Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Lineare Funktionen und Polynome

6.2.8 Gebrochenrationale Funktionen

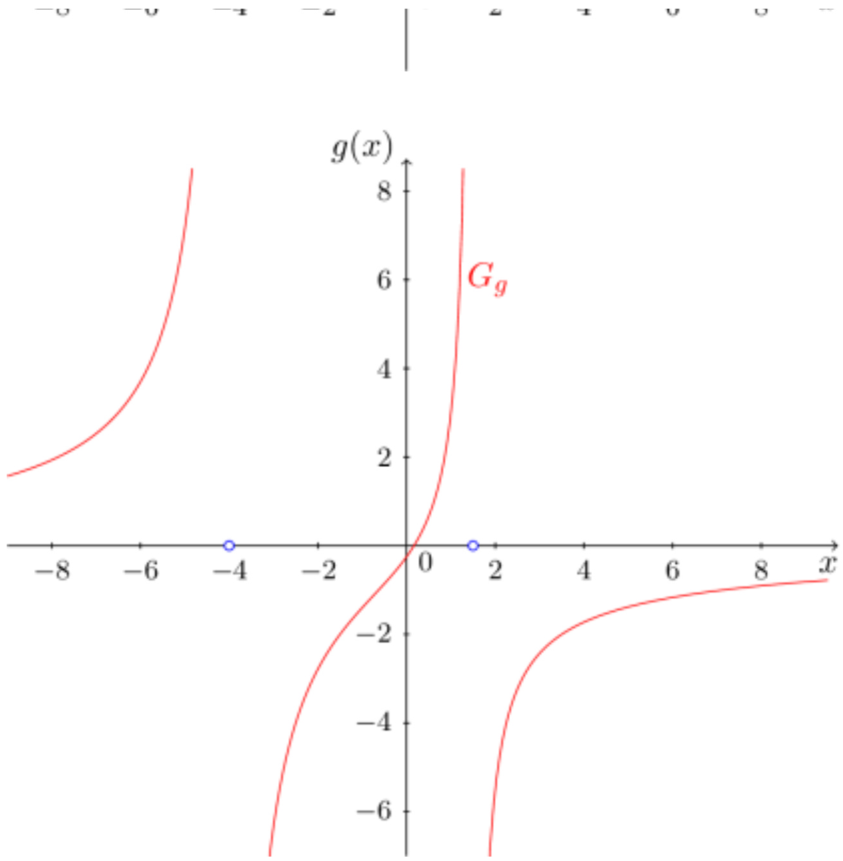
Allgemeine gebrochenrationale Funktionen besitzen Abbildungsvorschriften, die aus dem Quotienten zweier Polynome bestehen. Hier einige Beispiele mit ihren Graphen. Natürlich müssen auch bei diesen Funktionen diejenigen Zahlen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden, für die der Nenner in der Abbildungsvorschrift gleich Null wird.

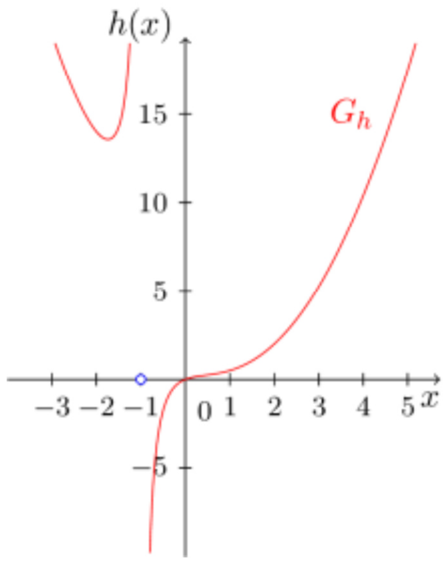
Beispiel 6.2.15

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{8}{x^2+1} \end{cases},$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-4, \frac{3}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-18x+3}{2x^2+5x-12} \end{cases},$$

$$h: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3-x^2+x}{x+1} \end{cases}.$$


$g(x)$
G_g
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8


$h(x)$
G_h
x
15
10
5
−5
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

$$x^2 - \pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\pi}.$$

Damit ist $D_\psi = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\}$.

Aufgabe 6.2.17
Bestimmen Sie für die gebrochen rationalen Funktionen im einführenden Beispiel 6.2.15 jeweils den Zähler- sowie den Nennergrad und berechnen Sie die Nullstellen des Zählers und des Nenners. Lösung

Die Funktion f hat den Zählergrad 0 und den Nennergrad 2. Es gibt keine Zählernullstelle ($8 \neq 0$) und keine Nennernullstelle ($x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung).// Die Funktion g hat den Zählergrad 1 und den Nennergrad 2. Die Zählernullstelle liegt bei $x = -\frac{1}{6}$ ($-18x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{18}$) und die Nennernullstellen $x_{1,2} = -4, \frac{3}{2}$ erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung $2x^2 + 5x - 12 = 0$, zum Beispiel mit Hilfe der Mitternachtsformel.// Die Funktion h hat den Zählergrad 3 und den Nennergrad 1. Die Nennernullstelle liegt einfach bei $x = -1$ ($x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$). Für die Zählernullstellen muss die Gleichung $x^3 - x^2 + x = 0$ gelöst werden. Nach ausklammern von x erhält man $x(x^2 - x + 1) = 0$ und folgert, dass eine Nullstelle bei $x = 0$ liegt. Schließlich muss noch die quadratische Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ mit der Mitternachtsformel gelöst werden. Es ergibt sich hier allerdings eine negative Diskriminante von $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, so dass keine weitere reelle Lösung - und damit keine weitere Nennernullstelle - existiert.

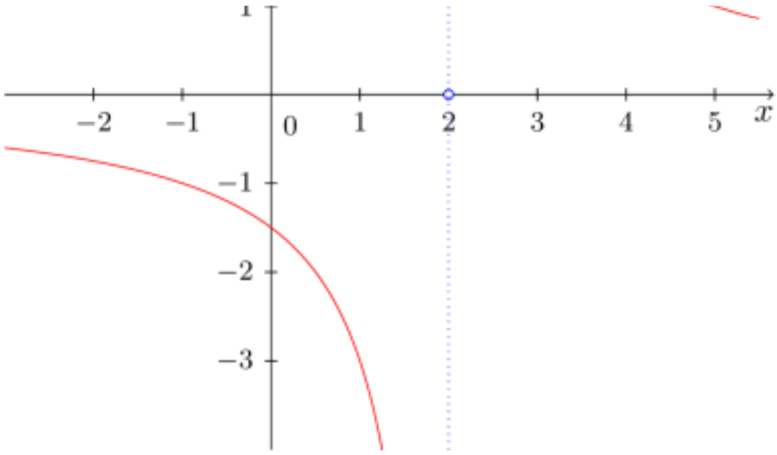
Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion ergeben sich als die Zählernullstellen. So hat zum Beispiel die Funktion zeigen, dass es verschiedene Typen von Polstellen gibt.

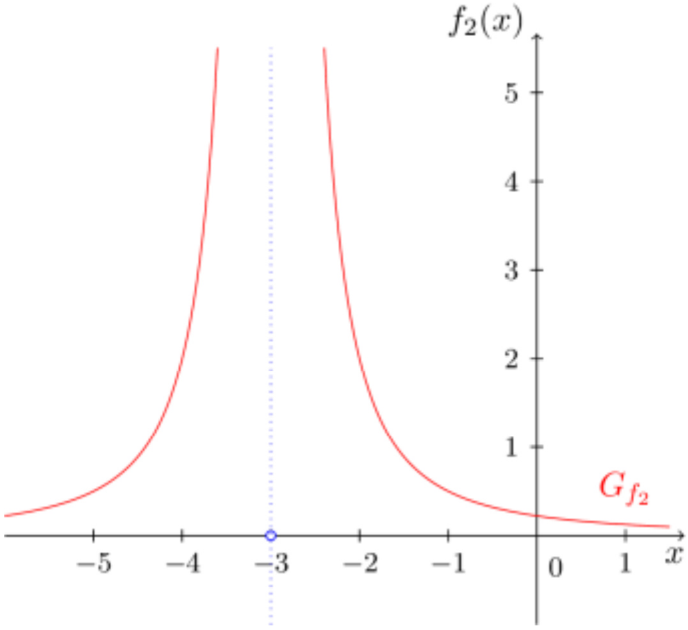
Beispiel 6.2.18

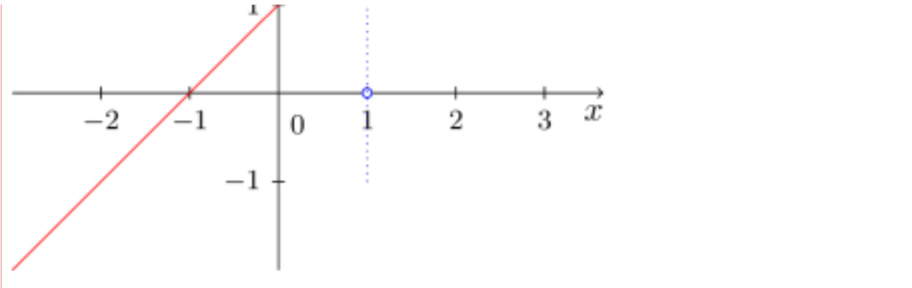
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3}{x-2} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{(x+3)^2} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$$


−2
−1
0
1
2
3
4
5
x
−1
−2
−3


$f_2(x)$
5
4
3
2
1
G_{f_2}
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
x



Die Stellen $x = 2$ und $x = -3$ sind sogenannte echte Polstellen der Funktionen f_1 und f_2, die Stelle $x = 1$ ist eine sogenannte hebbare Definitionslücke der Funktion f_3. Anhand der Graphen wird der Unterschied zwischen diesen Typen von Polstellen deutlich. Bei echten Polstellen wächst oder fällt der Graph in der Nähe der Polstelle unbeschränkt, und bei stetig hebbaren Definitionslücken mündet er von links und rechts in das ,,Loch" im Graphen ein.

Anhand der Abbildungsvorschriften der drei Funktionen kommt dieser Unterschied folgendermaßen zum Ausdruck: Die Werte $x = 2$ und $x = -3$ sind Nennernullstellen, aber keine Zählernullstellen der Funktionen f_1 bzw. f_2. Tatsächlich besitzen f_1 und f_2 gar keine Zählernullstellen. In einem solchen Fall sind die Nennernullstellen immer echte Polstellen.

Aufgabe 6.2.19
Ist die Nennernullstelle der Funktion

$$q : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^4 - 1}{2x - 1} \end{cases}$$

eine echte Polstelle? Wenn ja, warum? Lösung

Ein weitere Unterschied wird zwischen den beiden Polstellen von f_1 und f_2 deutlich. Bei der Polstelle $x = 2$ von f_1 findet

Aufgabe 6.2.20

Bestimmen Sie alle Polstellen/Definitionslücken von

$$\gamma : \begin{cases} D_\gamma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+6}{x^2+x-6} \end{cases},$$

sowie deren Typ. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_\gamma \subset \mathbb{R}$ an. Lösung