CONSUMO

Omar André de la Sota
aozoro@gmail.com

26 de octubre de 2020

1. Función de consumo keynesiana

$$C = \overline{C} + cY^d, \qquad \overline{C} > 0\,,\wedge\,,0 < c < 1$$

- $\overline{C}$: consumo autónomo
- c: propensión marginal a consumir
- Y^d: ingreso disponible

para el ingreso disponible, se pueden usar los siguientes proxies

$$Y^d = \begin{cases} Y, & \text{ingresos o renta (PIB)} \\ Y - T, & \text{se descuentan impuestos} \\ Y - T + TR, & \text{se agrega las transferencias} \end{cases}$$

▶ Conjeturas de la función de consumo keynesiana

1. Cuando aumenta el ingreso aumenta el consumo también aumenta pero en una cantidad menor. Es decir, la propensión marginal a consumir(PMg$C = c$) está entre 0 y 1.

$$\frac{dC}{dY} = c$$

$$0 < c < 1$$

2. La propensión media a consumir (PMeC), representada por la proporción de la renta destinada al consumo, disminuye al aumentar la renta.

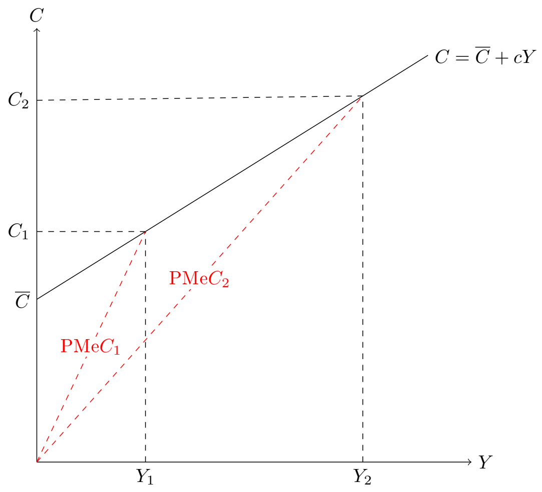
$$\text{PMe}C = \frac{C}{Y}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\text{PMe}C}{dY} &= \frac{d\left(\frac{C}{Y}\right)}{dY} \\ &= \frac{cY - C}{Y^2} \\ &= -\frac{\overline{C}}{Y^2} \end{aligned}$$

$$\overline{C} > 0 \Longleftrightarrow \frac{d\text{PMe}C}{dY} < 0$$

3. La renta es el principal determinante del consumo y la tasa de interés (r) es irrelevante.importante

$$\frac{dC}{dr} = 0$$



Notas sobre la función de consumo keynesiana

1. Todo lo que no se consume de Y se ahorra, es decir, el ahorro se haya como residuo.
2. La propensión marginal a ahorrar (s) se define como

$$s = 1 - c$$

3. La tasa de interes no afecta el consumo, por lo tanto tampoco afecta al ahorro.

▶ Estancamiento secular

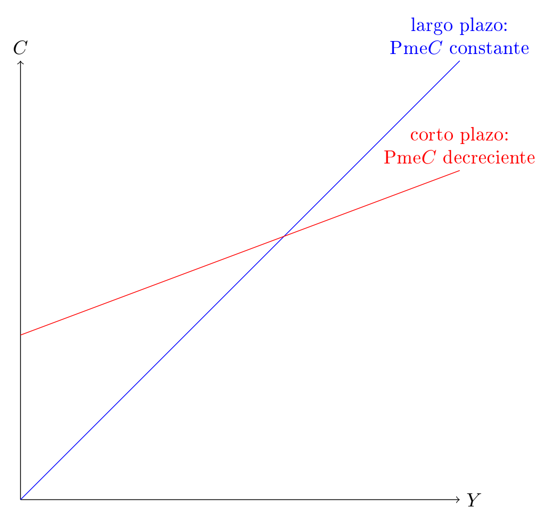
Las conjeturas de Keynes se cumplen a corto plazo, pero no a largo plazo. Ya que según

$$\text{PMe}C = \frac{\overline{C}}{Y} + c$$

si la renta aumenta con el con paso del tiempo, los hogares consumirían una proporción menor ($\frac{d\text{PMe}C}{dY} < 0$). También aumentaría la proporción del ahorro, y esto agotaría todos los proyectos rentables de inversión lo que conllevaría a un **estancamiento secular** (depresión indefinida) por exceso de ahorro.

Los resultados empíricos de Simon Kuznets indicaban que la propensión media al consumo se mantiene constante durante largos periodos de tiempo contradiciendo las conjeturas de la función de consumo keynesiana.

Habrían dos funciones de consumo: de corto plazo y largo plazo



2. La elección intertemporal de Irving Fisher

▶ Dos periodos

Sea un indivio que vive 2 periodos desde $t = 0$ hasta $t = 2$ y nace sin riqueza ni deuda ($A_0 = 0$). Es decir, solo se puede ahorrar o pedir prestado en $t = 1$.

Las restriciciones presupuestales por periodo

$$\begin{aligned} C_1 + A_1 - A_0 &\leq rA_0 + Y_1 \qquad \text{periodo 1} \\ C_2 + A_2 - A_1 &\leq rA_1 + Y_0 \qquad \text{periodo 2} \end{aligned}$$

por los supuestos establecidos $A_0 = 0$ (no se nace con activos financieros) y $A_2 = 0$ (el individuo no ahorra para después ya que solo vive 2 periodos), entonces

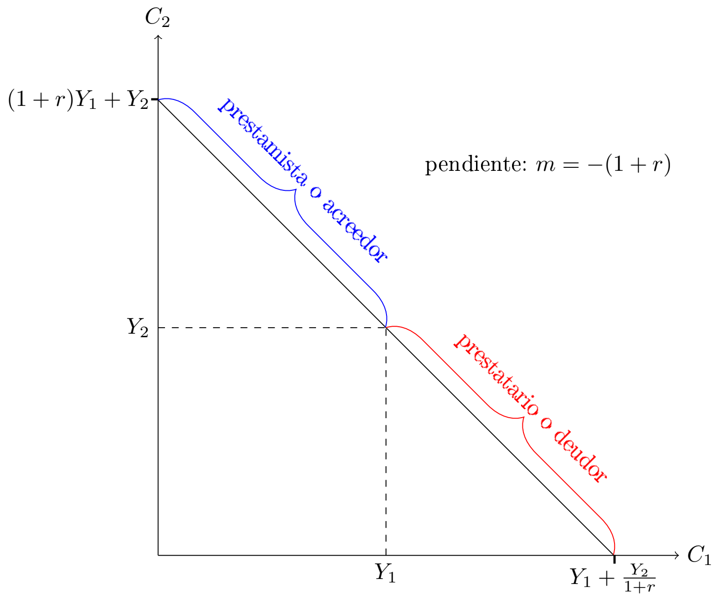
$$\begin{aligned} C_1 + A_1 &\leq Y_1 \\ C_2 - A_1 &\leq rA_1 + Y_0 \end{aligned}$$

donde el ahorro(S) es igual a los activos financieros netos, es decir $S = A_1 - A_0 = A_1$. Despejando el ahorro obtenemos la restricción prespuestaria intertemporal

Restricción presupuestal intermporal

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} \leq Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$

Si el individuo consume más del ingreso que tiene ($C_1 > Y_1$) se endeudará ($S < 0$) . Mientras que si el individuo consume menos del ingreso que tiene ($C_1 < Y_1$) ahorrará ($S > 0$).



tasa marginal de transformación (MRT) es la pendiente de la restricción presupuestal intertemporal. Indica un medida objetiva de intercambio: se intercambia $(1 + r)$ unidades adicioanles de consumo futuro por una unidad adicionalesde consumo presente.

$$\text{MRT} = m = -(1 + r) = \frac{dC_2}{dC_1}$$

▷ Preferencias de los consumidores

Determinada por una función de utilidad $U : R^{+2} \to R$

$$U = f(C_1, C_2)$$

que cumple los supuestos de racionalidad, diferenciabilidad, estricta monoticidad y convexidad.

- Que sea diferenciable implica que es continua y se puede derivar.
- La estricta monotonicidad consiste que las derivadas de primer orden son positivas

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} > 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial C_2} > 0$$

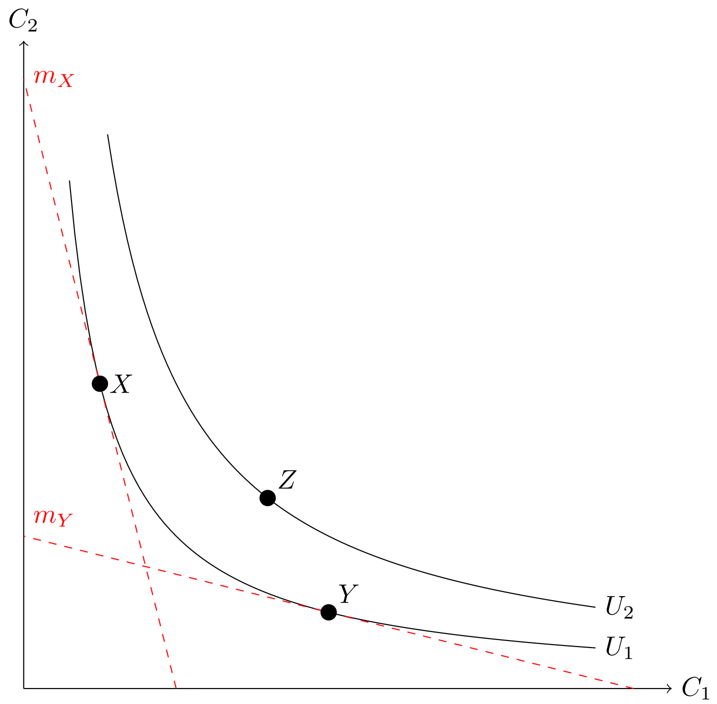
- La convexidad indica que las derivadas de segundo orden son negativas

$$\frac{\partial^2 U}{\partial C_1^2} < 0; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial C_2^2} < 0$$

curva de indiferencia muestra las combinaciones de consumo presente y consumo futuro que generan el mismo nivel de satisfacción.

tasa marginal de sustitución (MRS) es la pendiente de la curva de indiferencia. Indica una medida subjetiva de intercambio: cuanto esta dispuesto a sustituir de consumo futuro adicional por una unidad adicional de consumo presente sin alterar el nivel de satisfacción.

$$\begin{aligned} U(C_1, C_2) &= k \\ U\text{Mg}_1\, dC_1 + U\text{Mg}_2\, dC_2 &= 0 \\ \text{MRS} = -\frac{U\text{Mg}_1}{U\text{Mg}_2} &= \left.\frac{dC_2}{dC_1}\right|_{U=k} \end{aligned}$$



- Hay igual nivel de satisfacción en X y Y, pero el individuo prefiere Z a X.
- Las pendientes m_X y m_Y, correspondientes a la curva U_1 evaluadas en X y Y respectivamente, ambas son negativas tal que $m_X < m_Y$, es decir, $|m_X| > |m_Y|$.
- La MRS en X indica que al poseer más consumo futuro que consumo presente, el ratio de intercambio intertemporal de consumo futuro adicional por consumo presente adicional será muy alto. Dicho de otra forma, estará más dispuesto a dejar consumo futuro para obtener más consumo presente.

▷ **Función de utilidad separable**

Sea la función de utilidad separable en el tiempo

$$U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta\, u(C_2)$$

donde $u(C)$ es diferenciable, estricamente monótona $\left(\frac{du}{dC} > 0\right)$ y convexa $\left(\frac{d^2u}{dC^2} < 0\right)$.

La relación entre el factor de descuento subjetivo (β) y la tasa de impaciencia es (ρ) es

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}; \qquad 0 \leq \beta \leq 1$$

donde β representa cuanto pondera el individuo (subjetivamente) el futuro con respecto al presente, mientras más cercano a 1el individuo será más paciente.

Función de utilidad CRRA

La aversión al riesgo se mide por los coeficientes de Arrow-Pratt: el coeficiente de aversión al riesgo absoluto (ARA) y el coeficiente de aversión al riesgo relativo (RRA)

ARA: $A(C) = -C\frac{u''(C)}{u'(C)}$

RRA: $R(C) = C\,A(C) = -C\frac{u''(C)}{u'(C)}$

La función de utilidad CRRA es tal que hace que $R(C)$ sea igual a una constante σ. Donde σ>0 ya que $u'(C) > 0$ y $u''(C) < 0$.

$$-C\frac{u''(C)}{u'(C)} = \sigma$$

sabemos que $u''(C) = \frac{du'(C)}{dC}$, así

$$\begin{aligned} \frac{du'(C)}{dC} &= -\sigma\frac{u'(C)}{C} \\ \frac{du'(C)}{u'(C)} &= -\sigma\frac{dC}{C} \\ \int \frac{du'(C)}{u'(C)} &= -\sigma \int \frac{dC}{C} \\ \ln(u'(C)) &= -\sigma \ln C + k \end{aligned}$$

donde k es la constante de integración

$$\begin{aligned} u'(C) &= e^k C^{-\sigma} \\ u(C) &= e^k \int C^{-\sigma} dC \end{aligned}$$

$$u(C) = \begin{cases} k_1\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} + k_2 & \sigma \neq 1 \ \wedge \sigma > 0 \\ k_1 \ln C + k_3 & \sigma = 1 \end{cases}$$

donde k_1 reemplaza la constante e^k , k_2 y k_3 son constantes de integración.

Al ser una función de utilidad homotética (las transformaciones lineales no alteran el orden de las preferencias) las constantes se eligen arbitrarias, comunmente tienen la forma

$$u(C) = \begin{cases} \dfrac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} & \sigma \neq 1 \ \wedge \sigma > 0 \\ \\ \ln C & \sigma = 1 \end{cases}$$

Elasticidad intertemporal(ϵ)

Para mayor generalidad usaremos C_t y C_{t+1} en vez de C_1y C_2.

$$\epsilon = -\frac{d \ln \left(C_{t+1}/C_t\right)}{d \ln \left(u'(C_{t+1})/u'(C_t)\right)}$$

es una forma reducida de

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{\frac{d(C_{t+1}/C_t)}{C_{t+1}/C_t}}{\frac{d(u'(C_{t+1})/u'(C_t))}{u'(C_{t+1})/u'(C_t)}} \\
&= -\frac{d\left(C_{t+1}/C_t\right)}{d\left(u'(C_{t+1})/u'(C_t)\right)} \cdot \frac{u'(C_{t+1})/u'(C_t)}{C_{t+1}/C_t}
\end{aligned}$$

Elasticidad intertemporal y la función de utilidad CRRA

Para la función de utilidad CRRA se demuestra que

$$\epsilon = \frac{1}{\sigma}$$

es decir, la elasticidad intertemporal es igual a la inversa de la constante de aversión al riesgo.
Demostracion

$$\begin{aligned}
u(C) &= \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \\
u'(C) &= (1-\sigma)C^{-\sigma} \\
\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} &= \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\left(C_{t+1}/C_t\right)}{d\left(u'(C_{t+1})/u'(C_t)\right)} = \frac{d\left(C_{t+1}/C_t\right)}{d\left(\left[C_{t+1}/C_t\right]^{-\sigma}\right)}$$

usando el cambio de variable $v = [C_{t+1}/C_t]^{-\sigma}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(C_{t+1}/C_t\right)}{d\left(u'(C_{t+1})/u'(C_t)\right)} = \frac{d\left(v^{-1/\sigma}\right)}{dv} &= -\frac{1}{\sigma} v^{-\frac{1+\sigma 1}{\sigma}} \\
&= -\frac{1}{\sigma}\left(\left[C_{t+1}/C_t\right]^{-\sigma}\right)^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}} \\
&= -\frac{1}{\sigma}\left(C_{t+1}/C_t\right)^{1+\sigma}
\end{aligned}$$

reemplazando todo en la definición de elasticidad intertemporal, tenemos

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{d\left(C_{t+1}/C_t\right)}{d\left(u'(C_{t+1})/u'(C_t)\right)} \cdot \frac{u'(C_{t+1})/u'(C_t)}{C_{t+1}/C_t} \\
&= -\left(-\frac{1}{\cancel{\sigma}}\cancel{\left(C_{t+1}/C_t\right)^{1+\sigma}}\right)\frac{\cancel{\left(C_{t+1}/C_t\right)^{-\sigma}}}{\cancel{C_{t+1}/C_t}} \\
&= \frac{1}{\sigma}
\end{aligned}$$

▷ **Optimización**

El individuo máximiza utilidad según su restricción presupuestaria,

$$\max U(C_1, C_2)$$
$$\text{s.t}$$
$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} \leq Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$

La función de utilidad es creciente, por tanto se maximizará cuando la restricción se cumpla con la igualdad, entonces el lagrangiano será

$$\mathscr{L} = U(C_1, C_2) + \lambda \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - C_1 + \frac{C_2}{1+r} \right)$$

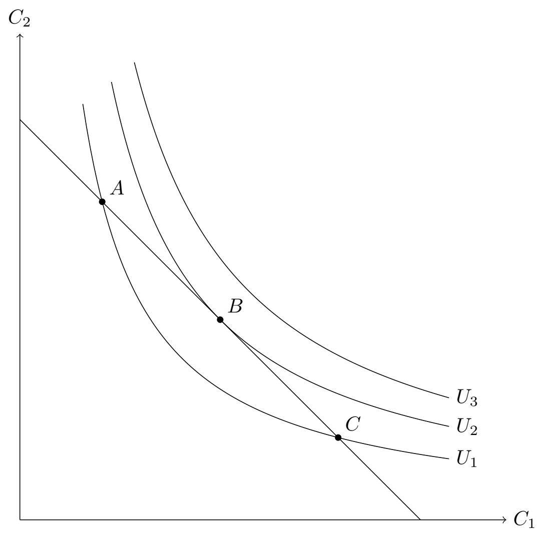
las condiciones de primer orden (CPO)

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_1} = U\text{Mg}_1 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_2} = U\text{Mg}_2 - \lambda(1+r) = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - C_1 + \frac{C_2}{1+r} = 0$$

de lo cual obtenemos

$$\frac{U\text{Mg}_1}{U\text{Mg}_2} = (1+r)$$
$$\text{MRS} = \text{MRT}$$

gráficamente



Para la función de utilidad CRRA sería

$$u = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

$$U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta u(C_2)$$
$$U\text{Mg}_1 = C_1^{-\sigma}$$
$$U\text{Mg}_2 = \beta C_2^{-\sigma}$$
$$\frac{U\text{Mg}_1}{U\text{Mg}_2} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{-\sigma}$$

del equilibrio de MRS=MRT, entemos que

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{-\sigma} = (1+r)$$

a esta conidición de equilibrio se le llama: ecuación de euler.

▷ **Aumento de Y_1 o Y_2 en la optimización**

Tienen el mismo efecto cualitativo un aumento de Y_1 o Y_2 en el consumo, pero si cambia la planificación: se ahorra cuando aumenta Y_1 y se endeuda cuando aumenta Y_2.

Si aumenta el ingreso lo más lógico es que aumenten los consumos de ambos periodos, es decir, podemos suponer que actuán como bienes normales.

$$\frac{dC_i}{dY_j} > 0 \quad i, j = 1, 2$$

Para los dos casos, partiremos del caso donde un inviduo no ahorra ni se endeuda, es decir, consume todo su ingreso en el mismo periodo

$$C_1' = Y_1'$$
$$C_2' = Y_2'$$
$$S = 0$$

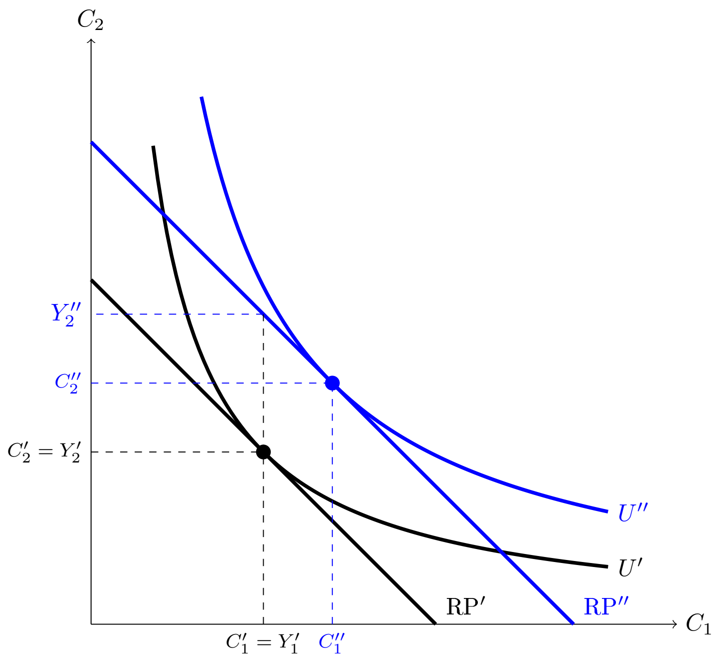
Ambos casos tendrán aumentos de ingreso futuro y presente equivalentes, donde llegarán a al mismo nivel de utilidad con los mismos niveles de consumo,

1. El primer caso es donde se sabe que habrá un aumento del ingreso futuro, Y_2' aumenta a Y_2'' ($Y_2'' > Y_2'$), y Y_1' se mantiene ($Y_1' = Y_1''$).

   Vemos en el gráfico, que tras un aumento del ingreso futuro, el consumo presente y futuro aumentan. El individuo se presta para consumir más en el presente.

   $$C_1'' > Y_1' \implies S < 0 \text{ (se pide prestado)}$$

   El individuo al saber que tendrá mayores ingresos en el futura, aumentará el consumo presente mediante crédito.

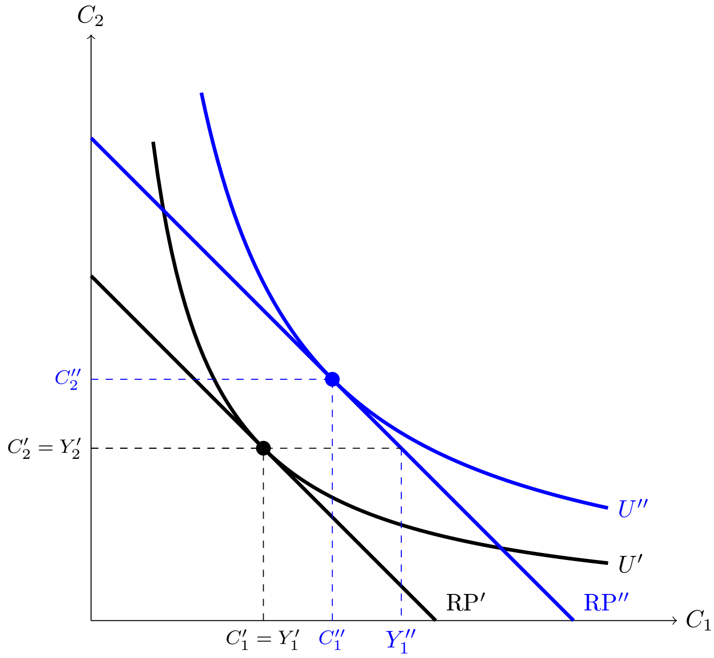


2. El segundo caso es donde se sabe que habrá un aumento del ingreso presente, Y_1' aumenta a Y_1'' ($Y_1'' > Y_1'$), y Y_2' se mantiene ($Y_2' = Y_2''$).

   Vemos en el gráfico, que tras un aumento del ingreso presente, también el consumo presente y futuro aumentan. El individuo ahorra para consumir más en el futuro.

   $$C_1'' < Y_1'' \implies S > 0 \text{ (ahorra)}$$

El individuo al tener mayores ingresos en el presente, no se gastará todo el ingreso en el presente sino que ahorrará para también aumentar el consumo futuro.



▷ **Aumento de r en la optimización**

La pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal es el precio relativo de consumo presente y consumo futuro. Si elegimos el precio del consumo presente como numerario, entonces, el precio de C_1 es 1 y el precio de C_2 será $\frac{1}{1+r}$.

Si aumenta la tasa de interés. como cualquier aumento de precio, existirá un efecto sustitución y un efecto ingreso.

efecto sustitución si aumenta r, el consumo presente se hará más caro y el futuro más barato. Por tanto se sustituirá consumo presente por consumo futuro.

efecto ingreso ante un aumento de r, si el individuo tiene $S > 0$ sus ahorros tendrán mayor rentabilidad, y si el individuo tiene $S < 0$ su deuda se hará más costosa. Esto hace que cambie el poder aquisitivo ya que el dinero presente valdrá más que el dinero presente.
Ante un cambio del poder adquisitivo, C_1 y C_2 tendrán el mismo efecto cualitativo.

El aumento de r genera cambios en la pendiente, ahora será

$$-(1 + r + \Delta r)$$

Para hallar el efecto total del aumento de r, gráficamente tenemos que rotar la restricción presupuestaria intertemporal (RP) al rededor de Y_1 y Y_2, ya que estos no han cambiado y siguen perteneciendo al conjunto de la RP.

Para distinguir el efecto sustitución y el efecto ingreso del efecto total usaremos la metodología de Slutsky. Consiste en obtener la RP que mantiene la relación de precios (con la misma pendiente) y contiene la combinación de consumos antes del cambio de r. Veremos tres casos: un individuo que tiene $S = 0$, $S < 0$ y $S > 0$.

1. Primero, veamos el caso de un individuo que no ahorra y no se pide prestado ($S = 0$)

$$C_1' = Y_1\text{'}$$

$$C_2' = Y_2'$$

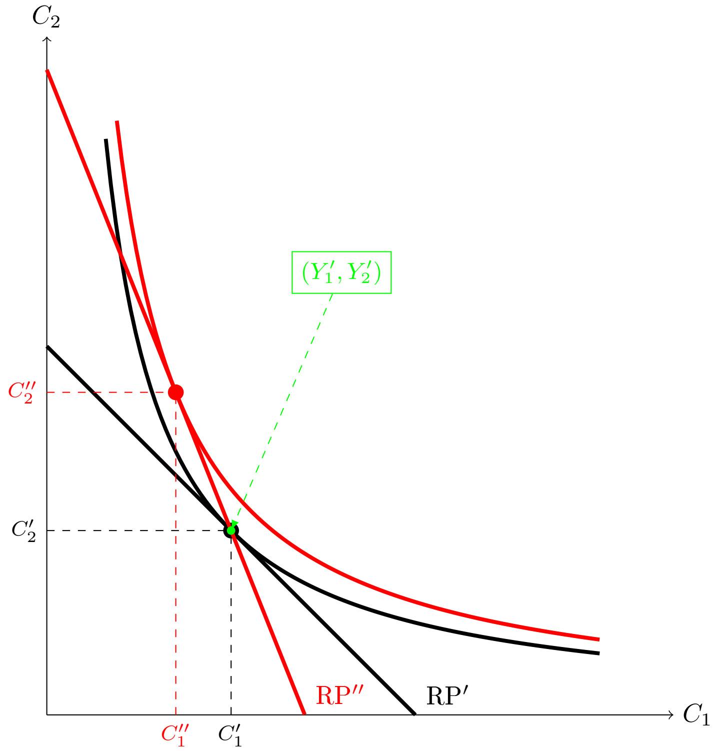
Vemos en la gráfica que la rotación se hace alrededor del punto (Y_1', Y_2'), pero esta nueva RP también contiene la combinación (C_1, C_2), por tanto, no hay efecto ingreso.

Es decir, para el caso donde no ahorra ni pide prestado, la subida de tasa de interés lo lleva a ahorrar $(\Delta S > 0)$. Así el individuo por efecto sustitución reduce C_1' hasta C_1'' y aumenta C_2' hasta C_2'' debido a que el consumo presente se hace más costo con respecto al consumo presente.

Con efecto total

$$\uparrow S, \qquad \downarrow C_1, \qquad \uparrow C_2$$

En los siguientes casos, veremos en donde (C_1', C_2') no pertenecen a la RP del efecto total.



2. Segundo, veamos el caso donde el individuo es deudor $S < 0$

$$C_1' > Y_1'$$

$$C_2' < Y_2'$$

Vemos en la gráfico que el efecto total esta dado por RP''' ya que tiene la pendiente que determina la nueva tasa de interés y además contiene a (Y_1', Y_2').

Para hallar el efecto sustitución hallamos RP'' la cuál contiene a (C_1', C_2'), vemos que C_1' disminuye a C_1'' y C_2' aumenta a C_2''.

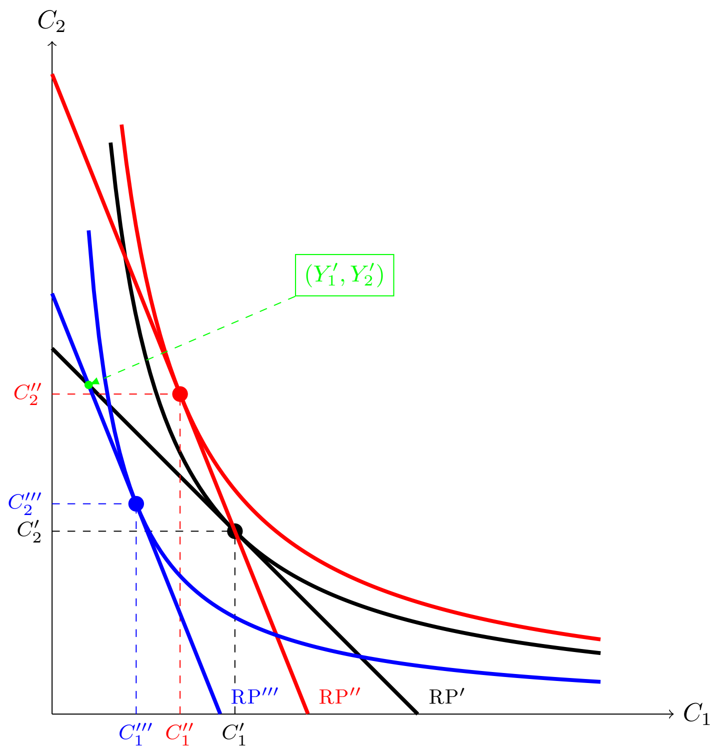
El efecto ingreso es la diferencia entre el efecto total y el efecto sustitución. Al aumentar la tasa de interés, la deuda se hace más costosa.

Es decir, en el caso donde es deudor, el efecto ingreso también lo lleva a disminuir la deuda $(\Delta S > 0)$. Por tanto, C_1'' se reduce a C_1'''' y C_2'' se reduce a C_2''' .

Como efecto total:

$$\uparrow S, \qquad \downarrow C_1, \qquad ¿?C_2$$

Si el efecto sustitución es más fuerte $\uparrow C_2$, pero si el efecto ingreso es mayor $\downarrow C_2$.



3. Tercero, veamos el caso donde el individuo es ahorrador $S > 0$

$$C_1' < Y_1'$$

$$C_2' > Y_2'$$

Vemos en la gráfico que el efecto total esta dado por RP''' ya que tiene la pendiente que determina la nueva tasa de interés y además contiene a (Y_1', Y_2').

Para hallar el efecto sustitución hallamos RP'' la cuál contiene a (C_1', C_2'), vemos que C_1' disminuye a C_1'' y C_2' aumenta a C_2''.

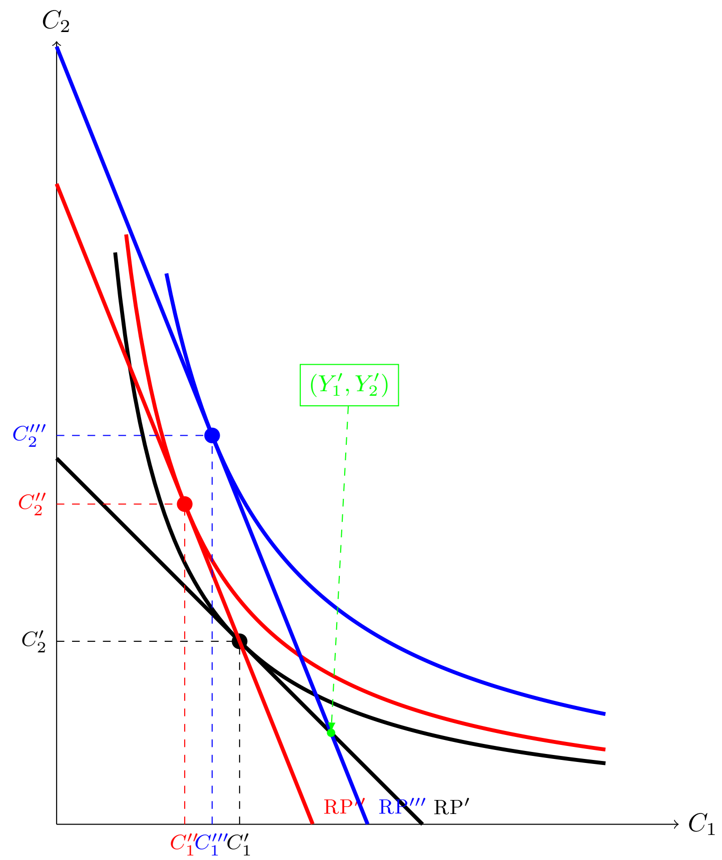
El efecto ingreso es la diferencia entre el efecto total y el efecto sustitución. Al aumentar la tasa de interés, el ahorro obtiene mayores retornos y podría ahorrar menos.

Es decir, en el caso donde es ahorrador, el efecto ingreso contrariamente hace reducir los ahorros $(\Delta S < 0)$. Por tanto, C_1'' aumenta a C_1'''’ y C_2'' aumenta a C_2''' .

Como efecto total:

$$¿?S, \qquad ¿?C_1, \qquad \uparrow C_2$$

Si el efecto sustitución es más fuerte $\uparrow S$ y $\downarrow C_1$, pero si el efecto ingreso es mayor $\downarrow S$ y $\uparrow C_1$. El ahorro puede bajar pero no puede convertir a un individuo ahorrador en deudor.

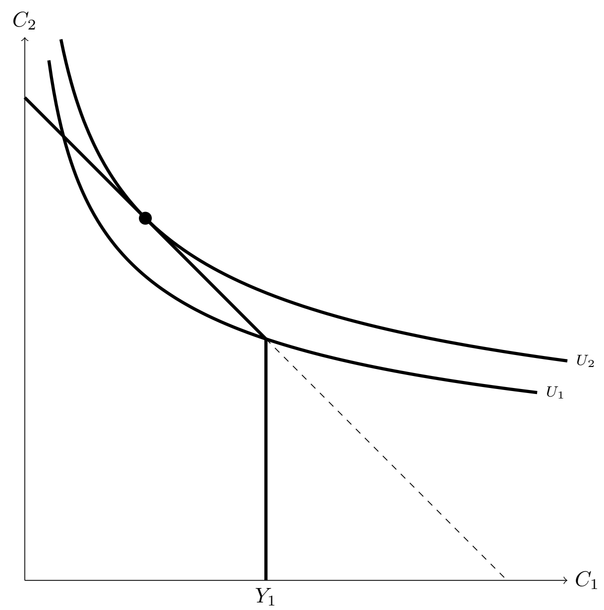


Por lo general supondremos que existe una relación directa entre la tasa de interés (r) y el ahorro (S)

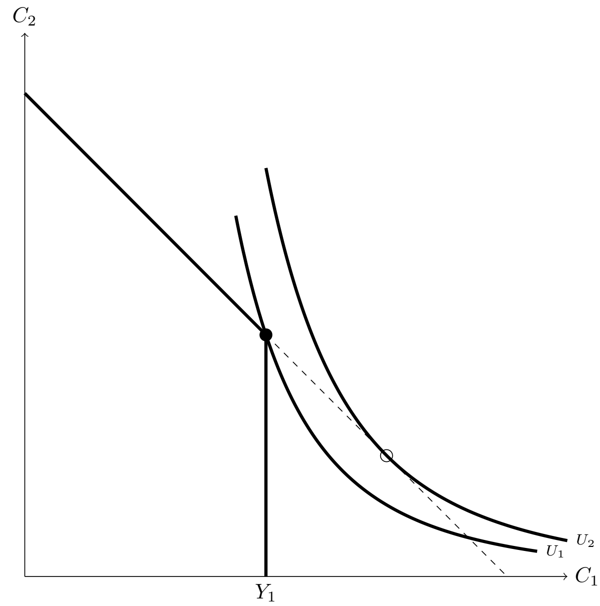
▷ **Restricciones crediticias en la optimización**

El modelo de Fisher asume que el consumidor puede endeudarse y de esta manera consumir en el presente parte del ingreso futuro. Sin embargo, para muchas personas es imposible pedirse prestado.

Un individuo que es ahorrador, no se ve perjudicado por las restricciones de liquidez. Como vemos gráficamente, maximiza su utilidad sin problemas.



En cambio, un individuo que necesita endeudarse para maximizar su utilidad si es afectado por las restricciones de liquidez, como vemos gráficamente solo puede llegar a U_1, un nivel de satisfacción menor, en vez de U_2 que llegaría



Las restricciones de liquidez o crediticas pueden conciliar el enfoque Keynesiano y el enfoque de Fisher. Ya que si un individuo quisiera endeudarse y presenta restricciones de liquidez, solo puede consumir según el ingreso que posee en el presente.

Un aumento del ingreso presente que no conlleve a ahorrar estará destinado a consumirse en el presente tal como lo indica la función de consumo keynesiana.

► Para N periodos

Sea A_t los activos netos al inicio del periodo t (si$A_t < 0$ entonces el individuo tiene más pasivos que activos), estos activos pagan en promedio una tasa de interés r, por lo tanto los ingresos financieros serán rA_t.

La acumulación de activos, $A_{t+1} - A_t$ representa al ahorro del individuo en el periodo t. El agente decide en t sobre A_{t+1} como medio de intercambio intertemporal del consumo.

Entonces, el individuo tiene como recursos un ingreso como dotación Y_t y un ingreso financiero rA_t (es negativo si el individuo tiene $A_t < 0$). Estos recursos los usa para el consumo C_t y para seguir acumulando activos netos (ahorrando o prestandose).

Restricción presupuestal por periodo

$$C_t + A_{t+1} - A_t = Y_t + rA_t$$

o también

$$C_t + A_{t+1} = Y_t + (1+r)A_t$$

Podemos resolver hacia adelante, en $t = 0$

$$C_0 + A_1 = Y_0 + (1+r)A_0$$

en $t = 1$

$$C_1 + A_2 = Y_1 + (1+r)A_1$$
$$A_1 = \frac{C_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+r} - \frac{Y_1}{1+r}$$

entonces en tenemos

$$C_0 + \left[\frac{C_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+r} - \frac{Y_1}{1+r}\right] = Y_0 + (1+r)A_0$$
$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{A_2}{1+r} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} + (1+r)A_0$$

así

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{A_3}{(1+r)^2} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} + \frac{Y_2}{(1+r)^2} + (1+r)A_0$$

continuando con el mismo proceso

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \frac{A_4}{(1+r)^3} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} + \frac{Y_2}{(1+r)^2} + \frac{Y_3}{(1+r)^3} + (1+r)A_0$$

para un individuo que vive N periodos tendremos

$$\sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t} + \frac{A_{N+1}}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0$$

Los activos financieros netos en el periodo $N+1$ serán

$$\frac{A_{N+1}}{(1+r)^t} \begin{cases} \to\ < 0 & \text{Muere endeudado, esquema de ponzi} \\ \to\ = 0 & \text{Planificación en todo su horizonte de vida} \\ \to\ > 0 & \text{No optimiza, deja riqueza} \end{cases}$$

es razonable un esquema no ponzi donde se maximice, es decir $\frac{A_{N+1}}{(1+r)^t} = 0$

Restricción presupuestaria intertemporal

$$\sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0$$

► Para infinitos periodos

Aquí suponemos que un hogar vive infinitos periodos que es lo mismo que una planificación sobre todos sus descendientes

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t} + \lim_{N\to\infty} \frac{A_{N+1}}{(1+r)^t} = \lim_{N\to\infty} \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + \lim_{N\to\infty} (1+r)A_0$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t} + \lim_{N\to\infty} \frac{A_{N+1}}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0$$

ahora la condición de no ponzi es también una condición de transversalidad

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_{N+1}}{(1+r)^t} = 0$$

Restricción presupuestaria intertemporal

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0$$

3. Hipótesis de del ciclo de vida de Franco Modigliani

Los ingresos varían a lo largo de la vida de las familias, se traslada renta a épocas de bajos ingresos mediante el ahorro con tal de suavizar el consumo en $\overline{C}$, es decir

$$C_t = \overline{C}$$

así

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t} &= \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0 \\
\overline{C} \sum_{t=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^t} &= \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0 \\
\overline{C}(1+r)\left(\frac{1-(1+r)^{-N}}{r}\right) &= \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0 \\
\overline{C}\left(\frac{1+r}{r} - \frac{1}{r(1+r)^N}\right) &= \sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^t} + (1+r)A_0
\end{aligned}$$

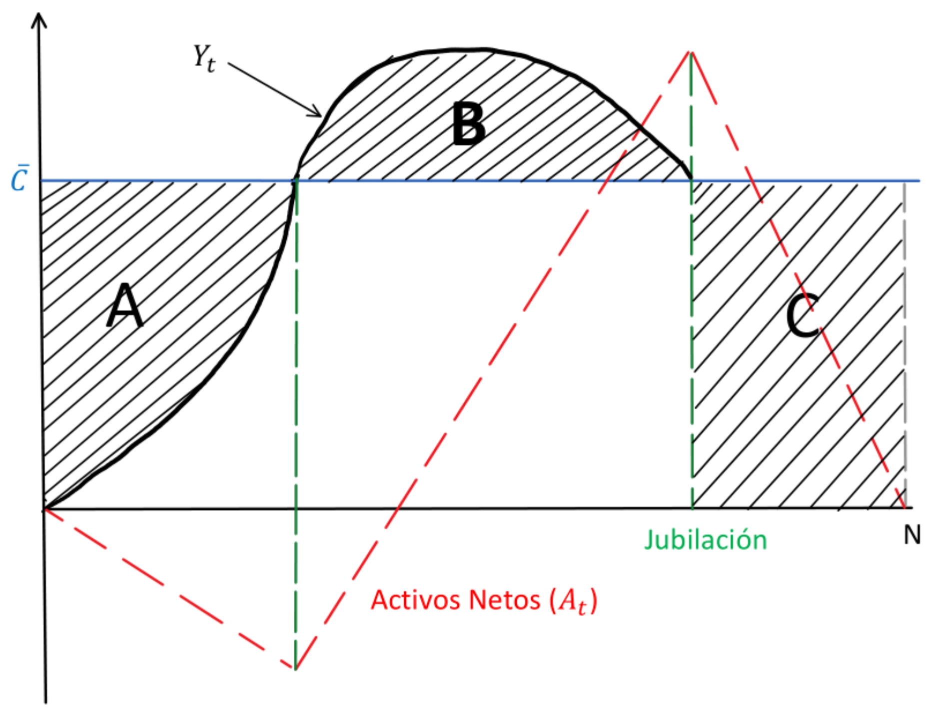
Por simplificar

$$\frac{1}{r(1+r)^N} \approx 0$$

entonces

$$\overline{C} = r\left(\sum_{t=0}^{N} \frac{Y_t}{(1+r)^{t+1}} + A_0\right)$$

gráficamente



Donde el área A representa el endeudamiento, B el ahorro y C el gasto del ahorro. En una economía agregada el crecimiento aumentaría las áreas A y B, esto aumenta el ahorro. De esta manera según la hipótesis de ciclo de vida, el crecimiento aumenta el ahorro.

Otra forma de plantearlo sería

$$C = \alpha W + \beta Y$$

donde

- W es la riqueza
- Y es ingreso

entonces

$$\text{PMe}C = \frac{C}{Y} = \alpha \frac{W}{Y} + \beta$$

en el corto plazo $\uparrow Y$ y $\overline{W}$, esto hace reducir la $PMeC$, pero en el largo plazo $\left(\frac{Y}{W}\right)$ es constante, de esta manera Modigliani responde al enigma de Kuznets.

Seguridad Social o Jubilación

Un componente importante la suavización del consumo $\overline{C}$ es el sistema de pensiones

Sistema de reparto(pay-as-you-go) lo que pagas va un fondo común, ej: ONP

Sistema de capitalización individual(fully funded) se obliga a ahorrar en una cuenta individual que se invierte en el mercado financier, ej: AFP

En un SCI depende la tasa de interés y SR de la tasa de crecimiento del ingreso y población. Bajo la hipótesis del ciclo de vida los individuos pueden ajustar sus ahorros haciendose préstamos, de esta manera no hay sentido para la existencia de un sistema de pensiones.

Razones por la que existe el sistema de pensiones:

- Evitar incentivos perversos, ya que se puede subahorrar, ya que el estado igual se tiene que hacer cargo de las ancianos
- Incentivo para la jubilación
- Siempre hay personas que no planifican

4. Teoria del ingreso permanente de Nilton Friedman

El ingreso (Y) se puede dividir en ingreso permanente Y^P y en ingreso transitorio Y^T

$$Y = Y^P + Y^T$$

Los individuos solo aumenta el consumo si sben que la renta es permanente

$$C_t = cY_t^P$$

La propensión media a consumor es

$$\text{PMe}C = \frac{C}{Y} = \frac{cY_t^P}{Y_t}$$

- Si $\uparrow Y^T$ entonces $\downarrow \text{PMe}C$
- Si $\downarrow Y^T$ entonces $\uparrow \text{PMe}C$

Modelación 1: Renta permanente como porcentaje

Si consideramos permanente cuando persiste más de 2 periodos, pero solo una parte θ se considera permanente

$$P_t^P = \theta Y_t + (1-\theta)Y_{t-1}$$

entonces

$$C_t = c\theta Y_t + c(1-\theta)Y_{t-1}$$

donde $c\theta$ es la propensión marginal a consumir en el corto plazo. y en el largo plazo la propensión a consumir en el largo plazo es c ya que

$$c\theta + c(1-\theta) = c$$

Modelación 2: Probabilidad de renta permamente

En el periodo t se recibe una renta $\overline{Y}$ tal que $\overline{Y} > Y$. No se sabe si es permanente o transitoria, pero se sabe la probabilidad p que sea permanente. Si suponemos que Y y $\overline{Y}$ son ingresos constantes, entonces

$$V_a = \overline{Y}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)} = \frac{1+r}{r}\overline{Y}$$

$$V_b = \overline{Y} + \overline{Y}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)} = \overline{Y} + \frac{Y}{r}$$

donde V_a significa que es una renta sea permanente y V_b signfica que es una renta transitoria y en el siguiente periodo regresa a Y. Se sabe que C_{t+k}=$\overline{C}$, $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\overline{C}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^j} &= pV_a + (1-p)V_b \\
\overline{C}\left(\frac{1+r}{r}\right) &= p\left(\frac{1+r}{r}\right)\overline{Y} + (1-p)\left(\overline{Y} + \frac{Y}{r}\right) \\
\overline{C}\left(\frac{1+r}{r}\right) &= \left(\frac{p+pr}{r} + 1 - p\right)\overline{Y} + \left(\frac{1-p}{r}\right)Y \\
\overline{C}\left(\frac{1+r}{r}\right) &= \left(\frac{p+\cancel{pr}+r-\cancel{pr}}{r}\right)\overline{Y} + \left(\frac{1-p}{r}\right)Y \\
C_{t+k} = \overline{C} &= \left(\frac{r+p}{1+r}\right)\overline{Y} + \left(\frac{1-p}{1+r}\right)Y ; \forall k \geq 0
\end{aligned}$$

ademas sabemos que en C_{t-1} se consumia Y, entonces

$$\begin{aligned}
C_t &= \left(\frac{r+p}{1+r}\right)\overline{Y} + \left(\frac{1-p}{1+r}\right)Y \\
C_{t-1} &= Y \\
C_t - C_{t-1} &= \left(\frac{r+p}{1+r}\right)\overline{Y} - \left(\frac{r+p}{1+r}\right)Y \\
C_t - C_{t-1} &= \left(\frac{r+p}{1+r}\right)\left(\overline{Y} - Y\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$\text{PMe}C = \frac{\Delta C_t}{\Delta Y_t} = \frac{C_t - C_{t-1}}{\overline{Y} - Y} = \frac{r+p}{1+r}$$

la prepensión marginal al consumo es creciente en p. Es decir, cuando se tenga más certeza de que el ingreso sea permanente aumentará más el consumo con cada aumento de dicho ingreso.

La teoría del ciclo de vida (CV) y la renta permanente (IP) son complementarias y provienen de la misma conducta del individuo que maximiza la utilidad del consumo a lo largo de su vida. A la unificación de las teorias se le denomina CV/IP.

5. Hipótesis del paseo aleatorio de Robert Hall

Bajo ciertas condiciones la teoría CV/IP implica que el consumo debería seguir un paseo aleatorio. Ahora el periodo 2 es incierto, entonces

$$\begin{aligned}
&\max_{\{C_t, C_{t+1}\}} U\left(C_t\right) + \frac{1}{1+\rho}E_t\left[U\left(C_{t+1}\right)\right] \\
&s.t \\
&Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r} = C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r}
\end{aligned}$$

donde E_t son las expectativas racionales o condicionales conociendo toda la información hasta t.

Para resolverlo reemplazamos

$$\max_{\{C_t\}} U(C_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t \left[U \left(Y_{t+1} + (1+r)(Y_t - C_t) \right) \right]$$

las condiciones de primer orden serán

$$U'(C_t) - \frac{1+r}{1+\rho} E_t \left[U'(C_{t+1}) \right] = 0; \qquad E(r) = r \qquad (r\text{: risk free})$$

si tenemos una función de utilidad explícita de la forma cuadrática

$$\begin{aligned} U(C_t) &= -\left(\overline{C} - C_t\right)^2 \\ U'(C_t) &= 2\left(\overline{C} - C_t\right) \\ U'(C_{t+1}) &= 2\overline{C} - 2C_{t+1} \\ E_t\left[U'(C_{t+1})\right] &= 2\overline{C} - 2E_t C_{t+1} \end{aligned}$$

suponemos que la tasa de impaciencia y la tasa libre de riesgo son iguales $r = \rho$ (equilibrio)

$$\begin{aligned} U'(C_t) - \frac{1+r}{1+\rho} E_t\left[U'(C_{t+1})\right] = 0& \\ U'(C_t) &= \frac{1+r}{1+\rho} E_t\left[U'(C_{t+1})\right] \\ 2\left(\overline{C} - C_t\right) &= 2\overline{C} - 2E_t C_{t+1} \\ 2\overline{C} - 2C_t &= 2\overline{C} - 2E_t C_{t+1} \\ E_t C_{t+1} &= C_t \\ E\left[C_{t+1} \,|\Omega_t\right] &= C_t \end{aligned}$$

esto regresanta una regresión de la forma

$$C_{t+1} = C_t + \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon \sim iid\left(0, \sigma^2\right)$$

que es un martingala que se le conoce como un paseo aleatorio, en estricto faltaría suponer sobre la varianza.

Aunque la evidencia rechaza que el consumo siga un paseo aleatorio.

Incluyendo activos con riesgo

Suponemos que el individuo tiene acceso a comprar un activo i con retorno incierto igual a r^i

$$\max_{\{C_t\}} U(C_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t \left[U \left(Y_{t+1} + \left(1 + r^i\right)(Y_t - C_t) \right) \right]$$

y la condición de primer orden será

$$\begin{aligned} U'(C_t) - \frac{1}{1+\rho} E_t\left[(1+r^i)U'(C_{t+1})\right] = 0& \\ U'(C_t) &= \frac{1}{1+\rho} E_t\left[(1+r^i)U'(C_{t+1})\right] \\ E_t\left[(1+r^i)\frac{U'(C_{t+1})}{(1+\rho)U'(C_t)}\right] = 1& \end{aligned}$$

definimos como M al factor de descuento estocástico

$$M = \frac{U'(C_{t+1})}{(1+\rho)U'(C_t)}$$

así

$$E_t\left[(1+r^i)M\right]=1$$

para el caso libre de riesgo

$$\begin{aligned}(1+r)E_tM&=1\\ E_tM&=\frac{1}{1+r}\end{aligned}$$

y para el caso del activo i

$$E_t\left[(1+r^i)M\right]=E_t\left[M+r^iM\right]=E_tM+E_tr^iM=1$$

usando $E[XY]=E[X]E[Y]+Cov(X,Y)$ tenemos

$$\begin{aligned}E_tM+E_tr^iM&=1\\ E_tM+E_tr^iE_tM+Cov\left(r^i,M\right)&=1\end{aligned}$$

y restamos el caso del activo libre de riesgo

$$\begin{aligned}E_tM+E_tr^iE_tM+Cov\left(r^i,M\right)&=1\\ E_tM+rE_tM&=1\\ \left(E_tr^i-r\right)E_tM+Cov\left(r^i,M\right)&=0\\ E_tr^i-r&=-\frac{Cov\left(r^i,M\right)}{E_tM}\end{aligned}$$

usando la definición de M y sacando de las expectativas a$1/(1+\rho)$ y a $U'\left(C_t\right)$ ya que son variables ciertas.

$$\begin{aligned}E_tr^i-r&=-\frac{Cov\left(r^i,\frac{U'(C_{t+1})}{(1+\rho)U'(C_t)}\right)}{E_t\left(\frac{U'(C_{t+1})}{(1+\rho)U'(C_t)}\right)}\\ E_tr^i-r&=-\frac{\cancel{\left(\frac{1}{(1+\rho)U'(C_t)}\right)}Cov\left(r^i,U'\left(C_{t+1}\right)\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{(1+\rho)U'(C_t)}\right)}E_tU'\left(C_{t+1}\right)}\end{aligned}$$

así

$$E_tr^i-r=-\frac{Cov\left(r^i,U'\left(C_{t+1}\right)\right)}{E_tU'\left(C_{t+1}\right)}$$

donde E_tr^i-r es la prima de un activo riesgoso. De la teoría del consumo podemos obtener cuanto debe ser esta prima.

Para obtener el modelo CAPM, suponemos que existe un activo cuyo retorno es r^m que esta perfectamente correlacionado negativamente con la utilidad marginal del consumo

$$r^m=-\theta U'\left(C_{t+1}\right)$$

que representa a todos los activos de la economí. Así las covarianzas con respecto a r^i y r^m serán

$$\begin{aligned}Cov\left(r^i,U'\left(C_{t+1}\right)\right)&=Cov\left(r^i,-\frac{r^m}{\theta}\right)=-\frac{1}{\theta}Cov\left(r^i,r^m\right)\\ Cov\left(r^m,U'\left(C_{t+1}\right)\right)&=Cov\left(r^m,-\frac{r^m}{\theta}\right)=-\frac{1}{\theta}V\left(r^m\right)\end{aligned}$$

y las primas

$$\begin{aligned}E_tr^i-r&=\frac{\frac{1}{\theta}Cov\left(r^i,r^m\right)}{E_tU'\left(C_{t+1}\right)}\\ E_tr^m-r&=\frac{\frac{1}{\theta}V\left(r^m\right)}{E_tU'\left(C_{t+1}\right)}\end{aligned}$$

entonces

$$E_tr^i-r=\beta^i\left(E_tr^m-r\right);\qquad \beta^i=\frac{Cov\left(r^i,r^m\right)}{V\left(r^m\right)}$$

así tenemos el modelo CAPM, el cúal concluye que mientras haya mayor relación (covarianza postiva) y mayor estabilidad (varianza pequeña) en el mercado, se tendrá una mayor prima de riesgo.

6. Gratificación inmediata de David Laibson

Mediante la economía conductual se descarta la idea del agente ultraracional. Experimento:

- Pregunta 1: ¿Preferirá A) tener un caramelo hoy o B) tener dos mañana?
- Pregunta 2: ¿Preferirá A)tener un caramelo dentro de 100 días o B) tener 2 caramelos dentro de 101 días?

El hecho que en la pregunta 1 se elija A) pero en la pregunta 2 se elija B) plantea la posibilidad que las preferencias de los consumidores sean inconsistentes temporalmente.

Se puede decir que los individuos son más pacientes a largo plazo. Al pasar los 100 días una persona que respondío B) en la pregunta 2) puede cambiar de decisón como en la pregunta 1, esto debido al tirón de la gratificación inmediata.