Onlinekurs Mathematik - Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem - Punkte und Geraden in der Ebene

9.1.2 Zwei-Punkte-Form

ungünstige Definition einer Funktionsgleichung

Geraden mit Funktionsgleichungen zu beschreiben hat den Vorteil, dass rechnerische Aufgaben wie das Finden von Schnittpunkten damit einfach zu lösen sind, da man die gegebenen Terme für die anzusetzende Gleichungen sofort einsetzen kann. Allerdings lässt sich nicht jede Gerade durch eine Funktionsgleichung beschreiben. Eine Funktionsgleichung drückt aus, dass man allen möglichen x-Werten jeweils einen y-Wert (und damit einen Punkt auf der Geraden) zuordnen kann. Vertikale Geraden sind keine Graphen von linear-affinen Funktionen, hier kann man nicht jedem x-Wert einen Punkt zuordnen. Für solche Geraden benötigt man andere Beschreibungstechniken, eine davon ist die **Zwei-Punkte-Form**:

Info 9.1.9

Eine Gerade ist eindeutig beschrieben durch Angabe von zwei verschiedenen Punkten auf der Geraden. Sind P und Q die beiden Punkte, so notiert man die durch diese beiden Punkte verlaufende Gerade durch $\overline{PQ}$.

Beispielsweise kann man die durch die Funktionsgleichung $f(x) = 2x + 1$ gegebene Gerade auch durch die beiden Punkte $P = (0; 1)$ und $Q = (2; 5)$ beschreiben. Dagegen kann man die vertikale Gerade durch die Punkte $R = (2; 0)$ und $S = (2; 1)$ nicht durch eine Funktionsgleichung beschreiben. Mit der Zwei-Punkte-Form kann man jede mögliche Gerade beschreiben, allerdings eignet sie sich nicht zur Berechnung von Schnittpunkten. Um Schnittpunkte auszurechnen, muss man die Geraden daher erst in Funktionsform beschreiben:

Info 9.1.10

Ist eine nicht vertikale Gerade $\overline{PQ}$ durch die beiden Punkte $P = (x_1; y_1)$ und $Q = (x_2; y_2)$ gegeben, so besitzt sie die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Den Achsenabschnitt b findet man dann durch Einsetzen eines Punktes in die Gleichung $y = mx + b$.

Beispiel 9.1.11
Ist die Gerade $\overline{PQ}$ gegeben mit $P = (1; 2)$ und $Q = (5; 3)$, so besitzt sie die Steigung $m = \frac{3-2}{5-1} = \frac{1}{4}$. Einsetzen des Punkts P in die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{4}x + b$ ergibt die Gleichung $2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + b$. Auflösen nach b ergibt $b = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Also ist

$$y = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{7}{4}$$

die Funktionsgleichung für die Gerade $\overline{PQ}$.

Die vertikale Gerade durch die Punkte $P = (3; 2)$ und $Q = (3; 1)$ lässt sich nicht durch eine Funktionsgleichung beschreiben, Einsetzen der Koordinaten ergibt eine Null im Nenner. Horizontale Geraden erhalten dagegen eine Null im Zähler und haben die Steigung Null.

Eintragen der Werte aus der Lösung ergibt richtig, falsch

Aufgabe 9.1.12
Drücken Sie die Gerade $\overline{PQ}$ jeweils durch eine Funktionsgleichung $y = f(x) = mx + b$ aus:

1. Für $P = (2; 1)$ und $Q = (1; 2)$ ergibt sich $f(x)$ = ✔ .
2. Für $P = (3; 0)$ und $Q = (1; \alpha)$ ergibt sich $f(x)$ = ✘ .

alpha müsste in Anführungszeichen stehen (oder anderweitig gekennzeichnet)

Beim zweiten Aufgabenteil ist α eine unbekannte Konstante, die in der Funktionsgleichung als `alpha` eingegeben werden kann.

Lösung

Einsetzen der Koordinaten aus den Punkten in die Gleichung für die Steigung ergibt für die erste Gerade

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{2-1} = -1 \; .$$

Die Gerade besitzt also die Funktionsgleichung $f(x) = -x + b$ mit Achsenabschnitt b. Einsetzen von P in die Gleichung ergibt $1 = f(2) = -2 + b$ und somit $b = 3$. Die gesuchte Gleichung ist also $f(x) = -x + 3 = 3 - x$.

Bei der zweiten Geraden erhalten wir die Steigung

$$m = \frac{\alpha - 0}{1 - 3} = -\frac{1}{2}\alpha \; .$$

Die Gerade besitzt also die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{2}\alpha x + b$ mit unbekanntem α (nach dessen Wert aber auch nicht gefragt ist). Einsetzen von P in die Gleichung ergibt $1 = f(3) = -\frac{3}{2}\alpha + b$. Auflösen nach b ergibt $b = 1 + \frac{3}{2}\alpha$. Damit ist $f(x) = -\frac{1}{2}\alpha x + 1 + \frac{3}{2}\alpha$ die Funktionsgleichung der Geraden.