1 Differentialrechnung

Modulübersicht

Das Modul umfasst folgende Abschnitte:

- Ableitung einer Funktion,
- Ableitung elementarer Funktionen,
- Rechenregeln,
- Eigenschaften von Funktionen,
- Anwendungen,
- Abschlusstest.

1.1 Ableitung

Einführung

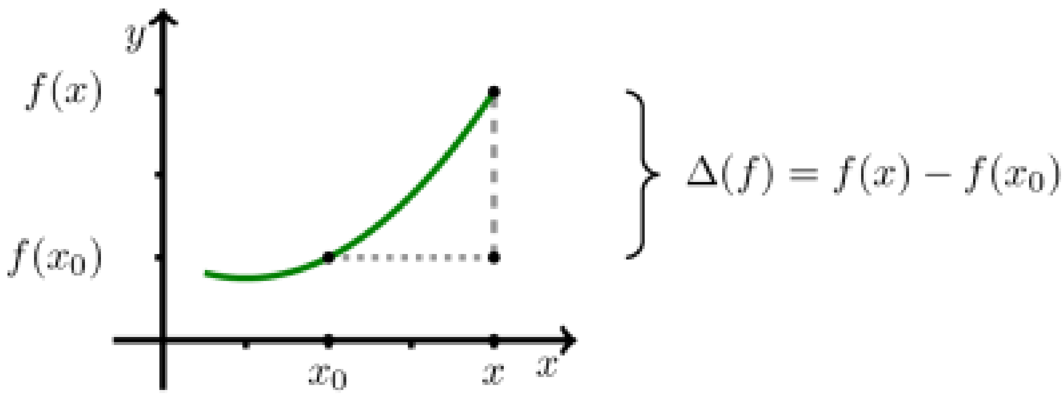
Stellen Sie sich vor, Sie sind mit Ihrem Auto unterwegs in den Urlaub. Sie fahren mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h durch eine Baustelle. Am Ende der Baustelle sehen Sie ein Schild, das es Ihnen erlaubt, ab sofort wieder mit eine Geschwindigkeit von 120 km/h zu fahren. Auch wenn Sie so kräftig wie Sie nur können auf das Gaspedal treten, Ihre Geschwindigkeit wird sich nicht sprunghaft ändern, sondern in Abhängigkeit der Zeit steigen. Schaffen Sie es, Ihre Geschwindigkeit innerhalb von 5 Sekunden von 60 km/h auf 120 km/h mit einer konstanten Änderungsrate zu erhöhen, dann finden Sie die Beschleunigung (= Geschwindigkeitsänderung pro Zeit) als konstante Änderungsrate der Geschwindigkeit. Sie ergibt sich aus dem Quotienten der Geschwindigkeitsänderung geteilt durch die dafür benötigte Zeit. Der Wert der Beschleunigung ist in diesem Fall also 12 km/h/s. In der Realität werden Sie Ihre Geschwindigkeit jedoch nicht mit einer konstanten Änderungsrate erhöhen, sondern mit einer ebenfalls zeitabhängigen Änderungsrate. Beschreiben Sie Ihre Geschwindigkeit als Funkion der Zeit $v(t)$, erhalten Sie die Beschleunigung als Steigung dieser Funktion, unabhängig davon, ob diese Steigung konstant ist oder ebenfalls zeitabhängig ist. Oder mit anderen Worten: Die Beschleunigung ist die *Ableitung* der Geschwindigkeits*funktion* $v(t)$ nach der Zeit t.

Ähnliche Zusammenhänge finden Sie auch in anderen technischen Bereichen, z.B. bei der Berechnung von inneren Kräften, die in Stahlgerüsten von Bauwerken wirken, der Vorhersage von Atmosphären- oder Meeresströmungen oder auch bei der heute so wichtigen Modellierung der Finanzmärkte.

In diesem Kapitel wiederholen wir die grundlegenden Ideen, die hinter diesen Berechnungen stecken. Wir sehen uns die Differentialrechnung an. Mit anderen Worten: Wir bilden Ableitungen von Funktionen und bestimmen so deren Steigung bzw. Änderungsrate. Auch wenn wir diese Berechnungen hier streng mathematisch durchführen werden, ist unsere Motivation nicht rein mathematischer Natur. Ableitungen nehmen in vielen wissenschaftlichen Bereichen in der Interpretation als Änderungsraten verschiedener Funktionen eine wichtige Rolle ein und werden oft als herausragende Größen untersucht.

1.1.1 Relative Änderungsrate einer Funktion

Untersuchen wir eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und skizzieren diese in einen Graphen (siehe unten). Unser Ziel ist die Beschreibung der Änderungsrate dieser Funktion an einer beliebigen Stelle x_0 zwischen a und b. Die Änderungsrate können wir über die Ableitung der Funktion bestimmen. Dazu wollen wir möglichst einfache Rechenregeln verwenden.



Halten wir x_0 und den entsprechenden Funktionswert $f(x_0)$ fest und wählen eine weitere beliebige, aber variable Stelle x zwischen a und b, sowie ihren Funktionswert $f(x)$ aus. Verbinden wir die beiden Punkte, die wir so gefunden haben, auf dem kürzesten Weg miteinander, so erhalten wir eine Gerade, die wir mithilfe einer Geradengleichung beschreiben können. Als Steigung dieser Geraden erhalten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

der beschreibt, wie sich die Funktionswerte von f **im Mittel** zwischen x_0 und x ändern. Wir haben also eine **mittelere Änderungsrate** der Funktion f im Intervall $[x_0, x]$ gefunden. Dieser Quotient wird auch als **relative Änderung** bezeichnet.

Bilden wir den Grenzwert für $x \to x_0$, stellen wir fest, dass die Gerade, die den Graphen der Funktion in den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ schneidet, immer mehr zu einer Tangenten an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$ wird. Auf diese Weise können wir uns also der Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x_0 annähern. Existiert dieser Grenzwert, so bezeichnen wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

als Ableitung von f in x_0. Die Funktion f ist dann an der Stelle x_0 **ableitbar** bzw. **differenzierbar**.

Beispiel 1.1.1

Für $f(x) = \sqrt{x}$ ist die relative Änderung an der Stelle $x_0 = 1$ gegeben durch

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$

Bewegt sich nun x auf $x_0 = 1$ zu, so erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} = \frac{1}{2}.$$

Als Ableitung würde man $f'(1) = \frac{1}{2}$ aufschreiben.

Aufgabe 1.1.1
Es sei $f(x) = x^2$ und $x_0 = 1$. In diesem Punkt beträgt die relative Änderung (für ein $x > 0$)

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \boxed{}.$$

Bewegt sich x auf $x_0 = 1$ zu, so erhalten wir die Steigung $\boxed{}$ von $f(x)$ im Punkt $x_0 = 1$.

Lösung:

Für $f(x) = x^2$ ist die relative Änderung an der Stelle $x_0 = 1$ gegeben durch

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \;=\; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \;=\; \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \;=\; x + 1\,.$$

Bewegt sich nun x auf x_0 zu, so erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)} \;=\; 2\,.$$

Das ist die Steigung der Tangente an den Graph von $f(x)$ im Punkt $x_0 = 1$. Als Ableitung würde man $f'(1) = 2$ aufschreiben.

Über die Formel für die relative Änderungsrate kann man die Ableitung nur sehr mühsam und auch nur für sehr einfache Funktionen ausrechnen. Typischerweise rechnet man die Ableitung durch Anwendung von Rechenregeln aus und durch Einsetzen bekannter Ableitungswerte für bestimmte Bausteine.

1.1.2 Ableitung

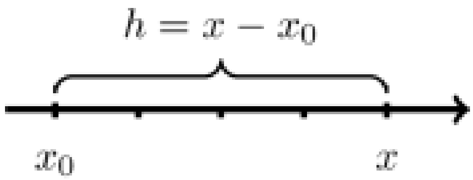
Schreibweisen der Ableitung 1

In der Mathematik, sowie auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden verschiedene Schreibweisen der Ableitung äquivalent verwendet:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Diese Schreibweisen haben jeweils die Bedeutung der Ableitung der Funktion f in x_0.

Wenn die Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ berechnet werden muss, bietet es sich oft an, den Differenzenquotienten anders aufzuschreiben. Verwenden wir die Differenz von x und x_0 und bezeichnen wir sie als $h := x - x_0$,



können wir den Differenzenquotienten mit $x = x_0 + h$ umschreiben:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Beachten Sie, dass wir keine Voraussetzung darüber getroffen haben, ob x größer oder kleiner als x_0 ist. Die Größe h kann daher positive oder negative Werte annehmen. Um die Ableitung der Funktion

f zu bestimmen, muss nun der Grenzwert für $h \to 0$ berechnet werden:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wenn dieser Grenzwert existiert, ist eine Funktion differenzierbar. Viele der häufig benutzten Funktionen sind differenzierbar. Ein einfaches Beispiel dafür, dass eine Funktion nicht unbedingt differenzierbar ist, ist die Betragsfunktion $f(x) := |x|$.

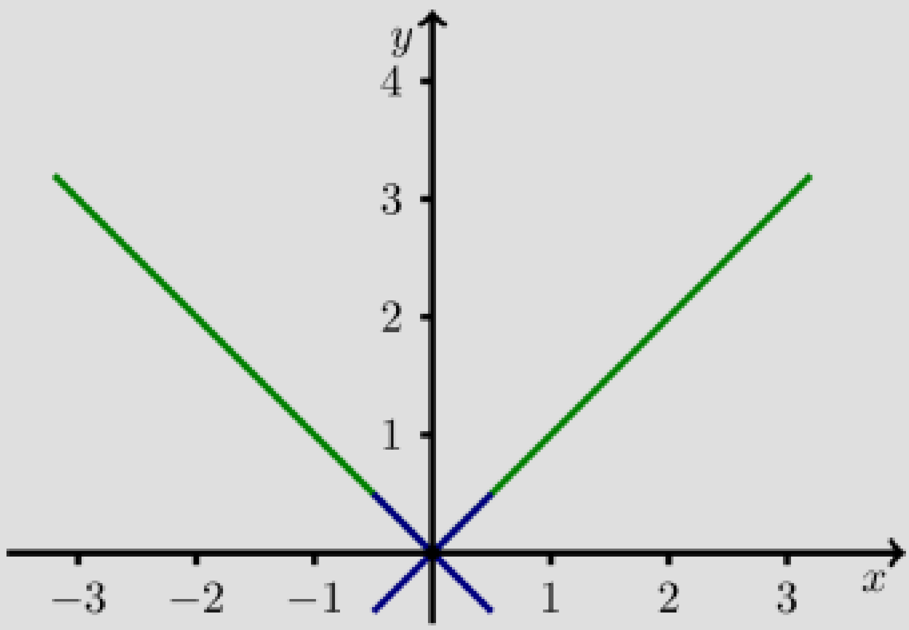
Beispiel 1.1.2

Die Betragsfunktion (siehe Modul **??** auf Seite ??, Abschnitt **??** auf Seite ??) ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Sehen wir uns den Differenzenquotienten für f an der Stelle $x_0 = 0$ an:

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Da h größer oder kleiner als 0 sein kann, müssen wir beide Fälle unterscheiden. Beginnen wir mit $h > 0$. Dann ist $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Untersuchen wir den Fall $h < 0$, so finden wir, dass $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ ist. Der Grenzwert des Differenzenquotienten hängt also von Wahl von h ab und ist damit nicht eindeutig bestimmt. Der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ existiert nicht. Daher ist die Betragsfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Der Verlauf des Graphen ändert seine Richtung an der Stelle $(0, 0)$ sprunghaft: Salopp ausgedrückt, weist der Funktionsgraph an der Stelle $(0, 0)$ einen Knick auf.



Auch wenn eine Funktion eine Sprungstelle hat, gibt es keine eindeutige Tangente an den Graphen und somit keine Ableitung.

Aufgaben

Aufgabe 1.1.2
Berechnen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von $f(x) := 4 - x^2$ für $x_1 = -2$ und für $x_2 = 1$.

Antwort:

a. Der Differenzenquotient von f zu x an der Stelle $x_1 = -2$ ist $\boxed{}$ und hat für $x \to -2$ den Grenzwert $f'(-2) = \boxed{}$.

b. Der Differenzenquotient von f zu x an der Stelle $x_2 = 1$ ist $\boxed{}$ und hat für $x \to 1$ den Grenzwert $f'(1) = \boxed{}$.

Aufgabe 1.1.3
Erläutern Sie, warum

a. $f(x) := \sqrt{x+3}$ in $x_0 = -3$,

b. $g(x) := 6 \cdot |2x - 10|$ in $x_0 = 5$

nicht differenzierbar ist.

Antwort: Die Ableitung von

a. f existiert an der Stelle $x_0 = -3$ nicht, da der Differenzenquotient $\boxed{}$ für $h \to 0$ nicht konvergiert.

b. g existiert an der Stelle $x_0 = 5$ nicht, da der Differenzenquotient für $h < 0$ den Wert $\boxed{}$ hat und für $h > 0$ den Wert $\boxed{}$. Somit existiert der Grenzwert für $h \to 0$ nicht.

1.2 Standardableitungen

Einführung

Die meisten Funktionen, die Ihnen bekannt sind, wie z.B. Polynome, trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion (siehe Modul **??** auf Seite ??), sind differenzierbar. Im folgenden wollen wir die Ableitungsregeln für diese Funktionen wiederholen.

1.2.1 Ableitung von Polynomen

Aus der Einführung der Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten ergibt sich für eine linear-affine Funktion (siehe Modul **??** auf Seite ??, Abschnitt **??** auf Seite ??) $f(x) = mx + b$, wobei m und b gegebene Zahlen sind, dass die Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich $f'(x_0) = m$ ist. (Überprüfen Sie dies gerne selbst!) Für Monome x^n mit $n \geq 1$ ist es am einfachsten, die Ableitung über den Differenzenquotienten zu bestimmen. Ohne detaillierte Rechnung oder Beweis ergeben sich die folgenden Aussagen:

Ableitung von x^n 2

Gegeben sind eine natürliche Zahl n und eine reelle Zahl r.

Die konstante Funktion $f(x) := r = r \cdot x^0$ hat die Ableitung $f'(x) = 0$.

Die Funktion $f(x) := r \cdot x^n$ hat die Ableitung

$$f'(x) = r \cdot n \cdot x^{n-1}$$

(Diese Ableitungsregel gilt im Übrigen auch, für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

Überprüfen Sie auch diese Aussagen selbst!

Beispiel 1.2.1

Wir untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x^3$. Vergleichen wir die gegebene Funktion mit den oben verwendeten Bezeichnungen, dann sind $r = 5$ und $n = 3$. Damit erhält man die Ableitung

$$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2.$$

Für Wurzelfunktionen ergibt sich eine entsprechende Aussage. Allerdings ist zu beachten, dass Wurzelfunktionen nur für $x > 0$ differenzierbar sind. Denn die Tangente an den Funktionsgraphen durch den Punkt $(0; 0)$ verläuft parallel zur y-Achse und beschreibt somit keine Funktion.

Ableitung von $x^{\frac{1}{n}}$ 3

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ ist die Funktion $f(x) := x^{\frac{1}{n}}$ für $x \geq 0$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \text{ für } x > 0$$

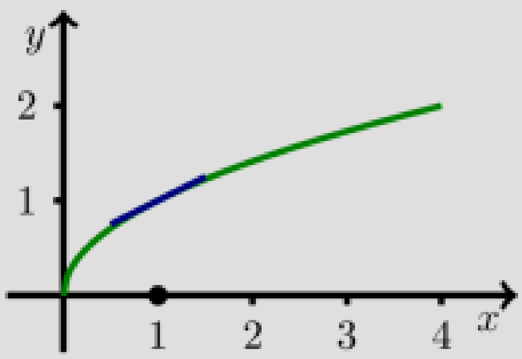
Für $n \in \mathbb{N}$ werden durch $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ Wurzelfunktionen beschrieben. Die hier beschriebene Ableitungsregel gilt natürlich auch für $n = 1$ oder $n = -1$.

Beispiel 1.2.2

Die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist für $x > 0$ differenzierbar. Die Ableitung ist durch

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

gegeben. In diesem Beispiel ist leicht zu sehen, dass die Ableitung in $x_0 = 0$ nicht existiert.



Die Tangente in $x_0 = 1$ an den Graphen der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ hat die Steigung $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.

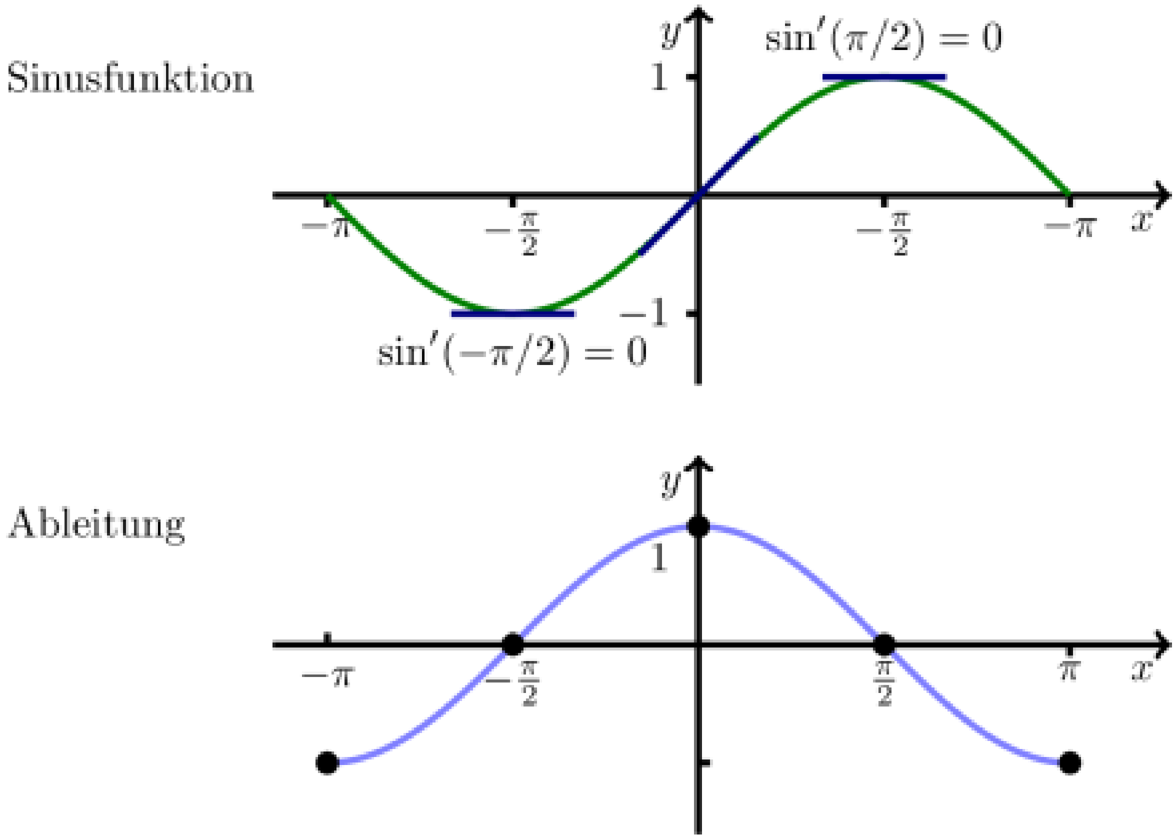
Die bisher getroffenen Aussagen können für Exponenten $p \in \mathbb{R}$ mit $p \neq 0$ für $x > 0$ verallgemeinert werden: Die Ableitung von $f(x) = x^p$ für $x > 0$ ist

$$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

1.2.2 Ableitung spezieller Funktionen

Ableitung trigonometrischer Funktionen

Die Sinusfunktion ist periodisch mit Periode 2π. Somit genügt es, die Funktion auf einem Intervall der Länge 2π zu betrachten. Einen Ausschnitt des Graphen für $-\pi \leq x \leq \pi$ zeigt die folgende Abbildung:



Wie in der Abbildung zu sehen ist, ist die Steigung des Sinus bei $x_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ gerade $f'(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$. Legt man eine Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ an den Sinus, wird man die Steigung $f'(0) = 1$ finden. Untersucht man die Stellen $x_0 = \pm\pi$, ist sofort einsichtig, dass dort dieselbe Steigung herrschen muss wie bei $x_0 = 0$, aber mit umgedrehtem Vorzeichen. Die Steigung ist dort also $f'(\pm\pi) = -1$. Als Ableitung des Sinus suchen wir also eine Funktion, die genau diese Eigenschaften erfüllt. Eine genaue Untersuchung der Bereiche zwischen diesen speziell ausgesuchten Stellen ergibt, dass der Kosinus die Ableitung des Sinus beschreibt:

Ableitung trigonometrischer Funktionen 4

Für die Sinusfunktion $f(x) := \sin(x)$ gilt

$$f'(x) = \cos(x)$$

Für die Kosinusfunktion $g(x) := \cos(x)$ gilt

$$g'(x) = -\sin(x)$$

Für die Tangensfunktion $h(x) := \tan(x)$ für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$h'(x) = 1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

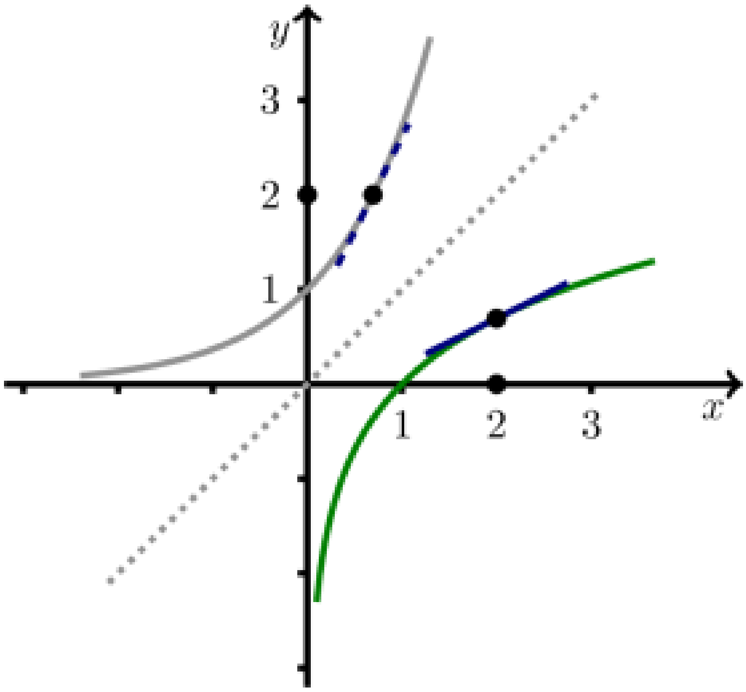
Letzteres ergibt sich auch aus den nachfolgend erläuterten Rechenregeln und der Definition des Tangens als Quotient von Sinus und Kosinus.

Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $f(x) := e^x = \exp(x)$ hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Ableitung wiederum $f'(x) = \exp(x)$ ist.

Ableitung der Logarithmusfunktion

Verwenden wir wieder die gewohnten Bezeichnungen für die unabhängige Variable, können wir ohne Beweis die Ableitung der Logarithmusfunktion angeben. Es gilt: $f'(x) = \frac{1}{x}$ ist die Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$.



Aufgaben

Aufgabe 1.2.1
Bestimmen Sie die Ableitung, indem Sie die Funktionsterme vereinfachen und dann Ihre Kenntnisse über die Ableitung bekannter Funktionen anwenden ($x > 0$):

a. $f(x) := x^6 \cdot x^{\frac{7}{2}} =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} =$ $\boxed{}$.

Damit ist

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 1.2.2
Vereinfachen Sie die Funktionsterme, um dann die Ableitung zu bestimmen:

a. $f(x) := 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := \cos^2(3x) + \sin^2(3x) =$ $\boxed{}$.

Damit ist

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 1.2.3
Vereinfachen Sie die Funktionsterme, um dann die Ableitung zu bestimmen (für $x > 0$ in der ersten Teilaufgabe):

a. $f(x) := 3\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) =$ $\boxed{}$.

b. $g(x) := (e^x)^2 \cdot e^{-x} =$ $\boxed{}$.

Damit ist

a. $f'(x) =$ $\boxed{}$.

b. $g'(x) =$ $\boxed{}$.

1.3 Rechenregeln

Einführung

Zusammen mit einigen wenigen Rechenregeln und den im letzten Abschnitt vorgestellten Ableitungen lassen sich eine Vielzahl an Funktionen differenzieren.

1.3.1 Vielfache und Summen von Funktionen

Gegeben sind beliebige differenzierbare Funktionen $u, v : D \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl r.

Summenregel und Vielfache von Funktionen 5

Sind u und v als differenzierbare Funktionen vorgegeben, dann ist auch die Summe der Funktionen $f(x) := u(x) + v(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Auch das r-fache der Funktion $f(x) := r \cdot u(x)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = r \cdot u'(x)$$

Mit diesen beiden Rechenregeln und der Ableitungsregel für Monome lässt sich z.B. jedes beliebige Polynom ableiten.

Sehen wir uns einige Beispiele an:

Beispiel 1.3.1

Das Polynom $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 5$ ist differenzierbar und wir erhalten

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4x$$

Die Ableitung der Funktion $g(x) = x^3 + \ln(x)$ für $x > 0$ ist

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3x^3 + 1}{x}$$

Leiten wir die Funktion $h(x) = 4^{-1} \cdot x^2 - \sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 + (-1) \cdot x^{\frac{1}{2}}$ ist für $x > 0$ ab, dann erhalten wir

$$h'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{2\sqrt{x}}$$

1.3.2 Produkt und Quotient von Funktionen

Produkt- und Quotientenregel 6

Auch das Produkt der Funktionen $f(x) := u(x) \cdot v(x)$ ist differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Der Quotient der Funktionen $f(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$ ist für alle x mit $v(x) \neq 0$ definiert und differenzierbar, und es gilt die **Quotientenregel**

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v'(x))^2}$$

Veranschaulichen wir auch diese Rechenregeln anhand einiger Beispiele:

Beispiel 1.3.2

Bestimmen wir die Ableitung von $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Wenden wir die Produktregel an, können wir $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$ ablesen und die Ableitungen dieser Funktionen bestimmen. Dann gilt $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = e^x$. Setzen wir diese Teilergebnisse mit der Produktregel zusammen, dann erhalten wir die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$$

Untersuchen wir die Funktion $g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Hier können wir durch Vergleich $u(x) = \sin(x)$ und $v(x) = \cos(x)$ ablesen. Mit $u'(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = -\sin(x)$ können wir auch hier die Teilergebnisse mit der Quotientenregel zur Ableigung der Funktion g zusammensetzen:

$$g'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

Mit dem in Modul **??** (Abschnitt **??** auf Seite ??) abgeleiteten Zusammenhang $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ können wir dieses Ergebnis zu einem der folgenden Ausdrücke zusammenfassen:

$$g'(x) = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Aufgabe 1.3.1
Zerlegen Sie dieses Produkt in zwei Faktoren, bilden Sie die Ableitungen und setzen Sie diese mit Hilfe der Produktregel zusammen um die Ableitung von $f(x) = \sin(x) \cdot x^3$ zu berechnen:

a. Linker Faktor $u(x) = \boxed{\quad}$ hat Ableitung $u'(x) = \boxed{\quad}$.

b. Rechter Faktor $v(x) = \boxed{}$ hat Ableitung $v'(x) = \boxed{}$.

c. Das Produkt hat die Ableitung $f'(x) = \boxed{}$.

Lösung:
Die vier Bausteine sind

$$u(x) = \sin(x) \;,\; u'(x) = \cos(x) \;,\; v(x) = x^3 \;,\; v'(x) = 3x^2$$

und Zusammensetzen mit der Produktregel ergibt

$$f'(x) = \cos(x) \cdot x^3 + \sin(x) \cdot 3x^2 \,.$$

Aufgabe 1.3.2
Zerlegen Sie diesen Quotienten in Zähler und Nenner, bilden Sie die Ableitungen und setzen Sie diese mit Hilfe der Quotientenregel zusammen um die Ableitung von $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ zu berechnen:

a. Zähler $u(x) = \boxed{}$ hat Ableitung $u'(x) = \boxed{}$.

b. Nenner $v(x) = \boxed{}$ hat Ableitung $v'(x) = \boxed{}$.

c. Der Quotient hat die Ableitung $f'(x) = \boxed{}$.

Lösung:
Die vier Bausteine sind

$$u(x) = \ln(x) \;,\; u'(x) = \frac{1}{x} \;,\; v(x) = x^2 \;,\; v'(x) = 2x$$

und Zusammensetzen mit der Quotientenregel ergibt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2\ln(x)}{x^3}$$

wobei der letzte Umformungsschritt (Kürzen um x) nur der Vereinfachung dient.

1.3.3 Verkettung von Funktionen

Zum Abschluss wollen wir die Verkettung (Modul **??** auf Seite ??, Abschnitt **??** auf Seite ??) von Funktionen untersuchen. Wir wollen also wissen, was passiert, wenn wir eine Funktion u (innere Funktion) in eine andere Funktion v (äußere Funktion) einsetzen. Eine solche Verkettung wird in der Mathematik durch die Schreibweise $f(x) := (v \circ u)(x) = v(u(x))$ dargestellt. Diese bedeutet, dass wir den Wert einer Funktion u in Abhängigkeit von der Variable x bestimmen. Diesen so berechneten Wert u verwenden wir als neue Variable, die wir in v einsetzen. Aus dieser Kombination berechnen wir schließlich den endgültigen Funktionswert $v(u(x))$.

Kettenregel 7

Die Ableitung der Funktion $f(x) := (v \circ u)(x) = v(u(x))$ kann mit der **Kettenregel** bestimmt werden:

$$f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$$

Hierbei ist $v'(u)$ als Ableitung der Funktion v nach u zu verstehen. Bei diesem Teil der Ableitung wird die Abhängigkeit der Funktion u von der Variable x nicht berücksichtigt. Es gilt der Merksatz: Innere Ableitung $\times$ äußere Ableitung.

Machen wir uns diese Ableitungsregel an einigen Beispielen klar:

Beispiel 1.3.3

Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $f(x) = (3 - 2x)^5$. Im Vergleich mit der Kettenregel müssen wir eine innere und eine äußere Funktion ablesen. Verwenden wir $u(x) = 3 - 2x$ als innere Funktion, dann können wir $v(u) = u^5$ als äußere Funktion ablesen. Setzen wir $u(x)$ für u in $v(u)$ ein, erhalten wir die ursprüngliche Funktion f.

Um die Ableitung von f zu bestimmen, leiten wir zunächst u nach x ab und erhalten $u'(x) = -2$ als innere Ableitung. Für die äußere Ableitung leiten wir v nach u ab und finden $v'(u) = 5u^4$. Setzen wir diese Zwischenergebnisse in die Kettenregel ein, so bekommen wir die Ableitung f' der Funktion f:

$$f'(x) = 5u^4 \cdot (-2) = 5(3 - 2x)^4 \cdot (-2) = -10(3 - 2x)^4$$

Sehen wir uns ein zweites Beispiel an und bestimmen die Ableitung von $g(x) = e^{x^3}$ und verwenden die Zuordnung $u(x) = x^3$ für die innere Funktion und $v(u) = e^u$ für die äußere Funktion. Bestimmen wir die innere und äußere Ableitung, dann erhalten wir $u'(x) = 3x^2$ und $v'(u) = e^u$. Setzen wir beides in die Kettenregel ein, dann finden wir die Ableitung der Funktion g:

$$g'(x) = e^u \cdot 3x^2 = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

Aufgaben

Aufgabe 1.3.3
Berechnen Sie die Ableitung von

a. $f(x) := 3 + 5x$ zu $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g(x) := \frac{1}{4x} - x^3$ zu $g'(x) =$ $\boxed{}$

c. $h(x) := 2\sqrt{x} + 4x^{-3}$ zu $h'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 1.3.4
Berechnen und vereinfachen Sie die Ableitung von

a. $f(x) := \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ zu $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g(x) := \sin(3x) \cdot \cos(3x)$ zu $g'(x) =$ $\boxed{}$

c. $h(x) := \frac{\sin(3x)}{\sin(6x)}$ zu $h'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 1.3.5
Berechnen Sie die Ableitung von

a. $f(x) := e^{5x}$ zu $f'(x) =$ $\boxed{}$

b. $g(x) := x \cdot e^{6x}$ zu $g'(x) =$ $\boxed{}$

c. $h(x) := (x^2 - x) \cdot e^{-2x}$ zu $h'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 1.3.6
Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von $f(x) := \sin(1 - 2x)$.

Antwort: Wir bezeichnen $f^{(k)}$ als die k-te Ableitung von f. Damit ist

- $f^{(1)}x) =$ $\boxed{}$
- $f^{(2)}(x) =$ $\boxed{}$
- $f^{(3)}x) =$ $\boxed{}$
- $f^{(4)}x) =$ $\boxed{}$

1.4 Eigenschaften von Funktionen

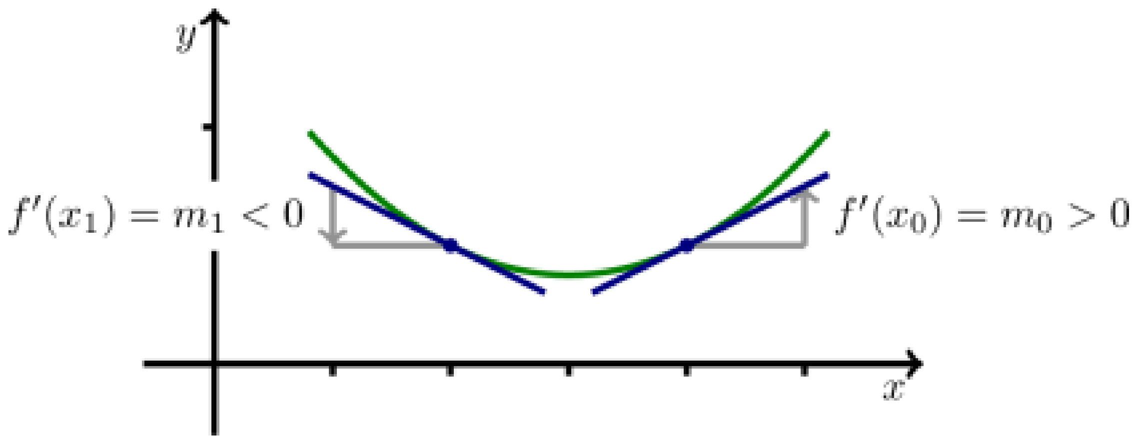
Einführung

Die Ableitung wurde weiter oben mittels einer Tangenten an den Graphen einer Funktion eingeführt, die die Änderungsrate bzw. Ableitung einer Funktion „näherungsweise“ beschreibt. Aus den Eigenschaften dieser Geraden können wir auch auf Eigenschaften der Funktion schließen.

Inhalt

1.4.1 Monotonie

Mit der Ableitung kann das lokale Wachstumsverhalten untersucht werden, das heißt ob für größer werdende x-Werte die Funktionswerte größer oder kleiner werden. Dazu wird eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ betrachtet, die auf $(a, b) \subseteq D$ differenzierbar ist.



Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle x zwischen a und b gilt, dann ist f auf dem Intervall (a, b) monoton fallend.

Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle x zwischen a und b gilt, dann ist f auf dem Intervall (a, b) monoton wachsend.

Somit genügt es, das Vorzeichen der Ableitung f' zu bestimmen, um zu erkennen, ob eine Funktion monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beispiel 1.4.1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$. Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $f'(x) \geq 0$ und damit f monoton wachsend.

Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 10$ hat die Ableitung $g'(x) = 6x^2 + 12x - 18 = 6(x + 3)(x - 1)$ die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$. Zur Untersuchung des Monotonieverhaltens können wir also drei Bereiche unterscheiden, in denen die g' jeweils ein anderes Vorzeichen hat.

Mit Hilfe folgender Tabelle wird bestimmt, in welchen Bereichen die Ableitung von g positiv bzw. negativ ist. Diese Bereiche entsprechen den Monotoniebereichen von g. Der Eintrag + besagt, dass der betrachtete Term im angegebenen Intervall positiv ist. Wenn er negativ ist, wird $-$ eingetragen.

x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x$
$x + 3$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
g ist monoton	wachsend	fallend	wachsend

Die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{1}{x}$ hat die Ableitung $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Hier gilt $h'(x) < 0$ für alle $x \neq 0$.

Auch wenn wir für die beiden unterschiedenen Teilbereiche dasselbe Monotonieverhalten finden, ist h nicht über den gesamten Definitionsbereich monoton fallend. Als Gegenbeispiel können wir $h(-2) = -\frac{1}{2}$ und $h(1) = 1$ anführen. Hier gilt $-2 < 1$, aber auch $h(-2) < h(1)$. Dies entspricht einem wachsenden Verhalten beim Übergang vom einen zum anderen Teilbereich. Dass die Funktion h auf $(-\infty, 0)$ monoton fallend ist, bedeutet also, die Einschränkung von h auf dieses Intervall ist monoton fallend. Zudem ist h für alle $x > 0$ ebenfalls monoton fallend.

1.4.2 Zweite Ableitung und Krümmungseigenschaften

Seien $a, b \in D$ mit $a < b$. Wir untersuchen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(a, b) \subseteq D$ differenzierbar ist. Ist deren Ableitung f' ebenfalls auf dem Intervall $(a, b) \subseteq D$ differenzierbar, so nennen wir f **zweimal differenzierbar**. Bilden wir die Ableitung der ersten Ableitung von f, dann nennen wir $(f')' = f''$ die **zweite Ableitung** der Funktion f.

Wir können die zweite Ableitung der Funktion f verwenden, um das Krümmungsverhalten der Funktion zu untersuchen:

Krümmungseigenschaften 8

Ist $f''(x) \geq 0$ für alle x zwischen a und b, dann nennen wir f auf dem Intervall (a, b) **konvex (linksgekrümmt)**.

Ist $f''(x) \leq 0$ für alle x zwischen a und b, dann nennen wir f auf dem Intervall (a, b) **konkav (rechtsgekrümmt)**.

Somit genügt es, das Vorzeichen der zweiten Ableitung f'' zu bestimmen, um zu erkennen, ob eine Funktion konvex (linksgekrümmt) oder konkav (rechtsgekrümmt) ist.

Anmerkung zur Notation 9

Die zweite und weitere „höhere“ Ableitungen werden oft mit natürlichen Zahlen in runden Klammern gekennzeichnet: Die k-te Ableitung wird dann mit $f^{(k)}$ bezeichnet. Diese Bezeichnung wird besonders in allgemein gehaltenen Formeln auch für die (erste) Ableitung für $k = 1$ und für die Funktion f selbst für $k = 0$ verwendet.

Damit bezeichnet

- $f^{(0)} = f$ die Funktion f,
- $f^{(1)} = f'$ die (erste) Ableitung,
- $f^{(2)} = f''$ die zweite Ableitung,
- $f^{(3)}$ die dritte Ableitung,
- $f^{(4)}$ die vierte Ableitung von f.

Diese Liste kann selbstverständlich beliebig lange fortgeführt werden, solange die Ableitungen von f existieren.

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine monoton wachsende Funktion in einem Bereich konvex und in einem anderen konkav sein kann.

Beispiel 1.4.2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist zweimal differenzierbar. Wegen $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ für alle x ist f auf dem gesamten Definitionsbereich monoton wachsend.

Weiter ist $f''(x) = 6x$. Somit ist für $x < 0$ auch $f'' < 0$ und damit f hier konkav (nach rechts gekrümmt). Für $x > 0$ ist $f''(x) > 0$, sodass f für $x > 0$ konvex (nach links gekrümmt) ist.

Aufgaben

Aufgabe 1.4.1

In welchen möglichst großen offenen Intervallen ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$ monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend?

Antwort:

- f ist auf $(-\infty, 0)$ monoton ______ .
- f ist auf $(0, \infty)$ monoton ______ .

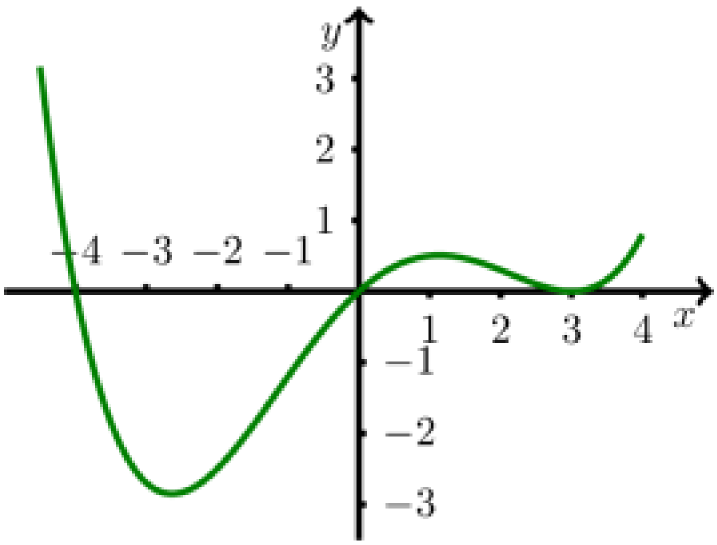
Aufgabe 1.4.2

In welchen möglichst großen offenen Intervallen $(c; d)$ ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$ für $x > 0$ konvex beziehungsweise konkav? Antwort:

- f ist auf ______ konvex.
- f ist auf ______ konkav.

Aufgabe 1.4.3

Gegeben ist eine Funktion $f : [-4,5; 4] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 2$, deren Ableitung f' in nachstehendem Graphen gezeichnet ist.



a. Wo ist f monoton wachsend, wo monoton fallend? Gesucht sind jeweils möglichst große offene Intervalle $(c; d)$, auf denen f diese Eigenschaft hat.

b. Welche Aussagen erhalten Sie über die Maximal- beziehungsweise Minimalstellen der Funktion f?

Antwort:

- f ist auf $(-4.5,$ ______ $)$ monoton ______ .
- f ist auf $($ ______ $, 0)$ monoton ______ .

- f ist auf $(0, 3)$ monoton $\boxed{}$.
- f ist auf $(3, 4)$ monoton $\boxed{}$.

Die Maximalstelle von f ist $\boxed{}$. Die Minimalstelle von f ist $\boxed{}$.

1.5 Anwendungen

1.5.1 Kurvendiskussion

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ für $x \in (a, b)$. Eine vollständige Kurvendiskussion für f besteht in diesem Kurs aus folgenden Angaben:

1. Maximaler Definitionsbereich
2. Achsenschnittpunkte des Graphen
3. Symmetrie des Graphen
4. Grenzverhalten/Asymptoten
5. Die ersten Ableitungen
6. Extremwerte
7. Monotonieverhalten
8. Wendestellen
9. Krümmungsverhalten
10. Skizze des Graphen

Viele dieser Punkte wurden bereits in Modul **??** auf Seite ?? besprochen. Daher werden wir im Folgenden nur kurz wiederholen, was wir unter den einzelnen Schritten der Kurvendiskussion verstehen wollen. Im Anschluss werden wir uns eine Kurvendiskussion detailliert an einem Beispiel ansehen.

Der erste Teil der Kurvendiskussion besteht aus algebraischen und geometrischen Aspekten von f:

Maximaler Definitionsbereich Wir bestimmen alle reellen Zahlen x, für die $f(x)$ existiert. Die Menge D all dieser Zahlen wird maximaler Definitionsbereich genannt.

Symmetrie des Graphen Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ ist. Ist $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$, dann ist der Graph zum Ursprung $(0; 0)$ des Koordinatensystems punktsymmetrisch.

Schnittpunkte mit den Achsen

- x-Achse: Wir bestimmen alle Nullstellen von f.
- y-Achse: Wir berechnen den Funktionswert $f(0)$ (falls $0 \in D$).

Asymptotisches Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs Wir untersuchen, die Grenzwerte der Funktion f an den Grenzen ihres Definitionsbereichs.

Im zweiten Teil wird die Funktion mittels Folgerungen aus der Ableitung analytisch untersucht. Dazu müssen wir natürlich zunächst die erste und zweite Ableitung berechnen, sofern diese existieren.

Ableitungen Berechnung der ersten und zweiten Ableitung (soweit vorhanden).

Extremwerte und Monotonie Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$
Wir berechnen also diejenigen Stellen x_0, an denen die Ableitung f' den Wert Null annimmt. Wenn an diesen Stellen auch die zweite Ableitung f'' existiert, gilt:

- $f''(x_0) > 0$: x_0 ist eine Minimalstelle von f.
- $f''(x_0) < 0$: x_0 ist eine Maximalstelle von f.

Die Funktion f ist auf den Intervallen des Defitionsbereichs monoton wachsend, wo $f'(x) \geq 0$ gilt. Sie ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ gilt.

Wendestellen und Krümmungseigenschaften Notwendige Bedingung für Wendestellen (wenn die zweite Ableitung f'' existiert): $f''(w) = 0$
Wenn $f''(w_0) = 0$ und $f^{(3)}(w_0) \neq 0$ ist, dann ist w_0 eine Wendestelle, d.h. f ändert an dieser Stelle das Krümmungsverhalten.
Die Funktion f ist auf den Intervallen des Defitionsbereichs konvex (linksgekrümmt), wo $f^{(2)}(x) \geq 0$ gilt. Sie ist konkav (rechtsgekrümmt), wenn $f^{(2)}(x) \leq 0$ gilt.

Skizze des Graphen Wir fertigen eine Skizze des Graphen in einem geeigneten Koordinatensystem unter Berücksichtigung der während der Kurvendiskussion gewonnenen Daten.

1.5.2 Ausführliches Beispiel

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+2} .$$

Definitionsbereich
Der maximale Definitionsbereich dieser Funktion ist $D_f = \mathbb{R}$, da der Nenner der Funktion $x^2 + 2 \geq 2$ niemals Null wird und daher keine Stellen ausgeschlossen werden müssen.

Achsenschnittpunkte
Die Nullstellen der Funktion entsprechen den Nullstellen des Zählers. Daher schneidet f die x-Achse nur im Nullpunkt $(0, 0)$, denn der Zähler wird nur für $x = 0$ zu Null. Dies ist auch der einzige Schnittpunkt mit der y-Achse, da $f(0) = 0$ ist.

Symmetrie
Um das Symmetrieverhalten zu untersuchen, ersetzen wir x durch $(-x)$. Es gilt

$$f(-x) = \frac{4\cdot(-x)}{(-x)^2+2} = -\frac{4x}{x^2+2} = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f ist folglich punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grenzverhalten
Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, daher ist nur das Grenzverhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ zu untersuchen. Da $f(x)$ ein Bruch aus zwei Polynomen ist und der Nenner die höhere Potenz besitzt, ist die x-Achse die waagerechte Asymptote in beide Richtungen: $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ sowie für $x \to -\infty$.

Ableitungen
Die ersten beiden Ableitungen der Funktion erhalten wir mit der Quotientenregel:

$$f'(x) = 4\cdot\frac{1\cdot(x^2+2) - x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = 4\cdot\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} .$$

Erneutes Ableiten und Vereinfachen ergibt

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\cdot\frac{-2x(x^2+2)^2-(-x^2+2)\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4} \\ &= 4\cdot\frac{-2x(x^2+2)-(-x^2+2)\cdot 4x}{(x^2+2)^3} \\ &= 4\cdot\frac{-2x^3-4x+4x^3-8x}{(x^2+2)^3} \\ &= 4\cdot\frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3} \\ &= 8\cdot\frac{x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}\,. \end{aligned}$$

Extremwerte
Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle, $f'(x)=0$, ist hier gleichbedeutend mit $-x^2+2=0$. Wir erhalten also $x_1=\sqrt{2}$ und $x_2=-\sqrt{2}$. Untersuchen wir an diesen Stellen auch das Verhalten der zweiten Ableitung:

$$f''(x_1) = 8\frac{\sqrt{2}\cdot(2-6)}{(2+2)^3}<0\ ,\quad f''(x_2) = 8\frac{-\sqrt{2}\cdot(2-6)}{(2+2)^3}>0\ .$$

Folglich ist x_1 eine Maximalstelle und x_2 eine Minimalstelle von f. Durch Einsetzen in f erhalten wir den Hochpunkt $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ und den Tiefpunkt $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ von f.

Monotonieverhalten
Da f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann das Monotonieverhalten an den Extremstellen abgelesen werden: f ist monoton fallend auf $(-\infty,-\sqrt{2})$, monoton wachsend auf $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ und monoton fallend auf $(\sqrt{2},\infty)$. Monotonieintervalle geben wir stets in offener Form an.

Wendestellen
Aus der notwendigen Bedingung für Wendestellen $f''(x)=0$ erhalten wir die Gleichung $8x(x^2-6)=0$. Somit sind $w_0=0$, $w_1=\sqrt{6}$ und $w_2=-\sqrt{6}$ die einzigen Lösungen. Das Polynom im Nenner von f'' ist stets größer als Null. Da das Zählerpolynom nur einfache Nullstellen besitzt, ändert $f''(x)$ in allen diesen Stellen das Vorzeichen. Es handelt sich daher um Wendestellen von f. Die Wendepunkte $(0,0)$, $(\sqrt{6},\frac{1}{2}\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6},-\frac{1}{2}\sqrt{6})$ des Graphen von f ergeben sich durch Einsetzen in f.

Krümmungsverhalten
Die zweimal differenzierbare Funktion $f(x)$ ist konvex, wenn die zweite Ableitung größer oder gleich Null ist. Sie ist konkav, wenn die zweite Ableitung kleiner oder gleich Null ist. Da das Polynom im Nenner von f'' stets positiv ist, genügt es, das Vorzeichen des Polynoms $p(x)=8x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$ im Zähler zu untersuchen. Für $0<x<\sqrt{6}$ ist es negativ (dort ist f konkav). Für $x>\sqrt{6}$ ist es positiv (dort ist f konvex). Da f punktsymmetrisch ist folgt, dass f auf den Intervallen $(-\sqrt{6},0)$ und $(\sqrt{6},\infty)$ konvex sowie auf $(-\infty,-\sqrt{6})$ und $(0,\sqrt{6})$ konkav ist.

Skizze des Graphen

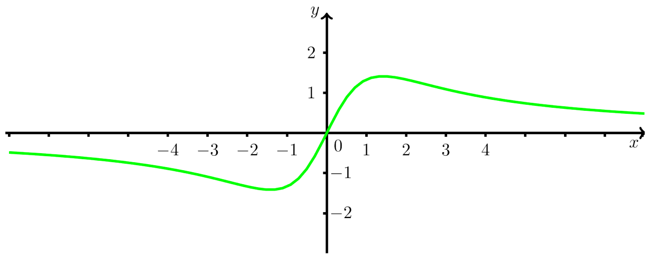


Abbildung 1.1: Die Funktion $f(x)$ skizziert auf dem Intervall $[-8, 8]$.

Aufgaben

Aufgabe 1.5.1
Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = (2x - x^2)e^x$ und füllen Sie die Eingabefelder mit Ihren Ergebnissen aus:

Definitionsbereich: [ ] .

Menge der Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen von $f(x)$): [ ] .

Einziger Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei $y =$ [ ] .

Symmetrie: [ ] y-Achsensymmtrisch [ ] Punktsymmetrisch zum Ursprung

Grenzverhalten: Die Asymptoten am Rand sind [ ] am für $x \to \infty$ und [ ] für $x \to -\infty$.

Ableitungen: Es ist $f'(x) =$ [ ] sowie $f''(x) =$ [ ] .

Monotonieverhalten: Die Funktion ist auf dem Intervall [ ] monoton wachsend und ansonsten monoton fallend.

Extremwerte: Die Stelle $x_1 =$ [ ] ist ein Minimum und $x_2 =$ [ ] ist ein Maximum.

Wendepunkte: Die Menge der Wendepunkte (nur x-Komponente) ist [ ] .

Skizzieren Sie den Graph und vergleichen Sie ihn anschließend mit der Musterlösung:

Lösung:
Definitionsbereich
Es gilt $f(x) = -x(x-2)e^x$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, damit ist $D_f = \mathbb{R}$ der maximale Definitionsbereich.

Achsenschnittpunkte
Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen der Funktion) liegen bei $x = 0$ und $x = 2$, was auf die Punkte $(0,0)$ und $(2,0)$ führt. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0,0)$.

Symmetrie
Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade und damit der Graph von f weder y-achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs.

Grenzverhalten
Da die Funktion für alle reellen Zahlen definiert ist, müssen nur die Asymptoten bei $\pm\infty$ untersucht werden:

$$\lim_{x\to\infty} -x(x-2)e^x \;=\; -\infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} -x(x-2)e^x \;=\; 0\,.$$

Somit ist $y = 0$ für $x \to -\infty$ eine Asymptote.

Ableitungen
Die ersten beiden Ableitungen von $f(x)$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-2x)e^x + (2x-x^2)e^x = (2-x^2)e^x = -(x^2-2)e^x \,, \\ f''(x) &= -2xe^x + (2-x^2)e^x = -(x^2+2x-2)e^x \,. \end{aligned}$$

Monotonieverhalten und Extremwerte
Lösungen von $f'(x) = 0$ sind $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Weiter ist $x_1 < x_2$ und

$$f'(x) = -(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})e^x \,.$$

Auf $(-\infty, -\sqrt{2})$ ist f' negativ und damit f monoton fallend. Auf $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist f' positiv und damit f monoton wachsend. Auf $(\sqrt{2}, \infty)$ ist f' negativ und damit f monoton fallend. Somit ist $x_1 = -\sqrt{2}$ Minimalstelle und $x_2 = \sqrt{2}$ Maximalstelle.

Wendepunkte
Die notwendige Bedingung für Wendepunkte $f''(x) = 0$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 2 = 0$. Die Lösungen sind $w_1 = \frac{-2-\sqrt{4+8}}{2} = -1 - \sqrt{3}$ und $w_2 = \frac{-2+\sqrt{4+8}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.

Skizze des Graphen

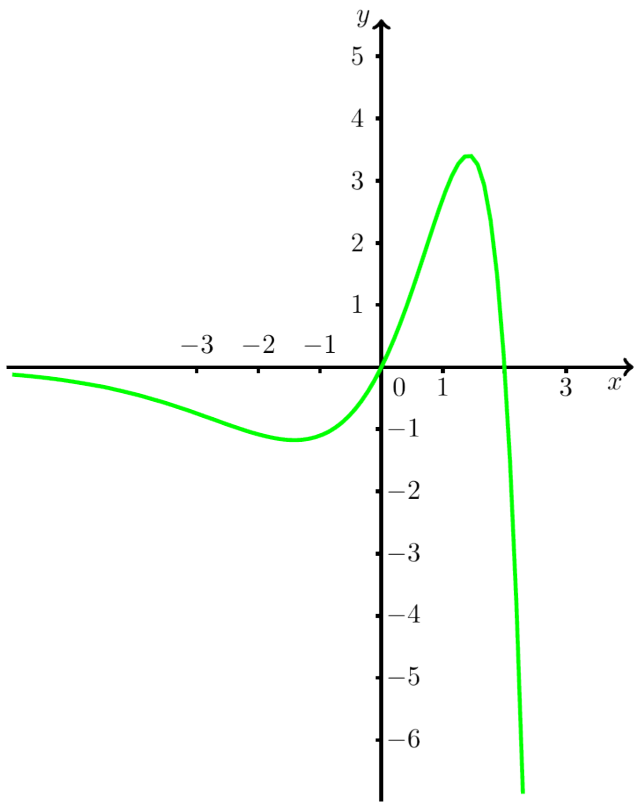


Abbildung 1.2: Die Funktion $f(x)$ skizziert auf dem Intervall $(-6, 2.3)$.

1.5.3 Optimierungsaufgaben

In vielen Anwendungen der Technik oder Wirtschaft findet man Problemlösungen, die nicht eindeutig sind. Häufig hängen sie von variablen Bedingungen ab. Um eine ideale Lösung zu finden, werden zusätzliche Eigenschaften (Nebenbedingungen) definiert, die von der Lösung erfüllt werden müssen. Dies führt sehr oft zu sogenannten **Optimierungsaufgaben**, bei denen aus einer Schar von Lösungen diejenige gesucht werden muss, die eine vorab festgelegte Eigenschaft am besten erfüllt.

Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe, eine zylinderförmige Dose zu konstruieren. Die Dose soll zusätzlich die Bedingung erfüllen, ein Fassungsvermögen (Volumen) von einem Liter zu haben. Sind r der Radius und h die Höhe der Dose, so soll also $V = \pi r^2 \cdot h = 1$ sein (auf die physikalischen Einheiten wurde der mathematischen Einfachheit halber verzichtet – in der Praxis ist es allerdings unumgänglich, mit den Einheiten zu rechnen). Um Arbeitsmaterial zu sparen, suchen wir nach derjenigen Dose, die eine möglichst kleine Oberfläche $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh$ hat. Hier ist die Oberfläche O eine Funktion in Abhängigkeit von Radius r und Höhe h der Dose.

Mathematisch formuliert führt die Aufgabe auf die Suche nach einem Minimum für die Funktion O der Oberfläche, wobei für die Berechnung des Minimums nur Werte für r und h zugelassen werden, für die auch die Bedingung über das Volumen $V = \pi r^2 \cdot h = 1$ erfüllt ist. Eine solche zusätzliche Bedingung bei der Suche nach Extremstellen wird auch **Nebenbedingung** genannt.

Optimierungsaufgabe 10

In einer **Optimierungsaufgabe** wird eine Extremstelle x_{ext} einer Funktion f gesucht, die eine gegebene Gleichung $g(x_{\text{ext}}) = b$ erfüllt.

Wenn ein globales Minimum gesucht wird, spricht man auch von einer **Minimierungsaufgabe**. Wenn ein Maximum gesucht wird, heißt die Optimierungsaufgabe eine **Maximierungsaufgabe**.

Die Funktion f heißt **Zielfunktion**, und die Gleichung $g(x) = b$ wird **Nebenbedingung** der Optimierungsaufgabe genannt.

1.5.4 Beispiel

Sehen wir uns das Beispiel aus der Einführung dieses Abschnitts etwas genauer an und minimieren die Oberfläche einer zylinderförmigen Dose bei einem vorgegebenen Volumen (Grundfläche mal Höhe)

$$V = \pi r^2 h = 1,$$

wobei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Dose sind. Die Oberfläche wird zusammengesetzt aus zweimal dem Deckel (je πr^2) und der Mantelfläche (πrh) und wir erhalten $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Die Oberfläche der Dose ist eine Funktion von Radius r und Höhe h. Im Gegensatz dazu wird dem Volumen ein fester Wert zugeordnet (Nebenbedingung). Wir können also schreiben:

$$O\,(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Wegen der Nebenbedingung, dass $V = \pi r^2 h = 1$ sein soll, kann man dieses Problem in ursprünglich zwei Variablen (r und h) auf ein Problem mit nur noch einer Variablen reduzieren. Formen wir das

Volumen nach der Höhe der Dose um:

$$\pi r^2 h = 1$$
$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Setzen wir diese Formel in die Fuktion $O(r, h)$ ein, reduziert O sich auf eine Funktion in nur einer Variablen:

$$O\left(r,h\right) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{1}{r}\right) = O\left(r\right)$$

Nach dieser Umformung können wir die Frage nach der minimalen Oberfläche der Dose ganz analog zu den Extremwerten von Funktionen bearbeiten. Bilden wir also die erste Ableitung der Funktion O nach der Variablen r und setzen diese gleich Null:

$$\begin{aligned} O'\left(r\right) = 2\left(2\pi r - \frac{1}{r^2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2\pi r &= \frac{1}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad 2\pi r^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad r^3 &= \frac{1}{2\pi} \\ \Leftrightarrow \quad r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die zweite Ableitung von O ein, um zu überprüfen, ob wir wirklich ein Minimum gefunden haben:

$$O''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^3} = 12\pi > 0$$

Für den Radius $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ wird die Oberfläche der zylindrischen Dose mit dem gegebenen Volumen $V = 1$ minimal. Die Höhe erhalten wir in diesem Fall zu $h = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$. Stellen wir eine Dose mit dieser Bemaßung her, werden wir für ein vorgegebenes Volumen auch den Materialverbrauch minimieren.

1.6 Abschlusstest

Abschlusstest Kapitel 6

Aufgabe 1.6.1
In einem Behählter wird um 9 Uhr eine Temperatur von $-10°C$ gemessen. Um 15 Uhr beträgt die Temperatur $-58°C$. Nach weiteren vierzehn Stunden ist die Temperatur auf $-140°C$ gefallen.

a. Wie groß ist die mittlere Änderungsrate der Temperatur aufgrund der ersten und zweiten Messung?

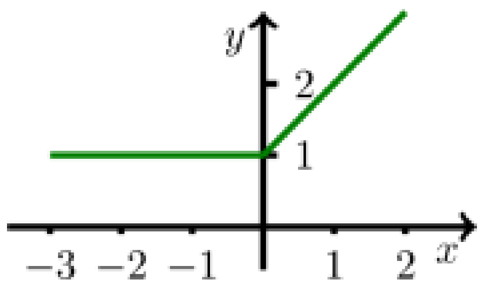
   Antwort: ☐

b. In der (mittleren) Änderungsrate drückt sich die Eigenschaft, dass die Temperatur fällt, dadurch aus, dass die Änderungsrate ☐ ist.
   Hinweis:
   Geben Sie ein Adjektiv an.

c. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur der gesamten Messdauer, die sich anhand der ersten und letzten Messung ergibt.

   Antwort: ☐

Aufgabe 1.6.2
Zu einer Funktion $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ gehört die Ableitung f', deren Graph hier gezeichnet ist:



a. Die Funktionswerte von f zwischen -3 und 0

   ☐ sind konstant, ☐ nehmen um 3 zu, ☐ nehmen ab.

b. Die Funktion f hat an der Stelle 0

   ☐ eine Sprungstelle, ☐ keine Ableitung, ☐ die Ableitung 1.

Aufgabe 1.6.3
Berechnen Sie für

a. $f(x) := \ln\left(x^3 + x^2\right)$ für $x > 0$ die Ableitung $f'(x) =$ ☐

b. $g(x) := x \cdot e^{-x}$ die zweite Ableitung $g''(x) =$ ☐

Aufgabe 1.6.4
In welchen Bereichen ist $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, in welchen konkav, wenn $f'(x) = x \cdot \ln x$

gilt? Geben Sie als Bereiche möglichst große offene Intervalle (c, d) an:

a. f ist auf $\boxed{}$ monoton fallend,

b. f ist auf $\boxed{}$ konkav.

Aufgabe 1.6.5
Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen und Wendestellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x^2 - 3x) \cdot e^{2x}$ für $x \in \mathbb{R}$.