Présentation des schémas GMD (Genuinely Multi-Dimensional) pour la MHD

Mini-Projet : Volumes Finis

OUDRA Ayoub

Enseirb Matmeca

13 Janvier 2025

Plan de la présentation

Motivation

Contexte

Les équations de la MHD (Magnetohydrodynamique) en deux dimensions peuvent s'écrire sous la forme :

$$U_t + f(U)_x + g(U)_y = 0, \quad (div\mathrm{B}) = 0,$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ E \end{pmatrix} f(U) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho(u_1)^2 + p^* - \frac{1}{2}(B_1)^2 \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho u_1 u_3 - B_1 B_3 \\ 0 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 \\ u_1 B_3 - u_3 B_1 \\ (E + p^*) u_1 - (u \cdot B) B_1 \end{pmatrix} g(U) = \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 - B_1 B_2 \\ \rho(u_2)^2 + p^* - \frac{1}{2}(B_2)^2 \\ \rho u_2 u_3 - B_2 B_3 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 \\ 0 \\ u_2 B_3 - u_3 B_2 \\ (E + p^*) u_2 - (u \cdot B) B_2 \end{pmatrix},$$

où $p^* = p + \frac{1}{2}|\mathrm{B}|^2$ et

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\left(\rho|\mathrm{u}|^2 + |\mathrm{B}|^2\right).$$

Problématique

Points clés

- Nous devons résoudre numériquement ces équations (chocs, ondes de contact MHD, etc.) en tenant compte d'un **couplage fort** entre vitesse et champ magnétique.
- Il est impératif de **préserver la divergence nulle** $\nabla \cdot B = 0$ pour éviter des artefacts numériques.
- Les schémas volumes finis classiques sont souvent basés sur des flux purement 1D (Rusanov, Roe, etc.), pas toujours adaptés aux **interactions multidimensionnelles**.
- Objectif : construire des schémas réellement **multi-D**, robustes et efficaces.

Idée générale des schémas GMD

- Les schémas volumes finis classiques reposent souvent sur des flux 1D (Rusanov, Roe, HLL, etc.).
- Les phénomènes *genuinely multi-dimensional* ne sont pas toujours bien résolus par des flux purement 1D.
- Le cadre GMD (*Genuinely Multi-Dimensional*), introduit par **Mishra & Tadmor**, consiste à définir des flux incorporant explicitement des informations *transverses*, grâce à des *potentiels numériques*.
- But : améliorer la résolution des ondes multi-D, tout en conservant la contrainte $\nabla \cdot B = 0$.

Flux de Rusanov 2D

Extension en 2D : flux dans les directions x et y :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left(F(U_{i,j}) + F(U_{i+1,j})\right) - \frac{1}{2}\alpha_{i+\frac{1}{2},j} J\left(U_{i+1,j} - U_{i,j}\right)$$

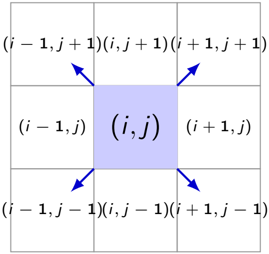
$$G_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(G(U_{i,j}) + G(U_{i,j+1})\right) - \frac{1}{2}\beta_{i,j+\frac{1}{2}}\left(U_{i,j+1} - U_{i,j}\right)$$

où :

- $F(U)$ et $G(U)$ sont les flux conservatifs dans les directions x et y,
- $\alpha_{i+\frac{1}{2},j} = \max\left(\left|\alpha_{i,j}\right|, \left|\alpha_{i+1,j}\right|,\right)$ et $\beta_{i+\frac{1}{2},j} = \max\left(\left|\beta_{i,j}\right|, \left|\beta_{i,j+1}\right|,\right)$, avec $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ représentant le maximum des valeurs propres des matrices jacobiennes $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ et $B = \frac{\partial G}{\partial U}$ pour $U_{i,j}$.

Principe du schéma GMD Isotropique

Idée clé : En plus des flux standards $F_{i+1/2,j}$ et $G_{i,j+1/2}$, on va prendre en compte les flux diagonaux pour améliorer la prise en compte des interactions multidimensionnelles.



Remarque : On combine ces contributions pour définir un *flux isotrope*.

Schéma Isotropique GMD (ordre 1)

Pour un système 2D conservatif $\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = 0$, le **schéma isotropique GMD** (ordre 1) s'écrit:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{4\,\Delta x}\Big[\delta_{/} F^{+} + 2\,\delta_x F + \delta_{\backslash} F^{-}\Big]_{i,j} - \frac{\Delta t}{4\,\Delta y}\Big[\delta_{/} G^{+} + 2\,\delta_y G - \delta_{\backslash} G^{-}\Big]_{i,j}.$$

- $F^{\pm}, G^{\pm}$ sont des flux diagonaux.
- $\delta_{/}$ et $\delta_{\backslash}$ désignent des opérateurs de différences diagonales.
- On utilise ainsi 9 points (stencil) autour de la cellule, d'où le terme *isotropique*.

Extension à l'ordre 2 : reconstruction MUSCL

Pour passer à l'**ordre 2**, on ajoute une **reconstruction** bilinéaire.

MUSCL bilinéaire :

$$p_{i,j}(x,y) \;=\; U_{i,j} \;+\; (\partial_x U)_{i,j}\,\big(x - x_i\big) \;+\; (\partial_y U)_{i,j}\,\big(y - y_j\big),$$

où

$$(\partial_x U)_{i,j} \;=\; \operatorname{minmod}\Big(U_{i+1,j} - U_{i,j},\; \tfrac{1}{2}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}),\; U_{i,j} - U_{i-1,j}\Big),$$

(and similar for ∂_y).

Points d'évaluation

- On évalue ensuite $p_{i,j}$ aux bords de la maille (E, W, N, S) pour calculer les flux en x et y.
- On évalue également aux **coins** (NE, NW, SE, SW) pour les flux diagonaux (ex. F^+, F^-).

Cas test 1 : Vortex d'Orszag-Tang

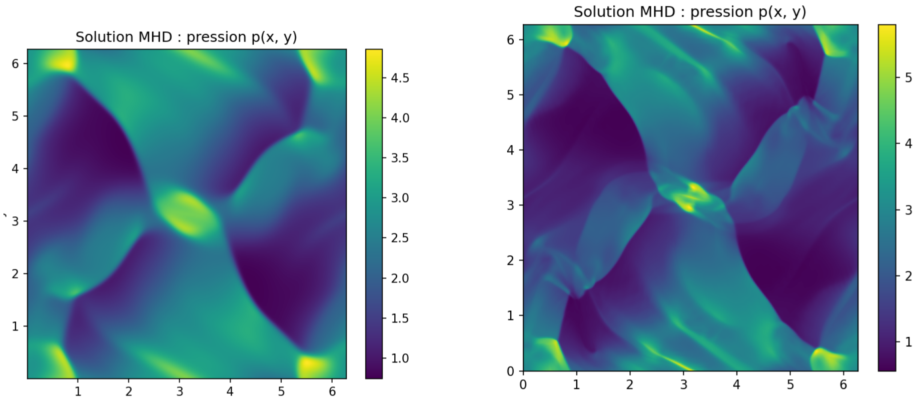
- **Conditions initiales** périodiques sur $[0, 2\pi]^2$:

$$\rho = \gamma^2, \quad u_1 = -\sin(y), \quad u_2 = \sin(x), \quad u_3 = 0,$$

$$B_1 = -\sin(y), \quad B_2 = \sin(2x), \quad B_3 = 0, \quad p = \gamma.$$

- Classique en MHD 2D : formation de chocs, interaction non linéaire, etc.
- Contrôle important de la divergence $\nabla \cdot$ B.

Orszag-Tang : Résultats (Ordre 1 et Ordre 2)



(Gauche : Schéma isotropique GMD ordre 1, Droite : ordre 2, pression à $t = \pi$).

- L'augmentation d'ordre permet une meilleure résolution des chocs et des structures tourbillonnaires.

Comparaison de la pression maximale : Simulation vs. ISO

M	**Ordre 1**	**Ordre 2**	**ISO1**	**ISO2**
50	3.22741	4.22599	3.19	4.34
100	3.71863	5.02725	3.57	5.00
200	4.33908	5.47177	4.22	5.64

Table: Comparaison de la pression maximale entre la simulation et les schémas ISO (ordre 1 et 2).

Commentaire :

- Bonne concordance avec les résultats de la littérature.
- Les schémas GMD produisent une meilleure capture multidimensionnelle.

Conclusion

- Les schémas GMD (Isotropiques ou Symétriques) permettent une meilleure résolution multi-D pour la MHD.
- Simple à mettre en œuvre à partir d'un flux classique (Rusanov, Roe, ...).
- Passage à l'ordre 2 : **gain significatif en précision**, meilleur rendu des structures fines.
- Versions constraint-preserving : préservent $\nabla \cdot B \approx 0$.

Perspectives

- **Ordres plus élevés** (WENO, DG) : extension GMD.
- **Maillages non structurés** : adaptation de la philosophie GMD.
- **HPC** : parallélisation simplifiée (stencils locaux).

Références Principales

- S. Mishra, E. Tadmor, *Constraint preserving schemes using potential-based fluxes. III. Genuinely multidimensional schemes for MHD equations*, ESAIM: M2AN 46 (2012) 661–680.
- S. Mishra, E. Tadmor, *Constraint preserving schemes using potential-based fluxes I-II*, Commun. Comput. Phys. 9 (2010), SIAM J. Numer. Anal. 49 (2011).
- G. Toth, *The div(B) = 0 constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes*, J. Comput. Phys. 161 (2000) 605–652.
- R.J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.

Merci de votre attention !