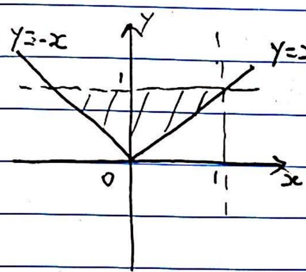
习题集第三章

20. 解：(X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

23. 解：



阴影区域G

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy=1$$

$$\int_0^1\int_{-y}^{y} Ax^2\,dx\,dy=1 \quad\Rightarrow\quad A=6$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}6x^2\,dx=4y^3, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad 0<|x|<y$$

$$P(X\le 0.25\,|\,Y=0.5)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\frac{6x^2}{f_Y(y)}\,dx$$

$$=\frac{9}{16}$$

故 $A=6$， $P(X\le 0.25|Y=0.5)=\frac{9}{16}$

28. 解: (1) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} A e^{-(3x+4y)} dxdy = 1$

$\Rightarrow A = 12$

(2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y} & y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ 故 X, Y 相互独立

(3) $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$

$= \begin{cases} \int_0^z 12e^{x-4z}dx = 12(e^{-3z} - e^{-4z}) & , x>0 \\ 0 & , 其他 \end{cases}$

(4) $f(x,z) = \begin{cases} 12e^{x-4z} & , 0<x<z \\ 0 & , 其他 \end{cases}$

$f_{X|Z=1}(x) = \dfrac{f(x,z=1)}{f_Z(z=1)} = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e-1} & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$E(X|Z=1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Z=1}(x)dx = \dfrac{1}{e-1}$

55. 解：(1) $F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-(x+1)e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}\frac{y}{1+y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\begin{cases}\frac{xe^{-x}}{(1+y)^2}, & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(3) $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，故 X，Y 独立

57. 解：可知 (X，Y) (Y，Z) (X，Z) 联合分布均为

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2} & 0\le x,y\le 2\pi\\ 0 & 其他\end{cases}$

X，Y，Z 边缘分布均为

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le x\le 2\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$

从而 X，Y，Z 两两独立，而 $f(x,y,z)\ne f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$，故不相互独立

皆满足 $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

58. 证明: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

故 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 即 X, Y 不独立

令 $U=X^2$, $V=Y^2$

$P(U\le u, V\le v)=P(-\sqrt{u}\le X\le\sqrt{u}, -\sqrt{v}\le Y\le\sqrt{v})\quad(0<u,v<1)$

从而 $F_{U,V}(u,v)=\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\frac{1+xy}{4}\,du\,dv=\sqrt{uv}\quad(0<u,v<1)$

$f_{U,V}(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{uv}} & 0<u, v<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

可求得 $f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{u}} & 0<u<1\\ 0 & 其他\end{cases}$ $\quad f_V(v)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{v}} & 0<v<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_{U,V}(u,v)=f_U(u)f_V(v)$, 从而 U, V 即 X^2, Y^2 是相互独立的.

或者 $F_{U,V}(u,v)=\begin{cases}\sqrt{uv} & 0<u,v<1\\ \sqrt{u} & 0<u<1, v\ge1\\ \sqrt{v} & 0<v<1, u\ge1\\ 1 & u,v\ge1\\ 0 & 其他\end{cases}$ $\quad F_U(u)=\begin{cases}\sqrt{u} & 0<u<1\\ 1 & u\ge1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$F_V(v)=\begin{cases}\sqrt{v} & 0<v<1\\ 1 & v\ge1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$F_{U,V}(u,v)=F_U(u)F_V(v)$, 从而 ....