Einführung

Info 3.1.1

Verbindet man zwei Zahlen durch eines der **Vergleichssymbole** $\leq$, $<$, $\geq$ oder $>$, so entsteht eine Aussage, die in Abhängigkeit von den Zahlen wahr oder falsch ist:

- $a < b$ (gesprochen: a ist echt kleiner als b oder einfach nur a kleiner b) ist wahr, wenn die Zahl a kleiner und nicht gleich b ist.
- $a \leq b$ (gesprochen: a ist kleiner gleich b) ist wahr, wenn die Zahl a kleiner oder gleich b ist.
- $a > b$ (gesprochen: a ist echt größer als b oder einfach nur a größer b) ist wahr, wenn die Zahl a größer und nicht gleich b ist.
- $a \geq b$ (gesprochen: a ist größer gleich b) ist wahr, wenn die Zahl a kleiner oder gleich b ist.

Die Vergleichszeichen drücken auf dem Zahlenstrahl aus, wie die gegebenen Werte zueinander liegen: $a < b$ bedeutet, dass a links von b auf dem Zahlenstrahl liegt.

Beispiel 3.1.2
Die Aussagen $2 < 4$, $-12 \leq 2$, $4 > 1$ und $3 \geq 3$ sind richtig, dagegen sind $2 < \sqrt{2}$ und $3 > 3$ falsch.

Auf dem Zahlenstrahl liegt die Zahl 2 links von der 4, also ist $2 < 4$.

Dabei ist $a < b$ gleichbedeutend mit $b > a$, ebenso ist $a \leq b$ gleichbedeutend mit $b \geq a$. Dabei ist aber zu beachten, dass das Gegenteil von $a < b$ die Aussage $a \geq b$ und nicht $a > b$ ist. Treten Terme mit Unbestimmten in einer Ungleichung auf, so besteht die Aufgabe darin, den Zahlenbereich für die Unbestimmte zu ermitteln, so dass die Ungleichung wahr ist.

3.1.1 Auflösen einfacher Ungleichungen

Ist die Unbestimmte in einer Ungleichung isoliert, so ist die Lösungsmenge ein Intervall:

Info 3.1.3

Die **aufgelösten Ungleichungen** haben folgende **Intervalle** als Lösungsmenge:

- $x < a$ besitzt die Lösungsmenge $(-\infty; a)$, alle x die kleiner als a sind.
- $x \leq a$ besitzt die Lösungsmenge $(-\infty; a]$, alle x die kleiner oder gleich a sind.
- $x > a$ besitzt die Lösungsmenge $(a; \infty)$, alle x die größer als a sind.
- $x \geq a$ besitzt die Lösungsmenge $[a; \infty)$, alle x die größeroder gleich a sind.

Dabei ist x die Unbestimmte und a ein konkreter Zahlenwert. Tritt die Unbestimmte in der Ungleichung nicht mehr auf, so ist die Lösungsmenge entweder $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ falls die Ungleichung erfüllt ist oder die leere Menge $\{\}$ falls die Ungleichung nicht erfüllt ist.

Wie schon bei den Gleichungen versucht man durch Umformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern, eine aufgelöste Ungleichung zu erhalten, aus der man die Lösungsmenge einfach ablesen kann:

Info 3.1.4

Um aus einer gegebenen Ungleichung eine aufgelöste Ungleichung zu erhalten, sind folgende **Äquivalenzumformungen** zu erlaubt:

- Addition einer Konstanten auf beiden Seiten der Ungleichung: $a < b$ ist äquivalent zu $a + c < b + c$.
- Multiplikation mit einer positiven Konstanten auf beiden Seiten der Ungleichung: $a < b$ ist äquivalent zu $a \cdot c < b \cdot c$ falls $c > 0$ ist.
- Multiplikation mit einer negativen Konstanten auf beiden Seiten der Ungleichung und Umdrehung des Vergleichssymbols: $a < b$ ist äquivalent zu $a \cdot c > b \cdot c$ falls $c < 0$ ist.

Beispiel 3.1.5
Die Ungleichung $\frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2} < 2$ löst man schrittweise mit den obigen Umformungen auf:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} < 2 && \| \; +\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{3}{4}x < 2 + \frac{1}{2} && \| \; \cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & x > -\frac{4}{3}\left(2 + \frac{1}{2}\right) && \| \; \text{Vereinfachen} \\
\Leftrightarrow\quad & x > -\frac{20}{6} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit besitzt die ursprüngliche Ungleichung die Lösungsmenge $\left(-\frac{20}{6}\,, \infty\right)$. Wichtig ist bei den Umformungen, dass die Multiplikation mit der negativen Zahl $-\frac{4}{3}$ das Vergleichssymbol umdreht.

Aufgabe 3.1.6
Sind diese Ungleichungen richtig oder falsch?

1. $\frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{3}$.
2. $a^2 \geq 2ab - b^2$ (wobei a und b unbekannte Zahlen sind).
3. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.
4. Angenommen $a < b$, dann ist immer auch $a^2 < b^2$.

Eingabe überprüfen

Lösung

Die erste Ungleichung vereinfacht sich zu $\frac{1}{2} > \frac{2}{3}$, was nach Multiplikation mit 6 äquivalent ist zu $3 > 4$, eine falsche Aussage. Die zweite Ungleichung kann man durch Übertragen aller Zahlenwerte auf die linke Seite vereinfachen zu $a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2 \geq 0$, eine wegen $a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2 = (a-b)^2$ für alle Zahlen a und b wahre Aussage. Multiplikation der dritten Gleichungskette mit dem Hauptnenner 12 ergibt die Kette $6 < 8 < 9$, die erfüllt ist. Die letzte Aussage ist dagegen falsch, beispiesweise für $a = -1$ und $b = 1$ ist $a^2 = 1$ nicht kleiner als $b^2 = 1$. Quadrieren von Termen ist keine Äquivalenzumformung.

Aufgabe 3.1.7
Welche Lösungsmengen besitzen die folgenden Ungleichungen?

1. $2x + 1 > 3x - 1$ besitzt das Lösungsintervall L = (-unendlich;2) .
2. $-3x - \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ besitzt das Lösungsintervall L = [-1/4;unendlich) .
3. $x - \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ besitzt das Lösungsintervall L = (-unendlich;unendlic .

Geben Sie Intervalle in der Form `(a;b)` ein, für die Intervallgrenzen dürfen auch Brüche oder `unendlich` bzw. `-unendlich` eingesetzt werden. Achten Sie darauf, ob die Randpunkte enthalten sind.

Lösung

Umformen der ersten Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} & 2x+1 > 3x-1 \quad \| \ +1 \\ \Leftrightarrow \ & 2x+2 > 3x \quad \| \ -2x \\ \Leftrightarrow \ & 2 > x \end{aligned}$$

und damit das Lösungsintervall $L = (-\infty; 2)$. Umformen der zweiten Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} & -3x - \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \quad \| \ +3x - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \ & -1 \leq 4x \quad \| \ \cdot \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \ & -\frac{1}{4} \leq x \end{aligned}$$

und damit $L = (-\frac{1}{4}; \infty)$. Umformen der dritten Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} & x - \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \quad \| \ -x \\ \Leftrightarrow \ & -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

Diese Aussage ist unabhängig von $x \in \mathbb{R}$ immer erfüllt, also ist $L = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ die Lösungsmenge.

Info 3.1.8

Eine Ungleichung in der Unbestimmten x ist **linear**, falls auf beiden Seiten der Ungleichung nur Vielfache von x und Konstanten vorkommen. Jede lineare Ungleichung lässt sich durch Äquivalenzumformungen zu einer der aufgelösten Gleichungen aus 3.1.3 umformen.

3.1.2 Spezielle Umformungen

Die folgenden Äquivalenzumformungen sind nützlich, wenn die Unbestimmte im Nenner eines Ausdrucks auftritt. Sie dürfen aber nur unter bestimmten Voraussetzungen eingesetzt werden:

Info 3.1.9

Unter der Vorbedingung, dass keiner der beteiligten Nenner den Wert Null annimmt (diese Fälle sind prinzipiell keine Lösungen) darf man auf beiden Seiten der Ungleichung den Kehrwert nehmen und dabei das Vergleichssymbol umdrehen.

Beispiel 3.1.10
Beispielsweise ist die Ungleichung $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{3x}$ äquivalent zu $2x \geq 3x$ (Vergleichssymbol wurde gedreht) sofern $x \neq 0$ ist. Die neue Ungleichung hat die Lösungsmenge $(-\infty; 0]$, aber da der Fall $x = 0$ ausgeschlossen wurde (und er auch nicht zum Definitionsbereich der ursprünglichen Ungleichung gehört) ist $L = (-\infty; 0)$ die Lösungsmenge von $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{3x}$.

Aufgabe 3.1.11
Wie lauten die Lösungsintervalle dieser Ungleichungen?

1. $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ besitzt die Lösungsmenge $L =$ (3;unendlich) .
2. $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ besitzt die Lösungsmenge $L =$ (1;unendlich) .

Lösung

Bei der ersten Ungleichung ist $x = 0$ nicht im Definitionsbereich, wir schließen diesen Wert daher aus. Bilden der Kehrwerte und Umdrehen der Ungleichung ergibt $x > 3$. Da $L = (3; \infty)$ eine Teilmenge des Definitionsbereichs ist, handelt es sich um die Lösungsmenge der Ungleichung.

Der Definitionsbereich der zweiten Ungleichung ist $(0, \infty)$, da nur für diese x sowohl die Wurzel wie auch die Nenner zulässig sind. Das Bilden der Kehrwerte und Umdrehen der Ungleichung ist auf dem Definitionsbereich erlaubt und ergibt $x > \sqrt{x}$. Da $\sqrt{x} > 0$ ist dürfen wir die gesamte Ungleichung durch $\sqrt{x}$ teilen und erhalten $\sqrt{x} > 1$. Diese Ungleichung besitzt die Lösungsmenge $L = (1; \infty)$, die auch im Definitionsbereich enthalten ist.

Beim letzten Aufgabenteil ist zu beachten:

Info 3.1.12

Das Quadrieren einer Ungleichung auf beiden Seiten ist keine Äquivalenzumformung und verändert unter Umständen die Lösungsmenge.

Beispielsweise ist $x = -2$ keine Lösung von $x > \sqrt{x}$, aber sehr wohl von $x^2 > x$. Diese Umformung darf man dennoch einsetzen, wenn man eine richtig formulierte Fallunterscheidung für die Umformung ansetzt und den Definitionsbereich der ursprünglichen Ungleichung beachtet. Diese Technik betrachten wir im nächsten Abschnitt genauer.

3.2.1 Umformungen mit Fallunterscheidungen

Die einfachen linearen Umformungen aus dem vorangehenden Abschnitt sind Äquivalenzumformungen, sie verändern die Lösungsmenge der betrachteten Ungleichung nicht. Ist die Ungleichung jedoch nicht linear, so werden weitergehende Techniken zum Auflösen benötigt. Diese benötigen meist eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit eines Vorzeichens, da sich im Gegensatz zu den Gleichungen aus Modul 2 nun auch die Richtung der Ungleichung beim Umformen ändern kann.

Info 3.2.1

Multipliziert man die eine Ungleichung mit einem Term, der die Unbestimmte x enthält, so ist eine Fallunterscheidung zu führen und die Umformung für jeden Fall separat zu betrachten:

- Für diejenigen x, für die der multiplizierte Term positiv ist, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.
- Für diejenigen x, für die der multiplizierte Term negativ ist, wird das Vergleichssymbol umgedreht.
- Der Fall, dass der multiplizierte Term den Wert Null annimmt, muss man bei der Umformung ausschließen und ggf. separat betrachten.

In den einzelnen Fällen gefundene Lösungsmengen müssen wie bei der Auflösungen von auf Verträglichkeit mit der Fallbedingung untersucht werden.

Die Addition von Termen, welche die Unbestimmte enthalten, erfordern dagegen keine Fallunterscheidung. Umformungen mit Fallunterscheidungen sind meist notwendig, wenn die Unbestimmte im Nenner oder in zusammengesetzten Termen auftritt:

Beispiel 3.2.2
Die Ungleichung $\frac{1}{2x} \leq 1$ kann vereinfacht werden, indem beide Seiten der Gleichung mit dem Term $2x$ multipliziert werden:

- Unter der Bedingung $x > 0$ erhalten wir die neue Ungleichung $1 \leq 2x$, sie hat die Lösungsmenge $L_1 = [\frac{1}{2}\,;\infty)$. Die Bedingung $x > 0$ ist für alle Elemente der Lösungsmenge erfüllt.
- Unter der Bedingung $x < 0$ erhalten wir die neue Ungleichung $1 \geq 2x$, sie hat die Lösungsmenge $(-\infty;\frac{1}{2}]$. Wegen der zusätzlichen Bedingung $x < 0$ sind in diesem Fall aber nur die Elemente von $L_2 = (-\infty, 0)$ Lösungen.
- Der Einzelfall $x = 0$ ist keine Lösung, da er nicht zum Definitionsbereich der Ungleichung gehört. In diesem Fall darf die Multiplikation mit x nicht durchgeführt werden.

Insgesamt erhalten wir also die Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{R}\backslash[0;\frac{1}{2})$ als Lösungsmenge:

Dabei gilt wie im Modul 2 für die Bildung der Lösungsmenge:

Info 3.2.3

Für jeden Fall ist die erhaltene Lösungsmenge auf die Teilmenge zu reduzieren, die der Fallbedingung genügt. Die Vereinigung dieser reduzierten Teilmengen ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung. Die Fälle müssen so eingeteilt werden, dass alle Elemente des Definitionsbereichs der Ungleichung abgedeckt sind.

Aufgaben

Wird mit zusammengesetzten Termen multipliziert, so ist genauer zu untersuchen, für welche x die Fallunterscheidung vorgenommen werden muss:

Aufgabe 3.2.4
Untersucht werden soll die Ungleichung $\frac{1}{4-2x} < 3$. Zunächst besitzt Sie den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, da nur für diese x der Nenner zulässig ist. Für die Multiplikation mit dem Term $4 - 2x$ gibt es drei Fälle, füllen Sie den Lückentext dazu passend aus:

1. Auf dem Intervall (-unendlich;2) ist der Term positiv, das Vergleichssymbol bleibt erhalten und die neue Ungleichung lautet $1 <$ 12-6*x. Lineares Umformen ergibt die Lösungsmenge $L_1 =$ (-unendlich;11/6). Die Elemente der Menge erfüllen die Vorbedingung.

2. Auf dem Intervall (2;unendlich) ist der Term negativ, das Vergleichssymbol wird gedreht. Die neue Ungleichung hat zunächst die Lösungsmenge (11/6;unendlich), wegen der Vorbedingung ist aber nur die Teilmenge $L_2 =$ (2;unendlich) davon zulässig.

3. Der Einzelwert $x = 2$ ist keine Lösung der ursprünglichen Ungleichung, da er nicht zum Definitionsbereich gehört.

Skizziere Sie die Lösungsmenge der Ungleichung und markieren Sie die Randpunkte.

Lösung

Auf dem Intervall $(-\infty; 2)$ ist der Term positiv mit Lösungsmenge $(-\infty; \frac{11}{6})$. Auf dem Intervall $(2; \infty)$ ist der Term dagegen negativ, das Vergleichssymbol wird gedreht. Die neue Ungleichung hat zunächst die Lösungsmenge $(\frac{11}{6}; \infty)$, wegen der Vorbedingung $x > 2$ ist aber nur die Teilmenge $L_2 = (2; \infty)$ davon zulässig. Insgesamt ist die Vereinigungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{R}\backslash[\frac{11}{6}; 2]$ die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung, die Randpunkte gehören nicht dazu:

Aufgabe 3.2.5
Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{x-1}{x-2} \leq 1$ ist $L =$ (-unendlich;2).

Lösung

Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

- Im Fall $x > 2$ multiplizieren wir mit $x - 2$ und erhalten $x - 1 \leq x - 2$, was äquivalent zur falschen Aussage $-1 \leq -2$ ist. Der erste Fall trägt nichts zur Lösungsmenge bei.
- Im Fall $x < 2$ multiplizieren wir mit $x - 2$ und erhalten $x - 1 \geq x - 2$, was äquivalent zur wahren Aussage $-1 \geq -2$ ist. Wegen der Vorbedingung ist das Lösungsintervall für diesen Fall aber nur $L_2 = (-\infty; 2)$.
- Der Einzelwert $x = 2$ ist keine Lösung.

Die Lösungsmenge ist also insgesamt $L = (-\infty; 2)$ ohne die Randpunkte (auch wenn die Ursprungsungleichung mit $\leq$ aufgebaut war).

Aufgabe 3.2.6
Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 1 + \sqrt{x}$ ist $L =$ (1;unendlich).

Lösung

Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $D = [0; \infty)\backslash\{1\}$, da nur für diese x die Wurzeln und die Nenner zulässig sind.

- Im Fall $0 \leq x < 1$ multiplizieren wir mit $1 - \sqrt{x}$ und erhalten $1 < (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})$, was äquivalent zur Aussage $1 < 1 - x$ ist. Diese ist für $x < 0$ efüllt, aber diese x verletzen die Fallbedingung und kommen daher nicht in die Lösungsmenge.
- Im Fall $x > 1$ multiplizieren wir mit $1 - \sqrt{x}$ und erhalten $1 > 1 - x$, was äquivalent zu $x > 0$ ist. Aber nur die x aus $(1; \infty)$ erfüllen auch die Fallbedingung, also ist $L = (1; \infty)$ das einzige Lösungsintervall für die ursprüngliche Ungleichung.
- Der Einzelwert $x = 1$ ist keine Lösung.

Einführung

Analog zum Vorgehen in Modul 2 und dem vorangehenden Abschnitt löst man **Beträge** in Ungleichungen durch eine Fallunterscheidung auf:

Info 3.3.1

Eine Ungleichung mit einem Betragsausdruck wird in zwei Fälle unterteilt:

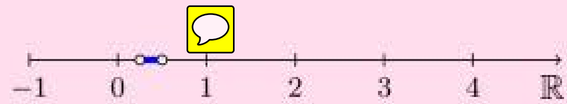
- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag nicht negatv ist, kann der Betrag weggelassen bzw. durch einfache Klammern ersetzt werden.
- Für diejenigen x, für die der Term im Betrag negativ ist, wird der Term in Klammern gesetzt und negiert.

Die Lösungsmengen aus den Fällen werden wie in vorangehenden Abschnitt reduziert und zur Lösungsmenge für die ursprüngliche Ungleichung vereinigt.

Beispiel 3.3.2
Die Betragsungleichung $|4x-2|<1$ teilt man in zwei Fälle auf:

- Für $x \geq \frac{1}{2}$ ist der Term im Betrag nicht negativ: In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $(4x-2)<1$ bzw. zu $x<\frac{3}{4}$. Wegen der Bedingung ist nur $L_1=[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4})$ Lösungsmenge für diesen Fall.
- Für $x<\frac{1}{2}$ ist der Term im Betrag negativ: In diesem Fall ist die Ungleichung äquivalent zu $-(4x-2)<1$ btw. zu $x>\frac{1}{4}$. Nur die Teilmenge $L_2=(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2})$ erfüllt die Bedingung und ist Lösung.

Vereinigen der beiden Lösungsintervall ergibt die Lösungsmenge $L=(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2})$ für die ursprüngliche Betragsungleichung:



Aufgabe 3.3.3
Die Betragsungleichung $|x-1|<2|x-1|+x$ teilt man in zwei Fälle auf:

1. Auf dem Intervall [1;unendlich) sind beide Terme in den Beträgen nicht negativ. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist in diesem Fall L_1 = [1;unendlich) .
2. Auf dem Intervall (-unendlich;1) sind beide Terme in den Beträgen negativ. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist in diesem Fall L_2 = (-unendlich;1) .

Zusammensetzen der beiden Intervalle ergibt das Lösungsintervall L = (-unendlich;unendlich) .

Lösung

Für $x\in[1;\infty)$ sind beide Terme in den Beträgen nicht negativ, wir erhalten die Ungleichung $x-1<2(x-1)+x$, welche äquivalent zu $x>\frac{1}{2}$ ist. Wegen der Fallbedingung erhalten wir $L_1=[1;\infty)$ als Lösungsmenge. Für $x\in(-\infty;1)$ sind beide Terme in den Beträgen negativ und wir erhalten $-(x-1)<-2(x-1)+x$. Diese Ungleichung ist äquivalent zur immer richtigen Ungleichung $x-1<x$ ist. Damit ist $L_2=(-\infty;1)$ die Lösungsmenge des zweiten Falls.

Wegen $L=L_1\cup L_2=\mathbb{R}=(-\infty;\infty)$ ist die Ungleichung immer erfüllt.

3.3.1 Quadratische Ungleichungen

Info 3.3.4

Eine Ungleichung heißt **quadratisch** in x, falls sie sich zu $x^2 + px + q < 0$ (oder mit anderen Vergleichssymbolen) umformen lässt.

Quadratische Ungleichungen kann man daher auf zwei Weisen lösen: Durch Untersuchung von Nullstellen und Öffnungsverhalten des Polynoms, sowie durch quadratische Ergänzung. Die quadratische Ergänzung ist meist einfacher:

Info 3.3.5

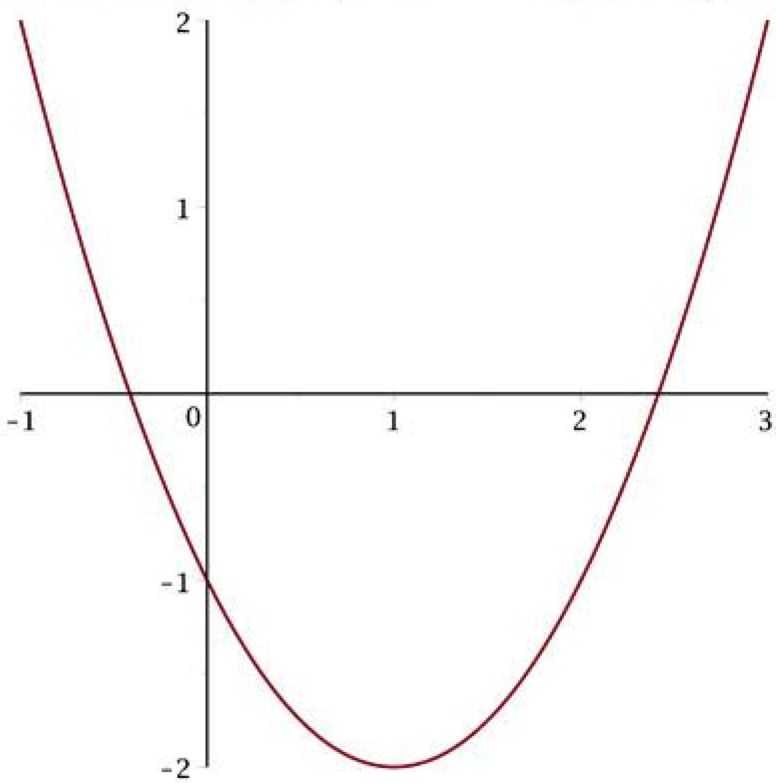
Bei der **quadratischen Ergänzung** wird versucht, die Ungleichung auf die Form $(x+a)^2 < b$ zu bringen. Ziehen der Wurzel führt dann auf die Betragsgleichung $|x+a| < \sqrt{b}$ mit Lösungsmenge $(-a-\sqrt{b}; -a+\sqrt{b})$ falls $b \geq 0$ ist, ansonsten ist die Gleichung unlösbar.

Bei umgekehrter Richtung der Ungleichung besitzt $|x+a| > \sqrt{b}$ die Lösungsmenge $(-\infty; -a-\sqrt{b}) \cup (-a+\sqrt{b}; \infty)$. Für $\leq$ und $\geq$ sind die Randpunkte entsprechend mit aufzunehmen.

Dabei ist die Rechenregel $\sqrt{x^2} = |x|$ aus Modul 1 zu beachten.

Beispiel 3.3.6
Zu lösen sei die Ungleichung $2x^2 \geq 4x + 2$. Sortieren der Terme auf die linke Seite und Division durch 2 ergibt $x^2 - 2x - 1 \geq 0$. Quadratische Ergänzung zur zweiten binomischen Formel auf der linken Seite ergibt die äquivalente Ungleichung $x^2 - 2x + 1 \geq 2$, bzw. $(x-1)^2 \geq 2$. Ziehen der Wurzel ergibt die Betragsungleichung $|x-1| \geq \sqrt{2}$ mit Lösungsmenge $L = (-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; \infty)$.

Andererseits kann man die Ungleichung $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ auch wie folgt untersuchen: Die linke Seite beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, deren Nullstellen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ man mit der pq-Formel erhält:



Die Ungleichung $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ wird wegen der Öffnung nach oben von den Parabelästen links und rechts von den Nullstellen erfüllt, also von der Menge $L = (-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; \infty)$.

Info 3.3.7

Die quadratische Ungleichung $x^2 + px + q < 0$ (oder andere Vergleichssymbole) besitzt in Abhängigkeit der Nullstellen von $x^2 + px + q$, der Öffnung der Parabel sowie der Richtung der Ungleichung eine der folgenden Lösungsmengen:

- die reellen Zahlen $\mathbb{R}$,
- zwei Äste $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$ (ggf. mit beiden Randpunkten enthalten bei $\leq$ und $\geq$),
- ein Intervall $(x_1; x_2)$ (ggf. mit beiden Randpunkten enthalten bei $\leq$ und $\geq$),
- einen Einzelpunkt x_1,
- die punktierte Menge $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$,
- die leere Lösungsmenge $\{\}$.

Der folgende Lückentext beschreibt die Lösung einer quadratischen Ungleichung über die Untersuchung der Parabel:

Aufgabe 3.3.8

Zu lösen sei die Ungleichung $x^2 + 6x < -5$. Umformen ergibt die Ungleichung x^2+6*x+5 < 0. Mit der pq-Formel finden wir die Nullstellenmenge {1;5} . Die linke Seite beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel. Sie gehört zu einer Ungleichung mit dem Vergleichssymbol $<$, also ist die Lösungsmenge $L =$ (1;5) .

Lösung

Umformen ergibt $x^2 + 6x + 5 < 0$. Mit der pq-Formel finden wir die Nullstelle $x_1 = 3 \pm \sqrt{9 - 5}$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$. Die linke Seite beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, sie erfüllt die Ungleichung mit $<$, also nur auf dem Intervall $(1; 5)$ ohne die Randpunkte.

3.3.2 Weitere Ungleichungstypen

Viele weitere Typen von Ungleichungen lassen sich auf quadratische Ungleichungen umformen, dabei sind jedoch manchmal Fallunterscheidungen sowie ausgeschlossene Werte im Definitionsbereich zu beachten:

Info 3.3.9

Eine Ungleichung mit **Brüchen**, bei der x im Nenner zusammangesetzter Ausdrücke vorkommt, kann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner in eine bruchfreie Form gebracht werden, dabei müssen die Nullstellen der Nenner aber aus dem Definitionsbereich der neuen Ungleichung ausgeschlossen werden.

Zudem entstehen bei der Multiplikation mit Termen Fallunterscheidungen in Abhängigkeit von ihrem Vorzeichen.

Beispiel 3.3.10
Die Ungleichung $2-\frac{1}{x}\leq x$ kann durch Multiplikation mit x umformen, dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Fall $x>0$, dann bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten. Die neue Ungleichung lautet $2x-1\leq x^2$ und ist äquivalent zu $x^2-2x+1\geq 0$ bzw. $(x-1)^2\geq 0$. Diese Ungleichung ist immer erfüllt, wegen der Fallbedingung erhalten wir die Lösungsmenge $L_1=(0;\infty)$.
- Fall $x<0$, dann kehrt sich die Richtung der Ungleichung um. Die neue Ungleichung lautet $2x-1\geq x^2$ und ist äquivalent zu $x^2-2x+1\leq 0$ bzw. $(x-1)^2\leq 0$. Diese Ungleichung ist nur für $x=1$ erfüllt.
- Der Einzelwert $x=0$ ist nicht Teil des Definitionsbereichs der ursprünglichen Ungleichung und damit keine Lösung.

Insgesamt erhalten wir die Vereinigungsmenge $L=(0;\infty)$ als Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung.

Über gemischte Bruch- und Wurzelterme definierte Ungleichungen haben oft Lösungsmengen, die nicht mehr die Formen aus Info 3.3.7 besitzen:

Beispiel 3.3.11
Zu lösen sei die Ungleichung $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>2$. Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $(0;\infty)$. Multiplikation mit $\sqrt{x}$ ergibt die Ungleichung $x+1>2\sqrt{x}$. Hier ist keine Fallunterscheidung notwendig, da $\sqrt{x}>0$ auf dem Definitionsbereich ist. Umformen ergibt $x-2\sqrt{x}+1>0$ bzw. $(\sqrt{x}-1)^2>0$, was für alle $x\neq 1$ aus dem Definitionsbereich erfüllt ist. Also ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung $L=(0;\infty)\setminus\{1\}$:

Abschlusstest Modul 3

Dies ist ein einreichbarer Test:

- Im Gegensatz zu den offenen Aufgaben werden beim Eingeben keine Hinweise zur Formulierung der mathematischen Ausdrücke gegeben.
- Der Test kann jederzeit neu gestartet oder verlassen werden.
- Der Test kann durch die Buttons am Ende der Seite beendet und abgeschickt, oder zurückgesetzt werden.
- Der Test kann mehrfach probiert werden, für die Statistik zählt die zuletzt abgeschickte Version.

Aufgabe 3.4.1
Bestimmen Sie den Parameter α, so dass die Ungleichung $2x^2 \leq x - \alpha$ genau eine Lösung hat:

1. Dafür ist $\alpha \;=$ 1/8 einzusetzen.
2. In diesem Fall ist $x \;=$ 1/4 die einzige Lösung der Ungleichung.

Aufgabe 3.4.2
Finden Sie einen möglichst einfache Betragsungleichung, die folgenden Funktionsgraph beschreibt:

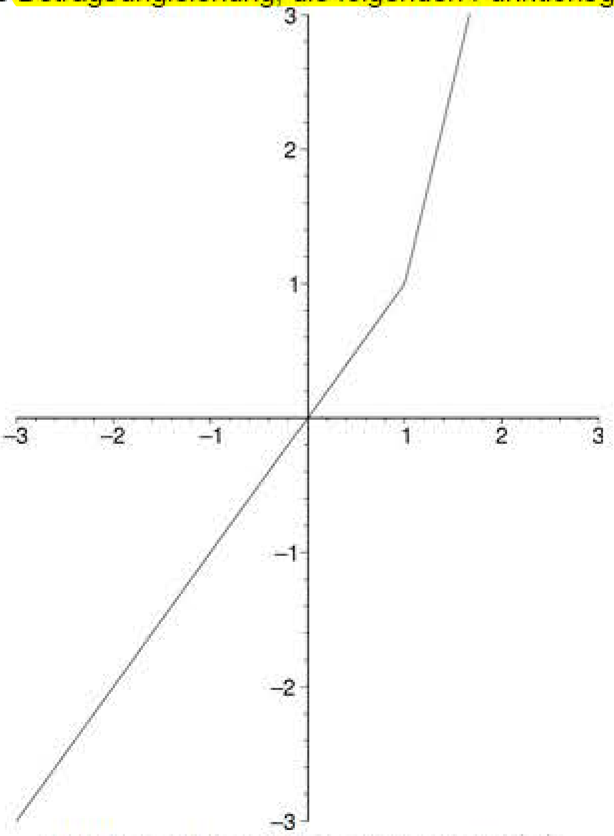


Abbildung 1: Funktionsgraph von $g(x)$.

Versuchen Sie eine Darstellung der Form $g(x) = |x+a| + bx + c$. Am Knick im Graph können Sie erkennen, wie der Term innerhalb des Betrags aussieht.

1. Bestimmen Sie anhand des Graphen die Lösungsmenge der Ungleichung $g(x) \leq x$.
   Es ist $L \;=$ (-unendlich;1] .
2. $g(x) \;=$ abs(x-1)-1+2*x .
   Beträge können in der Form `betrag(x-a)` oder `abs(x-a)` eingegeben werden.

Aufgabe 3.4.3
Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Ungleichungen erfüllt?

1. $|3x-6| \leq x+2$ hat die Lösungsmenge $L \;=$ [1;4] (als Intervall geschrieben).
2. $\frac{x+1}{x-1} \leq 2$ hat die Lösungsmenge $L \;=$ [3;unendlich] (als Intervall geschrieben).

Offene Intervalle können in der Form $(3;5)$, geschlossene Intervalle in der Form $[3;5]$ eingegeben werden. Unendlich kann man als Wort oder kurz als `infty` schreiben. Verwenden Sie nicht die Schreibweise $]a;b[$ für offene Intervalle. Mengen können in aufzählender Form $\{1;2;3\}$ eingegeben werden. Die Mengenklammer erhalten Sie mit AltGr+7 bzw. AltGr+0.