das Integral existiert. Als Beispiel wird das Integral von $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ berechnet, wobei die Berechnung des Grenzwertes im Vordergrund steht.

Beispiel 8.2.2

Es soll das Integral von $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ berechnet werden. Dazu teilt man das Intervall $[0; 1]$ am einfachsten in gleich breite Teilintervalle $[x_k; x_{k+1}]$ mit $x_0 := 0$ und $x_k := x_{k-1} + \frac{1}{n}$ ein. Die Intervalllänge ist also $\Delta(x_k) = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$.

Untersucht man die Intervalllänge auf ihr Verhalten für n gegen unendlich, dann sieht man, dass $\Delta(x_k)$ immer kleiner wird und gegen Null strebt. Die Voraussetzung für die Berechnung eines bestimmten Integrals ist also gegeben.

Für die Werte x_k findet man unter Zuhilfenahme der Intervalllänge außerdem $x_k = \frac{k}{n}$. Wählt man $z_k = x_k$ für die Zwischenstellen, ergibt sich $f(z_k) = f(x_k) = x_k = \frac{k}{n}$.

Setzt man diese Ergebnisse in die Summenformel ein, dann erhält man unter der Verwendung der Formel $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$, die nach C. F. Gauß auch als „kleiner Gauß“ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) . \end{aligned}$$

Und mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ergibt sich für das Integral

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} .$$

Zur großen Klasse integrierbarer Funktionen gehören alle Polynome, gebrochenrationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen und Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie deren Verknüpfungen.

Um Rechnungen möglichst unkompliziert durchführen zu können, sind möglichst einfache Regeln zur Integration von Funktionen nötig. Ein wichtiges Ergebnis liefert der sogenannte **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**. Er beschreibt einen Zusammenhang zwischen den Stammfunktionen einer stetigen Funktion und deren Integral.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 8.2.3

Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall $[a; b]$. Dann besitzt f eine Stammfunktion, und für jede Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(b) - F(a) .$$

Als einfaches Beispiel wird das bestimmte Integral der Funktion f mit $f(x) = x^2$ zwischen $a = 1$ und $b = 2$ berechnet. Mit den Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann man diese Aufgabe sehr leicht lösen.

Beispiel 8.2.4

Die Funktion $f : [1; 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ hat nach der Tabelle aus dem ersten Abschnitt eine Stammfunktion F mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ für eine reelle Zahl C. Mit dem Hauptsatz ergibt sich

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}\,2^3 + C\right) - \left(\frac{1}{3}\,1^3 + C\right) = \frac{7}{3}\,.$$

Wie man sieht, fällt die Konstante nach dem Einsetzen der Grenzen weg, sodass man sie in der Praxis bei der Berechnung von bestimmten Integralen bereits bei der Bildung der Stammfunktion „unterschlagen“ kann. Das heißt, man kann für die Berechnung des bestimmten Integrals $C = 0$ wählen.

Die Gleichung im Hauptsatz gilt auch für jeden Zwischenwert $z \in [a; b]$, sodass man gemäß

$$F(z) - F(a) = \int_a^z f(x)\,dx$$

damit alle Funktionswerte $F(z)$ berechnen kann, wenn die Ableitung $F' = f$ und ein Funktionswert, beispielsweise $F(a)$, bekannt sind. Hierfür sagt man auch, dass F aus der Ableitung $F' = f$ rekonstruiert wird.

Anwendungsbeispiele zur Rekonstruktion einer Funktion F aus ihrer Ableitung $F' = f$ werden am Ende des Abschnitts 8.3 auf Seite 310 vorgestellt.

8.2.3 Rechenregeln

Zerlegung des Integrationsintervalls eines Integrals 8.2.5

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt für jede Zahl z zwischen a und b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \int_z^b f(x)\,dx\,.$$

Mit der Festlegung

$$\int_d^c f(x)\,dx := -\int_c^d f(x)\,dx$$

gilt die obige Regel für alle reellen Zahlen z, für die die beiden rechts stehenden Integrale existieren, auch wenn z nicht zwischen a und b liegt. Bevor obige Rechenregel an einem Beispiel erläutert wird, wird die genannte Festlegung noch ausführlich notiert.

Vertauschung der Grenzen eines Integrals 8.2.6

Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann wird das Integral der Funktion f von b bis a gemäß

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

berechnet.

Die oben beschriebene Rechenregel ist praktisch, um Funktionen mit Beträgen oder andere abschnittsweise definierte Funktionen zu integrieren.

Beispiel 8.2.7

Das Integral der Funktion $f : [-4;6] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist

$$\begin{aligned} \int_{-4}^6 |x|\,dx &= \int_{-4}^0 (-x)\,dx + \int_0^6 x\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 \\ &= (0-(-8)) + (18-0) \\ &= 26\ . \end{aligned}$$

Die Integration über die Summe zweier Funktionen kann ebenfalls in zwei Integrale zerlegt werden:

Summen- und Faktorregel 8.2.8

Seien f und g auf $[a;b]$ integrierbare Funktionen und r eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\ . \qquad (8.2.2)$$

Für Vielfache einer Funktion gilt

$$\int_a^b r\cdot f(x)\,dx = r\cdot\int_a^b f(x)\,dx\ . \qquad (8.2.3)$$

Weiterführende Inhalte:
Auch für die Berechnung eines Produktes zweier Funktionen gibt es eine Rechenregel. Sie ergibt sich aus der Produktregel der Ableitung.

Partielle Integration 8.2.9

Seien u und v auf $[a;b]$ differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungen u' beziehungsweise v'. Für das Integral der Funktion $u \cdot v'$ gilt dann

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx \ ,$$

wobei u' die Ableitung von u ist und v eine Stammfunktion von v' ist. Diese Rechenregel wird **partielle Integration** genannt.

Auch zu dieser Regel wird ein Beispiel betrachtet:

Beispiel 8.2.10

Es wird das Integral

$$\int_0^\pi x \sin(x)\, dx$$

mit Hilfe der partiellen Integration berechnet. Dazu werden die Funktionen u und v' mit

$$u(x) = x \quad \text{und} \quad v'(x) = \sin(x)$$

gewählt. Damit erhält man

$$u'(x) = 1 \quad \text{und} \quad v(x) = -\cos x \ .$$

So kann man das gesuchte Integral mit partieller Integration berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x\, dx &= [x \cdot (-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= \pi \cdot (-\cos(\pi)) - 0 + \int_0^\pi \cos(x)\, dx \\ &= \pi \cdot (-(-1)) + [\sin(x)]_0^\pi = \pi \ . \end{aligned}$$

Die Zuordnung der Funktionen u und v' muss zielführend erfolgen. Dies wird am obigen Beispiel deutlich, wenn die Rollen von u und v' vertauscht werden. Die Leserin bzw. der Leser mag probieren, dieses Beispiel zu lösen, indem u und v' anders herum gewählt werden!

Anhand der folgenden beiden Übungsaufgaben kann man die Regel zur partiellen Integration selbst anwenden lernen.

Aufgabe 8.2.1

Es soll das Integral $I = \int_1^4 x \cdot e^x \, dx$ berechnet werden: $I =$ ☐ .

Lösung:

Der Integrand f mit $f(x) = x \cdot e^x$ ist ein Produkt einer Polynomfunktion u mit $u(x) = x$ und einer Exponentialfunktion. Die Ableitung von u ist $u'(x) = 1$, also eine konstante Funktion. Außerdem ist zur Exponentialfunktion eine Stammfunktion bekannt: Zu v' mit $v'(x) = e^x$ ist v mit $v(x) = e^x$ eine Stammfunktion. Damit erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_1^4 x \cdot e^x \, dx &= [x \cdot e^x]_1^4 - \int_1^4 1 \cdot e^x \, dx \\
&= [x \cdot e^x]_1^4 - [e^x]_1^4 \\
&= [x \cdot e^x - e^x]_1^4 \\
&= [(x-1) \cdot e^x]_1^4 \\
&= 3e^4 \, .
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.2.2

Es soll das Integral $I = \int_1^8 x \cdot \ln(x) \, dx$ berechnet werden: $I =$ ☐ .

Lösung:

Der Integrand f mit $f(x) = x \cdot \ln(x) = \ln(x) \cdot x$ für $1 \leq x \leq 8$ ist ein Produkt einer Polynomfunktion und einer Logarithmusfunktion. Die Ableitung der Logarithmusfunktion u mit $u(x) = \ln(x)$ ergibt $u'(x) = \frac{1}{x}$. Somit ist u' eine „einfache“ rationale Funktion. Weiter ist zur Polynomfunktion v' mit $v'(x) = x$ eine Stammfunktion bekannt, nämlich v mit $v(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$.

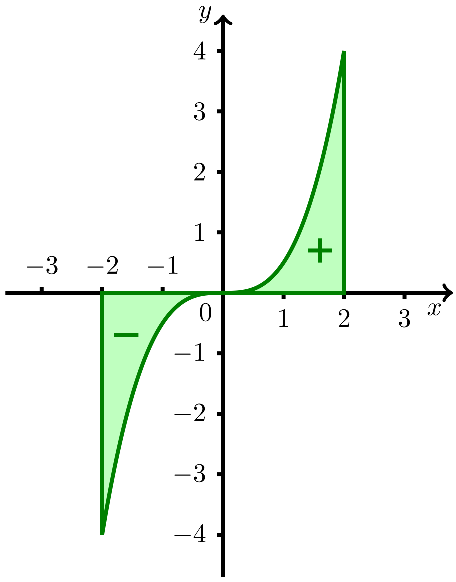
Das Produkt $u' \cdot v$ mit $u'(x) \cdot v(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x$ für $1 \leq x \leq 8$ ist eine stetige Funktion, zu der ebenfalls eine Stammfunktion bekannt ist. Damit kann das gesuchte Integral mittels partieller Integration gemäß

$$\begin{aligned}
\int_1^8 x \cdot \ln(x) \, dx = \int_1^8 \ln(x) \cdot x \, dx &= \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_1^8 - \int_1^8 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx \\
&= \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_1^8 - \int_1^8 \frac{1}{2}x \, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right]_1^8 \\
&= (32\ln(8) - 16) - \left(1 \cdot \ln(1) - \frac{1}{4}\right) \\
&= 96\ln(2) - 16 + \frac{1}{4} \, .
\end{aligned}$$

berechnet werden, wobei $\ln(8) = \ln(2^3) = 3 \cdot \ln(2)$ und $\ln(1) = 0$ verwendet wurde.

8.2.4 Eigenschaften des Integrals

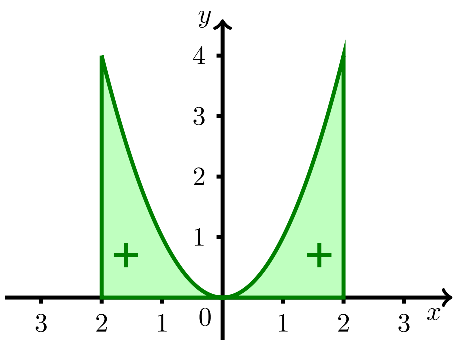
Für ungerade Funktionen $f : [-c; c] \to \mathbb{R}$ ist das Integral Null. Dies soll am Beispiel der Funktion f auf $[-2; 2]$ mit $f(x) = x^3$ erläutert werden:



Man teilt den Graphen von f in zwei Teile zwischen -2 und 0 bzw. 0 und 2 ein und untersucht die Teilflächen, die der Graph in beiden Bereichen mit der x-Achse einschließt. Man kann die beiden Teilflächen durch eine Punktspiegelung ineinander überführen. Beide Teilflächen sind gleich groß. Bildet man jeweils die Riemann-Summen, dann stellt man fest, dass Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, im Integral einen negativen Wert annehmen. Wenn man also die beiden hier abgebildeten Teilflächen addiert, um das Integral über den gesamten Bereich von -2 bis 2 zu berechnen, erhält die Fläche über der positiven x-Achse einen positiven Wert, während die Fläche unterhalb der negativen x-Achse gleich groß ist, aber einen negativen Wert annimmt. Die Summe der beiden Teilflächen ist also Null. Für ungerade Funktionen f gilt die Regel:

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0\ .$$

Im Fall einer geraden Funktion $g : [-c; c] \to \mathbb{R}$ ist der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse.



Die Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse ist hier symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Teilfläche links davon ist also das Spiegelbild der rechts liegenden Fläche. Beide zusammen ergeben die Gesamtfläche

$$\int_{-c}^{c} g(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{c} g(x)\,dx \;.$$

Diese Regel für das Integral gilt für jede integrierbare Funktion g, die gerade ist, auch wenn es negative Funktionswerte gibt. Aufgrund der Rechenregel genügt es dann, das Integral für nichtnegative x-Werte mit der Untergrenze 0 und der Obergrenze c zu berechnen.

In sehr vielen Situationen wird die Berechnung eines Integrals einfacher, wenn man den Integranden vor der Integration in eine bekannte Form bringt. Beispiele zu möglichen Umformungen sollen im Folgenden betrachtet werden. Im ersten Beispiel werden Potenzfunktionen untersucht.

Beispiel 8.2.11

Es soll das Integral

$$\int_{1}^{4} (x-2)\cdot\sqrt{x}\,dx$$

berechnet werden. Um die Rechnung zu vereinfachen, formt man den Integranden um:

$$(x-2)\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \;.$$

Damit kann man das Integral einfacher lösen:

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{4} (x-2)\cdot\sqrt{x}\,dx &= \int_{1}^{4} \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} \\
&= \left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{4}\right)^{5} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{4}\right)^{3}\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 1\right) \\
&= \left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{62}{5} - \frac{28}{3} \\
&= 3 + \frac{1}{15} \;.
\end{aligned}$$

Im nächsten Beispiel wird die Umformung eines Integranden mit Exponentialfunktionen durchgeführt.

Beispiel 8.2.12

Es wird das Integral

$$\int_{-2}^{3} \frac{8e^{3+x} - 12e^{2x}}{2e^{x}}\,dx$$

berechnet. Mit den Rechenregeln für die Exponentialfunktion erhält man

$$\frac{8e^{3+x} - 12e^{2x}}{2e^x} = \frac{8e^{3+x}}{2e^x} - \frac{12e^{2x}}{2e^x} = 4e^{3+x-x} - 6e^{2x-x} = 4e^3 - 6e^x \ ,$$

sodass das Integral schließlich auf sehr einfache Art und Weise gelöst werden kann:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} \frac{8e^{3+x} - 12e^{2x}}{2e^x}\, dx = \int_{-2}^{3} \left(4e^3 - 6e^x\right) dx &= \left[4e^3 \cdot x - 6e^x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left(4e^3 \cdot 3 - 6e^3\right) - \left(4e^3 \cdot (-2) - 6e^{-2}\right) \\
&= 14e^3 + \frac{6}{e^2} \ .
\end{aligned}$$

Ist bei einer rationalen Funktion der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms, dann führt man zunächst eine Polynomdivision (siehe Modul 6 auf Seite 185) durch. Je nach Situation können sich auch noch weitere Umformungen (z.B. Partialbruchzerlegung) anbieten, die man in der weiterführenden Literatur und Formelsammlungen finden kann. Im folgenden Beispiel wird eine Polynomdivision durchgeführt, um eine rationale Funktion zu integrieren.

Beispiel 8.2.13

Es wird das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{4x^2 - x + 4}{x^2 + 1}\, dx$$

berechnet. Dazu formt man zunächst den Integranden mittels Polynomdivision

$$4x^2 - x + 4 = (x^2 + 1) \cdot 4 - x$$

zu

$$\frac{4x^2 - x + 4}{x^2 + 1} = 4 - \frac{x}{x^2 + 1}$$

um. Damit ist dann

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{4x^2 - x + 4}{x^2 + 1}\, dx &= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4\, dx - \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = [4x]_{-1}^{1} - 0 = 8 \ .
\end{aligned}$$

Denn der Integrand des zweiten Integrals ist eine ungerade Funktion und im Integrationsintervall $[-1; 1]$ punktsymmetrisch, sodass der Wert des zweiten Integrals Null ist.

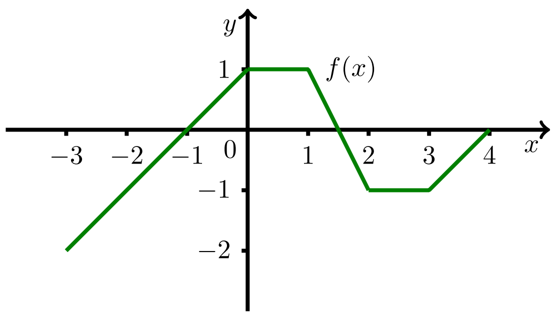
Hier wurde eine besondere Situation gewählt, um einen ersten Eindruck zur Integration rationaler Funktionen zu vermitteln. In weiterführenden mathematischen Vorlesungen oder in der Literatur wird dies allgemein beschrieben.

8.2.5 Aufgaben

In der ersten Aufgabe wird die Idee zur Definition des Integrals aufgegriffen, mittels geeigneter Zerlegungen den Integralwert zu berechnen, wobei in der Aufgabe neben Rechtecken allgemeiner beispielsweise auch Dreiecksflächen verwendet werden.

Aufgabe 8.2.3

Berechnen Sie zu $f : [-3; 4] \to \mathbb{R}$ mit dem unten dargestellten Graphen das Integral $\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$ mit Methoden aus der elementaren Geometrie, indem Sie die entsprechende Fläche „unter dem Graphen der Funktion" in elementare geometrische Flächen wie Dreiecke oder Rechtecke zerlegen, die entweder oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen. Die einzelnen Flächeninhalte können Sie in dieser Situation dann mit Formeln für Dreiecke oder Rechtecke berechnen.



Der Integralwert ergibt sich dann als Summe der Teilflächen, die oberhalb der x-Achse liegen, abzüglich der Summe der Teilflächen, die unterhalb der x-Achse liegen. In diesem Sinne kann man den Integralwert als die Summe vorzeichenbehafteter Flächenwerte verstehen.

Der Integralwert von $\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$ ist $\boxed{}$.

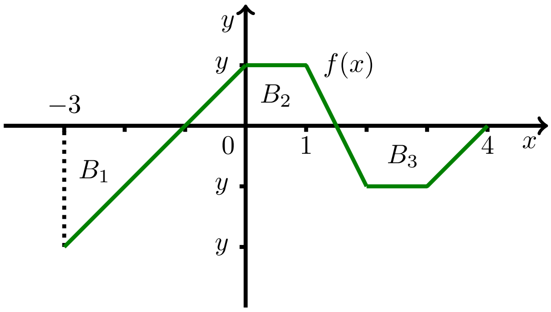
Lösung:

Die Fläche wird mit Geraden durch $x_0 = -3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{3}{2}$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$ und $x_7 = 4$ in Teilflächen zerlegt, die jeweils durch den Graphen von f, die x-Achse und durch die Geraden x_{k-1} und x_k für $1 \leq k \leq 7$ begrenzt werden.

Es werden die zugehörigen vorzeichenbehafteten Flächeninhalte aufsummiert, sodass sich der Integralwert ergibt:

$$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = -\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} - 1 \cdot 1 - \frac{1 \cdot 1}{2} = -2\,.$$

Die Fläche kann auch in andere Teilflächen zerlegt werden. Wird die Fläche beispielsweise durch $z_0 = -3$, $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{3}{2}$ und $z_3 = 4$ in drei Teilflächen zerlegt, hat die Teilfläche B_2 zwischen z_1 und z_2 denselben Flächeninhalt wie die Teilfläche B_3 zwischen z_2 und z_3, jedoch erhalten die Werte verschiedenes Vorzeichen, da B_2 oberhalb der x-Achse liegt und B_3 unterhalb.



Somit ist der Integralwert gleich dem negativen Flächeninhalt der Fläche B_1 zwischen z_0 und z_1, die unterhalb der x-Achse liegt.

Aufgabe 8.2.4
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a. $\int_0^5 3\,dx \;=\; \boxed{}$,

b. $\int_0^5 -4\,dx \;=\; \boxed{}$,

c. $\int_0^4 2x\,dx \;=\; \boxed{}$,

d. $\int_0^4 (4-x)\,dx \;=\; \boxed{}$.

Lösung:
Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man

1. $\int_0^5 3\,dx = [3x]_0^5 = 15$,

2. $\int_0^5 -4\,dx = [-4x]_0^5 = -20$,

3. $\int_0^4 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^4 = 16$,

4. $\int_0^4 (4-x)\,dx = \left[4x - \frac{1}{2}\cdot x^2\right]_0^4 = 8$.

Aufgabe 8.2.5
Der Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} \big(5x^3 - 4\sin(x)\big)\,dx$ ist $\boxed{}$.

Lösung:
Der Integrand ist ungerade und das Integrationsintervall ist symmetrisch bezüglich 0, sodass das Integral den Wert 0 hat. Oder es wird das Integral mit dem Hauptsatz berechnet:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(5x^3 - 4\sin(x)\big)\,dx = \left[\frac{5}{4}\cdot x^4 + 4\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \left[\frac{5}{4}\cdot x^4 + 4\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \,.$$

Aufgabe 8.2.6
Berechnen Sie eine reelle Zahl z so, dass der Integralwert

$$\int_0^2 \left(x^2 + z \cdot x + 1\right) dx$$

den Wert 0 ergibt: Der Wert für z ist z = [ ] .

Lösung:
Nimmt man z als unbekannte Konstante, so ist

$$\int_0^2 \left(x^2 + z \cdot x + 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}zx^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2z + 2 .$$

Also ist $z = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$ der gesuchte Wert.

Aufgabe 8.2.7
Berechnen Sie die Integrale:

a. $\int_{-3}^{2} \left(1 + 6x^2 - 4x\right) dx$ = [ ] ,

b. $\int_{1}^{9} \frac{5}{\sqrt{4x}}\, dx$ = [ ] .

Lösung:
Der Integrand f mit $f(x) = 1 + 6x^2 - 4x = 6x^2 - 4x + 1$ ist ein Polynom, sodass F mit $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x$ eine Stammfunktion ist. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_0^1 \left(1 + 6x^2 - 4x\right) dx = \left[2x^3 - 2x^2 + x\right]_{-3}^{2} = 2(8-4) + 2 - (2(-27-9) - 3) = 85 .$$

Beim zweiten Aufgabenteil ist der Integrand $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x}} = \frac{5}{2}x^{-1/2}$ ein Produkt einer Wurzelfunktion mit einem konstanten Faktor. Damit ist F mit $F(x) = 5x^{1/2} = 5\sqrt{x}$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_1^9 \frac{5}{\sqrt{4x}}\, dx = \left[5\sqrt{x}\right]_1^9 = 5(3-1) = 10 .$$

Aufgabe 8.2.8
Der Wert des Integrals $\int_{-24}^{-6} \frac{1}{2x}\, dx$ ist [ ] .

Lösung:
Zum Integranden f mit $f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ für $x < 0$ ist F mit $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x|$ eine Stammfunktion. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_{-24}^{-6} \frac{1}{2x}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right]_{-24}^{-6} = \frac{1}{2}\left(\ln|-6| - \ln|-24|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{24}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2^{-2}\right) = -\ln(2) .$$

Aufgabe 8.2.9
Berechnen Sie die Integrale

a. $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\,dx \;=$ $\boxed{}$,

b. $\displaystyle\int_{-3}^0 (1-2x)\,dx \;=$ $\boxed{}$.

Lösung:
Der Integrand f mit $f(x) = 2x-1$ ist eine Polynomfunktion. Damit ist F mit $F(x) = x^2 - x$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_0^3 (2x-1)\,dx = \left[x^2 - x\right]_0^3 = 9 - 3 - 0 = 6\,.$$

Im zweiten Aufgabenteil ist der Integrand f mit $f(x) = 1-2x$ ebenfalls eine Polynomfunktion. Damit ist F mit $F(x) = x - x^2$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_{-3}^0 (1-2x)\,dx = \left[x - x^2\right]_{-3}^0 = 0 - (-3-9) = 12\,.$$

Aufgabe 8.2.10
Berechnen Sie das Integral

$\displaystyle\int_\pi^{3\pi} \left(\frac{3\pi}{x^2} - 4\sin(x)\right) dx \;=$ $\boxed{}$.

Lösung:
Zum Integranden f mit $f(x) = \frac{3\pi}{x^2} - 4\sin(x)$ ist F mit $F(x) = -\frac{3\pi}{x} + 4\cos(x)$ eine Stammfunktion. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_\pi^{3\pi} \left(\frac{3\pi}{x^2} - 4\sin(x)\right) dx = \left[-\frac{3\pi}{x} + 4\cos(x)\right]_\pi^{3\pi} = (-1-4) - (-3-4) = 2\,.$$

Anmerkung: Die periodischen Funktionen sin und cos mit Periode 2π haben die Eigenschaft, dass das Integral über eine Periode gleich Null ist. Für andere periodische Funktionen wie zum Beispiel f mit $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$ können sich für das Integral auch Werte ungleich Null ergeben, wenn das Integrationsintervall eine Periode der Funktion umfasst.

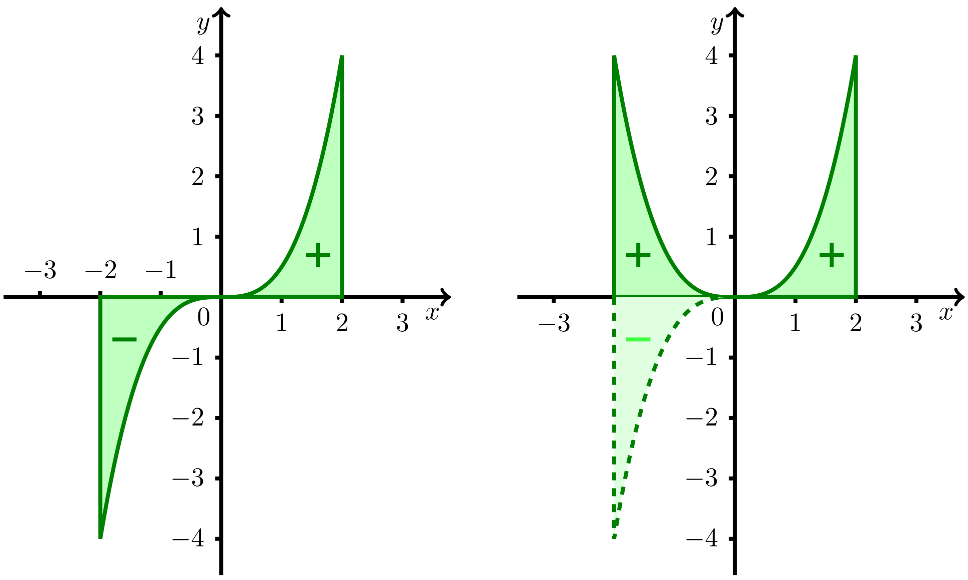
8.3 Anwendungen

8.3.1 Einführung

Die Integralrechnung findet sehr viele Anwendungen, insbesondere in naturwissenschaftlich-technischen Bereichen. Beispielhaft soll hier zunächst die Berechnung von Flächen erörtert werden, deren Ränder durch mathematische Funktionen beschrieben werden können. Auch dies ist keine rein mathematische Anwendung, sondern findet Einsatzmöglichkeiten bei der Bestimmung von Schwerpunkten, von Rotationseigenschaften starrer Körper oder den Biegeeigenschaften von Balken oder Stahlträgern. Zum Abschluss werden einige weitere physikalisch-technische Anwendungen betrachtet.

8.3.2 Flächenberechnung

Eine erste Anwendung der Integrationsrechnung ist die Berechnung von **Flächeninhalten**, deren Ränder von mathematischen Funktionen beschrieben werden können. Zur Veranschaulichung ist in der folgenden Abbildung (linkes Bild) die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ auf dem Intervall $[-2; 2]$ dargestellt. Das Ziel ist die Berechnung des Flächeninhalts, der vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird. Die bisherigen Untersuchungen ergeben, dass das Integral über diese ungerade Funktion in den Grenzen von -2 bis 2 genau Null ergeben wird, da die linke und rechte Teilfläche gleich groß sind, aber bei der Integration unterschiedliche Vorzeichen erhalten. Das Integral entspricht hier also nicht dem Wert des Flächeninhalts. Spiegelt man jedoch die „negative" Fläche an der x-Achse, gibt man der Funktion also ein positives Vorzeichen (rechtes Bild), dann kann man den Flächeninhalt richtig bestimmen. Mathematisch bedeutet das, dass man nicht das Integral der Funktion f berechnet, sondern das Integral des Betrags $|f|$.



Durch die Bildung des Betrags der Funktion benötigt man eine Aufteilung des Integrals in die Bereiche mit positivem und negativem Vorzeichen. Für die Berechnung heißt dies, dass man das Integrationsintervall in Abschnitte zu unterteilt, in denen die Funktionswerte dasselbe Vorzeichen haben. Für stetige Funktionen ergeben sich diese durch die Nullstellen der Funktion.

Flächenberechnung 8.3.1

Gegeben ist eine stetige Funktionen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a; b]$. Weiter seien x_1 bis x_m die Nullstellen von f mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Es werden $x_0 := a$ und $x_{m+1} := b$ gesetzt.

Dann ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse gleich

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \sum_{k=0}^{m} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx \right| .$$

Dies soll für das oben dargestellte Beispiel etwas genauer erörtert werden.

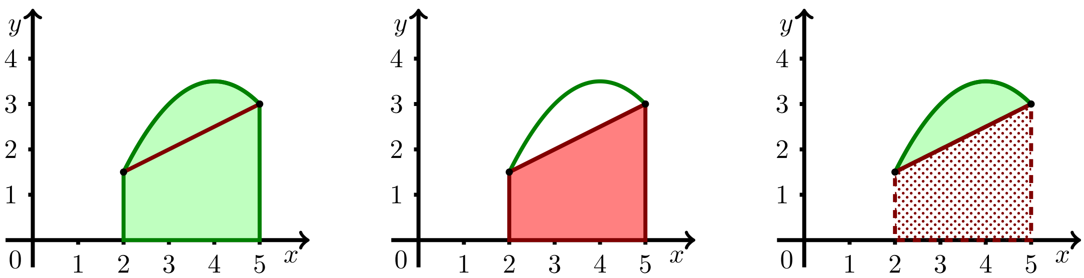
Beispiel 8.3.2

Zu berechnen ist der Flächeninhalt I_A der Fläche, den die stetige Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $[-2; 2]$ mit der x-Ache einschließt. Die einzige Nullstelle der gegebenen Funktion befindet sich bei $x_0 = 0$. Man teilt den Integrationsbereich also in die beiden Teilintervalle $[-2; 0]$ und $[0; 2]$ auf und berechnet mit

$$\begin{aligned} I_A = \int_{-2}^{2} \left| \frac{1}{2}x^3 \right| dx &= \left| \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^3\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^3\, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{8}x^4 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{8}x^4 \right]_{0}^{2} \right| \\ &= |0-2| + |2-0| \\ &= 4 \end{aligned}$$

den Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse zu $I_A = 4$.

Man kann nicht nur Flächeninhalte zwischen einer Kurve und der x-Achse bestimmen, sondern auch den Inhalt einer Fläche, die von zwei Kurven eingeschlossen wird, wie in der folgenden Abbildung veranschaulicht wird. Dort zeigt das rechte Bild die gesuchte Fläche, deren Flächeninhalt als die Differenz der Flächeninhalte aus dem linken und dem mittleren Bild berechnet wird.



Dieses Prinzip soll ebenfalls zuerst formal vorgestellt und danach an einem Beispiel erläutert werden.

Flächenberechnung zwischen den Graphen zweier Funktionen 8.3.3

Gegeben sind zwei stetige Funktionen $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a; b]$. Weiter seien x_1 bis x_m die Nullstellen von $f - g$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Es werden $x_0 := a$ und $x_{m+1} := b$ gesetzt.

Dann kann der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und dem von g durch

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \sum_{k=0}^{m} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

berechnet werden.

Dazu soll nun ein Beispiel betrachtet werden.

Beispiel 8.3.4

Berechnet werden soll der Inhalt I_A der Fläche zwischen den Graphen von f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = 8 - \frac{1}{4}x^4$ für $x \in [-2; 2]$. Zunächst untersucht man die Differenz $f - g$ der Funktionen auf ihre Nullstellen. Mit

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8 \\ &= \frac{1}{4}\left(x^4 + 4x^2 - 32\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^4 + 4x^2 + 2^2 - 2^2 - 32\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(x^2 + 2\right)^2 - 36\right) \end{aligned}$$

kann man die reellen Nullstellen von $f - g$ berechnen:

$$\begin{aligned} & \left(x^2 + 2\right)^2 - 36 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x^2 + 2\right)^2 = 36 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2 = 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm 2 \end{aligned}$$

oder mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x^2 + 2\right)^2 - 36 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 6^2 \\ &= \left(x^2 + 2 - 6\right) \cdot \left(x^2 + 2 + 6\right) = \left(x^2 - 4\right) \cdot \left(x^2 + 2 + 6\right) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot \left(x^2 + 8\right) . \end{aligned}$$

In der ersten Rechnung wurde nach dem Ziehen der ersten Wurzel auf eine nähere Betrachtung des Falls $x^2 + 2 = -6$ verzichtet, da man aus der daraus folgenden Gleichung $x^2 = -8$ keine reellen

Nullstellen erhält. Die reellen Nullstellen von $f-g$ sind -2 und 2. Dies sind gleichzeitig auch die Randstellen des Intervalls $[-2;2]$. Eine Aufteilung des Integrals in verschiedene Bereiche ist also nicht nötig. Die Werte von f sind kleiner als die von g auf diesem Intervall. Damit erhält man den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
I_A &= \int_{-2}^{2} |f(x)-g(x)|\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} (g(x)-f(x))\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 8\right) dx \\
&= 2\int_{0}^{2} \left(-\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 8\right) dx\,, \qquad \text{da der Integrand gerade ist} \\
&= \left[-\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 8x\right]_0^2 \\
&= 2\cdot\left(-\frac{32}{20} - \frac{8}{3} + 16\right) \\
&= \frac{352}{15}\,.
\end{aligned}$$

8.3.3 Naturwissenschaftliche Anwendungen

Die Geschwindigkeit v beschreibt die momentane Änderungsrate des Ortes zur Zeit t. Es gilt also $v = \frac{ds}{dt}$, wenn man $v = v(t)$ und $s = s(t)$ als Funktionen der Zeit auffasst. Der aktuelle Aufenthaltsort $s(T)$ ergibt sich durch die Umkehrung der Ableitung, also durch die Integration der Geschwindigkeit über die Zeit. Mit dem Anfangswert $s(t=0) = s_0$ zur Zeit $t=0$ erhält man damit

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{ds}{dt}\,dt &= \int_0^T v\,dt \\
\Leftrightarrow \quad [s(t)]_0^T &= \int_0^T v\,dt \\
\Leftrightarrow \quad s(T)-s(0) &= \int_0^T v\,dt \\
\Leftrightarrow \quad s(T) &= s_0 + \int_0^T v(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Die Situation kann man mathematisch so zusammenfassen: Wenn die *Ableitung* f' einer Funktion f und ein einzelner Funktionswert $f(x_0)$ bekannt ist, kann die Funktion mit Hilfe des Integrals berechnet werden. Hierfür sagt man auch, dass die Funktionswerte aus der Ableitung rekonstruiert werden.

Wenn sich beispielsweise eine Bakterienpopulation näherungsweise gemäß B' mit $B'(t) = 0{,}6t$ für $t \geq 0$

vermehrt und zu Beginn $B(0) = 100$ Bakterien vorhanden sind, wird der Bestand B zur Zeit T durch

$$B(T) - B(0) = \int_0^T 0{,}6t\,dt$$

und damit durch

$$B(T) = B(0) + \int_0^T 0{,}6t\,dt = 100 + 0{,}6 \int_0^T t\,dt = 100 + 0{,}3\left(T^2 - 0^2\right) = 100 + 0{,}3T^2$$

beschrieben. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bietet für solche Fragestellungen ein wichtiges Hilfsmittel, eine Funktion zu rekonstruieren, wenn ihre Ableitung bekannt (und stetig) ist. In praktischen Anwendungen werden die Funktionen allerdings oft etwas komplizierter sein, zum Beispiel aus Verknüpfungen mit Exponentialfunktionen bestehen.

Ein weiteres Beispiel aus der Physik, das der Leserin oder dem Leser bekannt sein könnte, ist die Bestimmung der Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg: $W = F_s \cdot s$. Dabei ist F_s die Projektion der Kraft auf die Wegrichtung. Ist die Kraft jedoch wegabhängig, gilt dieses Gesetz nicht mehr in seiner einfachen Form. Um die Arbeit, die z.B. beim Verschieben eines massiven Körpers entlang eines Weges verrichtet wird, zu bestimmen, muss man die aufgewendete Kraft dann entlang des Weges vom Anfangspunkt s_1 bis zum Endpunkt s_2 integrieren:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)\,ds\ .$$

Dies sollen nur drei Beispiele aus dem naturwissenschaftlich-technischen Bereich sein, in denen der Integralbegriff hilfreich ist. Im Verlauf des Studiums werden je nach Fachrichtung eine ganze Reihe weiterer Anwendungen der Integration auftauchen.

8.3.4 Aufgaben

Aufgabe 8.3.1
Berechnen Sie den Inhalt I_A der Fläche A, die durch den Graphen der Funktion $f : [-2\pi; 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto 3\sin(x)$ und die x-Achse begrenzt wird.

Antwort: I_A = [ ] .

Lösung:
Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x)$ hat auf dem Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ die Nullstellen -2π, $-\pi$, 0, π und 2π. Da der Graph von f punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist, ergibt sich der Flächeninhalt mit der folgenden Rechnung zu

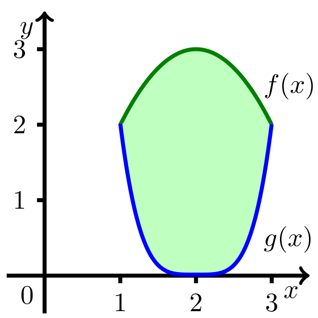
$$\begin{aligned}
\int_{-2\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx &= 3 \cdot \int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \int_{0}^{2\pi} |\sin(x)|\,dx, \qquad \text{da die Funktion } |\sin| \text{ gerade ist,} \\
&= 6 \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x))\,dx \right) \\
&= 6 \cdot \left([-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \right) \\
&= 6 \cdot ((-(-1) + 1) + (1 - (-1))) \\
&= 24\,.
\end{aligned}$$

Die Berechnung ist natürlich auch ohne die Beobachtung möglich, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist.

Aufgabe 8.3.2
Berechnen Sie den Inhalt I_A der Fläche A, die durch die Graphen der Funktionen $f : [1; 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto 3 - (x-2)^2$ und $g : [1; 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot (x-2)^4$ eingeschlossen wird. Zeichnen Sie dazu zunächst die Graphen der Funktionen, bevor Sie den Flächeninhalt berechnen.

Antwort: I_A = [ ] .

Lösung:
Zur Berechnung des Flächeninhalts I_A der Fläche zwischen den Funktionsgraphen von f und g wird $f - g$ mit $f(x) - g(x) = 3 - (x-2)^2 - 2 \cdot (x-2)^4$ auf dem Intervall $[1; 3]$ betrachtet.



Aus den Zeichnungen der Funktionsgraphen ist zu sehen, dass die Differenz $f(x) - g(x)$ größer gleich Null für $x \in [1;3]$ ist. Dies kann auch rechnerisch festgestellt werden: Nach Voraussetzung ist hier $1 \leq x \leq 3$ und damit $-1 \leq x-2 \leq 1$. Folglich ist hier $(x-2)^2 \leq 1$ und damit $-(x-2)^2 \geq -1$, sodass

$$f(x) - g(x) \geq 3 - 1 - 2 \cdot 1 = 0$$

für $1 \leq x \leq 3$ gilt.

Für die Berechnung des Flächeninhalts ist somit das Integral $\int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx$ auszuwerten. Dazu können die Funktionsterme ausmultipliziert und mit der Summenregel integriert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die beiden Funktionsterme genauer zu betrachten: In der gegebenen Situation des Beispiels liegen mit $(x-2)^2$ bzw. $(x-2)^4$ Terme vor, die durch Verschiebung aus den bekannten Termen z^2 bzw. z^4 gemäß $z = x-2$ hervorgehen. Eine Stammfunktion von h mit $h(z) = z^2$ ist H mit $H(z) = \frac{1}{3} \cdot z^3$. Wenn man jetzt entsprechend F mit $F(x) = 3x - \frac{1}{3} \cdot (x-2)^3$ betrachtet, ergibt sich mit der Kettenregel $F'(x) = 3 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x-2)^2 \cdot 1 = f(x)$. Dabei ergibt sich der letzte Faktor aus der Ableitung der inneren Funktion u mit $u(x) = x-2$. Deshalb ist F eine Stammfunktion von f. Entsprechend kann man nachrechnen, dass G mit $G(x) = \frac{2}{5} \cdot (x-2)^5$ eine Stammfunktion von g ist.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt I_A zwischen den Funktionsgraphen

$$\begin{aligned}
I_A &= \left| \int_1^3 \left(3 - (x-2)^2 - 2 \cdot (x-2)^4\right) dx \right| \\
&= \left| \left[3x - \frac{1}{3}(x-2)^3 - \frac{2}{5}(x-2)^5 \right]_1^3 \right| \\
&= \left| 27 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \right| \\
&= 22 + \frac{8}{15}\,.
\end{aligned}$$

In der nächsten Aufgabe wird eine physikalische Fragestellung in der Sprache der Mathematik formuliert, wobei eine Vereinfachung in der Beschreibung vorgenommen wird. Dies soll exemplarisch verdeutlichen, dass die mathematischen Schreibweisen wie hier für Funktionen prinzipiell auch in Anwendungen eingesetzt werden können. In der Praxis werden oft kürze Formulierungen verwendet. So werden beispielsweise Definitionsbereich und Zielbereich einer Funktion nicht explizit notiert, wenn sich diese aus dem Kontext ergeben.

Aufgabe 8.3.3

Berechnen Sie die Arbeit W, die nötig ist, um einen kleinen kugelförmigen homogenen Körper k, der die Masse m hat, *gegen* die Gravitationskraft $F : [r_1; \infty[\to \mathbb{R}, r \mapsto F(r) := -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ von der Oberfläche eines kugelförmigen homogenen Körpers K mit Radius $r_1 = 1$ und Masse $M = 2$ bis zu einer Entfernung $r_2 = 4$ zu bewegen (alle Längen beziehen sich auf den Mittelpunkt des Körpers K). Hierbei sind die Masse m und die Gravitationskonstante γ als gegebene Werte anzunehmen, und der kleine Körper k wird im Vergleich zum Körper K als punktförmig angesehen.

Antwort: W = __________ .

Lösung:

Die Kraft F_s längs des Weges, durch die der kleine Körper k mit der Masse m von der Oberfläche des Körpers K weg bewegt wird, zeigt *entgegen* der Gravitationskraft F. Somit ist $F_s = -F$.

Die aufzuwendende Arbeit W von $r_1 = 1$ zu $r_2 = 4$ ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} W = \int_1^4 F_s(r)\,dr = -\int_1^4 F(r)\,dr &= -\int_1^4 -\gamma \cdot \frac{2 \cdot m}{r^2}\,dr \\ &= \int_1^4 \gamma \cdot \frac{2 \cdot m}{r^2}\,dr \\ &= \left[-\gamma \cdot \frac{2 \cdot m}{r}\right]_1^4 \\ &= -\gamma \cdot 2 \cdot m \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right) \\ &= \gamma \cdot \frac{3m}{2}\,. \end{aligned}$$

8.4 Abschlusstest

8.4.1 Abschlusstest Kapitel 4

Aufgabe 8.4.1
Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a. $\displaystyle\int 3\sqrt{x}\,dx = \boxed{}$

b. $\displaystyle\int \left(2x - e^{x+\pi}\right) dx = \boxed{}$

Aufgabe 8.4.2
Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^e \frac{1}{2x}\,dx = \boxed{} \qquad \text{und} \qquad \int_5^8 \frac{6}{x-4}\,dx = \boxed{}$$

Aufgabe 8.4.3
Berechnen Sie die Integrale:

$$\int_0^3 x\cdot\sqrt{x+1}\,dx = \boxed{} \qquad \text{und} \qquad \int_\pi^{\frac{3\pi}{4}} 5\sin(4x-3\pi)\,dx = \boxed{}$$

Aufgabe 8.4.4
Es gilt:

$$2\int_{\boxed{}}^4 |x^3|\,dx = \int_{-4}^4 |x^3|\,dx \ \boxed{} \ \left|\int_{-4}^4 x^3\,dx\right|$$

Aufgabe 8.4.5
Berechnen Sie den Inhalt I_A der Fläche A, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g auf $[-3;2]$ mit $f(x)=x^2$ und $g(x)=6-x$ eingeschlossen wird.

Antwort: $I_A = \boxed{}$

Aufgabe 8.4.6
Es ist eine Stammfunktion F der Funktion f gegeben, und eine Stammfunktion G von g. Weiter ist eine Funktion id mit $\mathrm{id}(x)=x$ gegeben.

Welche der folgenden Aussagen gelten stets (wenn die jeweiligen Verknüpfungen möglich sind)?

richtig:	falsch:	Aussage:
☐	☐	$\mathrm{id}\cdot F$ ist eine Stammfunktion von $\mathrm{id}\cdot f$?
☐	☐	$F\circ G$ ist eine Stammfunktion von $f\circ g$?
☐	☐	$F-G$ ist eine Stammfunktion von $f-g$?
☐	☐	F/G ist eine Stammfunktion von f/g?
☐	☐	$F\cdot G$ ist eine Stammfunktion von $f\cdot g$?
☐	☐	$-20\cdot F$ ist eine Stammfunktion von $-20\cdot f$?

9 Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem

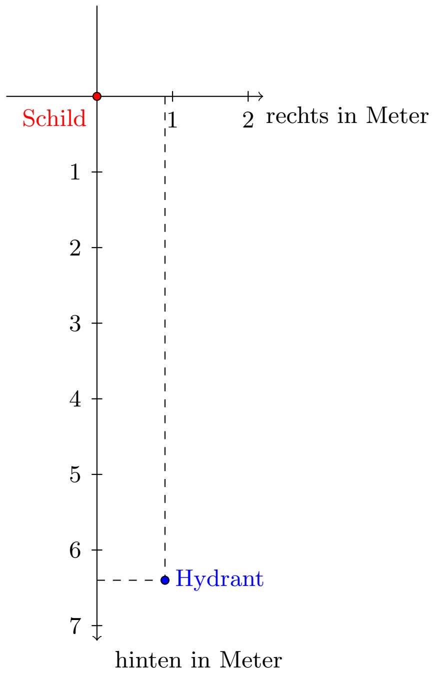
Modulübersicht

9.1 Kartesische Koordinatensysteme in der Ebene

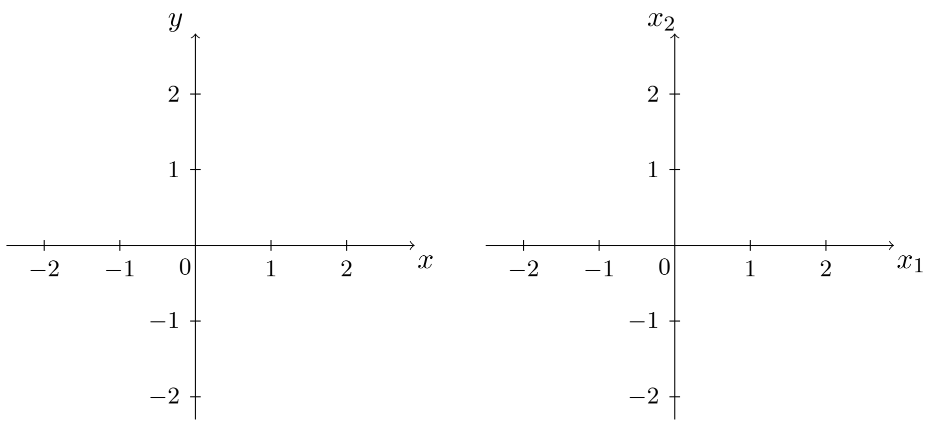
9.1.1 Einführung

Will man Objekte, wie Geraden oder Kreise, die in Kapitel 5 rein geometrisch betrachtet wurden, auch algebraisch (das heißt mit Hilfe von Gleichungen) untersuchen, so muss man zur eindeutigen Beschreibung von Punkten in der Ebene **Koordinatensysteme** einführen. Die grundlegende Idee von Koordinatensystemen ist sehr einfach: Will man den Ort eines Punktes von Interesse exakt angeben, so braucht man neben einem Referenzpunkt (in der Mathematik als **Ursprung** bezeichnet) eine bestimmte Längeneinheit (zum Beispiel Kilometer). Dann kann man den Ort des Punktes mit Hilfe von zwei Zahlen eindeutig benennen. Diese zwei Zahlen werden in der Mathematik als **Koordinaten** des Punktes bezeichnet. In der Praxis findet man dies zum Beispiel auf Schildern, die den Ort von Hydranten im Boden angeben:

In diesem Fall ist der Ursprung der Ort, an dem das Schild angebracht ist, die Längeneinheit ist Meter, und die beiden abzulesenden Zahlen 0,9 und 6,4 geben an, dass man sich vom Ort des Schilds aus 0,9 Meter nach rechts und 6,4 Meter nach hinten begeben muss, um den Hydranten zu finden. Die beiden Zahlen 0,9 und 6,4 bilden also die Koordinaten des Hydranten in dem Koordinatensystem, das durch den Ort des Schilds und die Längeneinheit Meter festgelegt wird:

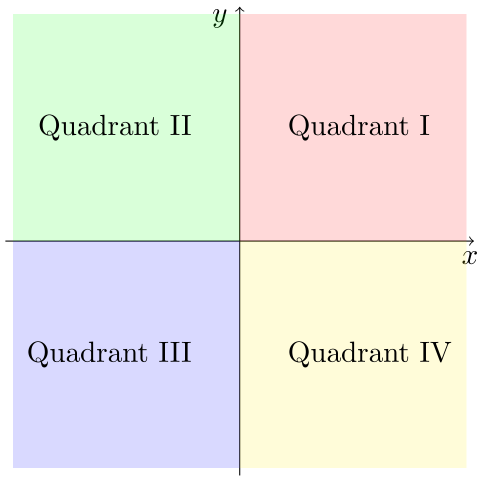


In der Mathematik werden die Richtungen in einem Koordinatensystem selten „rechts“ und „hinten“ genannt. Zeichnet man ein Koordinatensystem, so nennt man die horizontale Richtung oft x-Richtung oder x_1-Richtung und die vertikale Richtung y-Richtung oder x_2-Richtung. Die mathematische Konvention dabei ist außerdem, dass die Richtungen nach rechts und nach oben verlaufen sollen:



Die verwendete Längeneinheit kann hier noch zusätzlich angegeben werden, diese ist aber für rein mathematische Betrachtungen zunächst nicht wichtig. Beachtet werden sollte aber die Benutzung negativer Koordinaten „links“ und „unterhalb“ des Ursprungs. Die gezeichneten **Achsen** bezeichnet man schließlich entsprechend oft als x-Achse oder x_1-Achse und y-Achse oder x_2-Achse. Üblich sind weiterhin die Bezeichnungen **Abszissenachse** für die horizontale Achse (die Koordinatenwerte darauf heißen dann **Abszissen**) und **Ordinatenachse** für die vertikale Achse (die Koordinatenwerte darauf heißen dann **Ordinaten**).

Man erkennt nun, dass ein solches Koordinatensystem die Ebene in vier Bereiche teilt, die wiederum besondere Bezeichnungen tragen. Man spricht hier von den **Quadranten I** bis **IV**:



Weiterhin werden die oben beschriebenen Koordinatensysteme auch als **kartesische Koordinatensysteme** bezeichnet, da ihre Achsen senkrecht aufeinander stehen, sich also im Ursprung unter einem 90°-Winkel schneiden. Es gibt also auch nicht-kartesische Koordinatensysteme, die in diesem Kurs allerdings nicht betrachtet werden. Deshalb wird im Folgenden oft einfach nur der Begriff Koordinatensystem für ein kartesisches Koordinatensystem benutzt.

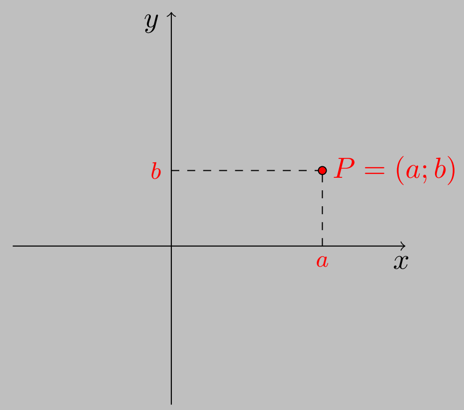
Hat man nun das Konzept der Koordinatensysteme der Ebene verinnerlicht, so wird klar, dass man auf ähnliche Weise auch die Position von Punkten im Raum beschreiben kann. Will man zum Beispiel die Position eines Flugzeugs exakt angeben, ist dafür nicht nur seine Position relativ zum Tower relevant, sondern auch seine Flughöhe. Man braucht hierfür also eine dritte Koordinate und folglich ein Koordinatensystem mit drei Achsen. Solche Koordinatensysteme werden in Kapitel 10 eingeführt.

9.1.2 Punkte in kartesischen Koordinatensystemen

Wenn man nun Punkte in der Ebene durch Koordinaten beschreiben möchte, benutzt man auch hier oft Variablen. Typischerweise sind dies Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ oder $P, Q, R, \ldots$ für Punkte und Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots$ oder $x, y, \ldots$ für ihre Koordinaten. Zunächst wird nun festgelegt, was unter einem Punkt in der Ebene, in welcher ein Koordinatensystem gegeben ist, zu verstehen sein soll und welche Schreibweisen dafür im Folgenden benutzt werden.

Info 9.1.1

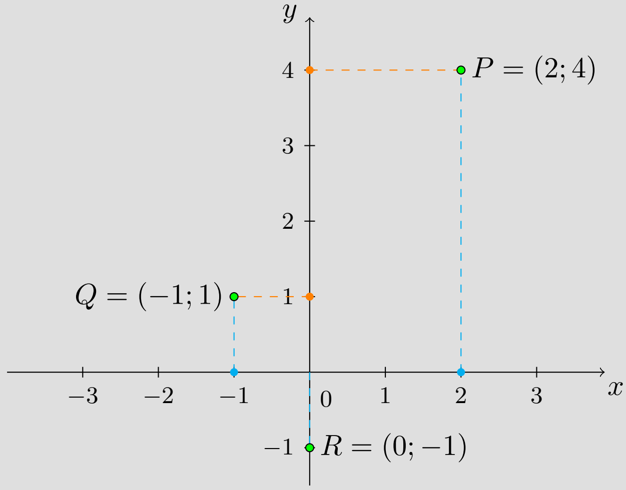
Ein **Punkt** in der Ebene, bezüglich eines gegebenen Koordinatensystems, wird beschrieben durch $P = (a; b)$, dabei ist P die Variable für den Punkt und a und b sind seine Koordinaten. Seine Abszisse oder seine x-Koordinate ist a und seine Ordinate oder y-Koordinate ist b:



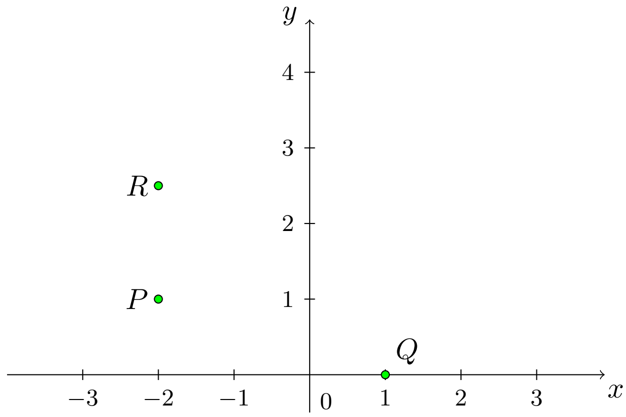
Für Punkte gibt es verschiedene Notationen. In der Schule wird oft $P(a|b)$ statt $P = (a; b)$ geschrieben, oft statt dem Semikolon ein Trennstrich oder ein Komma als Trennzeichen zwischen den Koordinaten benutzt. In diesem Kurs wird durchgehend die Bezeichnung $P = (a; b)$ verwendet. Da Punkte durch ihre Koordinaten eindeutig bestimmt werden, wird im Folgenden nicht mehr zwischen dem Punkt P und seinen Koordinaten $(a; b)$ unterschieden, sondern beide werden als das gleiche Objekt aufgefasst. Ein besonderer Punkt in jedem Koordinatensystem ist natürlich der Ursprung mit dem Koordinatenpaar $(0; 0)$; für diesen wird üblicherweise die Variable O (vom englischen *origin*) reserviert, also: $O = (0; 0)$.

Beispiel 9.1.2

In dem folgenden Schaubild sind die drei Punkte $P = (2; 4)$, $Q = (-1; 1)$ und $R = (0; -1)$ abgebildet. Der Punkt Q beispielsweise besitzt die x-Koordinate -1 (eine Längeneinheit nach links auf der Abszissenachse) und die y-Koordinate 1 (eine Längeneinheit nach oben auf der Ordinatenachse):



Aufgabe 9.1.1
Geben Sie die Koordinaten der im folgenden Koordinatensystem eingezeichneten Punkte an.



a. P = [ ] .

b. Q = [ ] .

c. R = [ ] .

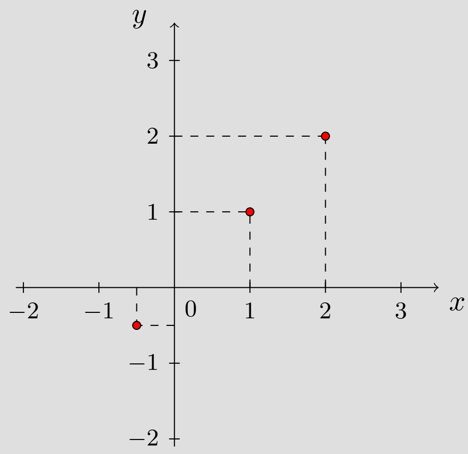
Lösung:
Die Koordinatenpaare der gefragten Punkte lauten

$$P = (-2;1)\ ,\ \ Q = (1;0)\ ,\ \ R = \left(-2;\frac{5}{2}\right) = (-2;2{,}5)\ .$$

In den folgenden Abschnitten sollen nun weitere geometrische Objekte, wie etwa Geraden und Kreise, durch Koordinaten beschrieben werden. Dafür muss man sich zunächst klarmachen, dass Punkte in der Ebene (beschrieben durch ihre Koordinaten bezüglich eines vorgegebenen Koordinatensystems) wieder zu Mengen, sogenannten **Punktmengen**, zusammengefasst werden können. Dies veranschaulicht das folgende Beispiel:

Beispiel 9.1.3

In der folgenden Abbildung sind drei Punkte eingezeichnet.



Diese Punktmenge kann durch folgende Mengenangaben beschrieben werden:

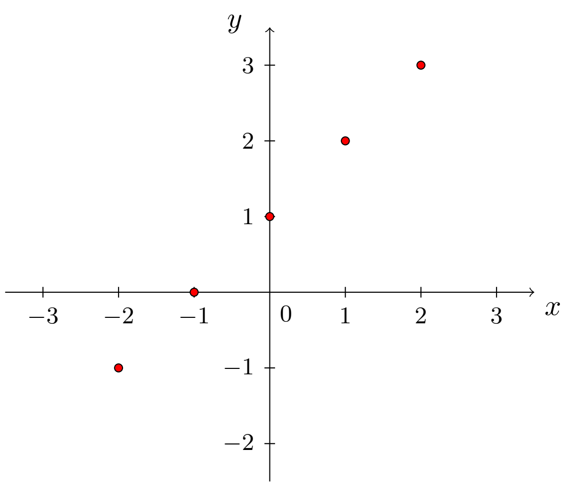
$$\{(-0{,}5;-0{,}5);(1;1);(2;2)\} = \{(a;a)\ :\ a \in \{-0{,}5;1;2\}\}$$

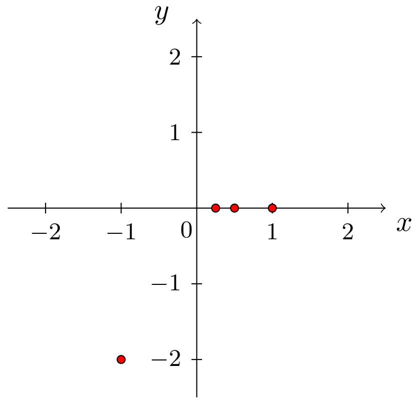
Aufgabe 9.1.2
Zeichnen Sie die folgenden Punktmengen in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

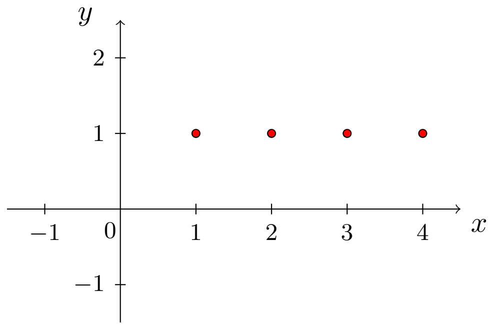
1. $\{(i;i+1)\ :\ i \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$
2. $\{\left(\frac{1}{n};0\right)\ :\ n = 1 \vee n = 2 \vee n = 4\} \cup \{(-1;-2)\}$
3. Die Menge aller Punkte im I. Quadranten mit ganzzahliger Abszisse kleiner 5 und Ordinate 1

Lösung:

1.



2. 

3. 

Wie aus Kapitel 5 bekannt ist, handelt es sich bei Geraden und Kreisen um Mengen von unendlich vielen Punkten. Deren Koordinaten mittels Punktmengen und geeigneten Gleichungen zu beschreiben, ist Inhalt der folgenden Abschnitte. Eine spezielle unendliche Punktmenge ist die Zusammenfassung *aller* Punkte in einem Koordinatensystem in der Ebene zu einer Menge. Für diese Menge gibt es eine besondere Bezeichnung:

Info 9.1.4

Die Menge aller Punkte in der Ebene, als Koordinatenpaare bezüglich eines gegebenen kartesischen Koordinatensystems, werden mit

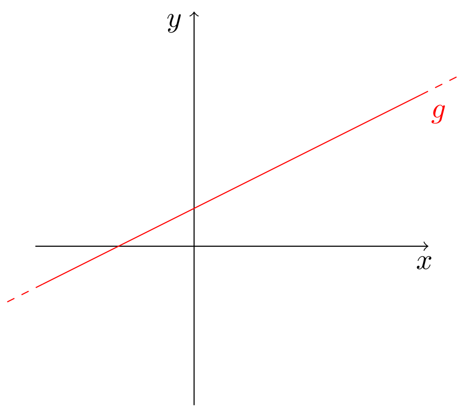
$$\mathbb{R}^2 := \{(x;y) \,:\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet. Das Symbol $\mathbb{R}^2$ wird dabei als „$\mathbb{R}$ zwei“, „$\mathbb{R}$ hoch zwei“ oder „$\mathbb{R}$ Quadrat“ gesprochen. Dies spiegelt wieder, dass jeder Punkt durch ein Koordinatenpaar, bestehend aus zwei reellen Zahlen, beschrieben werden kann.

9.2 Geraden in der Ebene

9.2.1 Einführung

In Kapitel 5 wurden Geraden in der Ebene als unendlich weit ausgedehnte gerade Linien eingeführt. Aufbauend auf dem vorigen Abschnitt, kann man diese Linien nun als unendliche Punktmengen in der Ebene bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems auffassen. Für die Elemente dieser Punktmengen gelten dann bestimmte (nämlich lineare) Gleichungen. Geraden werden üblicherweise mit Kleinbuchstaben $g, h, \ldots$ als Variablen bezeichnet. Zeichnet man diese in ein Koordinatensystem, muss beachtet werden, dass immer nur ein *Ausschnitt* der Gerade darstellbar ist, die Gerade selbst aber unendlich weit ausgedehnt ist:



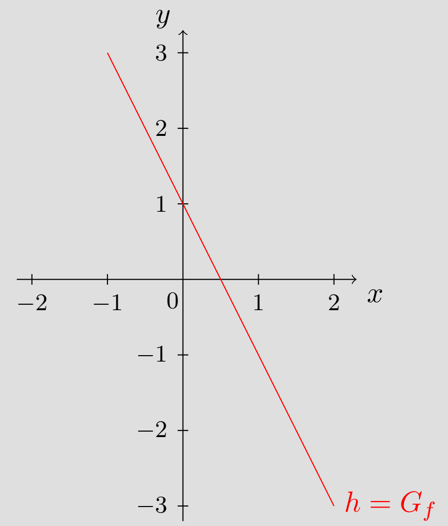
Spezialfälle von Geraden, die als unendliche Punktmengen im $\mathbb{R}^2$ gegeben sind, sind bereits aus Kapitel 6 bekannt. Dies sind nämlich die Graphen linear-affiner Funktionen aus dem Abschnitt Lineare Funktionen und Polynome in Kapitel 6. Anhand des folgenden Beispiels können nochmals die wichtigsten Begriffe aus diesem Abschnitt rekapituliert werden, die im Folgenden wieder benutzt werden:

Beispiel 9.2.1

Die linear-affine Funktion

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x+1 \end{array} \right.$$

hat als Graph (G_f) eine Gerade h mit dem Achsenabschnitt 1 und der Steigung -2:



9.2.2 Koordinatengleichungen für Geraden

Es wird nun zunächst die allgemeinste Form einer Koordinatengleichung für eine Gerade vorgestellt. Damit lässt sich jede Gerade in der Ebene als unendliche Punktmenge bezüglich eines gegebenen Koordinatensystems angeben.

Info 9.2.2

Eine **Gerade** g im $\mathbb{R}^2$ ist eine Punktmenge

$$g = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, px + qy = c\}\ .$$

Dabei sind p, q, c reelle Zahlen, welche die Gerade festlegen. Die Zahlen p und q dürfen dabei *nicht beide* gleich 0 sein. Die lineare Gleichung

$$px + qy = c$$

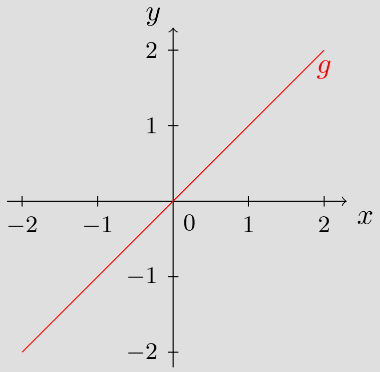
heißt **Geradengleichung** oder genauer, um sie von anderen möglichen Formen von Geradengleichungen zu unterscheiden, auch **Koordinatenform der Geradengleichung**. Um die oben stehende Mengenschreibweise für Geraden abzukürzen, hat es sich auch eingebürgert, nur die Variable für die Gerade und die Geradengleichung anzugeben:

$$g\colon\ px + qy = c\ .$$

Das folgende Beispiel zeigt einige Geraden und ihre Mengenbeschreibungen bzw. Geradengleichungen.

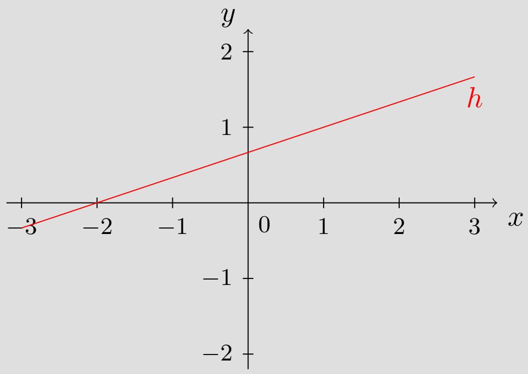
Beispiel 9.2.3

a) $g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - y = 0\}$



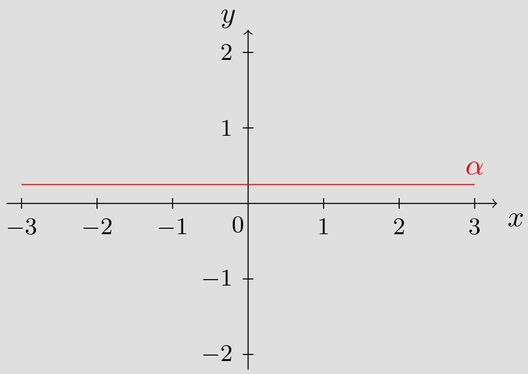
Hier ist $p = 1$, $q = -1$ und $c = 0$.

b) $h\colon \; -x - 2 = -3y \quad \Leftrightarrow \quad h\colon \; -x + 3y = 2$



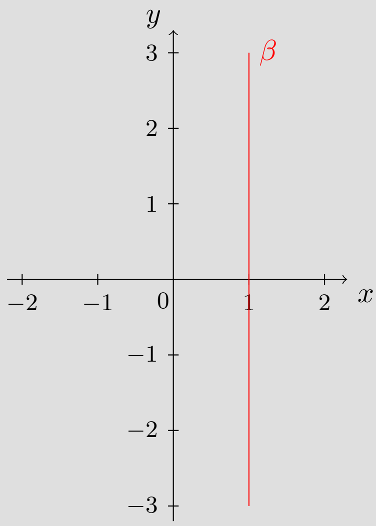
Hier ist $p = -1$, $q = 3$ und $c = 2$.

c) $\alpha\colon \; 4y = 1$



Hier ist $p = 0$, $q = 4$ und $c = 1$.

d) $\beta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - 1 = 0\}$



Hier ist $p = 1$, $q = 0$ und $c = 1$.

Ziel ist es nun eine Gerade, welche durch eine Geradengleichung oder andere Daten eindeutig festgelegt ist, in einem Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$ korrekt einzeichnen zu können. Hierfür wird noch ein genauerer Zusammenhang zu den Graphen linear-affiner Funktionen benötigt. Außerdem muss man wissen, durch welche Arten von Daten eine Gerade in der Ebene eindeutig festgelegt ist. Dies wird im Folgenden vorgestellt.

Info 9.2.4

Eine Gerade g, gegeben durch eine Geradengleichung in Koordinatenform

$$g\colon\ px + qy = c\ ,$$

kann in **Normalform** angegeben werden, falls $q \neq 0$ gilt. Denn dann lässt sich die Geradengleichung $px + qy = c$ nach y auflösen und die Normalform von g lautet

$$g\colon\ y = -\frac{p}{q}x + \frac{c}{q}\ .$$

In dieser Form beschreibt die Gerade den Graphen einer linear-affinen Funktion f mit Steigung $-\frac{p}{q}$ und Achsenabschnitt $\frac{c}{q}$:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) = -\frac{p}{q}x + \frac{c}{q}\ . \end{array} \right.$$

Da man in der Normalform einer Geraden ihre Steigung und ihren Achsenabschnitt ablesen kann,

kann man diese so wie die Graphen linear-affiner Funktionen zeichnen.

Beispiel 9.2.5

Die Gerade

$$g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -x - 2y = 2\}$$

besitzt die Geradengleichung $-x - 2y = 2$ in Koordinatenform. Durch ΩÄquivalenzumformungen linearer Gleichungen2.1.4 kann diese auf die Form $y = -\frac{1}{2}x - 1$ gebracht werden. Somit hat g die Normalform

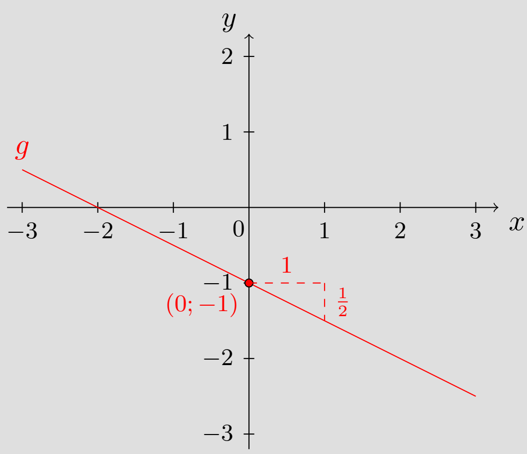
$$g\colon\; y = -\frac{1}{2}x - 1$$

und beschreibt dadurch den Graphen der linear-affinen Funktion

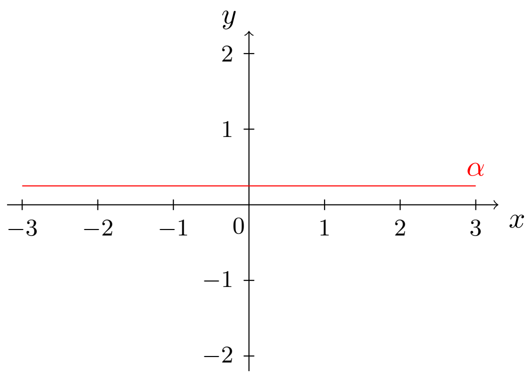
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

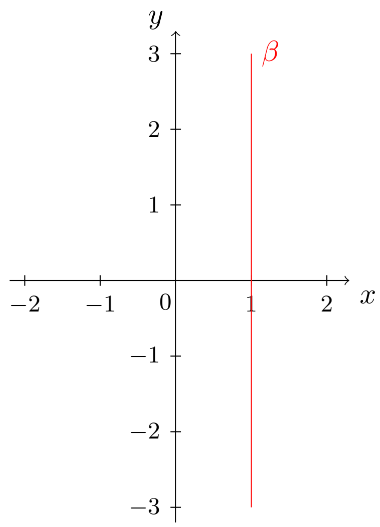
mit der Steigung $-\frac{1}{2}$ und dem Achsenabschnitt -1.

Um g zu zeichnen, mache man sich Folgendes klar: Der Achsenabschnitt -1 impliziert, dass g den Punkt $(0; -1)$ beinhaltet. Ausgehend von diesem Punkt kann g durch das Anlegen eines Steigungsdreiecks der Steigung $-\frac{1}{2}$ (um $x = 1$ nach rechts und um $y = \frac{1}{2}$ nach unten) in der korrekten Richtung gezeichnet werden:



An dieser Stelle sind nun zwei Besonderheiten zu beachten. Diese zeigen sich am Beispiel der beiden Geraden $\alpha\colon 4y = 1$ und $\beta\colon x - 1 = 0$ aus Beispiel 9.2.3:





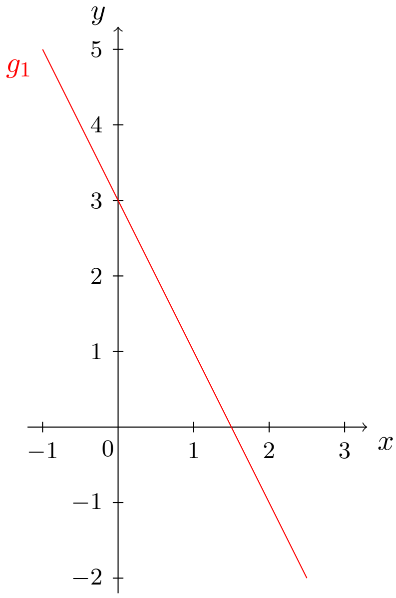
Die Gerade α ist parallel zur x-Achse. Ihre Normalform $\alpha\colon\ y = \frac{1}{4}$ beschreibt also den Graphen einer konstanten Funktion, als Spezialfall der linear-affinen Funktionen. Die Gerade β ist parallel zur y-Achse. Ihre Geradengleichung erfüllt nicht die Voraussetzungen, um auf Normalform gebracht werden zu können. Dies trifft auf alle Geraden zu, die parallel zur y-Achse verlaufen. Für solche Geraden gibt es also keine Normalform, da sie nicht durch den Graphen einer Funktion beschrieben werden können (vgl. 6.1.4). Weiterhin besitzen Geraden parallel zur y-Achse auch keinen Achsenabschnitt, da sie die y-Achse nicht schneiden. Auch eine Steigung besitzen solche Geraden eigentlich nicht, man kann ihnen aber aus Konsistenzgründen die Steigung ∞ zuordnen.

Aufgabe 9.2.1
Zeichnen Sie die folgenden Geraden in ein Koordinatensystem ein. Bringen Sie die Geradengleichung (falls möglich und nötig) jeweils zunächst auf Normalform.

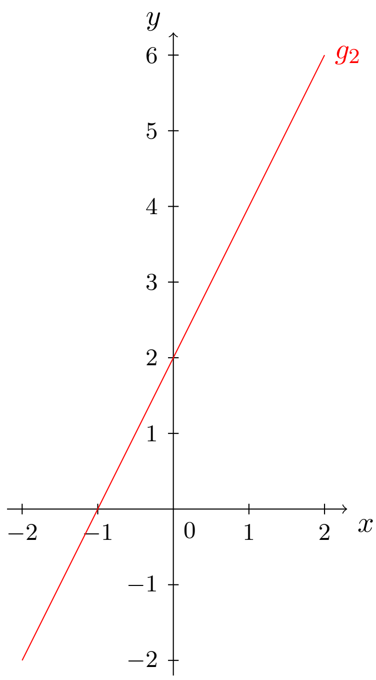
1. $g_1\colon\ y = -2x + 3$
2. $g_2\colon\ -2x + y - 2 = 0$
3. $g_3\colon\ x + 3 = 0$

Lösung:

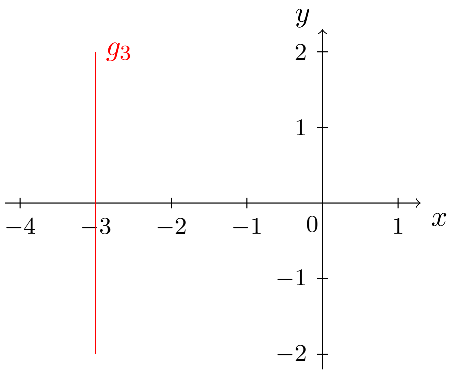
1. Die Geradengleichung ist bereits in Normalform gegeben. Es ist also keine Umformung nötig.



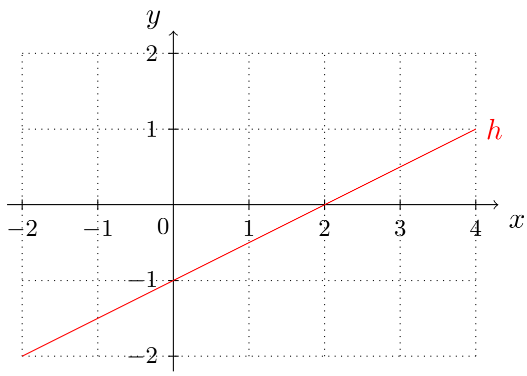
2. Die Normalform der Gerade lautet $g_2\colon\ y = 2x + 2$.



3. Die Geradengleichung kann nicht auf Normalform gebracht werden. Die Gerade ist parallel zur y-Achse.



Aufgabe 9.2.2
Gegeben sei eine Gerade h durch folgendes Bild:



Geben Sie die Geradengleichung von h in Normalform an.
$h\colon\ y =$ $\boxed{}$

<u>Lösung:</u>
Die Geradengleichung von h in Normalform lautet $y = \frac{1}{2}x - 1 = 0{,}5 \cdot x - 1$.

Außer mittels einer Geradengleichung, kann eine bestimmte Gerade in der Ebene auch durch andere Daten eindeutig festgelegt werden. Aus diesen Daten kann man die zugehörige Geradengleichung ermitteln und die entsprechende Gerade in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Info 9.2.6

Für eine Gerade in der Ebene gilt:

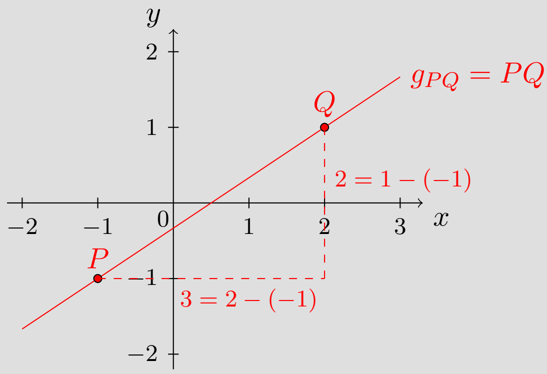
- **„Zwei Punkte legen eine Gerade eindeutig fest“:** Sind zwei Punkte P und Q im $\mathbb{R}^2$ gegeben, so gibt es genau eine Gerade g, welche durch P und Q verläuft. Man schreibt dann auch $g = g_{PQ} = g_{QP}$ oder einfach $g = PQ$ für die Gerade durch P und Q.
- **„Ein Punkt und eine Steigung legen eine Gerade eindeutig fest“:** Ist ein Punkt P

und eine Steigung m gegeben, so gibt es genau eine Gerade g, welche durch P verläuft und die Steigung m besitzt.

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, wie aus Daten, die eine Gerade eindeutig festlegen, die entsprechende Geradengleichung ermittelt und die Gerade gezeichnet werden kann.

Beispiel 9.2.7

Gegeben sind die Punkte $P = (-1; -1)$ und $Q = (2; 1)$. Die Gerade $g_{PQ} = PQ$ durch diese beiden Punkte kann direkt gezeichnet werden. Zur Ermittlung der Geradengleichung ist es nützlich, die beiden gegebenen Punkte zur Konstruktion eines Steigungsdreiecks zu nutzen:



Aus den x-Koordinaten -1 und 2 von P und Q ergibt sich die Breite 3 des Steigungsdreiecks und aus den entsprechenden y-Koordinaten -1 und 1 die Höhe 2. Damit ist die Steigung der Gerade $m = \frac{2}{3}$. Man erhält nun die Geradengleichung von g_{PQ} in Normalform:

$$g_{PQ}\colon\; y = mx + b = \frac{2}{3}x + b\,.$$

Es wird nur noch der Achsenabschnitt b benötigt. Hierfür nutzt man aus, dass g_{PQ} durch die beiden Punkte P und Q verläuft. Man setzt die x- und y-Koordinaten eines der beiden Punkte in die Geradengleichung ein und berechnet b. Benutzt man zum Beispiel den Punkt $Q = (2; 1)$ erhält man

$$1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \quad\Leftrightarrow\quad b = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\,.$$

Benutzung des Punktes $P = (-1; -1)$ würde auf das gleiche Ergebnis führen. Somit lautet die gesuchte Geradengleichung in Normalform

$$g_{PQ}\colon\; y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\,.$$

Beispiel 9.2.8

Gegeben ist der Punkt $R = (2; -1)$ und die Steigung $m = \frac{1}{2}$. Gesucht ist die Gerade g, welche durch R verläuft und die Steigung $m = \frac{1}{2}$ besitzt. Analog wie in Beispiel 9.2.7 oben kann hier die Normalform der Geradengleichung von g mit noch unbekanntem Achsenabschnitt direkt angegeben werden:

$$g\colon\; y = mx + b = \frac{1}{2}x + b\,.$$

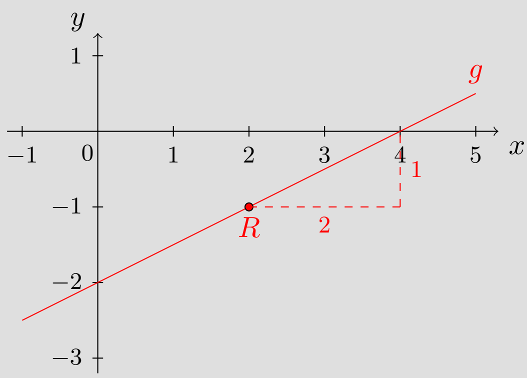
Weiterhin sind hier nun x- und y-Koordinaten des Punktes R gegeben, aus welchen – ebenfalls wie in Beispiel 9.2.7 oben – der Achsenabschnitt b berechnet werden kann:

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -2\,.$$

Somit lautet die gesuchte Geradengleichung

$$g\colon\; y = mx + b = \frac{1}{2}x - 2\,.$$

Aus dem Punkt $R = (2; -1)$ und der Steigung $m = \frac{1}{2}$ kann g auch sofort gezeichnet werden, wie das folgende Bild veranschaulicht:



Aufgabe 9.2.3
Geben Sie jeweils die gesuchten Geradengleichungen an und zeichnen Sie jeweils die Geraden.

a. Gegeben sind die Punkte $A = (1; 5)$ und $B = (3; 1)$.
   $g_{AB}\colon\; y = \boxed{\qquad}$

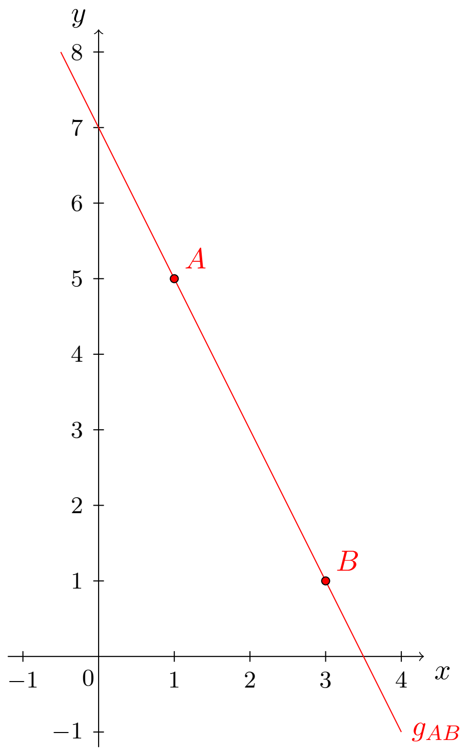
b. Gegeben sind die Punkte $S = (1{,}5; -0{,}5)$ und $T = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
   $g_{ST}\colon\; x = \boxed{\qquad}$

c. Gesucht ist die Gleichung der Gerade g durch den Punkt $(-4; 3)$ mit der Steigung -1.
   $g\colon\; y = \boxed{\qquad}$

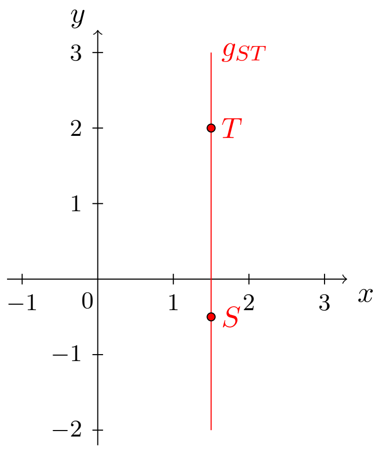
d. Gesucht ist die Gleichung der Gerade h durch den Punkt $(42; 2)$ mit der Steigung 0.
   $h\colon\; y = \boxed{\qquad}$

Lösung:

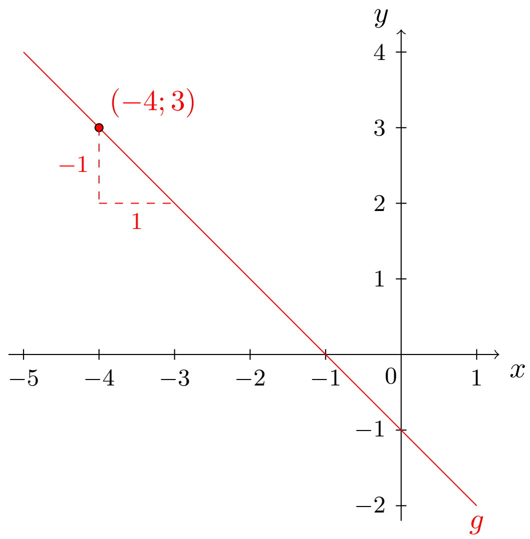
1. $g_{AB}\colon\ y = -2x + 7$



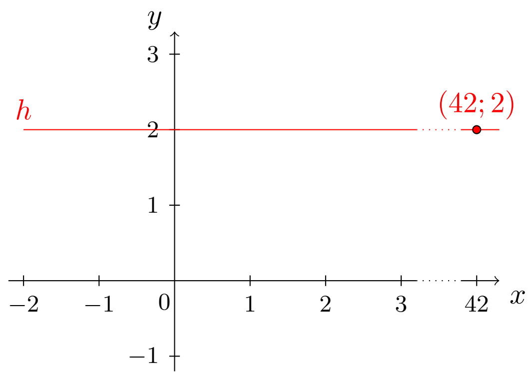
2. $g_{ST}\colon\ x = \frac{3}{2}$



3. $g\colon\ y = -x - 1$



4. $h\colon\; y = 2$



9.2.3 Lagebeziehungen von Geraden

Während es im vorigen Abschnitt 9.2.2 darum ging, Geraden mittels Koordinatengleichungen zu beschreiben und Gleichungen für Geraden, die mittels vorgegebener Daten festgelegt sind, zu finden, widmet sich dieser Abschnitt der Untersuchung der relativen Lage von Geraden, welche durch Gleichungen vorgegeben sind, zueinander und zu weiteren gegebenen Punkten. Letzteres ist relativ einfach, da ein Punkt nur auf einer Gerade liegen kann oder nicht:

Info 9.2.9

Ist
$$g = \{(x;y)\,:\,px + qy = c\}$$
eine Gerade und $P = (a;b)$ ein Punkt im $\mathbb{R}^2$, so liegt P genau dann auf der Geraden ($P \in g$), wenn seine Abszisse und Ordinate die Geradengleichung erfüllen, also wenn
$$pa + qb = c$$

gilt.

Mit Hilfe einer Geradengleichung kann man also testen, ob Punkte auf der Geraden liegen oder nicht.

Beispiel 9.2.10

Für die Gerade

$$h\colon\ x + 2y = -1$$

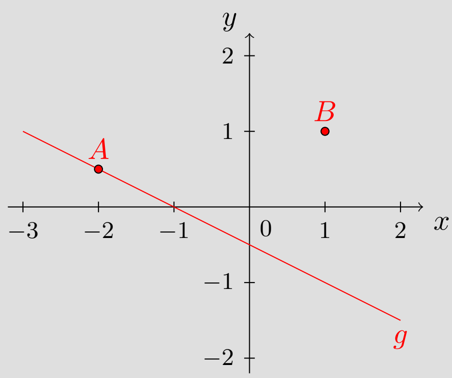
gilt zum Beispiel, dass $A = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$ auf h liegt, da $x = -2$ und $y = \frac{1}{2}$ die Geradengleichung erfüllen:

$$-2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2 + 1 = -1\ .$$

Allerdings liegt zum Beispiel $B = (1; 1)$ nicht auf h, da $x = 1$ und $y = 1$ die Geradengleichung nicht erfüllen:

$$1 + 2 \cdot 1 = 3 \neq -1\ .$$

Bild hierzu:



Aufgabe 9.2.4
Entscheiden Sie jeweils durch Rechnung, ob die angegebenen Punkte auf der Geraden liegen. Kreuzen Sie die Punkte auf der Geraden an.

$g\colon\ 2x - 4(\frac{y}{2} + x) + 2y = -3$:

☐ $P = (1{,}5; 2)$
☐ $Q = \left(-\frac{3}{2}; -4\right)$
☐ $R = (0{,}5; 0)$
☐ $S = \left(\frac{9}{6}; 0\right)$
☐ $T = (0; -\pi)$

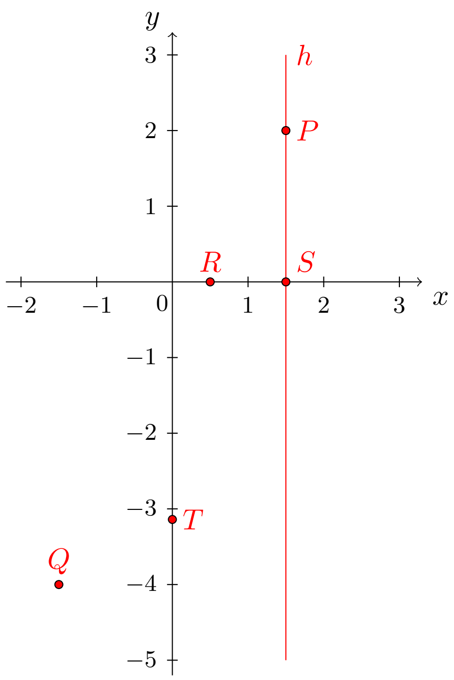
Lösung:
Die Geradengleichung lässt sich vereinfachen:

$$2x - 4(\frac{y}{2} + x) + 2y = -3 \;\Leftrightarrow\; 2x - 2y - 4x + 2y = -3 \;\Leftrightarrow\; -2x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}\,.$$

Somit ist h also eine Gerade parallel zur Ordinatenachse, und es liegen genau die Punkte auf h, welche Abszisse 1,5 haben. Da

$$\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

gilt, sind dies genau P und S. Alle anderen Punkte liegen nicht auf h. Bild hierzu:



Für die Lagebeziehung zweier Geraden gibt es mehr Möglichkeiten:

Info 9.2.11

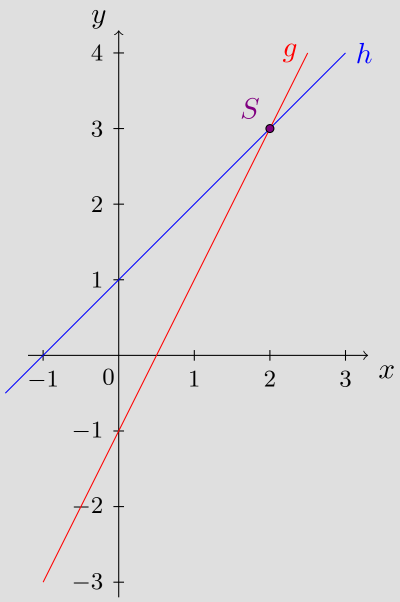
Sind g und h zwei Geraden in der Ebene, gegeben durch Geradengleichungen bezüglich eines Koordinatensystems, so trifft stets genau eine der folgenden Lagebeziehungen der Geraden zueinander zu:

1. Die Geraden g und h haben genau einen Punkt gemeinsam, sie schneiden sich also. Der gemeinsame Punkt heißt **Schnittpunkt**.
2. Die Geraden g und h haben keinen Punkt gemeinsam. In diesem Fall sind die Geraden **parallel**.
3. Die Geraden g und h sind identisch. In diesem Fall haben die Geraden alle Punkte gemeinsam.

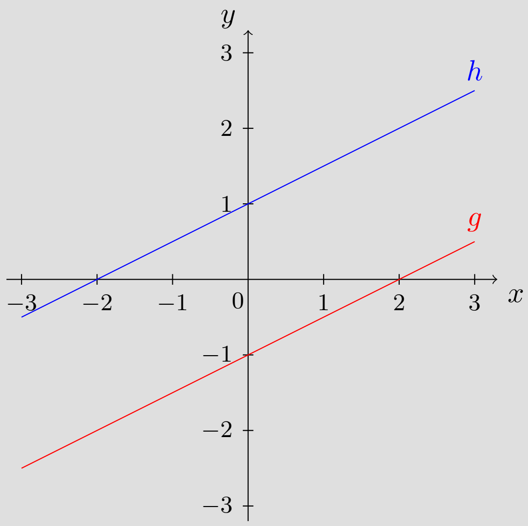
Die letzte dieser Möglichkeiten, klingt zunächst etwas seltsam. Man fragt sich, wieso es zwei Bezeichnungen (g und h) für etwas gibt, was eigentlich nur eine Gerade ist. Man mache sich in diesem Zusammenhang aber klar, dass unterschiedliche Geradengleichungen genau die gleiche Gerade beschreiben können, wenn die Geradengleichungen durch Äquivalenzumformungen auseinander hervorgehen. So ist es durchaus möglich, dass man mit g und h zwei Beschreibungen (durch unterschiedliche, aber äquivalente Gleichungen) ein und der selben Geraden vorliegen hat, dies aber eventuell nicht sofort ersichtlich ist, sondern die Gleichungen dafür genauer untersucht werden müssen. Dies zeigt auch nochmals das folgende Beispiel:

Beispiel 9.2.12

1. Die Geraden $g\colon\; y = 2x - 1$ und $h\colon\; y = x + 1$ schneiden sich. Ihr einziger gemeinsamer Punkt ist der Schnittpunkt $S = (2; 3)$:

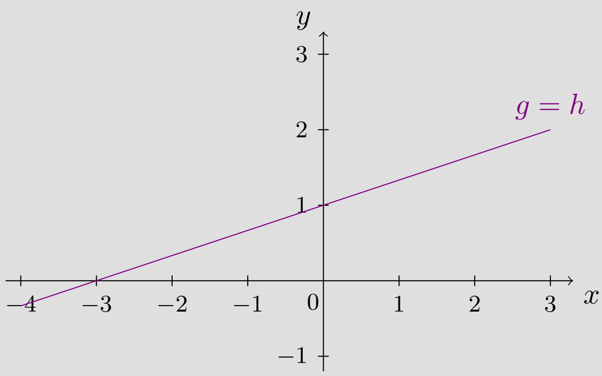


2. Die Geraden $g\colon\; y = \frac{1}{2}x - 1$ und $h\colon\; x - 2y = -2$ schneiden sich nicht. Sie sind parallel:



3. Die Geraden $g\colon\ y = \frac{1}{3}x + 1$ und $h\colon\ 2x - 6y = -6$ sind identisch, denn die beiden Geradengleichungen gehen durch Äquivalenzumformungen auseinander hervor:

$$y = \frac{1}{3}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{3}x = 1 \ \mid \cdot (-6) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 6y = -6$$



Die Methoden zur Berechnung von Schnittpunkten von Geraden, sind die Methoden zum Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten (in diesem Fall sind dies die Geradengleichungen), die in Kapitel 4 ausführlich behandelt wurden. Insbesondere wurde auch der geometrische Aspekt des Schnittpunkts von Geraden in diesem Zusammenhang in Abschnitt 4.2 bereits ausführlich behandelt. Deshalb sei an dieser Stelle für die Methoden der Schnittpunktbestimmung auf ebendiesen Abschnitt 4.2 verwiesen, und dessen kurze Wiederholung wird hier wärmstens empfohlen.

Liegen zwei Geradengleichungen allerdings in Normalform vor, kennt man also ihre Steigungen und Achsenabschnitte, so kann man (ohne Rechnung) direkt eine Aussage darüber treffen, welche der drei relativen Lagebeziehungen aus Infobox 9.2.11 auf die beiden Geraden zutrifft:

Info 9.2.13

Sind zwei Geraden g und h in der Ebene mittels Geradengleichungen in Normalform bezüglich eines Koordinatensystems gegeben, so gilt:

1. Falls die Steigungen von g und h *unterschiedlich* sind, schneiden sich die beiden Geraden.
2. Falls die Steigungen von g und h *gleich* sind, ihre Achsenabschnitte aber *unterschiedlich*, so sind die beiden Geraden parallel.
3. Falls die Steigungen und die Achsenabschnitte von g und h *gleich* sind, sind die beiden Geraden identisch.

Aufgabe 9.2.5
Entscheiden Sie jeweils durch Rechnung, ob und wie die gegebenen Geraden sich schneiden. Kreuzen Sie entsprechend an und tragen Sie die Schnittpunkte für die sich schneidenden Geraden ein. Skizzieren Sie die Geradenpaare.

a. $f\colon\ y = x - 2$ und $g\colon\ y = 2 - x$:
☐ Keinen Schnittpunkt (parallel),
☐ identische Geraden,
☐ einen Schnittpunkt.

b. $f\colon\ y = 1 - x$ und $g\colon\ y = 4 \cdot (3x + 1) - x - 3$:
☐ Keinen Schnittpunkt (parallel),
☐ identische Geraden,
☐ einen Schnittpunkt.

c. $f\colon\ y = 4(x + 1) - x - 1$ und $g\colon\ y = 3x - 3$:
☐ Keinen Schnittpunkt (parallel),
☐ identische Geraden,
☐ einen Schnittpunkt.

d. $f\colon\ y = 5x - 2$ und $g\colon\ y = (2x + 1) + (3x - 3)$:
☐ Keinen Schnittpunkt (parallel),
☐ identische Geraden,
☐ einen Schnittpunkt.

Der erste Schnittpunkt ist ☐, der zweite Schnittpunkt ist ☐.

Lösung:
Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen ergibt:

a. Einen Schnittpunkt über

$$x - 2 \;=\; 2 - x \quad\Leftrightarrow\quad 2x \;=\; 4 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; 2$$

mit $P = (2; 0)$.

b. Einen Schnittpunkt über

$$1 - x \;=\; 4(3x+1) - x - 3 \;\Leftrightarrow\; 12x \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x \;=\; 0$$

mit $P = (0; 1)$.

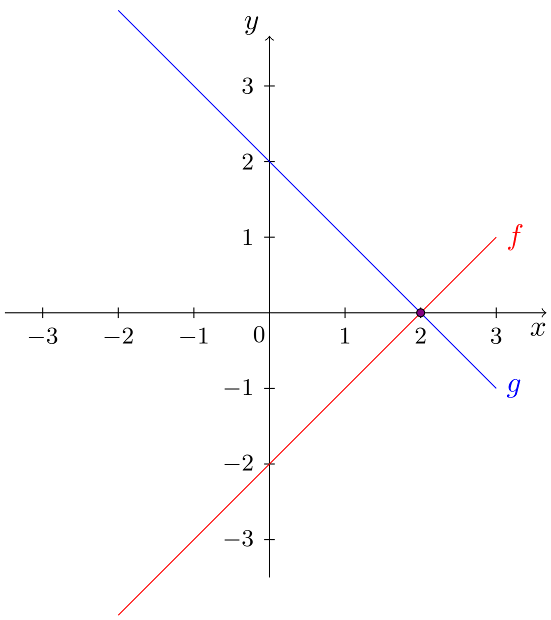
c. Diese Geraden besitzen keinen Schnittpunkt, da die Gleichung

$$4(x+1) - x - 1 \;=\; 3x - 3 \;\Leftrightarrow\; 0 \;=\; -6$$

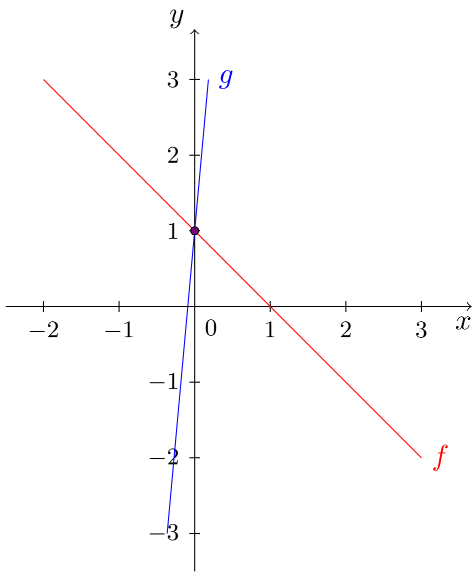
unlösbar ist.

d. Diese Geraden stimmen überein, da $(2x+1) + (3x-3) = 5x - 2$ ist.

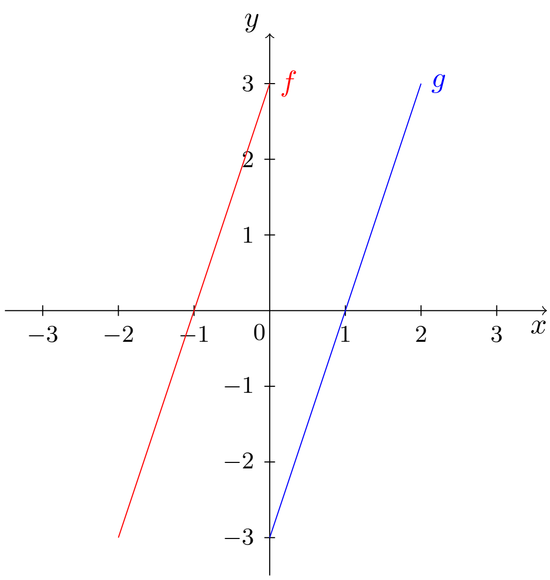
Skizze 1:



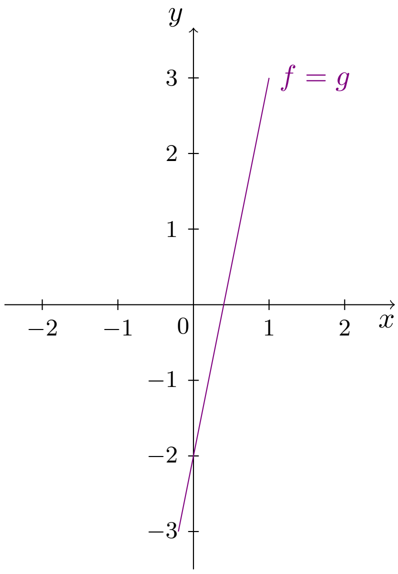
Skizze 2:



Skizze 3:



Skizze 4:

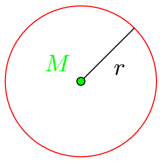


y
3
2
1
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2
−3
$f = g$

9.3 Kreise in der Ebene

9.3.1 Einführung

Jeder bringt ein intuitives Verständnis dafür mit, was ein **Kreis** ist:

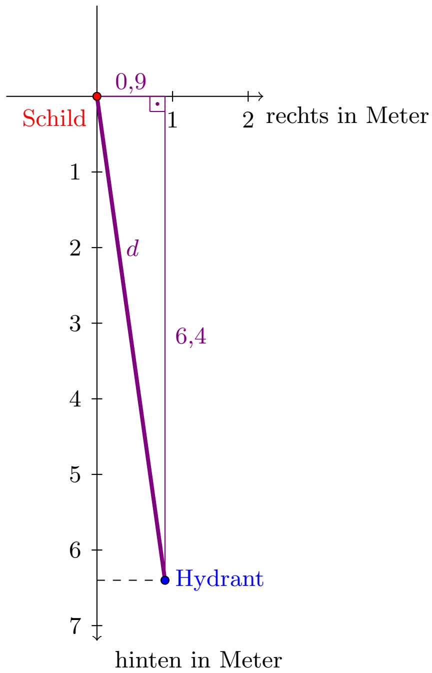


Alle Punkte auf dem (roten) Kreis haben von einem Punkt, dem **Mittelpunkt** M, den gleichen **Abstand**, nämlich r, den sogenannten **Radius** des Kreises (vgl. Kapitel 5). Will man aber nun Kreise in einem vorgegebenen Koordinatensystem, ähnlich wie die Geraden im vorigen Abschnitt, mittels Gleichungen beschreiben und mit diesen Beschreibungen rechnen, so muss man die Begriffe Kreis, Mittelpunkt, Abstand und Radius genauer betrachten und kann dann schließlich die allgemeine **Kreisgleichung** angeben. Das ist Inhalt dieses Abschnitts.

9.3.2 Abstand und Streckenlänge

Rekapituliert man nochmals das einführende Beispiel des Hydranten aus 9.1.1, so stellt man fest, dass man mit Hilfe der Daten auf dem Hydrantenschild zwar nun den Ort des Hydranten in einem Koordinatensystem genau angeben kann. Interessiert man sich aber dafür, wie weit der Hydrant vom Schild tatsächlich entfernt ist, muss man dies aus den Koordinaten erst ausrechnen.

Hier hilft der Satz des Pythagoras weiter:



Man erhält für den Abstand d zwischen Schild und Hydrant:

$$d^2 = 0{,}9^2 + 6{,}4^2 \ .$$

Somit kann man d hier (näherungsweise) ausrechnen:

$$d = \sqrt{0{,}81 + 40{,}96} \approx 6{,}46 \ .$$

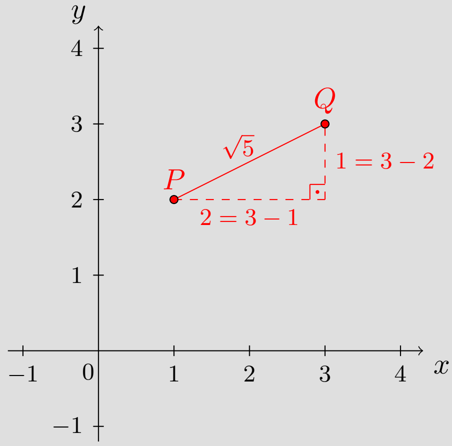
Der Abstand zwischen Schild und Hydrant beträgt also (in der hier verwendeten Längeneinheit Meter) etwa 6 Meter und 46 Zentimeter. Für rein mathematische Betrachtungen sind auch hier die Längeneinheiten nicht wichtig, so dass diese im Folgenden wieder weggelassen werden.

Das obige Beispiel des Schilds und des Hydranten kann man bequem verallgemeinern. Der Abstand zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^2$ ist stets durch das Anlegen eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks und durch den Satz des Pythagoras zu bestimmen.

Beispiel 9.3.1

Die Punkte $P = (1; 2)$ und $Q = (3; 3)$ haben den Abstand

$$\sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \ .$$



Der Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene kann also dadurch berechnet werden, dass man aus ihren Abszissen und Ordinaten die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt und dann den Satz des Pythagoras anwendet. Weiterhin ist in obigem Beispiel 9.3.1 ersichtlich, dass der Abstand zwischen den Punkten P und Q genau die Länge eines endlichen Stücks der Gerade PQ beschreibt, nämlich desjenigen Stücks zwischen P und Q. Dieses endliche Stück der Gerade PQ heißt **Strecke** zwischen P und Q und wird mit dem Symbol $\overline{PQ}$ bezeichnet. Die **Länge der Strecke** $\overline{PQ}$ ist der Abstand zwischen P und Q und trägt das Symbol $[\overline{PQ}]$.

Info 9.3.2

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten $P = (x_0; y_0)$ und $Q = (x_1; y_1)$ im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$[\overline{PQ}] = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,.$$

Man stellt hier außerdem fest: zwei Punkte haben genau dann den Abstand Null, wenn sie identisch sind.

Aufgabe 9.3.1 a. Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte $A = (-1; -5)$ und $B = (4; 7)$.
$[\overline{AB}] =$ ☐

b. Berechnen Sie *das Quadrat* des Abstands der beiden Punkte $P = (3; 0)$ und $Q = (1; \psi)$ in Abhängigkeit von ψ.
$[\overline{PQ}]^2 =$ ☐

c. Bestimmen Sie den Punkt V im III. Quadranten, der vom Punkt $U = (2; 1)$ den Abstand $3\sqrt{5}$ hat und auf der Geraden durch U mit der Steigung 2 liegt.
$V =$ ☐

Beim zweiten Aufgabenteil ist ψ eine unbekannte Konstante, die in der Lösung als eingegeben werden kann.

Lösung:

a.
$$[\overline{AB}] = \sqrt{(-1-4)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

b.
$$[\overline{PQ}]^2 = (3-1)^2 + (0-\psi)^2 = 4 + \psi^2$$

c. Die Gerade durch $U = (2; 1)$ mit der Steigung 2 hat nach Abschnitt 9.2.2 die Gleichung $y = 2x+b$ mit dem Achsenabschnitt b, der durch Einsetzen des Punktes U ermittelt werden kann:

$$1 = 2 \cdot 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -3 \; .$$

Somit ergibt sich die Gleichung $y = 2x - 3$ für die Gerade durch U mit Steigung 2. Punkte auf dieser Geraden haben also die Koordinaten $(x; 2x - 3)$. Von diesen Punkten gilt es nun denjenigen zu finden, der von U den Abstand $3\sqrt{5}$ hat und im III. Quadranten liegt. Für den Abstand zwischen $U = (2; 1)$ und einem Punkt $(x; 2x - 3)$ gilt in Abhängigkeit von x:

$$\begin{aligned}[\overline{U(x; 2x-3)}] &= \sqrt{(2-x)^2 + (1-(2x-3))^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = \\ &= \sqrt{(x-2)^2 + 4(x-2)^2} = \sqrt{5(x-2)^2} = \sqrt{5}|x-2| \; .\end{aligned}$$

Das Lösen der Gleichung
$$\sqrt{5}|x-2| = 3\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| = 3$$
mit den Methoden aus 2.2 liefert die beiden x-Werte -1 und 5. Dabei kann nur der x-Wert -1 als Abszisse eines Punktes im III. Quadranten auftreten. Die zugehörige Ordinate ergibt sich durch Einsetzen in die Geradengleichung:

$$y = 2 \cdot (-1) - 3 = -5 \; .$$

Somit ist der gesuchte Punkt $V = (-1; -5)$.

9.3.3 Koordinatengleichungen für Kreise

Hat man in der Ebene ein Koordinatensystem zur Verfügung, so kann man nun die Punkte auf einem Kreis unter Verwendung des Abstandsbegriffs aus dem vorigen Abschnitt 9.3.2 mit Hilfe einer Gleichung, der sogenannten Kreisgleichung, beschreiben. In der Praxis möchte man sich die, in der Abstandsformel obligatorische, Wurzel ersparen und benutzt stattdessen das Quadrat des Abstands. Dies ist möglich, da Abstände immer nicht-negativ sind. Es gilt also für zwei Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$:

$$[\overline{P_1P_2}] = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad [\overline{P_1P_2}]^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 \; .$$

Dies wird in der folgenden Infobox zusammengefasst:

Info 9.3.3

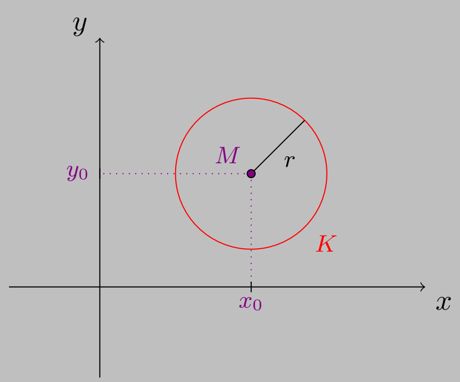
Ein **Kreis** K in der Ebene mit einem vorgegebenen Koordinatensystem ist die Menge aller Punkte, die einen festen Abstand $r > 0$, den sogenannten **Radius**, zu einem gemeinsamen **Mittelpunkt** $M = (x_0; y_0)$ besitzen. Die Angabe des Radius und des Mittelpunkts legt den Kreis eindeutig fest. Also gilt:

$$K = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\} \ .$$

So wie bei Geraden gibt man auch für Kreise oft nur die **Kreisgleichung** an:

$$K\colon \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

Es gehören also alle diejenigen Punkte zum Kreis, deren Koordinaten die Kreisgleichung erfüllen. Bild hierzu:



Mit Hilfe der Kreisgleichung können nun beliebige Kreise in der Ebene sowie Punkte auf diesen Kreisen und solche, die nicht auf diesen Kreisen liegen, beschrieben werden.

Beispiel 9.3.4

Der Kreis mit Mittelpunkt $P = (2; 1)$ und Radius $r = 2$ wird beschrieben durch die Kreisgleichung

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 = 4.$$

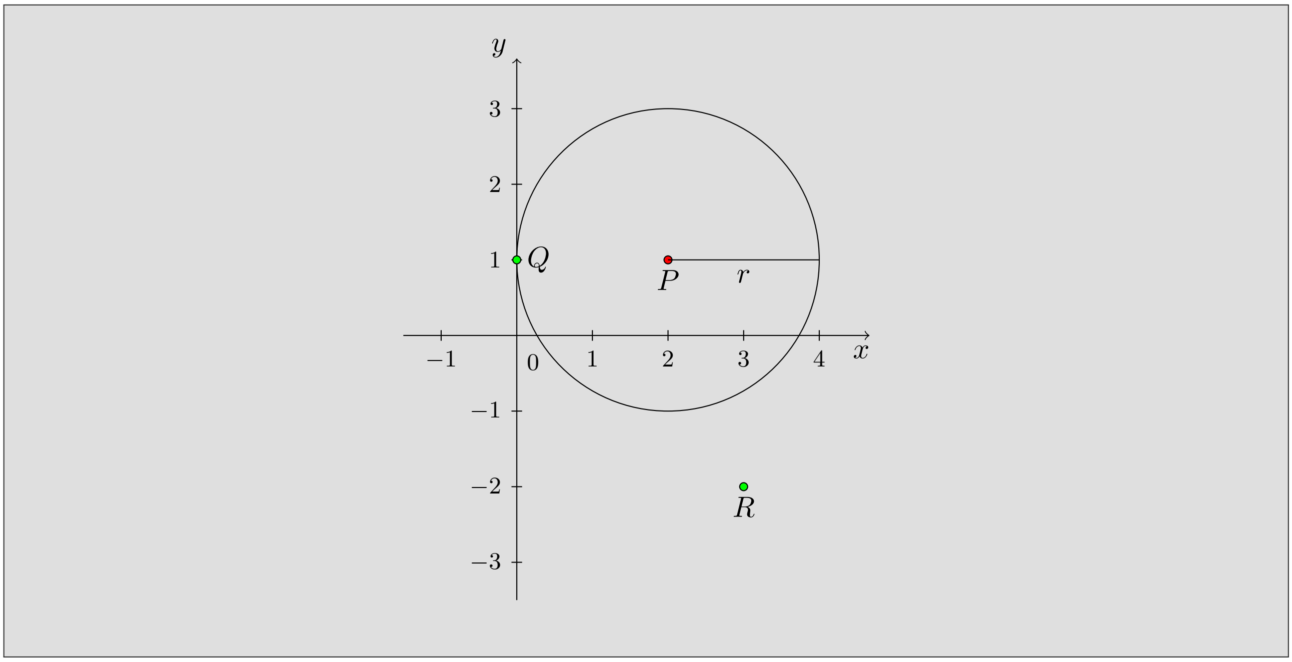
Auf dem Kreis liegen also alle Punkte, die von P den Abstand 2 haben. Beispielsweise ist $Q = (0; 1)$ ein Punkt auf dem Kreis, da

$$(0 - 2)^2 + (1 - 1)^2 = (-2)^2 + 0^2 = 4$$

gilt. $R = (3; -2)$ dagegen ist kein Punkt auf dem Kreis, denn er besitzt den Abstand

$$[\overline{PR}] = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{10} \neq 2.$$

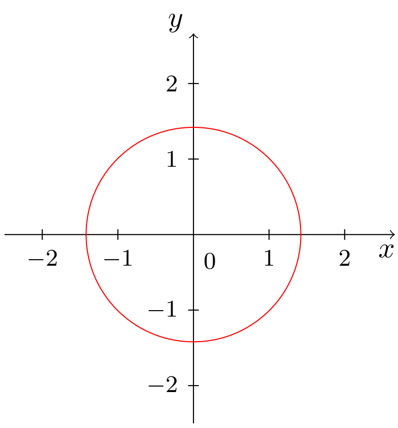
Der Punkt R erfüllt also nicht die Kreisgleichung.



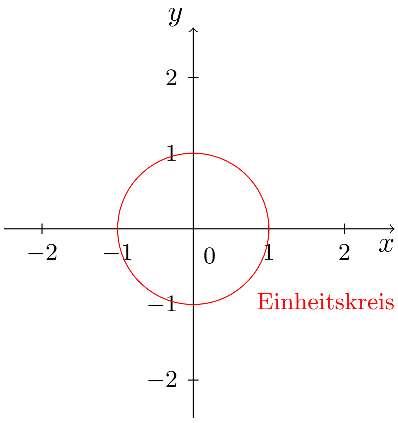
Ein wichtiger, häufig auftretender Spezialfall eines Kreises ist derjenige, für den der Mittelpunkt dem Ursprung des Koordinatensystems entspricht. So wird beispielsweise durch die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 2$$

ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$ um den Ursprung $(0;0)$ beschrieben:



Ein weiterer Spezialfall hiervon ist der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.



Dieser trägt die besondere Bezeichnung **Einheitskreis** und spielt eine besondere Rolle in der Trigonometrie (vgl.: Abschnitte 5.6 auf Seite 171 und 6.5 auf Seite 234).

Aufgabe 9.3.2 a. Ein Kreis Ξ ist durch die Gleichung

$$\Xi\colon x^2 + (y+2)^2 = 8$$

gegeben. Sein Mittelpunkt ist $M =$ ☐ und sein Radius lautet $r =$ ☐ . Zeichnen Sie den Kreis.

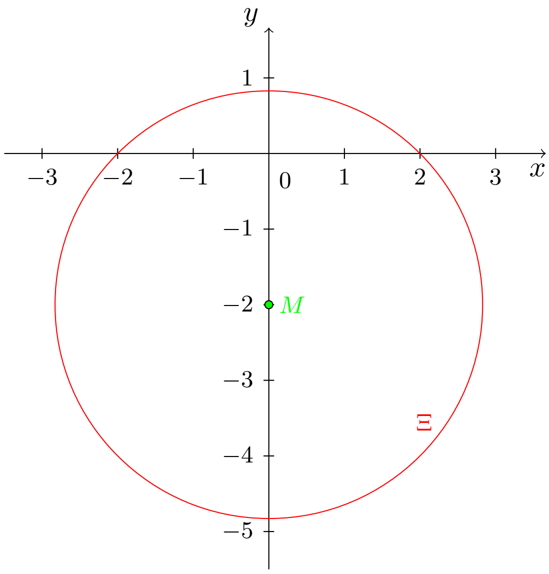
b. Die Kreisgleichung des Kreises vom Radius 1 um den Punkt $(-2;-1)$ lautet ☐ $= 1$.
Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebenen Punkte auf dem Kreis liegen. Markieren Sie diejenigen Punkte, die auf dem Kreis liegen.
- ☐ Der Ursprung
- ☐ $(1;1)$
- ☐ $(-2;0)$
- ☐ $\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$

Lösung:

a.

$$M = (0;-2)$$

$$r = 2\sqrt{2}$$



b.

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

Der Ursprung und $(1;1)$ liegen nicht auf dem Kreis, $(-2;0)$ und $\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ hingegen schon, wie das Einsetzen in die Kreisgleichung zeigt:

$$(0+2)^2 + (0+1)^2 = 4+1 = 5 \neq 1,$$

$$(1+2)^2 + (1+1)^2 = 9+4 = 13 \neq 1,$$

$$(-2+2)^2 + (0+1)^2 = 0+1 = 1,$$

$$\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1\,.$$

In den obigen Beispielen und Aufgaben ist erkennbar, dass das Ablesen des Mittelpunkts und des Radius eines Kreises aus seiner Gleichung relativ einfach ist, insofern die Gleichung genau in der Form

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

aus Infobox 9.3.3 gegeben ist. Deshalb spricht man hierbei auch von der **Normalform** der Kreisgleichung. Leider kommt es aber oft vor, dass die Kreisgleichung nicht in dieser einfachen Form vorliegt, sondern erst in einigen Rechenschritten umgeformt werden muss, um dann den Mittelpunkt und den Radius ablesen zu können. Das Vorgehen wird in dem folgenden Beispiel demonstriert.

Beispiel 9.3.5

Gegeben ist ein Kreis K durch die Gleichung

$$K\colon x^2 + y^2 - 6x + y + \frac{21}{4} = 0.$$

Dieser Gleichung sieht man weder sofort an, dass es sich um eine Kreisgleichung handelt, noch sind sofort der Mittelpunkt und der Radius des Kreises ersichtlich. Man kann die Gleichung aber auf Normalform bringen, indem man sich der Methode der Quadratischen Ergänzung bedient. Diese wird hier auf die Terme mit x und die Terme mit y in obiger Kreisgleichung getrennt angewandt.

Für die Terme mit x ergibt sich

$$x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3x = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9,$$

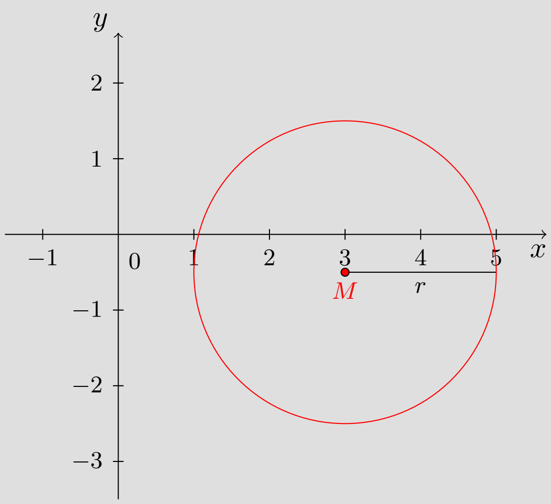
und für die Terme mit y ergibt sich

$$y^2 + y = y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}y = y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\,.$$

Somit folgt für die Kreisgleichung:

$$x^2+y^2-6x+y+\frac{21}{4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)^2-9+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{21}{4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$$

Somit ist die Kreisgleichung auf Normalform gebracht und der Mittelpunkt $M = \left(3; -\frac{1}{2}\right)$ und der Radius $r = 2$ können abgelesen werden:



Aufgabe 9.3.3
Bestimmen Sie Mittelpunkt P und Radius ρ des Kreises

$$\Lambda = \{(x;y) \,:\, x^2 + 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}y - y^2\}\,,$$

indem Sie die Kreisgleichung mittels Quadratischer Ergänzung auf Normalform bringen. Skizzieren Sie außerdem den Kreis.

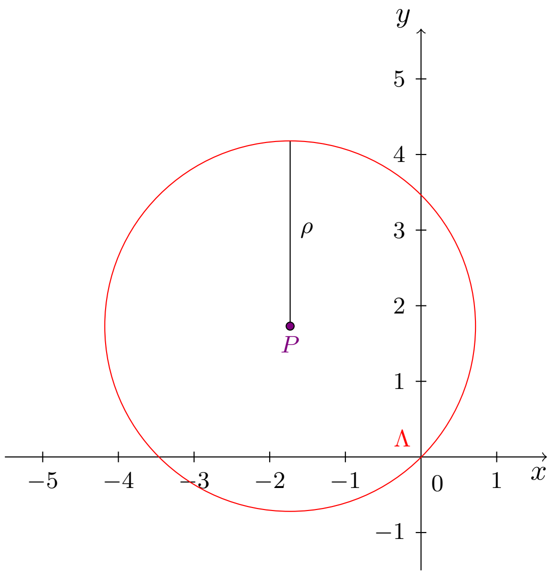
$P =$ ☐

$\rho =$ ☐

Lösung:

$$x^2 + 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}y - y^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 - 2\sqrt{3}y = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 6$$
$$\Leftrightarrow\; (x + \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 6$$

Somit: $P = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ und $\rho = \sqrt{6}$.



9.3.4 Lagebeziehungen für Kreise

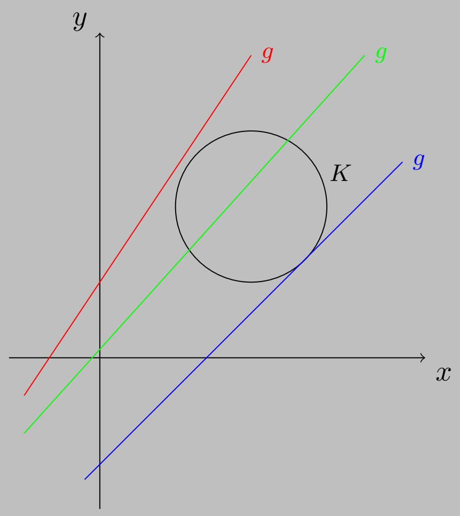
Genau wie für zwei Geraden, kann man nun für einen Kreis und eine Gerade oder zwei Kreise die Frage stellen, wie die beiden Objekte relativ zueinander im Koordinatensystem liegen. Dies bedeutet die Frage zu beantworten, ob die beiden Objekte sich schneiden, berühren oder keine Punkte gemeinsam haben. Für einen Kreis und eine Gerade kann man dann eventuelle Schnitt- oder Berührpunkte auch relativ einfach ausrechnen. Für zwei Kreise ist dies schwieriger und geht über den Rahmen dieses Brückenkurses hinaus. Für zwei Kreise wird also nur die Fragestellung behandelt werden, ob sich diese schneiden oder berühren, und nicht, an welchen Punkten dies passiert.

Info 9.3.6

Sind ein Kreis K und eine Gerade g in der Ebene (durch Koordinatengleichungen bezüglich eines festen Koordinatensystems) gegeben, so gibt es für ihre relative Lage genau drei Fälle:

1. Der Kreis K und die Gerade g haben keine gemeinsamen Punkte. Dies ist für die rote Gerade in der Abbildung unten der Fall. Eine solche Gerade heißt **Passante** des Kreises.
2. Der Kreis K und die Gerade g haben genau einen Punkt gemeinsam, das heißt die Gerade berührt den Kreis. Dies ist für die blaue Gerade in der Abbildung unten der Fall. Eine solche Gerade heißt **Tangente** des Kreises.
3. Der Kreis K und die Gerade g haben zwei gemeinsame Punkte, das heißt die Gerade schneidet den Kreis. Dies ist für die grüne Gerade in der Abbildung unten der Fall. Eine solche Gerade

heißt **Sekante** des Kreises.



Im Fall einer Sekante oder Tangente haben Kreis und Gerade also zwei Punkte oder einen Punkt gemeinsam. Wie kann man diesen Punkt oder diese Punkte nun ausrechnen? Da die Punkte jeweils auf Kreis und Gerade liegen, müssen sie sowohl die Koordinatengleichung des Kreises als auch die Koordinatengleichung der Geraden erfüllen. Man hat dann also zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Koordinaten der Schnittpunkte und kann diese dadurch ausrechnen. Dabei ist allerdings Folgendes zu beachten: Da in der Koordinatengleichung für Kreise die Unbekannten quadriert vorkommen, handelt es sich *nicht* um zwei lineare Gleichungen. Es sind also leider *nicht* die Methoden zum Lösen linearer Gleichungssysteme aus Kapitel 5 anwendbar. Die folgende Infobox fasst die Methode zur Berechnung der Schnittpunkte zusammen.

Info 9.3.7

Sind ein Kreis K in der Ebene mit Mittelpunkt $(x_0; y_0)$ und Radius r mittels einer Koordinatengleichung

$$K\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

und eine Gerade mit Steigung m und Achsenabschnitt b in Normalform

$$g\colon y = mx + b$$

gegeben, so kann zur Berechnung eventueller Schnittpunkte, die Gleichung für g in die Gleichung für K eingesetzt werden. Dies resultiert in einer quadratischen Gleichung in der Variablen x:

$$(x - x_0)^2 + (\underbrace{mx + b}_{=y} - y_0)^2 = r^2 \ .$$

Für quadratische Gleichungen können bekanntermaßen drei Fälle auftreten (vgl. 2.1.5):

1. Die quadratische Gleichung hat keine Lösung. In diesem Fall handelt es sich bei g um eine Passante von K. Es lässt sich keine x-Koordinate eines gemeinsamen Punktes finden.
2. Die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung. In diesem Fall handelt es sich bei g um eine Tangente an K. Zu der x-Koordinate (der Lösung der quadratischen Gleichung) lässt sich mit Hilfe der Geradengleichung eine zugehörige y-Koordinate berechnen. Die beiden Koordinaten zusammen bilden den Berührpunkt der Tangente g am Kreis K.
3. Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. In diesem Fall handelt es sich bei g um eine Sekante von K. Zu den beiden x-Koordinaten (den Lösungen der quadratischen Gleichung) lassen sich mit Hilfe der Geradengleichung zugehörige y-Koordinaten berechnen. Die beiden Koordinatenpaare bilden die Schnittpunkte der Sekante g mit dem Kreis K.

Beispiel 9.3.8

Gegeben sind der Kreis K mit Mittelpunkt $(2;2)$ und Radius 1 durch

$$K\colon (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

sowie die Geraden g_1, g_2 und g_3 durch

$$g_1\colon y = x - \sqrt{2}\ ,$$

$$g_2\colon y = x + 1$$

und

$$g_3\colon y = 2x + 2\ .$$

- Gerade g_1:
  Einsetzen der Geradengleichung g_1 in die Kreisgleichung liefert

$$(x-2)^2 + (x-\sqrt{2}-2)^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2 + [(x-2)-\sqrt{2}]^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-2)^2 + (x-2)^2 - 2\sqrt{2}(x-2) + (\sqrt{2})^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2(x-2)^2 - 2\sqrt{2}(x-2) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (\sqrt{2}(x-2)-1)^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}(x-2) - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x - 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad x = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

  Die entstehende quadratische Gleichung hat nur die Lösung $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, womit g_1 eine Tangente an K ist, welche K in einem Punkt mit der x-Koordinate $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ berührt. Die zugehörige y-Koordinate ist aus der Geradengleichung zu berechnen:

$$y = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

  Somit berührt die Tangente g_1 den Kreis K im Punkt $P = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

- Gerade g_2:
  Einsetzen der Geradengleichung g_2 in die Kreisgleichung liefert

$$(x-2)^2 + (x+1-2)^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2 + (x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 \ \wedge \ x_2 = 1 \; .$$

Die entstehende quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, womit g_2 eine Sekante des Kreises K ist, die K in zwei Punkten mit den beiden x-Koordinaten $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ schneidet. Die zugehörigen y-Koordinaten berechnen sich aus der Geradengleichung:

$$y_1 = x_1 + 1 = 2 + 1 = 3 \ \text{ und } \ y_2 = x_2 + 1 = 1 + 1 = 2 \; .$$

Somit sind die Schnittpunkte der Sekanten g_2 mit dem Kreis K die beiden Punkte $Q_1 = (2; 3)$ und $Q_2 = (1; 2)$.

- Gerade g_3:
  Einsetzen der Geradengleichung g_3 in die Kreisgleichung liefert

$$(x-2)^2 + (2x + 2 - 2)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (2x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + 4x^2 = 1$$

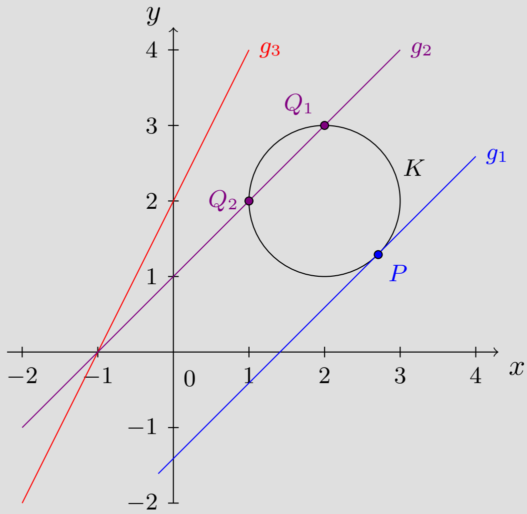
$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 4x + 3 = 0 \; .$$

  Die Diskriminante (vgl. 2.1.5) dieser quadratischen Gleichung ist

$$(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 16 - 60 < 0 \; ,$$

  womit die Gleichung keine Lösung besitzt. Folglich ist die Gerade g_3 eine Passante des Kreises K.

Der Kreis, alle drei Geraden und die Schnittpunkte sind in folgender Abbildung dargestellt:



Aufgabe 9.3.4
Gegeben sind der Kreis K durch die Gleichung

$$K\colon x^2 + (y-1)^2 = 2$$

sowie die beiden Geraden

$$g\colon y = \sqrt{7}x + 5$$

und

$$h\colon y = 2x + 2\ .$$

a. Zeigen Sie, dass g eine Tangente an K ist und berechnen Sie x- und y-Koordinate des Berührpunkts $(x; y)$ von g und K.
 $x =$ $\boxed{}$
 $y =$ $\boxed{}$

b. Zeigen Sie, dass h eine Sekante von K ist und berechnen Sie x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ von h und K.
 $x_1 =$ $\boxed{}$
 $y_1 =$ $\boxed{}$
 $x_2 =$ $\boxed{}$
 $y_2 =$ $\boxed{}$

Lösung:

a. Einsetzen von g in K ergibt

$$x^2 + (\sqrt{7}x + 5 - 1)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (\sqrt{7}x + 4)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 7x^2 + 8\sqrt{7}x + 16 = 2$$

$$\Leftrightarrow\; 8x^2 + 8\sqrt{7}x + 14 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 + 4\sqrt{7}x + 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; (2x + \sqrt{7})^2 = 0\ .$$

Somit hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung, und es handelt sich bei g um eine Tangente an K. Berechnung des Berührpunkts:

$$(2x + \sqrt{7})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + \sqrt{7} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\sqrt{7}}{2}\ .$$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert die zugehörige y-Koordinate:

$$y = \sqrt{7}\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) + 5 = -\frac{7}{2} + 5 = \frac{3}{2}\ .$$

b. Einsetzen von h in K ergibt

$$x^2 + (2x + 2 - 1)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (2x + 1)^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 5x^2 + 4x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{10} = \frac{-4 \pm 6}{10} \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{1}{5} \;\wedge\; x_2 = -1\ .$$

Da die quadratische Gleichung zwei Lösungen besitzt, ist h eine Sekante von K. Die zugehörigen y-Koordinaten ergeben sich wieder durch Einsetzen in die Geradengleichung:

$$y_1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) + 2 = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}$$

und

$$y_2 = 2\,(-1) + 2 = -2 + 2 = 0\ .$$

Aufgabe 9.3.5
Gegeben sind der Kreis K durch die Kreisgleichung

$$K\colon (x-3)^2 + y^2 = 2$$

und die Gerade g mit Steigung 2 und Achsenabschnitt b durch die Geradengleichung

$$g\colon y = 2x + b$$

in Normalform. Bestimmen Sie das Intervall, in dem der Achsenabschnitt b liegen muss, damit g eine Sekante von K ist.
$b \in]$ ______ ; ______ $[$.

Lösung:
Einsetzen der Geradengleichung (mit unbekanntem b) in die Kreisgleichung liefert

$$(x-3)^2 + (2x+b)^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 4bx + b^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad 5x^2 + (4b-6)x + b^2 + 7 = 0\ .$$

Damit es sich bei g um eine Sekante handelt, muss diese quadratische Gleichung (in der Variablen x) zwei Lösungen besitzen. Dies ist der Fall wenn ihre Diskriminante positiv ist, also wenn gilt:

$$(4b-6)^2 - 4\cdot 5(b^2+7) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 16b^2 - 48b + 36 - 20b^2 - 140 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad -4b^2 - 48b - 104 > 0$$

$$\Leftrightarrow\quad b^2 + 12b + 26 < 0\ .$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $b^2 + 12b + 26 = 0$ (in der Variablen b) ergeben sich zu

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-104}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -6 \pm \sqrt{10}\ .$$

Damit ist das gesuchte Intervall $]-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10}[$.

Auch Geraden, deren Gleichungen nicht auf Normalform gebracht werden können (also solche, die parallel zur Ordinatenachse verlaufen), können natürlich Kreise schneiden oder berühren. Für diese Geraden ist das oben stehende Verfahren nicht direkt anwendbar. Das Vorgehen in diesem Fall wird im folgenden Beispiel demonstriert.

Beispiel 9.3.9

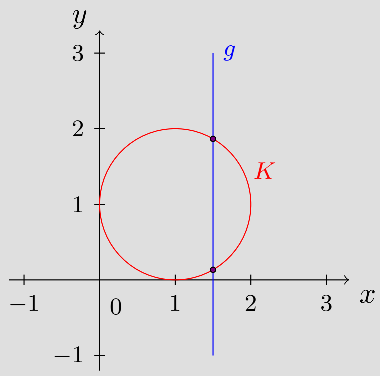
Gegeben sind der Kreis K durch die Kreisgleichung

$$K\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

sowie die Gerade g durch die Gleichung

$$g\colon x = \frac{3}{2}\ .$$

Die folgende Abbildung stellt die beiden Objekte dar:



Offenbar ist g eine Sekante von K. Um die Schnittpunkte zu berechnen, kann in diesem Fall die Geradengleichung natürlich nicht nach y aufgelöst werden. Stattdessen wird einfach die Geradengleichung $x = \frac{3}{2}$ für x in die Kreisgleichung eingesetzt. Dies liefert zwei y-Werte, die y-Koordinaten der Schnittpunkte:

$$(\frac{3}{2} - 1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 2y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-1}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \;\wedge\; y_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Die zugehörigen x-Koordinaten sind natürlich beide gleich $\frac{3}{2}$, da die Schnittpunkte auf der Geraden g liegen. Somit ergeben sich die beiden Schnittpunkte $\left(\frac{3}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $\left(\frac{3}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ der Geraden g und des Kreises K.

Für die relative Lage zweier Kreise listet die folgende Infobox die möglichen Fälle auf, zusammen mit allgemeinen Kriterien, durch die festgestellt werden kann, welcher Fall für zwei gegebene Kreise jeweils vorliegt.

Info 9.3.10

Sind zwei (verschiedene) Kreise K_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1 sowie K_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 in der Ebene (durch Koordinatengleichungen bezüglich eines festen Koordinatensystems) gegeben, so gibt es für ihre relative Lage genau drei Fälle:

1. Die Kreise K_1 und K_2 haben keine gemeinsamen Punkte, das heißt sie schneiden sich nicht. Dies ist genau dann der Fall wenn für die Radien r_1 und r_2 sowie für den Abstand $[\overline{M_1M_2}]$ der beiden Mittelpunkte gilt:

$$[\overline{M_1M_2}] > r_1 + r_2 \;\text{ oder }\; [\overline{M_1M_2}] < |r_1 - r_2|\,.$$

2. Die Kreise K_1 und K_2 haben einen gemeinsamen Punkt, das heißt sie berühren sich. Dies ist genau dann der Fall wenn für die Radien r_1 und r_2 sowie für den Abstand $[\overline{M_1M_2}]$ der

beiden Mittelpunkte gilt:

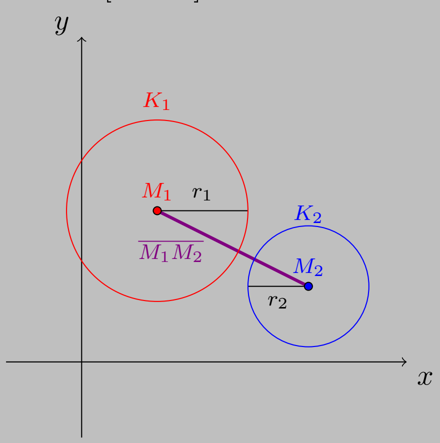
$$[\overline{M_1M_2}] = r_1 + r_2 \;\text{ oder }\; [\overline{M_1M_2}] = |r_1 - r_2| \; .$$

3. Die Kreise K_1 und K_2 haben zwei gemeinsame Punkte, das heißt sie schneiden sich. Dies ist genau dann der Fall wenn für die Radien r_1 und r_2 sowie für den Abstand $[\overline{M_1M_2}]$ der beiden Mittelpunkte gilt:

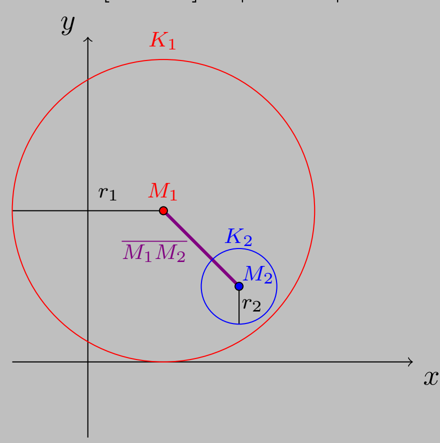
$$|r_1 - r_2| < [\overline{M_1M_2}] < r_1 + r_2 \; .$$

Die drei Situationen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:

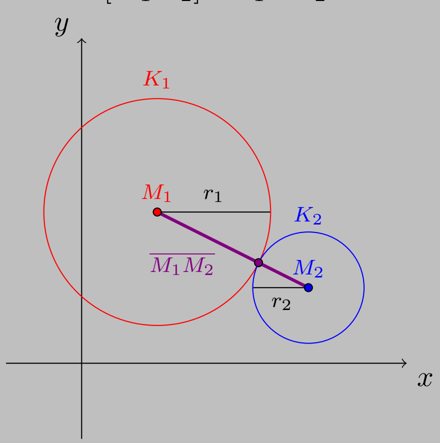
$[\overline{M_1M_2}] > r_1 + r_2$:



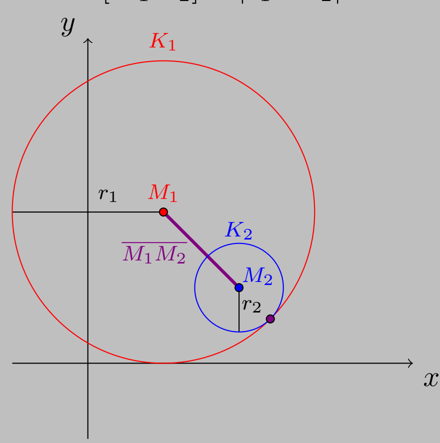
$[\overline{M_1M_2}] < |r_1 - r_2|$:



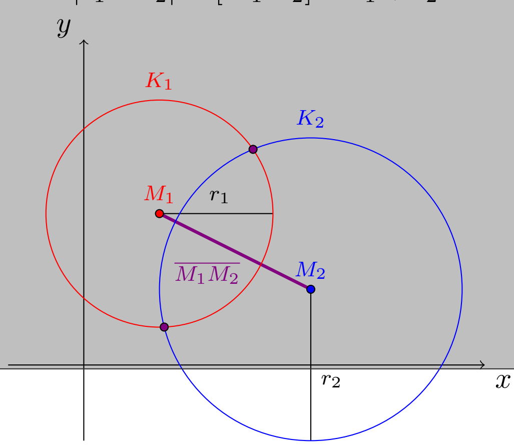
$[\overline{M_1M_2}] = r_1 + r_2$:



$[\overline{M_1M_2}] = |r_1 - r_2|$:



$|r_1 - r_2| < [\overline{M_1M_2}] < r_1 + r_2$:



Um die relative Lage zweier Kreise festzustellen, benötigt man also nur deren Mittelpunkte und Radien. Das Berechnen möglicher Schnittpunkte ist schwieriger und kann im Rahmen dieses Brückenkurses nicht behandelt werden.

Beispiel 9.3.11

Gegeben sind ein Kreis K mit Mittelpunkt M_K und Radius r_K durch die Gleichung

$$K\colon x^2 + y^2 - 2y = 1$$

und ein Kreis L mit Mittelpunkt M_L und noch unbekanntem Radius $r > 0$ durch die Kreisgleichung

$$L\colon (x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2.$$

Es sind diejenigen Werte für r zu bestimmen, für die die Kreise K und L sich schneiden, sich berühren bzw. sich nicht schneiden.

Aus der Kreisgleichung für L kann der Mittelpunkt M_L direkt abgelesen werden: $M_L = (-1; 1)$. Die Kreisgleichung für K ist noch nicht in Normalform. Durch quadratische Ergänzung kann diese aber leicht auf Normalform gebracht werden, so dass Mittelpunkt M_K und Radius r_K abgelesen werden können:

$$x^2 + y^2 - 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = 2\ .$$

Also ist $M_K = (0; 1)$ und $r_K = \sqrt{2}$. Somit beträgt der Abstand der beiden Mittelpunkte

$$[\overline{M_K M_L}] = \sqrt{(0+1)^2 + (1-1)^2} = 1\ ,$$

und die Summe der beiden Radien ist

$$r + r_K = r + \sqrt{2}\ .$$

Da $r > 0$ gilt, folgt

$$r + \sqrt{2} > \sqrt{2} > 1 = [\overline{M_K M_L}]\ .$$

Somit kann die Situation $[\overline{M_K M_L}] \geq r + \sqrt{2}$ in diesem Fall nicht eintreten. (Der geometrische Grund hierfür ist, dass der Mittelpunkt von L innerhalb des Kreises K liegt, wie auch aus der Abbildung unten hervorgeht.) Nach den Kriterien in Infobox 9.3.10 berühren sich die beiden Kreise somit, falls

$$|r - \sqrt{2}| = 1 = [\overline{M_K M_L}]$$

gilt. Nach dem Abschnitt über Betragsgleichungen, ist diese Gleichung erfüllt, falls

$$r - \sqrt{2} = 1 \ \text{ oder } \ r - \sqrt{2} = -1$$

ist. Also sind die beiden Radien r, für die der Kreis L den Kreis K berührt:

$$r = \sqrt{2} + 1 \ \text{ und } \ r = \sqrt{2} - 1\ .$$

Nun sind noch die restlichen möglichen Werte für r zu untersuchen. Für $0 < r < \sqrt{2}-1$ gilt

$$|r-\sqrt{2}| = -(r-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-r > 1 = [\overline{M_K M_L}]\ ,$$

womit K und L in diesem Fall keine gemeinsamen Punkte besitzen. Für $\sqrt{2}-1 < r < \sqrt{2}+1$ sind zur Untersuchung des Betrags nochmal die Fälle $\sqrt{2}-1 < r \leq \sqrt{2}$ und $\sqrt{2} < r < \sqrt{2}+1$ zu unterscheiden. Im Fall $\sqrt{2}-1 < r \leq \sqrt{2}$ gilt

$$|r-\sqrt{2}| = -(r-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-r < 1 = [\overline{M_K M_L}]\ ,$$

und auch im Fall $\sqrt{2} < r < \sqrt{2}+1$ gilt

$$|r-\sqrt{2}| = r-\sqrt{2} < 1 = [\overline{M_K M_L}]\ .$$

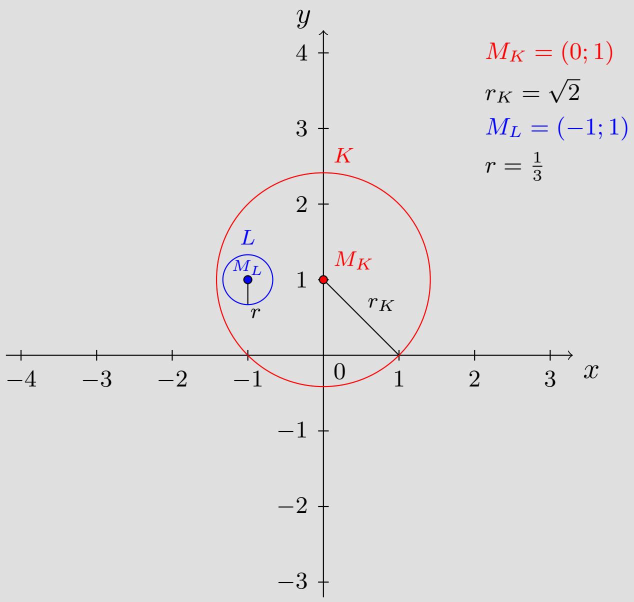
Damit haben K und L für $\sqrt{2}-1 < r < \sqrt{2}+1$ zwei gemeinsame Punkte, die Kreise schneiden sich also. Zuletzt gilt im Fall $r > \sqrt{2}+1$:

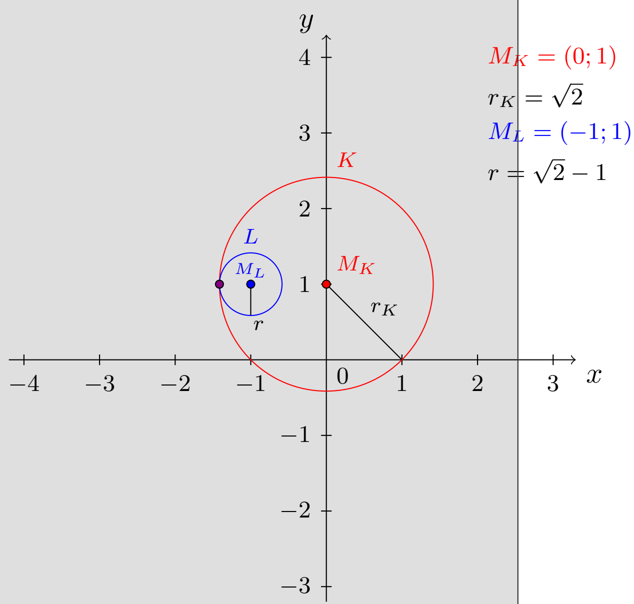
$$|r-\sqrt{2}| = r-\sqrt{2} > 1 = [\overline{M_K M_L}]\ .$$

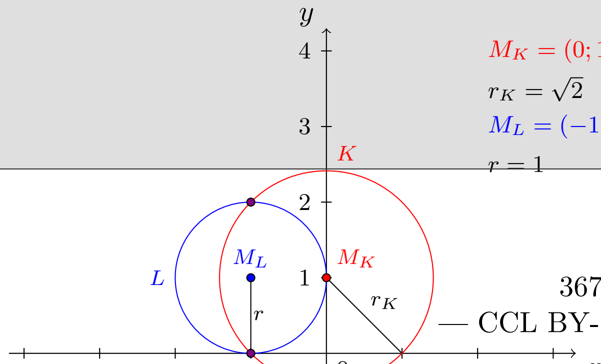
Somit haben K und L auch in diesem Fall keine gemeinsamen Punkte. Zusammenfassend erhält man für die relative Lage von K und L die folgenden Bedingungen:

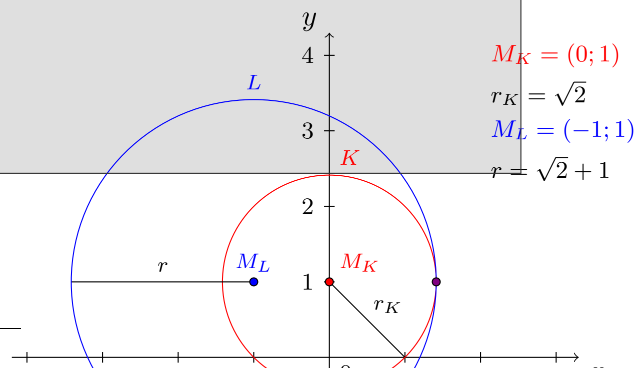
- Falls $r \in \{\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1\}$ gilt, berühren sich die beiden Kreise K und L in jeweils einem Punkt.
- Falls $r \in \left]\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1\right[$ gilt, schneiden sich die beiden Kreise K und L in jeweils zwei Punkten.
- Falls $r \in \left]0; \sqrt{2}-1\right[\cup \left]\sqrt{2}+1; \infty\right[$ gilt, haben die beiden Kreise K und L keine gemeinsamen Punkte.

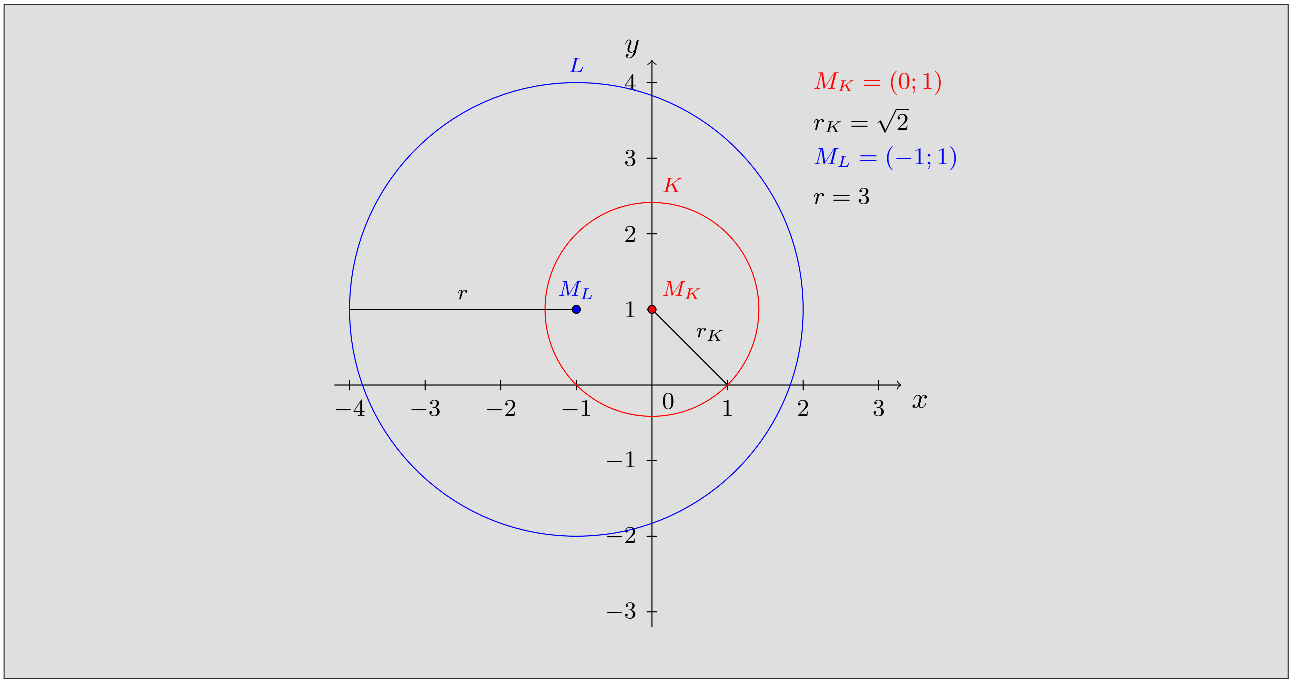
Einige Fälle für die Kreise K und L sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:











Aufgabe 9.3.6
Gegeben sind die beiden Kreise K_1 und K_2 durch die Gleichungen

$$K_1\colon (x+6)^2 + (y+4)^2 = 64$$

und

$$K_2\colon x^2 + 2x + y^2 - 16y + 40 = 0 \ .$$

Die beiden Kreise K_1 und K_2

- ☐ berühren sich in einem Punkt,
- ☐ schneiden sich in zwei Punkten,
- ☐ haben keine gemeinsamen Punkte.

Lösung:
Der Mittelpunkt M_1 und der Radius r_1 des Kreises K_1 sind direkt ablesbar. Es gilt $M_1 = (-6;-4)$ und $r_1 = 8$. Für K_2 ist eine quadratische Ergänzung durchzuführen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 16y + 40 = 0 \ &\Leftrightarrow \ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2\cdot 8y + 64 + 40 - 64 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ (x+1)^2 + (y-8)^2 = 25 \ . \end{aligned}$$

Nun können der Mittelpunkt M_2 und der Radius r_2 von K_2 abgelesen werden. Es gilt $M_2 = (-1;8)$ und $r_2 = 5$. Damit berechnet man

$$[\overline{M_1M_2}] = \sqrt{(-1+6)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

und

$$r_1 + r_2 = 13 \ .$$

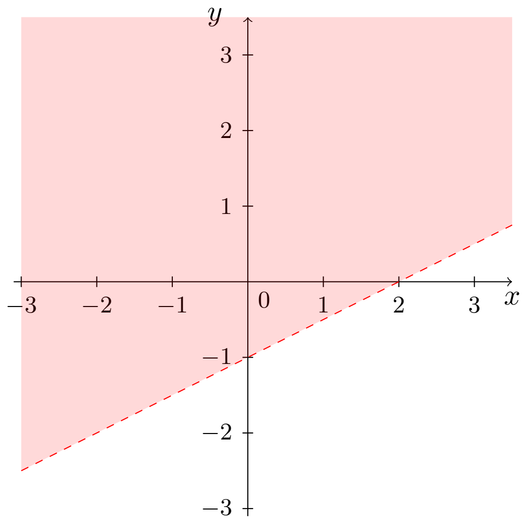
Es ist in diesem Fall also $[\overline{M_1M_2}] = 13 = r_1 + r_2$, und nach Infobox 9.3.10 berühren sich die Kreise K_1 und K_2 folglich in einem Punkt.

9.4 Bereiche in der Ebene

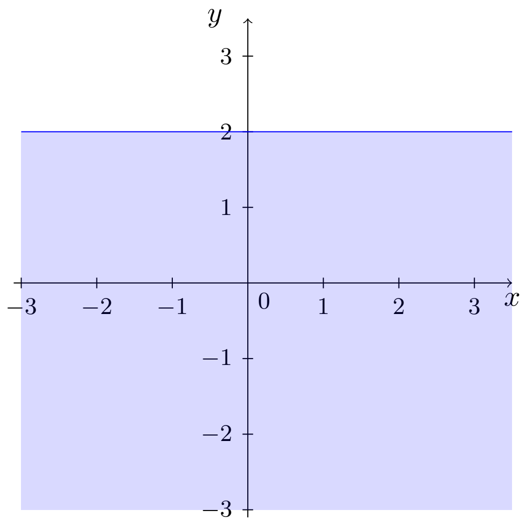
9.4.1 Einführung

Während in den vorigen Abschnitten Kurven in der Ebene (Geraden oder Kreise) mittels Koordinatengleichungen untersucht wurden, sollen in diesem Abschnitt die Koordinaten*gleichungen* durch Koordinaten*ungleichungen* ersetzt werden. Dadurch werden dann keine Kurven mehr beschrieben, sondern *Bereiche* in der Ebene, die durch die entsprechenden Kurven begrenzt werden. Die begrenzende Kurve kann dabei zum Bereich gehören oder nicht, je nachdem, ob man eine strenge Ungleichung ($<$ oder $>$) vorliegen hat oder nicht ($\leq$ oder $\geq$). Bereiche können zum Beispiel Flächen ober- oder unterhalb von Geraden, außer- oder innerhalb von Kreisen oder sogar Schnittmengen davon sein. Einige Beispiele sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

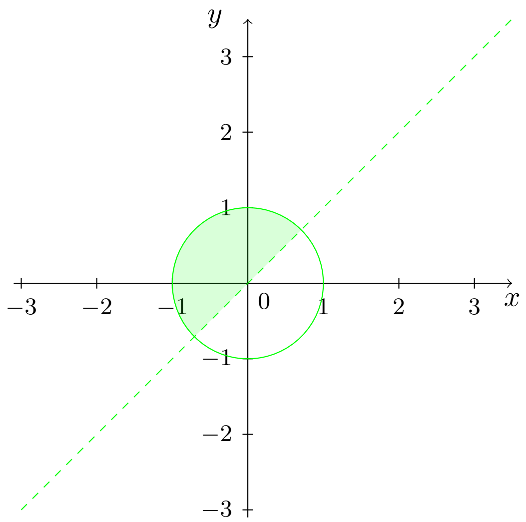
- Bereich oberhalb der Geraden $y = \frac{1}{2}x - 1$, ohne die Gerade selbst:



- Bereich unterhalb der Geraden $y = 2$, inklusive der Geraden:



- Bereich oberhalb der Gerade $y = x$ und innerhalb des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$, inklusive der Punkte auf dem Kreis, aber ohne die Punkte auf der Geraden:



Hier und im Folgenden wird die übliche Konvention benutzt, dass in Abbildungen diejenigen Kurven, welche zur Fläche gehören, durchgezogen und diejenigen, welche *nicht* zur Fläche gehören, gestrichelt dargestellt werden.

9.4.2 Von Geraden und Kreisen begrenzte Bereiche

Die folgende Infobox listet die möglichen entstehenden Bereiche auf, wenn man in einer Geradengleichung das Gleichheitszeichen durch ein Ungleichheitszeichen ersetzt.

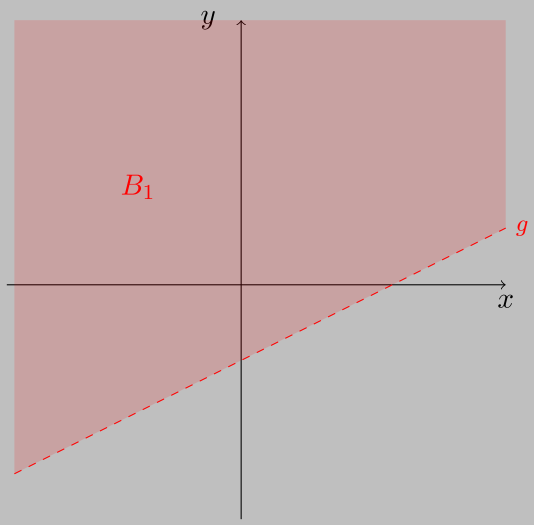
Info 9.4.1

Ist eine Gerade g in der Ebene (mit Steigung m und Achsenabschnitt b) mittels einer Geradengleichung in Normalform bezüglich eines festen Koordinatensystems gegeben,

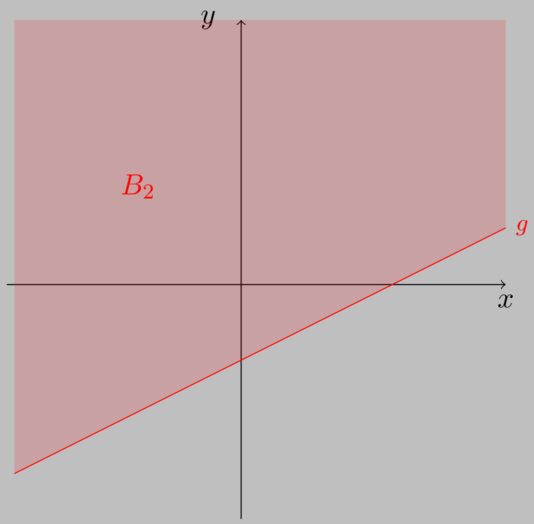
$$g\colon y = mx + b\ ,$$

dann erhält man durch Ersetzen des Gleichheitszeichens durch ein Ungleichheitszeichen die folgenden Mengen, welche jeweils Bereiche in der Ebene beschreiben:

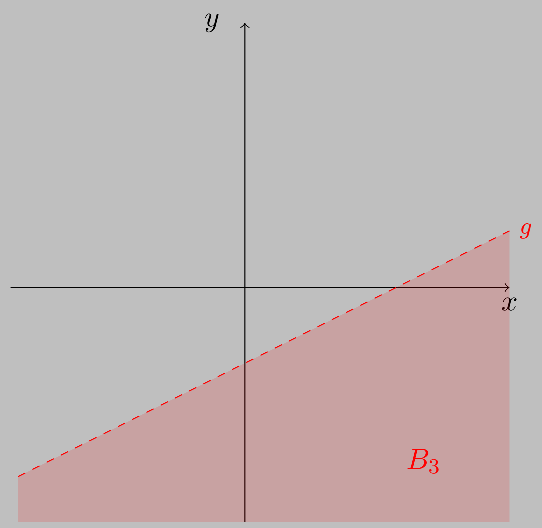
- $B_1 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y > mx + b\}$ = „Bereich oberhalb der Geraden, ohne die Punkte auf der Geraden selbst“



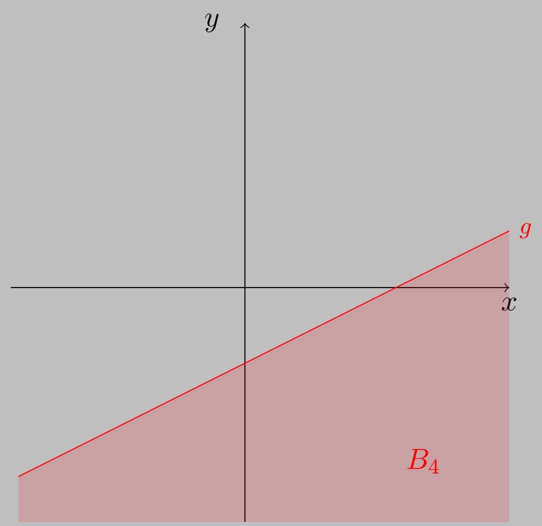
- $B_2 := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq mx + b\}$ = „Bereich oberhalb der Geraden, inklusive der Punkte auf der Geraden“



- $B_3 := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < mx + b\}$ = „Bereich unterhalb der Geraden, ohne die Punkte auf der Geraden selbst“



- $B_4 := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq mx + b\}$ = „Bereich unterhalb der Geraden, inklusive Punkte auf der Geraden“



Für Geraden, die nicht auf Normalform gebracht werden können, funktioniert die Überlegung für die Bereiche völlig analog. Das folgende Beispiel zeigt zwei einfache Fälle.

Beispiel 9.4.2

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon y = -x + 1$$

und

$$h\colon x = -1 \,.$$

Zu bestimmen und zu skizzieren sind die Mengen

$$A = \text{„Bereich unterhalb von } g, \text{ ohne die Punkte auf } g \text{ selbst“},$$

$$B = \text{„Bereich rechts von } h, \text{ inklusive der Punkte auf } h\text{“}$$

sowie $A \cap B$.

Zunächst gilt also

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < -x + 1\}$$

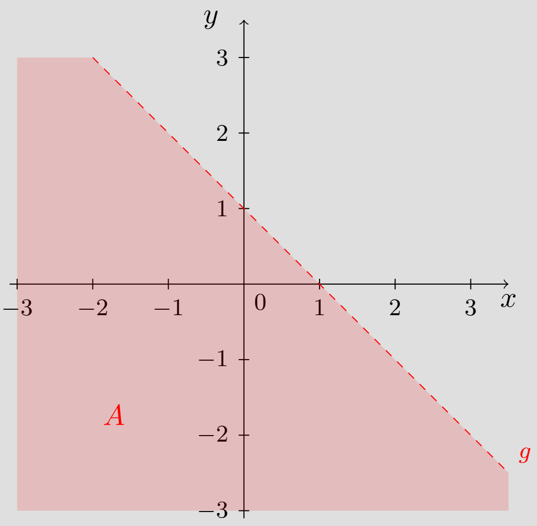
nach der Infobox oben und

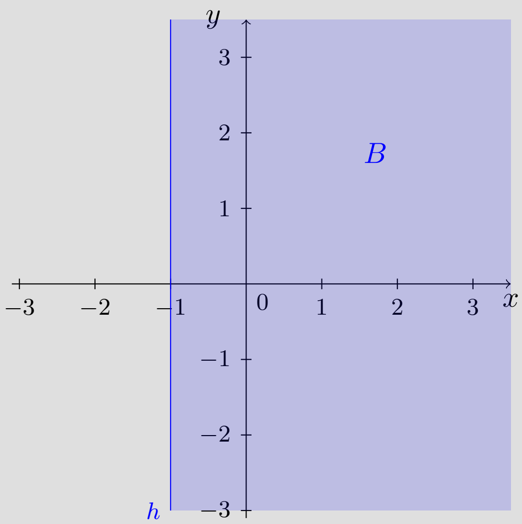
$$B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq -1\}\ ,$$

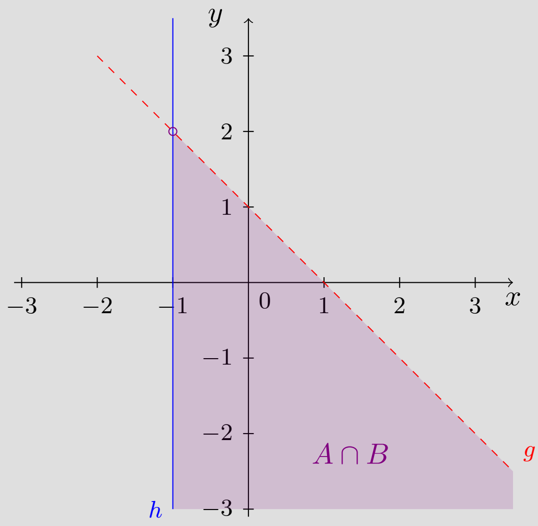
da rechts der Geraden h diejenigen Punkte liegen, deren x-Koordinaten größer als -1 sind. Die Schnittmenge $A \cap B$ sind diejenigen Punkte, welche beide Bedingungen erfüllen:

$$A \cap B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < -x + 1 \wedge x \geq -1\}\ .$$

Bilder hierzu:







Der Schnittpunkt $(-1; 2)$ der beiden Geraden ist dabei kein Element von $A \cap B$, da Punkte auf g generell nicht zum Bereich $A \cap B$ gehören. Im Bild ist dies durch einen leeren Kringel angedeutet.

Dieses Beispiel zeigt bereits Folgendes: Bereiche, welche durch nur eine Koordinatenungleichung gegeben sind, die aus einer Geradengleichung stammt, sind relativ einfach anzugeben. Es wird schwieriger, sobald Schnittmengen solcher Bereiche gesucht sind. Das folgende, etwas schwierigere, Beispiel zeigt, dass man nun auch noch Beträge mit ins Spiel bringen kann.

Beispiel 9.4.3

Es ist die Menge

$$M = \{(x; y) \,:\, |x - y| < 1\}$$

in Worten zu beschreiben und zu skizzieren.

Wie üblich bei Beträgen (vgl. 2.2) ist eine Fallunterscheidung nötig:

1. $x - y \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq y$
   Die Ungleichung $|x - y| < 1$ lässt sich in diesem Fall auflösen zu

   $$|x - y| < 1 \;\Leftrightarrow\; x - y < 1 \;\Leftrightarrow\; y > x - 1\,.$$

   Somit liegen in diesem Fall alle $(x; y)$ in M, die $x \geq y$ und $y > x - 1$ erfüllen, also diejenigen Punkte, welche oberhalb der Geraden $y = x - 1$, aber unterhalb oder auf der Winkelhalbierenden $y = x$ liegen.

2. $x - y < 0 \;\Leftrightarrow\; x < y$
   Die Ungleichung $|x - y| < 1$ lässt sich in diesem Fall auflösen zu

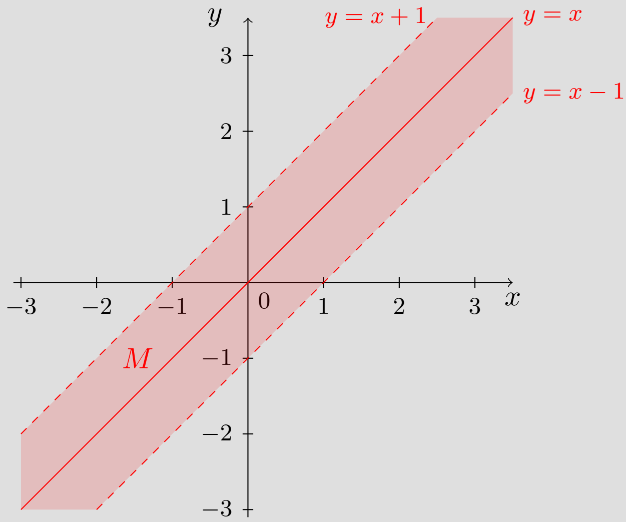
   $$|x - y| < 1 \;\Leftrightarrow\; -(x - y) < 1 \;\Leftrightarrow\; y < x + 1\,.$$

Somit liegen in diesem Fall alle $(x; y)$ in M, die $x < y$ und $y < x+1$ erfüllen, also diejenigen Punkte, welche unterhalb der Geraden $y = x + 1$, aber oberhalb der Winkelhalbierenden $y = x$ liegen.

Aus beiden Fällen zusammen ergibt sich also die folgende Beschreibung für die Menge M:

$M =$ „Alle Punkte zwischen den Geraden $y = x-1$ und $y = x+1$, die aber nicht auf den Geraden liegen“

Skizze hierzu:



Aufgabe 9.4.1
Skizzieren Sie jeweils die angegebenen Mengen:

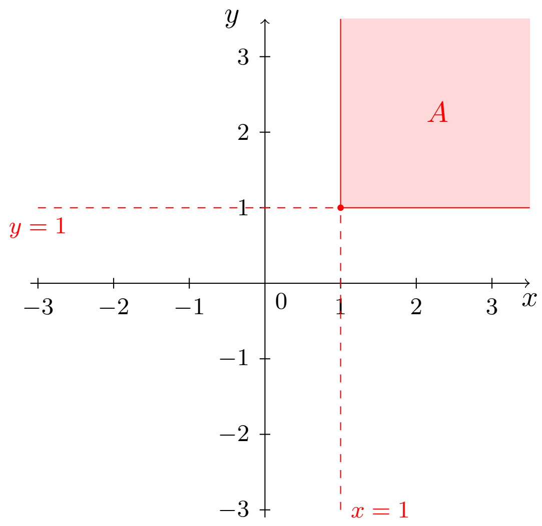
a. $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\} \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$

b. $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| \geq 1\}$

c. $C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x + 1\}$

Lösung:

a. Die Menge aller Punkte, welche $y \geq 1$ erfüllen, liegen auf oder oberhalb der Geraden $y = 1$, und die Punkte, welche $x \geq 1$ erfüllen, liegen auf oder rechts von der Geraden $x = 1$. Insgesamt sind die Punkte gesucht, welche beide Bedingungen erfüllen (Schnittmenge). Es ergibt sich also:



b. Fallunterscheidung:

a) $2x - y \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y \leq 2x$:

$$|2x - y| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; 2x - y \geq 1 \;\Leftrightarrow\; y \leq 2x - 1$$

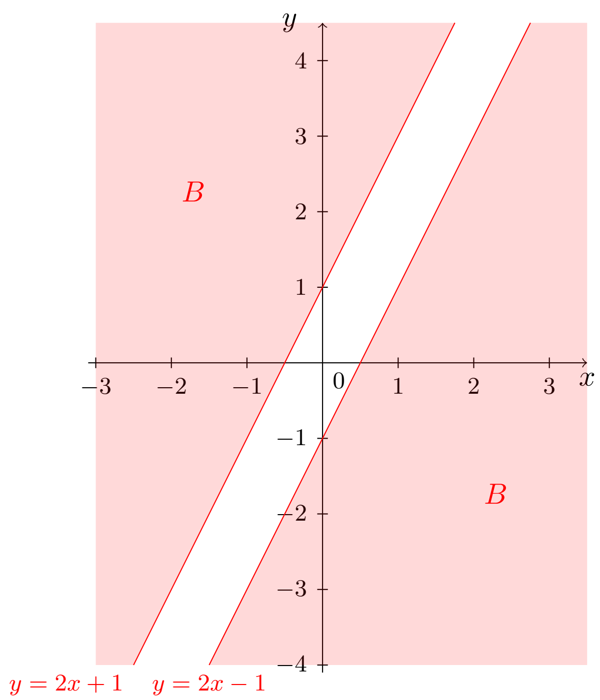
Dieser Fall liefert also alle Punkte, die auf oder unterhalb der Geraden $y = 2x - 1$ liegen.

b) $2x - y < 0 \;\Leftrightarrow\; y > 2x$:

$$|2x - y| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; -(2x - y) \geq 1 \;\Leftrightarrow\; y \geq 2x + 1$$

Dieser Fall liefert also alle Punkte, die auf oder oberhalb der Geraden $y = 2x + 1$ liegen.

Insgesamt ergeben sich also die folgenden Bereiche:



c. Fallunterscheidung:

a) $y \geq 0$:

$$|y| > x + 1 \;\Leftrightarrow\; y > x + 1$$

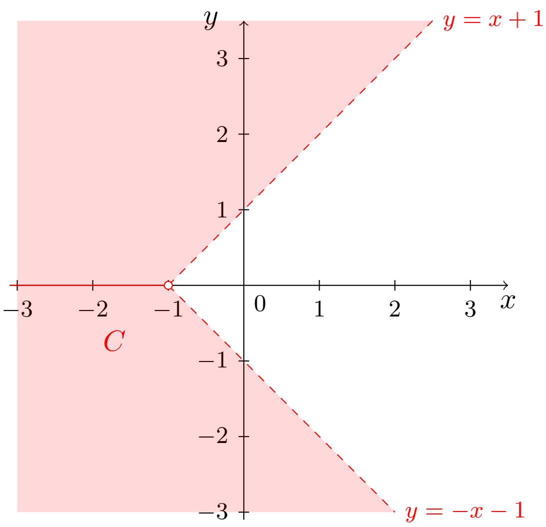
Dieser Fall liefert also alle Punkte, die eine nicht-negative y-Koordinate haben und oberhalb der Geraden $y = x + 1$ liegen.

b) $y < 0$:

$$|y| > x + 1 \;\Leftrightarrow\; -y > x + 1 \;\Leftrightarrow\; y < -x - 1$$

Dieser Fall liefert also alle Punkte, die eine negative y-Koordinate haben und unterhalb der Geraden $y = -x - 1$ liegen.

Damit ergibt sich der folgende Bereich:



Der Punkt $(-1; 0)$ gehört nicht zu C.

Die folgende Infobox fasst die möglichen Bereiche in der Ebene zusammen, die von einem Kreis begrenzt werden.

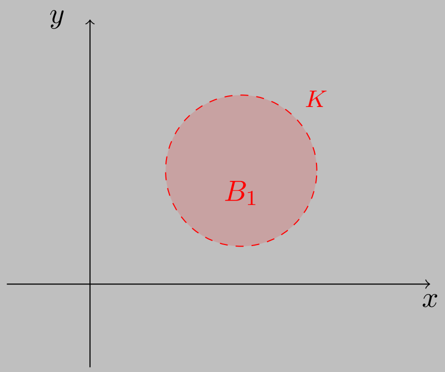
Info 9.4.4

Ist ein Kreis K in der Ebene (mit Mittelpunkt $M = (x_0; y_0)$ und Radius r) mittels einer Kreisgleichung in Normalform bezüglich eines festen Koordinatensystems gegeben,

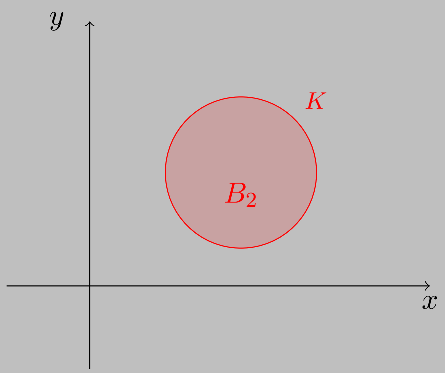
$$K\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 ,$$

dann erhält man durch Ersetzen des Gleichheitszeichens durch ein Ungleichheitszeichen die folgenden Mengen, welche jeweils Bereiche in der Ebene beschreiben:

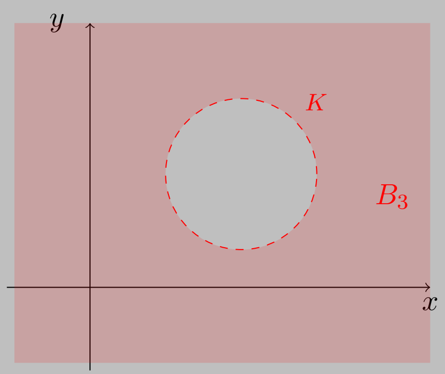
- $B_1 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$ = „Bereich innerhalb des Kreises, ohne die Punkte auf dem Kreis selbst“



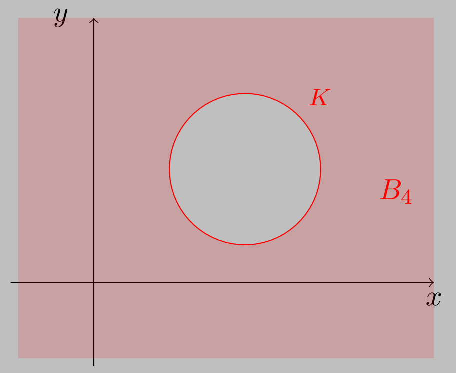
- $B_2 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$ = „Bereich innerhalb des Kreises, inklusive der Punkte auf dem Kreis“



- $B_3 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > r^2\}$ = „Bereich außerhalb des Kreises, ohne die Punkte auf dem Kreis selbst“



- $B_4 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \geq r^2\}$ = „Bereich außerhalb des Kreises, inklusive der Punkte auf dem Kreis“



Das folgende Beispiel zeigt einige einfache Fälle von Bereichen, die von Kreisen begrenzt werden, sowie auch einige kompliziertere Fälle, die entstehen, wenn man mehrere Bereiche miteinander oder mit den Bereichen, welche von Geraden begrenzt werden, kombiniert.

Beispiel 9.4.5

Gegeben sind die Kreise

$$K_1 \colon x^2 + y^2 = 4$$

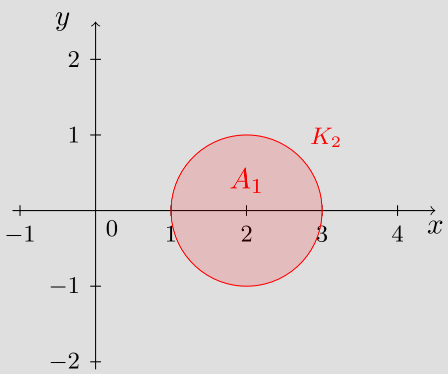
und

$$K_2 \colon (x-2)^2 + y^2 = 1$$

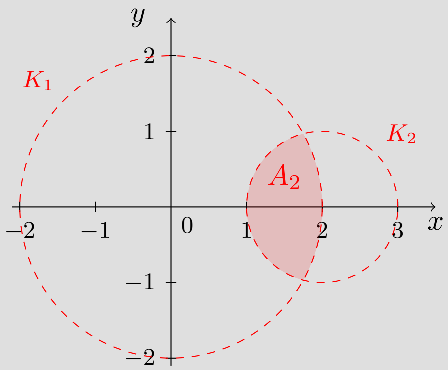
sowie die Gerade

$$g \colon y = -x + 1 \ .$$

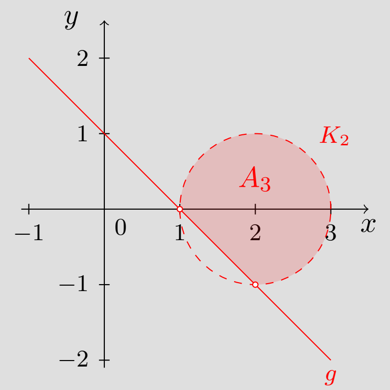
- Die Menge $A_1 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ besteht aus allen Punkten innerhalb und auf dem Kreis K_2:



- Die Menge $A_2 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$ besteht aus allen Punkten, die sowohl innerhalb des Kreises K_1 als auch innerhalb des Kreises K_2 liegen, also im Schnitt der beiden Kreisscheiben, aber nicht auf den Kreisen selbst:



- Die Menge $A_3 := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 < 1 \wedge y \geq -x+1\}$ besteht aus allen Punkten, die sowohl innerhalb des Kreises K_2 – aber nicht auf dem Kreis – als auch auf oder oberhalb der Geraden g liegen:



Die Schnittpunkte von Kreis und Gerade gehören nicht zu A_3.

Aufgabe 9.4.2
Skizzieren Sie jeweils die angegebenen Mengen:

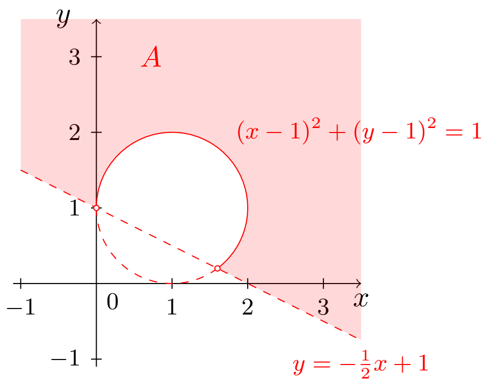
a. $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > -\frac{1}{2}x + 1\}$

b. $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x+3)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$

c. $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 + (y+1)^2 \geq 1\}$

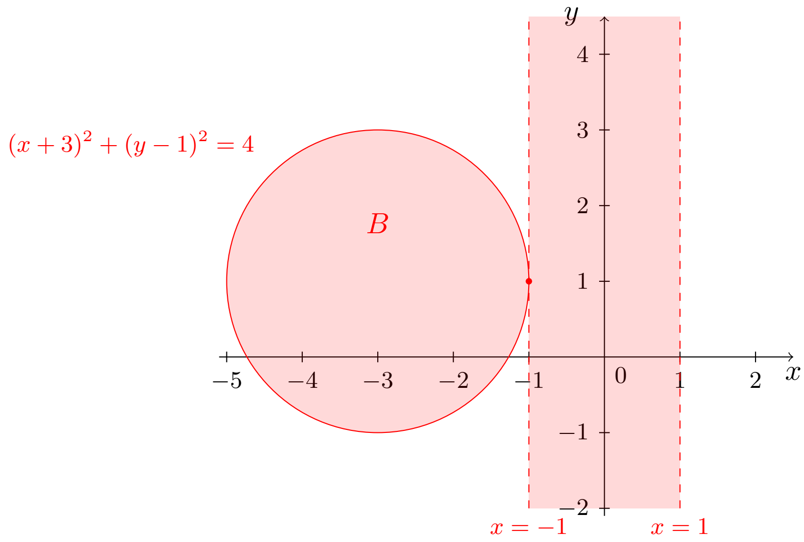
Lösung:

a. Die Menge A wird gebildet von allen Punkten, die sowohl außerhalb des Kreises oder auf dem Kreis um $(1;1)$ mit Radius 1 als auch oberhalb der Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 1$ liegen:



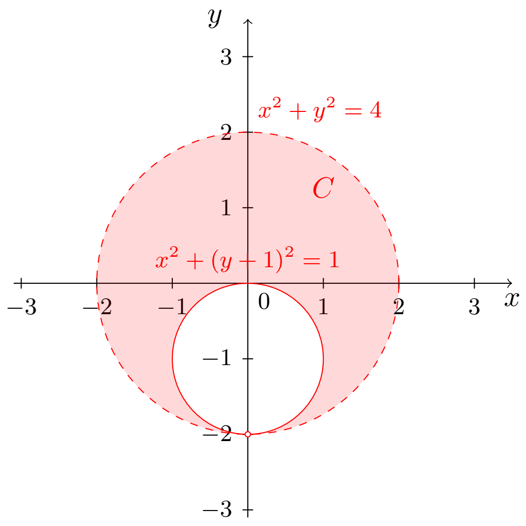
Die Schnittpunkte von Kreis und Gerade gehören nicht zu A.

b. Die Punkte in der Ebene, welche die Ungleichung $|x| < 1$ erfüllen, sind diejenigen, für die $-1 < x < 1$ gilt. Dazu (Vereinigungsmenge!) kommen noch die Punkte auf dem Kreis oder innerhalb des Kreises $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$:



Der Punkt $(-1; 1)$ gehört mit zu B.

c. Die Menge C wird gebildet von allen Punkten, die sowohl innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ als auch auf oder außerhalb des Kreises $x^2 + (y+1)^2 = 1$ liegen:



Der Punkt $(0; -2)$ gehört nicht zu C.

9.5 Abschlusstest

9.5.1 Abschlusstest Kapitel 5

Aufgabe 9.5.1
Wie lautet die Normalform der Gleichung für die Gerade PQ, welche durch die beiden Punkte $P = (1; 3)$ und $Q = (-1; 7)$ verläuft?

Antwort: $y =$ ☐ .

Aufgabe 9.5.2
Gegeben ist eine Gerade durch die Gleichung $6x + 2y = 4$.

a. Die Normalform dieser Geradengleichung lautet $y =$ ☐ .

b. Wie liegt diese Gerade im Verhältnis zu der durch die Gleichung $y = 3x - 2$ beschriebenen Geraden?
   - ☐ Es gibt keinen Schnittpunkt.
   - ☐ Es gibt genau einen Schnittpunkt.
   - ☐ Die Geraden sind identisch.

Aufgabe 9.5.3
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden, die durch die Gleichung $y = 2x+2$ beschriebenen wird, mit der Geraden, die durch die Gleichung $2x = 6$ beschrieben wird.

Antwort: Der Schnittpunkt ist ☐ .

Kreuzen Sie mögliche Gründe an, warum die Geradengleichung $2x = 6$ der zweiten Geraden nicht auf Normalform gebracht werden kann. (Mehrere Aussagen können richtig sein.)

- ☐ Die Geradengleichung kann nicht nach x aufgelöst werden.
- ☐ Die Geradengleichung kann nicht nach y aufgelöst werden.
- ☐ Die Geradengleichung ist noch nicht gekürzt.
- ☐ Die Gerade ist parallel zur x-Achse.
- ☐ Die Gerade ist parallel zur y-Achse.
- ☐ Die Gerade besitzt keine endliche Steigung.
- ☐ Die Gerade schneidet die x-Achse nicht.

Aufgabe 9.5.4
Entscheiden Sie, welche der folgenden Punkte auf dem Kreis mit Mittelpunkt $P = (3; -1)$ und Radius $r = \sqrt{10}$ liegen:

- ☐ Der Ursprung.
- ☐ $(2; 3)$.
- ☐ $(4; 2)$.
- ☐ $(3; 2)$.
- ☐ $(0; \sqrt{10})$.

Aufgabe 9.5.5
Ein Kreis wird durch die folgende Kreisgleichung beschrieben:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 \; = \; 9 \; .$$

Welche Eigenschaften besitzt dieser Kreis?

a. Sein Radius ist $r \; = \; \boxed{}$.

b. Sein Mittelpunkt ist $M \; = \; \boxed{}$.

c. Er schneidet die durch M und einen unbekannten weiteren Punkt P verlaufende Gerade
   - ☐ in einem Punkt,
   - ☐ in zwei Punkten,
   - ☐ in drei Punkten,
   - ☐ überhaupt nicht.

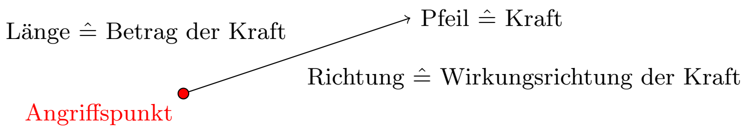
10 Grundlagen der anschaulichen Vektorgeometrie

Modulübersicht

10.1 Vom Pfeil zum Vektor

10.1.1 Einführung

Eine grundlegende Idee hinter dem mathematischen Konzept des Vektors ist eine physikalische. Es gibt in der naturwissenschaftlichen Praxis einerseits Größen, die nur durch eine Zahl beschrieben werden, die also einen bestimmten Betrag haben, wie etwa Spannung, Arbeit oder Leistung. Diese Größen werden mathematisch einfach durch Elemente aus der Menge der reellen Zahlen beschrieben. Andererseits existieren auch Größen, die neben einem Betrag auch eine bestimmte *Richtung* besitzen, wie etwa Kraft oder Geschwindigkeit. So kann man sich zum Beispiel eine Kraft, die mit einem bestimmten Betrag an einem Punkt angreift, als Pfeil der entsprechenden Länge, der am Angriffspunkt sitzt, veranschaulichen. Die Richtung des Pfeils entspricht in diesem Fall der Wirkungsrichtung der Kraft:



Solche Größen werden mathematisch durch Vektoren beschrieben. In der naturwissenschaftlichen Anwendung müsste man für den Betrag von Vektoren bestimmte Maßeinheiten benutzen (zum Beispiel die Einheit Newton für Kräfte), diese Einheiten spielen aber für rein mathematische Betrachtungen keine Rolle und werden deshalb im Folgenden stets weggelassen. Das Konzept des Vektors ist der wesentliche Inhalt dieses Abschnitts und wird im zweiten Abschnitt 10.1.3 behandelt. Da Vektoren nicht nur in zwei Dimensionen (also in der Ebene), sondern auch in drei Dimensionen (also im Raum) betrachtet werden sollen, muss zunächst das Konzept der Koordinatensysteme und Punkte aus Kapitel 9 auf drei Dimensionen erweitert werden. Dies geschieht im ersten Abschnitt 10.1.2. Schließlich stellt man fest, dass man mit Vektoren auch bestimmte Rechenoperationen ausführen kann. Das Rechnen mit Vektoren wird dann im dritten Abschnitt 10.1.4 untersucht.

10.1.2 Koordinatensysteme im Raum

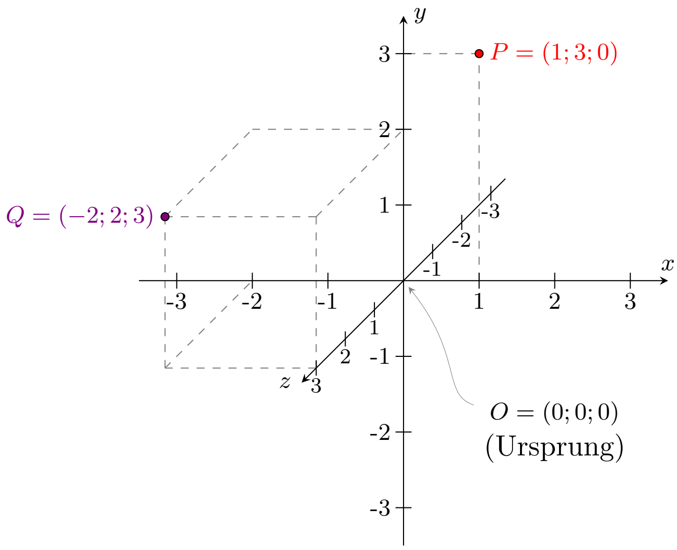
Im vorhergehenden Kapitel 9 wurden im Abschnitt 9.1 kartesische Koordinatensysteme und Punkte in der Ebene mit Koordinaten bezüglich dieser Systeme eingeführt. Ein sicherer Umgang mit diesen Konzepten wird hier nun vorausgesetzt. Zur eindeutigen Beschreibung eines **Punktes im Raum** braucht man drei – statt nur zwei – **Koordinaten**. Damit benötigt ein **Koordinatensystem** im Raum ebenfalls drei **Achsen**, die als x-, y- und z-Achse (oder manchmal auch als x_1-, x_2- und x_3-Achse) bezeichnet werden. Für Punkte werden wieder üblicherweise Großbuchstaben $P, Q, R, \ldots$ und für ihre Koordinaten Kleinbuchstaben $a, b, c, x, y, z, \ldots$ als Variablen verwendet. In Erweiterung der Schreibweise aus Kapitel 9 werden die Koordinaten von Punkten zum Beispiel wie folgt notiert:

$$P = (1; 3; 0)$$

oder

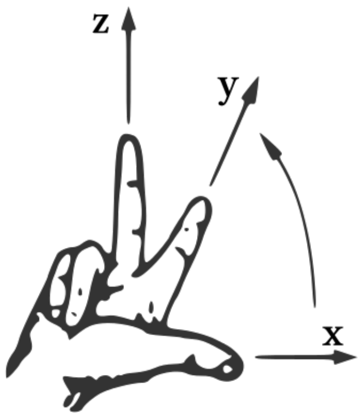
$$Q = (-2; 2; 3)\ .$$

Hier ist Q beispielsweise ein Punkt mit der x-Koordinate -2, der y-Koordinate 2 und der z-Koordinate 3. Für den Punkt mit den Koordinaten $(0; 0; 0)$ ist die Bezeichnung **Ursprung** und das Symbol O (vom englischen *origin*) reserviert. Alle diese Punkte sind im folgenden Bild dargestellt:



Die gestrichelten Hilfslinien in diesem Bild geben einen Hinweis darauf, wie in einer solchen dreidimensionalen Darstellung die Koordinaten von Punkten korrekt eingezeichnet und abgelesen werden können. Man beachte, dass die Hilfslinien alle parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

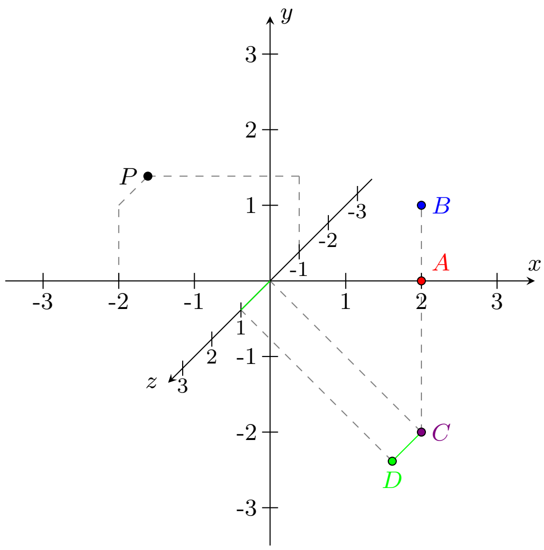
Es werden nur Koordinatensysteme im Raum betrachtet, deren Achsen alle senkrecht aufeinander stehen. Diese heißen auch **kartesische Koordinatensysteme**. Es wird hier außerdem die übliche mathematische Konvention benutzt, dass die Koordinatensysteme im Raum **rechtshändig** oder sogenannte **Rechtssysteme** sein sollen. Dies bedeutet, dass die positiven Achsenrichtungen von x-, y- und z-Achse durch die Drei-Finger-Regel der *rechten* Hand bestimmt werden:



Trotzdem gibt es hier noch unterschiedliche mögliche Darstellungsformen: zum Beispiel ein Verlauf der x-Achse nach rechts, der y-Achse nach oben und der z-Achse nach vorne aus der Zeichenebene heraus – wie im Koordinatensystem mit den Punkten P und Q oben – oder ein Verlauf der x-Achse nach rechts, der y-Achse nach hinten in die Zeichenebene hinein und der z-Achse nach oben – wie im Drei-Finger-Bild oben. Die Rechtshändigkeit ist aber in beiden Fällen gegeben.

Aufgabe 10.1.1
Geben Sie die Koordinaten der im folgenden Bild eingezeichneten Punkte an. Überlegen Sie sich

außerdem, wie man alle eingezeichneten Punkte zu einem mathematischen Objekt zusammenfassen kann.



a. $A = \boxed{}$.

b. $B = \boxed{}$.

c. $C = \boxed{}$.

d. $D = \boxed{}$.

e. $P = \boxed{}$.

Lösung:
Die Koordinatentripel der gefragten Punkte lauten:

$$A = (2; 0; 0) ,$$

$$B = (2; 1; 0) ,$$

$$C = (2; -2; 0) ,$$

$$D = (2; -2; 1) ,$$

$$P = (-2; 1; -1) .$$

Die Menge aller im obigen Bild eingezeichneten Punkte ist

$$\{A; B; C; D; P\} = \{(2; 0; 0); (2; 1; 0); (2; -2; 0); (2; -2; 1); (-2; 1; -1)\} .$$

Analog zum zweidimensionalen Fall in Abschnitt 9.1.2 kann man also auch hier im dreidimensionalen Fall eine beliebige Anzahl von Punkten im Raum wieder zu einer **Punktmenge** zusammenfassen. Insbesondere gibt es auch hier wieder die folgende Bezeichnung:

Info 10.1.1

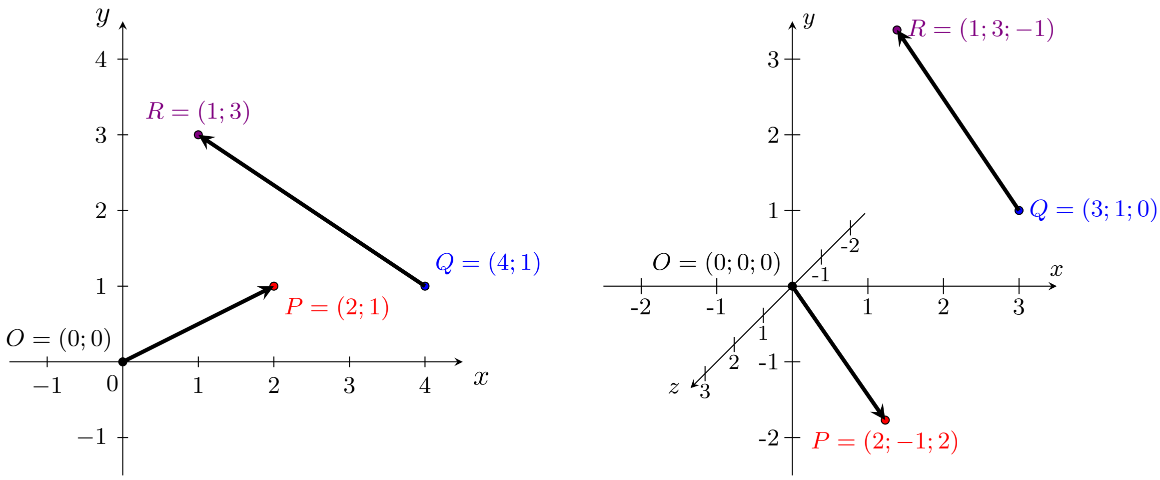
Die Menge aller Punkte im Raum, als Koordinatentripel bezüglich eines gegebenen kartesischen Koordinatensystems, wird mit

$$\mathbb{R}^3 := \{(x; y; z) \,:\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet. Das Symbol $\mathbb{R}^3$ wird dabei als „$\mathbb{R}$ drei“oder „$\mathbb{R}$ hoch drei“ gesprochen. Dies spiegelt wieder, dass jeder Punkt eindeutig durch ein Koordinatentripel, bestehend aus drei reellen Zahlen, beschrieben werden kann.

10.1.3 Vektoren in der Ebene und im Raum

Punkte in der Ebene und im Raum, die als Koordinatenpaare oder -tripel bezüglich eines vorgegebenen Koordinatensystems gegeben sind, können durch Strecken verbunden werden. Gibt man diesen Strecken zusätzlich eine Orientierung (d.h. legt man einen der Punkte als Fußpunkt und einen der Punkte als Spitze fest), so erhält man Pfeile, die von einem Punkt zum anderen zeigen:



Im Sinne dieser Abbildungen kann man den Informationsgehalt eines Pfeils folgendermaßen charakterisieren: Ein Pfeil gibt an, wie man von einem Punkt (am Fußpunkt des Pfeils) zu einem anderen Punkt (an der Spitze des Pfeils) gelangt. So gibt der Pfeil, welcher im zweidimensionalen Fall Q mit R verbindet, wieder, dass man von Q aus um 3 Längeneinheiten nach links und um 2 Längeneinheiten nach oben gehen muss, um R zu erreichen. Oder in einer mathematischeren Sprechweise: Man gehe von Q aus um -3 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung. Für den Pfeil, der im zweidimensionalen Fall den Ursprung mit dem Punkt P verbindet, ist dies sogar noch einfacher, denn um von O nach P zu gelangen, geht man einfach um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung. Diese Werte entsprechen natürlich genau den Koordinaten des Punktes P.

Aufgabe 10.1.2
Bestimmen Sie für die Pfeile in der obigen dreidimensionalen Abbildung die (vorzeichenbehafteten)

Bewegungen in die drei Koordinatenrichtungen, die nötig sind, um vom Fußpunkt zur Spitze des jeweiligen Pfeils zu gelangen. Gehen Sie analog zu den oben stehenden Erläuterungen im zweidimensionalen Fall vor.

Für den Pfeil von O nach P:

a. in x-Richtung: $\boxed{}$,

b. in y-Richtung: $\boxed{}$,

c. in z-Richtung: $\boxed{}$.

Für den Pfeil von Q nach R:

a. in x-Richtung: $\boxed{}$,

b. in y-Richtung: $\boxed{}$,

c. in z-Richtung: $\boxed{}$.

Lösung:

Für den Pfeil von O nach P:

a. in x-Richtung: 2,

b. in y-Richtung: -1,

c. in z-Richtung: 2.

Für den Pfeil von Q nach R:

a. in x-Richtung: -2,

b. in y-Richtung: 2,

c. in z-Richtung: -1.

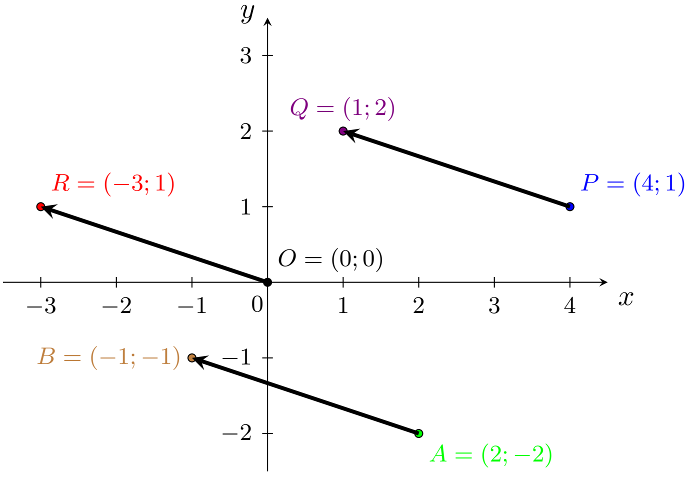
Nun ist ersichtlich, dass auch im Fall der Pfeile, die jeweils Q mit R verbinden, die Bewegungen in die jeweiligen Koordinatenrichtungen durch die Koordinaten der Punkte an Fußpunkt und Spitze der Pfeile bestimmt werden. Es gilt offenbar im zweidimensionalen Fall:

$$\left.\begin{array}{r} R = (1;3) \\ Q = (4;1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{in } x\text{-Richtung: } -3 = 1-4 \\ \text{in } y\text{-Richtung: } 2 = 3-1 \end{array}\right.$$

und im dreidimensionalen Fall:

$$\left.\begin{array}{r} R = (1;3;-1) \\ Q = (3;1;0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{in } x\text{-Richtung: } -2 = 1-3 \\ \text{in } y\text{-Richtung: } 2 = 3-1 \\ \text{in } z\text{-Richtung: } -1 = -1-0\ . \end{array}\right.$$

Die Bewegungen in die verschiedenen Koordinatenrichtungen ergeben sich also als die Differenzen der Koordinaten des Punkts an der Spitze des Pfeils und des Punkts am Fußpunkt des Pfeils. Dies bedeutet aber, dass sich alle Pfeile, welche Punktepaare miteinander verbinden, für die sich jeweils gleiche Koordinatendifferenzen ergeben, nur durch eine Parallelverschiebung – unter Beibehaltung ihrer Orientierung – unterscheiden. Die Punktepaare P und Q, A und B sowie O und R im folgenden zweidimensionalen Bild werden jeweils durch Pfeile verbunden, die durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden können:



Man kann hier natürlich noch beliebig viele weitere Punktepaare finden, die durch einen ebensolchen Pfeil verbunden werden, und das Ganze funktioniert selbstverständlich analog auch im dreidimensionalen Fall.

Jeder Pfeil in der obigen Abbildung gibt also den gleichen Informationsgehalt, nämlich -3 in x-Richtung und 1 in y-Richtung, wieder. Was liegt also mathematisch näher, als jeden dieser Pfeile nur als Vertreter (einen sogenannten **Repräsentanten**) eines viel grundlegenderen Objekts aufzufassen? Dieses grundlegendere mathematische Objekt heißt **Vektor** und hat in diesem Fall die **Komponenten** -3 (x-Komponente) und 1 (y-Komponente), welche als sogenanntes 2-**Tupel** übereinander geschrieben werden:

$$\text{Vektor mit den Repräsentanten aus obiger Abbildung} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die folgende Infobox fasst diese Erkenntnis und noch einige weitere Schreib- und Sprechweisen zu Vektoren zusammen.

Info 10.1.2

Ein zwei- bzw. dreidimensionaler **Vektor** ist ein 2- bzw. 3-**Tupel** mit 2 bzw. 3 **Komponenten**, die als x-, y- (und z-)Komponenten bezeichnet werden. Als Variablen für Vektoren werden für gewöhnlich Kleinbuchstaben mit Pfeil benutzt. Als Variable für ihre Komponenten wird oft der gleiche Kleinbuchstabe mit der zugehörigen Koordinatenrichtung als Index zur Unterscheidung verwendet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} .$$

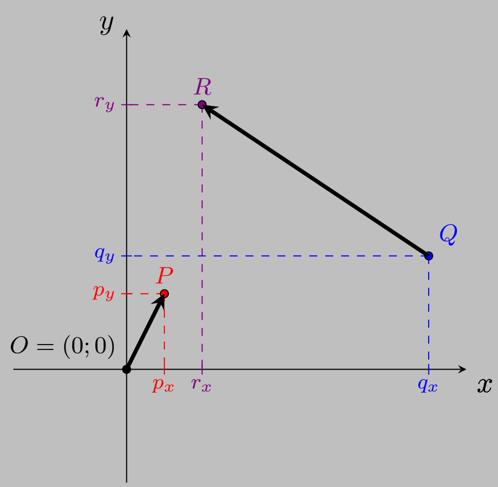
Ein Pfeil in der Ebene oder im Raum heißt **Repräsentant** des Vektors, wenn der Pfeil zwei Punkte in der Ebene oder im Raum verbindet, die so liegen, dass die Differenzen der Koordinaten des

Punkts an der Spitze des Pfeils und des Punkts am Fußpunkt des Pfeils genau die Komponenten des Vektors ergeben.

Oft ist man in der Situation, dass man einen Punkt P in der Ebene oder im Raum bzw. zwei Punkte Q und R in der Ebene oder im Raum gegeben hat, und man möchte nun den Vektor angeben, von welchem der Pfeil vom Ursprung O zu dem gegebenen Punkt P bzw. von welchem der Pfeil, der Q mit R verbindet, jeweils ein Repräsentant ist. Die dafür benutzte Schreib- und Sprechweise sowie die nötige Rechenoperation gibt die folgende Infobox wieder:

Info 10.1.3

- **Zweidimensionaler Fall:**
  Sind $P = (p_x; p_y)$ sowie $Q = (q_x; q_y)$ und $R = (r_x; r_y)$ Punkte in der Ebene, so heißt der Vektor
  $$\overrightarrow{QR} := \begin{pmatrix} r_x - q_x \\ r_y - q_y \end{pmatrix}$$
  Verbindungsvektor vom Punkt Q zum Punkt R und
  $$\overrightarrow{P} := \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$
  Ortsvektor des Punkts P. Dies sind genau diejenigen Vektoren, welche als Repräsentanten unter anderem die entsprechenden Verbindungspfeile der Punkte besitzen:

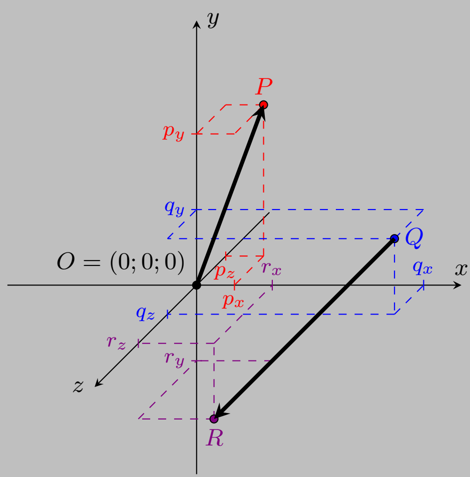


- **Dreidimensionaler Fall:**
  Sind $P = (p_x; p_y; p_z)$ sowie $Q = (q_x; q_y; q_z)$ und $R = (r_x; r_y; r_z)$ Punkte im Raum, so heißt der Vektor
  $$\overrightarrow{QR} := \begin{pmatrix} r_x - q_x \\ r_y - q_y \\ r_z - q_z \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor vom Punkt Q zum Punkt R und

$$\overrightarrow{P} := \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Ortsvektor des Punkts P. Dies sind genau diejenigen Vektoren, welche als Repräsentanten unter anderem die entsprechenden Verbindungspfeile der Punkte besitzen:



Beispiel 10.1.4

- **Zweidimensionaler Fall:**
  Der Punkt $P = (-1; -2)$ besitzt den Ortsvektor
  $$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$
  Der Vektor
  $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  ist zum Beispiel Verbindungsvektor vom Punkt $A = (1; 1)$ zum Punkt $B = (3; 1)$, also gilt
  $$\vec{v} = \overrightarrow{AB} .$$
  Allerdings ist $\vec{v} \neq \overrightarrow{BA}$, denn
  $$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- **Dreidimensionaler Fall:**
  Zu den beiden Punkten $Q = (1; 1; 1)$ und $R = (-2; 0; 2)$ ist der Verbindungsvektor von Q nach R:
  $$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 0-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aber der Verbindungsvektor von R nach Q ist

$$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 1-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist natürlich gleichzeitig auch Ortsvektor des Punktes $(3; 1; -1)$.

Das obige Beispiel zeigt bereits folgende interessante Tatsache: Dreht man die Orientierung eines Vektors (und damit die Orientierung aller Pfeile, die ihn repräsentieren) um, so erhält man einen Vektor, in dem die Komponenten das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Man spricht hier auch vom sogenannten **Gegenvektor**. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass man mit Vektoren komponentenweise rechnen kann. Dies wird ausführlich im nachfolgenden Abschnitt 10.1.4 behandelt.

Außerdem gibt es offenbar im zwei- und im dreidimensionalen Fall jeweils einen Vektor, dessen Komponenten alle gleich 0 sind:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieser Vektor wird jeweils als zwei- bzw. dreidimensionaler **Nullvektor** bezeichnet. Man kann sich vorstellen, dass seine Repräsentanten „Pfeile der Länge 0“ sind, also solche die einen Punkt mit sich selbst verbinden. Oder anders gesagt: Der Nullvektor ist der Ortsvektor des Ursprungs.

Aufgabe 10.1.3
Gegeben sind die Punkte

$$A = \left(-1; \frac{3}{2}\right) \quad \text{und} \quad B = (\pi; -2)$$

in der Ebene, die Punkte

$$P = (0{,}5; 1; -1) \quad \text{und} \quad Q = \left(\frac{1}{2}; -1; 1\right)$$

im Raum sowie die zwei- bzw. dreidimensionalen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

- Bestimmen Sie die folgenden Vektoren:

a. $\overrightarrow{AB} =$ ☐

b. $\overrightarrow{BA} =$ ☐

c. $\overrightarrow{PQ} =$ ☐

d. $\overrightarrow{QP} = \boxed{}$

- Bestimmen Sie Punkte C in der Ebene und R im Raum, so dass folgende Aussagen wahr sind:

  a. $\vec{a} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow C = \boxed{}$

  b. $\vec{v} = \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow R = \boxed{}$

- Zeichnen Sie mindestens drei Repräsentanten des Vektors a.

<u>Lösung:</u>

- Die gesuchten Vektoren sind:

  a. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \pi + 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

  b. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 - \pi \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

  c. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

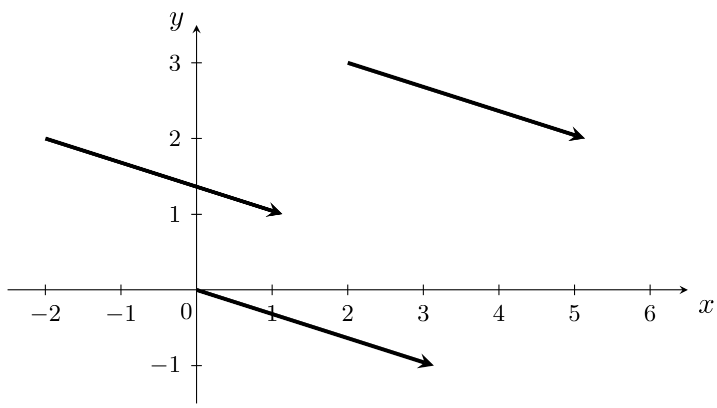
  d. $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Die gesuchten Punkte sind:

  a. $C = (0; -1)$

  b. $R = \left(\frac{1}{2}; 2; -2\right)$

- Das folgende Bild zeigt drei mögliche Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \end{pmatrix}$:



Die vorhergehende Einführung des Vektorkonzepts zeigt die nahe Verwandtschaft von Vektoren und Punkten. Tatsächlich gibt es sogar eine Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen Punkten und Ortsvektoren: Zu jedem Punkt gibt es genau einen Vektor, der Ortsvektor dieses Punktes ist, und umgekehrt gibt es zu jedem Vektor genau einen Punkt, für den dieser Vektor der zugehörige Ortsvektor ist. Dies gilt im zwei- sowie im dreidimensionalen Fall. Das rechtfertigt nun die – in den folgenden Abschnitten oft benutzte – Konvention, Punkte durch ihre Ortsvektoren zu beschreiben. So beschreibt man zum Beispiel einen Punkt $P = (2;1)$ statt durch seine Koordinaten $(2;1)$ oft durch seinen zugehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies bringt bei der Untersuchung geometrischer Objekte wie Geraden oder Ebenen (insbesondere im dreidimensionalen Fall) dann auch gewisse Vorteile in der Beschreibung mit sich (vgl. z.B. Abschnitt 10.2.2).

Weiterhin rechtfertigt die Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen Punkten und Ortsvektoren auch, die Abkürzungen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ nicht nur für die Menge aller Punkte in der Ebene bzw. im Raum zu verwenden, sondern auch für die Menge aller zwei- bzw. dreidimensionaler Vektoren. Davon wird in den nächsten Abschnitten ebenfalls Gebrauch gemacht.

10.1.4 Rechnen mit Vektoren

In diesem Abschnitt wird behandelt, wie man mit den – im vorigen Abschnitt 10.1.3 eingeführten – Vektoren rechnen kann. Das Rechnen mit Vektoren hat mehrere Aspekte: Zunächst kann man mit Vektoren, die man als 2- oder 3-Tupel angibt, die Rechenoperationen Addition, Subtraktion und – mit einer gewissen Einschränkung – auch Multiplikation durchführen, indem man diese Operationen komponentenweise ausführt. Dann haben diese Rechenoperationen aber auch eine geometrische Bedeutung für die Pfeile, welche die Vektoren repräsentieren. Man kann die Rechenoperationen für Vektoren auch als geometrische Operationen mit ihren Repräsentanten interpretieren. Schließlich führt diese geometrische Betrachtung des Rechnens mit Vektoren auch auf ein tieferes Verständnis von Orts- und Verbindungsvektoren von Punkten.

Das Rechnen mit zwei- und dreidimensionalen Vektoren funktioniert im Wesentlichen auf die gleiche Art und Weise. Bei den Rechenoperationen in Komponentenschreibweise werden im Folgenden immer beide Fälle (zwei- und dreidimensional) aufgeführt. Bei den zugehörigen Bildern, welche die geometrische Bedeutung der Operationen für die Repräsentanten der Vektoren sowie für Orts- und Verbindungsvektoren veranschaulichen, werden in diesem Abschnitt nur Pfeile und Punkte, keine Koordinatensysteme dargestellt. So sind diese Bilder sowohl für den zwei- als auch für den dreidimensionalen Fall gültig.

Da beim Rechnen mit Vektoren im Folgenden Vektoren durch Rechnung und Äquivalenzumformungen auseinander hervorgehen sollen, muss einmal festgehalten werden, unter welchen Umständen zwei Vektoren gleich sein sollen.

Info 10.1.5

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind genau dann **gleich** (symbolisch: $\vec{a} = \vec{b}$), wenn eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen zutrifft (zutreffen):

- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besitzen die gleichen Komponenten, also
$$\vec{a} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; a_x = b_x \text{ und } a_y = b_y$$

im zweidimensionalen Fall bzw.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_x = b_x \text{ und } a_y = b_y \text{ und } a_z = b_z$$

im dreidimensionalen Fall. Dies ist auch unter der Bezeichnung **Koordinaten-** oder **Komponentenvergleich** bekannt.

- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besitzen einen gleichen Repräsentanten.
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind beide Ortsvektor des gleichen Punktes.
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind beide Verbindungsvektor der gleichen zwei Punkte.

Diese Infobox macht auch klar, dass zwei Vektoren unterschiedlicher Dimension (also etwa $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$) niemals gleich sein können. Diese Vektoren sind wegen der unterschiedlichen Anzahl an Komponenten sogar nicht einmal miteinander vergleichbar. Rechnungen mit Vektoren finden also immer nur mit einer festen Anzahl an Komponenten statt (hier entweder zwei oder drei), und die Ergebnisse der Rechnungen sind dann immer auch Vektoren mit ebendieser festen Anzahl an Komponenten.

Info 10.1.6

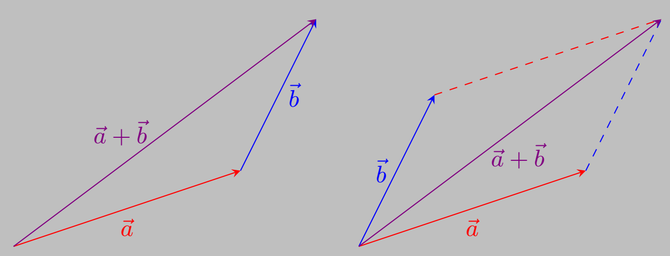
Die **Addition zweier Vektoren** bedeutet die Addition aller ihrer Komponenten. Also

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

im zweidimensionalen Fall und

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

im dreidimensionalen Fall. Geometrisch kann die Vektoraddition als „Aneinanderhängen“ von Pfeilen oder als Ergänzung von zwei Pfeilen zu einem Parallelogramm interpretiert werden, je nachdem welche Repräsentanten der Vektoren man verwendet:



Auch bei der Addition von Vektoren gilt, analog zum Rechnen mit reellen Zahlen, das Kommutativ- und das Assoziativgesetz (vgl. Abschnitt 1.1.3)

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

sowie

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) .$$

Und der **Nullvektor** $\overrightarrow{O}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{O}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ erfüllt die analoge Funktion für Vektoren, die die 0 für reelle Zahlen erfüllt:

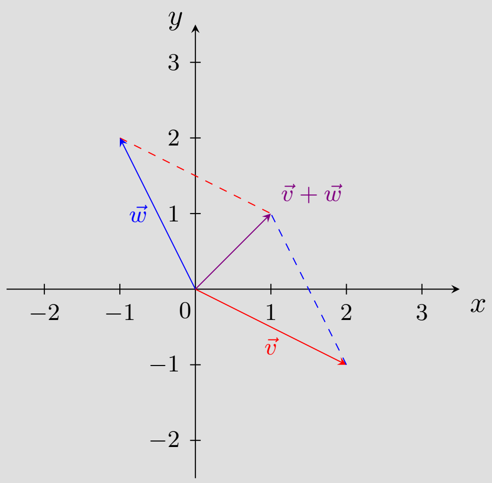
$$\vec{a}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O}+\vec{a}=\vec{a} .$$

Beispiel 10.1.7

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} .$$

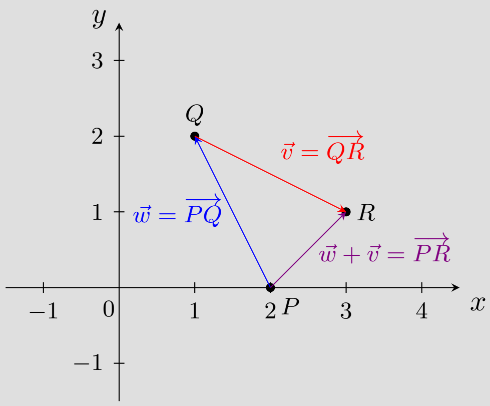
Bild hierzu:



Weiterhin ist $\vec{w}$ der Verbindungsvektor vom Punkt $P=(2;0)$ zum Punkt $Q=(1;2)$, also $\vec{w}=\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{v}$ ist der Verbindungsvektor vom Punkt $Q=(1;2)$ zum Punkt $R=(3;1)$, also $\vec{v}=\overrightarrow{QR}$. Dann stellt man fest, dass

$$\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$$

gilt:



Das obige Beispiel zeigt, dass man mit Hilfe der Vektorrechnung auch Ausdrücke für Verbindungsvektoren von Punkten vereinfachen kann. Dies wird weiter unten bei der Subtraktion von Vektoren nochmals vertieft.

Aufgabe 10.1.4 a. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{v} + \vec{u}$.

$\vec{v} + \vec{u} =$ ☐

b. Gegeben sind die Punkte P, Q und R. Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich dem Ausdruck $(\vec{P} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR}$?

- ☐ $\vec{P} + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$
- ☐ $\overrightarrow{PR}$
- ☐ $\overrightarrow{QR}$
- ☐ $\overrightarrow{OR}$
- ☐ $\vec{R}$
- ☐ $\vec{Q} + \overrightarrow{QR}$

<u>Lösung:</u>

a.

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ -4+0 \\ 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

b.

$$(\vec{P} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = \vec{P} + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) \text{ (Assoziativgesetz)}$$

$$= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{Q} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} = \vec{R} .$$

Untersucht man mögliche Rechenoperationen für Vektoren nun weiter, so stellt man fest, dass die komponentenweise Multiplikation oder Division von Vektoren keine sinnvolle Operation ist. Dies genauer zu verstehen, würde aber den mathematischen Rahmen dieses Brückenkurses sprengen. So muss man an dieser Stelle einfach akzeptieren, dass man Vektoren nicht so einfach miteinander multiplizieren und schon gar nicht durcheinander dividieren kann. Was allerdings möglich ist, ist die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen und – darauf aufbauend – auch die Subtraktion von Vektoren. Wichtig ist noch Folgendes: Wird im Nachfolgenden von der Länge eines Vektors gesprochen, so ist damit die geometrische Länge der Pfeile gemeint, die ihn repräsentieren. Das Konzept der Länge oder des Betrags eines Vektors wird weiter unten noch genauer untersucht.

Info 10.1.8

Die **Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl** bedeutet die Multiplikation in jeder Komponente. Ist also $\vec{a}$ ein Vektor und $s \in \mathbb{R}$, so gilt

$$s \cdot \vec{a} = s\vec{a} = s \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_x \\ sa_y \end{pmatrix}$$

im zweidimensionalen Fall und

$$s \cdot \vec{a} = s\vec{a} = s \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_x \\ sa_y \\ sa_z \end{pmatrix}$$

im dreidimensionalen Fall. Die Division eines Vektors durch eine Zahl $0 \neq s \in \mathbb{R}$ ist dann einfach gegeben durch die Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{1}{s}$:

$$\frac{\vec{a}}{s} = \frac{1}{s}\vec{a} \,.$$

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl $s \in \mathbb{R}$ erhält man also einen gleich orientierten Vektor s-facher Länge, wenn $s > 0$ ist. Wenn $s < 0$ ist, hat der resultierende Vektor ebenfalls s-fache Länge, ist aber entgegengesetzt orientiert. Im Spezialfall $s = 0$, gilt offenbar

$$0\vec{a} = \vec{O}$$

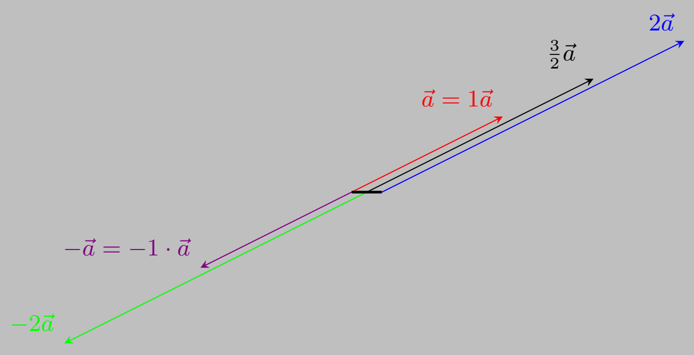
für jeden Vektor $\vec{a}$. Zwei weitere wichtige Fälle sind die Multiplikation mit $s = 1$:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

– dies lässt den Vektor offenbar gleich – und die Multiplikation mit $s = -1$:

$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

– dies ergibt den sogenannten **Gegenvektor**, ein Vektor gleicher Länge aber entgegengesetzter Orientierung. Bild hierzu:



Da reelle Zahlen bei Multiplikation die Länge von Vektoren ändern, sie also *skalieren*, nennt man reelle Zahlen in Bezug auf Vektoren oft auch **Skalare** und spricht bei der Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor von **Skalarmultiplikation**.

Beispiel 10.1.9

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Dann gilt zum Beispiel

$$2\vec{v} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$-\frac{\vec{v}}{3} = -\frac{1}{3}\vec{v} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Außerdem gilt zum Beispiel $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ für $P = \left(3; \frac{1}{2}\right)$ und $Q = (6; 2)$, da

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

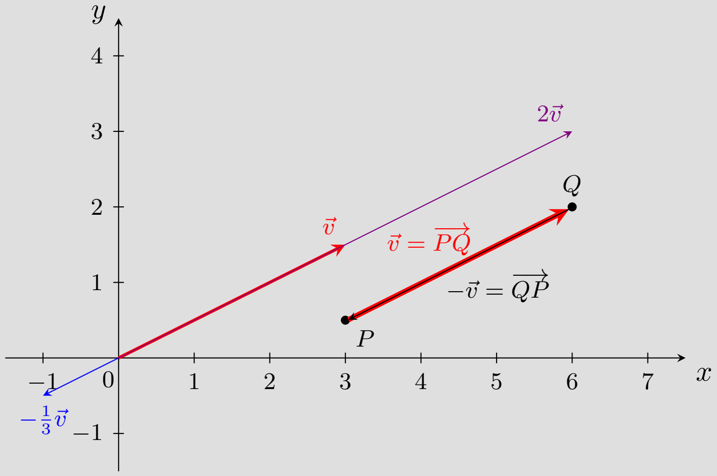
Dann ist aber

$$-\vec{v} = -\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP} ,$$

da

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6 \\ \frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix}$$

gilt. Bild dazu:



Für das Rechnen mit Vielfachen von Vektoren gilt nun der folgende Satz von Rechengesetzen.

Info 10.1.10

Sind r und s reelle Zahlen sowie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren, so gelten die folgenden Rechengesetze:

1. $r\vec{a} = \vec{a}r$
2. $rs\vec{a} = (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$
3. $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
4. $r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
5. $r(-\vec{a}) = (-r)\vec{a} = -(r\vec{a})$
6. $r\vec{a} = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 0$ oder $\vec{a} = \overrightarrow{O}$

Die Nummer 1 heißt auch Kommutativgesetz der Skalarmultiplikation, die Nummer 2 Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation und die Nummern 3 und 4 Distributivgesetze der Skalarmultiplikation.

Mit Hilfe des Konzeptes des Gegenvektors, kann nun auch festgehalten werden, was die Subtraktion von Vektoren bedeutet.

Info 10.1.11

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren, so ist ihre **Differenz** $\vec{a} - \vec{b}$ gegeben als die Summe von $\vec{a}$ und dem

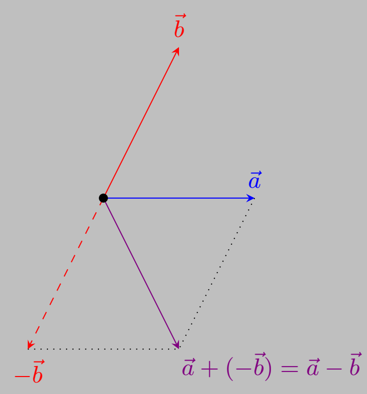
Gegenvektor von $\vec{b}$. Also gilt

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

im zweidimensionalen Fall und

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

im dreidimensionalen Fall. Damit kann die Differenz von Vektoren auch geometrisch mit Hilfe ihrer Repräsentanten interpretiert werden:



Betrachtet man in dieser Infobox nur die Differenz von Vektoren anhand ihrer Komponenten, so kann man sich fragen, wozu hierfür überhaupt das Konzept des Gegenvektors notwendig ist. Tatsächlich könnte man die Differenz von Vektoren in Komponenten auch ohne die Idee des Gegenvektors in Analogie zur Summe hinschreiben. Überlegt man sich dann aber die geometrische Interpretation der Differenz mit Hilfe von Repräsentanten (vgl. die Abbildung in der Infobox), so sieht man, dass dies nur mit Hilfe des Gegenvektors möglich ist.

Beispiel 10.1.12

Es werden in diesem Beispiel einige typische Aufgabenstellungen betrachtet, welche die bisher behandelten Rechengesetze für Vektoren beinhalten.

1. Es sind die folgenden Vektorausdrücke zu vereinfachen:

   (i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   (ii) $2(\vec{v} - \vec{w}) + 3r\vec{w} - r \cdot (-2\vec{v})$ für $r \in \mathbb{R}$.

Anwenden der Rechengesetze ergibt:

(i)

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0{,}5\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\-2-(-\frac{3}{2})\\0{,}5-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

(ii)

$$2(\vec{v}-\vec{w}) + 3r\vec{w} - r\cdot(-2\vec{v}) = 2\vec{v} - 2\vec{w} + 3r\vec{w} + 2r\vec{v} = 2(r+1)\vec{v} + (3r-2)\vec{w}\,.$$

2. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ ist der unbekannte Vektor $\vec{x}$ in der Gleichung

$$\vec{a} - 2\vec{b} - (3\vec{a} + \vec{x}) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Auflösen nach $\vec{x}$ sowie Einsetzen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt:

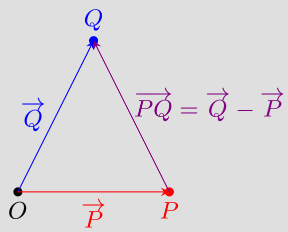
$$-(3\vec{a}+\vec{x}) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \vec{a} + 2\vec{b} \;\Leftrightarrow\; -\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + 2(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow\; \vec{x} = -\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - 2\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = \begin{pmatrix}14\\-9\end{pmatrix}.$$

3. Unter Benutzung der Differenz von Vektoren soll der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ zweier Punkte P und Q mit Hilfe der Ortsvektoren $\overrightarrow{P}$ und $\overrightarrow{Q}$ ausgedrückt werden. Es gilt:

$$\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{QO} - \overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ}\,.$$

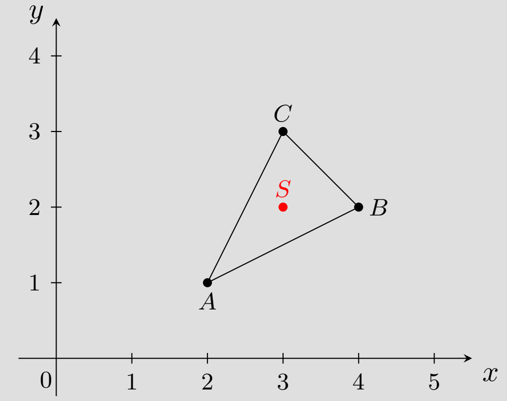
Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ von einem Punkt P zu einem Punkt Q ergibt sich also immer als die Differenz des Ortsvektor $\overrightarrow{Q}$ (zum Endpunkt des Verbindungsvektors) und des Ortsvektors $\overrightarrow{P}$ (zum Anfangspunkt des Verbindungsvektors). Dies zeigt auch nochmals das folgende Bild und ein Vergleich mit der Rechenregel für Verbindungsvektoren aus 10.1.3:



4. Die Punkte $A = (2;1)$, $B = (4;2)$ und $C = (3;3)$ bilden die Ecken eines Dreiecks. Der (geometrische) Schwerpunkt S dieses Dreiecks kann mit Hilfe der zugehörigen Ortsvektoren berechnet werden:

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Somit ist $S = (3;2)$. Bild hierzu:



Aufgabe 10.1.5 a. Es sind P, Q, R und S Punkte im Raum. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS}$$

so weit wie möglich.

b. Zeigen Sie, dass die Punkte $A = (1;2)$, $B = (4;3)$ und $C = (3;1)$ zusammen mit dem Ursprung die Ecken eines Parallelogramms bilden.

Lösung:

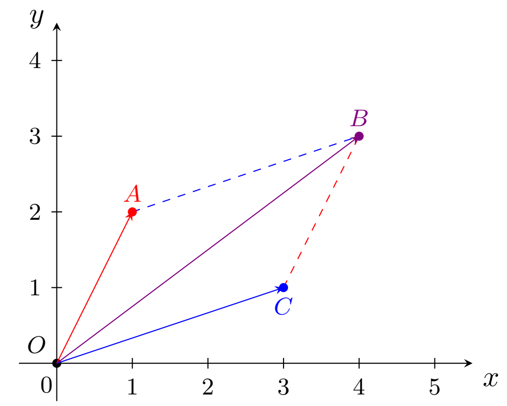
a.

$$\overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \vec{O} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}\ .$$

b. Nach der geometrischen Interpretation der Vektoraddition, ergibt sich ein Parallelogramm, wenn einer der Ortsvektoren $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ oder $\overrightarrow{C}$ die Summe der jeweils anderen beiden Ortsvektoren ist. Da

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{B}$$

gilt, bilden die drei Punkte zusammen mit dem Ursprung ein Parallelogramm:



Aufgabe 10.1.6
Vereinfachen Sie jeweils so weit wie möglich:

a. $2\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix}=\boxed{}$.

b. $-2\begin{pmatrix}-t\\3\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\frac{t}{2}\begin{pmatrix}4\\-42\end{pmatrix}\right)=\boxed{}$.

Lösung:

a.
$$2\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\18\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-10\\10\end{pmatrix}.$$

b.
$$-2\begin{pmatrix}-t\\3\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\frac{t}{2}\begin{pmatrix}4\\-42\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2t\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2t\\-21t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\21t-6\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.1.7
Bestimmen Sie den Vektor $\vec{y}$ in der Gleichung

$$3\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\vec{y}\right)=-8\begin{pmatrix}0{,}25\\0{,}25\\-0{,}25\end{pmatrix}+\vec{y}\,.$$

$\vec{y}=\boxed{}$

Lösung:

$$3\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\vec{y}\right)=-8\begin{pmatrix}0{,}25\\0{,}25\\-0{,}25\end{pmatrix}+\vec{y}\;\Leftrightarrow\;\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=4\vec{y}$$
$$\Leftrightarrow\;4\vec{y}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}\;\Leftrightarrow\;\vec{y}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Da Vektoren durch beliebig viele Pfeile repräsentiert werden, die alle durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, haben alle diese Repräsentanten die gleiche geometrische Länge (nämlich immer den Abstand der beiden Punkte, die sie verbinden). Deshalb ist es auch sinnvoll von der Länge eines Vektors zu sprechen. Die Länge eines Vektors trägt in der Mathematik die Bezeichnung **Betrag** oder **Norm**.

Info 10.1.13

Der **Betrag** oder die **Norm** eines Vektors $\vec{a}$ wird als $|\vec{a}|$ geschrieben und ist der Abstand desjenigen Punktes P vom Ursprung O, zu dem der Vektor $\vec{a}$ der zugehörige Ortsvektor ist (also $\overrightarrow{P} = \vec{a}$). Also gilt

$$|\vec{a}| = [\overline{OP}]$$

und folglich im zweidimensionalen Fall

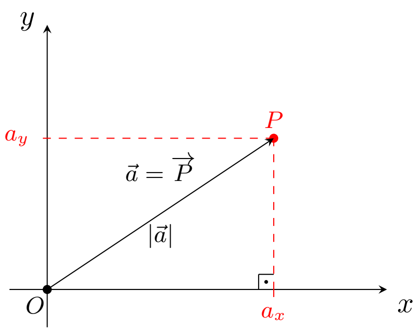
$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

sowie im dreidimensionalen Fall

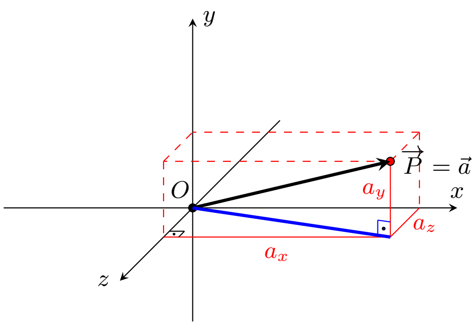
$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Ein Vektor mit Betrag 1 wird auch **Einheitsvektor** genannt.

Durch einen Vergleich mit der Infobox 9.3.2 zum Abstand zweier Punkte in einem zweidimensionalen Koordinatensystem in Kapitel 9, ist die Formel für den zweidimensionalen Fall unmittelbar einsichtig:



Es handelt sich wieder um eine einfache Anwendung des Satzes des Pythagoras. Im dreidimensionalen Fall ist die Lage nicht wesentlich komplizierter. Auch hier hilft der Satz des Pythagoras weiter:



In dieser Abbildung sind zwei rechtwinklige Dreiecke zu sehen. Das rechtwinklige Dreieck in der xz-Ebene ergibt eine Länge von $\sqrt{a_x^2 + a_z^2}$ für die blaue Linie. Das zweite rechtwinklige Dreieck gibt dann für die Streckenlänge von O nach P, also für $|\vec{a}|$:

$$\sqrt{a_y^2 + \left(\sqrt{a_x^2 + a_z^2}\right)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Für Normen von Vektoren gilt der folgende Satz von Rechenregeln.

Info 10.1.14

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren (beide aus dem $\mathbb{R}^2$ oder beide aus dem $\mathbb{R}^3$) und ist $r \in \mathbb{R}$, so gilt

1. $|\vec{a}| \geq 0$ und $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{O}$,
2. $|r\vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ und
3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Nummer 1 stellt fest, dass Normen immer nicht-negativ sind und dass nur der Nullvektor die Norm 0 hat. Nummer 2 ist besonders hilfreich für das Berechnen von Normen von Vielfachen von Vektoren. Nummer 3 heißt **Dreiecksungleichung**.

Beispiel 10.1.15

- Der Betrag des Vektors $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ berechnet sich zu

$$\left|\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 6} = \frac{\sqrt{16}}{4} = 1\ .$$

  Es handelt sich also um einen Einheitsvektor.

- Es ist eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass $\left|\begin{pmatrix} q^2 - 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} q - 1 \\ q \end{pmatrix}\right| = 0$ gilt.

$$\left|\begin{pmatrix} q^2 - 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} q - 1 \\ q \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} q^2 - 2q \\ 4 - 2q \end{pmatrix}\right| = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} q^2 - 2q \\ 4 - 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\; q^2 - 2q = 0 \text{ und } 4 - 2q = 0 \;\Leftrightarrow\; q(q-2) = 0 \text{ und } 2(2-q) = 0 \;\Leftrightarrow\; q = 2\ .$$

Aufgabe 10.1.8
Berechnen Sie

$$\left|-\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \boxed{}\ .$$

Lösung:

$$\left|-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-14\\5\end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-14\\5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2+(-14)^2+5^2} = \frac{1}{3}\sqrt{225} = \frac{15}{3} = 5\ .$$

Aufgabe 10.1.9

Finden Sie die Zahl $\chi > 3$, für die $\left|\begin{pmatrix}3\\\chi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\chi\\3\end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{2}$ gilt:

$\chi =$ $\boxed{}$.

Lösung:

$$\left|\begin{pmatrix}3\\\chi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\chi\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3-\chi\\\chi-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3-\chi)^2+(\chi-3)^2} = 2\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2(3-\chi)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad |3-\chi| = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \chi = 1 \text{ oder } \chi = 5\ .$$

Da $\chi > 3$ vorgegeben ist, folgt $\chi = 5$.

Aufgabe 10.1.10

Zeigen Sie, dass die Punkte $A = (4;2;7)$, $B = (3;1;9)$ und $C = (2;3;8)$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Lösung:

Das Dreieck ist gleichseitig, falls

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

gilt.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B}-\vec{A}| = \left|\begin{pmatrix}3\\1\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}\ ,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\vec{C}-\vec{A}| = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}\ ,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |\vec{C}-\vec{B}| = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\9\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}\ .$$

Somit ist das Dreieck gleichseitig.

10.2 Geraden und Ebenen

10.2.1 Einführung

In diesem Abschnitt werden nun Vektoren genutzt, um (zunächst) Geraden in der Ebene zu beschreiben. Man stellt dann fest, dass sich diese Beschreibung von Geraden unmittelbar auf den dreidimensionalen Fall übertragen lässt, man also damit auch Geraden im Raum beschreiben kann. Im Raum gibt es dann, neben den Geraden, weitere mathematisch interessante und mit Hilfe von Vektoren einfach zu beschreibende Objekte, nämlich Ebenen. Schließlich kann man sich überlegen, wie Punkte, Geraden und Ebenen im Raum relativ zueinander liegen können.

Hierfür sind die – in der folgenden Infobox zusammengefassten – Konzepte wichtig.

Info 10.2.1

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ($\vec{a},\vec{b} \neq \overrightarrow{O}$) heißen **kollinear**, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\vec{a} = s\vec{b}$$
gilt.
- Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ ($\vec{a},\vec{b},\vec{c} \neq \overrightarrow{O}$) heißen **komplanar**, falls es zwei Zahlen $s,t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}$$
gilt.

Weiterführende Bemerkung:
Der Nullvektor wird im Rahmen dieses Kurses aus der Definition der Kollinearität und Komplanarität ausgeschlossen, da sich dies in der hier benutzten Verwendung zur Beschreibung von Geraden und Ebenen als ausreichend erweisen wird. Zum Preis von etwas komplizierteren Bedingungen für Kollinearität und Komplanarität kann man den Nullvektor hinzunehmen und wird dann ganz natürlich auf die (wichtigen) Begriffe der **linearen Unabhängigkeit** und der **linearen Hülle** geführt, die aber den Rahmen dieses Kurses sprengen.

Die folgenden Überlegungen und Abbildungen machen klar, warum die Konzepte der Kollinearität und Komplanarität insbesondere für die Betrachtung von Geraden und Ebenen wichtig sind:

Kollineare Vektoren sind Vielfache voneinander, das heißt die Repräsentanten kollinearer Vektoren mit gleichem Basispunkt liegen auf einer Geraden. Zum Beispiel sind die Vektoren
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
und
$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

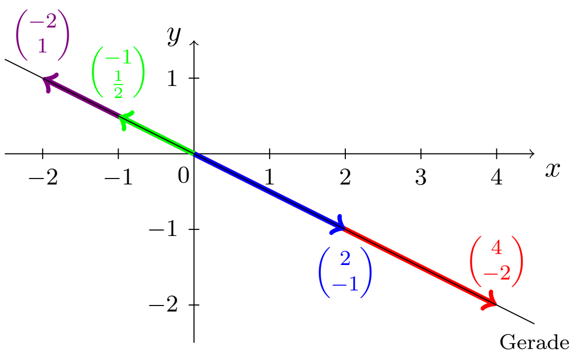
kollinear, da

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{x}$$

(oder auch $\vec{x} = -2\vec{y}$) gilt. Weitere Vektoren die zu $\vec{x}$ und auch zu $\vec{y}$ kollinear sind, sind beispielsweise $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allerdings ist zum Beispiel der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht kollinear zu $\vec{x}$ (und damit auch nicht zu $\vec{y}$), da es *keine* Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, die die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Repräsentanten kollinearer Vektoren mit gleichem Basispunkt, etwa die Pfeile der zugehörigen Ortsvektoren (siehe unten), liegen alle auf einer Geraden:



Komplanare Vektoren im Raum sind derart, dass ihre Repräsentanten in der gleichen Ebene liegen, falls diese den gleichen Basispunkt haben. So sind beispielsweise die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

komplanar, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

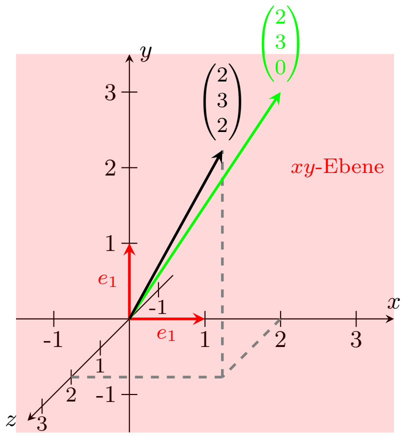
gilt. Die Pfeile ihrer zugehörigen Ortsvektoren als Repräsentanten liegen alle in der xy-Ebene eines Koordinatensystems im Raum. Dahingegen sind beispielsweise die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nicht komplanar, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine von Null verschiedene z-Komponente aufweist, seine Repräsentanten also immer aus der xy-Ebene herauszeigen. Man sieht leicht ein, dass es keine Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ geben kann, so dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Bild dazu:



10.2.2 Geraden in der Ebene und im Raum

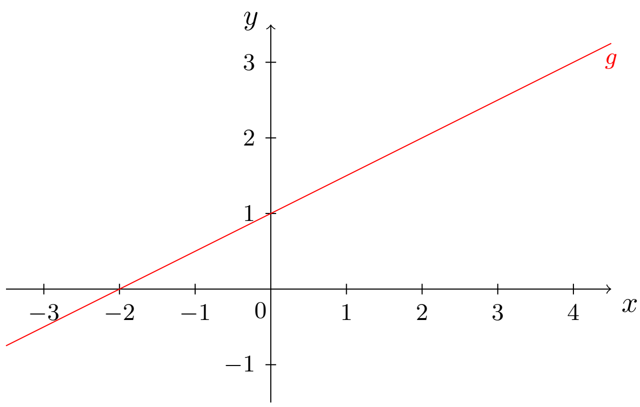
In Kapitel 9 wurden Geraden in der Ebene mittels Koordinatengleichungen für die Punkte auf den Geraden bezüglich eines festen Koordinatensystems beschrieben. Zum Beispiel ist in dieser Beschreibung eine Gerade g mit Steigung $\frac{1}{2}$ und Achsenabschnitt 1 gegeben als Punktmenge

$$g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y = \frac{1}{2}x + 1\} \ ,$$

wofür man oft kurz auch nur die Koordinatengleichung (hier in Normalform) angibt:

$$g\colon y = \frac{1}{2}x + 1 \ .$$

Das folgende Bild zeigt die Gerade:



Im Folgenden sollen die Punkte auf der Geraden nun durch ihre zugehörigen Ortsvektoren beschrieben werden. Die nachstehende Überlegung führt auf diese Beschreibung: Die Punkte $(x; y)$ auf der obigen Geraden g erfüllen die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

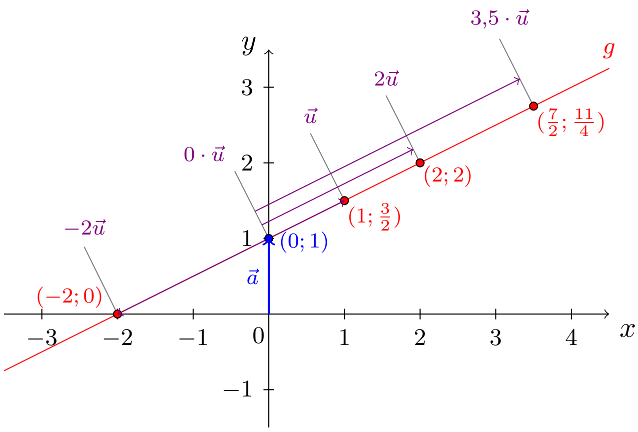
für ihre Koordinaten. Man kann diese Gleichung für die y-Koordinaten in die Punkte einsetzen und erhält, dass die Gerade g durch Punkte der Form $\left(x; \frac{1}{2}x + 1\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$ gebildet wird. Die zu diesen Punkten gehörenden Ortsvektoren sollen mit $\vec{r}$ bezeichnet sein. Dann gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Das heißt die Gerade g kann unter Benutzung von Ortsvektoren auch beschrieben werden mittels

$$g\colon \vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Mit anderen Worten, die Punkte auf g werden gebildet durch die Summe des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und allen möglichen Vielfachen des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, also allen zu $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ kollinearen Vektoren. Das folgende Bild stellt diese Sichtweise auf Geraden dar:



Die nächste Infobox stellt die wichtigsten Begriffe, Methoden und Konzepte zu dieser als **Punkt-Richtungsform** oder **Parameterform** bezeichneten Darstellungsweise von Geraden zusammen.

Info 10.2.2

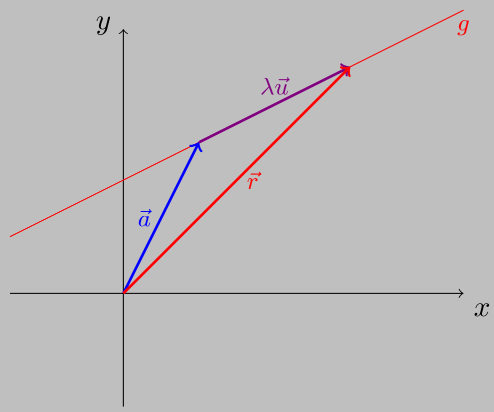
- Eine Gerade g in der Ebene ist in **Punkt-Richtungsform** oder **Parameterform** gegeben als Menge von Ortsvektoren

  $$g = \left\{ \vec{r} = \lambda\vec{u} + \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$

  oft kurz geschrieben als

  $$g\colon \vec{r} = \lambda\vec{u} + \vec{a} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \,.$$

  Hierbei wird λ als **Parameter**, $\vec{a}$ als **Aufpunktvektor** und $\vec{u} \neq \vec{O}$ als **Richtungsvektor** der Geraden bezeichnet. Die Ortsvektoren $\vec{r}$ zeigen dann zu den einzelnen Punkten auf der Geraden. Der Aufpunktvektor $\vec{a}$ ist der Ortsvektor eines festen Punktes auf der Geraden, der als **Aufpunkt** bezeichnet wird. Die Vielfachen $\lambda\vec{u}$ von $\vec{u}$ sind alle Vektoren, die kollinear zu $\vec{u}$ sind:



- Für eine Gerade g, die durch Angabe einer Geradengleichung in Normalform

$$g\colon y = mx + b$$

vorliegt, kann eine Punkt-Richtungsform angegeben werden, indem die Ortsvektoren $\begin{pmatrix} x \\ mx+b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ gebildet werden. Die Punkt-Richtungsform lautet dann

$$g\colon \vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \;, \quad x \in \mathbb{R}$$

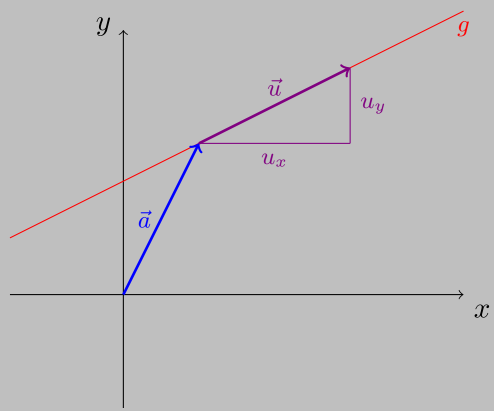
mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ und dem Aufpunktvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

- Für eine Gerade g, die in Parameterform

$$g\colon \vec{r} = \lambda \vec{u} + \vec{a} \;, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

vorliegt, kann eine zugehörige Geradengleichung folgendermaßen ermittelt werden: Der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ liefert durch Anlegen eines Steigungsdreiecks sofort die Steigung der Geraden. Es gilt

$$m = \frac{u_y}{u_x} \;.$$



(Hierfür muss $u_x \neq 0$ sein. Der Spezialfall $u_x = 0$ wird im Beispiel unten behandelt.) Nach den Methoden aus Abschnitt 9.2.2 benötigt man zur Angabe der Geradengleichung in Normalform nun nur noch einen Punkt auf der Geraden, aus dem man den Achsenabschnitt b bestimmt. Hierfür benutzt man am einfachsten den Aufpunktvektor $\vec{a}$.

Man stellt hier sofort fest, dass die Parameterform einer Geraden nicht eindeutig ist. Als Aufpunkt kann jeder Punkt auf der Geraden dienen, und auch als Richtungsvektor hat man beliebig viele kollineare Vektoren zur Auswahl. So wird zum Beispiel die Gerade g mit der Koordinatengleichung

$$g\colon \frac{1}{2}x + 1$$

aus dem einführenden Beispiel nicht nur durch

$$g\colon \vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

in Parameterform dargestellt, sondern auch durch

$$g\colon \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

oder

$$g\colon \vec{r} = \nu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \nu \in \mathbb{R} \ .$$

Oft benutzt man Darstellungen mit einem möglichst einfachen Richtungsvektor. Es sollte nur darauf geachtet werden, dass bei Darstellungen der gleichen Geraden mittels unterschiedlicher Richtungs- oder Aufpunktvektoren jeweils andere Variablen für den Parameter verwendet werden, da gleiche Parameterwerte in unterschiedlichen Darstellungen zu unterschiedlichen Punkten auf der Geraden führen. So ergibt beispielsweise der Parameterwert $\lambda = 1$ in der entsprechenden obigen Parameterform für g den Punkt

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

auf g, der Parameterwert $\nu = 1$ der entsprechenden obigen Parameterform für g den Punkt

$$1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf g.

Das folgende Beispiel zeigt einige Anwendungen der Punkt-Richtungsform.

Beispiel 10.2.3

- Für die Gerade g in der Ebene, welche durch die Geradengleichung

  $$g\colon 2y - 3x = 6$$

  gegeben ist, sollen zwei verschiedene Parameterformen ermittelt werden.

  Zunächst wird die Geradengleichung auf Normalform gebracht:

  $$2y - 3x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + 3 \ .$$

Punkte auf g haben also die Form $\left(x; \frac{3}{2}x+3\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$, welche durch Ortsvektoren $\begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x+3 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Folglich ist eine mögliche Parameterform durch

$$g\colon \vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

gegeben. Für eine andere Parameterform können ein beliebiger anderer Richtungsvektor, der kollinear zu $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ist, und ein beliebiger anderer Aufpunkt auf g gewählt werden. Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ gilt. Und $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist ein anderer passender Aufpunktvektor, da der Punkt $(2; 6)$ offenbar die Geradengleichung erfüllt. Folglich ist

$$g\colon \vec{r} = \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ \ \sigma \in \mathbb{R}$$

eine weitere mögliche Parameterform der Geraden g.

- Auch für eine Gerade, deren Koordinatengleichung nicht auf Normalform gebracht werden kann, wie etwa

$$h\colon x = 2 \ ,$$

kann eine Punkt-Richtungsform angegeben werden.

Punkte auf der Geraden h haben alle die Form $(2; y)$ für $y \in \mathbb{R}$ mit zugehörigen Ortsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$ für $y \in \mathbb{R}$. Da $\begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist eine mögliche Punkt-Richtungsform für h durch

$$h\colon \vec{r} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \ y \in \mathbb{R}$$

gegeben.

- Für die Gerade α in Parameterform mit

$$\alpha\colon \vec{r} = \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

soll die zugehörige Geradengleichung in Normalform ermittelt werden.

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liefert die Steigung $m = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$. Somit hat die Geradengleichung in Normalform die Form

$$\alpha\colon y = -\frac{2}{3}x + b \ .$$

Der Aufpunktvektor von α lautet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit kann zur Bestimmung des Achsenabschnitts b der Aufpunkt $(1; 1)$ eingesetzt werden:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b \ \Leftrightarrow \ b = \frac{5}{3} \ .$$

Somit ergibt sich

$$\alpha\colon y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \ .$$

- Auch für eine Gerade in Parameterform wie etwa

$$\beta\colon \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

  für welche die x-Komponente des Richtungsvektors 0 ist, kann eine zugehörige Geradengleichung ermittelt werden.

  Der Richtungsvektor mit x-Komponente gleich 0 impliziert, dass die Gerade parallel zur y-Achse verläuft. Folglich hat die Geradengleichung die Form

$$\beta\colon x = c \ .$$

  Die Konstante c kann wieder durch Einsetzen des Aufpunkts $(-1; 1)$ bestimmt werden. Man erhält $-1 = c$, und folglich gilt

$$\beta\colon x = -1 \ .$$

- Zu den beiden Punkten $P = (-1; -1)$ und $Q = (3; 2)$ ist die Gerade PQ in Parameterform zu bestimmen.

  Als Richtungsvektor dient hier der Verbindungsvektor

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

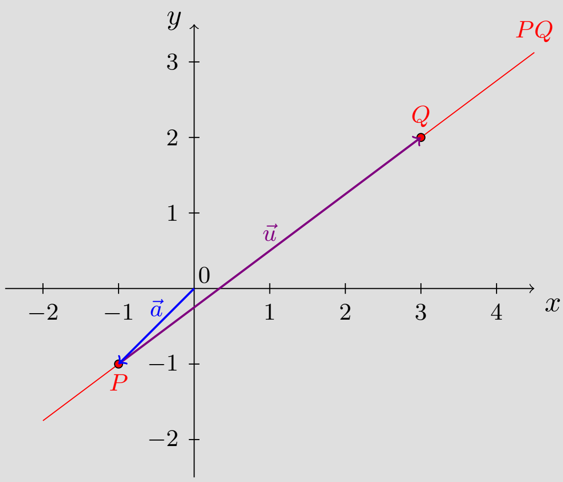
  und als Aufpunktvektor der Ortsvektor von einem der gegebenen Punkte, zum Beispiel

$$\vec{a} = \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

  Somit gilt

$$PQ\colon \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

  Bild hierzu:



Aufgabe 10.2.1 a. Gegeben ist die Gerade g mittels

$$g\colon \vec{r} = t\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\ ,\quad t \in \mathbb{R}$$

in Parameterform. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung von g in Normalform:
$g\colon y =$ $\boxed{}$.

b. Die Gerade h mit der Koordinatengleichung

$$h\colon \frac{1}{2}y + x + 2 = 0$$

hat die Parameterform

$$h\colon \vec{r} = s\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\-5\end{pmatrix}\ ,\quad s \in \mathbb{R}\ .$$

Bestimmen Sie die fehlenden Werte a und b.
$a =$ $\boxed{}$
$b =$ $\boxed{}$

c. Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-2; -1)$ und $B = (3; -\frac{3}{2})$. Welche der folgenden Parameterformen sind korrekte Darstellungen der Geraden AB?

- ☐ (i) $AB : \vec{r} = s\begin{pmatrix}5\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\frac{6}{5}\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$
- ☐ (ii) $AB : \vec{r} = t\begin{pmatrix}5\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$
- ☐ (iii) $AB : \vec{r} = u\begin{pmatrix}-5\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix},\ u \in \mathbb{R}$
- ☐ (iv) $AB : \vec{r} = v\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix},\ v \in \mathbb{R}$
- ☐ (v) $AB : \vec{r} = w\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-22\\1\end{pmatrix},\ w \in \mathbb{R}$
- ☐ (vi) $AB : \vec{r} = z\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\-1\end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R}$

d. Für welchen Wert von ψ liegt der Punkt P mit dem Ortsvektor

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix}-2\\\psi\end{pmatrix}$$

auf der Geraden

$$i\colon \vec{r} = \tau\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\ ,\quad \tau \in \mathbb{R}\ ,$$

und für welchen Parameterwert τ gilt dann $\vec{r} = \overrightarrow{P}$?
$\psi =$ $\boxed{}$
$\tau =$ $\boxed{}$

Lösung:

a. Die Steigung der Geraden wird aus dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ermittelt: $m = \frac{5}{-1} = -5$. Damit gilt

$$g\colon y = -5x + b\ .$$

Der Achsenabschnitt ergibt sich durch Einsetzen des Aufpunkts $(2;5)$:

$$5 = -5 \cdot 2 + b \ \Leftrightarrow\ b = 15\ .$$

Somit:

$$g\colon y = -5x + 15\ .$$

b. Überführen der Geradengleichung in Normalform ergibt

$$\frac{1}{2}y + x + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ y = -2x - 4\ .$$

Der zum Aufpunktvektor $\begin{pmatrix} b \\ -5 \end{pmatrix}$ gehörende Aufpunkt $(b;-5)$ muss auf der Geraden liegen, also die Geradengleichung erfüllen. Damit ergibt sich

$$-5 = -2b - 4 \ \Leftrightarrow\ b = \frac{1}{2}\ .$$

Die Ortsvektoren der Punkte auf h haben die Form $\begin{pmatrix} x \\ -2x-4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von h. Weitere Richtungsvektoren von h sind zu diesem kollinear. Da

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gilt, folgt $a = -1$.

c. Aus den gegebenen Punkten A und B folgt der Richtungsvektor

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\ .$$

Die Richtungsvektoren in den Fällen (ii) und (v) sind nicht zu diesem Vektor kollinear. Damit sind (ii) und (v) sicher keine korrekten Darstellungen der Geraden AB. Aus dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ folgt die Steigung $m = \frac{-\frac{1}{2}}{5} = -\frac{1}{10}$ der Geraden AB. Damit lautet die Geradengleichung

$$AB\colon y = -\frac{1}{10}x + b\ ,$$

und Einsetzen von A liefert den Achsenabschnitt b:

$$-1 = -\frac{1}{10} \cdot (-2) + b \ \Leftrightarrow\ b = -\frac{6}{5}\ .$$

Es gilt also

$$AB\colon y = -\frac{1}{10}x - \frac{6}{5}\ .$$

Diese Geradengleichung wird von den Aufpunkten in den Fällen (i) bis (v) erfüllt, im Fall (vi) aber nicht. Damit sind insgesamt die Fälle (i), (iii) und (iv) korrekte Darstellungen der Geraden, die Fälle (ii), (v) und (vi) aber nicht.

d. Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \psi \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

führt auf die beiden Gleichungen

$$-2 = \tau - 1 \text{ und } \psi = -3\tau + 2 \,.$$

Damit ergibt sich zunächst $\tau = -1$ und somit $\psi = -3 \cdot (-1) + 2 = 5$.

Geraden im Raum lassen sich im Gegensatz zu Geraden in der Ebene *nicht* mit Hilfe einer Koordinatengleichung darstellen. Hier hilft aber die Punkt-Richtungsform, die sich problemlos vom zwei- auf den dreidimensionalen Fall überträgt:

Info 10.2.4

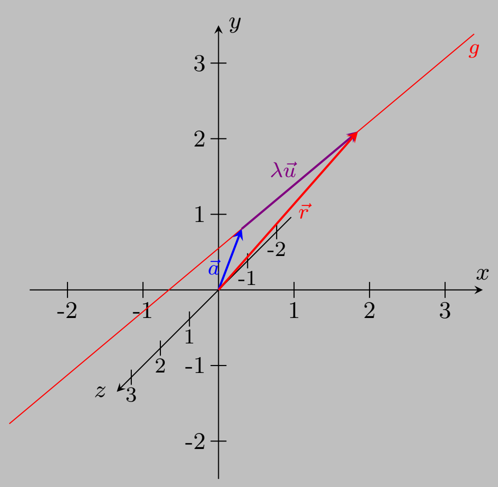
Eine Gerade g im Raum ist in **Punkt-Richtungsform** oder **Parameterform** gegeben als Menge von Ortsvektoren

$$g = \left\{ \vec{r} = \lambda \vec{u} + \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \,,$$

oft kurz geschrieben als

$$g\colon \vec{r} = \lambda \vec{u} + \vec{a} \,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \,.$$

Hier gelten die gleichen Bezeichnungen wie im zweidimensionalen Fall: λ heißt **Parameter**, $\vec{a}$ heißt **Aufpunktvektor** und $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$ heißt **Richtungsvektor** der Geraden:



Auch hier im dreidimensionalen Fall ist – analog zur Situation bei Geraden in der Ebene – die Parameterform einer Geraden nie eindeutig. Das folgende Beispiel zeigt die Anwendung von Geraden in Parameterform im Raum.

Beispiel 10.2.5

Zu den beiden gegebenen Punkten $P = (-1; -2; \frac{1}{2})$ und $Q = (2; 0; 8)$ sind zwei unterschiedliche Darstellungen der Geraden PQ in Parameterform anzugeben.

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ dient als Richtungsvektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} .$$

Der Punkt Q kann als Aufpunkt benutzt werden. Damit ergibt sich die Parameterform

$$PQ\colon \vec{r} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Weitere zulässige Richtungsvektoren müssen kollinear zu $\overrightarrow{PQ}$ sein. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} .$$

Dann kann zum Beispiel auch der Punkt P als Aufpunkt benutzt werden, und man erhält

$$PQ\colon \vec{r} = s \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

als weitere korrekte Punkt-Richtungsform für die Gerade PQ.

Aufgabe 10.2.2 a. Die Gerade $h = AB$, welche durch die gegebenen Punkte $A = (-1; -1; 0)$ und $B = (-3; 0; 1)$ verläuft, hat die Parameterform

$$h\colon \vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Bestimmen Sie die fehlenden Werte a, b, c und d.

$a =$ ☐

$b =$ ☐

$c =$ ☐

$d =$ ☐

b. Für welchen Wert von χ liegt der Punkt P mit dem Ortsvektor

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ \chi \\ -8 \end{pmatrix}$$

auf der Geraden

$$g\colon \vec{r} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \nu \in \mathbb{R} \ ,$$

und für welchen Parameterwert ν gilt dann $\vec{r} = \overrightarrow{P}$?

$\chi =$ ______

$\nu =$ ______

Lösung:

a. Aus den gegebenen Punkten A und B folgt der Richtungsvektor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 4 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit ebenfalls ein zulässiger Richtungsvektor für h, falls $a = b = -2$ gilt, denn dann hat man

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Der Aufpunktvektor $\begin{pmatrix} c \\ d \\ -4 \end{pmatrix}$ muss zu einem Punkt auf h gehören. Eine mögliche Parameterform der Geraden h ergibt sich unter Benutzung von $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor und $\overrightarrow{A}$ als Aufpunktvektor:

$$h\colon \vec{r} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Dies führt auf die Gleichung

$$\begin{pmatrix} c \\ d \\ -4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t - 1 \\ t - 1 \\ t \end{pmatrix} ,$$

aus deren dritter Komponente sofort $t = -4$ abzulesen ist. Damit muss

$$\begin{pmatrix} c \\ d \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und folglich $c = 7$ sowie $d = -5$ gelten.

b. Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \chi \\ -8 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu - 1 \\ -3\nu + 2 \\ 8\nu \end{pmatrix}$$

führt in der ersten und dritten Komponente auf $\nu = -1$, womit in der zweiten Komponente $\chi = -3 \cdot (-1) + 2 = 5$ gilt.

10.2.3 Ebenen im Raum

Startet man mit einem Vektor $\vec{u}$ im Raum und betrachtet alle Vielfachen $\lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dieses Vektors, so erhält man alle Vektoren, die kollinear zu $\vec{u}$ sind (vgl. Infobox 10.2.1). Zusammen mit einem Aufpunktvektor – und interpretiert als Ortsvektoren – bilden alle diese Vektoren dann die Parameterform einer Geraden, wie sie im vorigen Abschnitt 10.2.2 untersucht wurde. Aufbauend darauf ist es nun natürlich zu fragen, was man erhält, wenn man mit zwei festen (aber *nicht* kollinearen) Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ startet und dann alle möglichen Vektoren betrachtet, die zu diesen komplanar sind, also alle Vektoren, die man durch $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ erhält (vgl. wieder Infobox 10.2.1). Zusammen mit einem Aufpunktvektor ergibt dies eine Verallgemeinerung des Konzepts der Parameterform einer Gerade, nämlich die Parameterform einer Ebene im Raum, welche in der unten stehenden Infobox beschrieben wird.

Für Ebenen werden für gewöhnlich Großbuchstaben (E, F, G, ...) als Variablen verwendet. Natürlich ist das Konzept einer Ebene nur im $\mathbb{R}^3$ sinnvoll.

Info 10.2.6

Eine Ebene E im Raum ist in **Punkt-Richtungsform** oder **Parameterform** gegeben als Menge von Ortsvektoren

$$E = \{\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\ ,$$

oft kurz geschrieben als

$$E\colon \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\ ;\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ .$$

Hierbei werden λ und μ als **Parameter**, $\vec{a}$ als **Aufpunktvektor** und $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}$ als **Richtungsvektoren** der Ebene bezeichnet. Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind dabei *nicht* kollinear. Die Ortsvektoren $\vec{r}$ zeigen dann zu den einzelnen Punkten in der Ebene. Der Aufpunktvektor $\vec{a}$ ist der Ortsvektor eines festen Punktes auf der Ebene, der als **Aufpunkt** bezeichnet wird:

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Während zwei gegebene Punkte im Raum eine Gerade eindeutig festlegen (siehe Abschnitt 10.2.2), so legen drei gegebene Punkte im Raum eine Ebene eindeutig fest. Aus drei gegebenen Punkten kann relativ einfach die Parameterform der zugehörigen Ebene bestimmt werden. Die Punkt-Richtungsform einer Ebene ist – wie auch diejenige einer Geraden – für eine gegebene Ebene nicht eindeutig. Es gibt immer viele gleichwertige Punkt-Richtungsformen, um eine Ebene darzustellen. Das folgende Beispiel zeigt einige typische Anwendungen.

Beispiel 10.2.7

- Der Aufpunktvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben eine

Ebene

$$E\colon \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

in Parameterform, die in der Höhe 1 parallel zur xz-Ebene im Koordinatensystem liegt:

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Die oben angegebene Parameterform für E ist nicht die einzig mögliche. Jeder andere Punkt in E ist ebenfalls als Aufpunkt möglich. Zum Beispiel liegt der Punkt, welcher durch den Ortsvektor $\vec{a}' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ gegeben ist, in E, denn es gilt für $\lambda = \mu = 1$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} .$$

Dieser kann als Aufpunktvektor verwendet werden. Als andere Richtungsvektoren können alle Vektoren verwendet werden, die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ komplanar, zueinander aber nicht kollinear sind, zum Beispiel $\vec{u}' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}' = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Dann ist eine weitere Darstellung von E in Parameterform durch

$$E\colon \vec{r} = \vec{a}' + s\vec{u}' + t\vec{v}' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R}$$

möglich.

- Gegeben sind die drei Punkte $A = (1;0;-2)$, $B = (4;1;2)$ und $C = (0;2;1)$. Es ist eine Parameterform der Ebene F anzugeben, die durch diese drei Punkte festgelegt wird.

  Einer der drei Punkte, zum Beispiel A, wird als Aufpunkt benutzt. Dann ist $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ der Aufpunktvektor. Als Richtungsvektoren dienen dann die Verbindungsvektoren vom Aufpunkt zu den anderen beiden Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} ,$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} .$$

  Folglich ist

$$F\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \rho,\sigma \in \mathbb{R}$$

  eine korrekte Darstellung von F in Parameterform.

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

- Von zwei Punkten $P = (1; 2; 3)$ und $Q = (2; 6; 6)$ ist zu überprüfen, ob sie in der Ebene G, die in Parameterform durch

$$G\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \ ; \ \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, liegen.

Damit P bzw. Q in G liegen, müssen sich ihre Ortsvektoren jeweils für bestimmte Parameterwerte μ und ν als Ortsvektoren ergeben, es müsste also $\overrightarrow{P} = \vec{r}$ bzw. $\overrightarrow{Q} = \vec{r}$ für jeweils geeignete μ und ν gelten. Es ergibt sich für P:

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\3+2\mu+\nu\\2+3\mu+2\nu\end{pmatrix} .$$

Die erste Komponente dieser Vektorgleichung liefert offenbar $\mu = 1$. Dies in die zweite und dritte Komponente eingesetzt liefert zwei Gleichungen für ν, die sich gegenseitig widersprechen:

$$2 = 3 + 2 \cdot 1 + \nu \ \Leftrightarrow \ \nu = -3$$

und

$$3 = 2 + 3 \cdot 1 + 2\nu \ \Leftrightarrow \ \nu = -1 .$$

Somit kann es keine Parameterwerte μ und ν geben, die in der Parameterform der Ebene G den Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ liefern. Folglich liegt P nicht in G. Für Q hingegen berechnet man:

$$\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\3+2\mu+\nu\\2+3\mu+2\nu\end{pmatrix} .$$

Die erste Komponente liefert nun $\mu = 2$, was eingesetzt in die zweite und dritte Komponente auf

$$6 = 3 + 2 \cdot 2 + \nu \ \Leftrightarrow \ \nu = -1$$

und

$$6 = 2 + 3 \cdot 2 + 2\nu \ \Leftrightarrow \ \nu = -1$$

führt. Hier ergibt sich also kein Widerspruch, sondern es stellt sich heraus, dass genau die Parameterwerte $\mu = 2$ und $\nu = -1$ den Ortsvektor $\overrightarrow{Q}$ liefern. Somit liegt Q in G.

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Neben der Möglichkeit mittels dreier fester Punkte kann eine Ebene im Raum auch durch eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt, festgelegt werden. Das folgende Beispiel zeigt, wie dies auf den Fall von drei gegebenen Punkten zurückgeführt werden kann.

Beispiel 10.2.8

Gegeben ist der Punkt $P = (2; 1; -3)$ und die Gerade g in Parameterform durch

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Der Punkt P befindet sich nicht auf g, da es keinen Parameter $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ -t \end{pmatrix}$$

gilt, denn schon die zweite Komponente dieser Vektorgleichung enthält den Widerspruch $1 = -1$. So legen der Punkt P und die Gerade g eine Ebene E eindeutig fest, die sowohl P als auch g enthält. Eine Parameterform dieser Ebene erhält man, indem man sich zum Punkt P, der als Aufpunkt benutzt werden kann, noch zwei weitere Punkte auf g wählt und dann genauso wie im obigen Beispiel bei gegebenen drei Punkten vorgeht. Folglich ist hier der Aufpunktvektor

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \ ,$$

und zwei weitere Punkte Q_1 und Q_2 auf g ergeben sich für zwei verschiedene Werte des Parameters t, zum Beispiel $t = 0$ und $t = 1$. Die Wahl $t = 0$ ergibt den Aufpunkt der Geraden. Als Ortsvektor:

$$\overrightarrow{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Die Wahl $t = 1$ führt auf

$$\overrightarrow{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Damit ergeben sich die Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{Q}_1 - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{Q}_2 - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Somit lautet eine Punkt-Richtungsform der Ebene E:

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \ ; \quad v, w \in \mathbb{R}\ .$$

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Weitere Lagebeziehungen von Ebenen und Geraden – sowie daraus abgeleitet weitere Daten, mit Hilfe derer eine Ebene eindeutig festgelegt werden kann – werden im folgenden Abschnitt 10.2.4 untersucht.

Aufgabe 10.2.3

Die Ebene E, welche durch die drei Punkte $A = (0;0;8)$, $B = (3;-1;10)$ und $C = (-1;-2;11)$ eindeutig festgelegt wird, hat die Parameterform

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ x \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ z \\ -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R} \; .$$

Bestimmen Sie die fehlenden Komponenten x, y und z.

$x =$

$y =$

$z =$

Lösung:

Der Aufpunktvektor $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ und die Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ,$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ergeben zunächst die folgende Parameterform:

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mu, \nu \in \mathbb{R} \; .$$

Damit auch der Aufpunktvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ x \end{pmatrix}$ zu einem Punkt in E gehört, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu - \nu \\ -\mu - 2\nu \\ 8 + 2\mu + 3\nu \end{pmatrix} \; .$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den drei Unbekannten μ, ν und x, das mit den Methoden aus Abschnitt 4.3 gelöst werden kann. Hier führt die Betrachtung der ersten und zweiten Komponente auf die beiden Gleichungen

$$2 = 3\mu - \nu \quad \text{und} \quad -3 = -\mu - 2\nu \; ,$$

woraus man $\mu = \nu = 1$ berechnet. Dies eingesetzt in die dritte Komponente liefert

$$x = 8 + 2 + 3 = 13 \; .$$

Damit auch $\begin{pmatrix} y \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ z \\ -4 \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren der Ebene E sind, müssen diese jeweils zu $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ komplanar sein. Für den ersten Vektor erhält man

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b \\ -a - 2b \\ 2a + 3b \end{pmatrix} ,$$

also wiederum ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten. In diesem Fall liefern die zweite und die dritte Komponente die beiden Gleichungen

$$1 = -a - 2b \text{ und } -1 = 2a + 3b ,$$

woraus man $a = 1$ und $b = -1$ berechnet. Dies führt auf

$$y = 3 + (-1) \cdot (-1) = 4 .$$

Völlig analog für gilt den zweiten Vektor:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ z \\ -4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b \\ -a - 2b \\ 2a + 3b \end{pmatrix} .$$

Man extrahiert

$$5 = 3a - b \text{ und } -4 = 2a + 3b$$

und berechnet $a = 1$ sowie $b = -2$, was auf

$$z = -1 - 2 \cdot (-2) = 3$$

führt.

Aufgabe 10.2.4
Gegeben sind die Punkte $P = (h; 2; -2)$, $Q = (1; i; 6)$ und $R = (-3; 2; j)$ sowie die Ebene E in Parameterform:

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R} .$$

Bestimmen Sie die fehlenden Komponenten h, i und j, so dass die Punkte P, Q und R in der Ebene E liegen.
$h =$ ☐
$i =$ ☐
$j =$ ☐

Lösung:
Für die Ebene E gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2s + 3t \\ s + 2t \\ 2 + 7s + 5t \end{pmatrix} .$$

Die Bedingungen

$$\overrightarrow{P} = \vec{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2s+3t \\ s+2t \\ 2+7s+5t \end{pmatrix} ,$$

$$\overrightarrow{Q} = \vec{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2s+3t \\ s+2t \\ 2+7s+5t \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{R} = \vec{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2s+3t \\ s+2t \\ 2+7s+5t \end{pmatrix}$$

führen jeweils auf ein lineares Gleichungssystem in den Parametern s, t und h bzw. i bzw. j, das jeweils mit den Methoden aus Abschnitt 4.3 gelöst werden kann.

Für P ergibt sich: Die zweite und dritte Komponente bilden zwei lineare Gleichungen mit den zwei Unbekannten s und t der Form

$$2 = s + 2t \;\text{ und }\; -4 = 7s + 5t \;,$$

woraus man die Lösung $s = -2$ und $t = 2$ berechnet. Einsetzen in die erste Komponente führt auf

$$h = 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 5 \;.$$

Für Q ergibt sich: Die erste und dritte Komponente bilden zwei lineare Gleichungen mit den zwei Unbekannten s und t der Form

$$-2 = 2s + 3t \;\text{ und }\; 4 = 7s + 5t \;,$$

woraus man die Lösung $s = 2$ und $t = -2$ berechnet. Einsetzen in die zweite Komponente führt auf

$$i = 2 + 2 \cdot (-2) = -2 \;.$$

Für R ergibt sich: Die erste und zweite Komponente bilden zwei lineare Gleichungen mit den zwei Unbekannten s und t der Form

$$-6 = 2s + 3t \;\text{ und }\; 2 = s + 2t \;,$$

woraus man die Lösung $s = -18$ und $t = 10$ berechnet. Einsetzen in die dritte Komponente führt auf

$$j = 2 + 7 \cdot (-18) + 5 \cdot 10 = -74 \;.$$

10.2.4 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen im Raum

Während es für die Lagebeziehung zweier Geraden in der Ebene nur drei Möglichkeiten gibt (die Geraden sind parallel, identisch oder sie schneiden sich, vgl. Abschnitt 9.2.3), existieren für zwei Geraden im Raum vier Möglichkeiten. Diese werden in der folgenden Infobox zusammengefasst.

Info 10.2.9

Gegeben sind zwei Geraden im Raum in Punkt-Richtungsform, g mit Aufpunktvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$ sowie h mit Aufpunktvektor $\vec{b}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$:

$$g\colon \vec{r} = \vec{a} + s\vec{u}\ ;\quad s \in \mathbb{R}\ ,$$

$$h\colon \vec{r} = \vec{b} + t\vec{v}\ ;\quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Für die relative Lage von g und h gibt es genau vier Möglichkeiten:

1. Die Geraden sind **identisch**. In diesem Fall haben g und h alle Punkte gemeinsam, fallen also zusammen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind und es einen gemeinsamen Punkt gibt.
2. Die Geraden sind **parallel**. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind und es *keinen* gemeinsamen Punkt gibt.
3. Die Geraden schneiden sich. In diesem Fall haben g und h genau einen gemeinsamen Punkt, der **Schnittpunkt** genannt wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *nicht* kollinear sind und es einen gemeinsamen Punkt gibt.
4. Geraden, die weder identisch noch parallel sind und sich auch nicht schneiden, heißen **windschief**. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *nicht* kollinear sind und es *keinen* gemeinsamen Punkt gibt.

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Nach den Kriterien, die in obiger Infobox für die vier Möglichkeiten der relativen Lage zweier Geraden aufgeführt sind, geht man in der Praxis so vor, dass man zunächst die beiden Richtungsvektoren auf Kollinearität prüft und dann nach möglichen gemeinsamen Punkten der beiden Geraden sucht. Dies legt schließlich einen der vier Fälle eindeutig fest. Das folgende Beispiel zeigt Anwendungen dieses Vorgehens für alle vier Fälle.

Beispiel 10.2.10

Gegeben sind die vier Geraden g, h, i und j in Parameterform:

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\ ;\quad s \in \mathbb{R}\ ,$$

$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ;\quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

$$i\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\ ;\quad u \in \mathbb{R}$$

und

$$j: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \; ; \; v \in \mathbb{R}\,.$$

- Die Geraden g und h sind identisch. Die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ von g und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von h sind kollinear. Es gilt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

  Außerdem ist der Punkt, welcher durch den Ortvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, in h (als Aufpunkt) und g enthalten, denn für g gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2s \\ 2s \\ 3-4s \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; s = -1\,.$$

  Also ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ in g für den Parameterwert $s = -1$.

- Die Geraden h und i (und damit natürlich auch g und i) sind parallel. Die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von h und $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ von i sind kollinear. Es gilt

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

  Allerdings haben h und i keine Punkte gemeinsam. Dies sieht man in diesem Fall folgendermaßen: Der Aufpunkt einer der beiden Geraden ist kein Punkt auf der anderen Geraden. Dann haben die beiden Geraden gar keine gemeinsamen Punkte. Hier kann man zum Beispiel testen, ob sich der Aufpunktvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ der Gerade i als Ortsvektor der Gerade h ergeben kann:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2-t \\ 7+2t \end{pmatrix}\,.$$

  In dieser Vektorgleichung ergäbe sich in der ersten Komponente $t = 3$ und in der zweiten Komponente $t = -2$, was bereits ein Widerspruch ist. Folglich haben die beiden Geraden keine gemeinsamen Punkte.

- Die Geraden i und j schneiden sich. Zunächst sind für diese beiden Geraden die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$ nicht kollinear. Es gibt keine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$$

gilt, denn für die erste Komponente müsste $a = -3$ und für die zweite Komponente $a = 1$ gelten, was bereits ein Widerspruch ist. Allerdings haben die beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt, den man durch Gleichsetzen der Ortsvektoren für i und j findet:

$$\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-3u\\3u\\8-6u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+v\\3+3v\\2-3v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\ .$$

Hier führen die ersten beiden Komponenten zu den Gleichungen

$$3 - 3u = v \text{ und } u = 1 + v$$

für u und v, woraus man $v = 0$ und $u = 1$ berechnet. Dies eingesetzt in die dritte Komponente ergibt

$$8 - 6\cdot 1 = 2 - 3\cdot 0 \;\Leftrightarrow\; 2 = 2\ .$$

Die Vektorgleichung für die Ortsvektoren ist also für die Parameterwerte $u = 1$ und $v = 0$ erfüllt. Folglich ergibt sich der Ortsvektor des Schnittpunkts für den Parameterwert $u = 1$ in der Gerade i oder auch für den Parameterwert $v = 0$ in der Gerade j. Man erhält als Schnittpunkt den Punkt $(1; 3; 2)$.

- Die Geraden g und j (und damit natürlich auch h und j) sind windschief. Auch in diesem Fall erhält man analog zum Fall mit Schnittpunkt oben recht schnell, dass die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$ von g und $\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$ von j nicht kollinear sind. Nun haben die beiden Geraden aber keinen gemeinsamen Punkt, was man wieder durch Gleichsetzen der Ortsvektoren findet:

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-2s\\2s\\3-4s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+v\\3+3v\\2-3v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\ .$$

Diese Vektorgleichung ist widersprüchlich, das heißt man findet keine Parameterwerte s und v, die sie erfüllen, und folglich haben g und j keine gemeinsamen Punkte. Die erste und die zweite Komponente führen auf die beiden Gleichungen

$$-2s = 2 + v \text{ und } 2s = 3 + 3v\ ,$$

woraus man $v = -\frac{5}{4}$ und $s = -\frac{3}{8}$ berechnet. Setzt man dies aber in die dritte Komponente ein, so ergibt sich der Widerspruch

$$3 - 4(-\frac{3}{8}) = 2 - 3(-\frac{5}{4}) \;\Leftrightarrow\; \frac{9}{2} = \frac{23}{4}\ .$$

Aufgabe 10.2.5
Die beiden Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad y \in \mathbb{R}$$

schneiden sich, da

- ☐ die beiden Richtungsvektoren kollinear sind,
- ☐ die beiden Richtungsvektoren nicht kollinear sind,
- ☐ die beiden Richtungsvektoren kollinear sind und die Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen,
- ☐ die beiden Richtungsvektoren nicht kollinear sind und die Geraden einen gemeinsamen Punkt besitz
- ☐ die beiden Richtungsvektoren nicht kollinear sind und die Geraden keinen gemeinsamen Punkt besit

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g und h.
$S =$ ☐

Der Ortsvektor des Schnittpunkts $\overrightarrow{S}$ ergibt sich in den Geraden g und h jeweils für die Parameterwerte
$x =$ ☐ und
$y =$ ☐ .

Lösung:
Die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear, da es keine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Denn betrachtet man die zweite Komponente dieser Vektorgleichung, so müsste $a = -5$ gelten, aus der ersten Komponente müsste allerdings $a = -\frac{5}{3}$ folgen; ein Widerspruch. Weiterhin besitzen die Geraden einen gemeinsamen Punkt, den Schnittpunkt S, der unten berechnet wird. Diese beiden Tatsachen, und nur diese, sind nach Infobox 10.2.9 hinreichend dafür, dass die beiden Geraden sich schneiden.

Der Schnittpunkt ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Ortsvektoren:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-5x\\2+10x\\4-15x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+3y\\-2y\\7+3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} .$$

Die ersten beiden Komponenten dieser Vektorgleichung liefern die Gleichungen

$$-5x = 3 + 3y \text{ und } 2 + 10x = -2y ,$$

woraus man $x = 0$ und $y = -1$ berechnet. Setzt man diese Werte in die dritte Komponente ein, so ergibt sich

$$4 - 15 \cdot 0 = 7 + 3 \cdot (-1) \Leftrightarrow 4 = 4 .$$

Somit ist die Vektorgleichung für diese Parameterwerte erfüllt, und es existiert ein gemeinsamer Punkt der beiden Geraden g und h. Dessen Ortsvektor ergibt sich zum Beispiel durch Einsetzen des Parameterwerts $x = 0$ in g:

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.2.6
Die beiden Geraden

$$\gamma \colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$$

und

$$\kappa \colon \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

sind parallel. Bestimmen Sie den fehlenden Eintrag c und geben Sie an, welche Werte a und b für die Parallelität **nicht** gleichzeitig annehmen dürfen.

$a \neq$ $\boxed{}$
$b \neq$ $\boxed{}$
$c =$ $\boxed{}$

Lösung:
Für Parallelität müssen die beiden Richtungsvektoren kollinear sein. Man findet aus der Bedingung

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} ,$$

den Wert $s = -\frac{1}{2}$ und damit $c = 1$. Damit die Geraden wirklich parallel und nicht identisch sind, darf der Aufpunkt von κ nicht auf γ liegen, die Werte für a und b müssen also so sein, dass die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 3s \\ 6 - 2s \\ -2s \end{pmatrix}$$

für keinen Parameterwert s erfüllbar ist. Die dritte Komponente liefert sofort $s = -2$ für die Erfüllbarkeit der Gleichung. Dies eingesetzt in die erste und zweite Komponente ergibt $a = -10$ und $b = 10$. Folglich muss für echte Parallelität $a \neq -10$ oder $b \neq 10$ gelten.

Hat man zwei Geraden im Raum gegeben, die echt parallel sind oder sich schneiden, so stellt man fest, dass auch diese jeweils eine Ebene eindeutig festlegen:

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Es handelt sich dabei jeweils um diejenige Ebene, die beide Geraden beinhaltet.

Das folgende Beispiel zeigt, wie man aus zwei echt parallelen oder sich schneidenden Geraden die Parameterform der Ebene bekommt, die durch diese eindeutig festgelegt wird.

Beispiel 10.2.11

- Die beiden Geraden

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$$

und

$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

schneiden sich im Punkt $S = (1;2;4)$ (vgl. Aufgabe 10.2.5). Dadurch wird eine Ebene E eindeutig festgelegt, die sowohl g als auch h beinhaltet. Für eine Parameterform von E benutzt man die Ortsvektoren von drei geeigneten Punkten, die man aus den Geraden g und h berechnet. Der Schnittpunkt eignet sich als Aufpunkt von E mit dem Aufpunktvektor

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}.$$

Dann ergeben sich noch Ortsvektoren von zwei Punkten P und Q dadurch, dass man zum Beispiel die Parameterwerte $s = 1$ und $t = 1$ in die Parameterformen der Geraden einsetzt:

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\12\\-11\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\\10\end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{S} = \begin{pmatrix}-4\\12\\-11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{S} = \begin{pmatrix}7\\-2\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\\11\end{pmatrix}.$$

Somit ist eine mögliche Parameterform von E durch

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}6\\-4\\11\end{pmatrix} \quad ; \quad \mu,\nu \in \mathbb{R}$$

gegeben.

- Die beiden Geraden
$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$$
und
$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$
sind parallel (vgl. Aufgabe 10.2.6). Dadurch wird eine Ebene F eindeutig festgelegt, die sowohl g als auch h beinhaltet. Für eine Parameterform von F benutzt man die Ortsvektoren von drei geeigneten Punkten, die man aus den Geraden g und h berechnet. Es eignen sich die Ortsvektoren von Punkten auf g bzw. h, die sich für drei Parameterwerte ergeben, zum Beispiel $s = 0$, $s = 1$ und $t = 0$:
$$\vec{A} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix} ,$$
dient als Aufpunktvektor. Dann erhält man sofort unter Benutzung von
$$\vec{B} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix} ,$$
dass für den ersten Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Ebene F genau der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$ von g benutzt werden kann. Der zweite Richtungsvektor der Ebene ergibt sich aus dem Ortsvektor eines Punktes B auf h für den Parameterwert $t = 0$, also den Aufpunkt von h:
$$\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} .$$
Und folglich ist
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix}$$
der zweite Richtungsvektor von F. Eine Parameterform von F ist also gegeben durch
$$F\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} .$$

Für die Lagebeziehung einer Geraden und einer Ebene im Raum gibt es wieder nur drei Möglichkeiten. Diese sind in der folgenden Infobox zusammengefasst.

Info 10.2.12

Sind eine Gerade g mit Aufpunktvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$ sowie eine Ebene E mit Aufpunktvektor $\vec{b}$ und Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im Raum in Parameterform gegeben durch

$$g\colon \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u}\ ;\quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$E\colon \vec{r} = \vec{b} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}\ ;\quad \mu,\nu \in \mathbb{R}\ ,$$

so gibt es für die relative Lage von g und E genau drei Möglichkeiten:

1. Die Gerade g liegt in der Ebene E. Dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ komplanar sind und der Aufpunkt der Geraden in der Ebene liegt.
2. Die Gerade g liegt parallel zur Ebene E. Dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ komplanar sind und der Aufpunkt der Geraden *nicht* in der Ebene liegt.
3. Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich. Dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht komplanar sind.

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Hat man eine Gerade und eine Ebene gegeben und möchte man deren Lagebeziehung bestimmen, so überprüft man zunächst die drei Richtungsvektoren auf Komplanarität. Ist diese gegeben, so untersucht man den Aufpunkt der Geraden darauf hin, ob er in der Ebene enthalten ist. Dies legt letztlich einen der drei möglichen Fälle eindeutig fest. Falls sich Gerade und Ebene schneiden, kann man dann noch den Schnittpunkt berechnen. Das folgende Beispiel zeigt einige dafür benutzte Vorgehensweisen.

Beispiel 10.2.13

Gegeben ist eine Ebene E in Parameterform durch

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\ ;\quad s,t \in \mathbb{R}\ .$$

- Eine Gerade, die den Vektor $\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor aufweist, liegt entweder in der Ebene E oder ist zu dieser parallel, da $\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$ zu den beiden Richtungsvektoren von E komplanar ist. Man findet aus der Bedingung

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

die Zahlen $s = 1$ und $t = -2$. Folglich liegt die Gerade

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

in der Ebene E, denn der Aufpunkt $(-1; 3; 0)$ liegt in E, da man berechnet:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3s \\ 2-s \\ 2+2t \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; s = t = -1 \,.$$

Der Ortsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden ergibt sich also für die Parameterwerte $s = t = -1$ in der Ebene. Demhingegen ist die Gerade

$$h\colon \vec{r} = y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad y \in \mathbb{R}$$

parallel zu Ebene E, denn h weist als Aufpunkt den Ursprung $(0; 0; 0)$ auf. Der Ursprung liegt aber nicht in E, denn für die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3s \\ 2-s \\ 2+2t \end{pmatrix}$$

gibt es keine Parameterwerte s und t, die diese erfüllen. Die erste Komponente würde $s = -\frac{2}{3}$ implizieren und die zweite Komponente $s = 2$; ein Widerspruch.

- Jede Gerade mit einem Richtungsvektor, der nicht komplanar zu den beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von E ist, schneidet die Ebene E in genau einem Punkt. Ein Beispiel einer solchen Geraden ist

$$k\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R} \,.$$

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht komplanar zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ -a \\ 2b \end{pmatrix}$$

ist durch keine Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllbar. Die erste Komponente würde $a = \frac{1}{3}$ und die zweite $a = -1$ implizieren; ein Widerspruch. Nun kann durch Gleichsetzen der Ortsvektoren der Geraden k und der Ebene E der Schnittpunkt der beiden berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+\mu \\ 1+\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3s \\ 2-s \\ 2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \,.$$

Interessiert man sich nur für den Schnittpunkt, so genügt es den Parameterwert der Geraden zu bestimmen, für den diese Vektorgleichung erfüllt ist. Der Ortsvektor des Schnittpunkts ergibt sich dann durch Einsetzen des bestimmten Parameterwerts in die Gerade. Die ersten beiden Komponenten dieser Vektorgleichung liefern zwei Gleichungen für die Unbekannten μ und s:

$$\mu = 5 + 3s \quad \text{und} \quad \mu = 1 - s \ ,$$

woraus man $\mu = 2$ erhält. Damit hat der Schnittpunkt den Ortsvektor

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Aufgabe 10.2.7
Gegeben ist die Ebene

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

und die Gerade

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} \quad ; \quad u \in \mathbb{R} \ ,$$

deren Aufpunkt nicht in E liegt.

Bestimmen Sie den fehlenden Eintrag c, so dass g parallel zu E ist.
$c =$ ☐

Berechnen Sie für alle anderen Werte von c den Schnittpunkt $S = (x; y; z)$ in Abhängigkeit von c. Geben Sie die drei Komponenten von S getrennt an.
$x =$ ☐
$y =$ ☐
$z =$ ☐

Lösung:

Damit g und E parallel sind, muss der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ von g zu den beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ von E komplanar sein. Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist nur für $c = 1$ erfüllbar, denn die erste und zweite Komponente liefern das lineare Gleichungssystem

$$s - t = 0 \ , \quad 3s + t = 4$$

für die Unbekannten s und t, das die Lösung $s = t = 1$ besitzt. Dies erzwingt in der dritten Komponente

$$c = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \; .$$

Für den Schnittpunkt werden die Ortsvektoren von Gerade und Ebene gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+4u \\ 1+cu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+s-t \\ -2+3s+t \\ 2s-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; .$$

Diese Vektorgleichung entspricht einem linearen Gleichungssystem in den Variablen s, t und u mit dem Parameter c, das mit den Methoden aus Abschnitt 4.4 gelöst werden kann. Man erhält für die Unbekannte u:

$$u = \frac{10}{1-c} \; .$$

Damit ergibt sich der Ortsvektor zum Schnittpunkt S durch Einsetzen in die Gerade g:

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{1-c} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\frac{40}{1-c} \\ 1+\frac{10c}{1-c} \end{pmatrix} \; .$$

Aufgabe 10.2.8
Gegeben ist die Gerade

$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \rho \in \mathbb{R} \; .$$

Bestimmen Sie folgende Werte des Parameters ρ:

a. Wert des Parameters ρ für den h die xy-Ebene schneidet: $\rho =$ ☐

b. Wert des Parameters ρ für den h die yz-Ebene schneidet: $\rho =$ ☐

c. Wert des Parameters ρ für den h die xz-Ebene schneidet: $\rho =$ ☐

Lösung:

a. In der xy-Ebene ist $z = 0$, also muss die dritte Komponente des Ortsvektors von h gleich Null sein:
$$1 + \rho = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho = -1 \; .$$

b. In der yz-Ebene ist $x = 0$, also muss die erste Komponente des Ortsvektors von h gleich Null sein:
$$3 - 8\rho = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho = \frac{3}{8} \; .$$

c. In der xz-Ebene ist $y = 0$, also muss die zweite Komponente des Ortsvektors von h gleich Null sein:
$$2 + 9\rho = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho = -\frac{2}{9} \; .$$

Betrachtet man zwei Ebenen im Raum, so gibt es für ihre Lagebeziehung drei Fälle, die sich analog zu den drei möglichen relativen Lagen zweier Geraden in der Ebene aus Abschnitt 9.2.3 verhalten. Die folgende Infobox stellt diese Fälle zusammen.

Info 10.2.14

Gegeben sind zwei Ebenen E_1 mit dem Aufpunktvektor $\vec{a}_1$ und den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{v}_1$ sowie E_2 mit dem Aufpunktvektor $\vec{a}_2$ und den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}_2$ und $\vec{v}_2$ durch

$$E_1 : \vec{r} = \vec{a}_1 + \mu\vec{u}_1 + \nu\vec{v}_1 \ ; \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

und

$$E_2 : \vec{r} = \vec{a}_2 + \rho\vec{u}_2 + \sigma\vec{v}_2 \ ; \quad \rho, \sigma \in \mathbb{R} \ .$$

Für die relative Lage von E_1 und E_2 gibt es genau drei Möglichkeiten:

1. Die Ebenen E_1 und E_2 sind identisch, falls sie alle Punkte gemeinsam haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$ sowie die drei Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ komplanar sind und der Aufpunkt von E_1 in E_2 enthalten ist.

2. Die Ebenen E_1 und E_2 sind parallel, falls sie keine Punkte gemeinsam haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$ sowie die drei Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ komplanar sind und der Aufpunkt von E_1 *nicht* in E_2 enthalten ist.

3. Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich, falls ihre gemeinsamen Punkte eine Gerade bilden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$ *oder* die drei Richtungsvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *nicht* komplanar sind.

(Diese Abbildung erscheint in Kürze.)

Natürlich sind in den Bedingungen für die drei Fälle, die in obiger Infobox angegeben sind, die Rollen der beiden Ebenen auch vertauschbar; man kann also beispielsweise auch überprüfen, ob der Aufpunkt von E_2 in E_1 enthalten ist; dies macht keinen Unterschied. Falls die Ebenen sich schneiden, kann die Schnittgerade berechnet werden. Schnittmengen von Ebenen wurden bereits in Abschnitt 4.3 im Rahmen der geometrischen Interpretation der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme mit drei Unbekannten behandelt. Die Vertrautheit mit diesem Abschnitt wird im Folgenden vorausgesetzt und dessen kurze Wiederholung wird wärmstens empfohlen. Das folgende Beispiel zeigt die Vorgehensweise bei der Untersuchung der relativen Lage zweier Ebenen.

Beispiel 10.2.15

Gegeben sind die drei Ebenen

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ ; \quad a, b \in \mathbb{R} \ ,$$

$$F\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; c, d \in \mathbb{R}$$

und

$$G\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; x, y \in \mathbb{R} \, .$$

- Die Ebenen E und F sind parallel. Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ von E und der erste Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ von F sind komplanar, denn die Bedingung

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist durch die Zahlen $a = b = 1$ erfüllt. Genauso sind die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ von E und der zweite Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ von F sind komplanar, denn die Bedingung

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist durch die Zahlen $a = 1$ und $b = -1$ erfüllt. Weiterhin ist der Aufpunkt von F nicht in E enthalten, denn die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ 2 - 2a \\ -2 + a - 2b \end{pmatrix}$$

ist für keine Parameterwerte a und b erfüllbar. Aus der zweiten Komponente würde $a = \frac{1}{2}$ folgen, was eingesetzt in die erste Komponente auf $b = \frac{9}{8}$ führt. Dies ergibt aber in der dritten Komponente den Widerspruch $0 = -2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{4}$. Würde man allerdings in F einen anderen Aufpunkt wählen, der in E enthalten ist, zum Beispiel den gleichen Aufpunkt wie in E, so würde man eine zu E identische Ebene erhalten, also eine andere Parameterdarstellung der gleichen Ebene. Zum Beispiel ist

$$F'\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

eine solche Ebene.

- Die Ebenen E und G schneiden sich. Beide Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ von G sind nicht komplanar zu den beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$ von E. Zum Beispiel gilt für den zweiten Richtungsvektor von G, dass die Bedingung

$$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$$

durch keine Zahlen a und b erfüllbar ist. Die ersten beiden Komponenten würden $a = b = 0$ erzwingen, was der dritten Komponente widerspricht. Die Schnittgerade der beiden Ebenen berechnet man durch Gleichsetzen der Ortsvektoren. Man erhält hier:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+4b\\2-2a\\-2+a-2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+x\\-2x\\1+3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} .$$

Diese Vektorgleichung entspricht einem System von drei linearen Gleichungen mit den vier Unbekannten x, y, a und b. Dies wird nun mit den Methoden aus Abschnitt 4.4 gelöst, indem man eine der Unbekannten als Parameter auffasst und die anderen Unbekannten in Abhängigkeit von diesem berechnet. Dieser übrige Parameter wird am Ende der Parameter in der Punkt-Richtungsform der zu bestimmenden Schnittgeraden werden. Welche der Unbekannten man als Parameter auffasst, ist egal. Hier wird nun x als Parameter benutzt. Dann führen die ersten beiden Komponenten der Vektorgleichung auf die beiden Gleichungen

$$a + 4b = 5 + x \quad \text{und} \quad 2 - 2a = -2x ,$$

aus denen man $a = 1 + x$ und $b = 1$ berechnet. Dies in die dritte Komponente eingesetzt ergibt

$$-2 + (1 + x) - 2 \cdot 1 = 1 + 3y \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} .$$

Nun kann $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ oder $a = 1 + x$ und $b = 1$ in die Ebene G oder E eingesetzt werden; dies führt – bei gleicher Parameterwahl – auf dieselbe Parameterdarstellung der Geraden h, nämlich der Schnittgeraden der beiden Ebenen. Für das Einsetzen in G ergibt sich:

$$h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{4}{3})\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \;;\; x \in \mathbb{R} .$$

Aufgabe 10.2.9
Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}2\\-5\\8\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} \;;\; a, b \in \mathbb{R}$$

und

$$F\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad c, d \in \mathbb{R} \ ,$$

wobei der Aufpunkt von F nicht in E liegt.

Bestimmen Sie die fehlenden Komponenten x und y von F, so dass F und E parallel sind.
$x =$ [ ]
$y =$ [ ]

Lösung:
Für Parallelität ist erforderlich, dass beiden Richtungsvektoren von F jeweils zu den beiden Richtungsvektoren von E komplanar sind. Für den ersten Richtungsvektor von F liefert dies die Bedingung

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \ .$$

Hier berechnet man aus der ersten und zweiten Komponente die Werte $a = -1$ und $b = 2$, was in der dritten Komponente den Wert

$$x = -8 + 2 \cdot 4 = 0$$

erzwingt. Für den zweiten Richtungsvektor von F liefert dies die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 12 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \ .$$

Hier berechnet man aus der ersten und dritten Komponente die Werte $a = b = 1$, was in der zweiten Komponente den Wert

$$y = -5 - 1 = -6$$

erzwingt.

Aufgabe 10.2.10
Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E\colon \vec{r} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

und

$$F\colon \vec{r} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad c, d \in \mathbb{R} \ ,$$

welche sich schneiden und die Schnittgerade

$$g\colon \vec{r} = \xi \begin{pmatrix} 4 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R}$$

besitzen.

Bestimmen Sie die fehlenden Komponenten x und y des Richtungsvektors der Schnittgerade.
$x =$ $\boxed{}$
$y =$ $\boxed{}$

Lösung:
Gleichsetzen der Ortsvektoren der beiden Ebenen führt auf

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -5a - b \\ 8a + 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d \\ 3c - d \\ 4c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Lösen des zugehörigen Gleichungssystems mit d als Parameter führt auf $a = d$, $b = -\frac{5}{2}d$ und $c = -\frac{1}{2}d$. Die Bedingung $c = -\frac{1}{2}d$ in die Ebene F eingesetzt führt auf

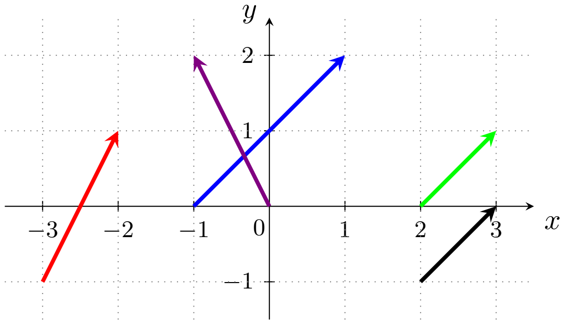
$$-\tfrac{1}{2}d \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Ein geeigneter Richtungsvektor für die Schnittgerade ist also $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$. Der Richtungsvektor in der angegebenen Parameterform von g hat als erste Komponente allerdings eine 4 und ist zu diesem Vektor also kollinear; dies führt auf den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor, also $x = -5$ und $y = -4$.

10.3 Abschlusstest

10.3.1 Abschlusstest Kapitel 3

Aufgabe 10.3.1
Geben Sie die im Diagramm dargestellten Pfeilklassen als Vektoren an:



a. Roter Vektor: ______ .

b. Violetter Vektor: ______ .

c. Blauer Vektor: ______ .

d. Grüner Vektor: ______ .

e. Schwarzer Vektor: ______ .

Aufgabe 10.3.2
Ein Sportflugzeug würde bei Windstille mit einer Geschwindigkeit von 150 Kilometer pro Stunde genau nach Süden fliegen. Es wird jedoch von einem Wind, der mit der Geschwindigkeit 30 Kilometer pro Stunde aus Richtung Westen weht, abgetrieben. Stellen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs als Summe von zwei Vektoren in der Ebene dar, wobei die zweite Komponente zur Nord-Süd-Achse (positive Werte für Norden) und die erste Komponente zur Ost-West-Achse gehört (positive Werte für Osten). Lassen Sie die Einheit (Kilometer pro Stunde) in der Rechnung weg:

a. Bei Windstille ist die Geschwindigkeit ______ .

b. Der Wind verursacht eine zusätzliche Geschwindigkeit von ______ .

c. Das abgetriebene Flugzeug hat insgesamt den Geschwindigkeitsvektor ______ .

d. Die Länge dieses Vektors (der Betrag der Geschwindigkeit) ist ______ .

Aufgabe 10.3.3
Gegeben sind die Punkte $P = (3; 4)$, $Q = (1; 0)$ und $R = (-2; 1)$ in der Ebene. Berechnen Sie die folgenden Vektoren:

a. $\overrightarrow{PQ} =$ ______ .

b. $\overrightarrow{QR} =$ ______ .

c. $\overrightarrow{RR} =$ ______ .

d. $\overrightarrow{QP}\ =$ [ ] .

e. $\overrightarrow{RP}\ =$ [ ] .

Aufgabe 10.3.4
Gegeben sind die Punkte $P = (1; 2; 3)$, $Q = (3; 0; 0)$ und $R = (-1; 2; 2)$ im Raum. Berechnen Sie die folgenden Vektoren:

a. $\overrightarrow{PQ}\ =$ [ ] .

b. $\overrightarrow{RQ}\ =$ [ ] .

Bestimmen Sie den Ortsvektor $\overrightarrow{M}$ des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{PR}$: $\overrightarrow{M}\ =$ [ ] .

Aufgabe 10.3.5
Finden Sie den Schnittpunkt S der beiden in Punkt-Richtungsform gegebenen Geraden

$$\vec{r}\ = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ und }\ \vec{r}\ = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}\ ;\ \beta \in \mathbb{R}\,.$$

a. Der Ortsvektor des Schnittpunkts ist $\overrightarrow{S} =$ [ ] .

b. Man erhält ihn als Punkt der ersten Geraden für den Parameter $\alpha\ =$ [ ] .

c. Man erhält ihn als Punkt der zweiten Geraden für den Parameter $\beta\ =$ [ ] .

11 Eingangstest

Modulübersicht

Beachten Sie bitte:

- Der einführende Teil des Tests dient dazu, den Umgang mit den Fragefeldern zu erlernen.
- Eingaben im einführenden Teil des Tests werden nicht gewertet.
- Während des Tests kann Literatur oder ein Aufschrieb vom Kurs benutzt werden, er soll jedoch ohne technische Hilfsmittel (insb. Taschenrechner) ausgeführt werden.

Zum einführenden Test geht es hier. Direkt zum gewerteten Eingangstest geht es hier.

11.1 Test 1 Einführender Teil

11.1.1 Neustart

Lesen Sie die Hinweise zum Testablauf.

Der einführende Teil des Tests ist frei ausfüllbar und wird nicht gewertet. Er dient dazu, den Umgang mit den Eingabefeldern zu erlernen.

Wichtig: Die Aufgaben sollen auf einem Blatt Papier ohne Taschenrechner gelöst werden. Die Eingabefelder dienen der Überprüfung Ihrer Lösung. Sobald Sie sich sicher im Umgang mit den Eingabefeldern fühlen können Sie oben rechts auf „Weiter “ klicken und den gewerteten Test bearbeiten.

Aufgabe 11.1.1
Vereinfachen Sie diese Mehrfachbrüche, so dass höchstens ein einfacher Bruch übrig bleibt:

a. $\dfrac{2+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{3}}$ ist vereinfacht das Gleiche wie $\boxed{}$.

b. $\dfrac{4x^2+y^2}{3x-y} - \dfrac{5x^2-2y^2}{y-3x}$ ist vereinfacht das Gleiche wie $\boxed{}$.

Aufgabe 11.1.2
Multiplizieren Sie diesen Term vollständig aus und fassen Sie zusammen:

$(x-2)(x+1)\cdot x = \boxed{}$.

Aufgabe 11.1.3
Wenden Sie jeweils eine binomische Formel an, um den Term umzuformen:

a. $(-x-3)(-x+3) = \boxed{}$.

b. $(s+2r+t)^2 = \boxed{}$.

Tipp:
Wenden Sie die binomische Formel zuerst auf $(s + (2r+t))^2$ an.

Aufgabe 11.1.4
Schreiben Sie diesen Potenz- und Wurzelausdruck als einfache Potenz mit einem rationalen Exponenten ohne das Wurzelzeichen zu verwenden:

$\sqrt{\sqrt{x}\cdot x} = \boxed{}$.

Aufgabe 11.1.5
Formen Sie die Brüche so um, dass der Nenner verschwindet:

a. $\frac{2x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$ ☐ .

b. $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$ ☐ .

Aufgabe 11.1.6
Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{t-2}{t+1} = 2$ nach t auf.
Antwort: $t =$ ☐ .

Aufgabe 11.1.7
Geben Sie die Lösungsmengen dieser quadratischen Gleichungen an:

a. $x^2 + 3x - 10 = 0$ hat die Lösungsmenge ☐ .

b. $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat die Lösungsmenge ☐ .

c. $(x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$ hat die Lösungsmenge ☐ .

Aufgabe 11.1.8
Geben Sie die Lösungsmengen dieser Gleichungen an:

a. $\frac{1}{x} + 1 = x - 1$ hat die Lösungsmenge ☐ .

b. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{4}{x}$ hat die Lösungsmenge ☐ .

c. $\sqrt{2x^2+1} = 3x$ hat die Lösungsmenge ☐ .

Wieviele Lösungen hat die Gleichung $(b-a)^{100} + (b+a)^{100} = 0$ wenn a und b voneinander unabhängige Lösungsvariablen sind?

☐ Keine Lösung
☐ Genau eine Möglichkeit sowohl für a wie auch für b
☐ Eine Möglichkeit für a und unendlich viele Möglichkeiten für b
☐ Unendlich viele Möglichkeiten für beide Variablen

Aufgabe 11.1.9
Drücken Sie den Betragsausdruck $|2x-1|-3x$ mit Hilfe einer Fallunterscheidung durch zwei Ausdrücke ohne Betragsstriche aus.
Antwort: $|2x-1| - 3x =$ ☐ .

Was soll ich hier machen?:
Beträge sind durch eine Fallunterscheidung definiert. Den Betragsausdruck $|x-1|$ kann man beispiels-

weise als mathematische Fallunterscheidung

$$|x-1| \;=\; \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{falls } x < 1 \end{cases}$$

schreiben.

Aufgabe 11.1.10
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Betragsgleichung $|2x-7| = x-2$.

Antwort: Die Lösungsmenge ist $L \;=$ ☐ .

Aufgabe 11.1.11
Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 + 4x < 5$ als Intervall an.

Antwort: $L \;=$ ☐ .

Aufgabe 11.1.12
Geben Sie jeweils Definitionsbereich und Lösungsmenge dieser Ungleichungen in Intervallschreibweise an:

a. Die Ungleichung $\sqrt{x} > x$ besitzt den Definitionsbereich ☐ und die Lösungsmenge ☐ .

b. Die Ungleichung $\sqrt{\sqrt{x-1}+2} > \sqrt{x+1}$ besitzt den Definitionsbereich ☐ und die Lösungsmenge ☐ .

Sobald Sie sich sicher im Umgang mit den Eingabefeldern fühlen, können Sie oben rechts auf Weiter klicken und den gewerteten Test bearbeiten.

11.2 Test 1: Abzugebender Teil

11.2.1 Eingangstest für den Onlinekurs

Aufgabe 11.2.1
Kreuzen Sie an, ob diese mathematischen Ausdrücke jeweils Gleichungen, Ungleichungen, Terme oder Zahlen darstellen (Mehrfachnennung ist möglich):

Mathematischer Ausdruck	Gleichung	Ungleichung	Term	Zahl
$\sqrt{3+\frac{1}{2}}$	☐	☐	☐	☐
$5x-1$	☐	☐	☐	☐
$32x^2 = \frac{1}{y}$	☐	☐	☐	☐
$32 > 2^x$	☐	☐	☐	☐
$x \in \{1; 2; 3\}$	☐	☐	☐	☐
$b^2 - 4ac \geq 0$	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 11.2.2
Vereinfachen Sie diese Mehrfachbrüche so weit wie möglich:

a. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ist vereinfacht das Gleiche wie ☐ .

b. $\dfrac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ ist vereinfacht das Gleiche wie ☐ .

Aufgabe 11.2.3
Multiplizieren Sie diesen Term vollständig aus und fassen Sie zusammen:

$(a - b)(2c + d) =$ ☐ .

Aufgabe 11.2.4
Wenden Sie jeweils eine binomische Formel an, um den Term umzuformen, so dass keine Klammerungen oder Wurzeln mehr auftreten:

a. $(2\sqrt{3} + x\sqrt{3})^2 =$ ☐ .

b. $(3a - 4b)^2 =$ ☐ .

Aufgabe 11.2.5
Schreiben Sie diese Potenz- und Wurzelausdrücke als einfache Potenz mit einem rationalen Exponenten ohne das Wurzelzeichen zu verwenden:

a. $\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{a} \cdot \sqrt{b^3} =$ ☐ .

b. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a} \cdot b} \cdot \frac{1}{c}} =$ ☐ .

Aufgabe 11.2.6
Formen Sie die Brüche so um, dass der Nenner verschwindet. In der Lösung dürfen keine Brüche und keine Potenzzeichen auftreten:

a. $\frac{12}{\sqrt{3}} =$ $\boxed{}$.

b. $\frac{1+x-\sqrt{4x}}{\sqrt{x}-1} =$ $\boxed{}$.

c. $\frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}+1} =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 11.2.7

Die einzige Lösung der Gleichung $\dfrac{x-2}{|x+1|} = \frac{1}{2}$ ist $x =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 11.2.8

Geben Sie die Lösungsmengen dieser Gleichungen an:

a. $\frac{1}{x} + 2x = 2 - x$ hat die Lösungsmenge $\boxed{}$.

b. $x^2 - 1 = (x-1)^3$ hat die Lösungsmenge $\boxed{}$.

c. $\sqrt[7]{r} = r^5$ hat die Lösungsmenge $\boxed{}$.

Aufgabe 11.2.9

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Betragsgleichung $|5x-1| = x^2 - 1$.

Antwort: Die Lösungsmenge ist $L =$ $\boxed{}$.

Benutzen Sie keinen Taschenrechner! Wurzel- und Bruchterme dürfen in der Lösung auftreten.

Aufgabe 11.2.10

Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 + 6 < -5x$ in Intervallschreibweise an.

Antwort: Das Lösungsintervall ist $\boxed{}$.

Aufgabe 11.2.11

Geben Sie die Lösungsmengen dieser Ungleichungen als Intervalle an, achten Sie dabei auf die Randpunkte:

a. $(x-1)^2 < x$ hat die Lösungsmenge $\boxed{}$.

b. $\sqrt{x^2-1} < x$ hat die Lösungsmenge $\boxed{}$.

Aufgabe 11.2.12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für folgendes Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= -5 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge
☐ ist leer,
☐ enthält genau eine Lösung: $x =$ ☐ , $y =$ ☐ ,
☐ enthält unendlich viele Lösungspaare (x, y).

Aufgabe 11.2.13

Geben Sie diejenige zweistellige Zahl an, die bei Vertauschen von Einer- und Zehnerziffer auf eine um 18 kleinere Zahl führt und deren Quersumme 6 ist.

Antwort: ☐

Aufgabe 11.2.14

Für welchen Wert des reellen Parameters α besitzt das Lineare Gleichungssystem

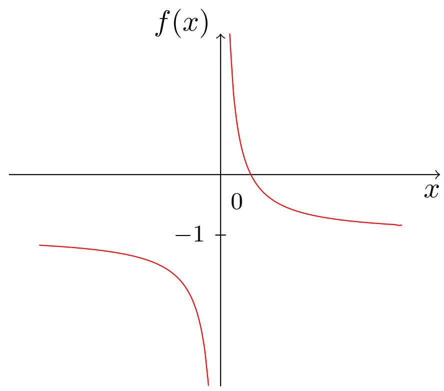
$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 4x + 2y &= \alpha \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen?

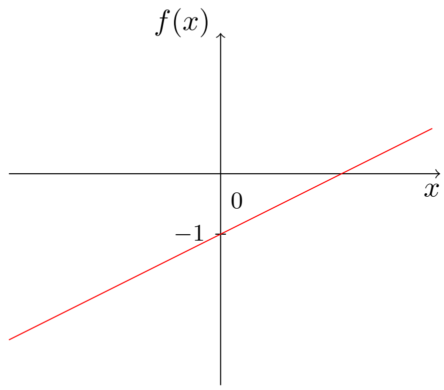
Antwort: $\alpha =$ ☐

Aufgabe 11.2.15

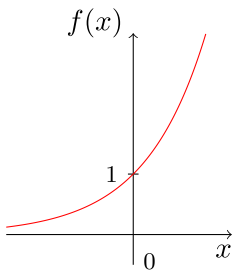
Ordnen Sie den folgenden Graphen die richtigen Abbildungsvorschriften der zugehörigen Funktionen zu:



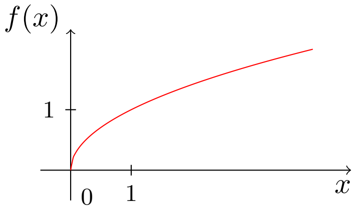
a)



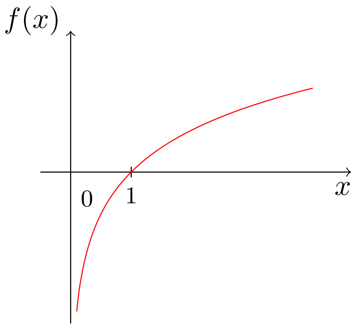
b)



c)



d)



e)

a. Graph a) gehört zur Funktion $f(x) =$ ______ .

b. Graph b) gehört zur Funktion $f(x) =$ ______ .

c. Graph c) gehört zur Funktion $f(x) =$ ______ .

d. Graph d) gehört zur Funktion $f(x) =$ ______ .

e. Graph e) gehört zur Funktion $f(x) =$ ______ .

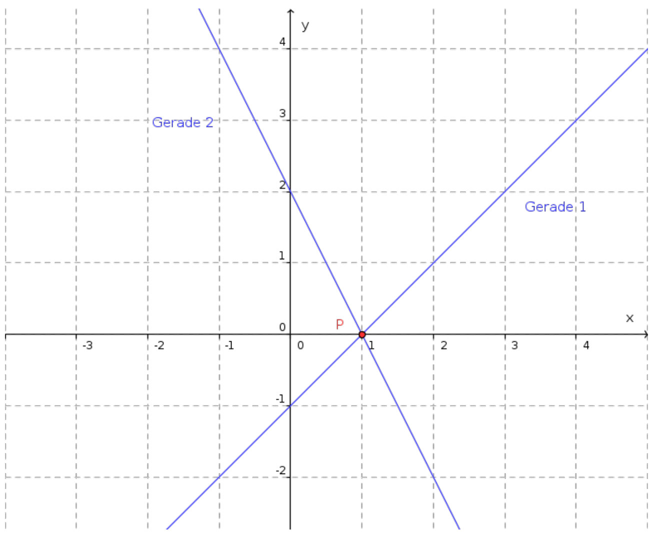
Wählen Sie dazu aus den folgenden Funktionsvorschriften und Eingabetermen aus (nicht alle kommen vor):

$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
$f(x) = \ln(1 - x)$
$f(x) = \ln(x)$
$f(x) = x^{1{,}5}$
$f(x) = \exp(x) = e^x$
$f(x) = (0{,}5)^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{2x} - 1$
$f(x) = \frac{1}{2} - x$

Geben Sie die Asymptote der Funktion mit der Abbildungsvorschrift a) an:

Es ist $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ ______ .

Aufgabe 11.2.16
Die Abbildung zeigt zwei Geraden im 2-dimensionalen Raum.



Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf:

Gerade 1: $y =$ $\square$

Gerade 2: $y =$ $\square$

Wieviele Lösungen besitzt das zugehörige Lineare Gleichungssystem?

Es besitzt
$\square$ keine Lösung,
$\square$ genau eine Lösung oder
$\square$ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 11.2.17
Geben Sie die Lösungsmenge für folgendes Lineare Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten, an:

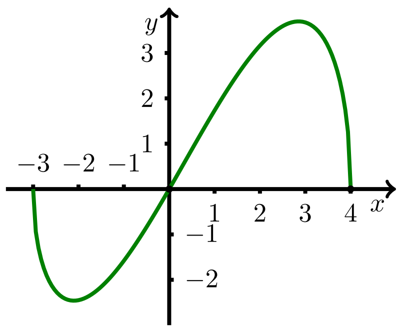
$$\begin{aligned} x + 2z &= 3 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge
$\square$ ist leer,
$\square$ enthält genau eine Lösung: $x =$ $\square$, $y =$ $\square$, $z =$ $\square$,
$\square$ enthält unendlich viele Lösungen (x, y, z).

Aufgabe 11.2.18
Ein Lieferwagen, dessen Kilometerzähler 20 km anzeigt, startet seine Tour um sechs Uhr. Er erreicht sein Ziel vier Stunden später. Der Kilometerzähler zeigt jetzt 280 km. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit v , also die mittlere Änderungsrate zwischen Start- und Zielort. Setzten Sie dazu die fehlenden Zahlen und mathematischen Symbole $+$, $-$, $\cdot$, $/$ in die folgende Rechnung ein:

$$v = \left(280 \; \square \; \square\right) \; \square \; \left(\square - 6\right) = \square$$

Aufgabe 11.2.19
Gegeben ist die Funktion $f : [-3; 4] \to \mathbb{R}$, deren Graph hier gezeichnet ist.



a. In $x_1 = 4$ ist die Ableitung ☐ gleich 0, ☐ nicht definiert, ☐ unendlich.

b. In $x_2 = 0$ ist die Ableitung ☐ positiv, ☐ gleich 0, ☐ negativ.

Aufgabe 11.2.20
Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{5x}{3+x^2}$, und geben Sie Ihr Resultat gekürzt und zusammengefasst an:

a. Erste Ableitung $f'(x) =$ ☐

b. Zweite Ableitung $f''(x) =$ ☐

Aufgabe 11.2.21
In welchen Bereichen ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{\ln x}{x}$ für $x > 0$ monoton fallend beziehungsweise monoton wachsend? Geben Sie Ihre Antwort in Form möglichst großer offener Intervalle (r, s) an:

a. f ist auf ☐ monoton wachsend.

b. f ist auf ☐ monoton fallend.

Welche der Stellen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ oder $x_3 = 6$ gehören zu einem Bereich, in dem f konvex ist?

Antwort: ☐

Aufgabe 11.2.22
Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a. $\displaystyle\int \left(5x^4 + 8x\right)\, dx =$ ☐

b. $\displaystyle\int 6\sin(2x)\, dx =$ ☐

Aufgabe 11.2.23
Berechnen Sie die Integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^3 + \cos(x)\right) dx = \qquad \text{und} \quad \int_1^4 x \cdot \sqrt{x} dx =$$

Aufgabe 11.2.24
Es ist $\int_{-5}^{5} x \cdot \cos(4x) dx = 0$, da das Integrationsintervall bezüglich 0 ist und der Integrand eine Funktion ist.

Aufgabe 11.2.25
Der Graph der Funktion $f : [-1; 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3 - 3x^2 - x + 3$ für $-1 \le x \le 3$ und die x-Achse schließen eine Fläche A ein. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f und der x-Achse, und bestimmen Sie den Flächeninhalt I_A von A. Antwort: $I_A =$

Aufgabe 11.2.26
Berechnen Sie den Schnittpunkt der folgenden beiden Geraden:

- Die Gerade $y = 3x + 3$,
- die Gerade mit der allgemeinen Gleichung $2x - 2y = 6$.

Antwort: Der Schnittpunkt ist .

Aufgabe 11.2.27
Ein Kreis habe die allgemeine Kreisgleichung

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \; = \; d$$

wobei d eine unbekannte positive Konstante ist. Welche Eigenschaften besitzt dieser Kreis?

a. Sein Radius ist $r \; =$.

b. Sein Mittelpunkt ist $P \; =$.

c. Er schneidet die durch $P = (-3; 3)$ und $Q = (3; -3)$ verlaufende Gerade $\overline{PQ}$

- ☐ in einem Punkt,
- ☐ in zwei Punkten,
- ☐ in drei Punkten,
- ☐ überhaupt nicht,
- ☐ das hängt von der Konstanten d ab.

Aufgabe 11.2.28

Es seien die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie daraus die folgenden Vektoren:

a. $\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \boxed{}$.

b. $2\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \boxed{}$.

c. $2(\vec{x} - \vec{y}) + 3\vec{z} = \boxed{}$.

Stichwortverzeichnis