Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Lineare Funktionen und Polynome

6.2.9 Asymptoten

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wie sich gebrochenrationale Funktionen im Unendlichen verhalten, falls der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\pi\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{x}{x+\pi} \end{cases}.$$

In f ist der Zählergrad 1 und der Nennergrad 1. Solche Funktionen werden als echt gebrochenrational bezeichnet. Beispiele hierfür haben wir im vorhergehenden Abschnitt 6.2.8 betrachtet.

Beispiel 6.2.21
Wir betrachten die Funktion

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

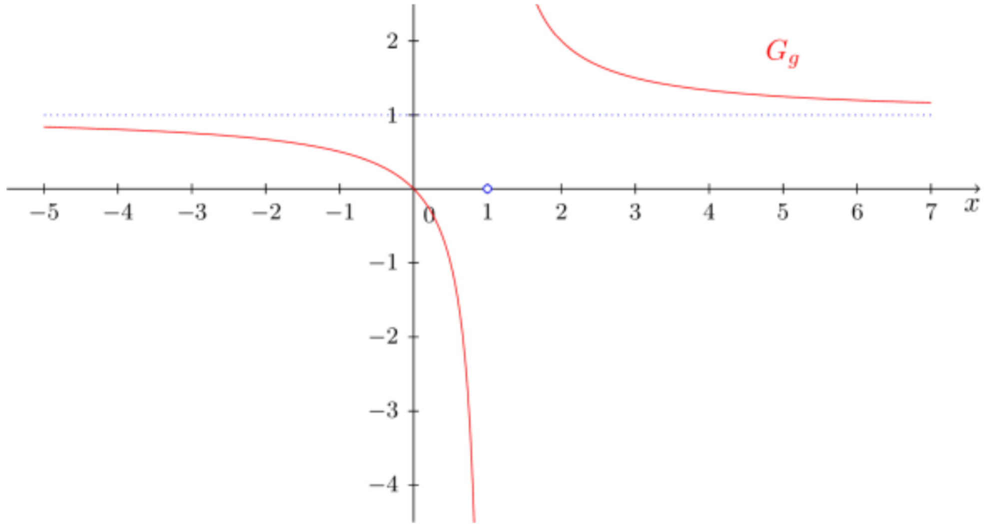
und stellen fest, dass deren Abbildungsvorschrift in der Form einer Summe aus einem Polynom (vom Grad 0) und einem echt gebrochenrationalen Term vorliegt. Durch Bilden des Hauptnenners ist es nun einfach $g(x)$ auf eine unecht gebrochenrationale Form zu bringen, in der der Zählergrad und der Nennergrad gleich sind:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}.$$

Wir können g also auch schreiben als

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

und betrachten den zugehörigen Graphen:



Neben der Polstelle und Definitionslücke bei $x = 1$ erkennen wir, dass der Wert $y = 1$ eine besondere Rolle spielt. Dieser wird offenbar von der Funktion g nie angenommen. Für die Wertemenge von g gilt $W_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Stattdessen nähert sich g für ,,sehr große" und ,,sehr kleine" Werte der Veränderlichen x immer stärker dem Wert 1 an ohne diesen jemals für eine reelle Zahl x zu erreichen.

Dies erkennt man in der Abbildungsvorschrift $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ folgendermaßen. Für ,,sehr große" (5, 10, 100, usw.) oder ,,sehr kleine" (-5, -10, -100, usw.) Werte für x nähert sich der echt gebrochenrationale Anteil $\frac{1}{x-1}$ immer mehr der 0 an, da x dort im Nenner vorkommt. Tendenziell bleibt also für solche Werte nur noch der polynomielle Anteil 1 aus der Abbildungsvorschrift übrig. Dieser Anteil kann nun durch eine - in diesem Fall konstante - Funktion beschrieben werden, die als Asymptote g_{As} der Funktion g bezeichnet wird:

$$g_{\mathrm{As}} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

Da es sich in diesem Fall um eine konstante Funktion handelt, wird diese auch als waagrechte Asymptote bezeichnet.

Aufgabe 6.2.22
Bestimmen Sie die Asymptote der Funktion

$$i : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 - \dfrac{6}{x+2} \end{cases}$$

sowie die Asymptote der Hyperbel aus Abschnitt 6.2.7. Lösung

Info 6.2.23

Eine gebrochenrationale Funktion f mit Zählerpolynom $p(x)$ vom Grad $n \geq 0$

falls $z \leq n$ gilt (insbesondere ist die Nullfunktion die Asymptote im Fall $z < n$).