Onlinekurs Mathematik - Elementare Funktionen - Lineare Funktionen und Polynome

6.2.6 Polynome und ihre Nullstellen

Während in den bis jetzt betrachteten Monomen immer nur genau eine Potenz der Veränderlichen in der Abbildungsvorschrift vorkommt, lassen sich aus diesen Monomen problemlos komplexere Funktionen konstruieren in denen mehrere verschiedene Potenzen der Veränderlichen vorkommen. Diese ergeben sich als Summen von Vielfachen von Monomen. Man spricht dann von sogenannten Polynomen; hier einige Beispiele und deren Graphen:

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^3 + 4x^2 - 3x + 42 \end{cases} \quad (\text{Grad: } 3)$$

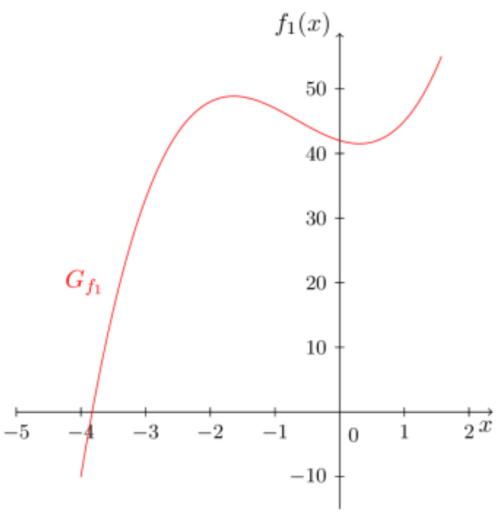
$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x^{101} + 3x - 14 \end{cases} \quad (\text{Grad: } 101)$$

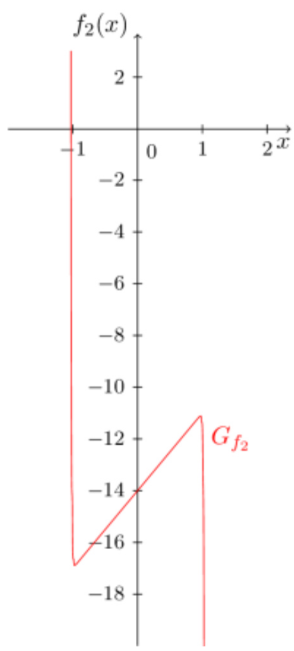
$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 9x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 19x \end{cases} \quad (\text{Grad: } 4)$$

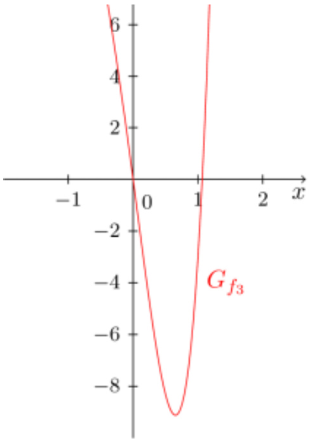
$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + 2x + 2 \end{cases} \quad (\text{Grad: } 2)$$

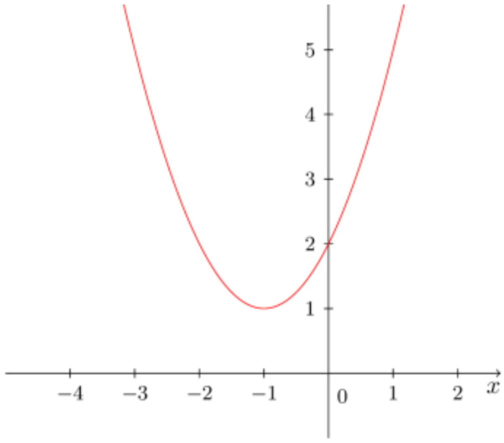
$$f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 8x - 2 \end{cases} \quad (\text{Grad: } 1)$$

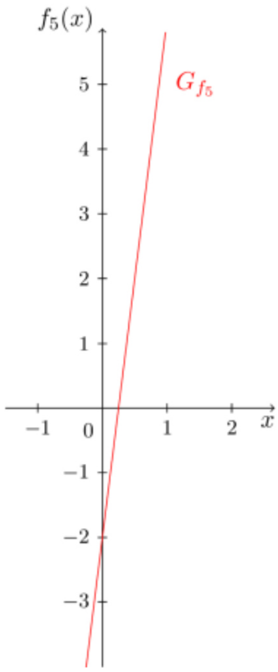
$$f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 13 \end{cases} \quad (\text{Grad: } 0)$$

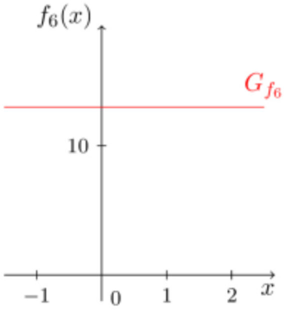












Der Grad eines Polynoms richtet sich also nach dem vorkommenden Monom mit dem höchsten Grad. Außerdem erkennen wir, dass die bisher behandelten Funktionstypen der konstanten, linearen und linear-affinen Funktionen - genauso wie die Monome - auf natürliche Weise wieder als Spezialfälle der Polynome auftauchen. Die Polynome umfassen also alle bisher betrachteten Funktionstypen.

Möchte man allgemein ein unspezfiziertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ angeben, so schreibt man dies folgendermaßen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 . \end{cases}$$

Dabei sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ die reellen Vorfaktoren vor den einzelnen Monomen, die als Koeffizienten des Polynoms bezeichnet werden.

Aufgabe 6.2.12
Wie lautet das Polynom $f(x)$ mit den Koeffizienten $a_0 = -4$, $a_2 = \pi$ und $a_4 = 9$ und welchen Wertebereich besitzt es?

Das Polynom lautet $f(x) =$? ,

quadratischen Gleichung möglich. In Modul 2 werden die relevanten Techniken der quadratischen Ergänzung, der und der Scheitelpunktsform quadratischer Ausdrücke genauer erklärt.

Beispiel 6.2.13
Gegeben ist die Parabel

$$\zeta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 2y^2 - 8y + 6. \end{cases}$$

Wir bestimmen Nullstellen und Scheitelpunkt und zeichnen den Graphen.

Wir führen an der Abbildungsvorschrift $\zeta(y) = 2(y^2 - 4y + 3)$ eine quadratische Ergänzung durch:

$$y^2 - 4y + 3 = y^2 - 4y + 4 - 1 = (y-2)^2 - 1.$$

Folglich läßt sich die Abbildungsvorschrift als

$$\zeta(y) = 2(y-2)^2 - 2$$

schreiben. Wir erkennen, dass die Parabel gegenüber der Standardparabel um 2 Längeneinheiten nach rechts und nach unten verschoben ist. Der Scheitelpunkt läßt sich bei $(2| - 2)$ ablesen. Die Nullstellen lassen sich berechnen:

$$\zeta(y) = 2((y-2)^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} - 2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Der Graph ergibt sich schließlich zu: