1 Integralrechnung

Modulübersicht

Das Modul umfasst folgende Abschnitte:

- Stammfunktionen,
- Bestimmtes Integral,
- Anwendung zur Flächenberechnung,
- Abschlusstest.

1.1 Stammfunktionen

Einführung

Im letzten Kapitel haben wir uns mit Ableitungen von Funktionen beschäftigt. Natürlich stellt sich, wie bei jeder Rechenoperation, auch hier die Frage nach der Umkehrung, so wie die Subtraktion als Umkehrung der Addition aufgefasst werden kann oder die Division als Umkehrung der Multiplikation. Die Suche nach der Umkehrung der Ableitung führt zur Einführung der Integralrechnung und damit zur Stammfunktionsbildung. Der Zusammenhang ist sehr einfach erklärt. Können wir einer Funktion f eine Ableitung f' zuordnen und fassen auch f' als Funktion auf, können wir auch der Funktion f' eine Funktion f zuordnen, indem wir die Operation „Ableitung" rückgängig machen. Wir drehen in diesem Kapitel also die Fragestellung um: Können wir zu einer Funktion f eine andere Funktion finden, deren Ableitung wieder die Funktion f ist?

Die Anwendungen der Integralrechnung sind genauso vielfältig wie die Anwendungen der Differenzialrechnung. Untersuchen wir z.B. in der Physik die Kraft F, die auf einen Körper wirkt, dann können wir unter Verwendung des bekannten Zusammenhangs $F = ma$ (m: Masse des Körpers, a: Beschleunigung des Körpers) zunächst aus der Kraft die Beschleunigung $a = F/m$ berechnen. Interpretieren wir die Beschleunigung als Änderungsrate der Geschwindigkeit $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, dann können wir anschließend die Geschwindigkeit über die Umkehrung der Ableitung – also durch die Integralrechnung – bestimmen. Ähnliche Zusammenhänge lassen sich in vielen Bereichen aus Naturwissenschaften, Technik und auch Wirtschaftswissenschaften finden. So benötigt man die Integralrechnung zur Bestimmung von Flächen, von Schwerpunkten, Biegeeigenschaften von Balken oder zur Lösung sogenannter Differenzialgleichungen, mit denen die meisten Probleme im naturwissenschaftlich-technischen beschrieben werden.

Inhalt

Stammfunktion 1

Gegeben ist eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Wenn es eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ gibt, deren Ableitung gleich f ist, für die also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, dann heißt F eine **Stammfunktion** von f.

Eine Stammfunktion wird auch **unbestimmtes Integral** genannt und in der Form

$$\int f(x)dx = F(x)$$

notiert. Die Sprechweise ist hier: „F ist das Integral über f." Der Zusammenhang zum Integral wird in der Infobox 7 auf Seite 10 zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschrieben.

Sehen wir uns zunächst einige Beispiele an.

Beispiel 1.1.1

Die Funktion $F(x) = -\cos(x)$ hat die Ableitung $F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$. Somit ist

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$.

Beispiel 1.1.2

Die Funktion $G(x) = e^{3x+7}$ hat die Ableitung $G'(x) = 3 \cdot e^{3x+7}$. Deshalb ist

$$\int 3 \cdot e^{3x+7}dx = e^{3x+7}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = 3e^{3x+7}$.

Notieren wir die Beziehung zwischen Ableitung $f = F'$ und Stammfunktion F in der eben besprochenen umgekehrten Sichtweise für die bisher betrachteten Funktionsklassen, ergibt sich die folgende Tabelle:

Eine kleine Tabelle von Stammfunktionen 2

Funktion f	Eine Stammfunktion F dazu ist:
$f(x) = 0$	$F(x) = C$ für eine Zahl $C \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \sin(kx)$	$F(x) = -\frac{1}{k}\cos(kx)$ für eine Zahl $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \cos(kx)$	$F(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$ für eine Zahl $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \tan(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k}e^{kx}$ für eine Zahl $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$

In der ersten Zeile in obiger Tabelle steht, dass $F(x) = C$ eine Stammfunktion zu $f(x) = 0$ ist. Klar, denn die Ableitung einer konstanten Funktion ist die Nullfunktion. Aber woher kennen wir den Wert dieser Konstanten C? Schließlich ist die Ableitung jeder beliebigen konstanten Funktion die Null. So gilt z.B. für $F(x) = 3$ und für $G(x) = 5$, dass $F' = G' = 0$ ist. Ist nur nach einer Stammfunktion von $f(x) = 0$ gefragt, ohne dass weitere Forderungen getroffen werden, ist die Stammfunktion eine ganz beliebige Konstante C. Andere Möglichkeiten, als dass es sich um irgendeine *konstante* Funktion handelt, gibt es nicht.

Haben die Funktionen F und G dieselbe Ableitung $f = F' = G'$, dann ist $G'(x) - F'(x) = 0$. Bilden wir nun auf beiden Seiten der Gleichung die Stammfunktion, dann erhalten wir den Zusammenhang $G(x) - F(x) = C$. Somit ist $G(x) = F(x) + C$. Haben wir also mit $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ gefunden, dann ist auch $G(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Aussage über Stammfunktionen 3

Wenn F und G Stammfunktionen von $f : D \to \mathbb{R}$ sind, dann gibt es eine Zahl C, sodass

$$F(x) = G(x) + C \qquad \text{für alle } x \in D$$

gilt. Hierfür schreibt man auch

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

um auszudrücken, wie sämtliche Stammfunktionen von f aussehen.

Beispiel 1.1.3

Die Funktion $F(x) = 5x^2 - 6x$ hat die Ableitung $F'(x) = 10x - 6$. Somit wird durch

$$\int (10x - 6)dx = 5x^2 - 6x + C$$

die Gesamtheit der Stammfunktionen von $f(x) = 10x - 6$ beschrieben, wobei C für eine beliebige reelle Zahl steht.

Beispielsweise ist auch $G(x) := 5x^2 - 6x - 7$ eine Stammfunktion von $f(x) = 10x - 6$, denn es ist $G'(x) = 5 \cdot 2x - 6 = f(x)$.

Aus der obigen Tabelle zu Stammfunktionen ergibt sich die Gesamtheit aller Lösungen dann jeweils durch die Addition einer Konstanten:

Eine kleine Tabelle von Stammfunktionen – zweite Version 4

Funktion	Stammfunktionen
$f(x) = 0$	$F(x) = \int 0dx = C$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = \int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
$f(x) = \sin(kx)$	$F(x) = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
$f(x) = \cos(kx)$	$F(x) = \frac{1}{k}\sin(kx) + C$
$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \int (1 + \tan^2(x)dx = \tan(x) + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = \int e^x dx = e^x + C$
$f(x) = e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k}e^{kx} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$

Hier bezeichnen k und C beliebige reelle Zahlen.

In Tabellenwerken wird auf die Angaben der Konstanten oft verzichtet. In einer Rechnung ist es allerdings wichtig, anzugeben, dass es mehrere Lösungen geben kann. Bei der Lösung anwendungsbezogener Probleme wird die Integrationskonstante C häufig durch die Angabe weiterer Bedingungen festgelegt.

Ein praktischer Hinweis 5

Die Überprüfung, ob wir die Stammfunktion einer vorgegebenen Funktion f richtig gebildet haben, ist sehr einfach. Wir bestimmen die Ableitung unserer gefundenen Stammfunktion und vergleichen diese mit der ursprünglich vorgegebenen Funktion f. Stimmen beide überein, war unsere Rechnung richtig. Stimmt das Ergebnis der Probe nicht mit der Funktion f überein, müssen wir unsere Stammfunktion noch einmal überprüfen.

Aufgaben

Aufgabe 1.1.1

Geben Sie eine Stammfunktion an:

a. $\displaystyle\int \left(12x^2 - 4x^7\right) dx = \boxed{}$

b. $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\, dx = \boxed{}$

c. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1} dx = \boxed{}$

Aufgabe 1.1.2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a. $\displaystyle\int |x| dx = \boxed{}$.

b. $\displaystyle\int e^{x+0.5} dx = \boxed{}$

c. $\displaystyle\int 3x\sqrt[4]{x} dx = \boxed{}$

Aufgabe 1.1.3

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

a. $f(x) := \frac{1+x+x^2+\sqrt{x}}{x}$,

b. $g(x) := 4 + \left(\frac{4\cos^2 x}{(2\sin x)^2}\right)^{-1}$,

c. $h(x) := \frac{2}{4+(2x)^2}$,

nachdem Sie die Funktionsterme vereinfacht haben:

a. Mit der Vereinfachung $f(x) \;=\; \boxed{}$
ergibt sich $F(x) \;=\; \boxed{}$ für $x > 0$.

Lösung:
Die Funktion lässt sich zu $f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + x^{-\frac{1}{2}}$ vereinfachen, was auf

$$F(x) \;=\; \ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} \;=\; \ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x}$$

führt (bis auf eine Konstante).

b. Mit der Vereinfachung $g(x) \;=\; \boxed{}$
ergibt sich $G(x) \;=\; \boxed{}$.

Lösung:

Die Funktion lässt sich zu $g(x) = 4 + \tan(x)^2$ vereinfachen, was auf

$$G(x) \;=\; 3x + \tan(x)$$

führt (bis auf eine Konstante).

c. Mit der Vereinfachung $h(x) \;=$ [ ]
ergibt sich $H(x) \;=$ [ ] .

Lösung:
Die Funktion lässt sich zu $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ vereinfachen, was auf

$$H(x) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \arctan(x)$$

führt (bis auf eine Konstante).

Aufgabe 1.1.4
Finden Sie Polynome $p(x)$ und $q(x)$, sodass F und G mit $F(x) = p(x) + x \cdot \ln(x)$ bzw. $G(x) = q(x) + x \cdot \ln(x)$ Stammfunktionen von $f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ sind. Dann ist $F(x) - G(x)$ ein Polynom vom Grad [ ] , und es gilt $F'(x) =$ [ ] .

Aufgabe 1.1.5
Angenommen $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 1 + x^2$ und besitzt den Wert $F(0) = 1$, dann ist $F(3) =$ [ ] .

1.2 Bestimmtes Integral

Einführung

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion f beschreibt, wie sich die Funktionswerte „in der Nähe" der Stelle x_0 ändern: Die Ableitung bietet eine lokale Sichtweise auf die Funktion. Dadurch gewinnt man sehr viele Detailinformationen.

Umgekehrt erhält man eine „globale Kenngröße", wenn man die Funktionswerte gewichtet aufsummiert. Diese Idee führt auf das sogenannte **Riemann-Integral**.

1.2.1 Integral

Das Integral einer Funktion kann als „Fläche unter der Kurve" interpretiert werden. In dem nach Riemann benannten Integral wird der Funktionsverlauf durch eine Treppenfunktion angenähert, und die Funktionswerte werden, gewichtet mit der jeweiligen Intervalllänge bzw. „Breite einer Treppenstufe", aufsummiert. Dies ist in der unten gezeigten Abbildung dargestellt.

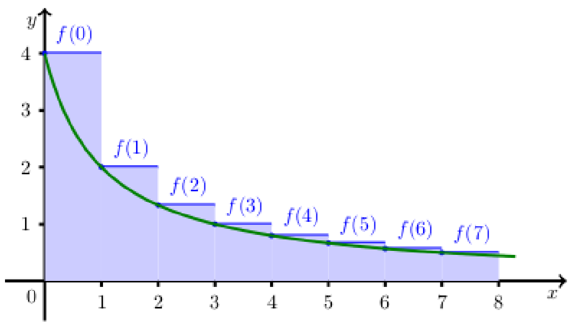


Abbildung 1.1: Zur Definition des Integrals: Funktion angenähert durch eine Treppenfunktion, unterteilt in acht Teilintervalle.

Wir erkennen, dass die Fläche unter der Kurve zunächst durch Rechtecke angenähert wird, deren eine (horizontale) Seitenlänge durch ein Intervall auf der x-Achse bestimmt wird, während die Länge der zweiten (vertikalen) Seite durch den Funktionswert am linken Rand des dazu gehörenden x-Intervalls beschrieben wird. Wir bestimmen nun die Flächen dieser Rechtecke und summieren diese Teilflächen auf. Je kleiner die Intervalle auf der x-Achse werden, umso mehr nähert sich die so berechnete Summe dem „wahren" Wert der Fläche unter der Kurve, also dem Integral der Funktion, an.

Formal heißt das, dass wir eine Summe S_n der Form

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta(x_k) \qquad \text{mit } \Delta(x_k) := x_{k+1} - x_k$$

bestimmen. In unserem Beispiel teilen wir das Intervall $[0, 8]$ in acht gleich große Teile ein. Dabei sind $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, $x_7 = 7$ und $x_8 = 8$. Wenden wir darauf diese

Summenformel an, erhalten wir

$$\begin{aligned} S_8 &= f(x_0)\cdot(x_1-x_0)+f(x_1)\cdot(x_2-x_1)+f(x_2)\cdot(x_3-x_2)+f(x_3)\cdot(x_4-x_3) \\ &\quad +f(x_4)\cdot(x_5-x_4)+f(x_5)\cdot(x_6-x_5)+f(x_6)\cdot(x_7-x_6)+f(x_7)\cdot(x_8-x_7) \\ &= f(x_0)\cdot(1-0)+f(x_1)\cdot(2-1)+f(x_2)\cdot(3-2)+f(x_3)\cdot(4-3) \\ &\quad +f(x_4)\cdot(5-4)+f(x_5)\cdot(6-5)+f(x_6)\cdot(7-6)+f(x_7)\cdot(8-7) \\ &= f(x_0)\cdot 1+f(x_1)\cdot 1+f(x_2)\cdot 1+f(x_3)\cdot 1+f(x_4)\cdot 1+f(x_5)\cdot 1+f(x_6)\cdot 1+f(x_7)\cdot 1 \end{aligned}$$

Leider ist dieser Vorgang nicht immer so einfach wie in unserem Beispiel und die Intervalllänge nicht immer 1. Die Intervalllänge soll schließlich gegen Null gehen, um einen möglichst genauen Wert der Fläche zu berechnen.

Integral 6

Gegeben ist eine Funktion $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall $[a;b]$. Dann nennen wir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{1.1}$$

das **bestimmte Integral** von f mit der Untergrenze a und der Obergrenze b.

Als Beispiel wird das Integral von $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ berechnet, wobei die Berechnung des Grenzwertes im Vordergrund steht.

Beispiel 1.2.1

Wir wollen das Integral von $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ berechnen. Dazu teilen wir das Intervall $[0,1]$ in Teilintervalle $[x_k,x_{k+1}]$ mit $x_0:=0$ und $x_k:=x_{k-1}+\frac{1}{n}$ ein. Die Intervalllänge ist also $\Delta(x_k)=x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n}$.

Untersuchen wir die Intervalllänge auf ihr Verhalten für n gegen unendlich, dann sehen wir, dass $\Delta(x_k)$ immer kleiner wird und gegen Null strebt. Die Voraussetzung für die Berechnung eines bestimmten Integrals ist also gegeben.

Für die Werte x_k finden wir unter Zuhilfenahme der Intervallänge außerdem $x_k=\frac{k}{n}$ und damit auch $f(x_k)=x_k=\frac{k}{n}$

Setzen wir diese Ergebnisse in die Summenformel ein, dann erhalten wir unter der Verwendung von $\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$ („kleiner Gauß“)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Und mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ergibt sich für das Integral

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Eine große Klasse von Funktionen ist integrierbar: alle Polynome, rationale Funktionen, trigonometrische und Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie deren Verknüpfungen.

Um Rechnungen möglichst unkompliziert durchführen zu können, sind möglichst einfache Regeln zur Integration von Funktionen nötig. Ein wichtiges Ergebnis liefert uns der sogenannte **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**. Er beschreibt einen Zusammenhang zwischen den Stammfunktionen einer Funktion und deren Integral.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 7

Gegeben ist eine Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall $[a; b]$. Besitzt f eine Stammfunktion, dann gilt für jede Stammfunktion F von f

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(b) - F(a).$$

Als einfaches Beispiel berechnen wir das bestimmte Integral der Funktion f mit $f(x) = x^2$ zwischen $a = 1$ und $b = 2$. Mit den Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir diese Aufgabe sehr leicht lösen.

Beispiel 1.2.2

Die Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ hat nach der Tabelle aus dem ersten Abschnitt eine Stammfunktion F mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Damit ist

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}\,2^3 + C\right) - \left(\frac{1}{3}\,1^3 + C\right) = \frac{7}{3}.$$

Wie wir sehen, fällt die Konstante nach dem Einsetzen der Grenzen weg, sodass wir sie in der Praxis bei der Berechnung von bestimmten Integralen bereits bei der Bilduns der Stammfunktion „unterschlagen“ können.

1.2.2 Rechenregeln

Zerlegung eines Integrals 8

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt für jede Zahl z zwischen a und b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^z f(x)dx + \int_z^b f(x)dx$$

Mit der Regeln, dass

$$\int_d^c f(x)dx := -\int_c^d f(x)dx$$

gilt die obige Regel für alle reellen Zahlen z, für die die beiden rechts stehenden Integrale existieren, auch wenn z nicht zwischen a und b liegt.

Die Rechenregel ist praktisch, um Funktionen mit Beträgen oder andere abschnittsweise definierte Funktionen zu integrieren.

Beispiel 1.2.3

Das Integral der Funktion $f : [-4; 6] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist

$$\begin{aligned}\int_{-4}^6 |x|dx &= \int_{-4}^0 (-x)dx + \int_0^6 xdx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 \\ &= (0-(-8)) + (18-0) \\ &= 26\end{aligned}$$

Die Integration über die Summe zweier Funktionen kann ebenfalls in zwei Integrale zerlegt werden:

Summen- und Faktorregel 9

Seien f und g auf $[a; b]$ integrierbare Funktionen und r eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{1.2}$$

Für Vielfache einer Funktion gilt

$$\int_a^b r \cdot f(x)dx = r \cdot \int_a^b f(x)dx \tag{1.3}$$

Auch für die Berechnung eines Produktes zweier Funktionen gibt es eine Rechenregel.

Partielle Integration 10

Sei f' eine auf $[a;b]$ integrierbare Funktion und g eine auf $[a;b]$ differenzierbare Funktion, dann gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx,$$

wobei f die Stammfuktion von f' ist und g' die Ableitung der Funktion g. Diese Rechenregel ist als **partielle Integration** bekannt.

Sehen wir uns auch zu dieser Regel ein Beispiel an:

Beispiel 1.2.4

Wir berechnen das Integral

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$

unter Verwendung der partiellen Integration. Dazu wählen wir die Funktionen

$$f'(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = x$$

und erhalten die für die partielle Integration nötigen Funktionen

$$f(x) = -\cos x \quad \text{und} \quad g'(x) = 1.$$

So können wir das gesuchte Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x dx &= [(-\cos x) \cdot x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \cdot 1 dx \\ &= (-\cos \pi) \cdot \pi - 0 + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= -(-1) \cdot \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi \end{aligned}$$

Die Zuordnung der Funktionen f' und g muss zielführend erfolgen. Probieren Sie, dieses Beispiel zu lösen, indem Sie f' und g anders herum wählen!

1.2.3 Eigenschaften des Integrals

Für ungerade Funktionen $f : [-c, c] \to \mathbb{R}$ ist das Integral Null. Sehen wir uns dies am Beispiel der Funktion f auf $[-2; 2]$ mit $f(x) = x^3$ an:

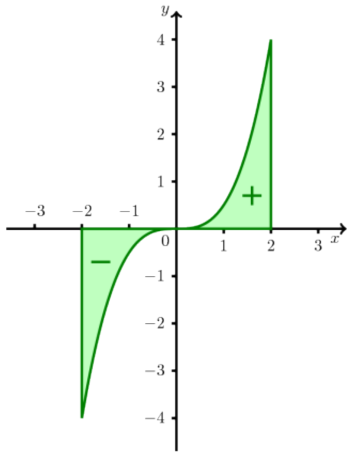


Abbildung 1.2: Ungerade Funktion $f(x) = x^3$ auf einem Intervall $[-2, 2]$.

Teilen wir den Graphen von f in zwei Teile zwischen -2 und 0 bzw. 0 und 2 ein und untersuchen die Teilflächen, die der Graph in beiden Bereichen mit der x-Achse einschließt. Wir können die beiden Teilflächen durch eine Punktspiegelung ineinander überführen. Beide Teilflächen sind gleich groß. Bilden wir jeweils die Riemann-Summen, dann stellen wir fest, dass Flächen, die unterhalb der x-Achse liegen, im Integral einen negativen Wert annehmen. Wenn wir also die beiden hier abgebildeten Teilflächen addieren, um das Integral über den gesamten Bereich von -2 bis 2 zu berechnen, erhält die Fläche über der positiven x-Achse einen positiven Wert, während die Flache unterhalb der negativen x-Achse gleich groß ist, aber einen negativen Wert annimmt. Die Summe der Beiden Teilflächen ist also Null. Für ungerade Funktionen f gilt die Regel:

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = 0 \, .$$

Im Fall einer geraden Funktion $g : [-c, c] \to \mathbb{R}$ ist der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse ist hier symmetrisch bezüglich der y-Achse. Die Teilfläche links davon ist also das Spiegelbild der rechts liegenden Fläche. Beide zusammen ergeben die Gesamtfläche.

$$\int_{-c}^{c} g(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{c} g(x)dx \, .$$

In sehr vielen Situationen wird die Berechung eines Integrals einfacher, wenn wir den Integranden vor der Integration in eine bekannte Form bringen. Diese Umformungen wollen wir uns im Folgenden an einigen Beispielen ansehen. Im ersten Beispiel untersuchen wir Potzenfunktionen.

Beispiel 1.2.5

Versuchen wir, das Integral

$$\int_1^4 (x-2)\cdot\sqrt{x}dx$$

zu berechnen. Um die Rechnung zu vereinfachen, formen wir den Integranden um:

$$(x-2)\cdot\sqrt{x} = x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

Damit können wir das Integral einfacher lösen:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x-2)\cdot\sqrt{x}dx &= \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{4}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 1\right) \\
&= \left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{62}{5} - \frac{28}{3} \\
&= 3 + \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Am nächsten Beispiel führen wir die Umformung eines Integranden mit trigonometrischen Funktionen durch.

Beispiel 1.2.6

Wir bestimmen das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\tan(x)}dx,$$

indem wir die Definition der Tangensfunktion ausnutzen. Damit erhalten wir die Umformung

$$\frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \frac{\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \cos(x),$$

sodass wir das Integral schließlich auf sehr einfache Art und Weise lösen können:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\tan(x)}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-(-1) = 2.$$

Ist bei einer rationalen Funktion der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms, führen wir zunächst eine Polynomdivision (siehe Modul **??** auf Seite ??) durch. Je nach Situation können sich auch noch weitere Umformungen (z.B. Partialbruchzerlegung) anbieten, die wir in weiterführender Literatur und Formelsammlungen finden können. Im folgenden Beispiel führen wir eine Polynomdivision durch, um eine rationale Funktion zu integrieren.

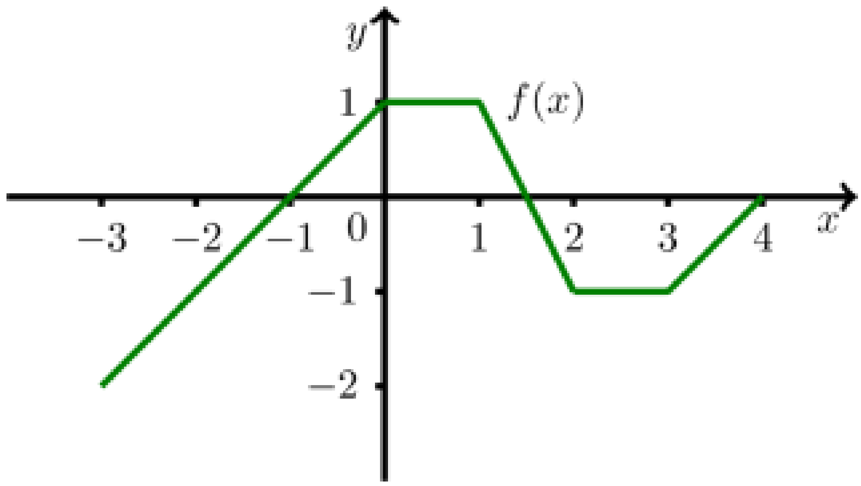
Beispiel 1.2.7

Wir berechnen das Integral
$$\int_{-1}^{1} \frac{4x^2 - x + 4}{x^2+1} dx.$$
Dazu formen wir zunächst den Integranden mittels Polynomdivision zu
$$\frac{4x^2 - x + 4}{x^2+1} = 4 - \frac{x}{x^2+1}$$
um. Damit ist dann
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{4x^2 - x + 4}{x^2+1} dx &= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} 4dx - \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1} dx = [4x]_{-1}^{1} - 0 = 8. \end{aligned}$$
Denn der Integrand des zweiten Integrals ist eine ungerade Funktion und im Integrationsintervall $[-1, 1]$ punktsymmetrisch, sodass der Wert des zweiten Integrals Null ist.

Aufgaben

Aufgabe 1.2.1

Berechnen Sie zu $f : [-3; 4] \to \mathbb{R}$ mit dem unten dargestellten Graphen das Integral $\int_{-3}^{4} f(x)dx$ mit Methoden aus der Geometrie.



Der Integralwert von

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx$$

ist $\boxed{}$.

Aufgabe 1.2.2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a. $\displaystyle\int_0^5 3dx = \boxed{}$.

b. $\displaystyle\int_0^5 -4dx = \boxed{}$.

c. $\displaystyle\int_0^4 2xdx = \boxed{}$.

d. $\displaystyle\int_0^4 (4-x)\,dx = \boxed{}$.

Aufgabe 1.2.3

Der Wert des Integrals

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(5x^3 - 4\sin(x)\right) dx$$

ist $\boxed{}$.

Aufgabe 1.2.4
Berechnen Sie eine reelle Zahl z, so dass der Integralwert

$$\int_0^2 \left(x^2 + z \cdot x + 1\right) dx$$

genau Null ergibt: $z\ =$ ☐ .

Lösung:
Nimmt man z als unbekannte Konstante, so ist

$$\int_0^2 \left(x^2 + z \cdot x + 1\right) dx \ = \ \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}zx^2 + x\right]_0^2 \ = \ \frac{8}{3} + 2z + 2\,,$$

also muss man $z = -\frac{14}{6}$ einsetzen.

Aufgabe 1.2.5
Berechnen Sie die Integrale:

a. $\displaystyle\int_{-3}^{2} \left(1 + 6x^2 - 4x\right) dx \ =$ ☐ .

b. $\displaystyle\int_1^9 \frac{5}{\sqrt{4x}} dx \ =$ ☐ .

Lösung:
Der Integrand $f(x) = 1 + 6x^2 - 4x = 6x^2 - 4x + 1$ ist ein Polynom, sodass $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x$ eine Stammfunktion ist. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_0^1 \left(1 + 6x^2 - 4x\right) dx = \left[2x^3 - 2x^2 + x\right]_{-3}^2 = 2(8-4) + 2 - (2(-27-9) - 3) = 85.$$

Beim zweiten Aufgabenteil ist der Integrand $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x}} = \frac{5}{2}x^{-1/2}$ ein Produkt einer Wurzelfunktion mit einem konstanten Faktor. Damit ist $F(x) = 5x^{1/2} = 5\sqrt{x}$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_1^9 \frac{5}{\sqrt{4x}} dx = \left[5\sqrt{x}\right]_1^9 = 5(3-1) = 10.$$

Aufgabe 1.2.6
Der Wert des Integrals

$$\int_{-24}^{-6} \frac{1}{2x} dx$$

ist ☐ .

Lösung:
Zum Integranden $f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ ist $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x|$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_{-24}^{-6} \frac{1}{2x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right]_{-24}^{-6} = \frac{1}{2}\left(\ln|-6| - \ln|-24|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2^2}\right) = -\ln(2).$$

Aufgabe 1.2.7
Berechnen Sie die Integrale

a. $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)dx \;=$ ______ .

b. $\displaystyle\int_{-3}^0 (1-2x)dx \;=$ ______ .

Lösung:
Der Integrand $f(x) = 2x - 1$ ist eine Polynomfunktion. Damit ist $F(x) = x^2 - x$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_0^3 (2x-1)dx = \left[x^2 - x\right]_0^3 = 9 - 3 - 0 = 6.$$

Beim zweiten Aufgabenteil ist der Integrand $f(x) = 1 - 2x$ eine Polynomfunktion. Damit ist $F(x) = x - x^2$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_{-3}^0 (1-2x)dx = \left[x - x^2\right]_{-3}^0 = 0 - (-3 - 9) = 12.$$

Aufgabe 1.2.8
Berechnen Sie das Integral

$\displaystyle\int_\pi^{3\pi} \left(\frac{3\pi}{x^2} - 4\sin(x)\right) dx \;=$ ______ .

Lösung:
Zum Integranden $f(x) = \frac{3\pi}{x^2} - 4\sin(x)$ ist $F(x) = -\frac{3\pi}{x} + 4\cos(x)$ eine Stammfunktion von f. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_\pi^{3\pi} \left(\frac{3\pi}{x^2} - 4\sin(x)\right) dx = \left[-\frac{3\pi}{x} + 4\cos(x)\right]_\pi^{3\pi} = (-1-4) - (-3-4) = 2.$$

Die Funktionen sin und cos haben die Eigenschaft, dass das Integral über eine Periode gleich Null ist. Für andere periodische Funktionen wie zum Beispiel $|\sin(x)|$ können sich für das Integral über eine Periode auch Werte ungleich Null ergeben.

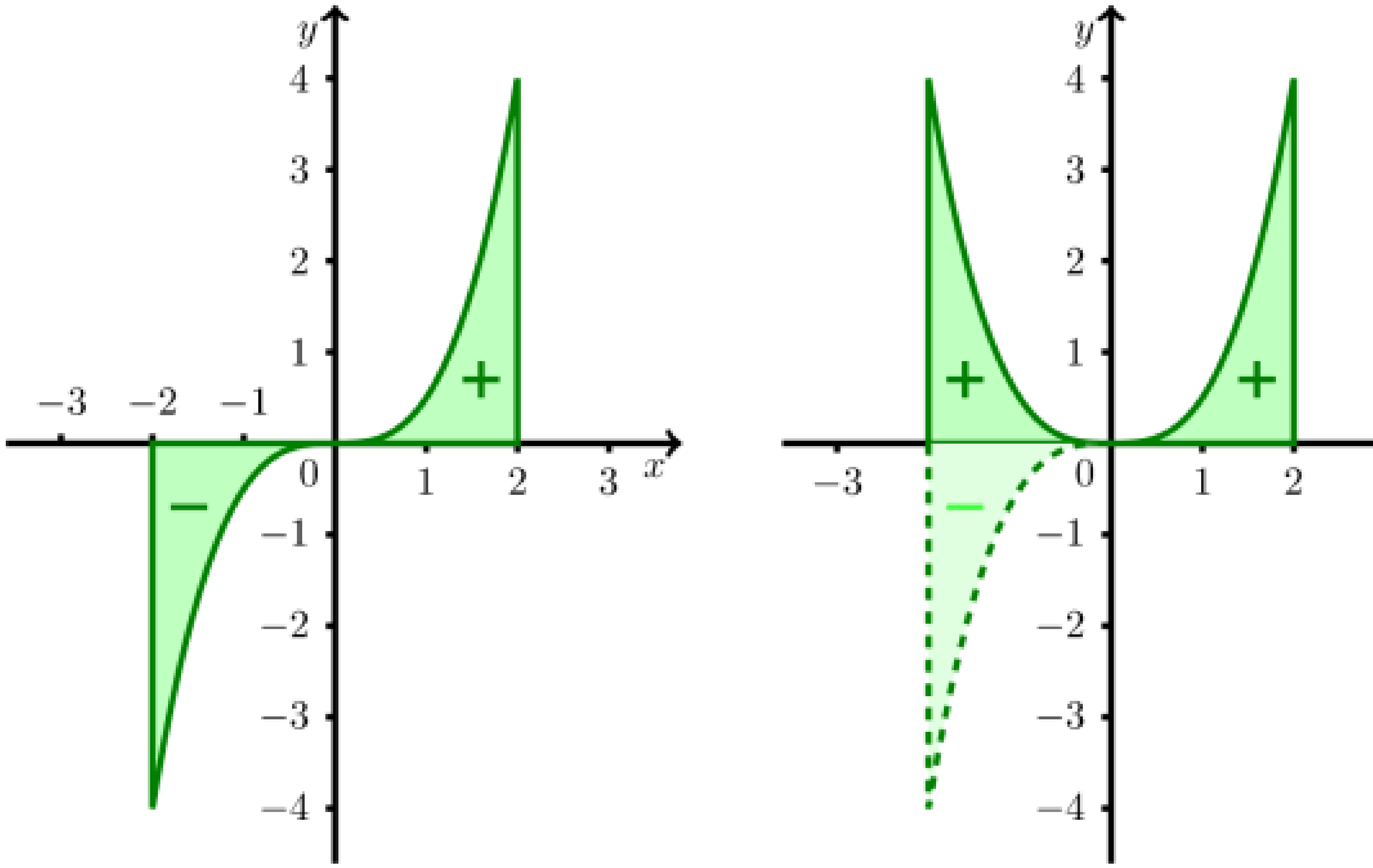
1.3 Anwendungen

Einführung

Die Integralrechnung findet sehr viele Anwendungen, insbesondere in naturwissenschaftlich-technischen Bereichen. Beispielhaft wollen wir uns hier zunächst die Berechnung von Flächen ansehen, deren Ränder durch mathematische Funktionen beschrieben werden können. Auch dies ist keine rein mathematische Anwendung, sondern findet Einsatzmöglichkeiten bei der Bestimmung von Schwerpunkten, von Rotationseigenschaften starrer Körper oder den Biegeeigenschaften von Balken oder Stahlträgern. Zum Abschluss werden wir uns in einigen weiteren physikalisch-technische Anwendungen versuchen.

1.3.1 Flächenberechnung

Eine erste Anwendung der Integrationsrechnung ist die Berechnung von **Flächeninhalten**, deren Ränder von mathematischen Funktionen beschrieben werden können. Zur Veranschaulichung ist in der folgenden Abbildung (linkes Bild) die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ auf dem Intervall $[-2, 2]$ dargestellt. Unser Ziel ist die Berechnung des Flächeninhalts, der vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird. Unsere bisherigen Untersuchungen ergeben, dass das Integral über diese ungerade Funktion in den Grenzen von -2 bis 2 genau Null ergeben wird, da die linke und rechte Teilfläche gleich groß sind, aber bei der Integration unterschiedliche Vorzeichen erhalten. Das Integral entspricht hier also nicht dem Wert des Flächeninhalts. Spiegeln wir jedoch die „negative“ Fläche an der x-Achse, geben der Funktion also ein positives Vorzeichen (rechtes Bild), dann können wir den Flächeninhalt richtig bestimmen. Mathematisch bedeutet das, dass wir nicht das Integral der Funktion f berechnen, sondern das Integral des Betrags $|f|$.



Durch die Bildung des Betrags der Funktion benötigen wir eine Aufteilung des Integrals in die Bereiche mit positivem und negativem Vorzeichen. Für die Berechnung heißt dies, dass wir das Integrationsintervall in Abschnitte zu unterteilen, in denen die Funktionswerte dasselbe Vorzeichen haben.

Flächenberechnung 11

Gegeben ist eine Funktionen $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a; b]$. Weiter seien x_1 bis x_m die Nullstellen von f mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Es werden $x_0 := a$ und $x_{m+1} := b$ gesetzt.

Dann ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse gleich

$$\int_a^b |f(x)|dx = \sum_{k=0}^{m} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \right| .$$

Sehen wir uns dies am oben dargestellten Beispiel etwas genauer an.

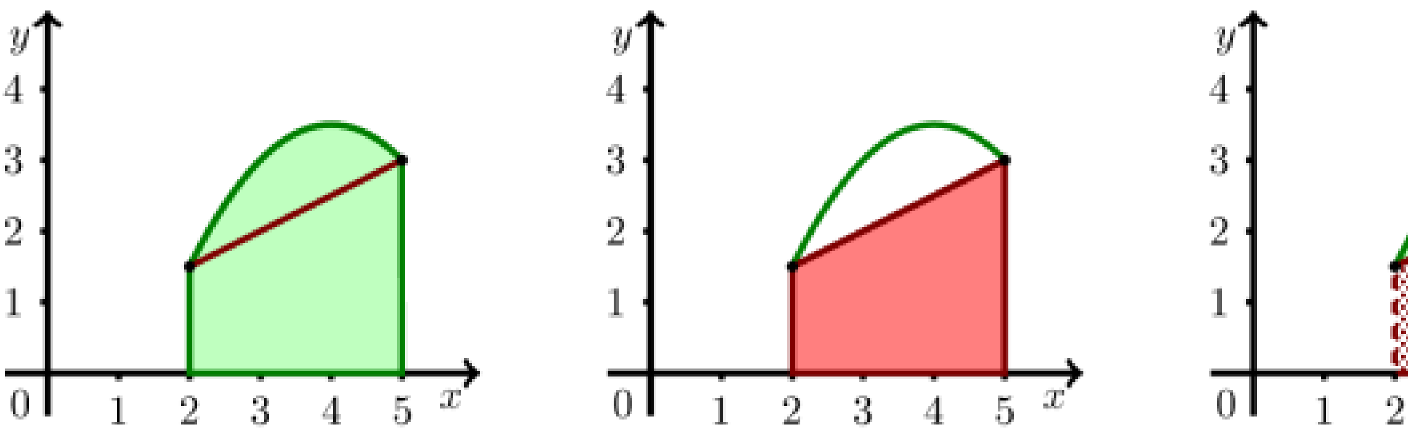
Beispiel 1.3.1

Wir berechnen den Flächeninhalt A, den die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $[-2, 2]$ mit der x-Ache einschließt. Die einzige Nullstelle der gegebenen Funktion finden wir bei $x_0 = 0$. Wir teilen den Integrationsbereich also in die beiden Teilintervalle $[-2, 0]$ und $[0, 2]$ auf und berechnen mit

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left|\frac{1}{2}x^3\right| dx = \left|\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^3 dx\right| + \left|\int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^3 dx\right| \\ &= \left|\left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{8}x^4\right]_{0}^{2}\right| \\ &= |0-2| + |2-0| \\ &= 4 \end{aligned}$$

den Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse zu $A = 4$.

Wir können nicht nur Flächeninhalte zwischen einer Kurve und der x-Achse bestimmen, sondern auch den Inhalt einer Fläche, die von zwei Kurven eingeschlossen wird, wie in der folgenden Abildung veranschaulicht.



Dieses Prizip wollen wir uns ebenfalls zuerst formal und danach an einem Beispiel ansehen.

Flächenberechnung zwischen den Graphen zweier Funktionen 12

Gegeben sind zwei Funktionen $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a; b]$. Weiter seien x_1 bis x_m die Nullstellen von $f - g$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Es werden $x_0 := a$ und $x_{m+1} := b$ gesetzt.

Dann kann der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und dem von g durch

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \sum_{k=0}^{m} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x)) dx \right| .$$

berechnet werden.

Sehen wir uns dies an einem Beispiel an.

Beispiel 1.3.2

Wir berechnen den Inhalt I_A der Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) := 8 - \frac{1}{4}x^4$ für $x \in [-2, 2]$. Zunächst untersuchen wir die Differenz $f - g$ der Funktionen auf ihre Nullstellen hat. Mit

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8 \\ &= \frac{1}{4}\left(x^4 + 4x^2 - 32\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x^4 + 4x^2 + 2^2 - 2^2 - 32\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(x^2 + 2\right)^2 - 36\right) \end{aligned}$$

können wir die reellen Nullstellen von $f - g$ berechnen:

$$\begin{aligned} & \left(x^2 + 2\right)^2 - 36 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x^2 + 2\right)^2 = 36 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2 = 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm 2 \end{aligned}$$

In unserer Rechnung haben nach dem Ziehen der ersten Wurzel auf eine nähere Betrachtung des Falls $x^2 + 2 = -6$ verzichtet, da wir aus der daraus folgenden Gleichung $x^2 = -8$ keine reellen Nullstellen erhalten. Die reellen Nullstellen von $f - g$ sind -2 und 2. Dies sind gleichzeitig auch die Randstellen des Intervalls $[-2, 2]$. Eine Aufteilung des Integrals in verschiedene Bereiche ist also nicht nötig. Damit erhalten wir den Flächeninhalt I_A zu

$$\begin{aligned} I_A = \int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx &= \left| \int_{-2}^{2} \left(x^2 - \left(8 - \frac{1}{4}x^4 \right) \right) dx \right| \\ &= 2 \left| \left[\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 8x \right]_0^2 \right| \\ &= 23 + \frac{7}{15} \\ &= \frac{352}{15}. \end{aligned}$$

1.3.2 Physikalische Anwendungen

Die Geschwindigkeit v beschreibt die momentane Änderungsrate des Ortes zur Zeit t. Es gilt also $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, wenn wir $v = v(t)$ und $s = s(t)$ als Funktionen der Zeit auffassen. Der aktuelle Aufenthaltsort $s(T)$ ergibt sich durch die Umkehrung der Ableitung, also durch die Integration der Geschwindigkeit über die Zeit. Mit dem Anfangswert $s(t = 0) = s_0$ zur Zeit $t = 0$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{ds}{dt} dt &= \int_0^T v dt \\ \Leftrightarrow \quad [s(t)]_0^T &= \int_0^T v dt \\ \Leftrightarrow \quad s(T) - s(0) &= \int_0^T v dt \\ \Leftrightarrow \quad s(T) &= s_0 + \int_0^T v(t) dt. \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel aus der Physik, das Ihnen bekannt sein könnte, ist die Bestimmung der Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg: $W = F_s \cdot s$. Dabei ist F_s die Projektion der Kraft auf die Bewegungsrichtung. Ist die Kraft jedoch wegabhängig, gilt dieses Gesetz nicht mehr in seiner einfachen Form. Um die Arbeit, die z.B. beim Verschieben eines massiven Körpers entlang eines Weges verrichtet wird, zu bestimmen, müssen wir die aufgewendete Kraft dann entlang des Weges vom Anfangspunkt s_1 bis zum Endpunkt s_2 integrieren:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds.$$

Dies sollen nur zwei Beispiele aus dem physikalisch-technischen Bereich sein. Sie werden im Verlauf Ihres Studiums einer ganzen Reihe weiterer Anwendungen der Integration begegnen.

Aufgaben

Aufgabe 1.3.1

Berechnen Sie den Inhalt I_A der Fläche A, die durch den Graphen der Funktion $f : [-2\pi; 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto 3\sin(x)$ und die x-Achse begrenzt wird.

Antwort: $I_A =$ ______ .

Lösung:
Die Nullstellen von $f(x) = 3\sin(x)$ auf $[-2\pi; 2\pi]$ sind -2π, $-\pi$, 0, π und 2π. Da der Graph von f punktsymmetrisch bezüglich der x-Achse ist, ergibt sich der Flächeninhalt mit der folgenden Rechnung zu

$$\begin{aligned}
\int_{-2\pi}^{2\pi} |f(x)| dx &= 3 \cdot \int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(x)|\, dx \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \int_{0}^{2\pi} |\sin(x)|\, dx, \qquad \text{da die Funktion } |\sin| \text{ gerade ist,} \\
&= 6 \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x)\, dx \right) \\
&= 6 \cdot \left([-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \right) \\
&= 6 \cdot ((-(-1) + 1) + (1 - (-1))) \\
&= 24.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.2

Berechnen Sie den Inhalt I_A der Fläche A, die durch die Graphen der Funktionen $f : [0; 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi x)$ und $g : [0; 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 12x - 12x^2$ und eingeschlossen wird.

Antwort: $I_A =$ ______ .

Lösung:
Wir betrachten $f(x) - g(x) = 12x^2 - 12x + \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $[0; 1]$. Die Funktion $f - g$ wird nur an den Rändern des Intervalls $[0; 1]$ gleich Null. Dies können wir mit einer einfachen Überlegung verstehen:

Auf dem Intervall $(0; 1)$ ist die Funktion $g(x) = 12x - 12x^2 = 12x(1 - x)$ immer kleiner als Null, da $1 - x$ in diesem Intervall kleiner als Null ist. Nehmen wir nun die Randwerte des Intervalls hinzu, sehen wir, dass die Funktion g dort ihre Nullstellen hat.

Untersuchen wir hingegen die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ auf demselben Intervall, dann finden wir, dass diese Funktion dort immer positiv ist und ebenfalls an den Rändern ihre Nullstellen besitzt.

Berechnen wir also $f - g$, dann ziehen wir auf dem gesamten offenen Intervall $(0; 1)$ eine negative Zahl von einer positiven Zahl ab, erhalten also durchgehend positive Werte für $f - g$. Nur an den Rändern rechnen wir $0 - 0$ und erhalten dort auch für die Differenz der Funktionen den Wert Null.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt I_A zwischen den Kurven

$$\begin{aligned} I_A &= \left| \int_0^1 \left(12x^2 - 12x + \sin(\pi x)\right) dx \right| \\ &= \left| \left[4x^3 - 6x^2 - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \right]_0^1 \right| \\ &= \left| 4 - 6 + \frac{1}{\pi} - \left(0 - 0 - \frac{1}{\pi}\right) \right| \\ &= |-2 + \frac{2}{\pi}| = 2 - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.3

Berechnen Sie die Arbeit W im Gravitationsfeld $F : [1;\infty) \to \mathbb{R}, r \mapsto F(r) := -\gamma \cdot \frac{m}{r^2}$ längs des Weges $[1;4]$ in Abhängigkeit der gegebenen Masse m und der Gravitationskonstanten γ.

Antwort: $W =$ $\boxed{}$.

Lösung:

Die Arbeit W längs des Weges ist

$$\begin{aligned} W = \int_1^4 F(r)dr &= \int_1^4 -\gamma \cdot \frac{m}{r^2} dr \\ &= \left[\gamma \cdot \frac{m}{r} \right]_1^4 \\ &= \gamma \cdot m \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1} \right) \\ &= -\gamma \cdot \frac{3m}{4} \end{aligned}$$

1.4 Abschlusstest

Abschlusstest Kapitel 4

Aufgabe 1.4.1
Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion:

a. $\int 3\sqrt{x}dx = \boxed{}$

b. $\int \left(2x - e^{x+\pi}\right) dx = \boxed{}$

Aufgabe 1.4.2
Die Funktion $f(x) := \frac{1}{x+1}$ ist für $x \geq 0$ streng monoton $\boxed{}$. Somit gilt

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k+1} \cdot (k+1-k) \; \boxed{} \; \int_0^8 \frac{1}{x+1} dx.$$

Aufgabe 1.4.3
Berechnen Sie die Integrale:

$$\int_0^3 x \cdot \sqrt{x+1} dx = \boxed{} \quad \text{und} \quad \int_\pi^{\frac{3\pi}{4}} 5\sin(3\pi - 4x) dx = \boxed{}$$

Aufgabe 1.4.4
Es gilt:

$$2\int_{\boxed{}}^4 |x^3| dx = \int_{-4}^4 |x^3| dx \; \boxed{} \; \left| \int_{-4}^4 x^3 dx \right|$$

Aufgabe 1.4.5
Berechnen sie den Inhalt I_A der Fläche A, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g auf $[-3; 2]$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = 6 - x$ eingeschlossen wird.

Antwort: $I_A = \boxed{}$