Onlinekurs Mathematik - Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem - Punkte und Geraden in der Ebene

9.1.3 Allgemeine Form

Die Zwei-Punkte-Form kann zwar jede mögliche Gerade beschreiben, ist zum praktischen Rechnen (beispielsweise zum Finden von Schnittpunkten) ungeeignet. Das Problem entsteht jedoch nur bei vertikalen Geraden, die nicht als Graph einer Funktion der x-Koordinate geschrieben werden können. Diese Geraden kann man auch durch Gleichungen beschreiben, wenn man auf den funktionalen Zusammenhang zwischen x und y verzichtet. Dieser wird dadurch hergestellt, dass y auf einer Seite der Funktionsgleichung isoliert ist. Diese Forderung lässt man daher oft fallen:

Info 9.1.13

Jede Gerade kann durch eine **allgemeine Geradengleichung** der Form

$$px + qy \quad = \quad c$$

beschrieben werden, wobei p und q reelle Konstanten sind, die nicht beide Null sein dürfen. Die Gerade besteht dann aus allen Punkten $P = (x; y)$, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen.

Mit einer Gleichung dieser Form lassen sich sämtliche Geraden beschreiben, dabei gibt es die folgenden Spezialfälle:

- Ist $p = 0$, so kann man durch q teilen und eine Gleichung der Form $y = c$ bekommen. Sie beschreibt die horizontale

Gerade mit Steigung Null und Achsenabschnitt c.

- Ist $q = 0$, so kann man durch p teilen und eine Gleichung der Form $x = c$ bekommen. Sie drückt aus, dass die y-Koordinate beliebig aus $\mathbb{R}$ und die x-Koordinate fest gleich Null ist. Dadurch wird eine vertikale Gerade beschrieben, welche die x-Achse bei c schneidet.

- Sind p und q verschieden von Null, so ist die Gerade nicht parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen.

Info 9.1.14

Mit Ausnahme der vertikalen Geraden kann eine allgemeine Gleichung stets in eine Funktionsgleichung umgewandelt werden, indem man durch q teilt und nach y auflöst. Umgekehrt kann eine Funktionsgleichung in eine allgemeine Form gebracht werden, indem der Achsenabschnitt auf einer Seite isoliert wird.

Eine Zwei-Punkte-Form erhält man, indem man Werte für x und y errät, welche die Gleichung erfüllen. Dabei kann man versuchen, eine der Koordinaten auf Null zu setzen und nach der anderen Koordinate aufzulösen.

Unverständliche und unanschauliche Erläuterung der Zwei-Punkte-Form

Beispiel 9.1.15
Die durch die Funktionsgleichung $y = 5x + 1$ gegebene Gerade kann man auch durch die allgemeine Form $y - 5x = 1$ ausdrücken. Umgekehrt kann man die vertikale Gerade $x = 3$ nicht durch eine Funktionsgleichung der Form $y = f(x)$ ausdrücken.

Beispiel 9.1.16
Die durch die allgemeine Gleichung $6x + 12y = 3$ gegebene Gerade soll durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Auflösen nach y ergibt

$$\begin{aligned} \text{Start:}\quad 6x+12y &= 3 \\ \iff\quad 12y &= -6x+3 \\ \iff\quad y &= -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ . \end{aligned}$$

Eine allgemeine Geradengleichung ist nicht eindeutig, die gleiche Gerade kann durch mehrere verschiedene Gleichungen beschrieben werden. Beispielsweise beschreibt $2x+4y=1$ die gleiche Gerade wie $6x+12y=3$.

Die drei durchgenommenen Beschreibungstechniken eigenen sich jeweils für spezielle Fragestellungen:

- Die Funktionsform $y=mx+b$ eignet sich um mit der Geraden zu rechnen, d.h. Schnittpunkte zu bestimmen oder Punkte auf der Geraden zu produzieren (indem man irgendwelche Werte für x einsetzt).
- Die Zwei-Punkte-Form eignet sich, wenn die Punkte auf der Geraden schon bekannt sind. Meist startet eine Aufgabe mit dieser Form und muss für weitere Rechnungen erst in eine andere Form umgewandelt werden.
- Die allgemeine Geradengleichung ist eine Testgleichung: Mit ihr kann man für gegebene Punkte leicht entscheiden, ob die Punkte auf der Geraden liegen oder nicht. Für praktische Rechnung kann sie recht einfach in Funktionsform umgewandelt werden.

Die allgemeine Geradengleichung als Testgleichung zu bezeichnen ist ungünstig. Wie sonst, kann man eine Gerade parallel zur y-Achse beschreiben ?

Aufgabe 9.1.17
Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden $\overline{PQ}$ für $P=(3;1)$ und $Q=(1;0)$ mit der durch die allgemeine Gleichung $2x+2y=-4$ beschriebenen Geraden, indem Sie beide Geraden zunächst in Funktionsform bringen:

1. Die Funktionsform für die erste Gerade ist $f(x)\ =$ ✓ .
2. Die Funktionsform für die zweite Gerade ist $g(x)\ =$ ✓ .

3. Gleichsetzen der beiden Terme ergibt die Lösungskoordinate x = ✓ und den Schnittpunkt P = ✓ .

Skizzieren Sie beide Geraden sowie die gegebenen Punkte.

Lösung

Für die erste Gerade ergibt sich die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-3} = \frac{1}{2} .$$

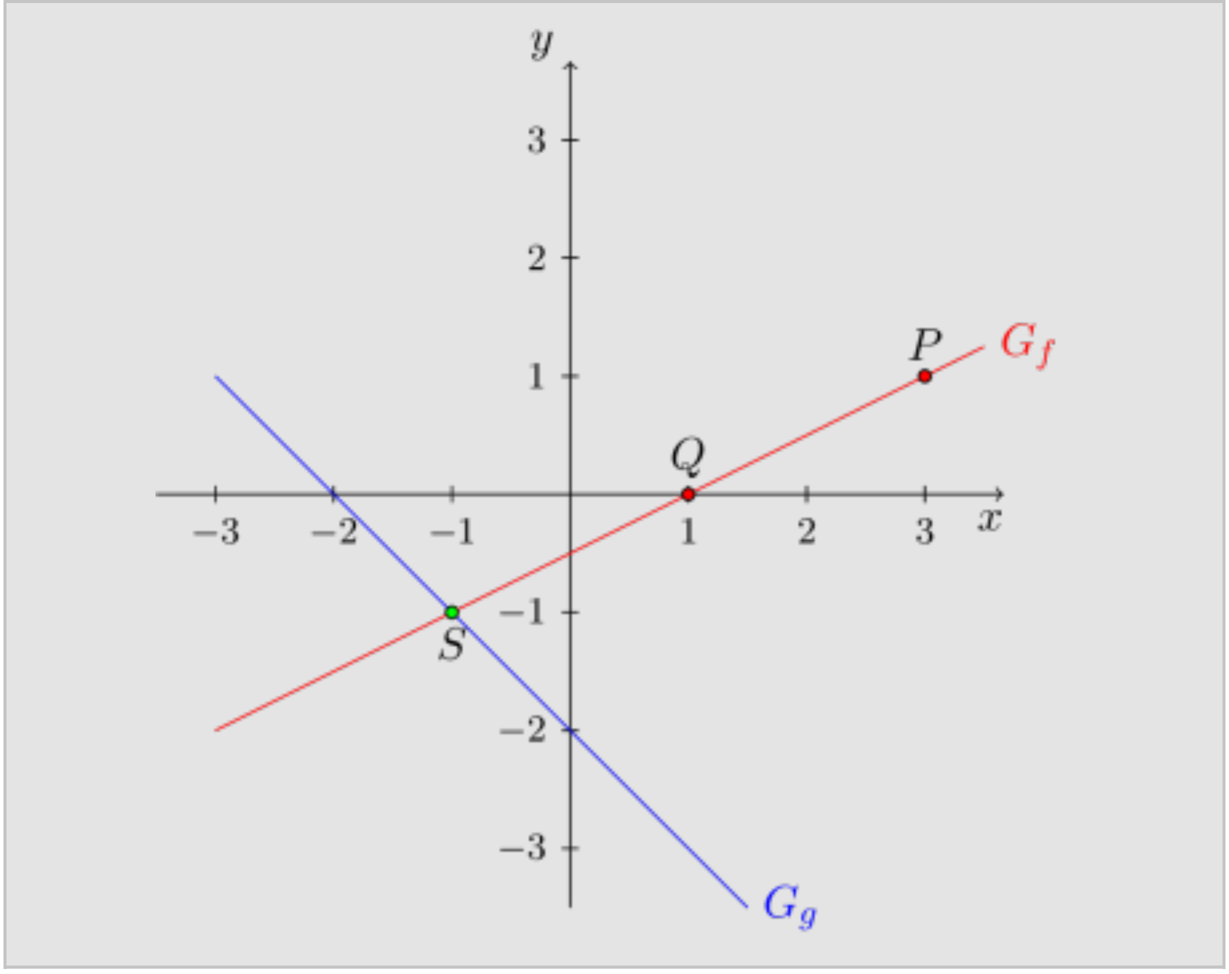
Einsetzen von $P = (3:1)$ in die Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{2}x + b$ ergibt $b = -\frac{1}{2}$ und somit $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Bei der zweiten Geraden ergibt Auflösung nach y die Funktionsform $y = g(x) = -x - 2$.

Gleichsetzen beider Funktionsterme ergibt

$$\begin{aligned}
\text{Start:}\quad f(x) &= g(x) \\
\iff \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} &= -x-2 \\
\iff \frac{3}{2}x &= -\frac{3}{2} \\
\iff x &= -1 .
\end{aligned}$$

Damit ist $S = (-1; f(-1)) = (-1; -1)$ der gesuchte Schnittpunkt.

Skizze


y
3
2
1
−1
−2
−3
x
−3
−2
−1
1
2
3
P
Q
S
G_f
G_g