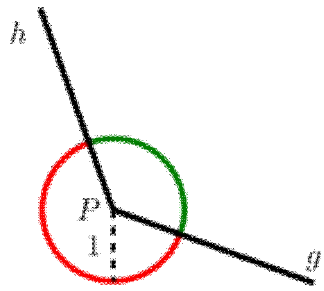
Onlinekurs Mathematik - Geometrie - Winkel, Kongruenz und Ähnlichkeit

5.1.1 Winkel

Zwei Halbgeraden g und h in der Ebene, die von demselben Punkt P ausgehen, bilden einen Winkel.



(Lizenz)

Zeichnen wir einen Kreis mit Radius 1 um P , wird dieser von den beiden Halbgeraden in zwei Teile zerschnitten. Wichtig ist nun derjenige Kreisbogen, der entsteht, wenn man von der Geraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Geraden h geht:

Info 5.1.1

Der **Kreisbogen**, der entsteht, wenn man von der Geraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Geraden h geht, bezeichnet den **Winkel** von g zu h .

- Die Länge des Kreisbogens mit dem Radius 1 ist das sogenannte **Bogenmaß** $\measuredangle(g,h)$.
- P heißt **Scheitelpunkt** des Winkels, und die beiden Halbgeraden, die den Winkel bilden, heißen **Schenkel** des Winkels.
- Hat man einen Punkt A auf der Geraden g und einen Punkt B auf der Geraden h , so kann man auch $\measuredangle(APB)$ statt $\measuredangle(g,h)$ schreiben.
- Winkel werden häufig mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, z. Bsp. α .

VE & MINT

Kursinhalt

Einführung

Mein Kurs

Einstellungen

Eingangstest

Suche

Das KIT

Feedback

Beta-Version

Zurück Einführung Winkel Kongruenz Aufgaben Weiter

griechische Buchstaben

Falls Sie das griechische Alphabet noch nicht so gut kennen, gibt es hier eine kleine Übersicht, die auch die Großbuchstaben enthält:

α, A	„alpha“	ξ, Ξ	„xi“	ι, I	„iota“	o, O	„omikron“	π, Π	„pi“
β, B	„beta“*	ζ, Z	„zeta“	κ, K	„kappa“	ω, Ω	„omega“	φ, Φ	„phi“
γ, Γ	„gamma“	η, H	„eta“	λ, Λ	„lambda“	ϱ, P	„rho“	ψ, Ψ	„psi“
δ, Δ	„delta“	ϑ, Θ	„theta“	μ, M	„mü“	σ, Σ	„sigma“	χ, X	„chi“
ε, E	„epsilon“			ν, N	„nü“	τ, T	„tau“	υ, Υ	„üpsilon“

Nun wollen wir das Bogenmaß bestimmen.

Bereits die Griechen stellten fest, dass das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Radius r stets das gleiche ist. Sie definierten dieses Verhältnis über die Kreiszahl π :

Info 5.1.2

Die **Kreiszahl** ist

$$\pi = \frac{U}{2r} .$$

Dabei ist π keine rationale Zahl, sie kann nicht als endlicher oder periodischer Dezimalbruch geschrieben werden. Näherungsrechnungen haben ergeben, dass $\pi \approx 3.141592653589793$ ist.

Ist der Radius des Kreises genau 1 , so hat der Kreis den Umfang 2π . Die Länge eines Kreisbogens, also das Bogenmaß des Winkels, ist dann ein Teil von 2π .

Beispiel 5.1.3

Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Halbskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/2 = \pi$.
Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Viertelskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/4 = \pi/2$.
Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Achtelskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/8 = \pi/4$.

Wenn man den Winkel $\measuredangle(g,h)$ kennt, so kann man nun auch leicht den Winkel $\measuredangle(h,g)$ bestimmen, der ja nach dem Bild 5.1.1 durch den anderen Kreisbogen bestimmt ist:

$$\measuredangle(h,g) = 2\pi - \measuredangle(g,h)\,.$$

Ein anderes sehr gebräuchliches Winkelmaß erhält man, in dem man den Kreis in 360 gleich große Teile teilt und dann misst, wie viele dieser Teile überstrichen werden, wenn g mathematisch positiv auf h gedreht wird. Dieses **Gradmaß** eines Winkels kann leicht in das Bogenmaß überführt werden:

$$\measuredangle(g,h) = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}\,,$$

wenn α das Gradmaß des Winkels zwischen g und h angibt.

Aufgabe 5.1.4
Der Winkel $\measuredangle(g,h)$ beträgt im Gradmaß 60°. Rechnen Sie den Winkel in das Bogenmaß um: (Ein π geben Sie als „`pi`“ ein. Bitte runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen!)

$\measuredangle(g,h) =$ pi/3 ✓

Lösung

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\measuredangle(g,h)}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad \measuredangle(g,h) = \frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi = \frac{1}{6}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 5.1.5
Der Winkel β beträgt im Bogenmaß $\pi/4$. Wie groß ist der Winkel im Gradmaß?

$\beta =$ 45 ✗

Lösung

$$\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{\beta}{360^\circ} \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{\pi/4}{2\pi}\cdot 360^\circ = \frac{1}{8}\cdot 360^\circ = 45^\circ$$

VE & MINT

Kursinhalt

Einführung

Mein Kurs

Einstellungen

Eingangstest

Suche

Das KIT

Feedback

Beta-Version

Info 5.1.6

Zurück Einführung Winkel Kongruenz Aufgaben Weiter

Die folgenden Winkelformen bekommen spezielle Namen:

- Ein Winkel mit einem Maß zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ heißt **spitzer Winkel**.

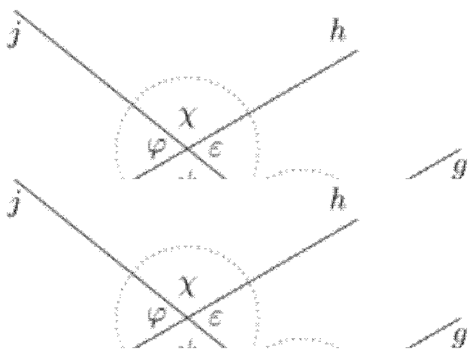
  Ein Winkel mit einem Maß von $\frac{\pi}{2}$ heißt **rechter Winkel**.

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π heißt **stumpfer Winkel**.

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen π und 2π heißt **überstumpfer Winkel**.
- Zwei Halbgeraden bilden eine Gerade, wenn sie einen Winkel vom Maß π bilden.
- Zwei Halbgeraden **stehen senkrecht aufeinander**, wenn sie einen rechten Winkel bilden.

Betrachten wir nun drei verschiedene Geraden, von denen zwei parallel sind, während die dritte nicht parallel zu diesen beiden ist. Es ergeben sich acht Schnittwinkel. Je vier dieser Winkel sind gleich groß.

Info 5.1.7



- Die Winkel α, γ, ε und φ sind gleich groß, ebenso die Winkel β, δ, χ und ψ .
- Dabei nennt man β und ψ bzw. γ und ε **Wechselwinkel**.

- Die Winkel α und a heißen **Stufenwinkel**, ebenso und χ, δ und ψ und γ und φ .

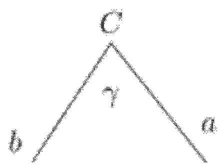
Eine einfache Figur mit Winkeln ist das Dreieck:

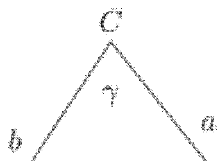
Info 5.1.8

- Ein **Dreieck** entsteht, wenn man drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, verbindet.
- Die drei Punkte, die verbunden werden, heißen **Ecken** des Dreiecks, und die drei Verbindungslinien heißen **Seiten** des Dreiecks.
- Je zwei Seiten des Dreiecks bilden je zwei Winkel.

  Der kleinere dieser beiden Winkel heißt **Innenwinkel**, und der größere der beiden Winkel heißt **Außenwinkel**.
- Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks beträgt stets π bzw. 180° .

Man benennt die Ecken eines Dreiecks in mathematisch positiver Richtung mit lateinischen Großbuchstaben. Die einem Punkt gegenüberliegende Seite eines Dreiecks bekommt den entsprechenden Kleinbuchstaben zugeordnet, und der Innenwinkel in einer Ecke erhält den entsprechenden Kleinbuchstaben des griechischen Alphabets.





Da die Außenwinkel eines Dreiecks wesentlich weniger interessant sind als die Innenwinkel, nennt man die Innenwinkel eines Dreiecks auch schlicht **Winkel** des Dreiecks.

Da die Summe aller Winkel in einem Dreieck π beträgt, kann höchstens ein Winkel gleich oder größer als $\frac{\pi}{2}$ sein. Dadurch werden die Dreiecke nach ihrem größten Winkel in drei verschiedene Klassen eingeteilt:

Info 5.1.9

- Ein Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, heißt **spitzwinklig**.
- Ein Dreieck, das einen rechten Winkel enthält, heißt **rechtwinklig**.

  In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen, **Katheten** und die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse**.
- Ein Dreieck, das einen Winkel mit einem Maß von über $\frac{\pi}{2}$ besitzt, heißt **stumpfwinklig**.