- Der Fall, dass der multiplizierte Term den Wert Null annimmt, muss bei der Umformung ausgeschlossen und ggf. separat betrachtet werden.

Die in den einzelnen Fällen gefundene Lösungsmengen müssen wie bei der Auflösung von Betragsgleichungen auf Verträglichkeit mit der Fallbedingung untersucht werden.

Die Addition von Termen, welche die Unbestimmte enthalten, erfordern dagegen keine Fallunterscheidung. Umformungen mit Fallunterscheidungen sind meist notwendig, wenn die Unbestimmte im Nenner oder in zusammengesetzten Termen auftritt:

**Beispiel 3.2.2**
Die Ungleichung $\frac{1}{2x} \leq 1$ kann vereinfacht werden, indem beide Seiten der Ungleichung mit dem Term $2x$ multipliziert werden:

- Unter der Bedingung $x > 0$ erhalten wir die neue Ungleichung $1 \leq 2x$, sie hat die Lösungsmenge $L_1 = [\frac{1}{2}\,;\infty)$. Die Bedingung $x > 0$ ist für alle Elemente der Lösungsmenge erfüllt.

$L_2$ = (2,unendlich) davon zulässig.

3. Der Einzelwert $x = 2$ ist keine Lösung der ursprünglichen Ungleichung, da er nicht zum Definitionsbereich gehört.

Skizziere Sie die Lösungsmenge der Ungleichung und markieren Sie die Randpunkte.

Lösung

**Aufgabe 3.2.5**

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{x-1}{x-2} \leq 1$ ist $L \ =$ ? .

Lösung

**Aufgabe 3.2.6**

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 1 + \sqrt{x}$ ist $L \ =$

? .

- Im Fall $x < 2$ multiplizieren wir mit $x - 2$ und erhalten $x - 1 \geq x - 2$, was äquivalent zur wahren Aussage $-1 \geq -2$ ist. Wegen der Vorbedingung ist das Lösungsintervall für diesen Fall aber nur $L_2 = (-\infty; 2)$.

- Der Einzelwert $x = 2$ ist keine Lösung.

Die Lösungsmenge ist also insgesamt $L = (-\infty; 2)$ ohne die Randpunkte (auch wenn die Ursprungsungleichung mit $\leq$ aufgebaut war).

**Aufgabe 3.2.6**

Die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 1 + \sqrt{x}$ ist

$L =$ ? .

Lösung

Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $D = [0; \infty) \setminus \{1\}$, da nur für diese $x$ die Wurzeln und die Nenner zulässig sind.

- Im Fall $0 \leq x < 1$ multiplizieren wir mit $1 - \sqrt{x}$ und erhalten $1 < (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})$, was äquivalent zur Aussage $1 < 1 - x$ ist. Diese ist für $x < 0$ efüllt, aber diese $x$ verletzen die Fallbedingung und kommen daher nicht in die Lösungsmenge.