1 Geometrie

Modulübersicht

Wir beginnen die Elementare Geometrie mit der Einführung von Winkeln im Bogenmaß und im Gradmaß und arbeiten uns über Stufen- und Wechselwinkel zu den Dreiecken vor. Wir schauen uns kongruente und ähnliche Dreiecke, berechnen ihre Flächeninhalte und die von anderen Figuren und kommen dann zu den Strahlensätzen, die die Grundlage für die Einführung der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck bilden. Nachdem wir uns auch die Trigonometrie am Einheitskreis angesehen haben, erobern wir die dritte Dimension und beschäftigen uns mit den Volumina von Zylindern, Kegeln und Kugeln.

1.1 Winkel, Kongruenz und Ähnlichkeit

Einführung

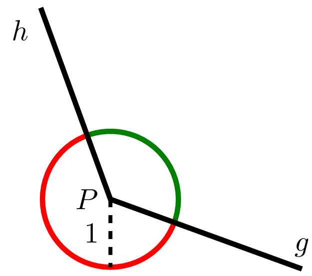
Das Bild zeigt einen Ausschnitt des Straßenplans von Ludwigshafen am Rhein. An ihm lassen sich einige Erkenntnisse über die Geometrie in der Ebene ablesen.

Man kann hier unter anderem das Radialmaß eines Winkels entdecken und Stufen- und Wechselwinkel aufspüren.

Im ersten Abschnitt dieses Moduls werden wir das Radialmaß und das Gradmaß einführen, Stufen- und Wechselwinkel betrachten und die Winkelsumme in Dreiecken bestimmen. Und wir werden sehen, wann zwei Dreiecke kongruent oder ähnlich sind

1.1.1 Winkel

Zwei Halbgeraden g und h in der Ebene, die von demselben Punkt P ausgehen, bilden einen Winkel.



(Lizenz)

Zeichnen wir einen Kreis mit Radius 1 um P, wird dieser von den beiden Halbgeraden in zwei Teile zeschnitten. Wichtig ist nun derjenige Kreisbogen, der entsteht, wenn man von der Geraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Geraden h geht;

1.1.1

Der **Kreisbogen**, der entsteht, wenn man von der Geraden g gegen den Uhrzeigersinn zur Geraden h geht, bezeichnet den Winkel von g zu h.

Die Länge des Kreisbogens mit dem Radius 1 ist das **Radialmaß** oder **Bogenmaß** $\measuredangle(g, h)$.

P heißt **Scheitelpunkt** des Winkels, und die beiden Halbgeraden, die den Winkel bilden, heißen **Schenkel** des Winkels.

Hat man einen Punkt A auf der Geraden g und einen Punkt B auf der Geraden h, so kann man auch $\measuredangle(APB)$ statt $\measuredangle(g, h)$ schreiben.

Winkel werden auch mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, z. Bsp. α.

griechische Buchstaben:
Falls Sie die noch nicht so gut kennen, gibt es hier eine kleine Übersicht, die auch die Großbuchstaben enthält:

α, A	„alpha“	ξ, Ξ	„xi“	ι, I	„iota“	o, O	„omikron“	π, Π	„pi“
β, B	„beta“*	ζ, Z	„zeta“	$\varkappa$, K	„kappa“	ω, Ω	„omega“	φ, Φ	„phi“
γ, Γ	„gamma“	η, H	„eta“	λ, Λ	„lambda“	ϱ, P	„rho“	ψ, Ψ	„psi“
δ, Δ	„delta“	ϑ, Θ	„theta“	μ, M	„mü“	σ, Σ	„sigma“	χ, X	„chi“
ε, E	„epsilon“			ν, N	„nü“	τ, T	„tau“	υ, Υ	„üpsilon“

*Im Neu-Griechischen wird das β/B als „vita“ gesprochen.

Nun wollen wir das Radialmaß bestimmen.

Bereits die Griechen stellten fest, dass das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Radius r stets das gleiche ist. Sie definierten dieses Verhältnis über die Kreiszahl π:

1.1.2

Die **Kreiszahl**

$$\pi = \frac{U}{2r}.$$

Dabei ist π eine rationale Zahl. Messungen und Näherungsrechnungen haben ergeben, dass $\pi \approx 3.141592653589793$ ist.

Ist der Radius gerade 1, so hat der Kreis den Umfang 2π. Die Länge eines Kreisbogens, also das Radial- oder Bogenmaß, ist dann ein Teil von 2π.

Beispiel 1.1.3

Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Viertelskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/4 = \pi/2$.
Der Winkel zwischen zwei Geraden, die einen Achtelskreis ausschneiden, beträgt $2\pi/8 = \pi/4$.

Wenn man den Winkel $\measuredangle(g,h)$ kennt, so kann man nun auch leicht den Winkel $\measuredangle(h,g)$ bestimmen, der ja nach dem Bild 1.1.1 auf der vorherigen Seite durch den anderen Kreisbogen bestimmt ist:

$$\measuredangle(h,g) = 2\pi - \measuredangle(g,h)\,.$$

Ein anderes sehr gebräuchliches Winkelmaß erhält man, in dem man den Kreis in 360 gleich große Teile teilt und dann misst, wie viele dieser Teile überstrichen werden, wenn g mathematisch positiv auf h gedreht wird. Dieses **Gradmaß** eines Winkels kann leicht in das Radialmaß überführt werden:

$$\measuredangle(g,h) = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ},$$

wenn α das Gradmaß des Winkels zwischen g und h angibt.

Aufgabe 1.1.1
Der Winkel $\measuredangle(g,h)$ beträgt im Gradmaß 60°. Rechnen Sie den Winkel in das Bogenmaß um:

$\measuredangle(g,h) = \boxed{}$

<u>Lösung:</u>

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\measuredangle(g,h)}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(g,h) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 1.1.2
Der Winkel β beträgt im Bogenmaß $\pi/4$. Wie groß ist der Winkel im Gradmaß?

$\beta =$ $\boxed{}$

Lösung:

$$\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{\beta}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi/4}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$$

Ein Winkel kann alle Werte zwischen 0 und 2π annehmen (0° und 360°):

1.1.4

- Ein Winkel mit einem Maß zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ heißt **spitzer Winkel**.

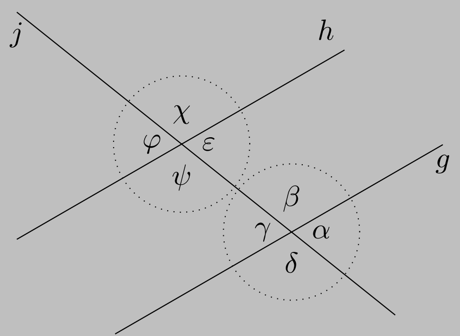
  Ein Winkel mit einem Maß von $\frac{\pi}{2}$ heißt **rechter Winkel**.

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π heißt **stumpfer Winkel**.

  Ein Winkel mit einem Maß zwischen π und 2π heißt **überstumpfer Winkel**.
- Zwei Halbgeraden bilden eine Gerade, wenn sie einen Winkel vom Maß π bilden.
- Zwei Halbgeraden **stehen senkrecht aufeinander**, wenn sie einen rechten Winkel bilden.

Betrachten wir nun drei verschiedene Geraden, von denen zwei parallel sind, während die dritte nicht parallel zu diesen beiden ist. Es ergeben sich acht Schnittwinkel. Je vier dieser Winkel sind gleich groß.

1.1.5



Die Winkel $\alpha, \gamma, \varepsilon$ und φ sind gleich groß, ebenso die Winkel β, δ, χ und ψ.

Dabei nennt man β und ψ bzw. γ und ε **Wechselwinkel**.

Die Winkel α und ε heißen **Stufenwinkel**, ebenso β und χ, δ und ψ und γ und φ.

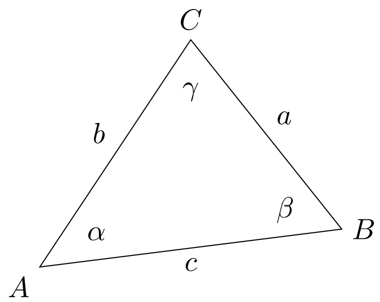
Eine einfache Figur mit Winkeln ist das Dreieck:

1.1.6

- Ein **Dreieck** entsteht, wenn man drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, verbindet.
- Die drei Punkte, die verbunden werden, heißen **Ecken** des Dreiecks, und die drei Verbindungslinien heißen **Seiten** des Dreiecks.
- Je zwei Seiten des Dreiecks bilden je zwei Winkel.

  Der kleinere dieser beiden Winkel heißt **Innenwinkel**, und der größere der beiden Winkel heißt **Außenwinkel**.
- Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks beträgt stets π bzw. $180°$.

Man benennt die Ecken eines Dreiecks in mathematisch positiver Richtung mit lateinischen Großbuchstaben. Die einem Punkt gegenüberliegende Seite eines Dreiecks bekommt den entsprechenden Kleinbuchstaben zugeordnet, und der Innenwinkel in einer Ecke erhält den entsprechenden Kleinbuchstaben des griechischen Alphabets.
Da die Außenwinkel eines Dreiecks wesentlich weniger interessant sind als die Innenwinkel, nennt man die Innenwinkel eines Dreiecks auch schlicht **Winkel** des Dreiecks.



Da die Summe aller Winkel in einem Dreieck π beträgt, kann höchstens ein Winkel gleich oder größer als $\frac{\pi}{2}$ sein. Dadurch werden die Dreiecke nach ihrem größten Winkel in drei verschiedene Klassen eingeteilt:

1.1.7

- Ein Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, heißt **spitzwinklig**.
- Ein Dreieck, das einen rechten Winkel enthält, heißt **rechtwinklig**.

In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen, **Katheten** und die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse**.

- Ein Dreieck, das einen Winkel mit einem Maß von über $\frac{\pi}{2}$ besitzt, heißt **stumpfwinklig**.

1.1.2 Kongruenzsätze

Ein Dreieck hat drei Seitenlängen und drei Winkel, also sechs Größen. Wenn bei zwei Dreiecken alle diese Größen übereinstimmen, so sind diese Dreiecke **kongruent** oder deckungsgleich, dabei spielt es keine Rolle, wo sich die Dreiecke befinden.
Kennt man vier von den sechs Größen, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt bis auf Spielgelung oder Drehung, das heißt bis auf die Lage des Dreiecks im Raum. Alle Dreiecke, die man mit diesen Angaben erhält, sind dann kongruent. In einigen Fällen genügen sogar drei Angaben, um das Dreieck eindeutig zu bestimmen. Diese Fälle werden mit den Kongruenzsätzen beschrieben:

1.1.8

Kongruenzsätze für Dreiecke

Ein Dreieck ist eindeutig bestimmt, wenn

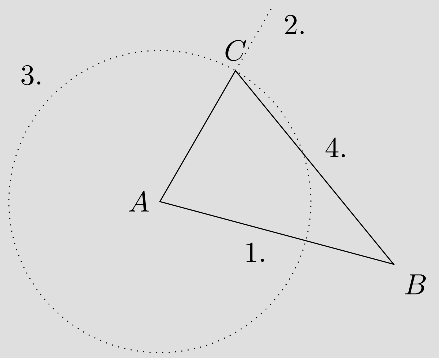
- von den drei Winkeln und den drei Seitenlängen mindestens vier Angaben gegeben sind.
- alle drei Seitenlängen gegeben sind. (Diesen Satz bezeichnet man gerne mit „sss“ für „Seite, Seite, Seite“.)
- zwei Winkel und eine Seitenlänge gegeben sind („wsw“ für „Winkel, Seite, Winkel“).
- zwei Seitenlängen und der von den Seiten eingeschlossenen Winkel gegeben sind („sws“ für „Seite, Winkel, Seite“).
- ein Winkel und zwei Seitenlängen so gegeben sind, dass nur eine der Seiten auf einem Schenkel des Winkels liegt und die andere gegebene Seite die längere der beiden gegebenen Seiten ist.

  (Diesen Satz bezeichnet man mit „Ssw“ für „Seite, Seite, Winkel“, wobei das groß geschriebene „S“ signalisieren soll, dass die dem Winkel gegenüberliegende Seite die längere Seite darstellt.)

Hat man von einem Dreieck nur zwei Angaben oder drei Angaben, die keinem der oben angegebenen Fälle entsprechen, gegeben, so gibt es verschiedene Dreiecke, für die die Angaben zutreffen.

Beispiel 1.1.9

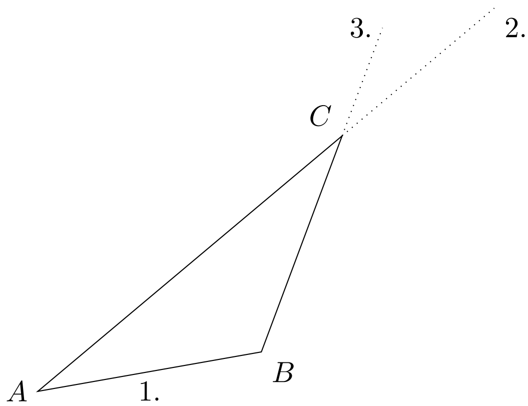
Gegeben seien der Winkel α und die Seiten b und c. Das Dreieck „sws“ erhält man, indem man zunächst eine Seite, hier zum Beispiel die Seite c, zeichnet und an der nach der Bezeichnungskonvention korrekten Ecke (A) den Winkel anfügt. Dann schlägt man um diese Ecke einen Kreis, dessen Radius der Länge der zweiten Seite (hier b) entspricht. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem zweiten Schenkel des Winkels bildet die dritte Ecke des Dreiecks (C).



Aufgabe 1.1.3
Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seite $c = 5$ und den Winkeln $\alpha = 30°$ und $\beta = 120°$.

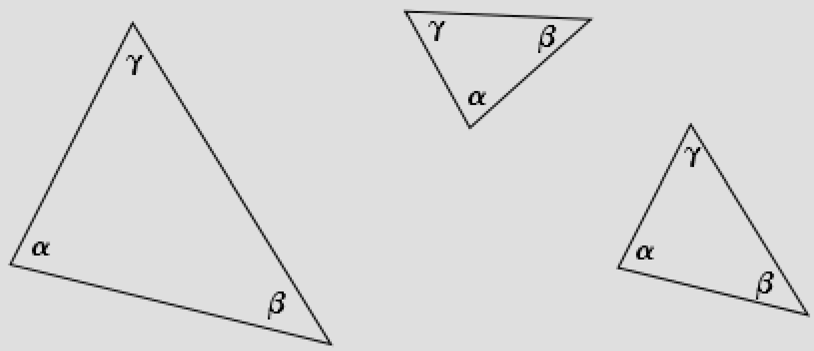
Lösung:

Man zeichnet zuerst die gegebene Strecke c. Dann trägt man an den beiden Enden der Strecke die zwei der Bezeichnungskonvention entsprechenden Winkel an. Der Schnittpunkt der beiden neuen Schenkel ist die dritte Ecke des Dreiecks.



Beispiel 1.1.10

Gegeben seien nun die drei Winkel $\alpha = 77°$, $\beta = 44°$ und $\gamma = 59°$. Diese Angaben findet man nicht bei den Kongruenzsätzen 1.1.8 auf der vorherigen Seite. Wir wollen trotzdem versuchen, ein Dreieck zu konstruieren.



Wir erhalten unendlich viele Dreiecke, die nicht kongruent sind, also nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Allerdings sehen diese Dreiecke irgendwie ähnlich aus. Solche **ähnlichen** Dreiecke erhält man auch, wenn man zum Beispiel die Verhältnisse aller Seiten zueinander kennt.

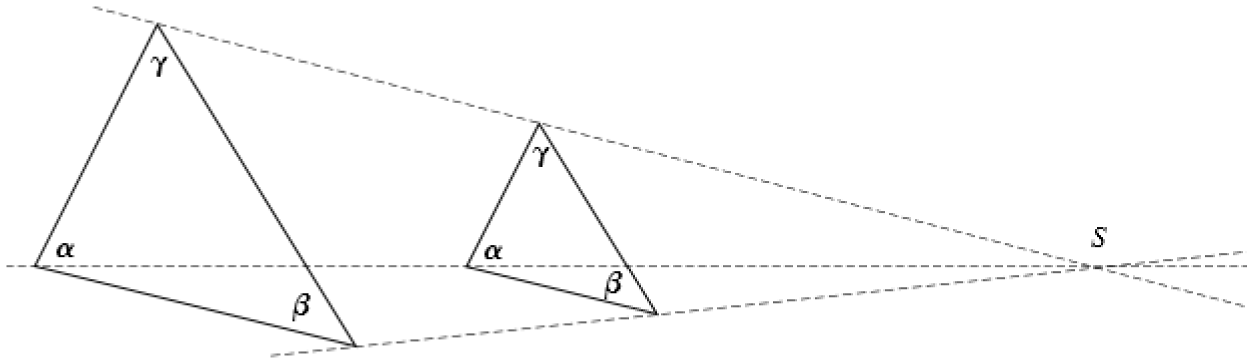
1.1.11

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn

- sie in zwei (und damit wegen der Winkelinnensumme in drei) Winkeln übereinstimmen.
- sie in allen **Verhältnissen** ihrer entsprechenden Seiten übereinstimmen.
- sie in einem Winkel und im **Verhältnis** der anliegenden Seiten übereinstimmen.
- sie im **Verhältnis** zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Eine Besonderheit gibt es bei dem rechten und dem linken Dreieck in Beispiel 1.1.10 auf der vorherigen Seite:
Hier geht das eine Dreieck durch zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und einem Streckfaktror k in das andere über.

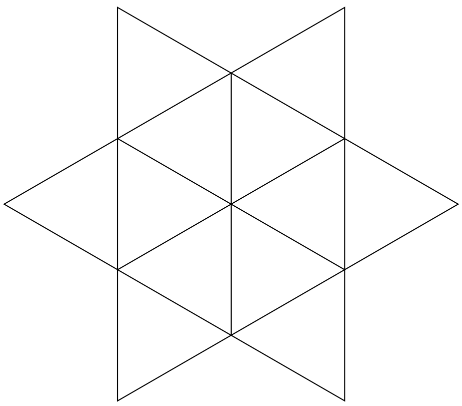

γ
γ
α
α
β
β
S

Aufgaben

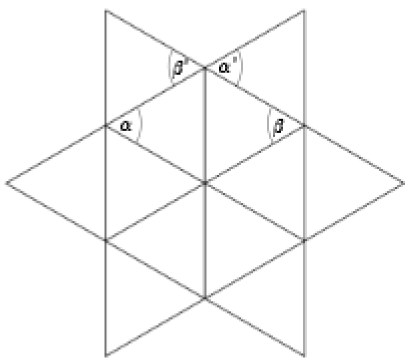
Aufgabe 1.1.4
Geben Sie die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte an! Dabei steht in einer Spalte stets der gleiche Winkel.

Radialmaß	π		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{12}$
Gradmaß		324		270	

Aufgabe 1.1.5
Untersuchen Sie die folgende Figur auf Stufenwinkel und Wechselwinkel!



Lösung:

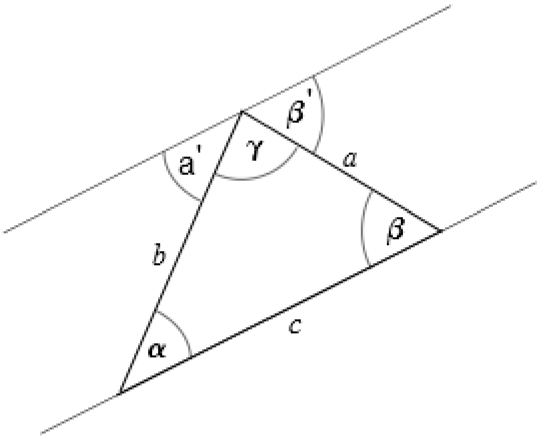


Die Winkel α und α' zum Beispiel sind Stufenwinkel, ebenso β und β'.

Die Winkel α' und β zum Beispiel sind Wechselwinkel, ebenso α und β'.

Aufgabe 1.1.6
Zeigen Sie mit Hilfe von Wechselwinkeln, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck stets π beträgt.

Lösung:



Zeichnet man parallel zur Seite c eine Gerade durch die obere Ecke des Dreiecks, so erhält man jeweils einen Wechselwinkel α' zu α und β' zu β.

An der Geraden gilt

$$\alpha' + \gamma + \beta' = \pi$$

Da $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ folgt $\alpha + \gamma + \beta = \pi$.

1.2 Flächeninhalt und Strahlensätze

Einführung

Das Bauamt von Ludwigshafen möchte die Grundstücksgrößen des in unserem Ausschnitt des Stadtplans (Bild 1.1 auf Seite 2) abgebildeten Viertels neu berechnen.

Die meisten der Grundstück haben eine (annähernd) vieleckige Grundfläche, die sich, wie man zeigen kann, in Dreiecke aufspalten lässt. Das Bauamt teilt diese Grundstücke also in Dreiecke auf, berechnet die Flächeninhalte der Dreiecke und erhält so die Gesamtfläche der Grundstücke durch die Addition der Dreiecksflächeninhalte.

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man den Umfang und Flächeninhalte von Dreiecken und anderen Figuren berechnet.

Dann werden wir die sogenannten Strahlensätze einführen, die zum Beispiel bei der Skalierung einer Zeichnung oder bei der Berechnung von Höhen bzw. Abständen zum Einsatz kommen.

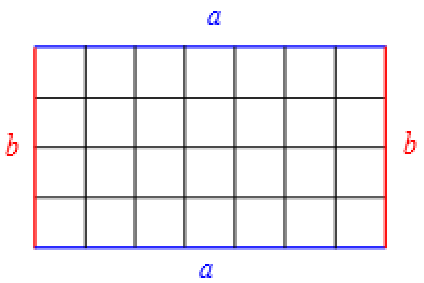
1.2.1 Flächeninhalt

Der Inhalt einer Fläche ist die Zahl der Einheitsquadrate, die man benötigt, um diese Fläche vollständig zu bedecken.

Zuerst wollen wir uns ein Rechteck ansehen.

1.2.1

Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem alle vier Innenwinkel rechte Winkel sind.



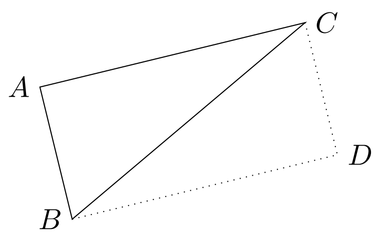
Wenn ein Rechteck eine Seite der Länge a und eine Seite der Länge b hat, dann gibt es b Reihen mit a Einheitsquadraten, also $b \cdot a$ Einheitsquadrate.

1.2.2

Die Fläche A des Rechtecks ist

$$A = b \cdot a = a \cdot b$$

Damit können wir auch leicht den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen. Wir nehmen ein rechtwinkliges Dreieck ABC, drehen es um $180°$ und legen die beiden Hypotenusen des Dreiecks ABC und des gedrehten Dreiecks aufeinander. Damit erhalten wir ein Rechteck.

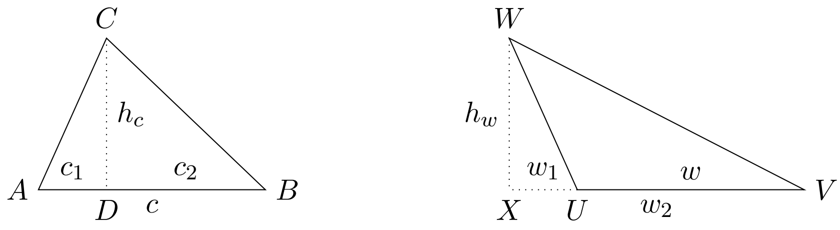


Der Flächeninhalt des Dreiecks ist nun die Hälfte des Flächeninhaltes des Rechtecks, also $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Doch was ist zu tun, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?

Aus jedem beliebigen Dreieck kann man zwei rechtwinklige Dreiecke gewinnen, indem man von einer Ecke aus eine Linie auf die gegenüberliegende Seite zieht, so dass sie diese senkrecht trifft. Diese Linie nennt man die **Höhe** h_{Seite} eines Dreiecks auf die bestimmte Seite.

Je nachdem, ob die neue Linie innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks dann aus der Summe oder der Differenz der Flächeninhalte der beiden sich ergebenden rechtwinkligen Dreiecke:



Links gilt also (wenn A_Δ den Flächeninhalt des Dreiecks Δ bezeichnet)

$$A_{ABC} = A_{DBC} + A_{ADC} = \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_2 + \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_1 = \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot (c_2 + c_1) = \tfrac{1}{2} \cdot h_c \cdot c.$$

Rechts gilt genauso

$$A_{UVW} = A_{XVW} - A_{XUW} = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_2 - \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_1 = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot (w_2 - w_1) = \tfrac{1}{2} \cdot h_w \cdot w.$$

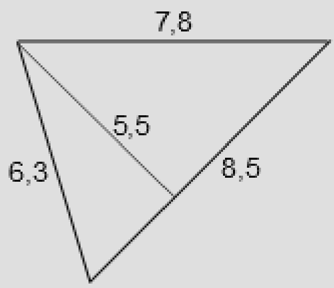
1.2.3

- Die **Höhe eines Dreiecks auf einer Seite** ist die Strecke, die von dem der Seite gegenüberliegenden Punkt ausgeht und die Gerade, auf der die Seite liegt, im rechten Winkel trifft.

  Der Punkt, auf dem die Höhe diese Gerade trifft, heißt **Lotfußpunkt** der Höhe.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus der Hälfte des Produkts der Länge einer Seite mit der Länge der zugehörigen Höhe des Dreiecks

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Beispiel 1.2.4

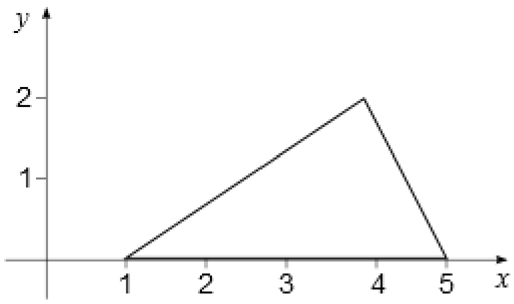


Von dem Dreieck ist die Höhe gegeben, die zur Seite mit dem Wert 8.5 gehört. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist also

$$A = \frac{8.5 \cdot 5.5}{2} = 23.375$$

Aufgabe 1.2.1

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks:

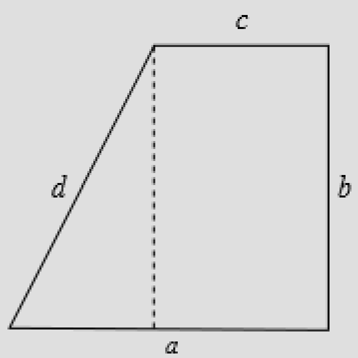


Lösung:
An diesem Dreieck lässt sich die zur Seite, die auf der $x-$Achse liegt, zugehörige Höhe ablesen:

$$\text{Seite} = 4, \quad \text{Höhe} = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

Nun können wir auch die Flächen von anderen Vielecken, auch **Polygone** genannt, bestimmen. Wir werden uns jedoch auf einige einfache Formen beschränken.
Polygone können in Dreiecke unterteilt werden. Die Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke ergibt den Flächeninhalt des Polygons.

Beispiel 1.2.5

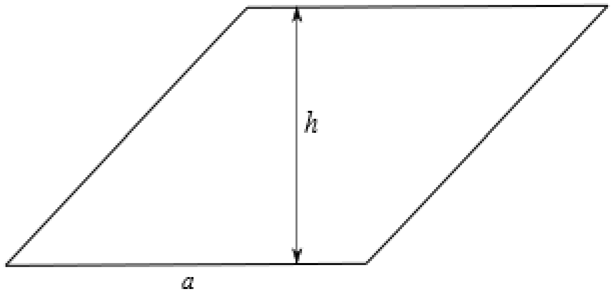


Bei unserem Beispiel kann man das Polygon in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $(a-c)$ und b und der Hypotenuse d sowie ein Rechteck mit den Seiten b und c unterteilen. Das Rechteck könnte man wiederum in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, was aber unnötig ist, da wir den Flächeninhalt eines Rechtecks kennen. Der Flächeninhalt des Polygons ist dann:

$$A = A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}(a-c) \cdot b + b \cdot c = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bc + bc = \frac{1}{2}(a+b) \cdot c$$

Aufgabe 1.2.2

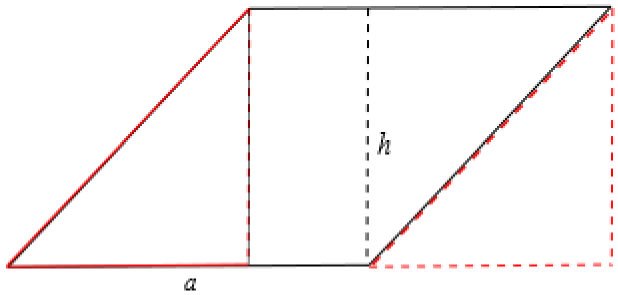
Berechnen Sie den Flächeninhalt des **Parallelogramms** für $a = 4$ und $h = 5$. Teilen Sie es sinnvoll auf und schauen Sie sich die entstandenen Dreiecke gut an!



Lösung:

Man kann das Parallelogramm in das linke rote Dreieck, einem folgenden Rechteck und das rechte Dreieck aufspalten. Schneidet man das rote Dreieck aus und setzt es von rechts an das Parallelogramm, erhält man ein Rechteck mit den Seiten a und h. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$A = a \cdot b = 4 \cdot 5 = 20$$



Zum Schluss wollen wir noch Kreisflächen berechnen. Wir haben zu Beginn bei 1.1.2 auf Seite 4 schon die Kreiszahl π kennengelernt, die ja über den Umfang des Kreises definiert ist. Ebenso hängt die Kreiszahl mit dem Flächeninhalt von Kreisen zusammen.

1.2.6

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r berechnet sich zu

$$A = \pi \cdot r^2$$

Beispiel 1.2.7

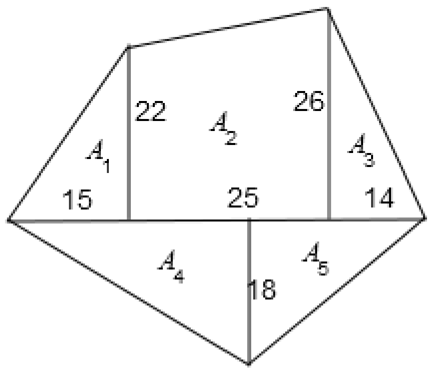
Ein Kreis hat einen Flächeninhalt von 12.566 bei einem Radius von ungefähr $r = 2$. Wir können daraus die Kreiszahl π berechnen:

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{A}{r^2} = \frac{12.566}{4} = 3.1415$$

Aufgaben

Aufgabe 1.2.3

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Polygons:

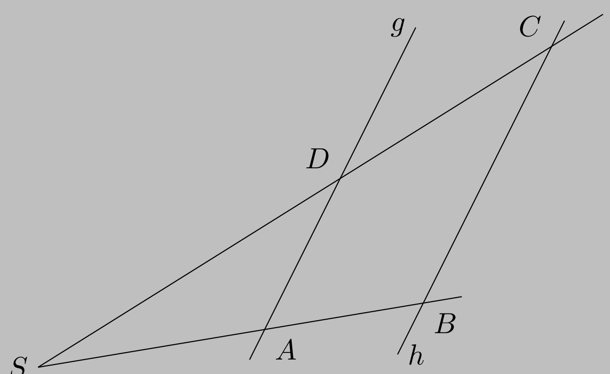


1.2.2 Die Strahlensätze

Die Strahlensätze haben etwa mit der zentrischen Streckung zu tun (siehe 1.1.2 auf Seite 9).

1.2.8

Strahlensätze



Für zwei Punkte P und Q seien $\overline{PQ}$ die Strecke von P nach Q und $\left|\overline{PQ}\right|$ die Länge dieser Strecke.

Sind in dem obigen Bild die Geraden g und h parallel, so gilt:

- Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl:
$$\frac{\left|\overline{SA}\right|}{\left|\overline{SD}\right|} = \frac{\left|\overline{SB}\right|}{\left|\overline{SC}\right|} = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CD}\right|}.$$

- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von S aus gehenden entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl;
$$\frac{\left|\overline{SA}\right|}{\left|\overline{SB}\right|} = \frac{\left|\overline{SD}\right|}{\left|\overline{SC}\right|} = \frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{BC}\right|}.$$

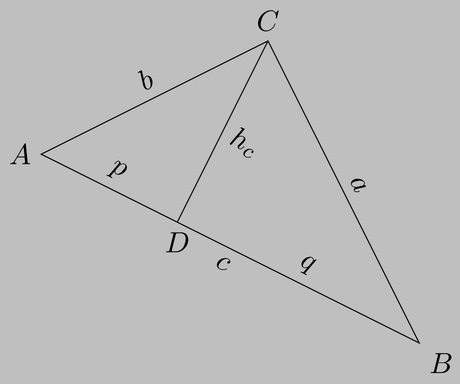
Beispiel 1.2.9

dsf

Zum Beispiel mit dem Strahlensatz herleiten lassen sich auch einige wichtige Sätze, die für ein rechtwinkliges Dreieck gelten. Es ist die **Satzgruppe des Pythagoras**, die hier aber ohne Herleitung angegeben wird:

1.2.10

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel bei C, D der Lotfußpunkt der Höhe h_c auf c, $p = \left|\overline{AD}\right|$ und $q = \left|\overline{BD}\right|$, so gilt:



- **Satz des Pythagoras**
  Die Summe der Quadrate über den Katheten haben den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:
  $$a^2 + b^2 = c^2$$
- **Kathetensaatz**
  Das Quadrat über einer Kathete ist flächeninhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt:
  $$a^2 = c \cdot q, \qquad b^2 = c \cdot p$$
- **Höhensatz**
  Das Quadrat über der Höhe ist flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten
  $$h^2 = p \cdot q$$

Beispiel 1.2.11

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a = 3$ und $b = 4$.

Wir können die Hypotenuse mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$c^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Die einzelnen Hypotenusenabschnitte p und q berechnen wir mit dem Kathetensatz:

$$q = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}, \qquad p = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5}$$

Die Höhe h_c erhalten wir mit dem Höhensatz:

$$h_c = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

Aufgabe 1.2.4

Berechnen Sie für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 10.5$, der Höhe $h_c = 5.04$ und dem Hypotenusenabschnitt $q = 3.78$ die Länge der beiden Katheden.

Lösung:

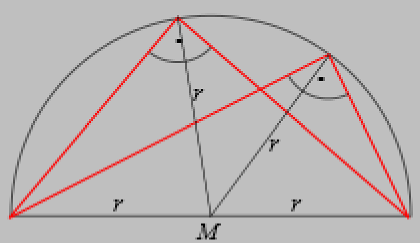
$$\text{Kathetensatz:} \quad a = \sqrt{c \cdot q} = \sqrt{10.5 \cdot 3.78} = 6.3$$

$$\text{Satz des Pythagoras:} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10.5^2 - 6.3^2} = 8.4$$

Es gibt noch einen weiteren wichtigen Satz, der für rechtwinklige Dreiecke gültig ist:

1.2.12

Satz des Thales



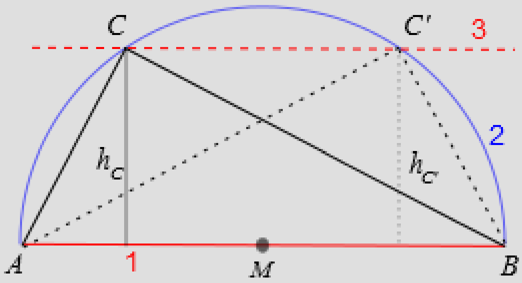
Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf einem Kreis mit der Hypotenuse $c = \overline{AB}$ als Durchmesser.

Anders gesehen besagt dieser Satz auch, dass, wenn man über einer Strecke $\overline{AB}$ einen Halbkreis legt, und dann A und B mit einem beliebigen Punkt C auf dem Halbkreis verbindet, das so entstandene Dreieck immer rechtwinklig ist.

Beispiel 1.2.13

Es soll ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge $c = 6\,\text{cm}$ und der Höhe $h_c = 2.5\,\text{cm}$ konstruiert werden.

Zuerst zeichnet man die Hypotenuse $c = \overline{AB}$ (1).
Die Mitte der Hypotenuse wird nun zum Mittelpunkt eines Kreises mit der Länge $c/2$ (2).
Nun zeichnet man eine Parallelle zur Hypotenuse im Abstand $h_c 4$ (3).
Es gibt zwei Schnittpunkte C und C' dieser Parallelen mit dem Thaleskreis.



Diese sind jeweils die dritte Ecke eines Dreiecks, das die geforderten Eigenschaften hat, das heißt, man erhält zwei Lösungen. Würde man noch einen Thaleskreis nach unten zeichen, so ergäben sich noch mal zwei Lösungen.

Aufgabe 1.2.5
Welche Höhe h_c kann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c maximal haben?

Lösung:
Die Höhe h_c kann maximal so groß werden wie der Radius des Thaleskreises über der Hypotenuse, also $h_c \leq c$.

Aufgaben

Aufgabe 1.2.6

Der Sohn des Hauses beobachtet den Baum auf des Nachbarn Grundstück. Er stellt fest, dass der Baum von der Hecke, die die beiden Grundstücke trennt, vollständig verdeckt wird, wenn er nur nahe genug an die Hecke herantritt. Jetzt sucht er den Punkt, an dem der Baum gerade so nicht mehr zu sehen ist.

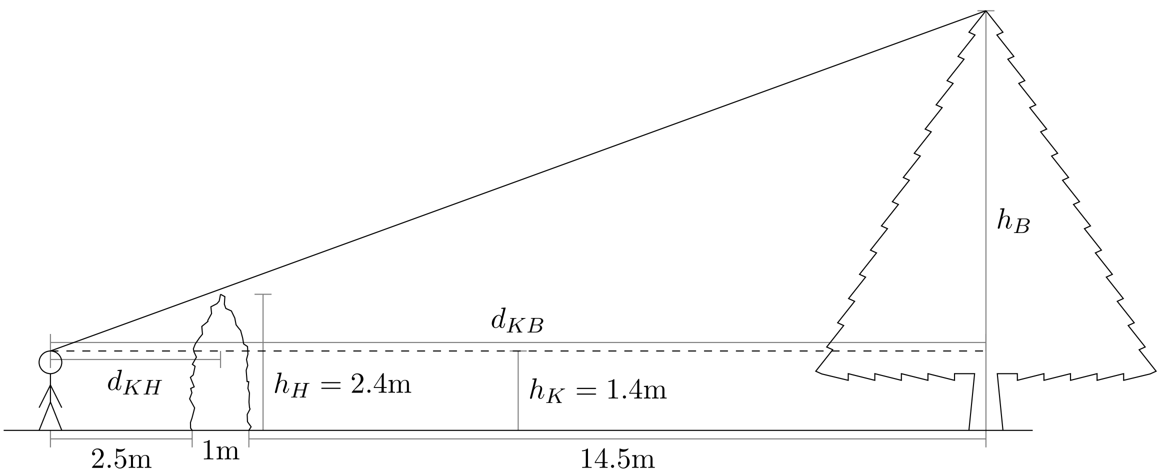
Der 1.40 Meter große Junge muss 2.50 Meter von der 2.40 Meter hohen, 1 Meter breiten und oben spitz zulaufenden Hecke entfernt stehen, damit der Baum vollständig verdeckt ist.

Wie hoch ist der Baum, wenn die Mitte des Stamms 14.5 Meter von der Hecke entfernt steht?

Führen Sie die Rechnung bitte zunächst allgemein durch und setzen Sie erst am Ende die Zahlenwerte ein!

Hinweis:
Beachten Sie die Breite der Hecke!

Lösung:



Wir wenden den zweiten Strahlensatz $\left(\frac{\text{komplett}}{\text{vorne}} = \frac{\text{lang}}{\text{kurz}}\right)$ an:

$$\frac{d_{KB}}{d_{KH}} = \frac{h_B - h_K}{h_H - h_K} \qquad \text{bzw.} \qquad h_B = (h_H - h_K) \cdot \frac{d_{KB}}{d_{KH}} + h_K.$$

Nun gelten $d_{KH} = 2.5\text{m} + \frac{1\text{m}}{2} = 3\text{m}$ und $d_{KB} = 2.5\text{m} + 1\text{m} + 14.5\text{m} = 18\text{m}$. Damit folgt

$$h_B = (2.4\text{m} - 1.4\text{m}) \cdot \frac{18\text{m}}{3\text{m}} + 1.4\text{m} = 1\text{m} \cdot 6 + 1.4\text{m} = 7.4\text{m}.$$

1.3 Trigonometrie

Einführung

Im Vorherigen Abschnitt haben wir uns bei rechtwinkligen Dreiecken mit deren Seiten beschäftigt. Nun werden wir uns auch den anderen Winkeln im rechtwinkligen Dreieck zuwenden und ihren Beziehung zu den Seiten. Daraus können wir dann auch die Höhe h eines nicht rechtwinkligen Dreiecks berechnen, die man ja für die Flächenberechnung benötigt, oftmals aber nicht gegeben hat.

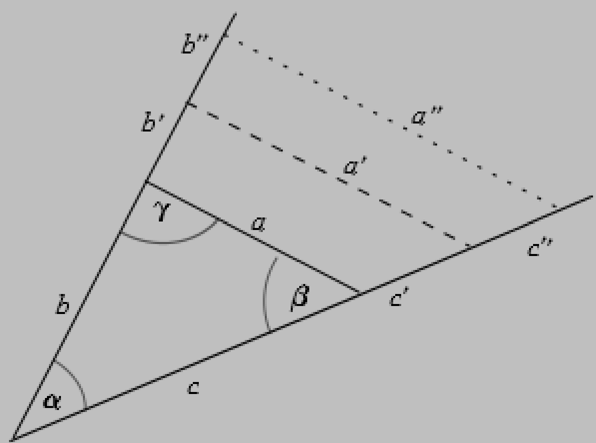
1.3.1 Trigonometrie am Dreieck

urch die Strahlensätze haben wir gesehen, dass die Verhältnisse der Seiten in einem Dreieck lediglich von den Winkeln des Dreiecks abhängen. Ändert man in einem Strahlensatz den Winkel bei S oder den Winkel, in dem die parallelen Geraden einen Strahl schneiden, so ändern sich natürlich auch die Verhältnisse. Legt man hingegen einen der beiden Winkel fest, so kann man die Verhältnisse in Abhängigkeit von dem anderen Winkel als Funktion von einer Variablen darstellen.

Wir legen nun den Winkel γ fest auf π, das heißt, das Dreieck ist ein rechtwinkliges. Nun sind die Seitenverhältnisse nur vom Winkel α abhängig, der Winkel β ergibt sich ja aus der Winkelinnensumme des Dreiecks. Wir erhalten eine Schar von ähnlichen Dreiecken, wobei die Seiten c, c', ... die Hypotenusen sind. Im Hinblick auf den betrachteten Winkel α bezeichnet man die dem Winkel gegenüberliegen Seiten a, a', ... als **Gegenkathete** und die am Winkel anliegende Seiten b, b', ... als **Ankathete**. Wendet man nun die Strahlensätze an, so erhält man folgende Erkenntnisse:

1.3.1

Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck



- Das Verhältnis
$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \ldots = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \sin(\alpha)$$
bezeichnet man als den **Sinus** des Winkels α.

- Das Verhältnis
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \ldots = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \cos(\alpha)$$
bezeichnet man als den **Kosinus** des Winkels α.
- Das Verhältnis
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} := \tan(\alpha)$$
bezeichnet man als den **Tangens** des Winkels α.

Der Tangens des Winkels α ist nach der Definition

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Weiterhin hat der Kehrwert des Tangens einen eigenen Namen, man bezeichnet ihn als den **Kotangens** des Winkels α:

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

Beispiel 1.3.2

Von einem Dreieck ist bekannt, dass es einen rechten Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°$ hat. Die Seite c ist $5\,\text{cm}$, die Seite a ist $2.5\,\text{cm}$ lang. Wir wollen jeweils den Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α bestimmen:

Den Sinus können wir sofort aus den Angaben berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{2.5\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = 0.5.$$

Für den Kosinus benötigen wir die Länge der Seite b, die wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhalten:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (2.5\,\text{cm})^2}}{5\,\text{cm}} = 0.866.$$

Daraus folgt für den Tangens

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{0.5}{0.866} = 0.5773.$$

Aufgabe 1.3.1
Die Hypotenuse $c = 5$ ist vorgegeben. Zeichnen Sie mit Hilfe des Thaleskreises (Maßstab 1$\hat{=}$2 cm die rechtwinkligen Dreiecke für die Winkel $\alpha \in \{0\circ, 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°\}$.

Messen Sie die Seiten a und b und schreiben Sie sie in eine Tabelle. Berechnen Sie zu jedem Dreieck den Sinus, Kosinus und Tangens.

Schauen Sie sich die Werte genauer an und versuchen Sie, sie zu interpretieren.

Tragen Sie die Werte von Sinus, Kosinus und Tangens in Abhängigkeit des Winkels α in ein Diagramm.

Lösung:
Beim Messen entstehen immer Messfehler! Die Tabelle könnte folgendermaßen aussehen:

α	a	b	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0.0	5.0	0.0	1.0	0.
10°	0.8	4.9	0.160	0.98	0.1633
20°	1.7	4.7	0.34	0.96	0.3617
30°	2.5	4.3	0.5	0.86	0.5814
40°	3.2	3.8	0.64	0.76	0.8421
45°	3.5	3.5	0.7	0.7	1.0
50°	3.8	3.27	0.76	0.64	1.1875
60°	4.3	2.5	0.86	0.5	1.7200
70°	4.7	1.7	0.96	0.34	2.7647
80°	4.9	0.8	0.98	0.160	6.1250
90°	5.0	0.0	1.0	0.0	$\rightarrow \infty$

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt die Gegenkathete a zu und die Ankathete b ab.

  Ebenso verhalten sich $\sin(\alpha) \sim a$ und $\cos(\alpha) \sim b$.

- Mit zunehmendem Winkel α nimmt a in dem gleichen Maß zu wie b mit von $90°$ aus fallenden Winkel α abnimmt. Im Thaleskreis sind die beiden Dreiecke mit den entgegengesetzten Werten für a und b die zwei Lösungen für die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse und gegebener Höhe (Aufgabe 1.2.13 auf Seite 21).

  Ebenso verhalten sich Sinus und Kosinus zueinander: es ist also

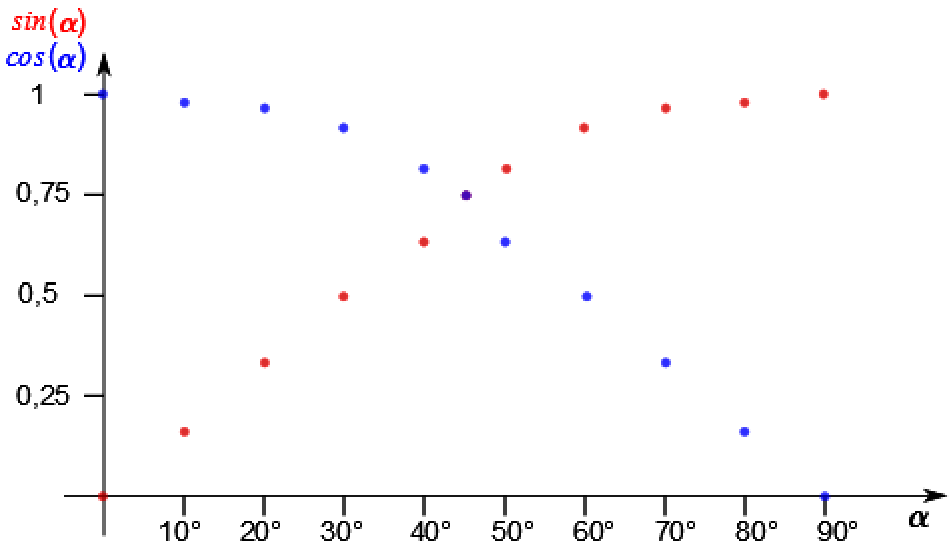
  $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$ bzw.

  $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$.

- Bei $\alpha = 45°$ sind die Katheten und damit auch Sinus und Kosinus von α gleich.

- Der Tangens, also das Verhältnis von a zu b, steigt mit zunehmendem Winkel α von Null ins Unendliche.

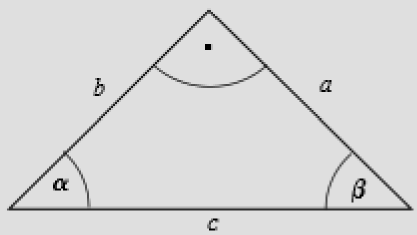
Das Diagramm sieht folgendermaßen aus:



Beispiel 1.3.3

Wir wollen den Sinus des Winkels $\alpha = 45°$ nun berechnen, also nicht aus gemessenen = fehlerbehafteten Werten herleiten, wie in der letzten Aufgabe.

Wenn im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ der Winkel α gleich 45° ist, so muss wegen der Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180°$ der Winkel β auch gleich $45° = \pi/4$ sein, und die beiden Katheten a und b sind gleichlang. Dieses Dreieck nennt man **gleichschenklig**:



Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \sin(45°) = \frac{a}{c}.$$

Außerdem gilt:

$$a^2 + b^2 = 2a^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2} \cdot a.$$

$$\Rightarrow \quad \sin(45°) = \sin(\pi/4) = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

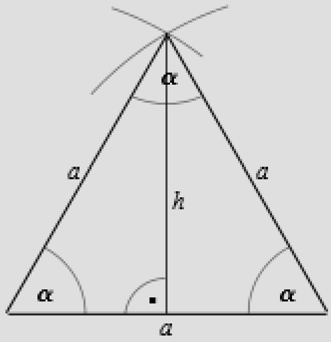
In der Aufgabe 1.3.1 auf Seite 24 haben wir für den Sinus von 45° einen Wert von 0.7 erhalten, was dem errechneten Wert von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ schon recht nahe kommt.

Beispiel 1.3.4

Wir betracheten nun ein **gleichseitiges** Dreieck. Wie der Name sagt, sind in diesem Dreieck alle Seiten gleich lang, und auch die Winkel sind alle gleich groß, nämlich $\alpha = \beta = \gamma = \frac{180°}{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$. Das Dreieck ist nach dem Kongruenzsatz „sss“ mit der Angabe einer Seite a eindeutig bestimmt, und wir erhalten es, indem wir die Seite a zeichnen und mit dem Zirkel einen Kreis mit dem Radius a um jede Ecke schlagen. Der Schnittpunkt der Kreise ist nun die dritte Ecke.

Dieses Dreieck hat keinen rechten Winkel. Zeichnen wir eine Höhe h auf eine der Seiten a ein, so erhalten wir zwei kongruente Dreiecke mit je einem rechten Winkel.
Es gilt nun:

$$\sin(\alpha) = \sin(60^\circ) = \frac{h}{a}$$



Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a$$

$$\Rightarrow \quad \sin(60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$$

Aus diesem Dreieck können wir noch den Sinus eines weiteren Winkels berechnen: Die Höhe h teilt den oberen Winkel in zwei gleiche Teile, so dass wir in den beiden kleinen kongruenten Dreiecken jeweils den Winkel $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ erhalten. Es ist nun

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.3.2
Berechnen Sie den Kosinus für die Winkel $\alpha_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ und $\alpha_3 = 60^\circ$. Verwenden Sie die Erkenntnisse aus Aufgabe 1.3.1 auf Seite 24.

Lösung:
Aus der Aufgabe 1.3.1 auf Seite 24 wissen wir, dass $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Daraus folgt

$$\cos(30^\circ) = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$$

$$\cos(45^\circ) = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$\cos(60^\circ) = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

In einer kleinen Tabelle können wir nun unsere gefundenen Werte für markante Winkel zusammentragen:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

Diese Werte sollte man sich merken. Die Trigonometrischen Funktionen für andere Winkel sind in Tabellen bzw. im Taschenrechenr gespeichert.

Im Beispiel 1.3.4 auf Seite 26 haben wir mit Hilfe der Trigonometrischen Funktionen die Höhe h des Dreiecks berechnet. Diese Vorgehensweise gilt für alle beliebigen Dreiecke, da die Höhe h das Dreieck immer in zwei rechtwinklige Dreiecke teilt und somit die Trigonometrischen Funktionen angewandt werden können.

Aufgabe 1.3.3
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit der Hypotenuse $c = 7$, der Kathete $b = 3$ und dem Winkel $\alpha = 30°$.

Lösung:
Der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.

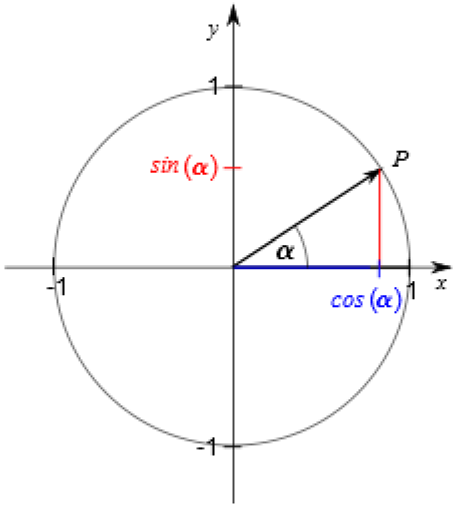
$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \cdot \sin(\alpha) = 3 \cdot \sin(30°) = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

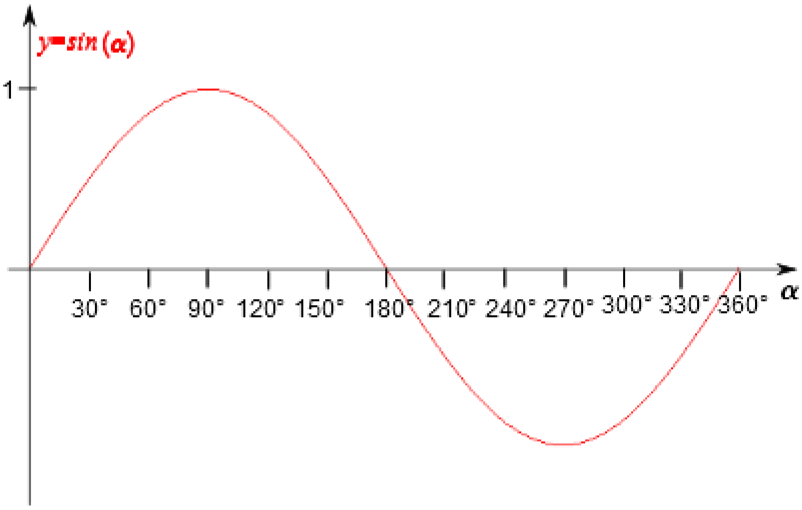
$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{4}$$

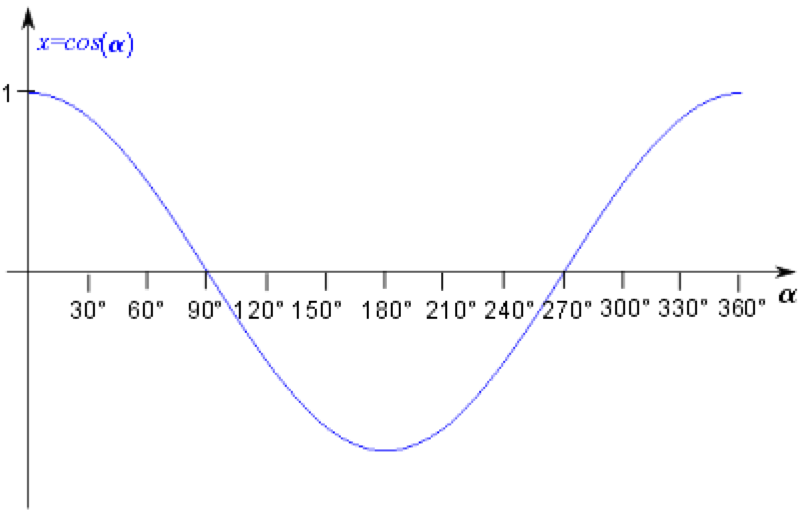
1.3.2 Trigonometrie am Einheitskreis

Im letzten Abschnitt haben wir die Trigonometrischen Funktionen anhand eines rechtwinkligen Dreiecks angeschaut. Die gefundenen Erkenntnisse gelten also für einen Winkelbereich von 0 bis $90° = \frac{\pi}{2}$.

Um unsere Erkenntnisse auf größere Winkel als $\pi/2$ ausdehnen zu können, schauen wir uns den Einheitskreis an.







Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Rad
Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen
tensystems.

Wir betrachten einen Vektor vom Urs
mit der Länge 1. Wir lassen diesen Vektor
Ausgangslage auf der positiven $x-$Achse
Uhrzeigersinn, also im mathematisch posi
um den Nullpunkt rotieren. Dabei überstr
Spitze den Einheitskreis, und er bildet mit
ven $x-$Achse den Winkel α, der bei der Ro
0 bis 2π bzw. 360° wächst. Zu jedem Wink
also ein Punkt $P_\alpha\,(x_\alpha, y_\alpha)$ auf dem Einheit
Für $\alpha \in [0, \pi/4]$ kann man den Vekto
gehörigen $x-$Achsenabschnitt und den z
$y-$Achsenabschnitt als rechtwinkliges D
sehen, wie wir es vom letzten Kapitel h
Die Hypotenuse ist der Vektor mit der
der $x-$Achsenabschnitt ist die Ankathet
$y-$Achsenabschnitt die Gegenkathete.

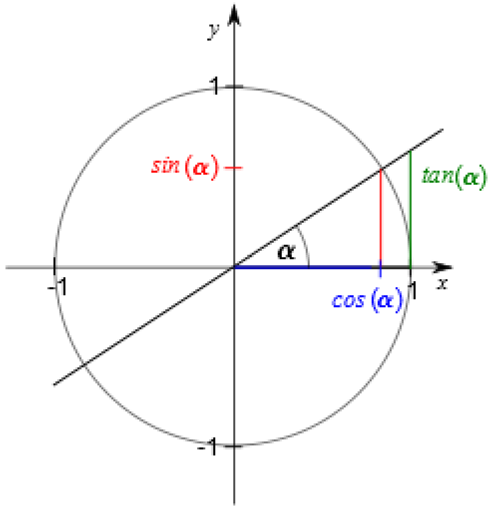
Der Sinus des Winkels α ist also

$$\sin(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha$$

und der Kosinus ist

$$\cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha$$

Diese Definitionen gelten nun auch für die Winkel $\alpha > \pi/4$. Dabei können die Werte für x_α und y_α auch negativ werden und damit auch der Kosinus bzw. Sinus. Trägt man die $y-$Werte in Abhängigkeit vom Winkel α in ein Diagramm, so erhält man die rote Kurve, für die $x-$Werte erhält man die blaue Kurve.



Nun wurde noch der Tangens eingezeichnet. Wendet man die Strahlensätze an, so erhält man

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{1} = \tan(\alpha)$$

Mit dem Satz von Pythagoras gilt außerdem die wichtige Beziehung

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Beispiel 1.3.5

Wir suchen die Werte jeweils des Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens des Winkels $\alpha = 315°$.

Für $\alpha = 315°$ liegt der Punkt P_α im 4. Quadranten, der zugehörige Vektor bildet mit den zugehörigen Achsenabschnitten ein gleichschenkliges Dreieck. Es gilt:

$$|x_\alpha| = |y_\alpha| \quad \Rightarrow \quad |x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2 = 2 \cdot |x_\alpha|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |x_\alpha| = |y_\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

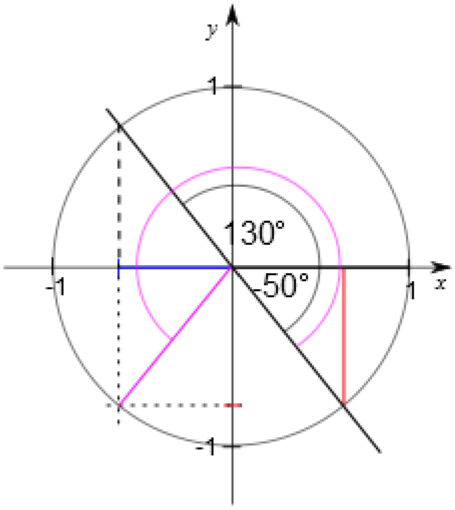
$$\cos(\alpha) = x_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin(\alpha) = y_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \tan(\alpha) = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = -1, \quad \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = -1$$

Aufgabe 1.3.4
Welcher Winkel gehört zu dem Punkt $P_\alpha\,(-0.643, -0.766)$?
Hinweis:
Verwenden Sie dazu den Taschenrechner, aber vertrauen Sie ihm nicht blind!

Lösung:
Aus den Koordinaten des Punktes P_α erhalten wir:

$$\sin(\alpha) = -0.766 \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = -0.643.$$

Tippen Sie in den Taschenrechner:
invers(sin(-0,766)) bzw. $\sin^{-1}$(-0,766), so erhalten Sie ungefähr $-50°$, und
invers(cos(-0,643)) bzw. $\sin^{-1}$(-0,643), so erhalten Sie ungefähr 130°.
Außerdem wissen Sie, dass der Punkt im 3. Quadranten ist, also ein Winkel im Bereich zwischen 180° und 270° herauskommen muss.



Anhand des Bildes kann man erkennen, dass der negative Sinuswert zwar zum Winkel $-50°$, aber auch zu $\alpha = (180° + 50°) = 230°$ gehört.

Ebenso kann der negative Kosinuswert zu $130°$, aber auch zu $\alpha = -130° = (360° - 130°) = 230°$ gehören.

Der richtige Winkel ist also $\alpha = 230°$ (rosa).

Aufgaben

Aufgabe 1.3.5

1. Für ein bei C rechtwinkliges Dreieck seien $b = 2.53\text{cm}$ und $c = 3.88\text{cm}$ gegeben. Geben Sie $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und a an!

   Lösung:

   $$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(3.88\text{cm})^2 - (2.53\text{cm})^2} = \sqrt{15.0544\text{cm}^2 - 6.4009\text{cm}^2} = \sqrt{8.6535}\text{cm}.$$

   $$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{8.6535}\text{cm}}{3.88\text{cm}} = \frac{\sqrt{86535}}{388} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{2.53\text{cm}}{3.88\text{cm}} = \frac{253}{388}$$

   Numerisch ergibt sich $a \approx 2.9417\text{cm}$, $\sin(\alpha) \approx 0.7587$ und $\sin(\beta) \approx 0.65201$.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit $\beta = \frac{11\pi}{36}$, $a = 4\text{m}$ und $c = 60\text{cm}$!

   Lösung:

   $$\frac{(a \cdot \sin(\beta)) \cdot c}{2} = \sin\left(\tfrac{11\pi}{36}\right) \cdot 1.2\text{m}^2 \approx 0.98298\text{m}^2$$

1.4 Die dritte Dimension: Körper

Einführung

Bisher haben wir uns mit der Geometrie in der Ebene beschäftigt. Dabei ging es darum, Objekte zu untersuchen, die man auf ein Blatt Papier zeichnen kann.

Solche Objekte nehmen wir aber in der Welt nicht wahr. Wir sehen dreidimensional. Alles, was wir sehen, hat eine Breite eine Höhe und eine Tiefe. Die zweidimensionalen Objekte sind lediglich Projektionen dieser dreidimensionalen Gegenstände.

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit den einfachsten dreidimensionalen Objekten Zylinder, Kegel und Kugel beschäftigen. Zur Berechnung deren Volumina lernen wir außerdem das Prinzip von Cavalieri kennen.

Inhalt

ZylinderZylinderSTD Wenn wir gefragt werden, was für dreidimensionale Körper wir kennen, fällt uns stets als erstes der Würfel ein. Das ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass der Würfel eine hohe Symmetrie aufweist und gleichzeitig aber eine eckige Form hat. (Die Kugel zum Beispiel ist noch „symmetrischer“ als der Würfel. Runde Formen treten aber zum Beispiel in der Architektur wesentlich seltener auf als eckige.)

Dabei ist der Würfel lediglich ein Spezialfall des denkbar einfachsten Körpers.

1.4.1

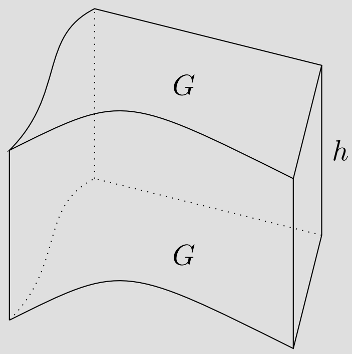
Der Zylinder

- Ein **Zylinder** ist durch eine beliebige (ebene) Grundfläche und eine Höhe charakterisiert. Er entsteht, indem man auf jeden Punkt der Grundfläche eine Strecke, deren Länge der Höhe des Zylinders entspricht, so aufsetzt, dass die Strecke senkrecht zur Grundfläche steht.
- Das **Volumen eines Zylinders** berechnet sich als Produkt des Flächeninhalts der Grundfläche mit der Höhe.
- Die **Oberfläche eines Zylinders** setzt sich aus der „unteren“ Grundfläche, der „oberen“ Grundfläche (der sogenannten Deckfläche) und der sogenannten Mantelfläche zusammen.

  Sind G der Flächeninhalt der Grundfläche, h die Höhe des Zylinders und U der Umfang der Grundfläche, so berechnet sich die Oberfläche des Zylinders also zu

$$F = 2 \cdot G + h \cdot U.$$

Beispiel 1.4.2



Besser vertraut als dieses Beispiel dürften Ihnen die folgenden speziellen Zylinder sein.

1.4.3

Spezielle Zylinder

- Ein Zylinder, dessen Grundfläche ein Vieleck ist, heißt **Prisma**.
- Ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche heißt **Quader**.
- Ein Quader mit quadratischer Grundfläche, dessen Höhe der Seitenlänge des Grundflächenquadrates entspricht, heißt **Würfel**.
- Ein Zylinder mit einer kreisförmigen Grundfläche heißt **Kreiszylinder**.

1.4.4

- Ein **Kegel** ist durch eine beliebige (ebene) Grundfläche und eine Höhe charakterisiert. Er entsteht, indem man jeden Punkt der Grundfläche mit einer Spitze verbindet, deren Abstand von der Ebene, in der die Grundfläche liegt, der Höhe des Kegels entspricht.
- Das Volumen eines Kegels entspricht einem Drittel des Produkts des Flächeninhalts der Grundfläche mit der Höhe.
- Die Oberfläche eines Kegels setzt sich aus der Grundfläche und der Mantelfläche zusammen. Die Mantelfläche muss für jeden Kegel individuell bestimmt werden.

- Ist in einer sinnvollen Weise ein Mittelpunkt der Grundfläche zu definieren und liegt die Spitze des Kegels senkrecht über diesem Mittelpunkt, so heißt der Kegel *gerade*.
- Ist die Grundfläche eines Kegels ein Vieleck, so nennt man den Kegel auch **Pyramide**.

1.4.5

Eine Kugel vom Radius $R \in \mathbb{R}^+$ hat ein Volumen von $\frac{4}{3} \cdot \pi R^3$.

Aufgaben

Aufgabe 1.4.1
Ein Vierkantschlüssel kommt häufig in Zügen der Deutschen Bahn zum Einsatz. Der Schlüssel besteht aus einem Kreiszylinder, aus dem ein Würfel ausgefräst wurde und auf den eine Halbkugel aufgesetzt ist.

Wieviel Material benötigt man, wenn der Kreiszylinder einen Durchmesser von 2cm hat und doppelt so hoch wie der Würfel ist, sowie eine Seitenfläche des Würfels halb so groß wie die Grundfläche des Kreiszylinders ist?

Lösung:
Bezeichnet $r := 1\text{cm}$ den Radius des Kreiszylinders, a die Kantenlänge des Würfels und h die Höhe des Kreiszylinders, so gilt

$$h = 2a \qquad \text{und} \qquad a^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Damit folgt $a = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot r$ und $h = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot r = \sqrt{2\pi} \cdot r$. Das Volumen des Schlüssels berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \pi r^2 \cdot h - a^2 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 &= \pi r^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot r - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot r \right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi r^3 \\ &= \sqrt{2} \cdot \pi^{\frac{3}{2}} \cdot r^3 - \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^{\frac{3}{2}}}{4} \cdot r^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi r^3 = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2\pi}}{4} + \frac{2}{3} \right) \cdot \pi r^3. \end{aligned}$$

1.5 Zusätzliche Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 1.5.1
In der folgenden Tabelle sind für ein rechtwinkliges Dreieck einige Größen gegeben, berechnen Sie die übrigen Größen. Verwenden Sie für die Winkel stets das Bogenmaß:

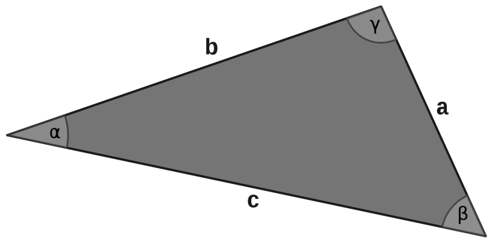


Abbildung 1: Winkel erhalten die griechischen Buchstaben zu den gegenüberliegenden Seiten (Lizenz)

a	b	c	α	β	γ	$\sin(\alpha)$	$\sin(\beta)$	$\sin(\gamma)$
1	1	1	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\frac{1}{2}\pi$	$\square$	$\square$	$\square$
3	4	$\square$	$*$	$*$	$\frac{1}{2}\pi$	$\square$	$\square$	$\square$
$\square$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\square$	$*$	$*$	1	$\square$	$\square$
$\square$	$\square$	9	$\square$	$\square$	$\square$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$*$

Die mit $*$ gekennzeichneten Felder müssen nicht ausgefüllt werden.

<u>Lösung:</u>
Die ausgefüllte Tabelle lautet wie folgt:

a	b	c	α	β	γ	$\sin(\alpha)$	$\sin(\beta)$	$\sin(\gamma)$
1	1	1	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
3	4	5	$*$	$*$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	1
$\sqrt{15}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\frac{1}{2}\pi$	$*$	$*$	1	$\sqrt{8/15}$	$\sqrt{7/15}$
$\frac{9}{\sqrt{3}}$	$\frac{9}{\sqrt{3}}$	9	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$*$

In der dritten Zeile benutzt man den rechten Winkel $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, der über den Satz von Pythagoras auf $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ führt. Das Dreieck ist gleichschenklig, also auch $\alpha = \beta$. Da die Winkelsumme im Dreieck π beträgt, muss $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$ sein. In den beiden letzten Lösungsfeldern ist dann $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

In der vierten Zeile ist das Dreieck rechtwinklig bei $\gamma = \pi$ und der Satz des Pythagoras führt auf $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Aus den Seiten kann man die Sinuswerte der Winkel bestimmen: $\sin(\alpha) = \frac{4}{5}$, $\sin(\beta) = \frac{3}{5}$ und $\sin(\gamma) = 1$.

In der fünften Zeile ist das Dreieck wieder rechtwinklig, diesmal aber bei $\alpha = \pi$, daher spielen die Seiten nun andere Rollen: a ist die Länge der Hypothenuse. Der Satz des Pythagoras in dieser Situation liefert $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{15}$. Da alle Seiten vorliegen, können wir wieder die Winkel bestimmen (jetzt mit a als Hypothenuse): $\sin(\alpha) = 1$, $\sin(\beta) = \sqrt{\frac{8}{15}}$ und $\sin(\gamma) = \sqrt{\frac{}{15}}$.

In der letzten Zeile rechnet man aus $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = \frac{1}{2}$ die Winkel $\alpha = \beta = \frac{1}{6}\pi$ aus. Wegen der Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ folgt $\gamma = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$. Dieses Dreieck ist gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig, wir dürfen die trigonometrischen Funktionen daher nicht direkt an den Seiten ansetzen. Als Hilfmittel kann man die Höhe auf der Seite c benutzen, die das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke einteilt:

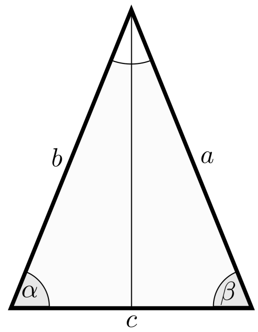


Abbildung 2: Einteilung eines gleichschenkligen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Im linken Teildreieck gibt es einen rechten Winkel, dort ist nun b die Hypothenuse und Ankathete von α besitzt die bekannte Länge $\frac{9}{2}$. Wir wissen auch $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, damit kann man nach b auflösen:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \;=\; \cos(\frac{1}{6}\pi) \;=\; \frac{\text{Ankathete im Teildreieck}}{\text{Hypothenuse im Teildreieck}} \;=\; \frac{\frac{9}{2}}{b} \;\Rightarrow\; b \;=\; \frac{9}{\sqrt{3}}\,.$$

und weil das ursprüngliche Dreieck gleichschenklig ist gilt auch $a = \frac{9}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 1.5.2
Ein Quadrat mit Seitenlänge a sei gegeben. Geben Sie Formeln an für Flächeninhalt und Umfang des größtmöglichen Kreises innerhalb des Quadrats, sowie für den kleinstmöglichen Kreis, der das Quadrat enthält:

a. Umfang des Kreises im Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

b. Flächeninhalt des Kreises im Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

c. Umfang des Kreises um das Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

d. Flächeninhalt des Kreises um das Quadrat in Abhängigkeit von der Seitenlänge a:

Lösung:
Der mittig im Quadrat liegende Kreis besitzt den Radius $r = \frac{1}{2}a$, die halbe Seitenlänge des Quadrats, folglich besitzt er den Umfang $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{1}{2}a = \pi a$ und den Flächeninhalt $\pi r^2 = \pi \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$.

Befindet sich das Quadrat dagegen mittig innerhalb des Kreises, so ist sein Radius die Hälfte der Länge der Diagonalen vom Quadrat. Diese besitzt die Länge $d = \sqrt{2} \cdot a$. Dies folgt aus dem Satz von Pythagoras, da die halbe Quadratdiagonale ein rechtwinkliges Dreieck bildet mit Seitenlänge d der Hypothenuse und den beiden Katheten mit Längen $\frac{1}{2}a$:

(Bild Quadratkante)

Also ist der Umfang $2\pi r = 2\pi \cdot \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}\pi a$, der Flächeninhalt ist $\pi r^2 = \pi \cdot 2a^2 = 2\pi a^2$.

Aufgabe 1.5.3
Ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge $a = 2$ habe die Höhe $h = 10$, welchen Volumeninhalt besitzt dieses Prisma?

Antwort: Volumeninhalt ist ☐, die Oberfläche ist ☐.

Lösung:
Das gleichseitige Dreieck besitzt die Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a = \sqrt{3}$ und damit den Flächeninhalt $G = \frac{1}{2}ah = \sqrt{3}$. Es besitzt den Umfang $U = 3a = 6$. Folglich besitzt das Prisma den Volumeninhalt $V = G \cdot h = 10\sqrt{3}$ sowie die Oberfläche $A = 2 \cdot G + h \cdot U = 2\sqrt{3} + 10 \cdot 6 = 2\sqrt{3} + 60$.

Aufgabe 1.5.4
Ein Kegel habe die folgende Grundfläche:

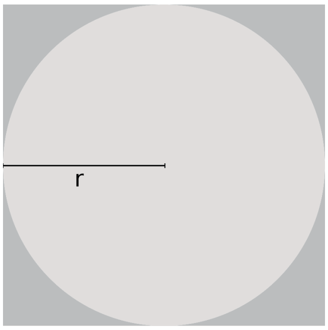


Abbildung 3: Aus einem Quadrat mit Seitenlänge $2r$ wurde der Inkreis mit Radius r ausgeschnitten. (Lizenz)

Bestimmen Sie das Volumen des durch diese Grundfläche entstehenden Kegels zur Höhe h jeweils separat mit den folgenden Ansätzen:

a. Einfachere Kegel separat ausrechnen:
   Das Volumen des Kegels zum Quadrat (ohne Loch) mit Höhe h ist ☐. Das Volumen des Kegels zum Inkreis (ohne das Quadrat) ist ☐. Schneidet man den zweiten Kegel aus dem ersten aus, so bleibt der Volumeninhalt ☐ übrig.

b. Grundfläche für den Gesamtkegel berechnen:
   Die in Abbildung 3 skizzierte Grundfläche ist die Grundfläche des Quadrats ☐ abzüglich

der Grundfläche [ ] des Kreises. Sie besitzt die Gesamtfläche [ ] . Der Kegel darüber hat also das Volumen [ ] .

Lösung:
Beide Lösungsansätze führen zum gleichen Ergebnis:

a. Einfachere Kegel separat ausrechnen:
Das Volumen des Kegels zum Quadrat (ohne Loch) mit Höhe h ist $\frac{4}{3} \cdot h \cdot r^2$. Das Volumen des Kegels zum Inkreis (ohne das Quadrat) ist $\frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot r^2$. Schneidet man den zweiten Kegel aus dem ersten aus, so bleibt der Volumeninhalt $\frac{1}{3}(4-\pi) \cdot h \cdot r^2$ übrig.

b. Grundfläche für den Gesamtkegel berechnen:
Die in der Abbildung skizzierte Grundfläche ist die Grundfläche des Quadrats $4r^2$ (Radius ist halbe Seitenlänge) abzüglich der Grundfläche πr^2 des Kreises. Wir erhalten die Grundfläche $G = (4-\pi) \cdot r^2$. Der Kegel darüber hat also das Volumen $\frac{1}{3} \cdot h \cdot G = \frac{1}{3}(4-\pi) \cdot h \cdot r^2$.

Aufgabe 1.5.5
Ein Kegelstumpf habe die Kreisradien $a = 3$ und $b = 2$ sowie die Höhe $h = 4$. Welches Volumen besitzt der Kegelstumpf?

Antwort: Volumen ist [ ] .
Lösung:
Einsetzen in die Formel für das Volumen ergibt $V = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2) = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot (3^2 + 3 \cdot 2 + 2^2) = \frac{76}{3} \cdot \pi$.

Aufgabe 1.5.6
Ein Kegelstumpf kann beschrieben werden durch die Radien a und b der Kreisflächen sowie die Höhe h. Berechnen Sie aus diesen Größen die Länge m der Mantellinie mit Hilfe der Skizze und indem Sie ein rechtwinkliges Dreieck einteilen:

Die Mantellinie hat die Länge $m =$ [ ]

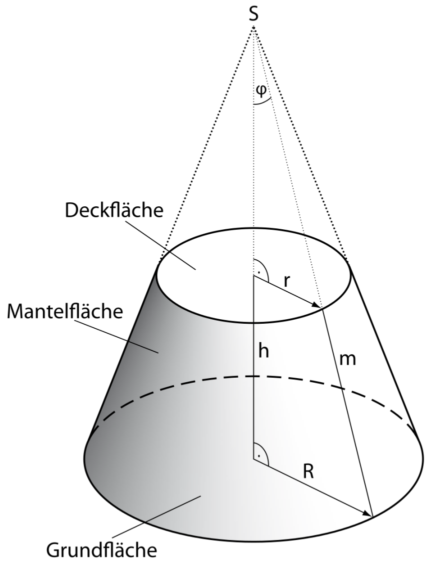


Abbildung 4: Größen im Kegelstumpf

Lösung:
Ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck entsteht, indem man das Lot vom Start der Mantellinie auf den unteren Radius fällt:

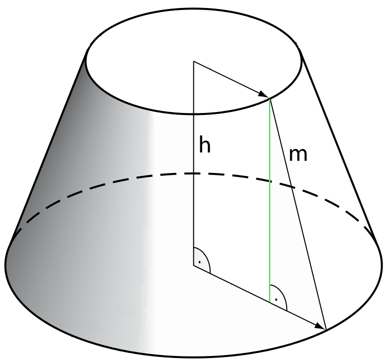


Abbildung 5: Lot auf untere Kreisfläche im Kegelstumpf

Die horizontale Kathete hat die Länge $a - b$ (falls a der größere Radius ist, tatsächlich funktioniert die Rechnung aber auch im umgekehrten Fall), die vertikale Kathete hat die Länge h. Der Satz von Pythagoras mit in diesem Dreieck lautet $m^2 = h^2 + (a - b)^2$, folglich ist $m = \sqrt{h^2 + (a - b)^2}$.

Aufgabe 1.5.7
Ist die Mantellinie wie in Aufgabe 1.5.6 auf der vorherigen Seite definiert, so ist die Mantelfläche des Kegelstumpfs gegeben durch $M = (R + r) \cdot \pi \cdot m$. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Gesamtoberfläche (bestehend aus Mantelfläche und den beiden Kreisflächen) des Kegelstumpfs mit Radien $a = 10$, $b = 6$ und $h = 3$.

Antwort: Die Gesamtfläche ist $\boxed{}$.

Lösung:
Die Mantellinie hat mit der Formel aus Aufgabe 1.5.6 auf Seite 41 die Länge $m = \sqrt{h^2 + (a-b)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, die Mantelfläche ist daher $M = (a+b) \cdot \pi \cdot m = (10+6) \cdot \pi \cdot 5 = 80\pi$. Die größere Kreisfläche ist $\pi a^2 = 100\pi$, die kleinere ist $\pi b^2 = 36\pi$, wir haben also als Gesamtoberfläche $A = 80\pi + 100\pi + 36\pi = 216\pi$.

Aufgabe 1.5.8
Ein dünner Ring habe als Querschnitt den Kreisring zwischen den Kreisen mit Radien $r = 2$ und $R = 5$. Welche Länge (bzw. Höhe wenn man ihn als Zylinder auffasst) muss der Ring haben, damit er exakt den Volumeninhalt 1 enthält?

(Bild Ring)

Antwort: Die Höhe ist $\boxed{}$

Lösung:
Der Flächeninhalt des Querschnitts ist die Differenz aus den Flächen des großen und des kleinen Kreises: $A = \pi R^2 - \pi r^2 = 21\pi$. Der Volumeninhalt des Rings zur Höhe h ist Grundfläche multipliziert mit Höhe, also $21\pi \cdot h$, folglich muss man $h = \frac{1}{21\pi}$ nehmen, damit der Ring exakt Volumeninhalt Eins besitzt.

Aufgabe 1.5.9
Ein Würfel mit Seitenlänge a sei gegeben. Geben Sie in Analogie zu Aufgabe 1.5.2 auf Seite 39 Formeln an für Volumeninhalt und Oberfläche der größtmöglichen Kugel innerhalb des Würfels, sowie für die kleinstmögliche Kugel, die den Würfel enthält:

a. Oberfläche der Kugel im Würfel in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

b. Volumeninhalt der Kugel im Würfel in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

c. Oberfläche der Kugel um den Würfel in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

d. Volumeninhalt der Kugel um den Würfel in Abhängigkeit von der Seitenlänge a: $\boxed{}$

Lösung:
Die mittig im Würfel liegende Kugel besitzt den Radius $R = \frac{1}{2}a$, die halbe Seitenlänge des Würfels, folglich besitzt sie die Oberfläche $4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4}a^2 = \pi a^2$ und den Volumeninhalt $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{8}a^3 = \frac{1}{6}\pi a^3$. Befindet sich der Würfel dagegen mittig innerhalb der Kugel, so ist ihr Radius die Hälfte der Länge der Diagonalen vom Würfel. Diese besitzt die Länge $d = \frac{3}{2}a$. Dies folgt aus dem Satz von Pythagoras, da die Würfeldiagonale ein rechtwinkliges Dreieck bildet mit Seitenlänge d der Hypothenuse und den beiden Katheten mit Längen $\frac{1}{2}a$ sowie $\sqrt{2}a$:

(Bild Würfelkante)

Also ist die Oberfläche $4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{9}{4}a^2 = 9\pi a^2$, der Volumeninhalt ist $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{8}a^3 = \frac{9}{2}\pi a^3$.