课本第一章

1.解: (a) $B_1=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_4+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_5+\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4+\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_5$
$+\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5$

(b) $B_2=A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4+A_1A_5+A_2A_3+A_2A_4+A_2A_5+A_3A_4$
$+A_3A_5+A_4A_5$ 很多写法，合理即可

2.证明: (a) 可知 $A+(B-A)\subset A+B$ 也可以都用韦恩图说明

对 $\forall x\in A+B$，可知 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或者其它各种方法，合理即可

若 $x\in A$，则 $x\in$ 右边，

若 $x\in B$，① $x\in B$ 且 $x\in A \Rightarrow x\in$ 右边

② $x\in B$ 且 $x\notin A \Rightarrow x\in B-A$，$x\in$ 右边

即对 $\forall x\in A+B$，$x\in$ 右边，从而 $A+B\subset A+(B-A)$，两式相等

可知对 $\forall x\in B-A$ 有 $x\notin A$，从而 $A(B-A)=\phi$，两事件互斥

(b) 由 $A-B\subset A$，$B-A\subset B$，$AB\subset A$ 知右边 $\subset$ 左边

对 $\forall x\in A+B$，可知 $x\in A$ 或 $x\in B$

若 $x\in A$，① $x\in A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A-B$，$x\in$ 右边

② $x\in A$ 且 $x\in B$，即 $x\in AB$，$x\in$ 右边

若 $x\in B$，① $x\in B$ 且 $x\notin A$，即 $x\in B-A$，$x\in$ 右边

② $x\in B$ 且 $x\in A$，即 $x\in AB$，$x\in$ 右边

即对 $\forall x\in A+B$，$x\in$ 右边，因而 左边 $\subset$ 右边，两式相等

若 $x\in A-B$，则 $x\notin B$，$x\notin B-A$ 且 $x\notin AB$，从而 $(A-B)(B-A)=\phi$，$(A-B)AB=\phi$

若 $x\in B-A$，则 $x\notin A$，$x\notin A-B$ 且 $x\notin AB$，从而 $(B-A)AB=\phi$

即三事件互斥

3. 解：$(A+B)-(A-B)=(A-B)+(B-A)+AB-(A-B)$

$$=(B-A)+AB$$

可知 $(B-A)+AB\subset B$

对 $\forall x\in B$，① $x\in B$ 且 $x\notin A$，则 $x\in B-A$，$x\in$ 左边

② $x\in B$ 且 $x\in A$，则 $x\in AB$，$x\in$ 左边

即对 $\forall x\in B$，有 $x\in$ 左边，$B\subset(B-A)+AB$

从而 $(A+B)-(A-B)=(B-A)+AB=B$

4. 解：$A_1+\cdots+A_n=A_1+(A_2-A_1)+(A_3-A_2-A_1)+\cdots+(A_n-A_{n-1}-\cdots-A_1)$

5. 证明：$A+B+C=A+(B-A)+(C-A-B)$

$$=A+(B-AB)+(C-AC-BC)$$

$$=A+(B-AB)+(C-AC-\bar{A}BC)$$

对于事件 M，N，若 $M\subset N$，则 $P(N-M)=P(N)-P(M)$

从而 $P(A+B+C)=P(A)+P(B-AB)+P(C-AC-\bar{A}BC)$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+\bar{A}BC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(\bar{A}BC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC-ABC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

或者 $P(A+B+C)=P(A+B)+P(C)-P(AC+BC)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

6. A, B 至少有一个概率为0

7. 不一定，需 $B \subset A$，这也是充分必要条件

（充分性）$B \subset A$ 知 $A = B + (A-B)$ 且 $B(A-B) = \varnothing$

$P(A) = P(B) + P(A-B)$，

（必要性）假设 $B \not\subset A$，则 $A = AB + (A-B)$，且 $(AB)(A-B) = \varnothing$

$P(A) = P(AB) + P(A-B)$，即 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$

若 $B \not\subset A$ 则 $P(AB) < P(B)$，与 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 矛盾

故 $B \subset A$

证充分性不可直接 $P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$ 因为这样默认了已知。当 $B \subset A$ 时 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 的条件

而这是本题要探讨的，平常可以随便这样写.

10. 证明：(1) $P(C(A+B)) = P(CA + CB) = P(CA) + P(CB) = P(C)[P(A) + P(B)]$

$= P(C)\,P(A+B)$

(2) 方法一：$P(C(A+B)) = P[C(A-B) + ABC + C(B-A)]$

$= P(C(A-B)) + P(C(B-A)) + P(ABC)$ ①

由 $P(CA) = P(C)P(A)$，$P(C \cdot AB) = P(C)P(AB)$

知 $P(C(A-B)) = P(C(A-AB)) = P(CA - CAB) = P(CA) - P(CAB)$

$= P(C)[P(A) - P(AB)] = P(C)\,P(A-AB) = P(C)P(A-B)$

同理 $P(C(B-A)) = P(C)P(B-A)$

①式 $= P(C)[P(A-B) + P(B-A) + P(AB)] = P(C)\,P(A+B)$

方法二：$P[(A+B)C] = P(AC + BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC)$

$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C)$

$= P(A+B)\,P(C)$

13.解：(a) 事件办成 $A=A_1(A_2+A_3)(A_4A_5+A_4A_6+A_5A_6)$

(b) 由于 $\overline{A_4A_5+A_4A_6+A_5A_6}=\overline{A_4}\,\overline{A_5}\,\overline{A_6}+A_4\overline{A_5}\,\overline{A_6}+\overline{A_4}A_5\overline{A_6}+\overline{A_4}\,\overline{A_5}A_6$

$\overline{A_2+A_3}=\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

计算得概率为 $\frac{328}{729}$ $P(A_1)P(A_2+A_3)P(A_4A_5+A_4A_6+A_5A_6)$

15. 设试验为将骰子掷一次，事件A为"出现偶数点"，B为"掷出点数≤3"

$P(A)=\frac{1}{2}$ $P(A|B)=\frac{1}{3}$，$P(A|\overline{B})=\frac{2}{3}$ → 直观上

$P(A)>P(A|B)\Rightarrow P(AB)<P(A)P(B)\Rightarrow P(A)-P(AB)>P(A)-P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(A\overline{B})>P(A)P(\overline{B})\Rightarrow P(A|\overline{B})>P(A)$

21 解：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

可知 $\overline{B}$ 为"没有一个骰子掷出6"，则 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-(\frac{5}{6})^3=\frac{91}{216}$

AB表示"至少掷出一次6且点数和不小于10"

可知只可能是掷一次6，另两次和不小于9

$P(AB)=\binom{3}{1}(\frac{1}{6})(\frac{10}{36})=\frac{30}{216}$

从而 $P(A|B)=\frac{30}{91}$

22.解：n个男孩排成一圈有 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ 排法，排定以后，每两相邻男孩之间空位共n个，再从这n个空位取出m个放女孩，$\binom{n}{m}$ 种，m个女孩排列共 $m!$ 种，从而有利于事件E发生的排列数为 $(n-1)!\binom{n}{m}m!$ 种，而 $n+m$ 个孩子排成一圈共 $(n+m-1)!$ 种

$P(E)=\frac{(n-1)!\binom{n}{m}m!}{(n+m-1)!}=\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n+m-1}{m}}$

29. 解：记 A = {某人独立地检测3次，发现2次呈阳性反应，1次呈阴性}

B_1 = {某人为带菌者}　　B_2 = {某人不是带菌者}

由贝叶斯公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$=\frac{0.1\times\binom{3}{2}\times0.95^2\times0.05}{0.1\times\binom{3}{2}\times0.95^2\times0.05+0.9\times\binom{3}{2}\times(0.01)^2\times0.99}$$

$$\approx0.9806$$

习题集 第一章

52 证明：$P(A)=P(A)P(A) \Rightarrow P(A)=0$ 或 1

53 证明：$P(B|A)=P(B|\bar{A})$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B-AB)}{1-P(A)}$$

$$\Rightarrow P(AB)-P(A)P(AB)=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$$

$$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

54. 证明：由 $P(B|A)>P(B)$ 有 $P(AB)>P(A)P(B)$

$$P(\bar{A}\bar{B})-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)-[1-P(A)][1-P(B)]$$

$$=P(AB)-P(A)P(B)>0$$

$\therefore \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}>P(\bar{B})$　即 $P(\bar{B}|\bar{A})>P(\bar{B})$

55.解：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

从而 $P(A)+P(B)=0.22$

$P(A)P(B)\le\left(\frac{P(A)+P(B)}{2}\right)^2=0.0121<P(AB)$

从而 A 与 B 不相互独立

56.证明：由 $P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=0.9$ $\quad P(A|\bar{C})=\frac{P(A\bar{C})}{P(C)}=0.2$

$\Rightarrow P(AC)=0.45 \quad P(A\bar{C})=0.1$

$\Rightarrow P(A)=P(AC)+P(A\bar{C})=0.55$

同理 $P(B)=P(BC)+P(B\bar{C})=0.5$

又 $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)=0.81$

$P(AB|\bar{C})=P(A|\bar{C})P(B|\bar{C})=0.02$

$P(AB)=P(ABC)+P(AB\bar{C})=0.415$

$P(A)P(B)=0.275\neq P(AB)$，故 A 与 B 不独立

59.解：(1) $0.5\times0.4\times0.2+0.5\times0.6\times0.2+0.5\times0.4\times0.8=0.26$

(2) $A=\{$至少射中一次$\}$ $\quad \bar{A}=\{$一次未中$\}$

$P(A)=1-P(\bar{A})=0.96$

62解：$A_i=\{$第 i 个继电器断开$\}$ $\quad E=\{$电路断开$\}$

$P(E)=P(A_1A_2A_3)+P(\bar{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2A_3})$

$=0.3\times0.4\times0.6+0.7\times0.4\times0.6+0.3\times(1-0.4\times0.6)$

$=0.468$

68 解：(1) $1-\prod_{i=1}^{n} P_i$

(2) $\prod_{i=1}^{n}(1-P_i)$

(3) $\sum_{i=1}^{n}[P_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(1-P_j)]$

75. 解： $B_1=\{$知道正确答案$\}$ $B_2=\{$不知道$\}$

$A=\{$答对该题$\}$

由贝叶斯公式 $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum P(B_i)P(A|B_i)}$

$=\dfrac{4P}{3P+1}$