Onlinekurs Mathematik - Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem - Punkte und Geraden in der Ebene

9.1.1 Funktionsgleichung

Die einfachste Möglichkeit zur Beschreibung einer Geraden ist eine Funktionsgleichung. Dabei benutzt man, dass linear-affine Funktionen eine Gerade als Graph besitzen und schreibt einfach die Funktionsgleichung auf.

Info 9.1.5

Die **Funktionsgleichung** einer Geraden in der Ebene lautet

$$y = f(x) = m \cdot x + b$$

mit

- der **Steigung** m,
- dem **Achsenabschnitt** b,
- und den Koordinaten x und y der Geraden.

Bei dieser Schreibweise beschreibt man die Gerade durch den funktionalen Zusammenhang zwischen den beiden Koordinaten: Ist der Wert für x bekannt, so kann man über die Gleichung den Wert von y ausrechnen. Über die Funktionsgleichung kann man beispielsweise Schnittpunkte ausrechnen, indem man die entsprechenden Gleichungen gleichsetzt. Funktionsgleichungen für Geraden sind linear, daher treten wie in Modul 2 die drei möglichen Lösungstypen auf:

Info 9.1.6

Zwei durch Funktionsgleichungen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$ gegebene Geraden haben

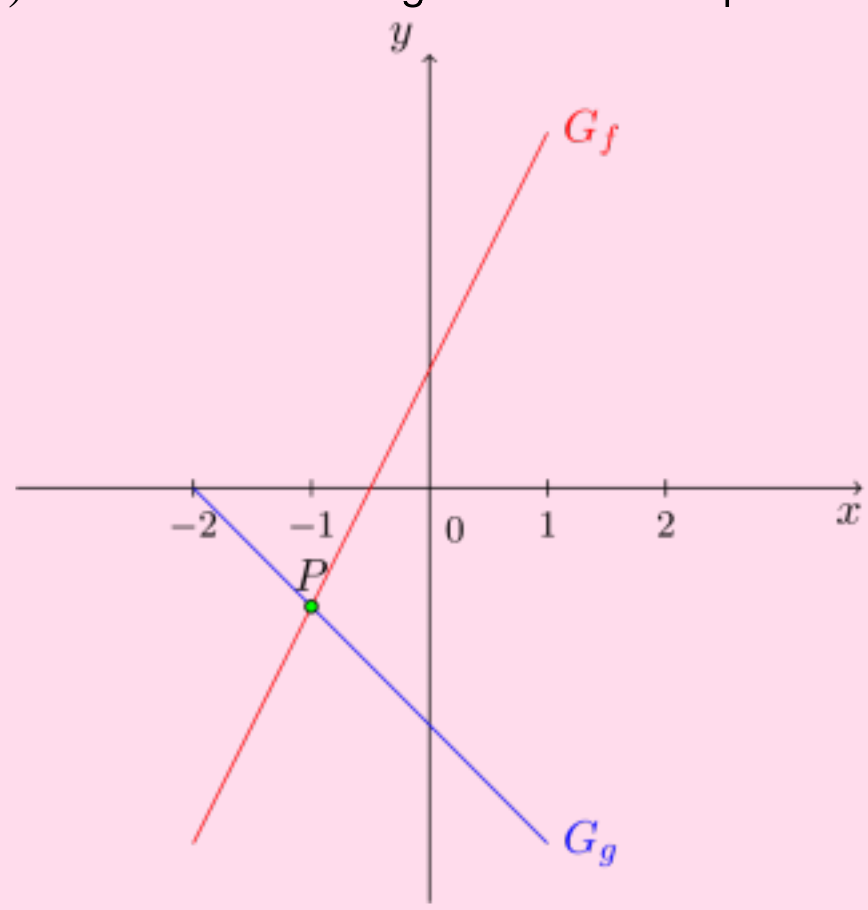
- keinen Schnittpunkt, falls die lineare Gleichung $f(x) = g(x)$ keine Lösung für x besitzt,
- genau einen Schnittpunkt, falls die lineare Gleichung genau eine Lösung x besitzt. Dann ist der Schnittpunkt gegeben durch $P = (x; f(x))$ oder $P = (x; g(x))$,
- unendlich viele Schnittpunkte, falls $f(x) = g(x)$ alle reellen Zahlen x als Lösung besitzt. In diesem Fall sind die beiden Geraden gleich.

Auflösen nach x geschieht wie in Modul 2 durch Isolierung der Unbestimmten x:

Beispiel 9.1.7
Gesucht sei der Schnittpunkt der Geraden $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = -x - 2$. Gleichsetzen und Isolieren von x ergibt

$$\begin{aligned} \text{Start:} \quad 2x + 1 \quad &= \quad -x - 2 \\ \Longleftrightarrow \quad 3x \quad &= \quad -3 \\ \Longleftrightarrow \quad x \quad &= \quad -1 \; . \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $L = \{-1\}$. Einsetzen der gefundenen Koordinate in eine der beiden Funktionsgleichungen ergibt $y = f(-1) = g(-1) = -1$. Also ist der gesuchte Schnittpunkt $P = (-1; -1)$:



Dabei ist der Graph G_f der Funktion $f(x) = 2x + 1$ die Gerade. Im Folgenden trennen wir beide Objekte aber nicht mehr voneinander.

Dabei treten die drei Lösungstypen in den folgenden Fällen auf:

- Falls zwei durch Funktionsgleichungen gegebene Geraden verschiedene Steigungen besitzen, so gibt es genau einen Schnittpunkt.
- Falls zwei Geraden gleiche Steigungen und gleiche Achsenabschnitte besitzen, so handelt es sich um die gleiche Gerade.
- Falls die Steigungen gleich und die Achsenabschnitte aber verschieden sind, so gibt es keinen Schnittpunkt.

Aufgabe 9.1.8
Entscheiden Sie jeweils durch Rechnung, wie die gegebenen Geraden sich schneiden. Kreuzen Sie entsprechend an und tragen Sie die beiden vorhandenen Schnittpunkte der vier Aufgabenteile ein. Skizzieren Sie die Geradenpaare grob.

1. $f(x) = x - 2$ und $g(x) = 2 - x$:
   ☐ ✔ Keinen Schnittpunkt, ☐ ✔ gleiche Geraden, ☐ ✘ einen Schnittpunkt.
2. $f(x) = 1 - x$ und $g(x) = 4 \cdot (3x + 1) - x - 3$:
   ☐ ✔ Keinen Schnittpunkt, ☐ ✔ gleiche Geraden, ☐ ✘ einen Schnittpunkt.

Mit Safari 8.0.5 ist es nicht möglich, etwas anzukreuzen

Wenn zwei Geraden gleich sind, so besitzen sie keinen Schnittpunkt ?

Im ersten Feld ist der Punkt (0;1) und im zweiten Feld der Punkt (2;0) eingetragen worden. Die Reihenfolge ist egal, (2;0) wird stets als richtig, und (0;1) stets als falsch erkannt.

Rechtschreibfehler „unslösbar“

3. $f(x) = 4(x+1) - x - 1$ und $g(x) = 3x - 3$:
   ☐ ✗ Keinen Schnittpunkt, ☐ ✓ gleiche Geraden, ☐ ✓ einen Schnittpunkt.
4. $f(x) = 5x - 2$ und $g(x) = (2x+1) + (3x-3)$:
   ☐ ✓ Keinen Schnittpunkt, ☐ ✗ gleiche Geraden, ☐ ✓ einen Schnittpunkt.

Der erste Schnittpunkt ist [ ] ✗ , der zweite Schnittpunkt ist [ ] ✓ .

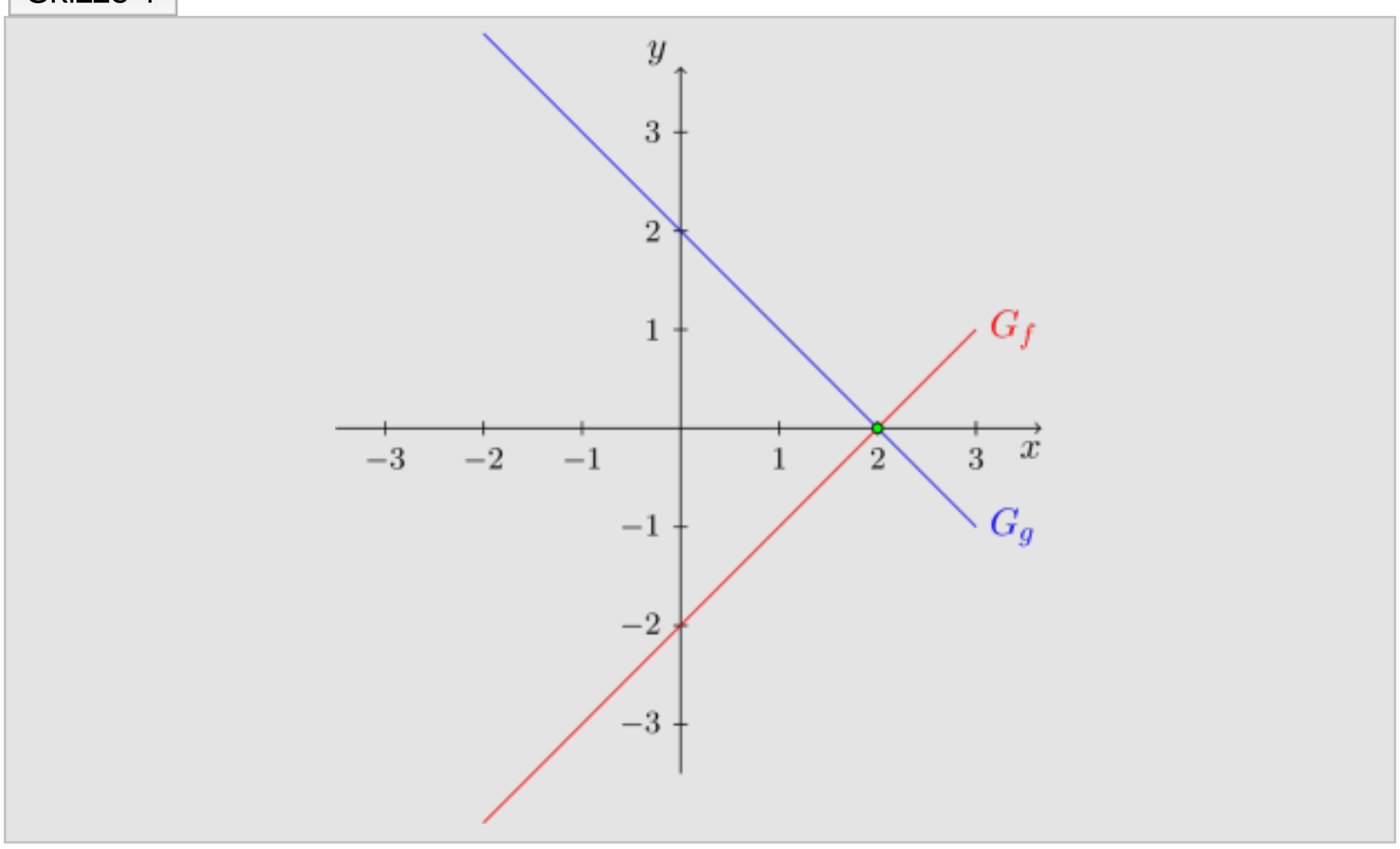
Eingaben kontrollieren

Lösung

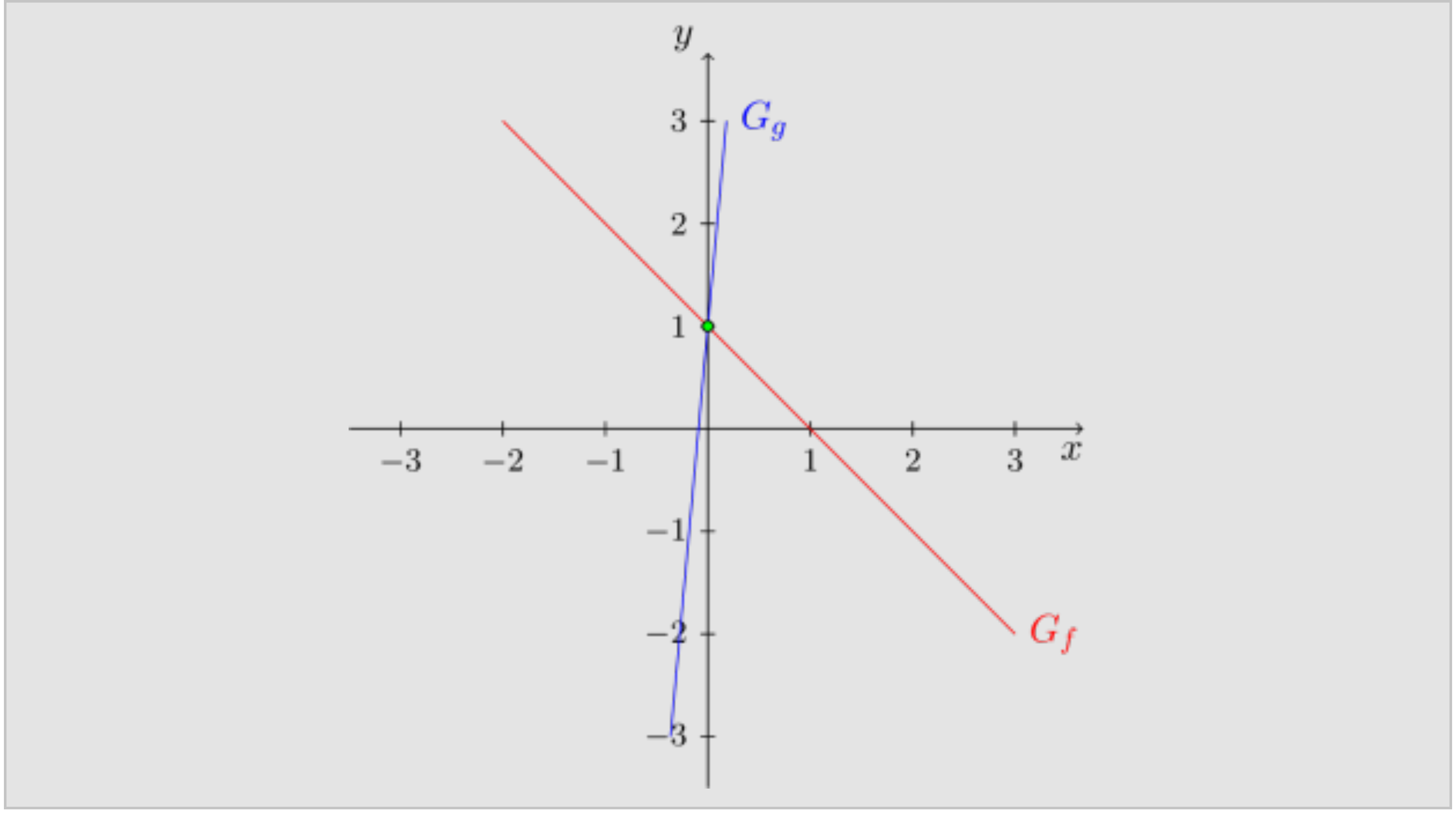
Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen ergibt:

1. Einen Schnittpunkt über
   $$x - 2 = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$
   mit $P = (2; f(2)) = (2; 0)$.
2. Einen Schnittpunkt über
   $$1 - x = 4(3x+1) - x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
   mit $P = (0; f(0)) = (0; 1)$.
3. Diese Geraden besitzen keinen Schnittpunkt, da die Gleichung
   $$4(x+1) - x - 1 = 3x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -6$$
   unslösbar ist.
4. Diese Geraden stimmen überein, da $(2x+1) + (3x-3) = 5x - 2$ ist.

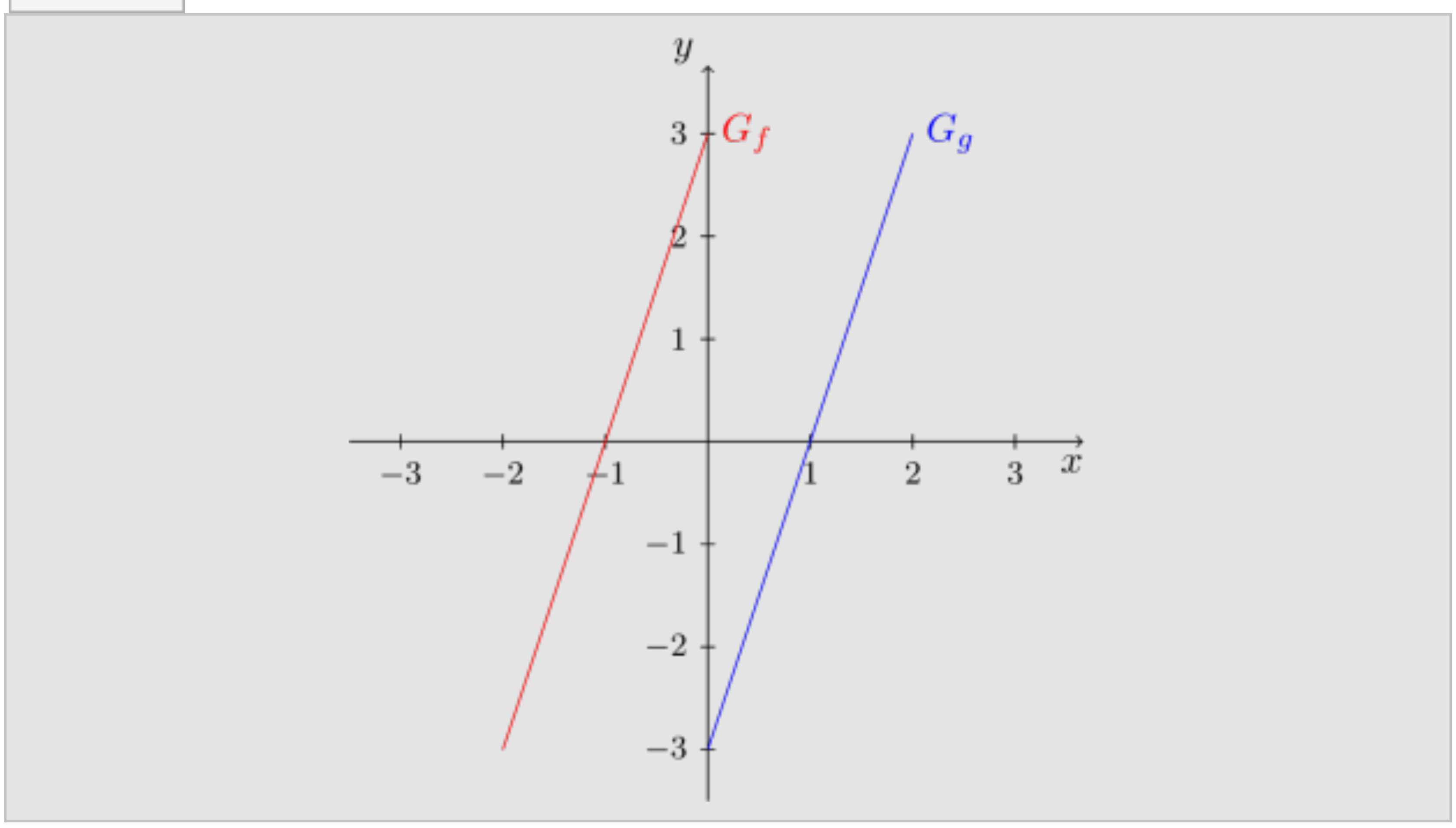
Skizze 1



Skizze 2



Skizze 3



Skizze 4