中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第七章

①先写出似然函数 $L(\theta)$（这批观测值的概率）

②找 θ 的估计值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ ~~使得~~ 使得 $L(\theta)$ 达最大.

一般情况下 令 $l(\theta)=\ln L(\theta)$（处理较为方便）

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=0$$

③判断是否为最大值点.

9. 这批观测值出现概率

$$L(\theta)=(\theta^2)^{n_0}(2\theta(1-\theta))^{n_1}(\theta^2)^{n_2}(1-2\theta)^{n_3}$$

①、②、③ ——

13. 类似

MLE 不变性

$\theta\to\hat{\theta}$

$g(\theta)\to g(\hat{\theta})$

15. $\theta=P(X\geq 2)$

$=1-P(X<2)$

$=1-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$

$=1-\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$

$\hat{\mu}=\bar{X}$， $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2$

$\hat{\theta}=\cdots$

写成积分形式太繁琐了，直接用标准正态分布的函数符号 Φ 表示

22. $E(\hat{\theta})=\theta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i=1$

求 $Var(\hat{\theta})=\sum_{i=1}^{k} a_i^2\sigma_i^2$ 最小值

柯西不等式 $(\sum a_i^2\sigma_i^2)(\sum \sigma_i^{-2})\geq(\sum a_i)^2=1$

等号当且仅当 $a_1\sigma_1^2=\cdots=a_k\sigma_k^2$ 成立

或拉格朗日乘数法.（约束条件）

$L(a_1,\cdots a_k,\lambda)=Var(\hat{\theta})+\lambda(1-\sum a_i)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial a_i}=0 & (i=1,\cdots,k)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}$$

$$a_i=\frac{\sigma_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^{-2}} \quad (i=1,\cdots,k)$$

25. 这里 $\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3$ 表示 p 的三个估计

27. 先把随机变量弄出来，X（做估计及其它问题的基础）

根据题意,可记连掷两次出现正面次数为X

X	0	1	2
P	$\frac{\theta}{4N}$	$\frac{\theta}{2N}$	$\frac{4N-3\theta}{4N}$

$P(X=0)=\frac{\theta}{N}\cdot(\frac{1}{2})^2$，$P(X=1)=\frac{\theta}{N}\cdot\binom{2}{1}(\frac{1}{2})^2$，$P(X=2)=\frac{\theta}{N}\cdot(\frac{1}{2})^2+(\frac{N-\theta}{N})$

$E(X)=\frac{2N-\theta}{N} \Rightarrow \hat{\theta}=\cdots$

$L(\theta)=\cdots$

$\hat{\theta}_{MLE}=\cdots$

36. 不要分开来算，一样是这批观测值的概率，似然函数

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2\right\}$$

同样步骤求出 $\hat{\mu}_1=\bar{X}$，$\hat{\mu}_2=\bar{Y}$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right]$

而不是 $\hat{\sigma}^2$ 在总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ MLE为… 在 $N(\mu_2,\sigma^2)$ MLE为…

类似地

37. $L(\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{m}{2}}(4\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2-\frac{1}{4\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu)^2\right\}$

$$\Rightarrow l(\mu,\sigma^2)=c-\frac{m+n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2-\frac{1}{4\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu)^2$$

$\cancel{\partial l(\mu,\sigma^2)}$

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu)=0$$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma^2}=-\frac{m+n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2+\frac{1}{4\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu)^2=0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}=\frac{2m\bar{X}+n\bar{Y}}{2m+n}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\hat{\mu})^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\hat{\mu})^2\right]$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

湖中鱼有N条.

38. 设第二次捞出的标有记号的鱼的数目为X，可知X服从超几何分布

150条鱼中出现出10条带记号的鱼概率为

$$P(X=10)=\frac{\binom{1000}{10}\binom{N-1000}{140}}{\binom{N}{150}}$$，即求N的MLE

$$L(N)=\frac{\binom{1000}{10}\binom{N-1000}{140}}{\binom{N}{150}}$$

考虑比值 $\frac{L(N)}{L(N-1)}=\frac{(N-1000)(N-150)}{N(N-1000-140)}=\frac{N^2-1150N+150000}{N^2-1140N}$

$\frac{L(N)}{L(N-1)}$ 当$N<15000$，$\frac{L(N)}{L(N-1)}>1$；当$N>15000$，$\frac{L(N)}{L(N-1)}<1$

故$N=15000$时，$L(N)$最大，故$N=15000$ 每…

或14999

同样是超几何分布 X

某批产品共有N件，其中M件不合格，现从中随机抽取n件，有X件不合格，

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}\quad,\ x=1,2,\cdots,\min(M,n)$$

假设N与n已知，求M的最大似然估计

$L(M)=P(X=x)$

考虑比值 $\frac{L(M+1)}{L(M)}=\frac{(M+1)(N-M-n+x)}{(M+1-x)(N-M)}$

$$\frac{L(M+1)}{L(M)}>1 \Rightarrow M<\frac{x}{n}(N+1)-1$$

$$\frac{L(M+1)}{L(M)}<1 \Rightarrow M>\frac{x}{n}(N+1)-1$$

如果 $\frac{x}{n}(N+1)-1$ 为整数，则M的最大似然估计 $\hat{M}=\frac{x}{n}(N+1)-1$ 或 $\frac{x}{n}(N+1)$

若不是整数，则 $\left[\frac{x}{n}(N+1)\right]$ 为M的……

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

43. 算一下 $E(\frac{1}{\bar{x}})$

$$X_i \sim Exp(\frac{1}{\lambda}) \Rightarrow n\bar{X} = \sum X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

$$\bar{X} \sim \Gamma(n, n\lambda)$$

其中 $\Gamma(\alpha, \lambda)$: $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \ x \geq 0$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

令 $Y = \bar{X}$，则 $E(\frac{1}{Y}) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-n\lambda y} dy$

$$= \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} y^{n-2} e^{-n\lambda y} dy$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1}$$

$E(\frac{1}{\bar{x}}) = \frac{n\lambda}{n-1}$，即 $\frac{1}{\bar{x}}$ 不是 λ 无偏估计，$\frac{n-1}{n\bar{x}}$ 是 λ 无偏估计

但 $\frac{1}{\bar{x}}$ 是 λ 渐近无偏估计

44. 似然函数 $L(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} I(\theta_1<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta_2)$

要使 $L(\theta)$ 最大，首先示性函数 I 应为 1，即 $\theta_1<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta_2$

然后 $\theta_2-\theta_1$ 应最小，故 $\hat{\theta}_1=x_{(1)}$，$\hat{\theta}_2=x_{(n)}$

那么 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 无偏性？

令 $Y=\frac{X-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$，则 $Y\sim U(0,1)$，记 $y_{(1)},\cdots,y_{(n)}$ 为相应次序统计量

则 $Ey_{(1)}=\frac{1}{n+1}$，$Ey_{(n)}=\frac{n}{n+1}$　$\left(f_1(x)=n(1-F(x))^{n-1}f(x),\ f_n(x)=n(F(x))^{n-1}f(x)\right.$

$E\hat{\theta}_1=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{\theta_2+n\theta_1}{n+1}$

$E\hat{\theta}_2=\frac{n\theta_2+\theta_1}{n+1}$

即 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 不是 θ_1，θ_2 无偏估计

$$\begin{cases} Ex_{(1)}=\frac{\theta_2+n\theta_1}{n+1} \\ Ex_{(n)}=\frac{n\theta_2+\theta_1}{n+1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta_1=\frac{nEx_{(1)}-Ex_{(n)}}{n-1} \\ \theta_2=\frac{nEx_{(n)}-Ex_{(1)}}{n-1}\end{cases}$$

故 $\hat{\theta}_1=\frac{nx_{(1)}-x_{(n)}}{n-1}$，$\hat{\theta}_2=\frac{nx_{(n)}-x_{(1)}}{n-1}$ 为 θ_1，θ_2 无偏估计.

○ 对于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若只有一个观测值，则 σ^2 最大似然估计不存在

只有一个观测值，则似然函数

$L(\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2\}$

$l(\mu,\sigma^2)=-\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\sigma\to0$ 时上式 $\to\infty$，说明极大值无法实现

实际上，只有一个观测值的样本，$S_n^2=0$

从这个角度来看，讨论 σ^2 MLE 本身就是一件没有意义的事.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

①两点分布 $b(1,p)$，样本 $X_1 \cdots X_n$　　那么如果要你证无偏估计不存在

$\frac{1}{p}$无偏估计不存在

(反证法) 假设存在$\frac{1}{p}$无偏估计 $T(x_1 \cdots x_n)$

则 $\sum_{x_1 \cdots x_n} T(x_1 \cdots x_n) p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \sum_{x_1 \cdots x_n} T(x_1 \cdots x_n) p^{\sum_{i=1}^n x_i + 1} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} - 1 = 0$

上式为p的$n+1$次方程，最多$n+1$实根

与假定在 $(0,1)$ 处处成立矛盾

②连续型　$N(\mu, \sigma^2)$，样本 $X_1 \cdots X_n$，

$|\mu|$无偏估计不存在

假设 $T(x_1, \cdots, x_n)$ 为$|\mu|$无偏估计

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} T(x_1 \cdots x_n) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right\} dx_1 \cdots dx_n = |\mu|$$

左侧关于μ处处可导　　而右侧$\mu=0$处无导数

矛盾

相合估计 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是 θ 的一个估计量，这两个定理可以应付大部分问题

定理 1.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}Var(\hat{\theta}_n)=0$

则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计

定理 2.

若 $\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_k$ 是 $\theta_1\cdots\theta_k$ 相合估计，$g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 是 $\theta_1\cdots\theta_k$ 连续函数

则 $g(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k)$ 是 $g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 相合估计

最小方差无偏估计 (MVUE)，习题集上没看见相关习题，考试要考的话这几个式子应该够用了。

C-R 不等式，$g(\theta)$ 无偏估计 $\hat{g}(X)$ 皆满足

$$Var(\hat{g}(X))\geq\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

费希尔信息量 $I(\theta)=\cancel{E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta(x)\right]^2}\ E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x)\right]^2$

$$=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(x)\right]$$