Onlinekurs Mathematik - Gleichungen mit einer Unbekannten - Einfache Gleichungen

Einführung

Beispiel 2.1.2
Die Gleichung $2x-1=x^2$ besitzt die rechte Seite x^2 und die linke Seite $2x-1$. Einsetzen von $x=1$ ergibt den Zahlenwert 1 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, also ist $x=1$ eine Lösung dieser Gleichung. Dagegen ist $x=2$ keine Lösung, denn Auswerten ergibt 4 auf der linken Seite und 3 auf der rechten Seite der Gleichung.

Typische Aufgabenstellungen für Gleichungen sind

- Angabe der Lösungen einer Gleichung, d.h. aller Werte für die Unbestimmten, welche die Gleichung erfüllen,
- Umformen der Gleichung, insb. Auflösen nach den Variablen,

das Finden einer Gleichung, die ein textuell gegebenes Problem beschreibt.

Kommentar [l1]: umformen

Info 2.1.4

Zwei Gleichungen sind **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Eine **Äquivalenzumformung** ist eine spezielle Umformung, welche die Gleichung, aber nicht ihre Lösungsmenge verändert. Wichtige Äquivalenzumformungen sind

- Addieren/Subtrahieren von Termen auf beiden Seiten der Gleichung,
- Umdrehen der Gleichung,
- Umformen von Termen auf einer Seite der Gleichung,
- bekannte Gleichungen auf eine Seite anwenden.

Kommentar [l2]: umdrehen

Kommentar [l3]: umformen

Die folgenden Umformungen sind nur dann Äquivalenzumformungen, wenn der verwendete Term nicht Null ist (was von den Variablen abhängen kann):

Multiplikation/Division mit einem Term (dieser Term darf nicht Null sein),

2.1.2 Auflösen linearer Gleichungen

Beispiel 2.1.13
Die lineare Gleichung $3x+3=9x+9$ hat eine Lösung:

$$3x+3 = 9x+9 \quad \overset{:(x+1)}{\iff} \quad 3 = 9\,.$$

Dies ist eine falsche Aussage, also ist die Gleichung für alle $x \neq -1$ (Bedingung aus der Umformung) falsch. Einsetzen von $x=-1$ erfüllt jedoch die Gleichung, daher ist es die einzige Lösung.

Alternativ hätte man die Gleichung aus so umformen können:

Kommentar [I4]: auch

$$3x+3 = 9x+9 \quad \overset{-3x-9}{\iff} \quad -6 = 6x \quad \iff \quad x = -1.$$

2.1.3 Auflösen quadratischer Gleichungen

Info 2.1.20

Beliebige quadratische Gleichungen kann man (ggf. Sortieren der Terme auf die linke Seite und Normieren) durch **quadratische Ergänzung** in Scheitelpunktform bringen. Dazu wird auf beiden Seiten eine Konstante addiert, so dass links ein Term der Form $x^2 \pm 2sx + s^2$ für die erste oder zweite binomische Formel entsteht.

Kommentar [I5]: der linken

Beispiel 2.1.21
Die Gleichung $x^2-4x+2=0$ kann man durch Addieren der Konstanten 2 in die Form $x^2-4x+4=2$ bzw. in die Scheitelpunktform $(x-2)^2=2$ bringen. Aus ihr kann man sofort die Lösungen $x_1=2-\sqrt{2}$ und $2+\sqrt{2}$ ablesen. Andererseits besitzt die quadratische Gleichung $x^2+x=-2$ keine Lösung, denn quadratische Ergänzung führt auf $x^2+x+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$ bzw. $(x+\frac{1}{2})^2=-\frac{7}{4}$ mit negativer rechter Seite.

Kommentar [l6]: die quadratrische

Aufgabe 2.1.22
Bestimmen Sie die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen über quadratische Ergänzung, nachdem Sie die Terme auf die linke Seite sortiert und normiert haben:

Kommentar [l7]: die quadratische

Kommentar [l8]: der linken

Lösung
Die Umormungen lauten:

Kommentar [l9]: Umformungen

Onlinekurs Mathematik - Gleichungen mit einer Unbekannten - Betragsgleichungen

2.2.2 Gemischte Gleichungen

Beispiel 2.2.6
Zu lösen sei die Gleichung $|x-1|+x^2=1$. Die Fallunterscheidung lautet hier wie folgt:

- Ist $x\geq 1$, so kann man den Betrag durch Klammern ersetzen und erhält die quadratische Gleichung $(x-1)+x^2=1$, welche zu $x^2+x-2=0$ umgeformt wird. Die pq-Formel liefert die beiden Lösungen

$$x_1 = -\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}} = -2\,,\quad x_2 = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}} = 1$$

  von denen nur x_2 die Fallbedingung erfüllt.

- Ist $x<1$, so kann erhält man die Gleichung $-(x-1)+x^2=1$, welche zu $x^2-x=0$ bzw. $x\cdot(x-1)=0$ umgeformt wird. Man kann aus der Produktdarstellung die beiden Lösungen $x_3=0$ und $x_4=1$ ablesen, wegen der Fallbedingung ist hier nur $x_3=0$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

  Insgesamt ist also $L=\{0;1\}$ die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung.

Kommentar [l10]: so erhält

Onlinekurs Mathematik - Gleichungen mit einer Unbekannten - Abschlusstest

Abschlusstest Modul 2