习题集第四章

7. 解: $f(x)=ce^{-x^2+x}=ce^{\frac{1}{4}}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}$

分布 $N(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}$

故 $ce^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$，从而 $X\sim N(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\therefore EX=\frac{1}{2}$，$Var(X)=\frac{1}{2}$

8. 解: $EX=\int_0^\infty \frac{x^{n+1}e^{-x}}{n!}dx=\frac{\Gamma(n+2)}{n!}=n+1$

$$E(X^2)=\int_0^\infty \frac{x^{n+2}e^{-x}}{n!}dx=\frac{\Gamma(n+3)}{n!}=(n+1)(n+2)$$

$$Var(X)=E(X^2)-(EX)^2=n+1$$

10. 解: 由 $\begin{cases} EX=0.5 \\ Var(X)=0.15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx=1 \\ \int_0^1 xf(x)dx=0.5 \\ \int_0^1 x^2f(x)dx=0.4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=-12 \\ c=3 \end{cases}$$

17.解：记次品数为X，可知X遵从超几何分布

即 $X \sim h(150, 20000, 1000)$

对于超几何分布 $h(n, N, M)$，其数学期望为

$$EX=\sum_{k=0}^{r} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=n\frac{M}{N}\sum_{k=1}^{r}\frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\frac{M}{N}$$

其中 $r=\min\{M, n\}$

从而题中所要求的数学期望代入即得 7.5

18.解：记X为空盒子数，$X_k=1$ 表示第k个盒子为空，否则 $X_k=0$ $(k=1,2,\cdots,n)$

则 $EX_k=P(X_k=1)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

$$EX=E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}EX_k=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$n\to\infty$ 时，空盒子平均比例为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$

22.解：$E[(X-1)(X-2)]=5 \Rightarrow EX^2-3EX-3=0$ ①

对于Poisson分布 $P(\lambda)$，$EX=\lambda$，$Var(X)=\lambda$

故 ① $\Rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=3$ $(\lambda>0)$