Onlinekurs Mathematik - Geometrie - Flächeninhalt und Strahlensätze

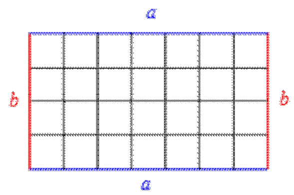
5.2.1 Flächeninhalt

Der Inhalt einer Fläche ist die Zahl der Einheitsquadrate, die man benötigt, um diese Fläche vollständig zu bedecken.

Zuerst wollen wir uns ein Rechteck ansehen.

Info 5.2.1

Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem alle vier Innenwinkel rechte Winkel sind.



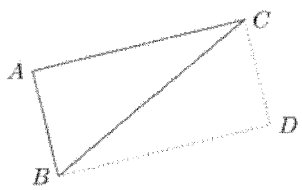
Wenn ein Rechteck eine Seite der Länge a und eine Seite der Länge b hat, dann gibt es b Reihen mit a Einheitsquadraten, also $a \cdot b$ Einheitsquadrate.

Info 5.2.2

Die Fläche A des Rechtecks ist

$$A = b \cdot a = a \cdot b$$

Damit können wir auch leicht den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen. Wir nehmen ein rechtwinkliges Dreieck ABC, drehen es um 180° und legen die beiden Hypotenusen des Dreiecks ABC und des gedrehten Dreiecks aufeinander. Damit erhalten wir ein Rechteck.

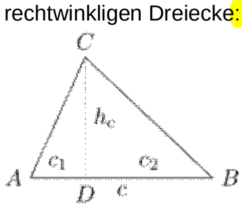


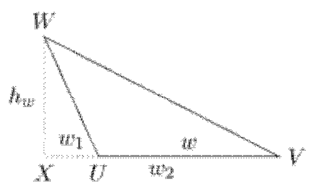
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist nun die Hälfte des Flächeninhaltes des Rechtecks, also $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Doch was ist zu tun, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?

Aus jedem beliebigen Dreieck kann man zwei rechtwinklige Dreiecke gewinnen, indem man von einer Ecke aus eine Linie auf die gegenüberliegende Seite zieht, so dass sie diese senkrecht trifft. Diese Linie nennt man die **Höhe** h_i eines Dreiecks auf die bestimmte Seite i, wobei der Index i derjenigen Seite a, b oder c entspricht, über der die Höhe bestimmt wird.

Je nachdem, ob die neue Linie innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks dann aus der Summe oder der Differenz der Flächeninhalte der beiden sich ergebenden rechtwinkligen Dreiecke:





Links gilt also (wenn A_Δ den Flächeninhalt des Dreiecks Δ bezeichnet)

$$A_{ABC} = A_{DBC} + A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_2 + \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c_1 = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot (c_2 + c_1) = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c.$$

Rechts gilt genauso

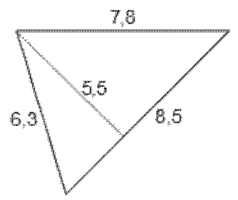
$$A_{UVW} = A_{XVW} - A_{XUW} = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_2 - \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot w_1 = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot (w_2 - w_1) = \frac{1}{2} \cdot h_w \cdot w.$$

Info 5.2.3

- Die **Höhe eines Dreiecks auf einer Seite** ist die Strecke, die von dem der Seite gegenüberliegenden Punkt ausgeht und die Gerade, auf der die Seite liegt, im rechten Winkel trifft. Der Punkt, auf dem die Höhe diese Gerade trifft, heißt **Lotfußpunkt** der Höhe.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus der Hälfte des Produkts der Länge einer Seite mit der Länge der zugehörigen Höhe des Dreiecks

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

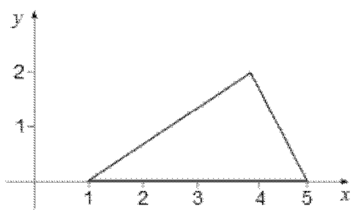
Beispiel 5.2.4



Bei dem hier gezeigten Dreieck ist die Höhe gegeben, die zur Seite mit dem Wert 8.5 gehört. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist also

$$A = \frac{8.5 \cdot 5.5}{2} = 23.375$$

Aufgabe 5.2.5
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks:



Lösung

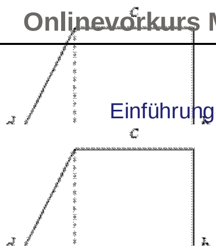
An diesem Dreieck lässt sich die zur Seite, die auf der $x-$Achse liegt, zugehörige Höhe ablesen:

$$\text{Seite} = 4, \quad \text{Höhe} = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

Nun können wir auch die Flächen von anderen Vielecken, auch **Polygone** genannt, bestimmen. Wir werden uns jedoch auf einige einfache Formen beschränken. Polygone können in Dreiecke unterteilt werden. Die Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke ergibt den Flächeninhalt des Polygons.

Beispiel 5.2.6

Sehen wir uns das links dargestellte Polygon an. Bei unserem Beispiel kann man das Polygon in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $(a - c)$ und b



und der Hypotenuse sowie ein Rechteck mit den Seiten b und c unterteilen. Der Flächeninhalt des Polygons ist dann:

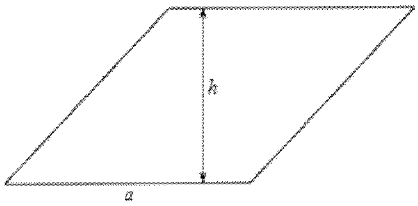
d

$$A = A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}(a-c)\cdot b + b\cdot c = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bc + bc = \frac{1}{2}(a+b)\cdot c$$

Aufgabe 5.2.7

Berechnen Sie den Flächeninhalt des **Parallelogramms** für $a = 4$ und $h = 5$.

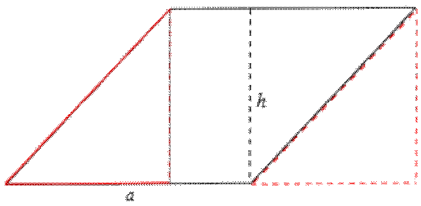
Tipp: Teilen Sie es sinnvoll auf und schauen Sie sich die entstandenen Dreiecke gut an!



Lösung

Man kann das Parallelogramm in das linke rote Dreieck, einem folgenden Rechteck und das rechte Dreieck aufspalten. Schneidet man das rote Dreieck aus und setzt es von rechts an das Parallelogramm, erhält man ein Rechteck mit den Seiten a und h. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$A = a\cdot b = 4\cdot 5 = 20$$



Zum Schluss wollen wir noch Kreisflächen berechnen. Wir haben zu Beginn bei 5.1.2 schon die Kreiszahl π kennengelernt, die über den Umfang des Kreises definiert ist. Ebenso hängt die Kreiszahl mit dem Flächeninhalt von Kreisen zusammen.

Info 5.2.8

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r berechnet sich zu

$$A = \pi\cdot r^2$$

Beispiel 5.2.9

Ein Kreis hat einen Flächeninhalt von 12.566 bei einem Radius von ungefähr $r = 2$. Wir können daraus die Kreiszahl π berechnen:

$$A = \pi\cdot r^2 \quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{A}{r^2} = \frac{12.566}{4} = 3.1415$$