第七章

7. 解：(1) λ 的MLE为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$

$P(X=0)=e^{-\lambda}$ MLE为 $e^{-\overline{X}}$

(2) $\hat{p}=e^{-\overline{x}}=e^{-1.12}$

9. 解. 记 0, 1, 2, 3 出现次数分别为 n_0, n_1, n_2, n_3

似然函数 $L(\theta)=(\theta^2)^{n_0}(2\theta(1-\theta))^{n_1}(\theta^2)^{n_2}(1-2\theta)^{n_3}$

$= 2^{n_1}\theta^{2n_0+n_1+2n_2}(1-\theta)^{n_1}(1-2\theta)^{n_3}$

对数似然 $\ln L(\theta)=(2n_0+n_1+2n_2)\ln\theta+n_1\ln(1-\theta)+n_3\ln(1-2\theta)+n_1\ln 2$

关于 θ 求导并令其为0得

$358\theta^2-410\theta+105=0$，又 $0<\theta<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \hat{\theta}=0.3866$

由于 $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{2n_0+n_1+2n_2}{\theta^2}-\frac{n_1}{(1-\theta)^2}-\frac{4n_3}{(1-2\theta)^2}<0$

故 $\hat{\theta}$ 为极大值点

11. 解：(1) $L(\theta)=\frac{2}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}(\theta-x_i)$

$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln(\theta-x_i)+\ln 2$

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta-x_i}=\frac{2n}{\theta}$

$\hat{\theta}_{MLE}$ 为上述方程的根

(2) $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

(3) $\hat{\theta}=\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^2$

(4) $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln c}$

(5) $\hat{\theta}$ 为方程 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta-x_i}=\frac{3n}{\theta}$ 的根

(6) $\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

13.解: $L(\theta)=(\theta^2)^{n_1}(2\theta(1-\theta))^{n_2}(1-\theta)^{2n_3}$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{2n_1+n_2}{2n}$$

15.解: $\theta=P(X\geq 2)$

$=1-P(X<2)$

$=1-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$

$=1-\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$

$\because \hat{\mu}_{MLE}=\bar{X}$, $\hat{\sigma}^2_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

故 $\hat{\theta}=1-\Phi\left(\frac{2-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$

17.解: (1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$E(X)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$

$E(X^2)=\theta$

(2) $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum X_i^2$

(3) 令 $a=E(X^2)=\theta$, 由大数定律即得

20. 解: (1) $E(X^2)=\mu^2+\sigma^2$

$E(X_{i+1}-X_i)^2=2\sigma^2$

$E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=\sigma^2 \Rightarrow c=\frac{1}{2(n-1)}$

(2) $E(\bar{X})=\mu$, $Var(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$

$E(\bar{X}^2)=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2$

$E(\bar{X}^2-cS^2)=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2-c\sigma^2=\mu^2 \Rightarrow c=\frac{1}{n}$

22. 解: $E(\hat{\theta})=\theta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}a_i=1$ ①

$Var(\hat{\theta})=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2$, 求$Var(\hat{\theta})$最小值

由柯西不等式 $(\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2)(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^{-2})\geq(\sum_{i=1}^{k}a_i)^2=1$

等号当且仅当 $a_1\sigma_1^2=\cdots=a_k\sigma_k^2$ ② 成立

即$Var(\hat{\theta})$取最小值时有①、②式，从而可得

$$a_i=\frac{\sigma_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^{-2}} \quad (i=1,\cdots,k)$$

25.解： $E(n_1)=np_1=np$ $\quad$ $Var(n_1)=np(1-p)$

$E(n_2)=np_2=2np$ $\quad$ $Var(n_2)=n(2p)(1-2p)$

$E(n_3)=n(1-p_1-p_2)=n(1-3p)$ $\quad$ $Var(n_3)=n(3p)(1-3p)$

故 $E\left(\frac{n_1}{n}\right)=p$， $E\left(\frac{n_2}{2n}\right)=p$， $E\left(\frac{1}{3}\left(1-\frac{n_3}{n}\right)\right)=p$

即 $\hat{p}_1=\frac{n_1}{n}$， $\hat{p}_2=\frac{n_2}{2n}$， $\hat{p}_3=\frac{1}{3}\left(1-\frac{n_3}{n}\right)$ 皆为 p 的无偏估计

$Var(\hat{p}_1)=\frac{1}{n}p(1-p)$， $Var(\hat{p}_2)=\frac{1}{2n}p(1-2p)$， $Var(\hat{p}_3)=\frac{1}{3n}p(1-3p)$

从而 $\hat{p}_3$ 方差最小

27.解： 记连掷两次出现正面次数为 X

X	0	1	2
p	$\frac{\theta}{4N}$	$\frac{\theta}{2N}$	$\frac{4N-3\theta}{4N}$

则 $E(X)=\frac{2N-\theta}{N}$

$\Rightarrow \theta=2N-NE(X)$

从而矩估计 $\hat{\theta}=2N-N\bar{X}=2N-\frac{n_1+2n_2}{n}N$

似然函数 $L(\theta)=\left(\frac{\theta}{4N}\right)^{n_0}\left(\frac{\theta}{2N}\right)^{n_1}\left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)^{n_2}$

取对数 对 θ 求导 令其为0得

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{4N}{3n}(n-n_2)$$

30.解: $P(X>1)=1-P(X\leq 1)$

$$=1-P\left(\frac{X-a}{\sigma}\leq\frac{1-a}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1-a}{\sigma}\right)$$

其矩估计为 $1-\Phi\left(\frac{1-\bar{X}}{S}\right)$

36.解: $L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2\right\}$

类似可得 $\hat{\mu}_1=\bar{X}$

$$\hat{\mu}_2=\bar{Y}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right]$$