1 Differentialrechnung

Modulübersicht

Das Modul umfasst folgende Abschnitte:

- Eingangstest,
- Ableitung einer Funktion,
- Ableitung elementarer Funktionen,
- Rechenregeln,
- Eigenschaften,
- Anwendungen,
- Zusammenfassung,
- Ausgangstest.

1.1 Eingangstest

Einführung

Der Test umfasst Aufgaben zu den Inhalten dieses Moduls. Das unverbindliche Ergebnis ist Grundlage einer Empfehlung, ob und in welcher Weise die Inhalte des Moduls bearbeitet werden sollen.

Test

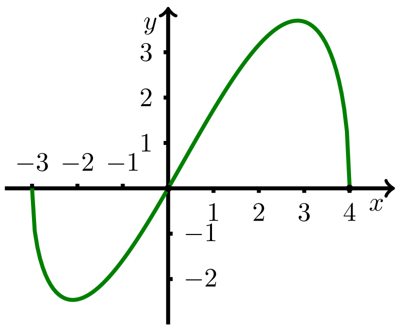
Dies ist ein interaktiver Test:

- Im Gegensatz zu den Aufgaben im Lernmodul werden beim Eingeben keine Hinweise zur Formulierung der mathematischen Ausdrücke gegeben.
- Der Test merkt sich die Eingabe, kann aber jederzeit neu gestartet oder verlassen werden.
- Der Test kann durch die Buttons am Ende der Seite beendet und ausgewertet, oder komplett zurückgesetzt werden.
- Der Test kann mehrfach probiert werden, es zählt immer das letzte Ergebnis.
- Nach Auswertung des Tests können durch Klick auf die Eingabefelder Hinweise eingesehen werden.

Aufgabe 1.1.1
Ein Lieferwagen, dessen Kilometerzähler 20 km anzeigt, startet seine Tour um sechs Uhr. Er erreicht sein Ziel vier Stunden später. Der Kilometerzähler zeigt jetzt 280 km. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit v , also die mittlere Änderungsrate zwischen Start- und Zielort. Setzten Sie dazu die fehlenden Zahlen und mathematischen Symbole $+$, $-$, $\cdot$, $/$ in die folgende Rechnung ein:

$$v = \left(280 \; \square \; \square\right) \; \square \; \left(\square - 6\right) = \square$$

Aufgabe 1.1.2
Gegeben ist die Funktion $f : [-3; 4] \to \mathbb{R}$, deren Graph hier gezeichnet ist.



a. In $x_1 = 4$ ist die Ableitung $\square$ gleich 0, $\square$ nicht definiert, $\square$ unendlich.

b. In $x_2 = 0$ ist die Ableitung $\square$ positiv, $\square$ gleich 0, $\square$ negativ.

Aufgabe 1.1.3
Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{5x}{3+x^2}$, und geben Sie Ihr Resultat gekürzt und zusammengefasst an:

a. Erste Ableitung $f'(x) =$ $\square$

b. Zweite Ableitung $f''(x) =$ [ ]

Aufgabe 1.1.4
In welchen Bereichen ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{\ln x}{x}$ für $x > 0$ monoton fallend beziehungsweise monoton wachsend? Geben Sie Ihre Antwort in Form möglichst großer offener Intervalle $(c; d)$ an (hier steht `infty` für ∞):

a. f ist auf [ ] onoton wachsend.

b. f ist auf [ ] onoton fallend.

Welche der Stellen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ oder $x_3 = 6$ gehören zu einem Bereich, in dem f konvex ist?

Antwort: [ ]

1.2 Ableitung

Einführung

Es wird erläutert, in welcher Weise die Ableitung einer Funktion beschreibt, wie stark sich die Funktionswerte ändern. Die Ableitung wird im Folgenden zunächst anhand der analytischen Frage eingeführt, den Verlauf der Funktionswerte „näherungsweise" durch eine ganz einfache Funktion, nämlich eine Gerade, zu beschreiben.

Dadurch soll eine erste Idee vermittelt werden, weshalb Eigenschaften von Funktionen so einfach mittels ihrer Ableitung beschrieben werden können. Zudem haben Sie hier die Gelegenheit, Fragestellungen der Analysis in einem anschaulichen Kontext kennen zu lernen, die auch für weitergehende mathematische Betrachtungen und auch für naturwissenschaftlich-technische Anwendungen relevant sind.

1.2.1 Zur Idee der Ableitung als Maß für die Änderungsrate der Funktionswerte

Gegeben ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Stelle x_0 zwischen a und b.

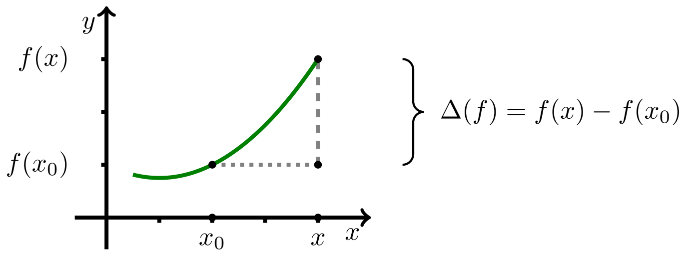
Wir wollen möglichst einfach beschreiben, wie sich die Funktionwerte von f lokal, also in der Nähe einer Stelle x_0, ändern.

Eine Gerade beschreibt in einfacher Weise, wie wir von einem Punkt zu einem anderen kommen können. Sie kann als vereinfachte, aber weiterhin aussagekräftige Beschreibung irgendeines „krummlinigen" Graphen in einer kleinen Umgebung von einem Punkt angesehen werden.

Unser Ziel ist es, eine Gerade g derart zu suchen, dass sich die Funktionswerte und die Änderungsraten von g an f *stetig* annähern, wenn sich die x-Werte an x_0 annähern.

Zuerst überlegen wir uns, wie wir Änderungen beschreiben können. In diesem Kontext wird dann auch die Idee der stetigen Annäherung erläutert.

1.2.2 Absolute Änderung



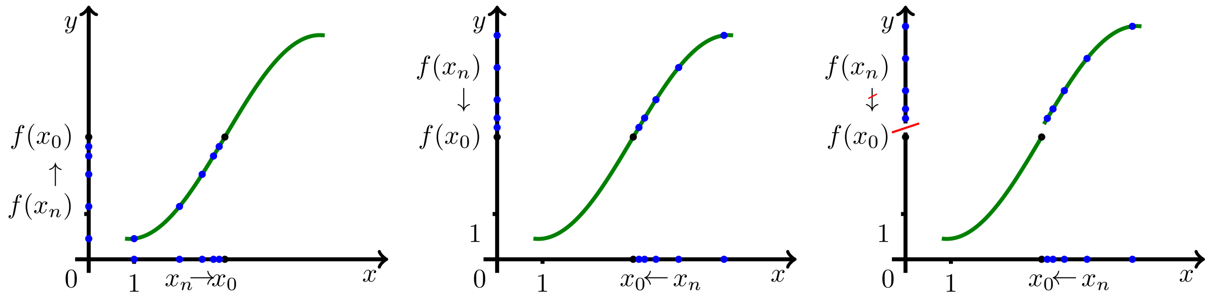
Die Änderung der Funktionswerte zwischen x und x_0 ist

$$\Delta(f) := f(x) - f(x_0).$$

Die Differenz $\Delta(f)$ wird auch **absolute Änderung** von f genannt. Die Differenz $\Delta(f)$ gibt den Unterschied zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ an.

Viele Funktionen f haben die Eigenschaft, dass die Differenz $\Delta(f)$ jedenfalls dann nahezu null ist, wenn nur x nahe genug bei x_0 liegt, das heißt, wenn $x - x_0$ nahezu null ist.

Funktionen mit dieser Eigenschaft heißen (überall) **stetig**, wenn dies für jede Stelle des Definitionsbereichs gilt.



Das linke und das mittlere Bild zeigen eine stetige Funktion: Je näher die x-Werte bei x_0 liegen, desto mehr nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ dem Funktionswert $f(x_0)$ an. Im rechten Bild ist dies nicht der Fall: Die Funktion ist in x_0 nicht stetig, kurz unstetig in x_0.

1.2.3 Relative Änderung

In der obigen Betrachtung der absoluten Differenz $\Delta(f)$ der Funktionswerte wird noch nicht berücksichtigt, wie weit x von x_0 entfernt ist. Der Quotient

$$\frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

beschreibt, wie sich die Funktionswerte von f im *Vergleich* zum Abstand von x zu x_0 ändern.

Der Quotient wird auch **relative Änderung** genannt und wird hier mit **mittlerer Änderungsrate** bezeichnet. Wenn der Grenzwert für $x \to x_0$ exisitert, beschreibt dieser die lokale Änderungsrate:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Grenzwert ist somit ein Maß dafür, wie sich die Funktionswerte in der Nähe von x_0 ändern. Er wird Ableitung von f in x_0 genannt. Wie die Formel mit der ursprünglichen Idee zusammenhängt, den Verlauf der Funktion näherungsweise durch eine Gerade zu beschreiben, sehen wir uns nun an, nachdem alle wichtigen Begriffe vorgestellt wurden.

1.2.4 Ableitung

Gesucht ist eine Gerade $g(x) = m \cdot (x - x_0) + b$, die sich f in x_0 stetig annähert, und zwar

- sowohl mit Blick auf die Funktionswerte
- als auch mit Blick auf die Änderungsraten.

Somit soll $f(x) - g(x)$ in x_0 stetig gegen null streben, also $0 = f(x_0) - g(x_0)$ und damit $b = g(x_0) = f(x_0)$ sein.

Zudem soll die Restfunktion

$$r(x) := \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} - \frac{\Delta(g)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

stetig gegen null streben, wenn $x \to x_0$ strebt.

Mit $g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ und damit $g(x_0) = f(x_0)$ ist

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} - \frac{\Delta(g)}{\Delta(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Multiplikation mit $x - x_0$ führt auf $(x - x_0)r(x) = f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)$, woraus dann

$$f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$$

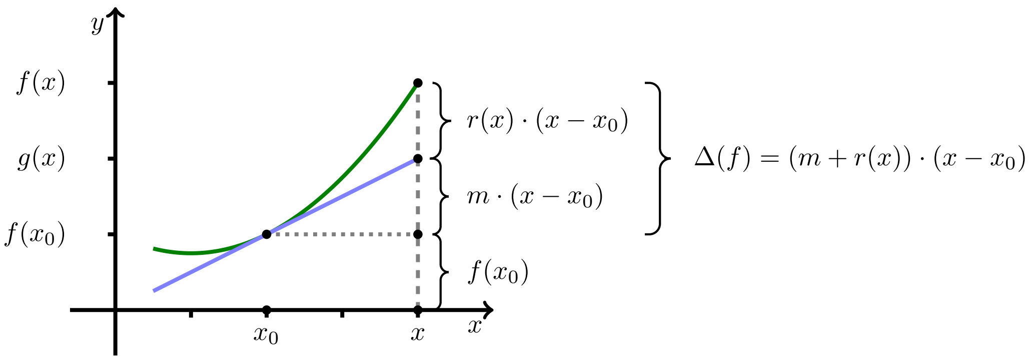
folgt.

Ableitung 1

Wenn es eine in x_0 stetige Funktion r mit $r(x_0) = 0$ und eine Gerade g mit $g(x) = f(x_0)+m(x-x_0)$ derart gibt, dass die Funktion in der Form

$$f(x) = g(x) + r(x) \cdot (x - x_0)$$

geschrieben werden kann, dann heißt f in x_0 **differenzierbar**. Der eindeutige Wert m wird die **Ableitung** von f in x_0 genannt.



Der Wert m ist tatsächlich eindeutig bestimmt, wie folgende Überlegung verdeutlicht: Da r stetig ist, gilt $r(x_0) = r\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = \lim_{x\to x_0} r(x)$ und damit

$$0 = r(x_0) = \lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\right].$$

Hieraus folgt, dass m die eindeutige Zahl $m = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist.

Schreibweisen der Ableitung 2

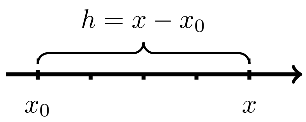
Damit man sich nicht immer so kompliziert ausdrücken muss, wird eine kurze prägnante Schreibweise eingeführt: Der eindeutig bestimmte Wert m wird mit

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) := m \quad \text{oder noch kürzer} \quad f'(x_0) := m$$

bezeichnet.

Die erste Notation wird auch nach Leibniz benannt.

Wenn die Ableitung mittels des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ berechnet werden muss, bietet es sich oft an, den Differenzenquotienten anders aufzuschreiben. Indem die Differenz von x und x_0 mit $h := x - x_0$ bezeichnet wird,



ist wegen $x = x_0 + h$ dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Hier ist nun der Grenzwert für $h \to 0$ zu betrachten, um die Ableitung zu berechnen:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Viele der oft benutzten Funktionen sind differenzierbar, wie im Folgenden erläutert wird.

Die Betragsfunktion $f(x) := |x|$ ist ein einfaches Beispiel dafür, dass eine stetige Funktion nicht unbedingt differenzierbar zu sein braucht.

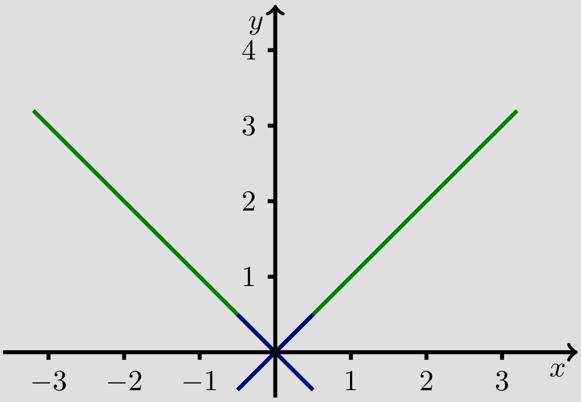
Beispiel 1.2.1

Die Betragsfunktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Wenn nämlich für f an der Stelle $x_0 = 0$ der Differenzenquotient

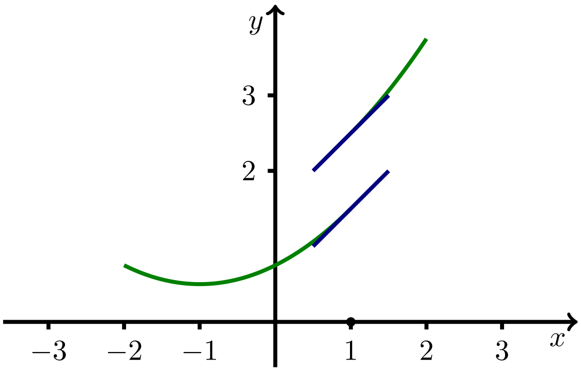
$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

für $h < 0$ betrachtet wird, ergibt sich -1, und für $h > 0$ ist er gleich 1, sodass der Grenzwert für $h \to 0$ nicht existiert und somit die Betragsfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

Der Verlauf des Graphen ändert seine Richtung an der Stelle $(0, 0)$ sprunghaft: Salopp ausgedrückt, weist der Funktionsgraph an der Stelle $(0, 0)$ einen Knick auf.



Auch wenn eine Funktion unstetig ist, besonders wenn sie eine Sprungstelle hat, gibt es keine eindeutige Tangente an den Graphen und somit keine Ableitung.



Aufgaben

Aufgabe 1.2.1
Die Gerade, die durch $g(x) := 4x + 3$ beschrieben wird, hat die Steigung 4 und damit g die Ableitung $g'(x) = 4$. Berechnen Sie die Umkehrabbildung von g, die wieder eine Gerade beschreibt, und geben Sie deren Ableitung an. Was gilt für das Produkt der beiden Ableitungen?

Antwort: Die Umkehrabbildung g^{-1} hat die

a. Funktionsgleichung $(g^{-1})(x) =$ $\boxed{}$ und die

b. Ableitung $(g^{-1})'(x) =$ $\boxed{}$.

Für das Produkt der Ableitungen gilt $g'(x) \cdot (g^{-1})'(x) =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 1.2.2
Berechnen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von $f(x) := 4 - x^2$ für $x_1 = -2$ und für $x_2 = 1$.

Antwort:

a. Der Differenzenquotient von f zu x an der Stelle $x_1 = -2$ ist $\boxed{}$ und hat für $x \to -2$ den Grenzwert $f'(-2) =$ $\boxed{}$.

b. Der Differenzenquotient von f zu x an der Stelle $x_2 = 1$ ist $\boxed{}$ und hat für $x \to 1$ den Grenzwert $f'(1) =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 1.2.3
Erläutern Sie, warum

a. $f(x) := \sqrt{x+3}$ in $x_0 = -3$,

b. $g(x) := 6 \cdot |2x - 10|$ in $x_0 = 5$

nicht differenzierbar ist.

Antwort: Die Ableitung von

a. f existiert an der Stelle $x_0 = -3$ nicht, da der Differenzenquotient $\boxed{}$ für $h \to 0$ nicht konvergiert.

b. g existiert an der Stelle $x_0 = 5$ nicht, da der Differenzenquotient für $h < 0$ den Wert $\boxed{}$ hat, und für $h > 0$ den Wert $\boxed{}$. Somit existiert der Grenzwert für $h \to 0$ nicht.

1.3 Standardableitungen

Einführung

Die meisten der bisher vorgestellten Funktionen wie Polynome, trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion sind differenzierbar. Hier wird ihre Ableitung vorgestellt.

1.3.1 Ableitung von Polynomen

Aus der Einführung der Ableitung ergibt sich für eine Gerade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_1 x + a_0$, wobei a_1 und a_0 gegebene Zahlen sind, dass die Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich $f'(x_0) = a_1$ ist. Wenn beispielsweise $a_1 = 2$ und $a_0 = 1$, dann ist $f(x) = 2x + 1$, und die Ableitung ist $f'(x) = 2$. Denn mit $f(x_0) = 2x_0 + 1$ ist

$$f(x) = 2x + 1 = 2x_0 - 2x_0 + 2x + 1 = f(x_0) + 2(x - x_0) + 0 \cdot (x - x_0).$$

Wird die Restfunktion $r(x) := 0$ eingeführt, sind die Bedingungen zur Differenzierbarkeit erfüllt, und es ist $f'(x_0) = 2$ die Ableitung von f in x_0.

Für Monome x^n mit $n > 1$ ist es am einfachsten, die Ableitung über den Differenzenquotienten zu bestimmen. Damit ergibt sich folgende Aussage:

Ableitung von x^n 3

Gegeben sind eine natürliche Zahl n und eine reelle Zahlen r.

Die konstante Funktion $f(x) := r = r \cdot x^0$ hat die Ableitung $f'(x) = 0$.

Die Funktion $f(x) := r \cdot x^n$ hat die Ableitung

$$f'(x) = r \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel 1.3.1

Es wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x^3$ betrachtet. Mit obigen Bezeichnungen ist $r = 5$ und $n = 3$. Damit erhält man die Ableitung

$$f(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2.$$

Für Wurzelfunktionen ergibt sich eine entsprechende Aussage. Allerdings ist zu beachten, dass Wurzelfunktionen nur für $x > 0$ differenzierbar sind. Denn die Tangente an den Funktionsgraphen durch den Punkt $(0; 0)$ verläuft parallel zur y-Achse und beschreibt somit keine Funktion.

Ableitung von $x^{\frac{1}{n}}$ 4

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ ist die Funktion $f(x) := x^{\frac{1}{n}}$ für $x \geq 0$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \text{ für } x > 0$$

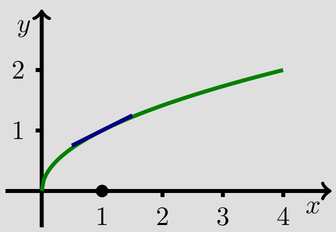
Für $n \geq 2$ haben wir es mit Wurzelfunktionen zu tun. Und natürlich sind die Sonderfälle, die identische Abbildung $g(x) = x$ und $h(x) = x^{-1}$, auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

Beispiel 1.3.2

Die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist für $x > 0$ differenzierbar. Die Ableitung ist durch

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

gegeben.



Die Tangente in $x_0 = 1$ an den Graphen der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ hat die Steigung $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.

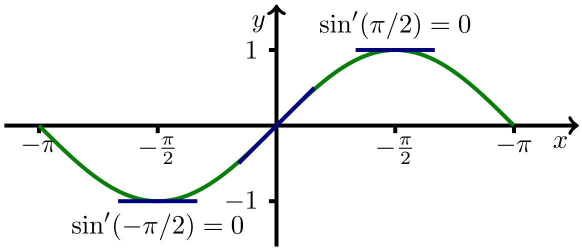
Eine entsprechende Aussage gilt auch für allgemeine Exponenten $p \in \mathbb{R}$ mit $p \neq 0$ für $x > 0$: Die Ableitung von $f(x) = x^p$ für $x > 0$ ist

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

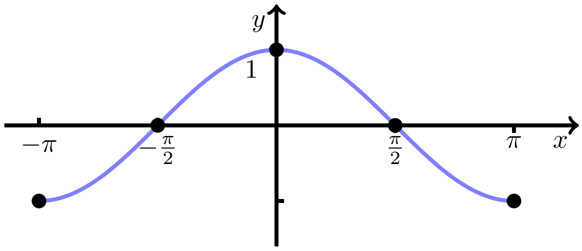
1.3.2 Ableitung trigonometrischer Funktionen

Die Sinusfunktion ist periodisch mit Periode 2π. Somit genügt es, die Funktion auf einem Intervall der Länge 2π zu betrachten. Einen Ausschnitt des Graphen für $-\pi \leq x \leq \pi$ zeigt die folgende Abbildung:

Sinusfunktion



Ableitung



Der Sinus ist als Quotient der Gegenkathede durch die Hypotenuse definiert. Für kleine Winkel ist die Gegenkathede näherungsweise gleich lang wie der Winkel im Bogenmaß, wie aus der Definition am Einheitskreis zu sehen ist. Damit ist der Differenzenquotient ungefähr 1. Anschaulich verständlich ist, dass die Steigung der Tangente im Nullpunkt somit 1 ist, wie dies in der zweiten Abbildung eingetragen ist. An den Stellen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ ist die Tangentensteigung gleich 0. Eine genaue Betrachtung bestätigt die Werte und zeigt, dass sich insgesamt als Ableitungsfunktion die Kosinusfunktion ergibt.

Ableitung trigonometrischer Funktionen 5

Für die Sinusfunktion $f(x) := \sin(x)$ gilt

$$f'(x) = \cos(x)$$

Für die Kosinusfunktion $g(x) := \cos(x)$ gilt

$$g'(x) = -\sin(x)$$

Für die Tangensfunktion $h(x) := \tan(x)$ für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$h'(x) = 1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

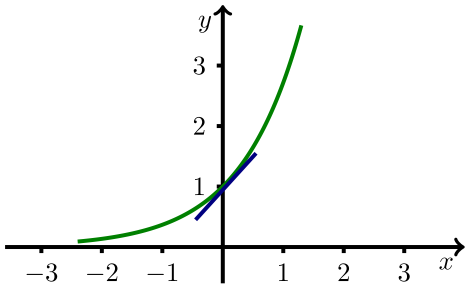
Letzteres ergibt sich auch aus den nachfolgend erläuterten Rechenregeln und der Definition des Tangens als Quotient von Sinus und Kosinus.

1.3.3 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $f(x) := \exp(x)$ hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Ableitung wiederum $f'(x) = \exp(x)$ ist.

Für die Stelle 0 ist dies anschaulich nachvollziehbar, wenn der Graph möglichst genau gezeichnet wird, dass die Steigung der Tangente gleich $f'(0) = 1$ und somit gleich e^0 ist.

Wenn der Diffenzenquotient mit der Rechenregel $\mathrm{e}^{x_0+h} = \mathrm{e}^{x_0} \cdot \mathrm{e}^h$ für die Exponentialfunktion umgeformt wird, ergibt sich daraus obiges Ergebnis $f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot f'(0) = \mathrm{e}^x$.

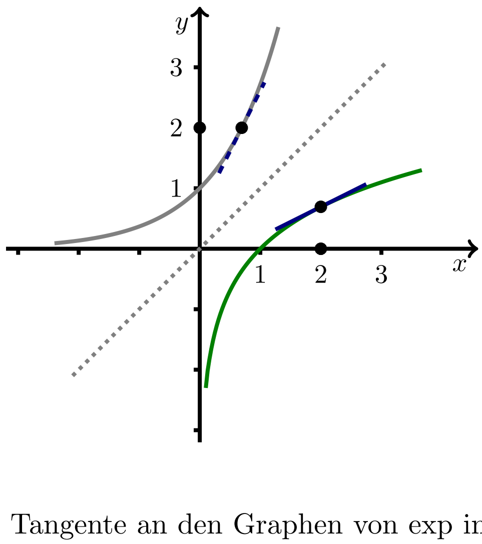


1.3.4 Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion $f(y) := \ln(y)$ für $y > 0$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = \mathrm{e}^x$. Die Ableitung und damit die Steigung m der Tangente an den Graphen der Exponentialfunktion ist $m = \mathrm{e}^x$.

Der Graph der Umkehrfunktion $\ln(y)$ ergibt sich aus der Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden. Die Steigung der gespiegelten Tangente an die Exponentialfunktion ist dann der Kehrwert $f'(y) = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ an der Stelle $y = \mathrm{e}^x$, also $f'(y) = \frac{1}{y}$ (vergleiche auch Aufgabe 1.2.1).

Indem wieder die gewohnte Bezeichnung für die unabhängige Variable verwendet wird, ergibt sich $f'(x) = \frac{1}{x}$ als Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$.



In der obigen Abbildung ist die Tangente an den Graphen von exp im Punkt (x_0, e^{x_0}) für $x_0 = \ln(2)$ angedeutet, sodass die Tangentensteigung $m = 2$ ist. Die Umkehrabbildung der Tangente hat dann die Steigung $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$. Geometrisch ist es die Steigung der gespiegelten Tangente, also die Tangente an die Umkehrfunktion ln.

Aufgaben

Aufgabe 1.3.1
Bestimmen Sie die Ableitung, indem Sie die Funktionsterme vereinfachen und dann Ihre Kenntnisse über die Ableitung bekannter Funktionen anwenden ($x > 0$):

a. $f(x) := x^6 \cdot x^{\frac{7}{2}} =$ $\boxed{}$

b. $g(x) := \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} =$ $\boxed{}$

Damit ist

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 1.3.2
Vereinfachen Sie die Funktionsterme, um dann die Ableitung zu bestimmen:

a. $f(x) := 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) =$ $\boxed{}$

b. $g(x) := \cos^2(3x) + \sin^2(3x) =$ $\boxed{}$

Damit ist

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 1.3.3
Vereinfachen Sie die Funktionsterme, um dann die Ableitung zu bestimmen (für $x > 0$ in der ersten Teilaufgabe):

a. $f(x) := 2\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) =$ $\boxed{}$

b. $g(x) := (\mathrm{e}^x)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} =$ $\boxed{}$

Damit ist

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$

1.4 Rechenregeln

Einführung

Zusammen mit einigen wenigen Rechenregeln und den im letzten Abschnitt vorgestellten Ableitungen lassen sich eine Vielzahl an Funktionen differenzieren.

Inhalt

Gegeben sind differenzierbare Funktionen $u, v : D \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl r.

1.4.1 Vielfache und Summen von Funktionen

Dann ist auch die Summe der Funktionen $f(x) := u(x) + v(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \tag{1.1}$$

Es ist auch das r-fache der Funktion $f(x) := r \cdot u(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = r \cdot u'(x) \tag{1.2}$$

Beispiel 1.4.1

Die Ableitung von $f(x) = x^3 + \ln(x)$ für $x > 0$ ist

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3x^3 + 1}{x}$$

Mit $\ln(x^3) = 3\ln(x)$ ergibt sich die Ableitung von $g(x) = \ln(x^3) = 3\ln(x)$ für $x > 0$ zu

$$g'(x) = \frac{3}{x}$$

Die Ableitung von $h(x) = 4^{-1} \cdot x^2 - \sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 + (-1) \cdot x^{\frac{1}{2}}$ ist für $x > 0$ dann

$$h'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{2\sqrt{x}}$$

1.4.2 Produkt und Quotient von Funktionen

Dann ist auch das Produkt der Funktionen $f(x) := u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{1.3}$$

Es ist auch der Quotient der Funktionen $f(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$ für alle x mit $v(x) \neq 0$ definiert und differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v'(x))^2} \tag{1.4}$$

Beispiel 1.4.2

Die Ableitung von $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$ ist

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^x$$

Die Ableitung von $g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ dann

$$g'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

1.4.3 Verkettung von Funktionen

Wenn die Funktion u mit der Funktion v verkettet werden kann (wenn u in v eingesetzt werden kann), dann ist auch die Verkettung $f(x) := (v \circ u)(x) = v(u(x))$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x) \tag{1.5}$$

Hier ist $v'(u(x))$ der Wert der Ableitung v', der sich an der Stelle $u(x)$ ergibt.

Beispiel 1.4.3

Die Ableitung von $f(x) = (3 - 2x)^5$ ist

$$f'(x) = 5(3 - 2x)^4 \cdot (-2) = -10(3 - 2x)^4$$

Die Ableitung von $g(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ ist

$$g'(x) = \mathrm{e}^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$$

1.4.4 Umkehrfunktion

Wenn die Funktion u umkehrbar ist und ihre Ableitung an der Stelle x_0 ungleich null ist, also $u'(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist die Umkehrfunktion $f(y) := u^{-1}(y)$ an der Stelle $y_0 := u(x_0)$ differenzierbar. Mit der Kettenregel, angewandt auf $y = u(u^{-1}(y)) = u(f(y))$ gilt – da die Ableitung des Terms y auf der linken Seite – dann

$$1 = u'(f(y_0)) \cdot f'(y_0) \quad \text{und damit} \quad f'(y_0) = \frac{1}{u'(f(y_0))}. \tag{1.6}$$

Ebenso kann von $x = u^{-1}(u(x)) = f(u(x))$ ausgegangen werden: Mit der Kettenregel und $x_0 = u^{-1}(y_0) = f(y_0)$ ergibt sich dann

$$1 = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0) \quad \text{und damit} \quad f'(y_0) = f'(u(x_0)) = \frac{1}{u'(x_0)} = \frac{1}{u'(f(y_0))}. \tag{1.7}$$

Ergebnis: Ableitung der Umkehrfunktion 6

Ersetzt man in den Gleichungen (1.6) bzw. (1.7) dann f durch u^{-1} und schreibt y für y_0, so ergibt sich die Regel

$$\left(u^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{u'\left(u^{-1}(y)\right)}.$$

für die Ableitung der Umkehrfunktion (an der Stelle y).

Wie üblich, kann die unabhängige Variable der Umkehrfunktion auch wieder mit x bezeichnet werden.

Beispiel 1.4.4

Die Funktion $u\colon (0;\infty) \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = x^2$ ist umkehrbar und differenzierbar mit $u'(x) = 2x$. Damit ist die Ableitung der Umkehrfunktion $u^{-1}(y) = \sqrt{y}$ für $y > 0$ dann

$$\left(u^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{u'\left(u^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{2\left(u^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Üblicherweise wird die unabhängige Variable der Umkehrfunktion noch mit x bezeichnet. Damit ist die Ableitung für die Wurzelfunktion hergeleitet. In derselben Weise erhält man die Ableitungsregel von $x^{\frac{1}{n}}$ für $n \neq 0$.

Aufgaben

Aufgabe 1.4.1

Berechnen Sie die Ableitung von

a. $f(x) := 3 + 5x$ zu $f'(x) =$ ☐

b. $g(x) := \frac{1}{4x} - x^3$ zu $g'(x) =$ ☐

c. $h(x) := 2\sqrt{x} + 4x^{-3}$ zu $h'(x) =$ ☐

Aufgabe 1.4.2

Berechnen und vereinfachen Sie die Ableitung von

a. $f(x) := \cot x = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ zu $f'(x) =$ ☐

b. $g(x) := \sin(3x) \cdot \cos(3x)$ zu $g'(x) =$ ☐

c. $h(x) := \frac{\sin(3x)}{\sin(6x)}$ zu $h'(x) =$ ☐

Aufgabe 1.4.3

Berechnen Sie die Ableitung von

a. $f(x) := \mathrm{e}^{5x}$ zu $f'(x) =$ ☐

b. $g(x) := x \cdot \mathrm{e}^{6x}$ zu $g'(x) =$ ☐

c. $h(x) := (x^2 - x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ zu $h'(x) =$ ☐

Aufgabe 1.4.4

Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von $f(x) := \sin(1 - 2x)$.

Antwort: Es wird mit $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f bezeichnet. Damit ist

- $f^{(1)}x) =$ ☐
- $f^{(2)}(x) =$ ☐
- $f^{(3)}x) =$ ☐
- $f^{(4)}x) =$ ☐

Aufgabe 1.4.5

Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) := \arctan(x)$, also der Umkehrfunktion von $\tan(x)$.

Antwort: Es ist $f'(x) =$ ☐

1.5 Eigenschaften

Einführung

Die Ableitung wurde oben mittels einer Geraden eingeführt, die den Funktionsverlauf „näherungsweise“ beschreibt. Aus den Eigenschaften der Geraden kann nun auf Eigenschaften der Funktion geschlossen werden.

Inhalt

1.5.1 Stetigkeit differenzierbarer Funktionen

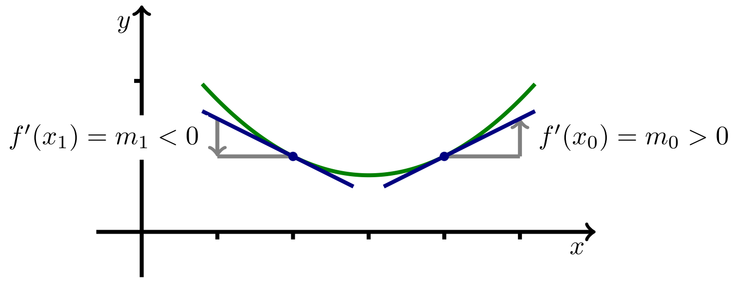
Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Folglich ist eine (überall) differenzierbare Funktion (überall) stetig. Insbesondere hat eine auf einem Intervall definierte differenzierbare Funktion keine Sprungstellen.

Andererseits zeigt das Beispiel der stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$, dass aus der Stetigkeit allein nicht folgt, dass f auch differenzierbar ist. Denn f in an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

1.5.2 Monotonie

Mit der Ableitung kann das lokale Wachstumsverhalten untersucht werden, das heißt ob für größer werdende x-Werte die Funktionswerte größer oder kleiner werden. Dazu wird eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ betrachtet, die auf $(a, b) \subseteq D$ differenzierbar ist.



Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle x zwischen c und d gilt, dann ist f auf dem Intervall $(c; d)$ monoton fallend.

Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle x zwischen c und d gilt, dann ist f auf dem Intervall $(c; d)$ monoton wachsend.

Somit genügt es, das Vorzeichen der Ableitung f' zu bestimmen, um zu erkennen, ob eine Funktion monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beispiel 1.5.1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist differenzierbar mit $f(x) = 3x^2$. Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $f'(x) \geq 0$ und damit f monoton wachsend.

Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 10$ hat die Ableitung $g'(x) = 6x^2 + 12x - 18 = 6(x+3)(x-1)$ die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$. Mit Hilfe folgender Tabelle wird bestimmt, in welchen Bereichen die Ableitung von g positiv bzw. negativ ist, woraus sich dann die Monotoniebereiche von g ergeben. Der Eintrag $+$ besagt, dass der betrachtete Term im angegebenen Intervall positiv ist. Wenn er negativ ist, wird $-$ eingetragen.

x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$g'(x)$	$-$	$-$	$+$
g monoton	wachsend	fallend	wachsend

Die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{1}{x}$ hat die Ableitung $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Hier gilt $h'(x) < 0$ für alle $x \neq 0$.

Dennoch ist h nicht monoton fallend, da beispielsweise $h(-2) = -\frac{1}{2} < 1 = h(1)$ gilt. Der Grund für dieses überraschende Ergebnis ist, dass der Definitionsbereich von h kein Intervall ist. Die Funktion h ist auf $(-\infty; 0)$ monoton fallend, das heißt, die Einschränkung von h auf dieses Intervall ist monoton fallend. Zudem ist h für alle $x > 0$ monoton fallend.

1.5.3 Krümmungseigenschaften

Gegeben ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf $(a; b) \subseteq D$ zweimal differenzierbar ist.

Wenn $f''(x) \geq 0$ für alle x zwischen c und d gilt, dann ist f auf dem Intervall $(c; d)$ konvex.

Wenn $f''(x) \leq 0$ für alle x zwischen c und d gilt, dann ist f auf dem Intervall $(c; d)$ konkav.

Somit genügt es, das Vorzeichen der zweiten Ableitung f'' zu bestimmen, um zu erkennen, ob eine Funktion konvex (linksgekrümmt) oder konkav (rechtsgekrümmt) ist.

Anmerkung zur Notation 7

Die zweite und weitere „höhere“ Ableitungen oft mit natürlichen Zahlen in runden Klammern gekennzeichnet: Die k-te Ableitung wird dann mit $f^{(k)}$ bezeichnet. Diese Bezeichnung wird besonders in Formeln auch für die (erste) Ableitung für $k = 1$ und für die Funktion f selbst für $k = 0$ verwendet.

Damit bezeichnet

- $f^{(0)} = f$ die Funktion f,
- $f^{(1)} = f'$ die (erste) Ableitung,
- $f^{(2)} = f''$ die zweite Ableitung,
- $f^{(3)}$ die dritte Ableitung von f, etc. (sofern diese existieren).

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine monoton wachsende Funktion in einem Bereich konvex und in einem anderen konkav sein kann.

Beispiel 1.5.2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist zweimal differenzierbar. Wegen $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ist f monoton wachsend.

Weiter ist $f^{(2)}(x) = 6x$. Somit ist für $x < 0$ auch $f^{(2)} < 0$ und damit f hier konkav (nach rechts gekrümmt), und für $x > 0$ ist $f^{(2)}(x) > 0$, sodass f für $x > 0$ konvex (nach links gekrümmt) ist.

Aufgaben

Aufgabe 1.5.1
In welchen möglichst großen offenen Intervallen ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$ monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend?

Antwort: Es ist

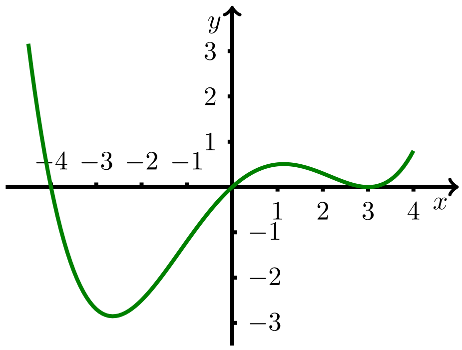
- f auf $(-\infty; 0)$ monoton ____ .
- f auf $(0; \infty)$ monoton ____ .

Aufgabe 1.5.2
In welchen möglichst großen offenen Intervallen $(c; d)$ ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$ für $x > 0$ konvex beziehungsweise konkav?

Antwort: Es ist

- f auf ____ onvex.
- f auf ____ konkav.

Aufgabe 1.5.3
Gegeben ist eine Funktion $f : [-4.5; 4] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 2$, deren Ableitung f' in nachstehendem Graphen gezeichnet ist.



a. Wo ist f monoton wachsend, wo monoton fallend? Gesucht sind jeweils möglichst größe offene Intervalle $(c; d)$, auf denen f diese Eigenschaft hat.

b. Welche Aussagen erhalten Sie über die Maximal- beziehungsweise Minimalstellen der Funktion f?

Antwort: Es ist

- f auf $(-4.5;$ ____ $)$ monoton ____ .
- f auf $($ ____ $; 0)$ monoton ____ .
- f auf $(0; 3)$ monoton ____ .
- f auf $(3; 4)$ monoton ____ .

Maximalstelle ist $\boxed{}$. Minimalstelle ist $\boxed{}$.

1.6 Anwendungen

Einführung

Im vorherigen Abschnitt wurde erläutert, wie der Funktionsverlauf mit Hilfe der Ableitung beschrieben werden kann. Daraus ergeben sich weitere Folgerungen zu besonderen Funktionswerten wie Maxima oder Minima. Damit liegt es nahe, Aussagen über Funktionen mittels der Ableitung zu gewinnen. Systematisch wird dies unter dem Stichwort Kurvendiskussion durchgeführt.

Als weiteres Beispiel für Anwendungen werden Optimierungsaufgaben vorgestellt. Sie befassen sich mit der Frage nach bestmöglichen Werten einer Funktion, beispielsweise einem minimalen Materialverbrauch. Somit handelt es sich aus mathematischer Sicht um die Bestimmung von Extremstellen im Rahmen einer technischen oder wirtschaftlichen Produktion.

1.6.1 Kurvendiskussion

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich D mit Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ für $x \in D$.

Im ersten Teil werden algebraische und geometrische Aspekte von f betrachtet:

Maximaler Definitionsbereich Es werden alle reellen Zahlen x bestimmt, für die $f(x)$ existiert. Die Menge D all dieser Zahlen wird maximaler Definitionsbereich genannt.

Symmetrie des Graphen Es wird untersucht, ob $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Im ersten Fall ist der Graph zur y-Achse symmetrisch, im zweiten ist er zum Nullpunkt $(0; 0)$ des Koordinatensystems punktsymmetrisch.

Periodizität Es wird untersucht, ob es eine Zahl $p > 0$ derart gibt, dass $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in D$ gibt.

Schnittpunkte mit den Achsen Es werden die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmt:

- x-Achse: Es werden alle Nullstellen von f berechnet.
- y-Achse: Wenn $0 \in D$ gilt, wird $f(0)$ berechnet.

Asymptotisches Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs Es wird das Verhalten in der Nähe von Definitionslücken und an den Rändern untersucht: Gibt es eine stetige Fortsetzung oder existieren zumindest die einseitigen Grenzwerte? Sind die Grenzwerte gegen ∞ bzw. $-\infty$ vorhanden, wenn der Definitionsbereich entsprechend unbeschränkt ist?

Im zweiten Teil wird die Funktion mittels Folgerungen aus der Ableitung analytisch untersucht. Dazu werden zunächst die erste und zweite Ableitung berechnet, sofern diese existieren.

Ableitungen Berechnung der ersten und zweiten Ableitung (soweit vorhanden).

Extemstellen und Monotonie Eine notwendige Bedingung für eine Extremstellen x_0 im Innern des Definitionsbereichs ist $f'(x_0) = 0$.

Ob tatsächlich eine Extremstelle vorliegt, muss dann noch geprüft werden. Dies ist oft mit einem der folgenden Kriterien möglich:

Unter der Voraussetzung, dass $f'(x_0) = 0$ gilt, liegt eine

- Minimalstelle in x_0 vor, wenn in einer Umgebung von x_0 für $x < x_0$ dann $f'(x) < 0$ und für $x > x_0$ dann $f'(x) > 0$ ist,
- Maximalstelle in x_0 vor, wenn in einer Umgebung von x_0 für $x < x_0$ dann $f'(x) > 0$ und für $x > x_0$ dann $f'(x) < 0$ ist.

Wenn auch die zweite Ableitung $f^{(2)} = f''$ existiert, gilt: Wenn $f'(x_0) = 0$ und zudem

- $f^{(2)}(x_0) > 0$ gilt, dann ist x_0 eine Minimalstelle von f.
- $f^{(2)}(x_0) < 0$ gilt, dann ist x_0 eine Maximalstelle von f.

Die Funktion f ist auf den Intervallen des Defitionsbereichs monoton wachend, wo $f'(x) \geq 0$ gilt. Sie ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ gilt.

Wendestellen und Krümmungseigenschaften Wenn die zweite Ableitung $f'' = f^{(2)}$ existiert, ist $f^{(2)}(w) = 0$ eine notwendige Bedingung dafür, dass w_0 eine Wendestelle im Innern des Definitionsbereichs sein kann.

Wiederum ist noch zu prüfen, ob tatsächlich eine Wendestelle vorliegt.

Wie für Extremstellen kann dies anhand eines Vorzeichenwechsels der zweiten Ableitung erfolgen oder mit Hilfe der dritten Ableitung:

Unter der Voraussetzung, dass $f^{(2)}(w_0) = 0$ gilt, liegt eine Wendestelle in w_0 vor, wenn in einer Umgebung von w_0

- für $x < w_0$ dann $f^{(2)}(x) < 0$ und für $x > w_0$ dann $f^{(2)}(x) > 0$ ist, oder
- für $x < w_0$ dann $f^{(2)}(x) > 0$ und für $x > w_0$ dann $f^{(2)}(x) < 0$ ist.

Wenn $f^{(2)}(w_0) = 0$ und $f^{(3)}(w_0) \neq 0$ gilt, dann ist w_0 eine Wendestelle. Der Vorteil des ersten Kriteriums besteht darin, dass die dritte Ableitung nicht berechnet werden muss.

Die Funktion f ist auf den Intervallen des Definitionsbereichs konvex (linksgekrümmt), wo $f^{(2)}(x) \geq 0$ gilt. Sie ist konkav (rechtsgekrümmt), wenn $f^{(2)}(x) \leq 0$ gilt.

Graph Anhand der gewonnenen Ergebnisse wird dann ein charakteristischer Ausschnitt des Funktionsgraphen gezeichnet, der diese Ergebnisse berücksichtigt.

Hier nochmals die einzelnen Betrachtungen in einer kurzen Übersicht:

Kurvendiskussion 8

Unter einer Kurvendiskussion wird hier die Untersuchung einer differenzierbaren reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ verstanden, die durch einen Funktionsterm $y = f(x)$ gegeben ist, und folgende Aspekte umfasst:

- Maximaler Definitionsbereich D_f
- Symmetrie und Periodizität
- Schnittpunkte mit den Achsen
- Randverhalten
- Ableitungen
- Extremstellen und Monotoniebereiche
- Wendestellen und Krümmungseigenschaften
- Graph der Funktion

Im folgenden Beispiel wird die Vorgehensweise illustriert.

Beispiel 1.6.1

Es wird $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^3$ auf seinem maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ untersucht.

Maximaler Definitionsbereich Der Funktionsterm ist für alle reellen Zahlen x definiert, sodass $D_f = \mathbb{R}$ ist.

Symmetrie des Graphen Wegen $f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^5 - (-x)^3 = -\left(\frac{1}{5}x^5 - x^3\right) = -f(x)$ ist der Graph von f dann punktsymmetrisch zum Nullpunkt $(0, 0)$, die Funktion f ungerade. (Da f ein Polynom ist und $(-x)^{2k} = (-1)^{2k}x^{2k} = x^{2k}$ sowie $(-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}x^{2k+1} = -x^{2k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, kann die Antwort auch an den Exponenten der Monome abgelesen werden. Im Beispiel sind es die ungeraden Zahlen 5 und 3, sodass f ungerade ist.)

Aufgrund der Symmetrie würde es für die meisten Überlegungen in der Kurvendiskussion genügen, diese für $x \geq 0$ vorzunehmen. In diesem Beispiel soll diese Eigenschaft einmal nicht von vornherein benutzt werden, um eine möglichst ausführliche Darstellung zu bieten.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen Es ist $f(x) = \frac{1}{5}x^3 \cdot (x^2 - 5)$. Somit sind $u_0 = 0$ und $u_1 = -\sqrt{5}$ sowie $u_2 = \sqrt{5}$ die Nullstellen von f.

Randverhalten Als nicht konstantes Polynom ist f unbeschränkt. Wegen $\frac{1}{5} > 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, und aufgrund dessen, dass der Grad von f ungerade ist, dann $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Ableitungen Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = x^4 - 3x^2$ und $f^{(2)}(x) = 4x^3 - 6x$.

Extremstellen Die Nullstellen von $f'(x) = x^2(x^2 - 3)$ sind $x_0 = 0$, $x_1 = -\sqrt{3}$ und $x_2 = \sqrt{3}$. Mit Hilfe folgender Tabelle wird bestimmt, in welchen Bereichen die Ableitung von f positiv bzw. negativ ist, woraus sich dann die Monotoniebereiche von f ergeben. Der Eintrag $+$ besagt, dass der betrachtete *Faktor* von $f'(x)$ im angegebenen Intervall positiv ist. Wenn er negativ ist, wird $-$ eingetragen.

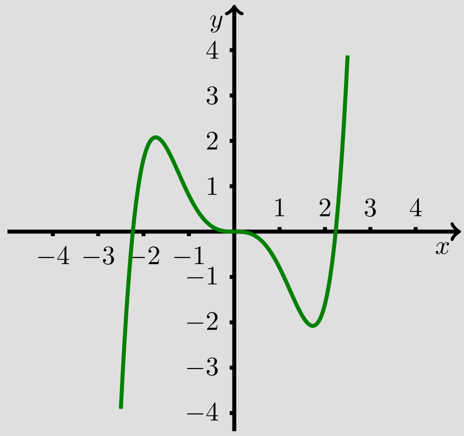
x	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + \sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - \sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
f monoton	wachsend	fallend	fallend	wachsend

Somit ist $x_1 = -\sqrt{3}$ eine lokale Maximalstelle und $x_2 = \sqrt{3}$ eine lokale Minimalstelle.

Wendestellen Die Nullstellen von $f^{(2)}(x) = 4x^3 - 6x = 4x\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)$ sind $w_0 = 0$ und $w_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ sowie $w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Es handelt sich auch um Wendestellen, da es einfache Nullstellen der zweiten Ableitung $f^{(2)}$ sind und damit ein Vorzeichenwechsel vorliegt (oder da $f^{(3)}(x) = 12x^2 - 6$ dort jeweils ungleich null ist: Es gilt nämlich $f^{(3)}(w_0) = -6 \neq 0$ und $f^{(3)}(w_1) = f^{(3)}(w_2) = 12 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 12 \neq 0$). Wegen $f'(w_0) = 0$ ist somit $(w_0; f(w_0)) = (0; 0)$ ein Sattelpunkt.

Funktionsgraph Mit obigen Ergebnissen kann dann ein Ausschnitt des Funktionsgraphen von f für $-2.5 \leq x \leq 2.5$ gezeichnet werden.



1.6.2 Optimierungsaufgaben

In der Optimierung wird in einer vorgegebenen Schar von Lösungen einer Aufgabe diejenige gesucht, die eine vorab festgelegte Eigenschaft am besten erfüllt.

Als Beispiel wird die Aufgabe betrachtet, eine zylinderförmige Dose zu konstruieren. Die Dose soll zusätzlich die Bedingung erfüllen, ein Fassungsvermögen von einem Liter zu haben. Sind r der Radius und h die Höhe der Dose, so soll also $\pi r^2 \cdot h = 1$ sein (auf die physikalischen Einheiten wurde der mathematischen Einfachheit halber verzichtet – in der Praxis ist es allerdings oft hilfreich, die Einheiten zur Kontrolle der Ergebnisse mit aufzuschreiben).

Gesucht wird nach derjenigen Dose, die eine möglichst kleine Oberfläche $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$ hat. Dies bedeutet, dass in dieser vereinfachten Betrachtung auch wenig Material in der Herstellung benötigt wird.

Mathematisch formuliert führt die Aufgabe auf die Suche nach einem Minimum für die Funktion O der Oberfläche, wobei das Minimum nur unter den Werten für r und h gesucht wird, für die auch die Bedingung über das Volumen $\pi r^2 \cdot h = 1$ erfüllt ist.

Eine solche zusätzliche Bedingung bei der Suche nach Extremstellen wird auch Nebenbedingung genannt. Sie kann ebenfalls mit einer Funktion formuliert werden.

Wird nämlich $g(r, h) := \pi r^2 \cdot h$ gesetzt, dann besagt obige Bedingung, dass nur solche Paare von r und h betrachtet werden, für die $g(r, h) = 1$ ist.

Auf diese Weise ergibt sich mit Hilfe zweier Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen können, eine einfache Formulierung einer Optimierungsaufgabe.

Optimierungsaufgabe 9

In einer **Optimierungsaufgabe** wird eine Extremstelle x_{ext} einer Funktion f gesucht, die eine gegebene Gleichung $g(x_{\text{ext}}) = b$ erfüllt.

Wenn ein globales Minimum gesucht wird, spricht man auch von einer **Minimierungsaufgabe**. Wenn ein Maximum gesucht wird, heißt die Optimierungsaufgabe eine **Maximierungsaufgabe**.

Die Funktion f heißt **Zielfunktion**, und die Gleichung $g(x) = b$ wird **Nebenbedingung** der Optimierungsaufgabe genannt.

Im obigen Beispiel ist O die Zielfunktion der Minimierungsaufgabe, die unter der Nebenbedingung $g(r, h) = 1$ gelöst werden soll. Da sich die durch $g(r, h) = \pi r^2 \cdot h = 1$ gegebene Gleichung nach r oder nach h auflösen lässt, kann die Funktion $O = O(r, h)$ in eine Funktion einer Variablen überführt werden, sodass die Frage nach dem Minimum mit den Mitteln der Kurvendiskussion bestimmt werden kann.

Auflösen nach h führt auf $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Eingesetzt in O ergibt sich, dass eine (globale) Minimalstelle von

$$f(r) := O(r, h) = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

für $r > 0$ gesucht wird (da der Radius r der Dose positiv ist). Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ führt auf

$$0 = f'(x) = 4\pi r - \frac{2}{r^2},$$

woraus $r^3 = \frac{1}{2\pi}$ folgt. Wegen $r > 0$ ist dann

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

die einzige Lösung der Gleichung. Da f nach oben unbeschränkt ist (an den Rändern für $r \to 0$ bzw. $r \to \infty$ gegen „unendlich strebt“), ist R als einzige Extremstelle die Minimalstelle von f. Die zugehörige Höhe H der Dose mit Radius R ist dann $H = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.

Abschliesend soll noch auf eine Besonderheit dieser Dose hingewiesen werden: Für den Durchmesser D der Dose gilt

$$D = 2R = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8}{2\pi}} = H.$$

Die Höhe der Dose ist gleich dem Durchmesser, sodass die Dosen in würfelförmige Kisten verpackt werden können.

Aufgaben

Aufgabe 1.6.1

Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen sowie alle Wendestellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$.

Antwort: Die Extremstellen werden so mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnet, dass $x_1 < x_2 < x_3$ gilt.

- Für die Extremstellen gilt dann:

Stelle		Maximal-stelle	Minimal-stelle	lokal	global
$x_1 =$	☐	☐	☐	☐	☐
$x_2 =$	☐	☐	☐	☐	☐
$x_3 =$	☐	☐	☐	☐	☐

- Das globale Minimum ist ☐ .
- Wendestellen sind ☐ und ☐ .

Aufgabe 1.6.2

Bestimmen Sie das achsenparallele Rechteck kleinsten Umfangs, dessen eine Ecke im Nullpunkt $(0; 0)$ und dessen gegenüberliegende Ecke auf dem Graphen von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{x^2-4}{x^4}$ liegt.

Antwort: Die gesuchte gegenüberliegende Ecke hat die x-Koordinate ☐ und die y-Koordinate ☐ .

1.7 Zusammenfassung

1.7.1 Ableitung

Es ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, wenn

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dann heißt m die Ableitung von f an der Stelle x_0, und wird mit $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} := f'(x) := m$ bezeichnet.

Im Folgenden werden die wichtigsten Rechenregeln und Aussagen zusammengefasst.

1.7.2 Standardableitungen

Konstante Funktion	$f(x) := a$	$f'(x) = 0$
Monom	$f(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Wurzel	$f(x) := x^{\frac{1}{n}}$ für $x \geq 0$ und für $n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ für $x > 0$
Sinusfunktion	$f(x) := \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
Kosinusfunktion	$f(x) := \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
Tangensfunktion	$f(x) := \tan(x)$ für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f'(x) = 1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Exponentialfunktion	$f(x) := \exp(x)$	$f'(x) = \exp(x)$
Logarithmusfunktion	$f(x) := \ln(x)$ für $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

1.7.3 Rechenregeln

Die Funktionen g, h, u und v seien differenzierbar. Dann ist auch die nachstehend definierte Funktion f differenzierbar, und die Ableitung von f kann wie angegeben berechnet werden:

Vielfache Für $f(x) := r \cdot g(x)$ ist $f'(x) = r \cdot g'(x)$

Summe Für $f(x) := g(x) + h(x)$ ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Produktregel Für $f(x) := u(x) \cdot v(x)$ ist $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel Für $f(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$ ist $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Kettenregel Für $f(x) := (g \circ u)(x) = g(u(x))$ ist $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

1.7.4 Eigenschaften

Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, und es gilt:

- Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist f monoton wachsend.
- Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist f monoton fallend.

Wenn f zweimal differenzierbar ist, gilt zudem (wobei die zweite Ableitung mit $f^{(2)}$ bezeichnet wird):

- Wenn $f^{(2)}(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist f konvex (linksgekrümmt).
- Wenn $f^{(2)}(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist f konkav (rechtsgekrümmt).

Extremstellen 10

Wenn x_0 eine Extremstellen in (a, b) ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Somit können nur solche Stellen der differenzierbaren Funktion f auf (a, b) Extremstellen sein.

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und zudem ein Vorzeichenwechsel der Ableitung in x_0 vorliegt oder die zweite Ableitung ungleich null ist, dann ist x_0 eine Extremstellen. Außerdem kann dann festgesetllt werden, ob es sich um eine Minimalstelle oder eine Maximalstelle von f handelt: Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, und

- $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ gilt, dann ist x_0 eine Minimalstelle von f.
- $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x ><_0$ gilt, dann ist x_0 eine Maximalstelle von f.

Oder wenn $f'(x_0) = 0$ ist, die zweite Ableitung in x_0 existiert und

- $f^{(2)}(x_0) > 0$ gilt, dann ist x_0 eine Minimalstelle von f.
- $f^{(2)}(x_0) < 0$ gilt, dann ist x_0 eine Maximalstelle von f.

Wendestellen 11

Wenn w_0 eine Wendestellen in (a, b) ist und f zweimal differenzierbar ist, muss $f^{(2)}(w_0) = 0$ gelten. Somit genügt es, diese Stellen weiter zu untersuchen.

Es ist w_0 eine Wendestelle in (a, b), wenn $f^{(2)}(w_0) = 0$ ist und eine der folgenden weiteren Eigenschaften gelten:

- In w_0 liegt ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung vor (das heißt, für kleinere Werte $x < w_0$ ist $f^{(2)}(x) < 0$ und für größere Werte $x > w_0$ ist $f^{(2)}(x) > 0$ oder umgekehrt).
- Oder es gilt $f^{(3)}(w_0) \neq 0$.

Das letzte Kriterium erfordert neben der Bedingung $f^{(2)}(w_0)$ natürlich, dass die dritte Ableitung existiert und in der Praxis dann erst mal berechnet werden muss.

1.7.5 Anwendungen

Für differenzierbare Funktionen wurden folgende Anwendungen vorgestellt:

- Kurvendiskussion
- Optimierungsaufgabe

1.8 Ausgangstest

Einführung

Der Test umfasst Aufgaben zu den Inhalten dieses Moduls. Das unverbindliche Ergebnis ist für Sie eine Erfolgskontrolle.

Test

Dies ist ein interaktiver Test:

- Im Gegensatz zu den Aufgaben im Lernmodul werden beim Eingeben keine Hinweise zur Formulierung der mathematischen Ausdrücke gegeben.
- Der Test merkt sich die Eingabe, kann aber jederzeit neu gestartet oder verlassen werden.
- Der Test kann durch die Buttons am Ende der Seite beendet und ausgewertet, oder komplett zurückgesetzt werden.
- Der Test kann mehrfach probiert werden, es zählt immer das letzte Ergebnis.
- Nach Auswertung des Tests können durch Klick auf die Eingabefelder Hinweise eingesehen werden.

Aufgabe 1.8.1
In einem Behählter wird um 9 Uhr eine Temperatur von $-10°C$ gemessen. Um 15 Uhr beträgt die Temperatur $-58°C$. Nach weiteren vierzehn Stunden ist die Temperatur auf $-140°C$ gefallen.

a. Wie groß ist die mittlere Änderungsrate der Temperatur aufgrund der ersten und zweiten Messung?

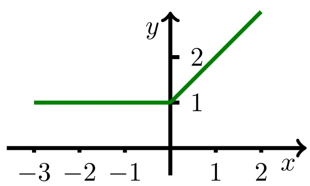
   Antwort: ☐

b. In der (mittleren) Änderungsrate drückt sich die Eigenschaft, dass die Temperatur fällt, dadurch aus, dass die Änderungsrate ☐ ist.

c. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur der gesamten Messdauer, die sich anhand der ersten und letzten Messung ergibt.

   Antwort: ☐

Aufgabe 1.8.2
Zu einer Funktion $f : [-3; 2] \to \mathbb{R}$ gehört die Ableitung f', deren Graph hier gezeichnet ist:



a. Die Funktionswerte von f zwischen -3 und 0

   ☐ sind konstant, ☐ nehmen um 3 zu, ☐ nehmen ab.

b. Die Funktion f hat an der Stelle 0

   ☐ eine Sprungstelle, ☐ keine Ableitung, ☐ die Ableitung 1.

Aufgabe 1.8.3

Berechnen Sie für

a. $f(x) := \ln\left(x^3 + x^2\right)$ für $x > 0$ die Ableitung $f'(x) =$ [ ]

b. $g(x) := x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ die zweite Ableitung $g''(x) =$ [ ]

Aufgabe 1.8.4
In welchen Bereichen ist $f : (0; \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, in welchen konkav, wenn $f'(x) = x \cdot \ln x$ gilt? Geben Sie als Bereiche möglichst große offene Intervalle $(c; d)$ an, wobei ∞ durch `infty` angegeben wird:

a. f ist auf [ ] onoton fallend,

b. f ist auf [ ] onkav.