Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Exponentialfunktion und Logarithmus

Inhalt

Im vorangegangen Beispiel tritt eine Exponentialfunktion zur Basis $a = 2$ auf, die Veränderliche - im Beispiel t - erscheint im Exponenten. Wir wollen nun die allgemeine Abbildungvorschrift für Exponentialfunktionen zu einer beliebigen Basis a angeben; dabei setzen wir allerdings $a > 0$ voraus:

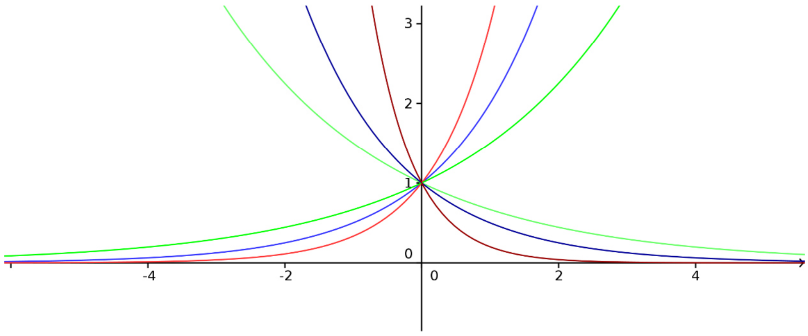
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = f_0 \cdot a^{\lambda x} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen f_0 und λ sogenannte Parameter der Exponentialfunktion, auf die wir weiter unten eingehen werden.

Der Definitionsbereich aller Exponentialfunktionen wird von allen reellen Zahlen gebildet, $D_f = \mathbb{R}$, wohingegen der Wertebereich nur aus den positiven reellen Zahlen besteht ($W_f = \mathbb{R}^+$), da jedwede Potenz einer postiven Zahl nur positiv sein kann.

Aufgabe 6.4.2
Warum setzt man bei den Exponentialfunktionen voraus, dass die Basis a größer Null sein soll? Lösung

Einige generelle Eigenschaften von Exponentialfunktionen können wir im folgenden Bild erkennen, in dem Exponentialfunktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to g(x) = a^x$ für verschiedene Werte von a gegenübergestellt sind:



- Alle diese Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $(x = 0, y = 1)$: Dies gilt, da $g(x = 0) = a^0$ und $a^0 = 1$ für jede Zahl a.
- Ist $a > 1$, so steigt der Graph von g von links nach rechts (also für wachsende x-Werte) an; man sagt auch, dass die Funktion g streng monoton wachsend ist. Je größer der Wert für a ist, desto schneller wächst g für positive x-Werte. Geht man von rechts nach links (also zu immer größeren negativen x-Werten), so bildet die negative x-Achse eine Asymptote des Graphen.
- Ist $a < 1$, so fällt der Graph von g von links nach rechts (also für wachsende x-Werte) ab; man sagt auch, dass die Funktion g streng monoton fallend ist. Je größer der Wert für a ist, desto langsamer fällt g für negative x-Werte. Geht man von links nach rechts (also zu immer größeren positiven x-Werten), so bildet die positive x-Achse eine Asymptote.

Und was hat es nun noch mit den Parametern f_0 und λ auf sich? Der Parameter f_0 ist schnell erklärt: Setzt man den Wert $x = 0$ für die Veränderliche in die allgemeinen Exponentialfunktionen f ein,

$$f(x = 0) = f_0 \cdot a^{\lambda \cdot 0} = f_0 \cdot a^0 = f_0 \cdot 1 = f_0 \quad ,$$

so erkennt man, dass f_0 eine Art Start- oder Anfangswert darstellt (zumindest falls man die Veränderliche x zeitlich interpretiert); der exponentielle Verlauf $a^{\lambda x}$ wird generell mit dem Faktor f_0 multipliziert und dementsprechend gewichtet, d.h. gestreckt (für $|f_0| > 1$) bzw. gestaucht (für $|f_0| < 1$).