Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Exponentialfunktion und Logarithmus

6.4.1 Eulersche Funktion

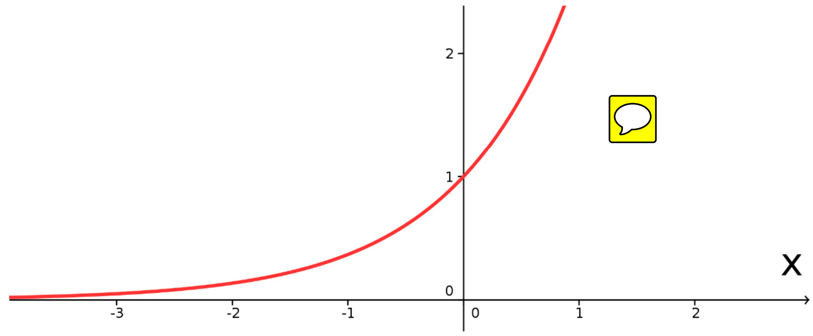
Es gibt eine ganz besondere Exponentialfunktion, manchmal auch als *die* Exponentialfunktion bezeichnet, um die wir uns jetzt kümmern wollen. In der Tat lassen sich, wie wir sehen werden, alle anderen Exponentialfunktionen auf diese besondere Exponentialfunktion zurückführen. Sie besitzt als Basis die **eulersche Zahl** e. Ihr (ungefährer) Wert beträgt

$$e = 2,718281828459045235\ldots \qquad .$$

Betrachten wir also - zunächst ohne irgendwelche zusätzlichen Parameter - den Graphen der Exponentialfunktion,

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & g(x) = e^x \end{array} \qquad ,$$

wegen der Basis e auch e-**Funktion** oder **natürliche Exponentialfunktion** genannt:



Wenig überraschend zeigt auch die e-Funktion das bereits in 6.4.1 diskutierte Verhalten der Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ $(a > 1)$; schließlich haben wir für die Basis ja auch nur einen speziellen Wert, nämlich $a = e$, gewählt. Insbesondere halten wir nochmals fest, dass die e-Funktion streng monoton wachsend ist, sich für große negative x-Werte an die negative x-Achse anschmiegt und für $x = 0$ den Wert 1 annimmt.

Aufgabe 6.4.4

Wie sieht der Graph der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to h(x) = e^{-x}$ aus, und welche generellen Eigenschaften besitzt diese Funktion? Lösung

Eingangs dieses Unterabschnitts haben wir behauptet, dass sich die weiter oben besprochenen Exponentialfunktionen auf die e-Funktion zurückführen lassen. Dies gelingt mit Hilfe der Identität

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)} \qquad ,$$

die für beliebige reelle $a > 0$ und beliebige reelle x gilt. Dabei bezeichnet $\ln$ den natürlichen Logarithmus, dessen Funktionsgestalt im folgenden Abschnitt 6.4.2 noch ausgiebig beschäftigen wird.

Aufgabe 6.4.5

Begründen Sie die Identität $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$. Lösung

Allgemeine e-Funktionen enthalten die bereits in Unterabschnitt 6.4.1 eingeführten Parameter f_0 und λ; ihre funktionale Gestalt sieht also folgendermaßen aus:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

Bei einer Versuchsreihe mit radioaktiven Jodatomen (^{131}I) ergeben sich im Mittel folgende Daten:

Anzahl Jodatome	10000	5000	2500	1250	usw.
Anzahl Tage seit Beginn	0	8,04	16,08	24,12	usw.

Mit anderen Worten: Alle $8,04$ Tage halbiert sich die Anzahl der Jodatome aufgrund radioaktiven Zerfalls; man spricht daher in diesem Zusammenhang davon, dass die Halbwertszeit h von Jod-131 $h = 8,04$ Tage beträgt.

Der radioaktive Zerfall folgt einem Exponentialgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

Unsere Exponentialfunktion heißt hier N; sie gibt die Anzahl der noch vorhandenen Jodatome an. N_0 steht dementsprechend für die Anzahl der Jodatome zu Beginn, also $N_0 = 10000$. Die Veränderliche im vorliegenden Beispiel ist die Zeit t (gemessen in Tagen). Von dem Parameter λ erwarten wir, dass er negativ ist, da es um die Beschreibung eines Zerfallsprozesses, also eines Prozesses mit negativem Wachstum, geht. Wir wollen λ in der Folge aus den Messdaten bestimmen:

Nach $h = 8,04$ Tagen sind nur noch 5000 Jodatome vorhanden, d.h. $N(t = 8,04) = 5000 = \frac{N_0}{2}$. Verwenden wir das Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall, so erhalten wir:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot h}$$

Wir können N_0 auf beiden Seiten der Gleichung kürzen und anschließend logarithmieren (siehe Abschnitt 6.4.2):

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{\lambda \cdot h})$$

Die linke Seite formen wir gemäß den Rechenregeln für den Logarithmus um (siehe Abschnitt 6.4.2), $\ln(1/2) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$. Für die rechte Seite beachten wir, dass Logarithmieren die Umkehrung zum Exponentieren darstellt, $\ln(e^{\lambda \cdot h}) = \lambda \cdot h$:

vorliegenden Fall

$$\lambda \approx -0,0862 \quad \frac{1}{\text{Tage}} \quad .$$

Andere radioaktive Substanzen besitzen andere Halbwertszeiten - Plutonium-239 z.B. weist eine Halbwertszeit von ungefähr 24000 Jahren auf - und führen folglich auf andere Werte für den Parameter λ im Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall.