**Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Eigenschaften und Konstruktion elementarer Funktionen**



### 6.6.1 Symmetrie

**Info 6.6.1**

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade oder achsensymmetrisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(-x)$$

gilt. Analog heißt die Funktion ungerade oder punktsymmetrisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

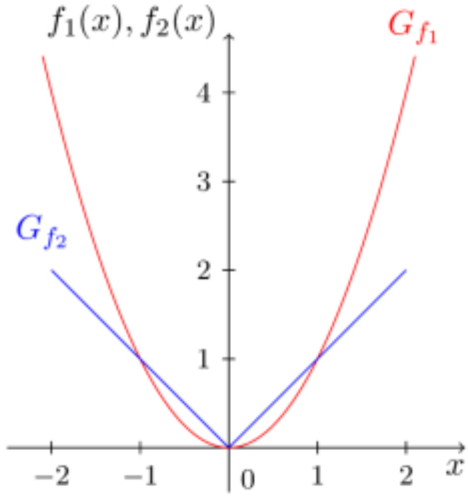
Diese beiden Symmetriebedingungen für Funktionen sagen also etwas über das Aussehen ihrer Graphen aus. Bei geraden Funktionen ändert sich der Graph bei Spiegelung an der Hochachse nicht, und bei ungeraden Funktionen ändert sich der Graph bei Spiegelung am Ursprung nicht. Wir listen einige Beispiele auf.

**Beispiel 6.6.2**

- Die Funktionen

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

$f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$ und $f_2(-x) = |-x| = |x| = f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Graphen weisen die Spiegelsymmetrie an der Hochachse auf:

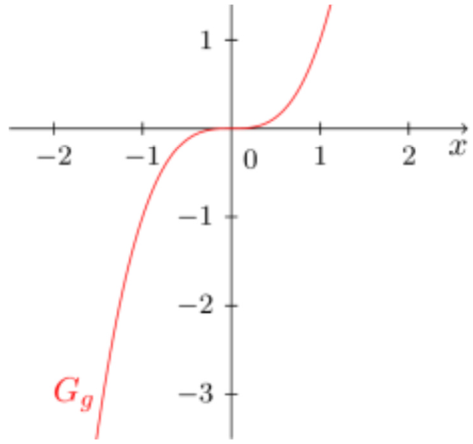



- Die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases}$$

also die kubische Parabel (vgl. Abschnitt 6.2.5) ist ein Beispiel für eine ungerade Funktion. Es gilt $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs:

Summen, Produkte, Verkettungen




Natürlich sind die Symmetrieeigenschaften von Funktionen auch benutzbar, wenn der Definitionsbereich der Funktion nicht die gesamten reellen Zahlen umfasst. Es muss dann aber eine Definitionsmenge vorliegen, die die $0$ in der Mitte des Intervalls enthält. Ein Beispiel dafür ist die Tangens-Funktion in der Aufgabe unten.

**Aufgabe 6.6.3**
Geben Sie von den folgenden Funktionen jeweils an, ob diese gerade, ungerade oder nicht-symmetrisch sind.

a)

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{cases}$$

b)

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \sin(y) \end{cases}$$

c)

Summen, Produkte, Verkettungen

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} u & \longmapsto & \cos(u) \end{array} \right.$$

e)

$$j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 42 \end{array} \right.$$

Lösung