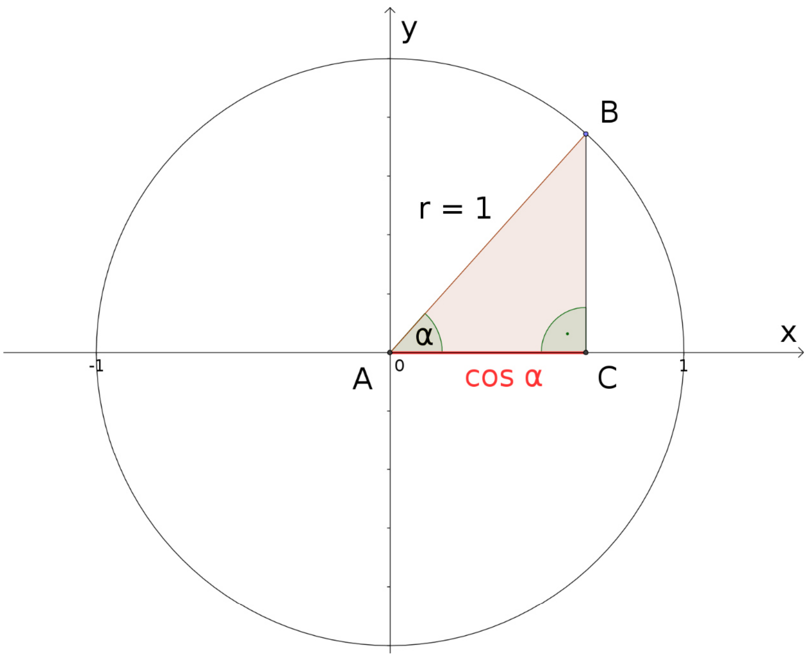
Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Trigonometrische Funktionen

6.5.2 Kosinus und Tangens

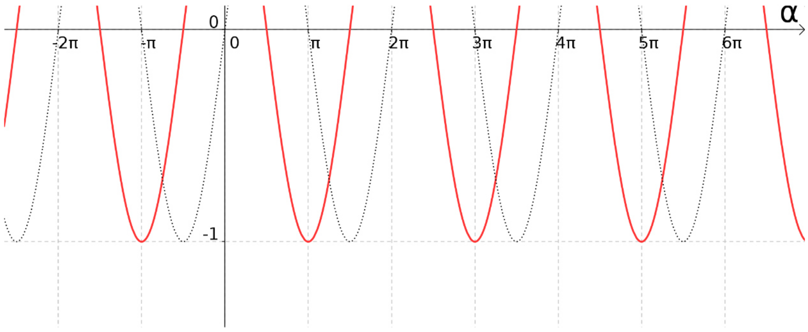
Im Grunde genommen müssen wir für Kosinus- und Tangensfunktion die zur Sinusfunktion analogen Überlegungen angehen, die wir aus dem vorigen Unterabschnitt 6.5.1 kennen. Da wir schon etwas Übung besitzen, können wir die Diskussion etwas straffen. Beginnen wir mit der **Kosinusfunktion** und betrachten erneut unsere dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreiecke:



Wiederum besitzen alle Hypothenusen dieser so konstruierten rechtwinkligen Dreiecke die Länge 1, sodass die Kosinus der Winkel α im Bild als Längen der Strecken $\overline{AC}$ auftreten. Bewegen wir wie zuvor den Punkt B im Gegenuhrzeigersinn gleichmäßig um den Kreis und variieren so den Winkel α, erhalten wir letztlich die Kosinusfunktion:

$$\begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,+1] \\ & \alpha & \longmapsto & \cos(\alpha) \end{array}$$

Kosinus, Tangens und Kotangens



Das Schaubild gibt neben dem Graphen der Kosinus- (durchgezogene Linie) nochmals denjenigen der Sinusfunktion (gepunktete Linie) zu Vergleichszwecken wieder; wir erkennen eine sehr enge Verwandtschaft, die wir noch thematisieren werden.

Welche wichtigen Eigenschaften besitzt die Kosinusfunktion?

- Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion. Die Periode ist wieder 2π bzw. 360°.

- Der Definitionsbereich der Kosinusfunktion ist ganz $\mathbb{R}$, $D_{\cos} = \mathbb{R}$, der Wertebereich das Intervall von -1 bis $+1$, die Endpunkte inbegriffen, $W_{\cos} = [-1, +1]$.

- Aus dem obigen Bild der Graphen von $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ ergibt sich unmittelbar, dass

  $$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

  für alle reellen Werte von α gilt. Ebenso richtig, aber etwas schwieriger einzusehen, ist

  $$\cos(\alpha) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \qquad .$$

Aufgabe 6.5.2
An welchen Stellen nimmt die Kosinusfunktion ihren maximalen Wert 1 an, wo ihren maximal negativen Wert -1? An welchen Punkten besitzt sie Nullstellen (d.h. wo ist der Funktionswert

Kosinus, Tangens und Kotangens

Den Wert -1 erreicht die Kosinusfunktion an den Stellen $\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, also für ungeradzahlige Vielfache von π:

$$\cos(\alpha) = -1 \Leftrightarrow \alpha \in \{(2k+1)\cdot\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Nullstellen treten für $\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$, d.h. für halbganzzahlige Vielfache von π auf:

$$\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{\frac{k}{2}\cdot\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Wie im Falle des Sinus gibt es auch für den Kosinus eine allgemeine Kosinusfunktion, in deren Definition zusätzliche Freiheiten in Form von Parametern auftauchen (Amplitudenfaktor B, Frequenzfaktor c sowie Verschiebekonstante d); auf diese Art und Weise eröffnet sich wiederum die Möglichkeit, den Funktionsverlauf an unterschiedliche Situationen (in Anwendungsbeispielen) anzupassen:

$$\begin{array}{rcll} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-A,+A] \\ & x & \longmapsto & g(x) = B \ \cos(cx+d) \end{array}$$

Aufgabe 6.5.3

In Beispiel 6.5.1 haben wir das Fadenpendel andiskutiert. Insbesondere kann man den zeitlichen Verlauf der Pendelauslenkung ϕ unter den Voraussetzungen bestimmen, dass die Schwingungsdauer T gerade π Sekunden beträgt, und dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Pendel bei einer Auslenkung von 30° losgelassen wird:

$$\phi(t) = \frac{\pi}{6}\cdot\sin(2t + \frac{\pi}{2}).$$

Kann man diese Situation auch mit Hilfe der (allgemeinen) Kosinusfunktion (anstelle der Sinusfunktion) beschreiben, und wenn ja, wie sieht dann $\phi(t)$ aus? Lösung

Die Antwort auf die erste Frage lautet: Ja, es ist möglich, die Kosinusfunktion zur Beschreibung des vorliegenden Sachverhaltes heranzuziehen (wie wir sogleich sehen zu besinnen. Denn dann folgt sofort

$$\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2t) \qquad ,$$

und damit:

$$\phi(t) = \frac{\pi}{6} \cdot \cos(2t)$$

.

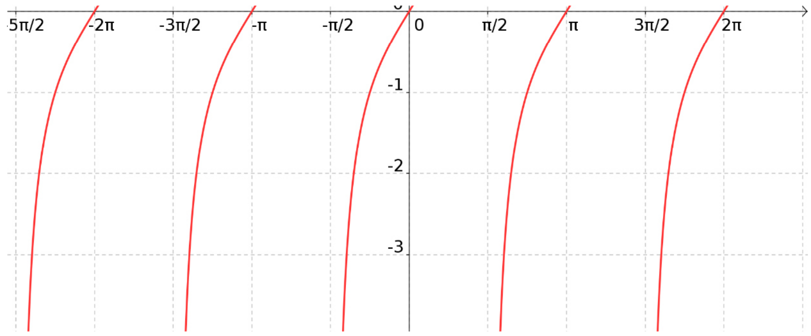
Der Tangens ist gegeben als das Verhältnis von Sinus zu Kosinus. Damit ist sofort klar, dass die **Tangensfunktion** nicht auf allen reellen Zahlen definiert sein kann, denn schließlich besitzt die Kosinusfunktion unendliche viele Nullstellen, wie man z.B. in Aufgabe 6.5.2 sehen kann. In Aufgabe 6.5.2 wird auch die Lage der Nullstellen von cos bestimmt ($\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{\frac{k}{2} \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}\}$); demzufolge ist der Definitionsbereich der Tangensfunktion $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Und wie sieht es mit dem Wertebereich aus? Bei den $\cos$-Nullstellen wird die Tangensfunktion gegen positiv bzw. negativ unendliche Werte streben und Polstellen haben und bei den $\sin$-Nullstellen wird $\sin / \cos$ Null. Dazwischen sind alle reellen Werte möglich, daher ist $W_{\tan} = \mathbb{R}$. Insgesamt ergibt sich für den Graphen der Tangensfunktion

$$\begin{array}{rrcl} \tan: & \mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2} \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) \end{array}$$

folgendes Bild:

Kosinus, Tangens und Kotangens



Die Tangensfunktion verläuft zudem periodisch, allerdings mit der Periode π bzw. 180°.

Aufgabe 6.5.4
Der sogenannte Kotangens (Abkürzung $\cot$) ist definiert durch
$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} .$$

Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Kotangensfunktion an! Lösung