习题集第二章

65. 解：(1) $y=e^x$ 严格增，反函数为 $x=\ln y=h(y)$ $(1<y<e)$

$$f_{Y_1}(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)| = y^{-1}, & 1<y<e \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(2) $P(Y_2\le y)=P(X^{-1}\le y)$

$$\begin{aligned} &= P(X\ge y^{-1}, X>0)+P(X\le 0) \\ &= P(X\ge y^{-1}) \\ &= 1-P(X<y^{-1}) \\ &= 1-y^{-1} \end{aligned}$$

故 $F_{Y_2}(y)=\begin{cases} 1-y^{-1}, & y>1 \\ 0, & y\le 1 \end{cases}$

$f_{Y_2}(y)=\begin{cases} y^{-2}, & y>1 \\ 0, & y\le 1 \end{cases}$

(3) $y=-\frac{1}{\lambda}\ln x$ 严格减，$x=e^{-\lambda y}=h(y)$ $(y>0)$

$$f_{Y_3}(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)| = \lambda e^{-\lambda y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

67. 证明: 由于 $F(X)$ 取值 $[0,1]$

故 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=0$

$y\ge 1$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=1$

当 $0<y<1$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

$=P(X\le F^{-1}(y))$

$=F(F^{-1}(y))$

$=y$

综上 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

故 $Y\sim U(0,1)$

71. 解: $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad (x>0)$

$X\ge 1$ 时, $Y=X$ 在 $[1,+\infty)$ 取值 $\quad x=y=h(y)$

$p(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\lambda e^{-\lambda y},\ y\ge 1$

$0<X<1$, $Y=-X^2$ 在 $(-1,0)$ 取值

$P(Y\le y)=P(-X^2\le y)=P(-\sqrt{-y}\le X\le\sqrt{-y})=\int_0^{\sqrt{-y}}f(x)\,dx=1-e^{-\lambda\sqrt{-y}}\ (-1<y<0)$

$\therefore p(y)=\frac{\lambda}{2\sqrt{-y}}e^{-\lambda\sqrt{-y}},\ -1<y<0$

综上 $p(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 1\\ \frac{\lambda}{2\sqrt{-y}}e^{-\lambda\sqrt{-y}}, & -1<y<0\\ 0, & 其他\end{cases}$

72. 解：(1) $y=e^x$ 单调增　$x=\ln(y)=h(y)$　$(y>0)$

$$f_{Y_1}(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

(2) $Y_2=|X|\ge 0$，故 $y\le 0$ 时，$F_{Y_2}(y)=0$

$y>0$ 时，$F_{Y_2}(y)=P(Y\le y)$

$=P(|X|\le y)$

$=P(-y\le X\le y)$

$=2P(X\le y)-1$

从而 $f_{Y_2}(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(3) $Y_3=2X^2+1\ge 1$，故 $y\le 1$ 时，$F_{Y_3}(y)=0$

$y>1$ 时，$F_{Y_3}(y)=P(Y\le y)$

$=P(2X^2+1\le y)$

$=P\left(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)$

$=2P\left(X\le\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)-1$

同样由求导的方法，$f_{Y_3}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1 \\ 0, & y\le 1\end{cases}$

73. 解：(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow a=9$

可知Y取值为[1,2]

故 ① $y<1$ 时 $F_Y(y)=0$

② $y=1$时，$F_Y(1)=P(Y\le 1)=P(X>2)=\frac{19}{27}$

③ $1<y<2$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)$

$=P(Y=1)+P(1<Y\le y)$

$=\frac{2}{3}+\frac{y^3}{27}$

④ $y=2$时，$F_Y(2)=P(Y\le 2)=P(Y=1)+P(1<Y<2)+P(Y=2)=1$

实际上，②，③步也可以合在一起

综上 $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{2}{3}+\frac{y^3}{27}, & 1\le y<2 \\ 1, & y\ge 2 \end{cases}$

(2) $P(X\le Y)=P(X\le Y|Y=1)P(Y=1)+P(X\le Y|1<Y<2)P(1<Y<2)$

$+P(X\le Y|Y=2)P(Y=2)$

$=0+P(1<Y<2)+P(Y=2)$

$=\frac{7}{27}+\frac{1}{27}$

$=\frac{8}{27}$