习题册第一章

67. 解：(1) $1-(1-p)^m$

(2) $\binom{m}{10}p^{10}(1-p)^{m-10}$

(3) $1-\sum_{i=0}^{2}\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}$

76. 解：(1)

$$\frac{1}{3}\times\frac{3\times 9}{A_{10}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{7\times 14}{A_{15}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{5\times 24}{A_{25}^2}=\frac{29}{90}$$

(2) 记 $A=\{$先抽到1份为女生$\}$

$B=\{$后抽到1份为男生$\}$

$$P(AB)=\frac{1}{3}\times\frac{3\times 7}{A_{10}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{7\times 8}{A_{15}^2}+\frac{1}{3}\times\frac{5\times 20}{A_{25}^2}=\frac{2}{9}$$

记 $C=\{$后抽到1份为女生$\}$

可知 $P(C)=P(A)=\frac{29}{90}$ $\quad P(B)=P(\bar{C})=\frac{61}{90}$

从而 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{20}{61}$

87. 解：每人摸奖一次，每种摸法是一个基本事件，设有k个人，其中 $1\le k\le n$，则共有 A_n^k 个基本事件，且它们发生概率相同。

当第i个摸奖人中奖时，可以是m张中的任一张，其余k-1个人则是从(n-1)张奖中任摸k-1张，从而第i个人中奖包含

$m\cdot A_{n-1}^{k-1}$ 个基本事件

故第i个人中奖概率为 $p_i=\frac{mA_{n-1}^{k-1}}{A_n^k}=\frac{m}{n}$

即不影响

习题集 第二章

1.B

2.解:(1) $\{X=i\}$ 表示获 i 等奖，$\{X=7\}$ 表示未获奖

$$P(X=1)=\frac{\binom{6}{6}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}=\frac{1}{17721088}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{6}{6}\binom{15}{1}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}=\frac{15}{17721088}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{5}\binom{27}{1}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}=\frac{162}{17721088}$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{6}{5}\binom{27}{1}\binom{15}{1}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}+\frac{\binom{6}{4}\binom{27}{2}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}=\frac{7695}{17721088}$$

$$P(X=5)=\frac{\binom{6}{4}\binom{27}{2}\binom{15}{1}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}+\frac{\binom{6}{3}\binom{27}{3}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}=\frac{137475}{17721088}$$

$$P(X=6)=\frac{\binom{6}{2}\binom{27}{4}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}+\frac{\binom{6}{1}\binom{27}{5}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}+\frac{\binom{27}{6}}{\binom{33}{6}\binom{16}{1}}=\frac{1043640}{17721088}$$

$$P(X=7)=1-\cdots=\frac{16532100}{17721088}$$

X分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{17721088} & \frac{15}{17721088} & \frac{162}{17721088} & \frac{7695}{17721088} & \frac{137475}{17721088} & \frac{1043640}{17721088} & \frac{16532100}{17721088} \end{pmatrix}$$

(2) $A=\{X\le 6\}$ $\quad P(A)=\dfrac{1188988}{17721088}\approx 6.71\%$

$B=\{X\le 2\}$ $\quad P(B)=\dfrac{16}{17721088}\approx 0.00009\%$

3. $p=0.1$

4. 解: $X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & \frac{8}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix}$

5. $X\sim\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$

6. $X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{216} & \frac{7}{216} & \frac{19}{216} & \frac{37}{216} & \frac{61}{216} & \frac{91}{216} \end{pmatrix}$

$P(X=k)=\binom{3}{1}(k-1)^2+\binom{3}{2}(k-1)+1$

$EX=\dfrac{119}{24}$

7. $X\sim\begin{pmatrix} 100 & 80 & 50 & -60 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

8. $X \sim \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & -2 \\ 0.32768 & 0.4096 & 0.2048 & 0.05792 \end{pmatrix}$

9. 解: $P(X=100) = \dfrac{2}{\binom{20}{10}} = \dfrac{1}{92378}$

$P(X=20) = \dfrac{2\binom{10}{9}\binom{10}{1}}{\binom{20}{10}} = \dfrac{100}{92378}$

$P(X=5) = \dfrac{2\binom{10}{8}\binom{10}{2}}{\binom{20}{10}} = \dfrac{2025}{92378}$

$P(X=0) = 1 - \cdots = \dfrac{90252}{92378}$

$X \sim \left(\cdots\cdots \right)$

10 解: (1)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

(2) $P(X \le 0) = \frac{1}{4}$

$P(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$

$P(1 \le X < 2) = \frac{3}{4}$

$P(1 < X \le 2) = \frac{1}{4}$

习题集第二章

18. 解：(1) $P(B不会出现) = 0.7^4 + \binom{4}{1}0.3\times0.7^3\times0.4 = 0.40474$

$\therefore P(B会出现) = 0.59526$

(2) 记事件 $M = \{A 恰出现一次\}$

$N = \{B 出现\}$

$P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = \frac{\binom{4}{1}0.3\times0.7^3\times0.6}{0.59526} \approx 0.41488$

21. 解：(1) $\binom{3}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$

(2)

① 甲在第三局赢 $P_1 = \frac{1}{4}$

② ---- 四 --- $P_2 = \binom{2}{1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

③ 五 -- $P_3 = \binom{3}{1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$

甲最终获胜 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{11}{16}$

或者 假设甲乙不管规则下满五场

甲最终获胜 则在五局场获胜 2 或 3 或 4 场

30. 解：(1) 以 X 记买的100注彩票中有中奖的票数

彩票总数相较于中奖票数较大，近似将每张彩票中奖概率看作 $p=\frac{1}{10^4}=0.0001$

可以认为 $X\sim B(100,0.0001)$

$n=100$ 相较于 $p=0.0001$ 较大

认为 $X\sim P(np)$ 即 $X\sim P(0.01)$

中奖概率为 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0.01}\approx 0.0099$

(2) 设买 m 注，同理 $X\sim P(10^{-4}m)$

由题意 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-10^{-4}m}\geq 0.95$

则 $m\geq 10^4\ln 20$

取整的得 $m\geq 29958$

课本第二章

2. 解：若n次试验"A发生偶数次"

则 ①第一次A发生，剩下n-1次发生奇数次

②第一次A不发生，剩下n-1次发生偶数次

故 $P_n = p(1-P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1}$ (*)

当n=1时，$P_1 = 1-p = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$

假设 n-1 时题设成立 即 $P_{n-1} = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^{n-1}]$

则由(*)式可得 $P_n = \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$

归纳可知当n时亦成立

3. 解：$p = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{i}}{2^n \cdot 2^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

4. 解：(a) 可知赌博最多进行2a-1局，可考虑让二人赌满2a-1局，只要甲胜a及以上局便获胜，故概率为

$$\sum_{i=a}^{2a-1} \binom{2a-1}{i} p^i (1-p)^{2a-i-1}$$

(b) $p=\frac{1}{2}$，概率为 $\sum_{i=a}^{2a-1} \binom{2a-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1}$

由于 $\binom{2a-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1} = \binom{2a-1}{2a-i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1}$

且 $\sum_{i=0}^{2a-1} \binom{2a-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1} = 1$

故 $\sum_{i=a}^{2a-1} \binom{2a-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-1} = \frac{1}{2}$

而由于两人赌技相同，胜负规则对二人是公平的，故二人获胜概率相同，皆为$\frac{1}{2}$.