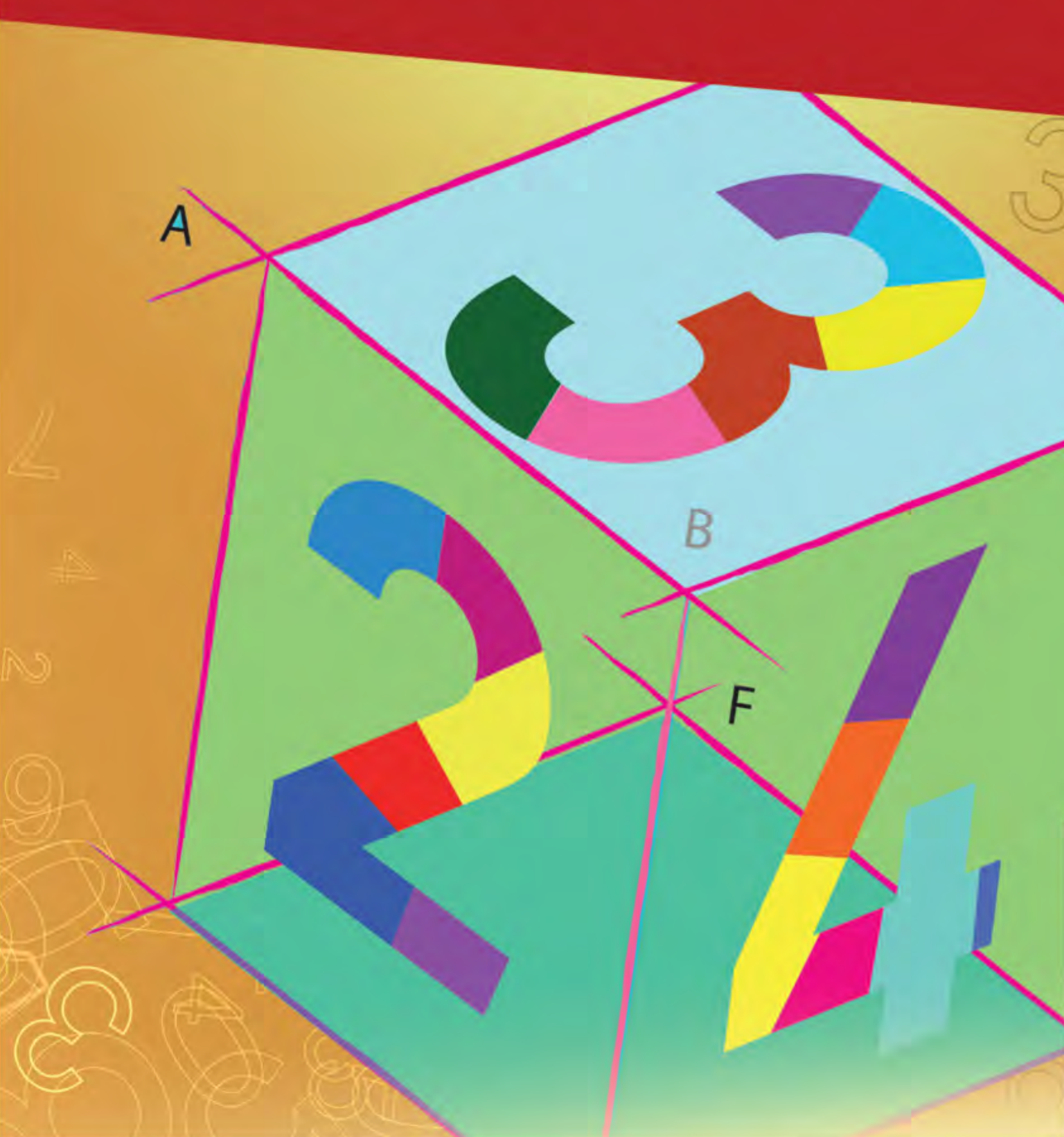
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
REPUBLIK INDONESIA
2016

KURIKULUM 2013

EDISI REVISI 2016

MATEMATIKA



SMA/MA
SMK/MAK
Kelas
X

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika / Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2016.
viii, 202 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII
ISBN 978-602-282-103-8 (jilid lengkap)
ISBN xxxxxxxxxxxxxxx (jilid 1)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Prof. Dr. Bornok Sinaga, M.Pd. Pardomuan J.N.M Sinambela, M.Pd, Andri Kristianto Sitanggang, MP.d, Tri Andri Hutapea, S.Si, M.Sc, Sudianto Manulang, S.Si, M.Sc, Lasker Pengarapan Sinaga, S.Si, M.Si, Mangara Simanjorang

Penelaah : Agung Lukito, Ali Mahmudi, Kusnandi, dan Turmudi.

Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-2, 2016
Disusun dengan huruf Minion Pro, 12 pt.

Kata Pengantar

Anak-anak kami, Generasi Muda harapan bangsa ...

Sesungguhnya, kami gurumu punya cita-cita dan harapan dari hasil belajar Kamu. Kami berkeinginan membelajarkan Kamu pada setiap ruang dan waktu. Tetapi itu tidak mungkin, karena ruang dan waktu membatasi pertemuan kita. Namun demikian ruang dan waktu bukan penghambat bagi kita mendalami ilmu pengetahuan. Pakailah buku ini sebagai salah satu sumber belajarmu. Apa yang ada dalam buku ini cukup bermanfaat untuk mempelajari matematika, dan untuk keberhasilan Kamu menuju jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

Matematika adalah hasil abstraksi (pemikiran) manusia terhadap objek-objek di sekitar kita dan menyelesaikan masalah yang terjadi dalam kehidupan, sehingga dalam mempelajarinya Kamu harus memikirkannya kembali, bagaimana pemikiran para penciptanya terdahulu. Belajar matematika sangat berguna bagi kehidupan. Cobalah membaca dan pahami materinya serta terapkan untuk menyelesaikan masalah-masalah kehidupan di lingkunganmu. Kamu punya kemampuan, kami yakin kamu **pasti bisa** melakukannya.

Buku ini diawali dengan pengajuan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa terkait dengan materi yang akan diajarkan. Tujuannya agar kamu mampu menemukan konsep dan prinsip matematika melalui pemecahan masalah yang diajukan dan mendalami sifat-sifat yang terkandung di dalamnya yang sangat berguna untuk memecahkan masalah kehidupan. Tentu, penemuan konsep dan prinsip matematika tersebut dilakukan oleh kamu dan teman-teman dalam kelompok belajar dengan bimbingan guru. Coba lakukan tugasmu, mulailah berpikir, bertanya, berdiskusi, berdebat dengan orang/teman yang lebih memahami masalah. Ingat …!!!, tidak ada hasil tanpa usaha dan perbuatan.

Asahlah pemahaman kamu dengan memecahkan masalah dan tugas yang tersedia. Di sana ada masalah otentik/nyata dan teka-teki untuk memampukan kamu berpikir logis, cermat, jujur dan tangguh menghadapi masalah. Terapkan pengetahuan yang telah kamu miliki, cermati apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, konsep dan rumus mana yang akan digunakan untuk menyelesaikan. Semuanya sangat berguna bagi kamu.

Selamat belajar, semoga buku ini bermanfaat dan dapat membantu kamu kompeten bermatematika dan memecahkan masalah kehidupan.

Jakarta,   Nopember 2015

Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar .... **iii**

Daftar Isi .... **v**

Diagram Alir .... **viii**

Bab 1 Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel **1**

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 1

B. Diagram Alir 2

C. Materi Pembelajaran 3

1.1 Konsep Nilai Mutlak 3

1.2 Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel 7

Uji Kompetensi 1.1 17

1.3 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel 19

Uji Kompetensi 1.2 29

D. Rangkuman 31

Bab 2 Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel **33**

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 33

B. Diagram Alir 34

C. Materi Pembelajaran 35

2.1 Menyusun dan Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel 35

Uji Kompetensi 2.1 47

2.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel 50
Uji Kompetensi 2.2 57
D. Rangkuman 61

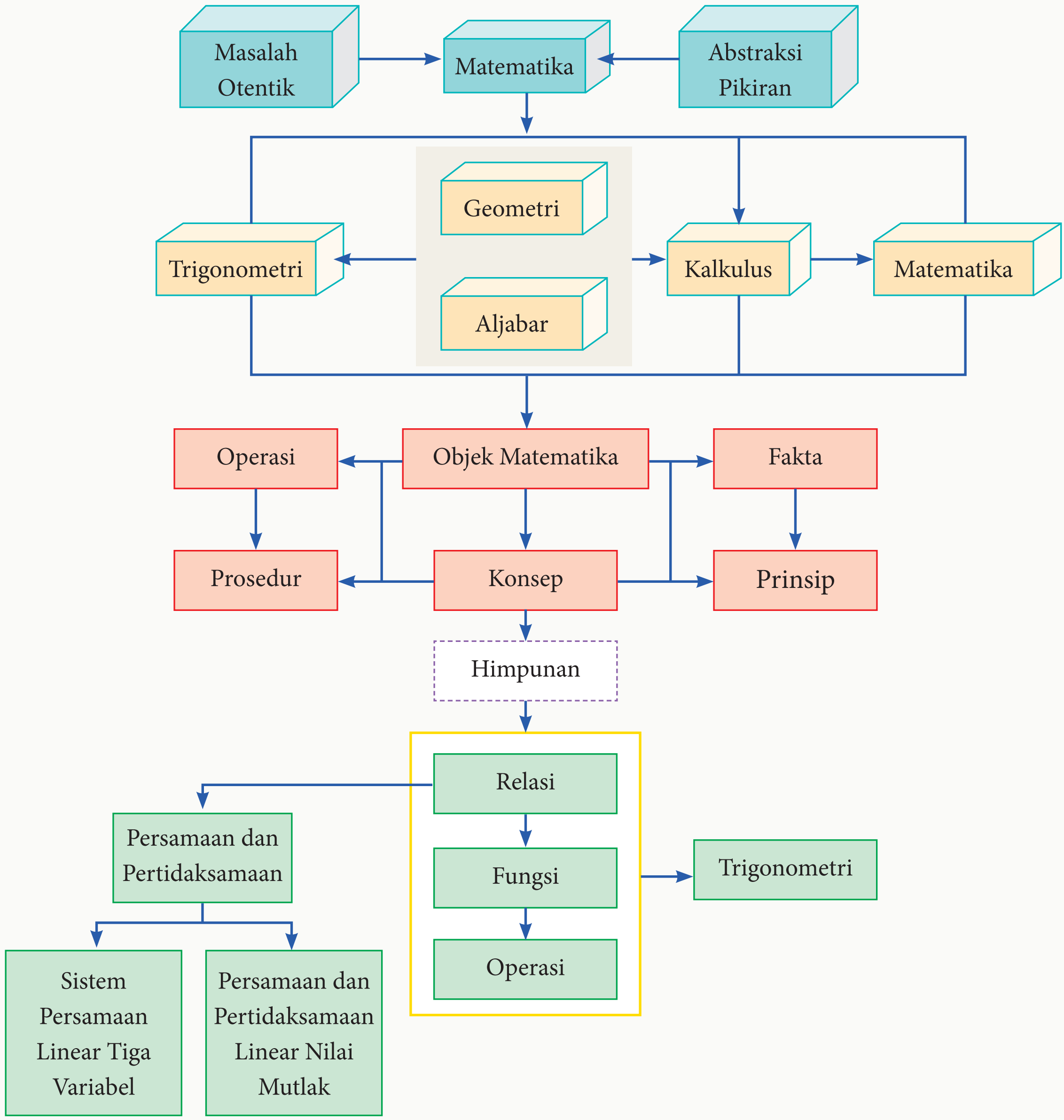
BAB 3 Fungsi 63
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 63
B. Diagram Alir 65
C. Materi Pembelajaran 66
3.1 Memahami Notasi, Domain, Range, dan Grafik Suatu Fungsi 66
3.2 Operasi Aljabar pada Fungsi 70
3.3 Menemukan Konsep Fungsi Komposisi 74
3.4 Sifat-Sifat Operasi Fungsi Komposisi 83
Uji Kompetensi 3.1 89
3.5 Fungsi Invers 91
3.6 Menemukan Rumus Fungsi Invers 96
Uji Kompetensi 3.2 105
D. Rangkuman 107

BAB 4 Trigonometri 109
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar 109
B. Diagram Alir 111
C. Materi Pembelajaran 112
4.1 Ukuran Sudut (Derajat dan Radian) 112
Uji Kompetensi 4.1 118
4.2 Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku 121
Uji Kompetensi 4.2 131

4.3 Nilai Perbandingan Trigonometri untuk 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, dan 90^o 133
Uji Kompetensi 4.3 143
4.4 Relasi Sudut 146
4.5 Identitas Trigonometri 168
Uji Kompetensi 4.4 173
4.6 Aturan Sinus dan Cosinus 176
4.7 Grafik Fungsi Trigonometri 185
Uji Kompetensi 4.5 193
D. Rangkuman 196

Glosarium **197**
Daftar Pustaka **200**
Profil Penulis **202**

Diagram Alir



Keterangan

adalah materi prasyarat yang dipelajari di SD dan SMP

adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika

adalah pokok bahasan yang dipelajari

adalah bidang kajian matematika

adalah keterkaitan secara hirarkis matematika

BAB 1

Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

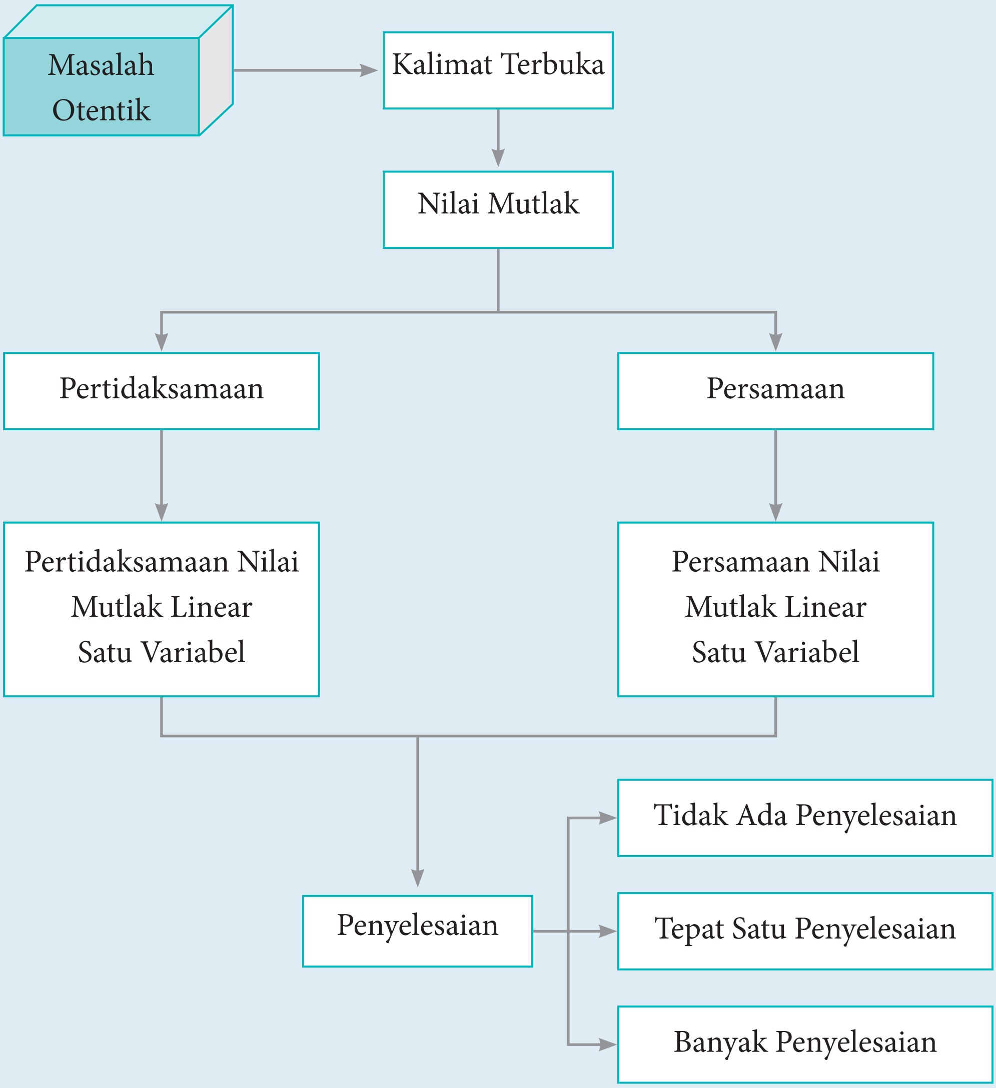
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menunjukkan sikap jujur, tertib dan mengikuti aturan, konsisten, disiplin waktu, ulet, cermat dan teliti, maju berkelanjutan, bertanggung jawab, berpikir logis, kritis, kreatif, dan analitis serta memiliki rasa senang, motivasi internal, ingin tahu dan ketertarikan pada ilmu pengetahuan dan teknologi serta sikap terbuka, percaya diri, kemampuan bekerja sama, toleransi, santun, objektif, dan menghargai, 2. serta, menyusun persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dari masalah kontekstual, 3. menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan persamaan atau pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.	Melalui pembelajaran materi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel, siswa memperoleh pengalaman belajar berikut. ❖ Mampu berpikir kreatif. ❖ Mampu menghadapi permasalahan pada kasus linear dikehidupan sehari-hari. ❖ Mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. ❖ Mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep. ❖ Mengajak kerjasama tim dalam menemukan penyelesaian permasalahan. ❖ Mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari. ❖ Siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah-Istilah

- Linear
- Persamaan
- Pertidaksamaan
- Nilai mutlak

B. Diagram Alir



C. Materi Pembelajaran

Pada bab ini, kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak yang sederhana, yaitu persamaan dan pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak bentuk linear satu variabel.

1.1 Konsep Nilai Mutlak

Untuk memahami konsep nilai mutlak, mari kita perhatikan kedua ilustrasi berikut ini.

Cerita Pertama

Perhatikan Gambar 1.1. Kegiatan pramuka merupakan salah satu kegiatan ekstrakurikuler yang diadakan di sekolah. Suatu pasukan pramuka sedang belajar baris berbaris di lapangan sekolah pada hari Sabtu. Sebuah perintah dari pimpinan regu, yaitu "Maju 4 langkah, jalan!", hal ini berarti jarak pergerakan barisan adalah 4 langkah kedepan. Jika perintah pimpinan pasukan adalah "Mundur 3 langkah, jalan!", hal ini berarti bahwa pasukan akan bergerak ke belakang sejauh 3 langkah. Demikian seterusnya.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 1.1 Pramuka

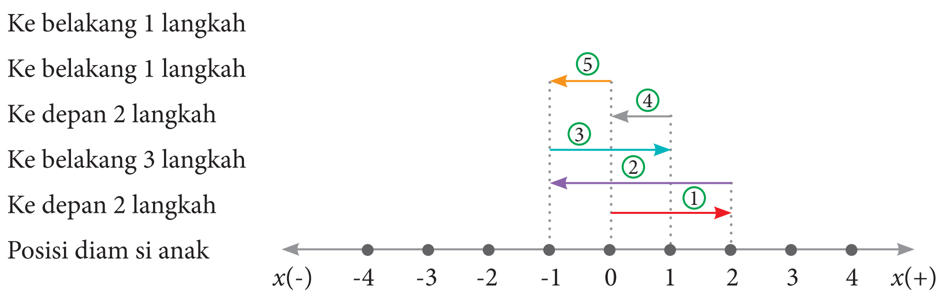
Besar pergerakan langkah pasukan tersebut merupakan nilai mutlak, tidak ditentukan arah. Contoh, "maju 4 langkah", berarti mutlak 4 langkah dari posisi diam dan "mundur 3 langkah, berarti mutlak 3 langkah dari posisi diam. Dalam hal ini, yang dilihat adalah nilainya, bukan arahnya.

Cerita Kedua

Seorang anak bermain lompat-lompatan di lapangan. Dari posisi diam, si anak melompat ke depan 2 langkah, kemudian 3 langkah ke belakang, dilanjutkan 2 langkah ke depan, kemudian 1 langkah ke belakang, dan akhirnya1 langkah lagi ke belakang. Secara matematis, ilustrasi ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

Kita definisikan lompatan ke depan adalah searah dengan sumbu x positif. Dengan demikian, lompatan ke belakang adalah searah dengan sumbu x negatif.

Perhatikan sketsa berikut.



Gambar 1.2 Sketsa lompatan

Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi diam si anak. Anak panah yang pertama di atas garis bilangan menunjukkan langkah pertama si anak sejauh 2 langkah ke depan (mengarah ke sumbu x positif atau +2). Anak panah kedua menunjukkan 3 langkah si anak ke belakang (mengarah ke sumbu x negatif atau -3) dari posisi akhir langkah pertama. Demikian seterusnya sampai akhirnya si anak berhenti pada langkah kelima.

Jadi, kita dapat melihat pergerakan akhir si anak dari posisi awal adalah 1 langkah saja ke belakang ($x = -1$ atau $x = (+2) + (-3) + (+2) + (-1) + (-1) = -1$), tetapi banyak langkah yang dijalani si anak merupakan konsep nilai mutlak. Kita hanya menghitung banyak langkah, bukan arahnya, sehingga banyak langkahnya adalah $|2| + |-3| + |2| + |-1| + |-1| = 9$ (atau 9 langkah).

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 1.1 Nilai Mutlak

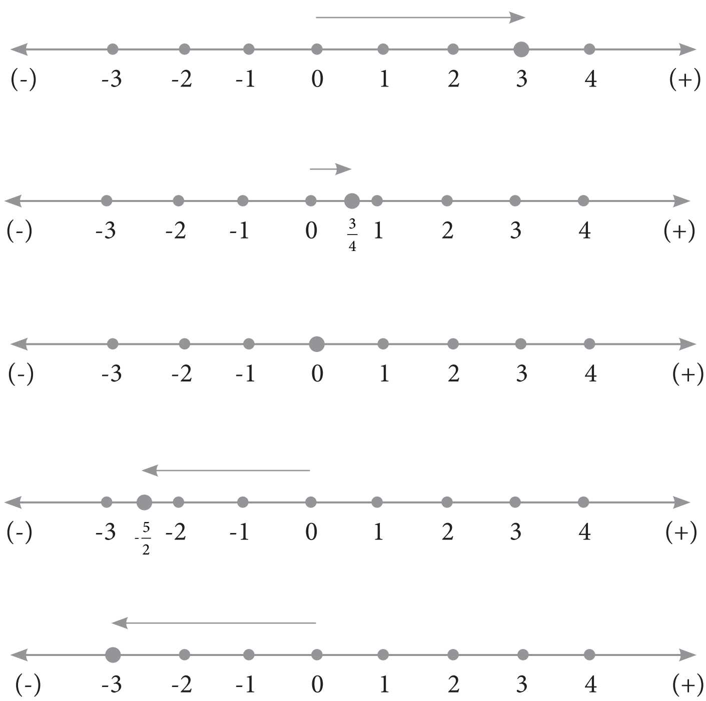
Bilangan Non Negatif	Nilai Mutlak	Bilangan Negatif	Nilai Mutlak
0	0	-2	2
2	2	-3	3
3	3	-4	4
5	5	-5	5

Berdasarkan kedua cerita dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik suatu kesimpulan tentang pengertian nilai mutlak? Jika x adalah variabel pengganti sebarang bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak dari x tersebut?

Perhatikan bahwa x anggota himpunan bilangan real (ditulis $x \in R$). Berdasarkan tabel, kita melihat bahwa nilai mutlak dari x akan bernilai positif atau nol (non negatif). Secara geometris, *nilai mutlak suatu bilangan adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real*. Dengan demikian, tidak mungkin nilai mutlak suatu bilangan bernilai negatif, tetapi mungkin saja bernilai nol.

Ada beberapa contoh percobaan perpindahan posisi pada garis bilangan, yaitu sebagai berikut.

1. $|3| = 3$
2. $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$
3. $|0| = 0$
4. $\left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$
5. $|-3| = 3$



Gambar 1.3 Cara menentukan nilai mutlak suatu bilangan pada garis bilangan

Catatan:

- Garis bilangan digunakan sebagai media untuk menunjukkan nilai mutlak.
- Tanda panah digunakan untuk menentukan besar nilai mutlak, dimana arah ke kiri menandakan nilai mutlak dari bilangan negatif, dan begitu

juga sebaliknya. Arah ke kanan menandakan nilai mutlak dari bilangan positif.

- Besar nilai mutlak dilihat dari panjang tanda panah dan dihitung dari bilangan nol.

Penjelasan

Garis bilangan 1: Tanda panah bergerak ke arah kanan berawal dari bilangan 0 menuju bilangan 3, dan besar langkah yang dilalui tanda panah adalah 3. Hal ini berarti nilai $|3| = 3$ atau berjarak 3 satuan dari bilangan 0.

Garis bilangan 5: Tanda panah bergerak ke arah kiri berawal dari bilangan 0 menuju bilangan -3, dan besar langkah yang dilalui tanda panah adalah 3. Hal ini berarti bahwa nilai $|-3| = 3$ atau berjarak 3 satuan dari bilangan 0.

Dari kedua penjelasan di atas, dapat dituliskan konsep nilai mutlak, sebagai berikut.

Definisi 1.1

Misalkan x bilangan real, $|x|$ dibaca nilai mutlak x, dan didefinisikan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$$

Definisi di atas dapat diungkapkan dengan kalimat sehari-hari seperti berikut ini. *Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu*. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa:

a) $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, karena $\frac{1}{2} > 0$ ($\frac{1}{2}$ adalah bilangan positif).

b) $|5| = 5$, karena $5 > 0$ (5 adalah bilangan positif).

c) $|-3| = -(-3) = 3$, karena $-3 < 0$ (-3 adalah bilangan negatif).

Latihan 1.1

Gunakan Definisi 1.1 untuk menentukan nilai mutlak berikut.

a. Tentukan $|x + 2|$ untuk x bilangan real.

b. Tentukan $|x - 3|$untuk x bilangan real.

c. Tentukan $|2x + 3|$ untuk x bilangan real.

d. Tentukan $|-2x + 5|$ untuk x bilangan real.

e. Tentukan $\left|\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right|$ untuk x bilangan real.

1.2 Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Pada sub-bab ini, kita akan mengkaji bentuk persamaan nilai mutlak linear satu variabel dan strategi menyelesaikannya. Untuk memulainya, mari kita cermati pembahasan masalah berikut ini.

Masalah 1.1

Tentukan nilai x (jika ada) yang memenuhi setiap persamaan berikut ini.

1. $|2x - 1| = 7$
2. $|x + 5| = -6$
3. $|(4x - 8)| = 0$
4. $-5|3x - 7| + 4 = 14$
5. $|2x - 1| = |x + 3|$

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita akan mengubah bentuk $|2x - 1|$ seperti pada Latihan 1.1.

1. $$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{jika } x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & \text{jika } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Akibatnya diperoleh 2 persamaan, yaitu sebagai berikut.

   Untuk $x \geq \frac{1}{2}$, $2x - 1 = 7$, $2x = 7 + 1$, $2x = 8$ atau $x = 4$

Untuk $x < \frac{1}{2}$, $(2x - 1) = 7$, $-2x + 1 = 7$, $-2x = 7 - 1$, $-2x = 6$ atau $x = -3$

Jadi, nilai $x = 4$ atau $x = -3$ memenuhi persamaan nilai mutlak $|2x - 1| = 7$.

2. Tidak ada $x \in R$ yang memenuhi persamaan $|x + 5| = -6$, mengapa?
3. Persamaan $|(4x - 8)| = 0$ berlaku untuk $4x - 8 = 0$ atau $4x = 8$.

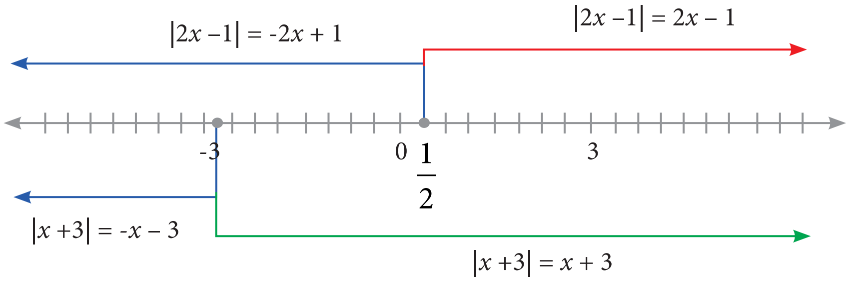
   Jadi, untuk $x = 2$ memenuhi persamaan $|4x - 8| = 0$.
4. Persamaan $-5|3x - 7| + 4 = 14 \Leftrightarrow |3x - 7| = -2$.

   Bentuk $|3x - 7| = -2$ bukan suatu persamaan, karena tidak ada x bilangan real, sehingga $|3x - 7| = -2$.
5. Ubah bentuk $|2x - 1|$ dan $|x + 3|$ dengan menggunakan Definisi 1.1, sehingga diperoleh:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{jika} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{jika} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{jika} \quad x \geq -3 \\ -x-3 & \text{jika} \quad x < -3 \end{cases} \tag{1.2}$$

Berdasarkan sifat persamaan, bentuk $|2x - 1| = |x + 3|$, dapat dinyatakan menjadi $|2x - 1| - |x + 3| = 0$. Artinya, sesuai dengan konsep dasar "mengurang", kita dapat mengurang $|2x - 1|$ dengan $|x + 3|$ jika syarat x sama. Sekarang, kita harus memikirkan strategi agar $|2x - 1|$ dan $|x + 3|$ memiliki syarat yang sama. Syarat tersebut kita peroleh berdasarkan garis bilangan berikut.



Gambar 1.4 Nilai $|2x - 1|$ dan $|x + 3|$ sesuai dengan Definisi 1.1

Oleh karena itu, bentuk (1.1) dan (1.2) dapat disederhanakan menjadi:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{jika} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{jika} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{jika} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{jika} \quad -3 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{jika} \quad x < -3 \end{cases} \qquad 1.3$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{jika} \quad x \geq -3 \\ -x-3 & \text{jika} \quad x < -3 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{jika} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ x+3 & \text{jika} \quad -3 \leq x < \frac{1}{2} \\ -x-3 & \text{jika} \quad x < -3 \end{cases} \qquad 1.4$$

Akibatnya, untuk menyelesaikan persamaan $|2x - 1| - |x + 3| = 0$, kita fokus pada tiga kemungkinan syarat x, yaitu $x \geq \frac{1}{2}$ atau $-3 \leq x < \frac{1}{2}$ atau $x < -3$.

- Kemungkinan 1, untuk $x \geq \frac{1}{2}$.

  Persamaan $|2x - 1| - |x + 3| = 0$ menjadi $(2x - 1) - (x + 3) = 0$ atau $x = 4$.

  Karena $x \geq \frac{1}{2}$, maka $x = 4$ memenuhi persamaan.

- Kemungkinan 2, untuk $-3 \leq x < \frac{1}{2}$

  Persamaan $|2x - 1| - |x + 3| = 0$ menjadi $-2x + 1 - (x + 3) = 0$ atau $x = -\frac{2}{3}$.

  Karena $-3 \leq x < \frac{1}{2}$ maka $x = -\frac{2}{3}$ memenuhi persamaan.

- Kemungkinan 3, $x < -3$

  Persamaan $|2x - 1| - |x + 3| = 0$ menjadi $-2x + 1 - (-x - 3) = 0$ atau $x = 4$.

  Karena $x < -3$, maka tidak ada nilai x yang memenuhi persamaan.

Jadi, nilai x yang memenuhi persamaan $|2x - 1| = |x + 3|$ adalah $x = 4$ atau $x = -\frac{2}{3}$.

Sifat 1.1

Untuk setiap a, b, c, dan x bilangan real dengan $a \neq 0$.

1. Jika $|ax + b| = c$ dengan $c \geq 0$, maka salah satu sifat berikut ini berlaku.

   i. $|ax + b| = c$, untuk $x \geq -\dfrac{b}{a}$

   ii. $-(ax + b) = c$, untuk $x < -\dfrac{b}{a}$

2. Jika $|ax + b| = c$ dengan $c < 0$, maka tidak ada bilangan real x yang memenuhi persamaan $|ax + b| = c$.

Latihan 1.2

Manfaatkan Sifat 1.1 untuk mengubah bentuk nilai mutlak berikut.

a. $|x - 1|$

b. $|2x - 6|$

c. $|2x - 6| + |x - 1|$

d. $|2x - 6| - |x - 1|$

Masalah 1.2

Sumber: https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas

Gambar 1.5 Sungai

Perhatikan Gambar 1.5 di sungai ini. Sungai pada keadaan tertentu mempunyai sifat cepat meluap di musim hujan dan cepat kering di musim kemarau. Diketahui debit air sungai tersebut adalah p liter/detik pada cuaca normal dan mengalami perubahan debit sebesar q liter/detik di cuaca tidak normal.

Tunjukkan nilai penurunan minimum dan peningkatan maksimum debit air sungai tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Nilai mutlak peningkatan dan penurunan debit air tersebut dengan perubahan q liter/detik dapat ditunjukkan dengan persamaan

$|x - p| = q$, x adalah debit air sungai.

Dengan Definisi 1.1, maka $$|x-p| = \begin{cases} x - p & \text{jika} \quad x \geq p \\ -x + p & \text{jika} \quad x < p \end{cases} \qquad 1.5$$

Akibatnya, $|x - p| = q$ berubah menjadi

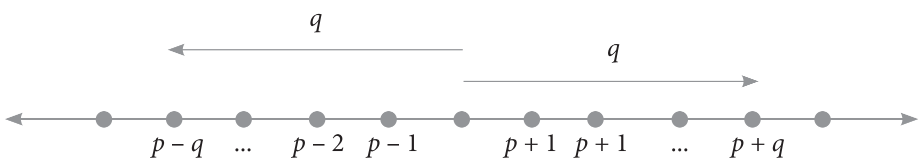
a) Untuk $x \geq p$, $x - q$ atau $x = p + q$

Hal ini berarti peningkatan maksimum debit air sungai adalah $(p + q)$

b) Untuk $x < p$, $-x + p = q$ atau $x = p - q$

Hal ini berarti penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$

Dengan pemahaman yang telah dimiliki, maka kita dapat menggambarkannya sebagai berikut.



Gambar 1.6 Nilai maksimum $p + q$ dan nilai minimum $p - q$

Dari grafik di atas, dapat dinyatakan penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$ liter/detik dan peningkatan maksimum debit air adalah $(p + q)$ liter/detik.

Contoh 1.1

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 3| + |2x - 8| = 5$.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 1.1 diperoleh

$$|x-3| = \begin{cases} x - 3 & \text{jika} \quad x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{jika} \quad x < 3 \end{cases} \qquad 1.6$$

$$|2x-8| = \begin{cases} 2x-8 & \text{jika} \quad x \geq 4 \\ -2x+8 & \text{jika} \quad x < 4 \end{cases} \qquad 1.7$$

- Untuk $x < 3$, maka bentuk $|x - 3| + |2x - 8| = 5$ menjadi $-x + 3 - 2x + 8 = 5$ atau $x = 2$

  Karena $x < 3$, maka nilai $x = 2$ memenuhi persamaan.

- Untuk $3 \leq x \leq 4$, maka $|x - 3| + |2x - 8| = 5$ menjadi $x - 3 - 2x + 8 = 5$ atau $x = 0$

  Karena $x \leq x \leq 4$, maka tidak ada nilai x yang memenuhi persamaan.

- Untuk $x \geq 4$, maka $|x - 3| + |2x - 8| = 5$ menjadi $x - 3 + 2x - 8 = 5$ atau $x = \frac{16}{3}$.

  Karena $3 \leq x \leq 4$, maka $x = \frac{16}{3}$ memenuhi persamaan.

Jadi, penyelesaian $|x - 3| + |2x - 8| = 5$ adalah $x = 2$ atau $x = \frac{16}{3}$.

Contoh 1.2

Sketsa fungsi $y = |x|$ untuk setiap x bilangan real.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan Definisi 1.1, berarti

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$$

Kita dapat menggambar dengan menggunakan beberapa titik bantu pada tabel berikut.

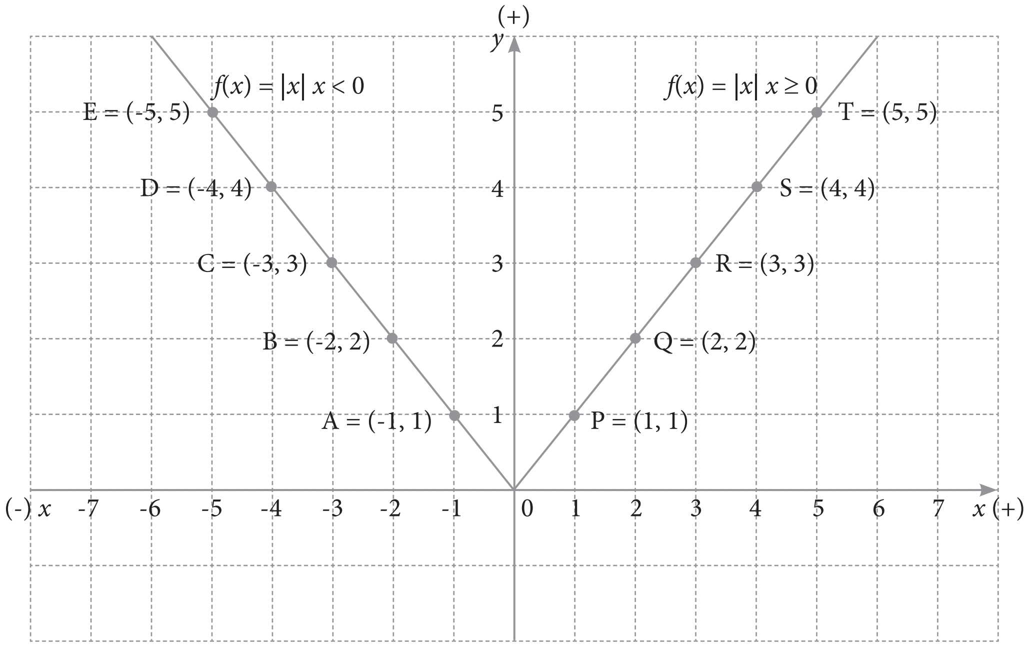
Tabel 1.2 Koordinat titik yang memenuhi $y = |x|$, untuk $x \geq 0$

x	...	0	1	2	3	4	5	...
y	...	0	1	2	3	4	5	...
(x, y)	...	(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)	(5, 5)	...

Tabel 1.3 Koordinat titik yang memenuhi $y = |x|$, untuk $x < 0$

x	...	-1	-2	-3	-4	-5	...
y	...	1	2	3	4	5	...
(x, y)	...	(-1, 1)	(-2, 2)	(-3, 3)	(-4, 4)	(-5, 5)	...

Titik-titik yang kita peroleh pada tabel, kemudian disajikan dalam sistem koordinat kartesius sebagai berikut.



Gambar 1.7 Grafik fungsi $y = |x|$

Latihan 1.3

Gambarkan grafik bentuk nilai mutlak berikut dengan memanfaatkan Definisi 1.1.

a. $y = |x - 2|$

b. $y = |x + 2|$

c. $y = |2x - 1|$

Alternatif Penyelesaian

Langkah-langkah penyelesaian untuk bagian a sebagai berikut. Selanjutnya dengan proses yang sama, kerjakan bagian b dan c.

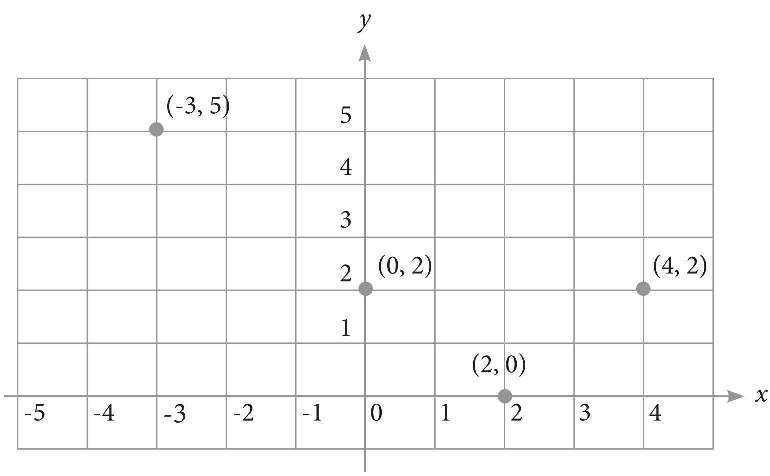
Langkah 1. Buatlah tabel untuk menunjukkan pasangan titik-titik yang mewakili $y = |x - 2|$. Tentukan pertama sekali nilai x yang membuat nilai y menjadi nol. Tentu, $x = 2$, bukan? Jadi, koordinat awalnya adalah (2, 0).

Tabel 1.4 Grafik $y = |x - 2|$

x	y	(x, y)	x	y	(x, y)
-5	...	...	0	2	(0,2)
-4	...	...	1	...	...
-3	5	(-3, 5)	2	...	...
-2	...	...	3	...	...
-1	...	...	4	2	(4, 2)

Lengkapilah tabel di atas dan kita akan menemukan beberapa pasangan titik yang memenuhi $y = |x - 2|$ tersebut.

Langkah 2. Letakkan titik-titik yang kita peroleh pada tabel di atas pada sistem koordinat kartesius.



Gambar 1.8 Titik pada kurva $y = |x - 2|$

Langkah 3. Buatlah garis lurus yang menghubungkan titik-titik yang sudah diletakkan di bidang koordinat tersebut sesuai dengan urutan nilai x. Kamu akan mendapat grafik $y = |x - 2|$.

Dapatkah kamu memberikan pendapatmu tentang hubungan $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$? Sebelum kamu menjawab, kamu coba lakukan pengamatan pada tabel berikut dan ikuti langkah-langkahnya.

Langkah 1. Lengkapi Tabel 1.5. Tentukan hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ dengan melakukan pengamatan pada tabel yang telah dilengkapi.

Tabel 1.5 Hubungan $\sqrt{x^2}$ dan $|x|$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt{x^2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\|x\|$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Langkah 2. Lakukan pengamatan pada nilai di tabel. Nilai baris manakah yang sama nilainya?

Langkah 3. Ambillah kesimpulanmu tentang hubungan antara $\sqrt{x^2}$ dan $|x|$.

Selain menggunakan Definisi 1.1, persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dapat juga diselesaikan dengan menggunakan sifat $|x| = \sqrt{x^2}$. Hanya saja, bentuk ini tidak linear. Untuk itu, penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dengan menggunakan $|x| = \sqrt{x^2}$ merupakan alternatif penyelesaian saja. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.3

Berdasarkan sifat $|x| = \sqrt{x^2}$, maka selesaikan persoalan pada Masalah 1.1

1. $|2x - 1| = 7$

Alternatif Penyelesaian

$\sqrt{(2x-1)^2} = 7^2$

$4x^2 - 4x + 1 = 49$

$4x^2 - 4x + 1 - 49 = 0$

$4x^2 - 4x - 48 = 0$

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x - 4)(x + 3) = 0$

$x = 4$ atau $x = -3$

2. $|2x - 1| = |x + 3|$

(Dikerjakan sebagai latihan)

Uji Kompetensi 1.1

1. Tentukanlah nilai mutlak untuk setiap bentuk berikut ini.

a) $|-8n|$, n bilangan asli

b) $\left|2\sqrt{3}-3\right|$

c) $\left|\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{5}\right|$

d) $|12 \times (-3) : (2 - 5)$

e) $|2^5 - 3^3|$

f) $\left|12^{1/2} - 24^{3/2}\right|$

g) $|(3n)^{2n-1}|$, n bilangan asli

h) $\left|2n - \dfrac{1}{n+1}\right|$, n bilangan asli

2. Manakah pernyataan berikut ini yang merupakan pernyataan bernilai benar? Berikan alasanmu.

a) $|k| = k$, untuk setiap k bilangan asli.

b) $|x| = x$, untuk setiap x bilangan bulat.

c) Jika $|x| = -2$, maka $x = -2$.

d) Jika $2t - 2 > 0$, maka $|2t - 2| = 2t - 2$.

e) Jika $|x + a| = b$, dengan a, b, x bilangan real, maka nilai x yang memenuhi hanya $x = b - a$.

f) Jika $|x| = 0$, maka tidak ada x bilangan real yang memenuhi persamaan.

g) Nilai mutlak semua bilangan real adalah bilangan non negatif.

3. Hitunglah nilai x (jika ada) yang memenuhi persamaan nilai mutlak berikut. Jika tidak ada nilai x yang memenuhi, berikan alasanmu.

a) $|4 - 3x| = |-4|$

b) $2x + |3x - 8| = 4$

c) $2x + |3x - 8| = -4$

d) $5|2x - 3| = 2|3 - 5x|$

e) $2x + |8 - 3x| = |x - 4|$

f) $\dfrac{|x|}{|x-2|} = |-10|$, $x \neq 2$

g) $\dfrac{|x-5|}{|2x|} = -4$, $x \neq 0$

h) $|-4|.|5x+6| = \dfrac{|10x-8|}{2}$

4. Suatu grup musik merilis album, penjualan per minggu (dalam ribuan) dinyatakan dengan model $s(t) = -2|t - 22| + 44$, t waktu (dalam minggu).

a) Gambarkan grafik fungsi penjualan $s(t)$.

b) Hitunglah total penjualan album selama 44 minggu pertama.

c) Dinyatakan Album Emas jika penjualan lebih dari 500.000 copy. Hitunglah t agar dinyatakan Album Emas.

5. Selesaikan setiap persamaan nilai mutlak berikut ini.

a) $|2y + 5| = |7 - 2y|$

b) $|x - 1| + |2x| + |3x + 1| = 6$

c) $|4x - 3| = -|2x - 1|$

d. $\dfrac{|3p+2|}{4} = \left|\dfrac{1}{2}p - 2\right|$

e. $-|3 - 6y| = |8 - 2y|$

f. $|3{,}5m - 1{,}2| = |8{,}5m + 6|$

6. Selidiki kebenaran setiap pernyataan berikut ini dan berikan alasan untuk setiap pernyataanmu tersebut.

a) Untuk setiap a, b bilangan real, $|ab| = |a|.|b|$

b) Untuk Setiap a, b bilangan real, , $b \neq 0$

c) Untuk Setiap a, b bilangan real, $|a - b| = |b - a|$

1.3 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Berdasarkan konsep nilai mutlak dan persamaan nilai mutlak, kita akan mempelajari bagaimana konsep pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Seperti lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas perhubungan.

Selanjutnya, kita akan mengaplikasikan konsep nilai mutlak ke dalam pertidaksamaan linear dengan memahami dan meneliti kasus-kasus berikut.

Masalah 1.3

Seorang bayi lahir prematur di sebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak. Untuk mengatur suhu tubuh bayi tetap stabil, maka harus dimasukkan ke inkubator selama 2 hari. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C.

Bayi tersebut lahir dengan BB seberat 2.100-2.500 gram. Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar 0,2°C, tentukan interval perubahan suhu inkubator.

Sumber: http://www.indotekken.com

Gambar 1.9 Inkubator

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Dihitung dengan Nilai Mutlak)

Pada kasus tersebut di atas, kita sudah mendapatkan data dan suhu inkubator yang harus dipertahankan selama 1-2 hari semenjak kelahiran, yaitu 34°C. Misalkan t adalah segala kemungkinan perubahan suhu inkubator akibat pengaruh suhu ruang, dengan perubahan yang diharapkan sebesar 0,2°C, Nilai mutlak suhu tersebut dapat dimodelkan, yaitu sebagai berikut.

$$|t - 34| \leq 0,2$$

Dengan menggunakan Definisi 1.1, $|t - 34|$ ditulis menjadi

$$|t-34| = \begin{cases} t-34 & \text{jika} \quad t \geq 34 \\ -(t-34) & \text{jika} \quad t < 34 \end{cases}$$

Akibatnya, $|t - 34| \leq 0{,}2$ berubah menjadi

$t - 34 \leq 0{,}2$ dan $-(t - 34) \leq 0{,}2$ atau

$t - 34 \leq 0{,}2$ dan $(t - 34) \geq -0{,}2$

atau dituliskan menjadi

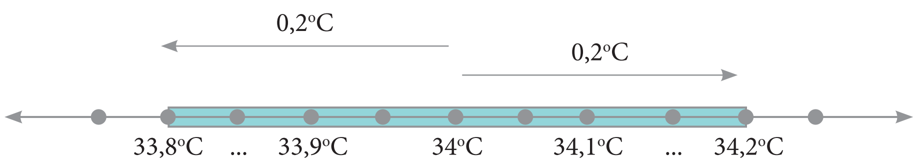
$|t - 34| \leq 0{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}2 \leq t - 34 \leq 0{,}2$

$\Leftrightarrow \quad 3{,}38 \leq t \leq 3{,}42$

Dengan demikian, interval perubahan suhu inkubator adalah $\{t|33{,}8 \leq t \leq 34{,}2\}$. Jadi, perubahan suhu inkubator itu bergerak dari 33,8°C sampai dengan 34,2°C.

Cara II (Mengamati Melalui Garis Bilangan)

Perhatikan garis bilangan di bawah ini.



Gambar 1.10 Interval perubahan suhu

Berdasarkan gambar, interval perubahan suhu inkubator adalah $\{t|33{,}8 \leq t \leq 34{,}2\}$. Jadi, perubahan suhu inkubator itu bergerak dari 33,8°C sampai dengan 34,2°C.

Cara III. Alternatif Penyelesaian (Menggunakan $|t| = \sqrt{t^2}$)

$|t - 34| \leq 0{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(t-34)^2} \leq 0{,}2$ (kuadratkan)

$\Leftrightarrow \quad (t - 34)^2 \leq (0{,}2)^2$

$\Leftrightarrow \quad (t - 34)^2 - (0{,}2)^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \; [(t - 34) - (0{,}2)][(t - 34) + (0{,}2)] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \; [(t - 34{,}2)][t - 33{,}8] \leq 0.$$

Nilai pembuat nol adalah $t = 34{,}2$ atau $t = 33{,}8$

$$\{t | 33{,}8 \leq t \leq 34{,}2\}$$

Masalah 1.4

Tentara melakukan latihan menembak di sebuah daerah yang bebas dari warga sipil. Dia berencana menembak objek yang telah ditentukan dengan jarak tertentu. Jika $x = 0$ adalah posisi diam tentara tersebut, maka pola lintasan peluru yang mengarah ke objek dan diperkirakan memenuhi persamaan $0{,}480x - y + 0{,}33 = 0$.

Sumber: www.tniad.mil.ad

Gambar 1.11 Tentara sedang latihan menembak

Kecepatan angin dan hentakan senjata akan mempengaruhi pergerakan peluru sehingga kemungkinan lintasan peluru dapat berubah menjadi $y - 0{,}475x - 0{,}35 = 0$. Pada jarak berapakah lintasan peluru akan menyimpang sejauh 0,05m akibat pengaruh perubahan arah tersebut?

Alternatif Penyelesaian 1

(Mengggunakan Definisi 1.1)

$$|(0{,}480x + 0{,}33) - (0{,}475x + 0{,}35)| \leq 0{,}05$$

$$|0{,}05x - 0{,}02| \leq 0{,}05$$

$$|0{,}005x - 0{,}02| = \begin{cases} 0{,}005x - 0{,}02 & \text{jika} \quad x \geq 4 \\ \text{-}0{,}005x + 0{,}02 & \text{jika} \quad x < 4 \end{cases}$$

Kasus 1

Untuk $x \geq 4$, maka $0{,}05x - 0{,}02 \leq 0{,}05$ atau $x \leq 14$

Irisan $x \geq 4$ dan $x \leq 14$ adalah $4 \leq x \leq 14$

Kasus 2

Untuk $x < 4$, maka $-0{,}005x + 0{,}02 \leq 0{,}05$ atau $x \geq -6$

Irisan $x < 4$ dan $x \geq -6$ adalah $-6 \leq x < 14$

Gabungan kasus 1 dan kasus 2 adalah $-6 \leq x < 14$

Akan tetapi, karena $x = 0$ adalah posisi awal maka $x \geq 0$ diiris dengan $-6 \leq x < 14$ sehingga $0 \leq x \leq 14$

Jadi, penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi hanya sejauh 14 m.

Alternatif Penyelesaian 2

(Menggunakan $|y| = \sqrt{y^2}$ **)**

Dengan mengingat bahwa y bilangan real, $|y| = \sqrt{y^2}$, maka

$|(0{,}480x + 0{,}33) - (0{,}475x + 0{,}35)| \leq 0{,}05$

$\Rightarrow |0{,}005x - 0{,}02| \leq 0{,}05$

$\Rightarrow \sqrt{(0{,}005x - 0{,}02)^2} \leq 0{,}05$ (Kedua ruas dikuadratkan)

$\Rightarrow (0{,}05x - 0{,}02)^2 \leq (0{,}05)^2$

$\Rightarrow (0{,}005x - 0{,}02)^2 \leq (0{,}05)^2$ atau $(0{,}5x - 2)^2 - 25 \leq 0$

$\Rightarrow 0{,}25x^2 - 2x - 21 \leq 0$

$$\Rightarrow (0{,}5x + 3)(0{,}5x - 7) \leq 0 \qquad (1.7)$$

Bentuk pertidaksamaan (1.7), memiliki makna bahwa dua bilangan, yaitu $(0{,}5x + 3)$ dan $(0{,}5x - 7)$ jika dikalikan hasilnya sama dengan nol atau kurang dari nol (negatif). Artinya terdapat dua kemungkinan yang memenuhi kondisi (1.7), yaitu $(0{,}5x + 3)$ dan $(0{,}5x - 7)$ atau $(0{,}5x + 3) \leq 0$ dan $(0{,}5x - 7) \geq 0$.

- Kemungkinan 1 adalah $(0,5x + 3) \geq 0$ dan $(0,5x - 7) \leq 0$

  diperoleh $x \geq -6$ dan $x \leq 14$, sehingga dapat ditulis $-6 \leq x \leq 14$

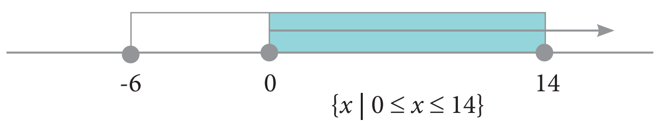
- Kemungkinan 2 adalah $(0,5x + 3) \leq 0$ dan $(0,5x - 7) \geq 0$

  diperoleh $x \leq -6$ dan $x \geq 14$ atau tidak ada nilai x yang memenuhi kedua pertidaksamaan.

Jadi, himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan (1.7) adalah

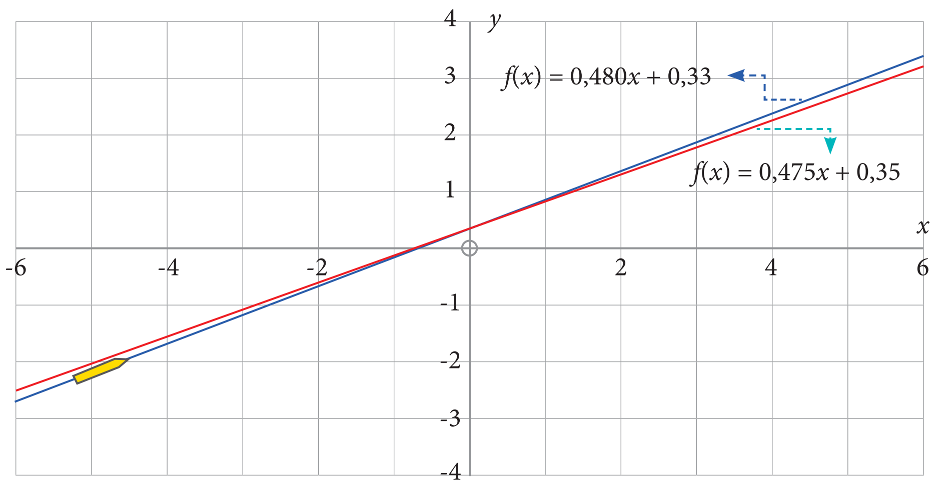
$\{x \in R: -6 \leq x \leq 14\} \cup \varnothing = \{x \in R: -6 \leq x \leq 14\}$

Karena $x = 0$ adalah posisi diam tentara atau posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$. Dengan demikian, interval $-6 \leq x \leq 14$ akan diiriskan kembali dengan $x \geq 0$ seperti berikut.



Jadi, penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi hanya sejauh 14 m.

Perhatikan grafik berikut.



Gambar 1.12 Lintasan peluru

Dari Gambar 1.12, jelas akan terlihat bahwa grafik lintasan peluru yang diprediksi mengalami penyimpangan (garis putus-putus). Penyimpangan sejauh 0,05 m akan terjadi hingga $x = 14$ m.

Masalah 1.5

Secara umum, untuk setiap x, $a \in R$, pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dapat disajikan dalam bentuk berikut ini.

$|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$

$|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$

Ingat pada teori sebelumnya bahwa nilai mutlak tidak pernah bernilai negatif. Jika demikian, menurut pendapatmu apa yang akan terjadi pada bentuk umum di atas jika $a < 0$?

Berikutnya, mari kita temukan penyelesaian dari bentuk umum pertidaksamaan nilai mutlak linear $|x| \leq a$ dan $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$.

Alternatif Penyelesaian

Kasus 1, $|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$

Dengan menggunakan Definisi 1.1, maka

untuk $x \geq 0$, maka $|x| = x$ sehingga $x \leq a$

untuk $x < 0$, maka $|x| = -x$ sehingga $-x \leq a$ atau $x \geq -a$

Dengan demikian, penyelesaian dari $|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$ adalah $x \leq a$ dan $x \geq -a$ (atau sering dituliskan dengan $-a \leq x \leq a$).

Jadi, menyelesaikan $|x| \leq a$ setara dengan menyelesaikan $-a \leq x \leq a$.

Kasus 2, $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$

Dengan menggunakan Definisi 1.1, maka

untuk $x \geq 0$, maka $|x| = x$ sehingga $x \geq a$

untuk $x < 0$, maka $|x| = -x$ sehingga $-x \geq a$ atau $x \leq -a$

Dengan demikian, penyelesaian dari $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$, adalah $x \leq -a$ atau $x \geq a$.

Jadi, menyelesaikan $|x| \geq a$ setara dengan menyelesaikan $x \geq a$ atau $x \leq -a$.

Dari masalah-masalah dan penyelesaian di atas, maka dapat ditarik kesimpulan sifat pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.

Sifat 1.2

Untuk setiap a, x bilangan real.

1. Jika $a \geq 0$ dan $|x| \leq a$, maka $-a \leq x \leq a$.
2. Jika $a < 0$ dan $|x| \leq a$, maka tidak ada bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan.
3. Jika $|x| \geq a$, dan $a > 0$ maka $x \geq a$ atau $x \leq -a$.

Kasus 1 dan kasus 2 dapat juga diselesaikan dengan memanfaatkan hubungan $|x| = \sqrt{x^2}$ (lihat kembali latihan sebelumnya). Tentu saja, kamu diminta mengingat kembali konsep-konsep persamaan kuadrat. Untuk lebih jelasnya, langkah-langkah menyelesaikan kasus pertidaksamaan linear nilai mutlak dengan menggunakan hubungan $|x| = \sqrt{x^2}$ dapat dilihat pada Contoh 1.4 di bawah ini.

Contoh 1.4

Buktikan $|a + b| \leq |a| + |b|$

Bukti

Untuk a, b bilangan real, $|a| \leq |b| \Leftrightarrow -|b| \leq a \leq |b|$

Untuk a, b bilangan real, $|b| \leq |a| \Leftrightarrow -|a| \leq b \leq |a|$

Dari kedua pernyataan di atas, maka diperoleh

$-(|a| + |b|) < a + b \leq (|a| + |b|) \Leftrightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$

Latihan 1.4

Diskusikan dengan teman-temanmu. Jika $a, b \in R$ dengan $a > b > 0$, maka tentukan penyelesaian umum untuk pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dengan bentuk $|ax + b| \leq |bx + a|$

Contoh 1.5

Selesaikanlah pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$.

Alternatif Penyelesaian 1

Gunakan Definisi 1.1

(Buatlah sebagai latihan)

Alternatif Penyelesaian 2

Gunakan $|x| = \sqrt{x^2}$

Bentuk ini bukan linear, tetapi disajikan sebagai alternatif penyelesaian.

Langkah 1

Ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
|2x + 1| \geq |x - 3| &\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} \geq \sqrt{(x-3)^2} \\
&\Leftrightarrow (2x + 1)^2 \geq (x - 3)^2 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 6x + 9 \\
&\Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 8 \geq 0 \qquad \text{(bentuk kuadrat)} \\
&\Leftrightarrow (3x - 2)(x + 4) \geq 0
\end{aligned}
$$

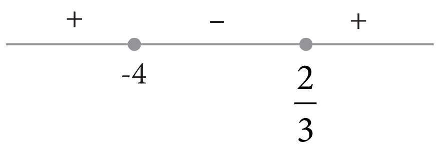
Langkah 2

Menentukan pembuat nol

$$x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -4$$

Langkah 3

Letakkan pembuat nol dan tanda pada garis bilangan



Langkah 4

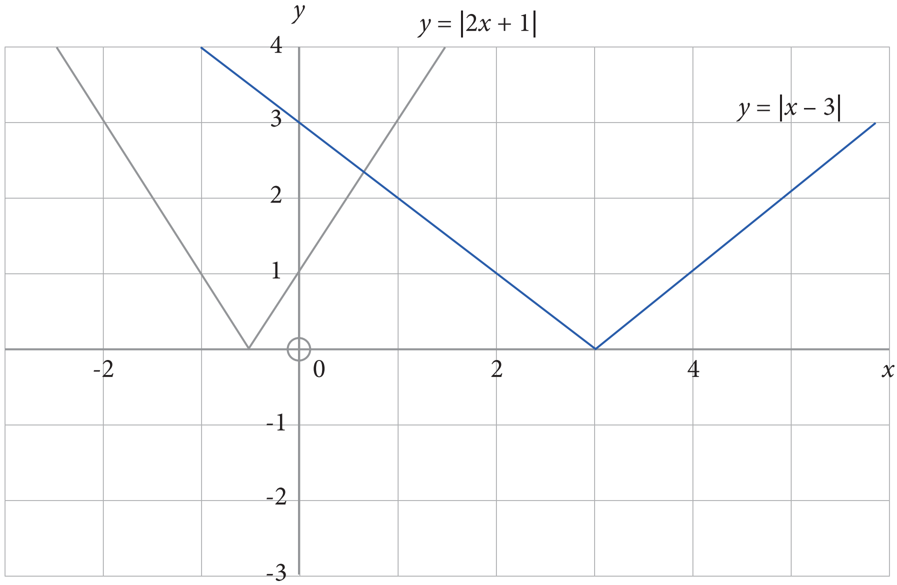
Menentukan interval penyelesaian

Dalam hal ini, interval penyelesaian merupakan selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai non-negatif, sesuai dengan tanda pertidaksamaan pada soal di atas. Dengan demikian, arsiran pada interval di bawah ini adalah penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

Langkah 5: Menuliskan kembali interval penyelesaian

$$\text{Himpunan penyelesaian (Hp)} = \left\{ x \,\middle|\, x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

Perhatikan grafik berikut. Kita akan menggambarkan grafik $y = |2x + 1|$ dan grafik $y = |x - 3|$, untuk setiap $x \in R$.



Gambar 1.13 Grafik $y = |2x + 1|$ dan $y = |x - 3|$

Pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$ dapat dibaca menjadi nilai $y = |2x + 1|$ lebih besar $y = |x - 3|$ dan berdasarkan grafik dapat dilihat pada interval $\left\{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3}, x \in R\right\}$.

Uji Kompetensi 1.2

Selesaikanlah soal-soal berikut dengan tepat.

1. Manakah dari pernyataan di bawah yang benar? Berikan alasanmu.

a) Untuk setiap x bilangan real, berlaku bahwa $|x| \geq 0$.

b) Tidak terdapat bilangan real x, sehingga $|x| < -8$.

c) $|n| \geq |m|$, untuk setiap n bilangan asli dan m bilangan bulat.

2. Selesaikan pertidaksamaan nilai mutlak berikut.

a) $|3 - 2x| < 4$

b) $\left|\frac{x}{2} + 5\right| \geq 9$

c) $|3x + 2| \leq 5$

d) $2 < \left|2 - \frac{x}{2}\right| \leq 3$

e) $|x + 5| \leq |1 - 9x|$

3. Maria memiliki nilai ujian matematika: 79, 67, 83, dan 90. Jika dia harus ujian sekali lagi dan berharap mempunyai nilai rata-rata 81, berapa nilai yang harus dia raih sehingga nilai rata-rata yang diperoleh paling rendah menyimpang 2 poin?

4. Sketsa grafik $y = |3x - 2| - 1$, untuk $-2 \leq x \leq 5$, dan x bilangan real.

5. Sketsa grafik $y = |x - 2| - |2x - 1|$, untuk x bilangan real.

6. Hitung semua nilai x yang memenuhi kondisi berikut ini.

a) Semua bilangan real yang jaraknya ke nol adalah 10.

b) Semua bilangan real yang jaraknya dari 4 adalah kurang dari 6.

7. Level hemoglobin normal pada darah laki-laki dewasa adalah antara 13 dan 16 gram per desiliter (g/dL).

   a) Nyatakan dalam suatu pertidaksamaan yang merepresentasikan level hemoglobin normal untuk laki-laki dewasa.

   b) Tentukan level hemoglobin yang merepresentasikan level hemoglobin tidak normal untuk laki-laki dewasa.

8. Berdasarkan definisi atau sifat, buktikan $|a - b| \leq |a + b|$

9. Gambarkan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear berikut ini dengan memanfaatkan garis bilangan.

   a) $4 < |x + 2| + |x - 1| < 5$

   b) $|x - 2| \leq |x + 1|$

   c) $|x| + |x + 1| < 2$

10. Diketahui fungsi $f(x) = 5 - 2x$, $2 \leq x \leq 6$. Tentukan nilai M sehingga $|f(x)| \leq M$. Hitunglah P untuk $|f(x)| \geq P$.

Rangkuman

Setelah membahas materi persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang melibatkan konsep nilai mutlak, maka dapat diambil berbagai kesimpulan sebagai acuan untuk mendalami materi yang sama pada jenjang yang lebih tinggi dan mempelajari bahasan berikutnya. Beberapa rangkuman disajikan sebagai berikut.

1. Nilai mutlak dari sebuah bilangan real adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangan selalu positif atau nol. Misalnya $a \in R$, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian, grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu x.
2. Persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk a, b, $c \in R$, maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $|ax + b| = c$. Hal ini berlaku juga untuk pertidaksamaan linear.
3. Penyelesaian persamaan nilai mutlak $|ax + b| = c$ ada, jika $c \geq 0$.
4. Penyelesaian pertidaksamaan $|ax + b| \leq c$ ada, jika $c \geq 0$.

Konsep persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel telah ditemukan dan diterapkan dalam penyelesaian masalah kehidupan dan masalah matematika. Penguasaanmu terhadap berbagai konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear adalah syarat perlu untuk mempelajari bahasan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel serta sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel. Kita akan menemukan konsep dan berbagai sifat sistem persamaan linear dua dan tiga variabel melalui penyelesaian masalah nyata yang sangat bermanfaat bagi dunia kerja dan kehidupan kita. Persamaan dan pertidaksamaan linear memiliki himpunan penyelesaian, demikian juga sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Pada bahasan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel, akan dipelajari dengan berbagai metode penyelesainnya untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan tersebut. Seluruh konsep dan aturan-aturan yang ditemukan akan diaplikasikan dalam penyelesaian masalah yang menuntut kamu berpikir kreatif, tangguh menghadapi masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, baik terhadap teman maupun terhadap guru.

BAB 2

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

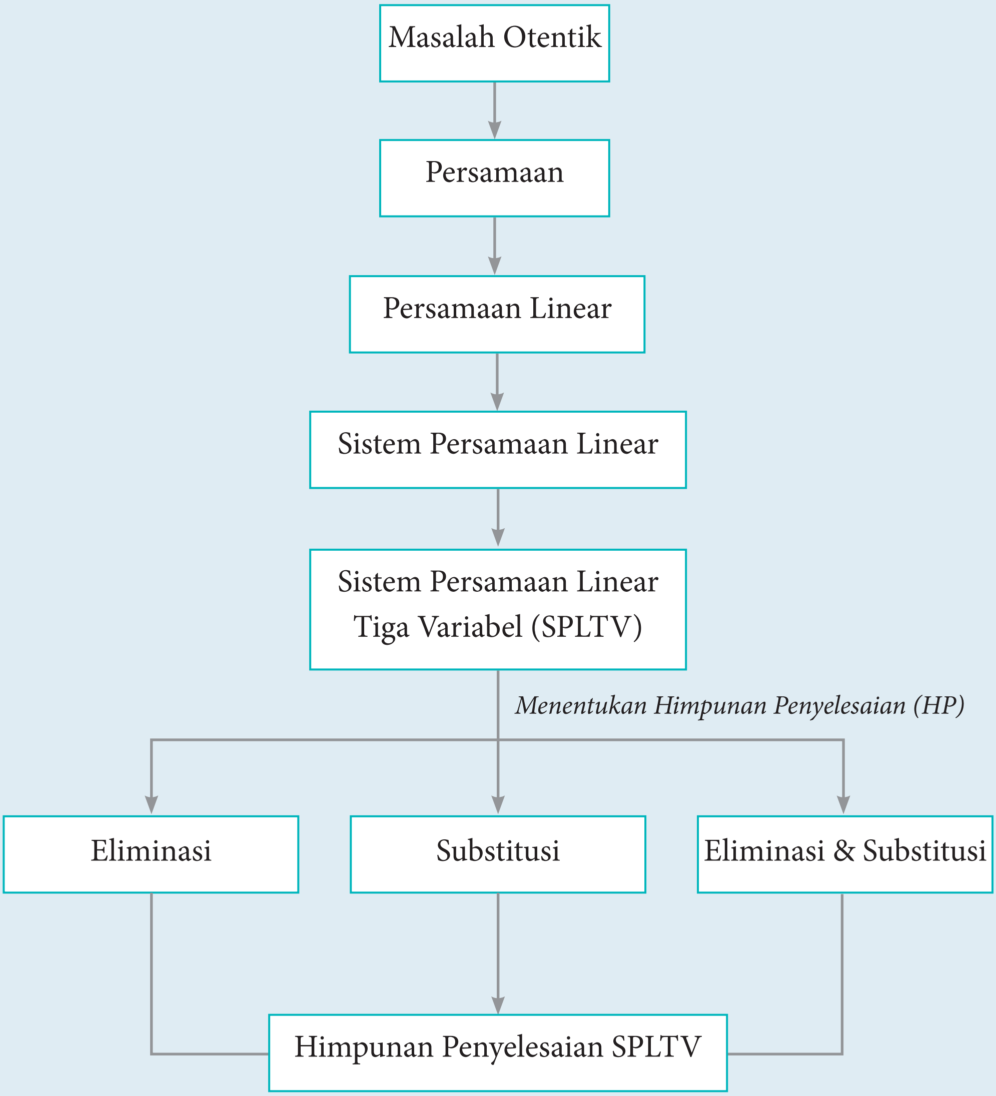
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran sistem persamaan linear tiga variabel, siswa mampu: 1. menunjukkan sikap jujur, tertib dan mengikuti aturan, konsisten, disiplin waktu, ulet, cermat dan teliti, maju berkelanjutan, bertanggungjawab berpikir logis, kritis, kreatif, dan analitis serta memiliki rasa senang, motivasi internal, ingin tahu dan ketertarikan pada ilmu pengetahuan dan teknologi serta sikap terbuka, percaya diri, kemampuan bekerjasama, toleransi, santun, objektif, dan menghargai, 2. menyusun sistem persamaan linear tiga variabel dari masalah kontekstual, 3. menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel.	Melalui pembelajaran materi sistem persamaan linear tiga variabel, siswa memperoleh pengalaman belajar sebagai berikut. ❖ Menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model Matematika sebagai sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV). ❖ Merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLTV. ❖ Menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. ❖ Menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan. ❖ Menemukan ciri-ciri SPLTV dari model matematika. ❖ Menuliskan konsep SPLTV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.

Istilah-Istilah

- SPLTV
- Homogen
- Eliminasi
- Trivial
- Substitusi

B. Diagram Alir



C. Materi Pembelajaran

2.1 Menyusun dan Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari saat duduk di SMP. Saat ini kita akan perdalam kajian, pemahaman, dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah pelajari sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini adalah upayamu untuk menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, serta berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaan kepada guru dan teman kelompok.

Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu dengan fakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear. Permasalahan-permasalahan tersebut akan menjadi bahan inspirasi menyusun model-model matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Model matematika tersebut, akan dijadikan bahan abstraksi untuk membangun konsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear tiga variabel.

Masalah 2.1

Cermatilah masalah berikut!

Petani di Daerah Tapanuli (Sumatera Utara)

Mata pencaharian rakyat di Daerah Tapanuli pada umumnya bekerja sebagai petani padi dan palawija, karyawan perkebunan sawit, karet, dan cokelat. Walaupun ada juga yang bekerja sebagai pedagang (khususnya yang tinggal di daerah wisata Danau Toba).

Namun sekarang, ada permasalahan yang dihadapi para petani padi di Kecamatan Porsea Kabupaten Toba Samosir. Hal ini terkait pemakaian pupuk yang harganya cukup mahal. Contoh permasalahannya adalah sebagai berikut.

Sumber: https://upload.wikimedia.org

Gambar 2.1 Persawahan padi

Pak Panjaitan memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Ada tiga (3) jenis pupuk yang harus disediakan, yaitu Urea, SS, TSP. Ketiga jenis pupuk inilah yang harus digunakan para petani agar hasil panen padi maksimal. Harga tiap-tiap karung pupuk berturut-turut adalah Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00. Pak Panjaitan membutuhkan sebanyak 40 karung untuk sawah yang ditanami padi.

Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Panjaitan untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,00. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan?

Menurut kamu, kira-kira apa tujuan masalah ini dipecahkan? Strategi apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut? Jika kamu mengalami kesulitan silakan berdiskusi dengan teman atau bertanya kepada guru. Sebagai arahan/petunjuk pengerjaan masalah, ikuti pertanyaan-pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kamu menggunakan variabel untuk menyatakan banyak pupuk yang digunakan untuk setiap jenisnya dan hubungan pemakaian antarjenis pupuk?

2) Bagaimana kamu menggunakan variabel untuk menyatakan hubungan harga setiap jenis pupuk dengan dana yang tersedia?

3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah kaitannya dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?

4) Adakah kesulitan yang harus kamu diskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antarvariabel, melakukan manipulasi aljabar, dan kepastian strategi yang kamu pilih?

5) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?

6) Berapa karung pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan untuk setiap jenisnya?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:
- Tiga jenis pupuk yaitu Urea, SS, TSP. Harga per karung setiap jenis pupuk Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00.
- Banyak pupuk yang dibutuhkan 40 karung.
- Pemakaian pupuk Urea 2 kali lebih banyak dari pupuk SS.
- Dana yang tersedia Rp4.020.000,00.

Ditanyakan:

Banyaknya pupuk (karung) yang diperlukan untuk tiap-tiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan.

Misalkan: x adalah banyak jenis pupuk Urea yang dibutuhkan (karung)

y adalah banyak jenis pupuk SS yang dibutuhkan (karung)

z adalah banyak jenis pupuk TSP yang dibutuhkan (karung)

Berdasarkan informasi di atas diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

$$x + y + z = 40 \qquad (2.1)$$

$$x = 2y \qquad (2.2)$$

$$75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \qquad (2.3)$$

Langkah 1

Substitusikan Persamaan (2.2) ke dalam Persamaan (2.1), ribuan (000) dieliminasi lebih dahulu sehingga diperoleh

$$x = 2y \text{ dan } x + y + z = 40 \Rightarrow 2y + y + z = 40$$
$$\Rightarrow 3y + z = 40$$

$$\therefore 3y + z = 40 \qquad (2.4)$$

Langkah 2

Substitusikan Persamaan (2.2) ke dalam Persamaan (2.3), sehingga diperoleh

$$x = 2y \text{ dan } 75x + 120y + 150z = 4.020 \Rightarrow 2.75y + 120y + 150z = 4.020$$
$$\Rightarrow 270y + 150z = 4.020$$

$$\therefore 27y + 15z = 402 \qquad (2.5)$$

Gunakan metode eliminasi terhadap Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.5).

$$\begin{array}{l|l|l} 3y + z = 40 & \times 15 & \\ 27y + 15z = 402 & \times 1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} 45y + 15z &= 600 \\ 27y + 15z &= 402 \\ \hline 18y &= 198 \end{array} -$$

Jadi, $18y = 198$ atau $y = 11$ dan diperoleh $x = 2y = 2.11 = 22$

maka $x + y + z = 40$

$22 + 11 + z = 40$

$z = 40 - 33$

Dengan mensubstitusi $x = 22$ dan $y = 11$ ke Persamaan (2.1) jadi, diperoleh $z = 7$.

Jadi, nilai $x = 22$, $y = 11$, dan $z = 7$ atau banyak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan dengan uang yang tersedia adalah 22 karung Urea, 11 karung SS, dan 7 karung pupuk TSP.

Masalah 2.2

Nenek moyang kita memiliki keahlian seni ukir (seni pahat). Mereka dapat membuat berbagai jenis patung dan ornamen-ornamen yang memiliki nilai estetika yang cukup tinggi. Pak Wayan memiliki keterampilan memahat patung yang diwarisi dari kakeknya. Ia selalu bekerja dengan dibantu dua anaknya, yaitu I Gede dan Putu yang sedang duduk di bangku sekolah SMK Jurusan Teknik Bangunan. Berbagai hasil ukirannya dapat dilihat dan dibeli di daerah wisata, terutama di daerah wisata Bali.

Sumber: http://e-kuta.com

Gambar 2.2 Ukiran, patung, dan ornamen

Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan untuk membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 hari. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan ketiga jenis ukiran di atas dalam waktu 7 hari. Jika Pak Wayan bekerja bersama I Gede, mereka dapat menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 hari. Karena Putu dan I Gede bekerja setelah pulang sekolah, mereka berdua membutuhkan waktu 8 hari untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan/terpenuhi, jika Pak Wayan dibantu kedua anaknya dengan batas waktu yang diberikan?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah, koordinasi pengetahuan dan keterampilan yang sudah kamu miliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui. Dalam menyelesaikan masalah di atas, langkah-langkah penyelesaiannya dapat dilihat dalam beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kamu menentukan kecepatan Pak Wayan, Putu, dan I Gede bekerja menyelesaikan satu jenis pesanan ukiran tersebut?

2) Dapatkah kamu menentukan hubungan tiap-tiap kecepatan untuk menyelesaikan pekerjaan dalam bentuk persamaan?

3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah kaitannya dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?

4) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?

5) Bagaimana hubungan antara konsep jarak dan kecepatan dalam menentukan lama waktu yang digunakan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan?

6) Adakah jawaban permasalahan yang kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: Pesanan pembuatan ukiran patung dan ornamen rumah dengan batas waktu 5 hari.

Waktu yang dibutuhkan membuat patung dan ornamen adalah

Pak Wayan dan Putu selama 7 hari

Pak Wayan dan I Gede selama 6 hari

Putu dan I Gede selama 8 hari

Misalkan: Waktu yang dibutuhkan (satuan hari) Pak Wayan adalah x

Waktu yang dibutuhkan (satuan hari) Putu adalah y

Waktu yang dibutuhkan (satuan hari) I Gede adalah z

Berarti waktu yang diperlukan Pak Wayan, Putu, dan I Gede untuk menyelesaikan satu set pesanan, masing-masing adalah $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$.

- Pak Wayan dan Putu membutuhkan waktu 7 hari untuk menyelesaikan 1 unit pesanan ukiran. Hal ini dapat dimaknai dengan

$$7\frac{1}{x} + 7\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7} \qquad (2.1)$$

- Pak Wayan dan I Gede membutuhkan waktu 6 hari untuk menyelesaikan 1 unit pesanan ukiran. Hal ini dapat dimaknai dengan

$$6\frac{1}{x} + 6\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \qquad (2.2)$$

- Putu dan I Gede membutuhkan waktu 8 hari untuk menyelesaikan 1 unit pesanan ukiran. Hal ini dapat dimaknai dengan

$$8\frac{1}{y} + 8\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8} \qquad (2.3)$$

- Kemudian carilah tiga persamaan linear yang saling terkait dari Persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) di atas dengan memisalkan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.
- Carilah nilai p, q, dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya. Sebagai alternatif pilihan gunakan metode campuran eliminasi dan substitusi.

Dengan menerapkan metode eliminasi pada Persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh

$$\begin{array}{l|c|l} 7p + 7q = 1 & \times 6 & \longrightarrow \quad 42p + 42q = 6 \\ 6p + 6r = 1 & \times 7 & \qquad\quad\;\; \underline{42p + 42r = 7} \; - \\ & & \qquad\quad\;\; 42q - 42r = -1 \end{array}$$

$$\therefore 42q - 42r = -1 \qquad (2.4)$$

Dengan menerapkan metode eliminasi pada Persamaan (2.3) dan (2.4) diperoleh

$$\begin{array}{l|c|l} 8q + 8r = 1 & \times 42 & \longrightarrow \quad 336q + 336r = 42 \\ 42q - 42r = -1 & \times 8 & \qquad\quad\;\; \underline{336q - 336r = -8} \; - \\ & & \qquad\qquad\qquad\; 672r = 50 \end{array}$$

$672r = 50$, sehingga diperoleh $r = \frac{50}{672}$

$r = \frac{50}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $8q + 8r = 1$, sehingga

$$8q + \left(8 \times \frac{50}{672}\right) = 1$$

$$8q + \frac{400}{672} = 1$$

$$8q = 1 - \frac{400}{672}$$

$$8q = \frac{672}{672} - \frac{400}{672}$$

$$8q = \frac{272}{672} \Rightarrow q$$

$$\frac{272}{672} : 8 \Rightarrow \frac{272}{672} \times \frac{1}{8}$$

diperoleh $q = \frac{34}{672}$

$q = \frac{34}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $7p + 7q = 1$ diperoleh

$$7p\left(7 \times \frac{34}{672}\right) = 7p + \frac{238}{672} = 1$$

$$p = \left(1 - \frac{238}{672}\right) : 7$$

$$= \frac{434}{672} \times \frac{1}{7} = \frac{62}{672}$$

$$p = \frac{62}{672}.$$

Sebelumnya telah dimisalkan bahwa

$p = \frac{1}{x}$ dan $p = \frac{62}{672} \Rightarrow x = \frac{672}{62} = 10{,}84.$

$$q = \frac{1}{y} \text{ dan } q = \frac{34}{672} \Rightarrow y = \frac{672}{34} = 19{,}76.$$

$$r = \frac{1}{z} \text{ dan } r = \frac{50}{672} \Rightarrow z = \frac{672}{50} = 13{,}44.$$

Karena x, y, dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu, dan Gede untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 hari, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 hari, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 hari. Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$t = \frac{1}{\left(\frac{62}{672} + \frac{34}{672} + \frac{50}{672}\right)}$$

$$= \frac{672}{146}$$

$$t = 4{,}6$$

Waktu yang diberikan turis adalah 5 hari. Berdasarkan perhitungan waktu untuk menyelesaikan keempat ukiran tersebut adalah 4,6 hari, maka pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

- Ingat kembali pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah kamu pelajari sebelumnya dan cermati pula persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) pada langkah penyelesaian Masalah 2.1 dan Masalah 2.2. Temukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah penyelesaian Masalah 2.1 dan Masalah 2.2.

- Dari penyelesaian Masalah 2.1diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \\ 6p + 6r = 1 \\ 8q + 8r = 1 \end{cases} \qquad (2.5)$$

- Dari penyelesaian Masalah 2.2 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 2y \\ 75.000x + 120.000y = 150.000z = 4.020.000 \end{cases} \quad (2.6)$$

Dengan demikian, dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi

Perhatikan persamaan linear

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (2.1)$$

$$a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \quad (2.2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (2.3)$$

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.4)$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, x, y, dan $z \in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak sekaligus ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak sekaligus ketiganya 0, dan a_3, b_3, dan c_3 tidak sekaligus ketiganya 0.

x, y, dan z adalah variabel

a_1, a_2, a_3 adalah koefisien variabel x.

b_1, b_2, b_3 adalah koefisien variabel y.

c_1, c_2, c_3 adalah koefisien variabel z.

d_1, d_2, d_1, d_1 adalah konstanta persamaan.

Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 2.1

Diketahui tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, $2p + 3q - r = 6$, dan $p + 3q = 3$.

Alasan pertama, ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel, sebab persamaan bukan persamaan linear. Jika persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, maka diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

Contoh 2.2

Diketahui dua persamaan $x = -2$; $y = 5$; dan $2x - 3y - z = 8$. Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel, karena ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 2x - 3y - z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) berikut.

1. Diberikan SPLTV $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian. Misalnya, (3, -2, 0), (-3, 2, 0), dan termasuk (0, 0, 0). Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila

penyelesaian suatu SPLTV tidak semuanya nol, maka SPLTV itu memiliki penyelesaian yang tidak trivial.

2. Diektahui SPLTV $3x + 5y + z = 0$, $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu SPLTV memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka SPLTV tersebut memiliki penyelesaian trivial $(x = y = z = 0)$.

Dua sistem persamaan linear tiga variabel tersebut di atas merupakan sistem persamaan linear tiga variabel. Sebuah SPLTV dengan semua konstanta sama dengan nol disebut SPLTV homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka SPLTVtersebut tidak homogen. SPLTV yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu (1) hanya memiliki penyelesaian yang trivial atau (2) memiliki penyelesaian nontrivial selain penyelesaian trivial. Coba tuliskan definisi SPLTV yang homogen dan coba berikan contoh SPLTV yang homogen, selain contoh tersebut di atas.

Uji Kompetensi 2.1

A. Jawab soal-soal berikut dengan tepat.

1. Apakah persamaan-persamaan berikut ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu.

   a. $2x + 5y - 2z = 7$ dan $2x - 4y + 3z = 3$

   b. $x - 2y + 3z = 0$ dan $y = 1$ dan $x + 5z = 8$

2. Diketahui tiga buah persamaan

   $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 9$; $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$; dan $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$

   a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasanmu.

   b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?

3. Keliling suatu segitiga adalah 19 cm. Jika panjang sisi terpanjang adalah dua kali panjang sisi terpendek dan kurang 3 cm dari jumlah sisi lainnya. Tentukan panjang setiap sisi-sisi segitiga tersebut.

4. Harga tiket suatu pertunjukkan adalah Rp60.000,00 untuk dewasa, Rp35.000,00 untuk pelajar, dan Rp25.000,00 untuk anak di bawah 12 tahun. Pada pertunjukkan seni dan budaya telah terjual 278 tiket dengan total penerimaan Rp130.000.000,00. Jika banyak tiket untuk dewasa yang telah terjual 10 tiket lebih sedikit dari dua kali banyak tiket pelajar yang terjual. Hitung banyak tiket yang terjual untuk masing-masing tiket.

5. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat perlima dari panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan mas adalah 5 inci, berapa panjang keseluruhan ikan tersebut? (1 inci = 2,54 cm).

6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$.

7. Diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (t^2 - 4)z = t - 2 \end{array}\right\}$$

Berapakah nilai t agar sistem tersebut

(a) tidak memiliki penyelesaian,

(b) satu penyelesaian,

(c) tak berhingga banyak penyelesaian?

8. Untuk suatu alasan, tiga pelajar Anna, Bob, dan Chris mengukur berat badan secara berpasangan. Berat badan Anna dan Bob 226 kg, Bob dan Chris 210 kg, serta Anna dan Chris 200kg. Hitung berat badan setiap pelajar tersebut.

9. Diketahui sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$

Carilah nilai dari $a^2 + b^2 - c^2$.

10. Didefinisikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ (dikenal sebagai parabola) melalui titik (-1, -2), (1, 0), dan (2, 7).

a) Tentukan nilai a, b, dan c.

b) Pilih tiga titik (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3) sedemikian sehingga memenuhi persamaan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mungkinkah ada persamaan parabola yang lain dan melalui (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3)? Berikan alasan untuk jawaban yang kamu berikan.

B. Soal Tantangan

Seorang penjual beras mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri atas 1 kg jenis *A*, 2 kg jenis *B*, dan 3 kg jenis C dijual dengan harga Rp 19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis *A* dan 3 kg jenis *B* dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri atas 1 kg jenis *B* dan 1 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp 6,250,00. Harga beras jenis manakah yang paling mahal?

Sumber: http://www.cirebontrust.com

Proyek

Cari sebuah SPLTV yang menyatakan model matematika dari masalah nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan proses penemuan model matematika tersebut dan selesaikan sebagai pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan hasilnya dipresentasikan di depan kelas.

2.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Perbedaan antara sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dengan sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) terletak pada banyak persamaan dan variabel yang digunakan. Oleh karena itu, penentuan himpunan penyelesaian SPLTV dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian SPLDV, kecuali dengan metode grafik.

Umumnya penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel diselesaikan dengan metode eliminasi dan substitusi. Berikut akan disajikan contoh menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi.

Contoh 2.3

Jumlah tiga bilangan sama dengan 45. Bilangan pertama ditambah 4 sama dengan bilangan kedua, dan bilangan ketiga dikurangi 17 sama dengan bilangan pertama. Tentukan masing-masing bilangan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan

x = bilangan pertama

y = bilangan kedua

z = bilangan ketiga

Berdasarkan informasi pada soal diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$x + y + z = 45 \qquad (2.1)$$

$$x + 4 = y \qquad (2.2)$$

$$z - 17 = x \qquad (2.3)$$

Ditanyakan:

Bilangan x, y, dan z.

Kamu dapat melakukan proses eliminasi pada persamaan (2.1) dan (2.2), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lcl} x + y + z & = & 45 \\ x - y & = & -4 \\ \hline 2x + z & = & 41 \end{array} +$$

Diperoleh persamaan baru, $2x + z = 41$ (2.4)

Lakukan proses eliminasi pada persamaan (2.3) dan (2.4), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lcl} x - z & = & -17 \\ 2x + z & = & 41 \\ \hline 3x & = & 24 \end{array} +$$

Diperoleh $3x = 24$ atau $x = \frac{24}{3}$ atau $x = 8$.

Lakukan proses substitusi nilai $x = 8$ ke persamaan (2.2) diperoleh

$(8) + 4 = y \Rightarrow y = 12$

Substitusikan $x = 8$ ke persamaan (2.3) diperoleh

$z - 17 = (8) \Rightarrow z = 25$

Dengan demikian, bilangan $x = 8$, bilangan $y = 6$, dan bilangan $z = 19$.

Selain metode eliminasi, substitusi, dan campuran antara eliminasi dan substitusi (kamu dapat mencoba sendiri), terdapat cara lain untuk menyelesaikan suatu SPLTV, yaitu dengan cara determinan dan menggunakan invers matriks. Namun, pada bab ini metode ini tidak dikaji.

Sekarang kita akan menemukan penyelesaian SPLTV dengan metode lain. Kita menententukan himpunan penyelesaian SPLTV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum SPLTV yang telah ditemukan dengan mengikuti langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan cara baru.

Perhatikan bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x ,y, dan z adalah sebagai berikut.

Perhatikan persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (2.1) \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 & (2.2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & (2.3) \end{cases}$$

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.4)$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, x, y, dan $z \in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0 dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah 1

Eliminasi variabel x dari Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) menjadi

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times\ a_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \times\ a_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array} -$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \quad (2.5)$$

Langkah 2

Eliminasi variabel x dari Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \times a_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array} -$$

$$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \quad (2.6)$$

Langkah 3

Eliminasi variabel y dari Persamaan (2.5) dan Persamaan (2.6)

$$\begin{array}{l|l|} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)\mathrm{z} = a_2d_1 - a_1d_2 & \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)\mathrm{z} = a_3d_1 - a_1d_3 & \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada (2.5) terhadap (2.6) dan hasil perkalian koefisien variabel z pada (2.6) terhadap (2.5), maka diperoleh

$$z = \frac{((a_2d_1 - a_1d_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3d_1 - a_1d_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}{((a_2c_1 - a_1c_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3c_1 - a_1c_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}$$

$$z = \frac{((a_1a_1b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2) - (a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3))}{((a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_1b_1c_2) - (a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3))}$$

$$z = \frac{((a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2) - (a_1b_2d_1 - a_2b_1d_3))}{((a_1b_3\mathrm{c}_1 - a_2b_3\mathrm{c}_1 - a_2b_1\mathrm{c}_2) - (a_1b_2\mathrm{c}_3 - a_3b_2\mathrm{c}_1 - a_2b_1\mathrm{c}_3))}$$

$$z = \frac{((a_1b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3) - (a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1))}{((a_3b_2\mathrm{c}_1 + a_1b_3\mathrm{c}_2 + a_2b_1\mathrm{c}_3) - (a_1b_2\mathrm{c}_3 + a_3b_2\mathrm{c}_2 + a_2b_3\mathrm{c}_1}$$

- Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui).

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x, y, dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Petunjuk

- ➢ Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- ➢ Lakukan pada pembilang dan penyebut.

Dengan menggunakan cara menentukan nilai z, ditentukan nilai x dan y dengan cara berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|} \qquad y = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk x, y, dan z di atas. Coba temukan pola penentuan nilai x, y, dan z, sehingga akan memudahkan menentukan penyelesaian SPLTV.

Pada langkah penyelesaian **Masalah 2.1** halaman 35 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$x + y + z = 40$

$x = 2y$

$75 + 120y + 150z = 4.020$

Dengan menerapkan cara yang ditemukan pada SPLTV di atas, tentunya kamu dengan mudah memahami bahwa

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 75$

$b_1 = 1 \qquad b_2 = -2 \qquad b_3 = 120$

$c_1 = 1 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 150$

$d_1 = 40 \qquad d_2 = 0 \qquad d_3 = 4.020$

Oleh karena itu, nilai x, y, dan z ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccccc} 40 & 1 & 1 & 40 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 4020 & 120 & 150 & 4020 & 120 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|} = \frac{(-8040 + 0 + 0) - (-12000 + 0 + 0)}{(-150 + 0 + 150) - (-300 + 0 + 120)}$$

$$= \frac{-8040 + 12.000}{300 - 120} = \frac{3.960}{180} = 22$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 40 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 75 & 4020 & 150 & 75 & 4020 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|} = \frac{(0 + 0 + 6.000) - (0 + 0 + 4.020)}{180}$$

$$= \frac{6.000 - 4.020}{180} = \frac{1.980}{180} = 11$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 40 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 4020 & 75 & 120 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|} = \frac{(-6000 + 0 + 4020) - (-8040 + 4800)}{180}$$

$$= \frac{-1,980 + 3.240}{180} = \frac{1.260}{180} = 7$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian SPLTV tersebut adalah (22, 11, 7). Ternyata, hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode campuran eliminasi dan substitusi sebelumnya.

Selanjutnya, dari semua penjelasan di atas dapat dituliskan definisi himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut ini.

Definisi 2.2

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah suatu himpunan semua *triple* terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 2.2

A. Jawab soal-soal berikut dengan tepat.

1. Tiga tukang cat, Joni, Deni dan Ari yang biasa bekerja secara bersama-sama. Mereka dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam waktu 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang cat ini bekerja mengecat rumah serupa selama 4 jam kerja. Setelah itu, Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang cat, jika masing-masing bekerja sendirian.

2. Sebuah bilangan terdiri atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih daripada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, maka diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut.

3. Sebuah pabrik lensa memiliki 3 buah mesin, yaitu A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja maka 5.700 lensa dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B yang bekerja, maka 3.400 lensa dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, maka 4.200 lensa dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan tiap-tiap mesin dalam satu minggu?

4. Selesaikan sistem persamaan yang diketahui dan tentukan nilai yang dicari.

   a. x, y, dan z adalah penyelesaian dari sistem persamaan

   $$\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 12 \\ 2x + 5y - z &= 17 \\ 6x + 2y - 3z &= 17 \end{aligned}$$

   Tentukan nilai $x^2 + y^2 + z^2$

b. x, y, dan z adalah penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{aligned} x &+ 2y = -4 \\ 2x &+ z = 5 \\ y &- 3z = -6 \end{aligned}$$

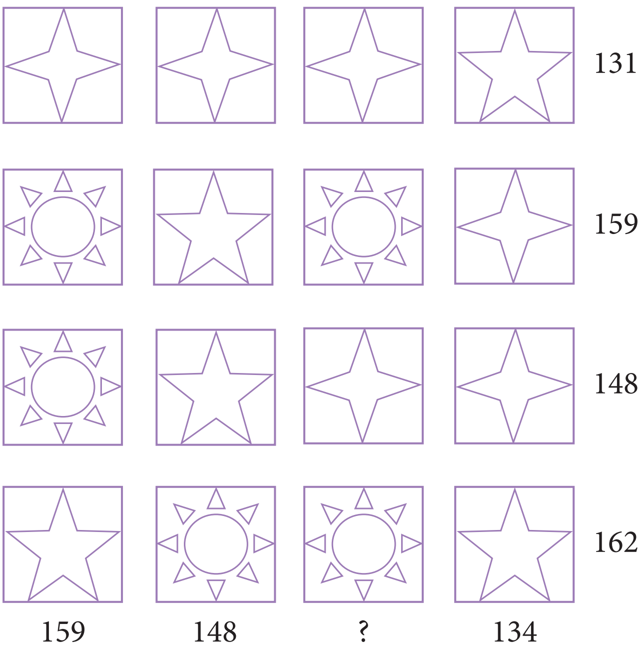
Tentukan nilai x, y, z

5. Diketahui sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}$$

Tentukan syarat yang harus dipenuhi sistem supaya memiliki penyelesaian tunggal, memiliki banyak penyelesaian, dan tidak memiliki penyelesaian.

6.



Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti tanda tanya.

7. Trisna bersama ayahnya dan kakeknya sedang memanen tomat di ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna bersama kakeknya bekerja bersama-sama, hanya dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika ayahnya dan kakeknya menyelesaikan pekerjaan tersebut, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, ayahnya, dan kakeknya untuk menyelesaikan panenan tersebut, jika mereka bekerja masing-masing?

Sumber: http://img2.bisnis.com

8. Diketahui dua bilangan, dimana bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Carilah kedua bilangan tersebut.

9. Seorang pengusaha memiliki modal sebesar Rp420.000.000,00 dan membaginya dalam tiga bentuk investasi, yaitu tabungan dengan suku bungan 5%, deposito berjangka dengan suku bunga 7%, dan surat obligasi dengan pembayaran 9%. Adapun total pendapatan tahunan dari ketiga investasi sebesar Rp26.000.000,00 dan pendapatan dari investasi tabungan kurang Rp2.000.000,00 dari total pendapatan dua investasi lainnya. Tentukan besar modal untuk setiap investasi tersebut.

10. Suatu tempat parkir dipenuhi tiga jenis kendaraan yaitu, sepeda motor, mobil, dan mobil van.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Luas parkir mobil van adalah lima kali luas parkir sepeda motor, sedangkan tiga kali luas parkir untuk mobil sama dengan luas parkir untuk mobil van dan sepeda motor. Jika tempat parkir penuh dan banyak kendaraan yang terparkir sebanyak 180, hitung banyak setiap kendaraan yang parkir.

Rangkuman

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait Konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear tiga variabel, yaitu sebagai berikut.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari sering menjadi sebuah model sistem persamaan linear. Konsep sistem persamaan linear tersebut didasari oleh konsep persamaan dalam sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear.

2. Dua persamaan linear atau lebih dikatakan membentuk sistem persamaan linear jika dan hanya jika variabel-variabelnya saling terkait dan variabel yang sama memiliki nilai yang sama sebagai penyelesaian setiap persamaan linear pada sistem tersebut.

3. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah suatu himpunan semua pasangan terurut (x, y, z) yang memenuhi sistem tersebut.

4. Apabila penyelesaian sebuah sistem persamaan linear semuanya nilai variabelnya adalah nol, maka penyelesaian tersebut dikatakan penyelesaian trivial. Misalnya diketahui sistem persamaan linear $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$; dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear tersebut memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian yang tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$.

5. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstan setiap persamaannya adalah nol.
   a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
   b. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga penyelesaian yang tak trivial sebagai tambahan penyelesaian trivial.

6. Sistem Persamaan linear (SPL) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai satu penyelesaian dan mempunyai tak terhingga penyelesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan linear tiga variabel adalah prasyarat mutlak untuk mempelajari bahasan matriks dan program linear. Selanjutnya, kita akan mempelajari konsep fungsi dan trigonometri.

BAB 3

Fungsi

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

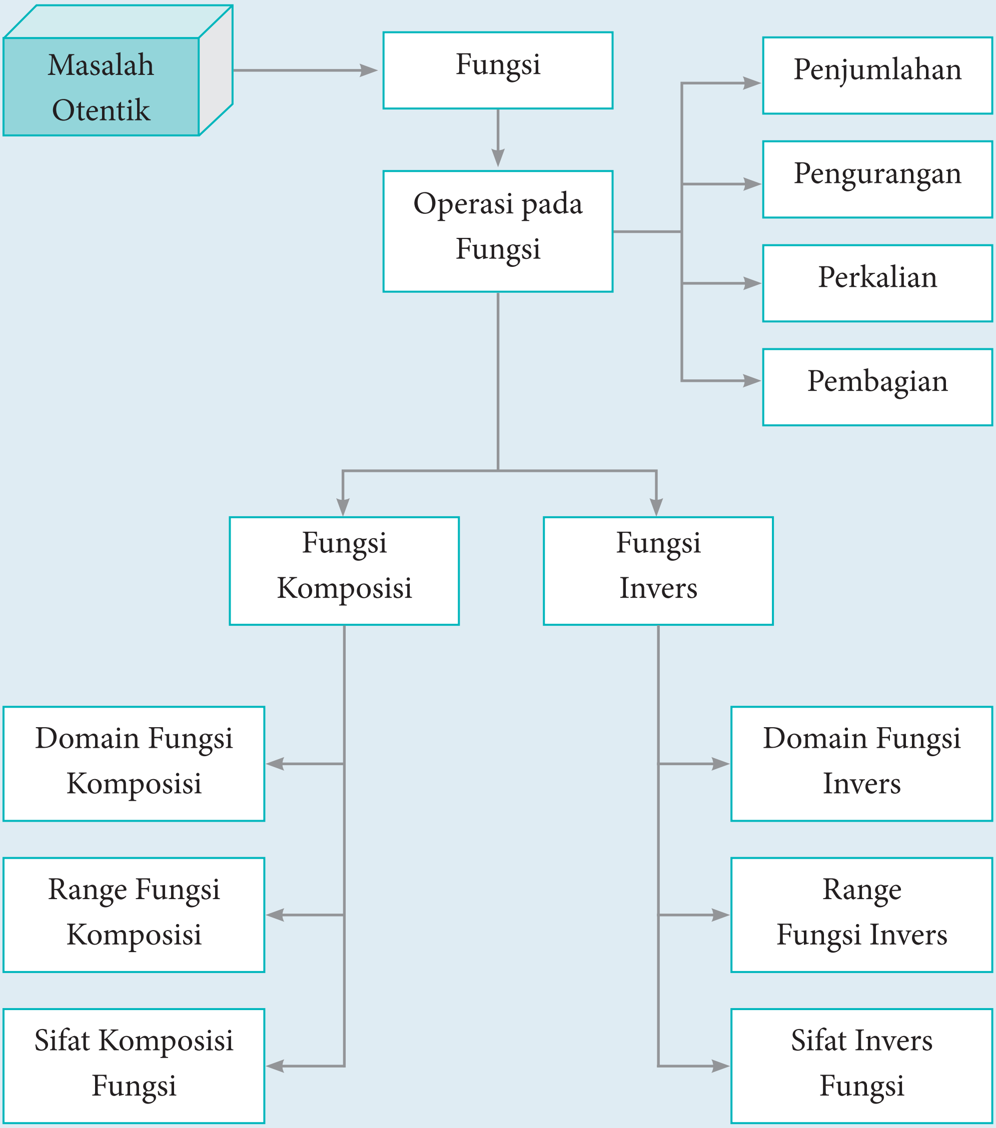
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran fungsi, siswa mampu: 1. menunjukkan sikap jujur, tertib dan mengikuti aturan, konsisten, disiplin waktu, ulet, cermat dan teliti, maju berkelanjutan, bertanggung jawab, berpikir logis, kritis, kreatif, dan analitis serta memiliki rasa senang, motivasi internal, ingin tahu dan ketertarikan pada ilmu pengetahuan dan teknologi serta sikap terbuka, percaya diri, kemampuan bekerja sama, toleransi, santun, objektif, dan menghargai; 2. menganalisis fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) secara formal yang meliputi notasi, daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik, serta grafiknya.; 3. menjelaskan dan melakukan operasi aritmetika (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) serta operasi komposisi pada fungsi; 4. menjelaskan fungsi invers dan sifat-sifatnya serta menentukan eksistensinya.	Melalui pembelajaran materi fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar. ❖ Menjelaskan notasi,daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik suatu fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) . ❖ Menentukan daerah asal, daerah hasil suatu fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional). ❖ Menjelaskan konsep operasi aretmatika fungsi dan operasi komposisi fungsi. ❖ Menerapkan operasi fungsi dan komposisi fungsi dalam menyelesaikan masalah. ❖ Menemukan konsep invers fungsi dan sifat-sifat invers fungsi untuk suatu fungsi. ❖ Menemukan syarat eksistensi invers fungsi. ❖ Menyelesaikan daerah asal dan daerah hasil dari suatu masalah kontekstual.

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran fungsi, siswa mampu: 5. menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan daerah asal dan daerah hasil fungsi; 6. menyelesaikan masalah yang melibatkan operasi aritmetika dan operasi komposisi fungsi; 7. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi invers suatu fungsi.	Melalui pembelajaran materi fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar. ❖ Menyelesaikan fungsi invers dari masalah kontekstual.

Istilah-Istilah

- Fungsi
- Fungsi Linear
- Fungsi Kuadrat
- Fungsi Rasional
- Komposisi Fungsi
- Fungsi Invers

B. Diagram Alir



C. Materi Pembelajaran

3.1 Memahami Notasi, Domain, Range, dan Grafik Suatu Fungsi

Ingat kembali pelajaran relasi dan fungsi waktu saat kamu belajar di SMP. Ilustrasi tentang bagaimana sebuah mesin bekerja, mulai dari masukan (*input*) kemudian diproses dan menghasilkan luaran (*output*) adalah salah satu contoh bagaimana fungsi dalam matematika bekerja.

Contoh

Sumber: https://upload.wikimedia.org

Gambar 3.1 Cara kerja mesin

Berdasarkan Gambar 3.1 di atas, misalkan masukannya adalah $x = 5$, maka mesin akan bekerja dan luarannya adalah $2(5) + 5 = 15$. Mesin tersebut telah diprogram untuk menunjukkan sebuah fungsi. Jika f adalah sebuah fungsi, maka dikatakan bahwa f adalah fungsi yang akan mengubah x menjadi $2x + 5$. Contoh, fungsi f akan mengubah 2 menjadi $2(2) + 5 = 9$; fungsi f akan mengubah 3 menjadi $2(3) + 5 = 11$, dan lain sebagainya.

Fungsi tersebut dapat ditulis menjadi

$f : x \to 2x + 5$, dibaca: fungsi f memetakan x ke $2x + 5$

Bentuk penyebutan lain yang ekuivalen dengan ini adalah

$f(x) = 2x + 5$ atau $y = 2x + 5$

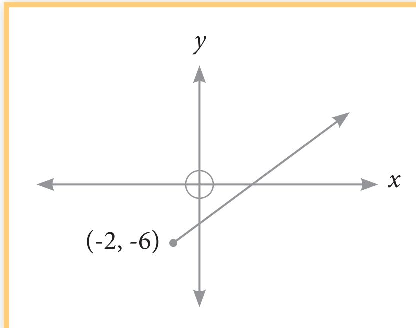
Jadi, $f(x)$ adalah nilai y untuk sebuah nilai x yang diberikan, sehingga dapat ditulis $y = f(x)$ yang berarti bahwa y adalah fungsi dari x. Dalam hal tersebut, nilai dari bergantung pada nilai x, maka dapat dikatakan bahwa y adalah fungsi dari x.

Perhatikan Gambar 3.2 di bawah ini.

Berdasarkan Gambar 3.2 (i) diperoleh beberapa hal berikut.

1) Semua nilai $x \geq -2$ memenuhi, sehingga daerah asalnya adalah $\{x : x \geq -2\}$ atau $x \in (-2, \infty)$.

2) Semua nilai $y \geq -6$ memenuhi, sehingga daerah hasilnya adalah $\{y : y \geq -6\}$ atau $y \in (-6, \infty)$.

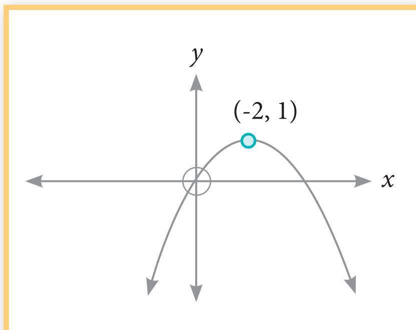


Gambar 3.2 (*i*)

Berdasarkan Gambar 3.2 (*ii*) diperoleh beberapa hal berikut.

1) Semua nilai x, sehingga daerah asalnya adalah $\{x : x$ adalah bilangan real$\}$ atau $x \in R$.

2) Nilai y yang memenuhi adalah $y \leq 1$ atau dengan kata lain, y tidak mungkin bernilai lebih dari satu, sehingga daerah hasilnya adalah $\{y : y \leq 1, y \in R\}$ atau $y \in (-\infty, 1)$.

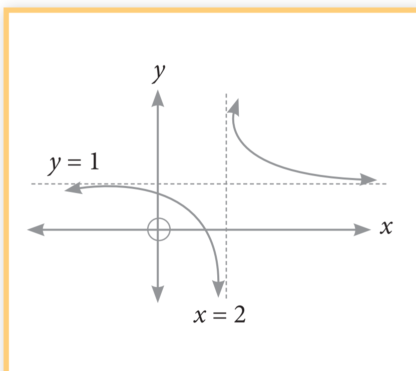


Gambar 3.2 (*ii*)

Berdasarkan Gambar 3.2 (*iii*), diperoleh beberapa hal sebagai berikut.

1) Semua nilai x memenuhi kecuali $x = 2$, sehingga daerah asalnya adalah $\{x : x \neq 2\}$.

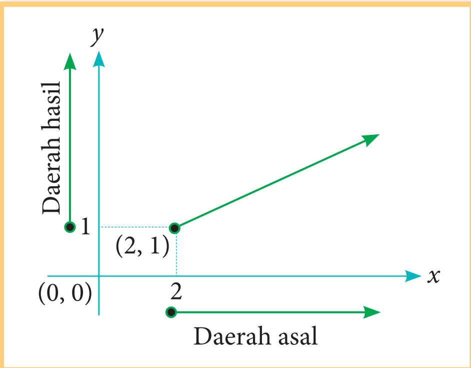
2) Semua nilai y memenuhi kecuali $y = 1$, sehingga daerah asalnya adalah $\{y : y \neq 2\}$.



Gambar 3.2 (*iii*)

Daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi sebaiknya digambarkan dengan menggunakan interval fungsi.

Contoh



Gambar 3.2 (*iv*)

Daerah asal fungsi yang digambarkan pada Gambar 3.2 adalah semua bilangan real x pada interval $x \geq 2$, dapat ditulis $\{x : x \geq 2\}$ atau $x \in (2, \infty)$.

Demikian halnya untuk nilai y, daerah hasilnya adalah semua bilangan real y pada interval $y \geq 1$, dapat ditulis $\{y : y \geq 1\}$atau $y \in (1, \infty)$.

Daerah asal sebuah fungsi dapat juga ditetapkan secara jelas atau tegas (eksplisit). Misalnya, jika ditulis seperti berikut.

$$f(x) = 2x^2 \qquad\qquad 0 \leq x \leq 3$$

Dengan demikian daerah asal fungsinya adalah semua bilangan real x yang dibatasi dengan $0 \leq x \leq 3$. Jika daerah asal sebuah fungsi tidak ditentukan secara tegas/jelas, maka dengan kesepakatan bahwa daerah asal fungsi adalah himpunan semua bilangan real x yang membuat fungsi f terdefinisi. Sebuah fungsi f dikatakan terdefinisi pada bilangan real apabila f anggota himpunan bilangan real. Perhatikan fungsi berikut.

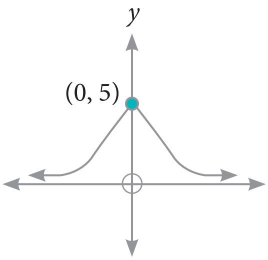
$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ dan } g(x) = \sqrt{2x}\,.$$

Fungsi f tidak terdefinisi untuk nilai x yang membuat penyebutnya bernilai 0, dalam hal ini fungsi f tidak terdefinisi pada $x = 2$. Dengan demikian, domain fungsi f adalah $\{x : x \neq 2, x \in R\}$. Fungsi g tidak terdefinisi untuk x negatif, sehingga domain fungsi g adalah $\{x : x \geq 0, x \in R\}$.

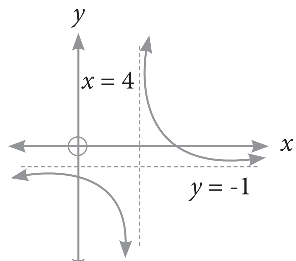
Agar kamu lebih memahami konsep daerah asal dan daerah hasil, kerjakanlah latihan berikut.

Latihan 3.1

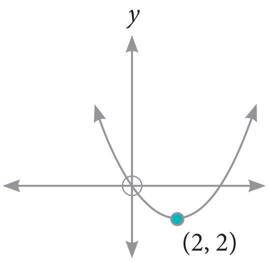
1. Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi yang disajikan pada grafik berikut.



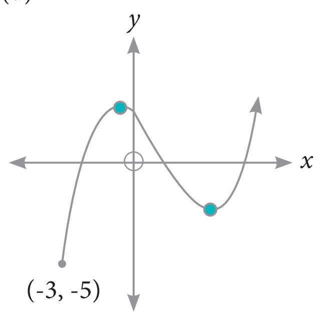
(a)



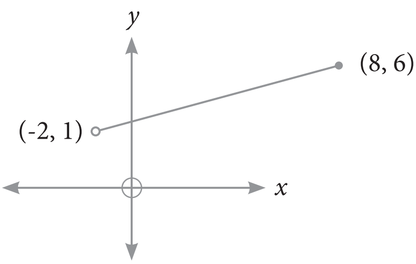
(d)



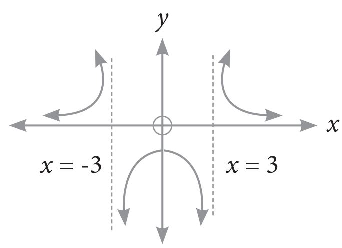
(b)



(e)



(c)



(f)

2. Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi berikut.

   a. $f(x) = 2x + 3$

   b. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

   c. $f(x) = x^2 - 1 \quad 2 \leq x \leq 6$

   d. $f(x) = \dfrac{2}{x(x-5)}$

e. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$

f. $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

g. $h(x) = \sqrt{x-8}$

h. $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$

i. $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{4-x}$

j. $h(x) = \sqrt{x^2+6x+9}$

3.2 Operasi Aljabar pada Fungsi

Masalah 3.1

Seorang fotografer dapat menghasilkan gambar yang bagus melalui dua tahap, yaitu tahap pemotretan dan tahap *editing*. Biaya yang diperlukan pada tahap pemotretan adalah (B_1)adalah Rp500,00 per gambar, mengikuti fungsi: $B_1(g)$ = 500g + 2.500 dan biaya pada tahap *editing*(B_2)adalah Rp100,00 per gambar, mengikuti fungsi B_2(g) = 100g + 500, dengan *g* adalah banyak gambar yang dihasilkan.

a) Berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus?

b) Tentukanlah selisih antara biaya pada tahap pemotretan dengan biaya pada tahap *editing* untuk 5 gambar.

Alternatif Penyelesaian

Fungsi biaya pemotretan: $B_1(g) = 500g + 2.500$

Fungsi biaya *editing* $B_2(g) = 100g + 500$

a) Gambar yang bagus dapat diperoleh melalui 2 tahap proses yaitu pemotretan dan *editing*, sehingga fungsi biaya yang dihasilkan adalah

$$B_1(g) + B_2(g) = (500g + 2.500) + (100g + 500)$$
$$= 600g + 3.000$$

Total biaya untuk menghasilkan 10 gambar ($g = 10$) adalah

$$B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3.000$$

$$B_1(10) + B_2(10) = (600 \times 10) + 3.000$$

$$= 9.000$$

Jadi, total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp9.000,00.

b) Selisih biaya tahap pemotretan dengan tahap *editing* adalah

$$B_1(g) - B_2(g) = (500g + 2.500) - (100g + 500)$$

$$= 400g + 2.000$$

Selisih biaya pemotretan dengan biaya *editing* untuk 5 gambar ($g = 5$) adalah

$$B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2.000$$

$$B_1(5) - B_2(5) = (400 \times 5) + 2.000$$

$$= 4.000$$

Jadi, selisih biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 5 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp4.000,00.

Operasi aljabar pada fungsi didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal $\boldsymbol{D_f}$ dan g suatu fungsi dengan daerah asal $\boldsymbol{D_g}$, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

1. Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
2. Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
3. Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = \mathrm{f}(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.

4. Pembagian f dan g ditulis $\dfrac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|g(x) = 0\}$.

Contoh 3.1

Diketahui fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya.

a) $(f + g)$

b) $(f - g)$

c) $(f \times g)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi $f(x) = x + 3$ adalah $D_f = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ dan daerah asal fungsi $g(x) = x^2 - 9$ adalah $D_g = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$.

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (x + 3) + (x^2 - 9)$

$= x^2 + x - 6$

Daerah asal fungsi $(f + g)(x)$ adalah

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$= \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\} \cap \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$

$= \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (x + 3) - (x^2 - 9)$

$= -x^2 + x + 12$

Daerah asal fungsi $(f - g)(x)$ adalah

$$\begin{aligned} D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\ &= (x + 3) \times (x^2 - 9) \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f \times g)(x)$ adalah

$$\begin{aligned} D_{f \times g} &= D_f \cap D_g \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{x+3}{x^2-9} \\ &= \frac{x+3}{(x+3)\times(x-3)} \\ &= \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \text{ dan } g(x) \neq 0 \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ dan } x^2 - 9 \neq 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ dan } (x + 3)\ (x - 3) \neq 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ dan } x \neq -3, x \neq 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq -3, x \neq 3\} \end{aligned}$$

Latihan 3.2

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya.

a) $(f + g)(x)$ c) $(f \times g)(x)$

b) $(f - g)(x)$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

3.3 Menemukan Konsep Fungsi Komposisi

Masalah 3.2

Suatu bank di Amerika menawarkan harga tukar Dollar Amerika (USD) ke Ringgit Malaysia (MYR), yaitu 1 USD = 3,28 MYR, dengan biaya penukaran sebesar 2 USD untuk setiap transaksi penukaran. Kemudian salah satu bank terkenal di Malaysia menawarkan harga tukar ringgit Malaysia (MYR) ke Rupiah Indonesia (IDR), yaitu 1 MYR = Rp3.169,54, dengan biaya penukaran sebesar 3 MYR untuk setiap transaksi penukaran.

Seorang turis asal Amerika ingin bertamasya ke Malaysia kemudian melanjutkannya ke Indonesia dengan membawa uang sebesar 2.000 USD. Berapa IDR akan diterima turis tersebut jika pertama dia menukarkan semua uangnya ke mata uang Ringgit Malaysia di Amerika dan kemudian menukarnya ke Rupiah Indonesia di Malaysia?

Alternatif Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dengan dua tahap penukaran.

Langkah 1

Uang sebesar 2.000 USD akan ditukar ke Ringgit Malaysia di Amerika dengan biaya penukaran sebesar 2 USD, maka jumlah uang yang diterima turis tersebut adalah

$(2.000 - 2) \times 3{,}28$ MYR $= 1.998 \times 3{,}28$ MYR $= 6.553{,}44$ MYR

Langkah 2

Uang sebesar 6.553,44 MYR akan ditukar ke mata uang Rupiah Indonesia. Perlu diingat bahwa biaya penukaran sebesar 3 MYR, maka uang yang diterima turis tersebut adalah

$(6.553{,}44 - 3) \times 3.169{,}54 = 6.550{,}44 \times 3.169{,}54 = 20.761.881{,}60$ IDR

Turis tersebut menerima uang rupiah sebesar 20.761.881,60 IDR.

Perhitungan kedua transaksi di atas dapat dibuat model matematikanya ke dalam dua fungsi sebagai berikut.

Misalkan

t = jumlah uang dalam USD

x = jumlah uang dalam MYR

y = jumlah uang dalam IDR

Transaksi penukaran pertama dapat dituliskan dengan

$x = 3{,}28\ (t - 2)$

$x = 3{,}28t - 6{,}56$

Oleh karena x merupakan sebuah fungsi t, maka dapat ditulis

$x(t) = 3{,}28t - 6{,}56$ .... (1)

Untuk transaksi penukaran kedua dapat ditulis sebagai berikut.

$y = 3.169{,}54\ (x - 3)$

$y = 3.169{,}54x - 9.508{,}62$

Oleh karena y fungsi dari x, maka dapat ditulis

$y(x) = 3.169{,}54x - 9.508{,}62$ .... (2)

Dengan mensubstitusi persamaan 1 ke persamaan 2 diperoleh

$y(x) = y(x(t))$

Misalkan $f(t) = y(x(t))$, maka

$$f(t) = y(x(t))$$
$$= 3.169,54\ (3,28t - 6,56) - 9.508,62$$
$$= 10.396,09t - 20792.18\ \ -9.508,62$$
$$f(t) = 10.396,09t - 30.300,80$$

Fungsi $f(t) = y(x(t))$ ini merupakan fungsi komposisi x dan y dalam t yang dilambangkan dengan $(y \circ x)(t)$ dan didefinisikan dengan $(y \circ x)(t) = y(x(t))$.

Dengan demikian, fungsi komposisi x dan y pada masalah di atas adalah

$(y \circ x)\ (t) = 10.396,09t - 30.300,80$ .... (3)

Dengan menggunakan fungsi komposisi $(y \circ x)(t)$ seperti pada persamaan 3, maka dapat dihitung jumlah uang turis tersebut dalam mata uang rupiah Indonesia untuk $t = 2.000$ USD seperti berikut.

$$(y \circ x)(t) = 10.396,09t - 30.300,80$$
$$= 10.396,09 \times (2.000) - 30.300,80$$
$$= 20.792.180 - 30.300,80$$
$$= 20.761.881,60$$

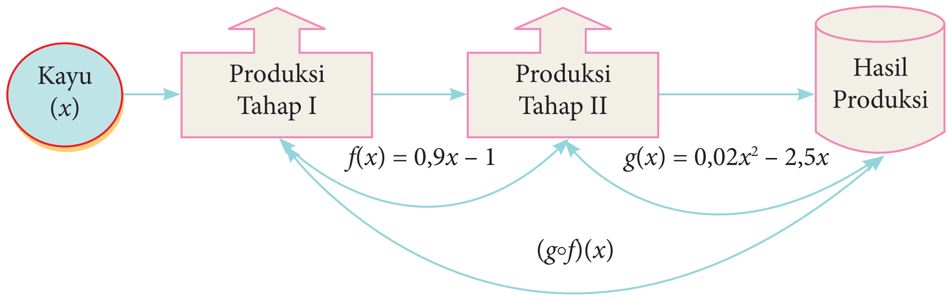
Dengan demikian, jumlah uang turis tersebut dalam rupiah adalah Rp**20.761.881,60** Perhatikan bahwa hasilnya sama dengan langkah pertama yang dilakukan di atas. Agar kamu lebih memahami fungsi komposisi, perhatikanlah masalah berikut.

Masalah 3.3

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi. Tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya, mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0,9x - 1$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = 0,02x^2 - 2,5x$, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 200 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (Kertas dalam satuan ton).

Alternatif Penyelesaian

Tahap-tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.3 Tahapan produksi pabrik kertas

Dari Gambar 3.3 di atas, terlihat jelas bahwa tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi setiap tahap dihitung sebagai berikut.

Hasil produksi tahap I

Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah $f(x) = 0{,}9x - 1$

Untuk $x = 200$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}9x - 1 \\ &= 0{,}9(200) - 1 \\ &= 179 \end{aligned}$$

Hasil produksi tahap I adalah 179 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II

Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah $g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(x) &= 0{,}02x^2 - 2{,}5x \\ &= 0{,}02(179)2 - 2{,}5(179) \\ &= 640{,}82 - 447{,}5 \\ &= 193{,}32 \end{aligned}$$

Dengan demikian, hasil produksi tahap II adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Hasil produksi yang dihasilkan pabrik kertas tersebut jika bahan dasar kayunya sebanyak 200 ton adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Masalah 3.3 di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.

Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

$f(x) = 0{,}9x - 1$ .... (1)

$g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$ .... (2)

Dengan mensubstitusikan persamaan 1 ke persamaan 2, diperoleh fungsi

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= 0{,}02(0{,}9x - 1)2 - 2{,}5(0{,}9x - 1)\\
&= 0{,}02\,(0{,}81x^2 - 1{,}81x + 1)2 - 2{,}5(0{,}9x - 1)\\
&= 0{,}0162x^2 - 0{,}36x + 0{,}02 - 2{,}25x + 2{,}5\\
&= 0{,}0162x^2 - 2{,}286x + 2{,}52
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh fungsi $g(f(x)) = 0{,}0162x^2 - 2{,}286x + 2{,}52$ ...... (3)

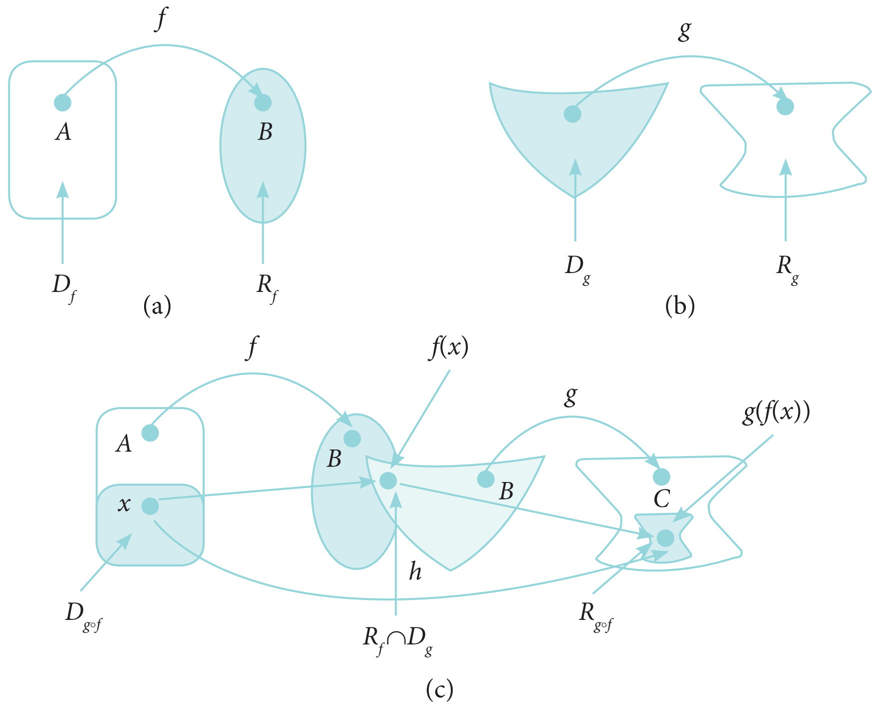
Jika disubstitusikan nilai $x = 200$ ke persamaan 3, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= 0{,}0162x^2 - 2{,}286x + 2{,}52\\
&= 0{,}0162(200)2 - 2{,}286(200) + 2{,}52\\
&= 648 - 457{,}2 + 2{,}52
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 193,32 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Karena itu nilai $g \circ f$ di x ditentukan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Perhatikan Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Fungsi komposisi

Berdasarkan Gambar 3.4 di atas dapat dikemukakan beberapa hal berikut.

(1) D_f = daerah asal fungsi f; R_f = daerah hasil fungsi f; D_g = daerah asal fungsi g; R_g = daerah hasil fungsi g; $D_{g\circ f}$ = daerah asal fungsi komposisi $g\circ f$; $R_{g\circ f}$ = daerah hasil fungsi komposisi $g\circ f$.

(2) Fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B, ditulis f: $A \rightarrow B$.

Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan Gambar 3.4(a).

(3) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C, ditulis g: $B \rightarrow C$.

Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan Gambar 3.4(b).

(4) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B, ditulis h: $A \rightarrow C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan Gambar 3.4(c).

Berdasarkan beberapa hal di atas diperoleh definisi berikut.

Definisi 3.2

Jika f dan g fungsi serta $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis $g \circ f$) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

daerah asal fungsi komposisi f dan g adalah $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$, dengan

D_f = daerah asal (*domain*) fungsi f; D_g = daerah asal (*domain*) fungsi g;

R_f = daerah hasil (*range*) fungsi f; R_g = daerah hasil (*range*) fungsi g.

Pertanyaan Kitis

Untuk fungsi komposisi f dan g atau $(g \circ f)(x)$.

1) Apa akibatnya jika $R_f \cap D_g = \emptyset$? Mengapa? Jelaskan.
2) Bagaimana hubungan $D_{g \circ f}$ dengan D_f? Apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$? Mengapa? Jelaskan.
3) Bagaimana hubungan $R_{g \circ f}$ dengan R_g? Apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_g$? Mengapa? Jelaskan.

Untuk lebih memahami konsep fungsi komposisi, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 2x + 1$ dan fungsi g: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 1$.

(1) Apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi?

(2) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

Alternatif Penyelesaian

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2 - 1$

$D_f = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$; $R_f = \{y \mid y \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$

$D_g = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$; $R_g = \{y \mid y \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$

(1) Untuk menentukan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, maka dapat diketahui berdasarkan

i. Jika $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.

$\{y \mid y \in \boldsymbol{R}\} \cap \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \neq \emptyset$ karena $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.

ii. Jika $R_g \cap D_f \neq 0$, maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

$\{y \mid y \in \boldsymbol{R}\} \cap \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \neq \emptyset$ karena $R_g \cap D_f \neq \emptyset$, maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(2) Rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$dan $(f \circ g)(x)$ ditentukan dengan

i.
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 - 1 \\ &= (4x^2 + 4x + 1) - 1 \\ &= 4x^2 + 4x\end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= 2(x^2 - 1) + 1 \\ &= 2x^2 - 2 + 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$.

Perhatikan kembali Contoh 3.2 di atas. Contoh 3.2 tersebut diberikan untuk menentukan fungsi komposisi jika fungsi-fungsi yang lain telah diketahui. Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan suatu fungsi yang lain.

Contoh 3.3

Diketahui fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$. Tentukanlah rumus untuk fungsi berikut.

a) Fungsi $f(x)$

b) Fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

Alternatif Penyelesaian

$(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$; $g(x) = 2x^2 - 6$

a) Menentukan fungsi $f(x)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= 18x^2 + 24x + 2 \\
\leftrightarrow 2 \times f(x)^2 - 6 &= 18x^2 + 24x + 2 \\
\leftrightarrow 2 \times f(x)^2 &= 18x^2 + 24x + 2 + 6 \\
\leftrightarrow 2 \times f(x)^2 &= 18x^2 + 24x + 8 \\
\leftrightarrow f(x)^2 &= \frac{18x^2 + 24x + 8}{2} \\
\leftrightarrow f(x)^2 &= 9x^2 + 12x + 4 \\
\leftrightarrow f(x) &= \pm\sqrt{9x^2 + 12x + 4} \\
\leftrightarrow f(x) &= \pm(3x + 2)
\end{aligned}
$$

Jadi, ada dua fungsi f yang mungkin, yaitu $f(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = -3x - 2$.

b) Menentukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

i. Untuk $f(x) = 3x + 2$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= 3 \times g(x) + 2, \text{ karena } f(x) = 3x + 2 \\
&= 3 \times (2x^2 - 6) + 2 \\
&= 6x^2 - 18 + 2 \\
&= 6x^2 - 16
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 6x^2 - 16$

ii. $f(x) = -3x - 2$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= -3 \times g(x) - 2, \text{ karena } f(x) = -3x - 2\\ &= -3 \times (2x^2 - 6) - 2\\ &= -6x^2 + 18 - 2\\ &= -6x^2 + 16\end{aligned}$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = -6x^2 + 16$

3.4 Sifat-Sifat Operasi Fungsi Komposisi

Untuk menentukan sifat-sifat operasi fungsi komposisi pahamilah contoh-contoh di bawah ini.

Contoh 3.4

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 4x + 3$ dan fungsi g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = x - 1$.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

b) Apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$? Coba selidiki.

Alternatif Penyelesaian

a) Menentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

i. $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(4x + 3)\\ &= (4x + 3) - 1\\ &= 4x + 2\end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x - 1)\\ &= 4(x - 1) + 3\\ &= 4x - 4 + 3\\ &= 4x - 1\end{aligned}$$

Dengan demikian, $(g \circ f)(x) = 4x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$.

b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.

Berdasarkan hasil perhitungan butir (a) di atas diperoleh

$(g \circ f)(x) = 4x + 2$, dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$

Untuk $x = 2$ diperoleh bahwa

$(g \circ f)(2) = 4(2) + 2 = 10$ dan $(f \circ g)(2) = 4(2) - 1 = 7$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa: $g \circ f$ tidak sama dengan $f \circ g$ atau $g \circ f \neq f \circ g$.

Berdasarkan Contoh 3.4 di atas, dapat disimpulkan bahwa pada umumnya sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak berlaku, yaitu $g \circ f \neq f \circ g$.

Contoh 3.5

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 2x - 1$, fungsi g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = 4x + 5$, dan fungsi h: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $h(x) = 2x - 3$.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $g \circ (f \circ h)$ dan $(g \circ f)\ h$.

b) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $f \circ (g \circ h)$ dan $(f \circ g)\ h$.

c) Apakah $g\ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$, dan $f\ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Coba selidiki.

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$

i) Misalkan $k(x) = (f \circ h)(x)$

$$
\begin{aligned}
k(x) &= f(h(x)) = 2h(x) - 1 \\
&= 2(2x - 3) - 1 \\
&= 4x - 6 - 1 \\
&= 4x - 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g\circ(f\circ h)(x)) &= (g\circ k)(x)\\
&= g(k(x))\\
&= 4(k(x)) + 5\\
&= 4(4x - 7) + 5\\
&= 16x - 28 + 5\\
&= 16x - 23
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi komposisi $(g\circ(f\circ h)(x)) = 16x - 23$

ii) Misalkan $l(x) = (g\circ f)(x)$

$$
\begin{aligned}
l(x) &= g(f(x)) = 4(f(x)) + 5\\
&= 4(2x - 1) + 5\\
&= 8x - 4 + 5\\
&= 8x + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((g\circ f)\circ h)(x) &= (l\circ h)(x)\\
&= l(h(x))\\
&= 8(h(x)) + 1\\
&= 8(2x - 3) + 1\\
&= 16x - 24 + 1\\
&= 16x - 23
\end{aligned}
$$

Jadi, rumus fungsi komposisi $((g\circ f)\circ h)(x) = 16x - 23$.

b) Rumus fungsi komposisi $(f\circ(g\circ h))(x)$ dan $((f\circ g)\circ h)(x)$

i) Misalkan $m(x) = (g\circ h)(x)$

$$
\begin{aligned}
m(x) &= g(h(x)) = 4(h(x)) + 5\\
&= 4(2x - 3) + 5\\
&= 8x - 12 + 5\\
&= 8x - 7
\end{aligned}
$$

$(f \circ (g \circ h)(x)) = (f \circ m(x))$

$= f(m(x))$

$= 2(m(x)) - 1$

$= 2(8x - 7) - 1$

$= 16x - 14 - 1$

$= 16x - 15$

Jadi, rumus fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h)(x)) = 16x - 15$

ii) Misalkan $n(x) = (f \circ g)(x)$

$n(x) = f(g(x))$

$= 2(4x + 5) - 1$

$= 8x + 10 - 1$

$= 8x + 9$

$((f \circ g) \circ h)(x) = (n \circ h(x))$

$= n(h(x))$

$= 8(h(x)) + 9$

$= 8(2x - 3) + 9$

$= 16x - 24 + 9$

$= 16x - 15$

Jadi, rumus fungsi komposisi $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

c) Dari butir (a) dan butir (b), diperoleh nilai

i) $(g \circ (f \circ h)(x)) = 16x - 23$ dan $((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h)(x)) = 16x - 15$ dan $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Berdasarkan nilai-nilai ini disimpulkan bahwa

i) $(g \circ (f \circ h)(x)) = ((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h)(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Dari uraian **Contoh 3.5** di atas disimpulkan bahwa sifat asosiatif berlaku pada operasi fungsi komposisi sebagai berikut.

Sifat 3.1

Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $R_{g \circ h} \cap D_f \neq \emptyset$; $R_g \cap D_f \neq \emptyset$; $R_h \cap D_{f \circ g} \neq \emptyset$, maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Contoh 3.6

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi identitas I: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $I(x) = x$. Tentukanlah

a) rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$.

b) apakah $f \circ I = I \circ f = f$. Selidikilah.

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$

✓ $(f \circ I)(x) = f(I(x))$

$= f(x)$

$= 5x - 7$

✓ $(I \circ f)(x) = I(f(x))$

$= I(f(x))$

$= 5x - 7$

b) Berdasarkan hasil pada butir (a) maka dapat disimpulkan bahwa

$f \circ I = I \circ f = f$

Berdasarkan penyelesaian **Contoh 3.6** diperoleh sifat berikut.

Sifat 3.2

Diketahui f suatu fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_I \cap D_f \neq \emptyset$, maka terdapat sebuah fungsi identitas, yaitu $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu

$$f \circ I = I \circ f = f$$

Agar kamu lebih memahami **Sifat 3.2**, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan 3.3

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}$ dan fungsi identitas I: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $I(x) = x$. Buktikanlah bawah $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.

Uji Kompetensi 3.1

1. Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua menggunakan mesin II yang menghasilkan bahan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 6x - 10$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = x^2 + 12$, x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton.

   a) Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 50 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (Kertas dalam satuan ton).

   b) Jika bahan setengah jadi untuk kertas yang dihasilkan oleh mesin I sebesar 110 ton, berapa tonkah kayu yang sudah terpakai? Berapa banyak kertas yang dihasilkan?

2. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$, $x \neq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Tentukan rumus fungsi berikut apabila terdefinisi dan tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

   a) $f + g$

   b) $f - g$

   c) $f \times g$

   d) $\dfrac{f}{g}$

3. Misalkan f fungsi yang memenuhi $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f(-x) = 2x$ untuk setiap $x \neq 0$. Tentukanlah nilai $f(2)$.

4. Diketahui fungsi f: $R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan fungsi g: $R \rightarrow R$ dengan $g(x) = 3x - 7$. Tentukanlah

a) $g \circ f$
b) $f \circ g$
c) $g \circ f(5)$
d) $(f \circ g)$ (10)

5. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$. Tentukanlah nilai $f(49)$.

6. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan terurut

$f = \{(1,5), (2,6), (3,-1), (4,8)\}$

$g = \{(2,-1), (1,2), (5,3), (6,7)\}$

Tentukanlah

a) $g \circ f$
b) $f \circ g$

7. Jika f fungsi yang memenuhi persamaan $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = 2\, f(x)$. Tentukanlah $f(2014)$.

8. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dan $x^2 \neq 1$, buktikanlah bahwa $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

9. Untuk pasangan fungsi yang diberikan tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$.

a) $f(x) = 2x$ dan $g(x) = \sin x$
b) $f(x) = -x$ dan $g(x) = \ln x$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $g(x) = 2 \sin x$

10. Jika $f(x) = 22x + 2^{x+1} - 3$ dan $g(x) = 2^x + 3$. Tentukanlah nilai $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

11. Diketahui fungsi $f(x) = 2^{x+2} \times 6^{x-4}$ dan $g(x) = 12^{x-1}$ untuk x bilangan asli. Tentukanlah nilai $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

12. Diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$.Tentukanlah nilai $f(x - 2)$.

3.5 Fungsi Invers

Masalah 3.4

Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, dimana x banyak potong kain yang terjual.

a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?

b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?

c) Jika A merupakan daerah asal (*domain*) fungsi f dan B merupakan daerah hasil (*range*) fungsi f, gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.

Alternatif Penyelesaian

Keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, untuk setiap x potong kain yang terjual.

a) Penjualan 50 potong kain, maka $x = 50$ dan nilai keuntungan yang diperoleh adalah

$$f(x) = 500x + 1000$$

untuk $x = 50$ berarti
$$\begin{aligned} f(50) &= (500 \times 50) + 1.000 \\ &= 25.000 + 1.000 \\ &= 26.000 \end{aligned}$$

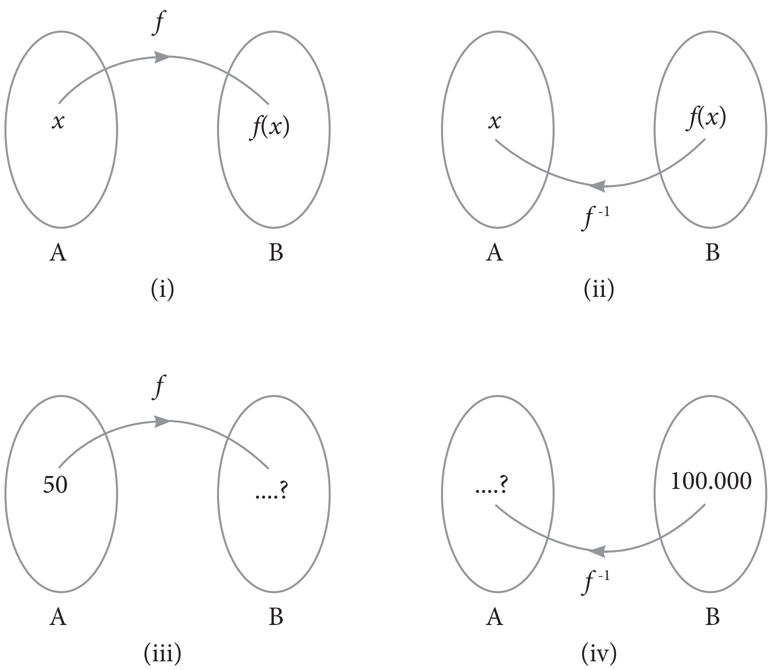
Jadi, keuntungan yang diperoleh dalam penjualan 50 potong kain sebesar Rp26.000,00.

b) Agar keuntungan yang diperoleh sebesar Rp 100.000,00, maka banyaknya kain yang harus terjual adalah
$$\begin{aligned} f(x) &= 500x + 1000 \\ 100.000 &= 500x + 1000 \\ 500x &= 100.000 - 1.000 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
500x &= 99.000 \\
x &= \frac{99.000}{500} \\
&= 198
\end{aligned}
$$

Jadi, banyaknya kain yang harus terjual adalah 198 potong.

c) Jika A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f, maka permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas digambarkan seperti berikut.



Gambar 3.5 Fungsi invers

Berdasarkan Gambar 3.5 di atas, maka dapat dikemukakan beberapa hal sebagai berikut.

(a) Gambar 3.5 (i) menunjukkan bahwa fungsi f memetakan A ke B, dapat ditulis f: A → B.

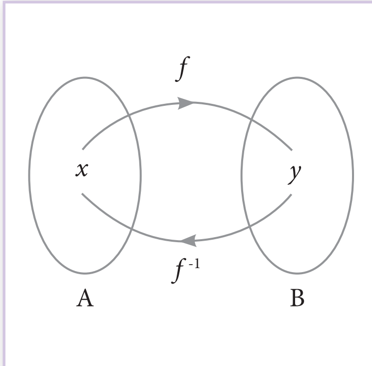
(b) Gambar 3.5 (ii) menunjukkan bahwa f^{-1} memetakan B ke A, dapat ditulis f^{-1}: B → A, dimana f^{-1} merupakan fungsi invers f.

(c) Gambar 3.5 (iii) menunjukkan bahwa untuk nilai $x = 50$, maka akan dicari nilai $f(x)$.

(d) Gambar 3.5 (iv) menunjukkan kebalikan dari Gambar 3.5 (iii), yaitu mencari nilai x jika diketahui nilai $f(x) = 100.000$.

Perhatikan Gambar 3.6 berikut, agar lebih memahami konsep invers suatu fungsi.

Berdasarkan Gambar 3.6 di samping, diketahui ada beberapa hal sebagai berikut. *Pertama*, fungsi f memetakan $x \in A$ ke $y \in B$. Ingat kembali pelajaran tentang menyatakan fungsi ke dalam bentuk pasangan terurut. Jika fungsi f dinyatakan ke dalam bentuk pasangan terurut, maka dapat ditulis sebagai berikut.



Gambar 3.6 Fungsi invers

$f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$. Pasangan terurut (x, y) merupakan unsur dari fungsi f.

Kedua, fungsi invers f atau f^{-1} memetakan $y \in B$ ke $x \in A$. Jika fungsi invers f dinyatakan ke dalam pasangan terurut, maka dapat ditulis $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B \text{ dan } x \in A\}$. Pasangan terurut (y, x) merupakan unsur dari fungsi invers f.

Berdasarkan uraian di atas, maka dapat didefinisikan invers suatu fungsi, yaitu sebagai berikut.

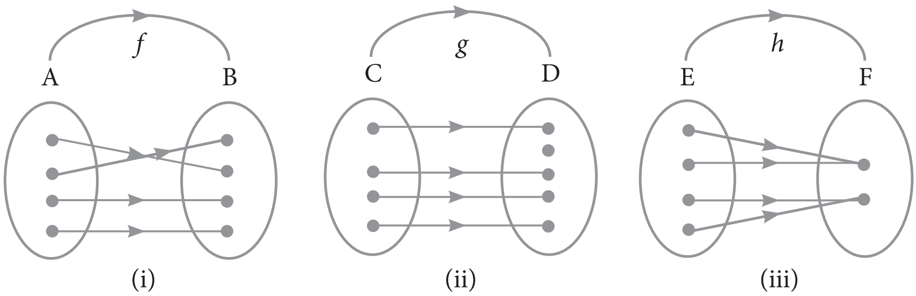
Definisi 3.3

Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan terurut $f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) adalah relasi yang memetakan B ke A, dimana dalam pasangan terurut dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B \text{ dan } x \in A\}$.

Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, selesaikanlah Masalah 3.5 berikut.

Masalah 3.5

Diketahui fungsi *f*: A → B merupakan fungsi bijektif, fungsi *g*: C → D merupakan fungsi injektif, dan fungsi *h*: E → F merupakan fungsi surjektif yang digambarkan seperti Gambar 3.7 di bawah ini.



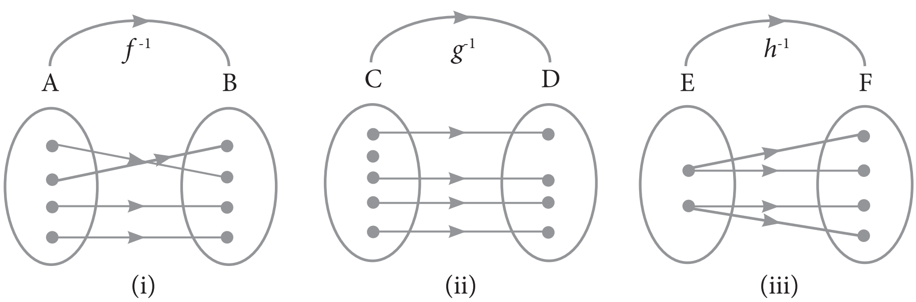
Gambar 3.7 Fungsi invers *f*, *g*, dan *h*

a) Jika fungsi invers *f* memetakan B ke A, fungsi invers *g* memetakan D ke C, dan fungsi invers *h* memetakan F ke E, maka gambarlah ketiga fungsi invers tersebut.

b) Dari ketiga fungsi invers tersebut, tentukanlah mana yang merupakan fungsi.

Alternatif Penyelesaian

a) Gambar ketiga fungsi invers tersebut ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 3.8 Invers fungsi *f*, *g*, dan *h*

b) Berdasarkan Gambar 3.8, dapat disimpulkan sebagai berikut.

- Gambar 3.8 (i) merupakan fungsi. Mengapa? Jelaskan.
- Gambar 3.8 (ii) bukan fungsi. Mengapa? Jelaskan.
- Gambar 3.8 (iii) bukan fungsi. Mengapa? Jelaskan.

Berdasarkan alternatif penyelesaian pada Masalah 3.5 di atas, dapat disimpulkan bahwa invers suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi, tetapi dapat hanya berupa relasi biasa. Fungsi invers g dan h **bukan** suatu fungsi melainkan hanya relasi biasa. Invers suatu fungsi yang merupakan fungsi disebut **fungsi invers**. Fungsi invers f merupakan suatu fungsi invers.

Berdasarkan uraian di atas, maka ditemukan sifat berikut.

Sifat 3.3

Suatu fungsi f : A → B dikatakan memiliki fungsi invers f^{-1}: B → A jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Perhatikan kembali Sifat 3.3 di atas, pada fungsi bijektif f: A → B, A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f. Secara umum, definisi fungsi invers diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.4

Jika fungsi f: $D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers fungsi f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai f^{1}: $R_f \rightarrow D_f$ dengan kata lain f^{1} adalah fungsi dari R_f ke D_f.

D_f adalah daerah asal fungsi f dan R_f adalah daerah hasil fungsi f.

Perhatikan kembali Definisi 3.4 di atas. Fungsi f: $D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, jika $y \in R_f$ merupakan peta dari $x \in D_f$, maka hubungan antara y dengan $f(x)$ didefinisikan dengan $y = f(x)$. Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi f, maka untuk setiap $x \in R_{f-1}$ adalah peta dari $y \in D_{f-1}$. Hubungan antara x dengan $f^{-1}(y)$ didefinisikan dengan rumus $x = f^{-1}(y)$.

3.6 Menentukan Rumus Fungsi Invers

Masalah 3.6

Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besarnya dana yang diperoleh bergantung kepada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 20.000$, dengan x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan.

a) Tentukanlah fungsi invers pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola tersebut.

b) Jika dalam suatu pertandingan, klub memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp5.000.000,00, berapa penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui fungsi pendapatan klub sepak bola tersebut adalah $f(x) = 500x + 20.000$.

a) Invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola

Untuk menentukan rumus fungsi invers $f(x)$ dapat dihitung sebagai berikut.

$y = f(x) = 500x + 20.000$

$y = 500x + 20.000$

$500x = y - 20.000$

$x = \dfrac{y - 20.000}{500}$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 20.000}{500}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 20.000}{500}$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{20.000}{500}$

Jadi, fungsi invers dari $f(x) = 500x + 20.000$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 20.000}{500}$

atau $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{500}(x - 20.000)$.

b) Jika dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp5.000.000,00, maka banyak penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut adalah

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 20.000}{500}$$

$$f^{-1}(5.000.000) = \frac{5.000.000 - 20.000}{500}$$

$$= \frac{5.000.000 - 20.000}{500}$$

$$= 9.960$$

Jadi, penonton yang menyaksikan pertandingan sepak bola sebanyak 9.960 orang.

Berdasarkan alternatif penyelesaian Masalah 3.6 di atas, diperoleh sifat sebagai berikut.

Sifat 3.4

Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f. Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$, maka berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$.

Contoh 3.7

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 5x + 7$. Tentukanlah fungsi inversnya.

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 5x + 7$

$5x = y - 7$

$x = \dfrac{y - 7}{5}$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y-7}{5}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{y-7}{5}$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x-7}{5}$,

$$= \frac{1}{5}(x-7)$$

Jadi, fungsi invers $f(x) = 5x + 7$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}(x-7)$.

Contoh 3.8

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 3x - 1$. Tentukanlah fungsi inversnya.

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka

$$y = 3x - 1$$

$$3x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{3}$$

Karena $f^{-1}(y) = x$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{3}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{3}$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$, mengapa? Jelaskan.

Jadi, fungsi invers $f(x) = 3x - 1$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

Berdasarkan Contoh 3.7 dan Contoh 3.8, jawablah soal berikut ini.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$

b) Kesimpulan apa yang dapat kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

(1) Berdasarkan Contoh 3.7, diketahui bahwa $f(x) = 5x + 7$ dan $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}(x-7)$.

a) Rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$ ditentukan sebagai berikut.

(i) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{1}(x))$

$$= 5(f^{-1}(x)) + 7$$

$$= 5(\frac{1}{5}(x-7)) + 7$$

$$= x - 7 + 7$$

$$= x$$

(ii) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$

$$= \frac{x-7}{5}$$

$$= \frac{f(x)-7}{5}$$

$$= \frac{(5x+7)-7}{5}$$

$$= \frac{(5x+7-7)}{5}$$

$$= \frac{5x}{5}$$

$$= x$$

(b) Berdasarkan hasil pada butir (a) dapat disimpulkan bahwa nilai $(f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$

(2) Sebagai latihanmu, silakan buktikan bahwa $(f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ juga berlaku pada Contoh 3.8.

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.7 dan Contoh 3.8 diperoleh sifat berikut.

Sifat 3.5

Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f, sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika

$(f \circ f^{-1})(x) = x = \mathrm{I}(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, dan

$(f^{-1} \circ f)(x) = x = \mathrm{I}(x)$ untuk setiap $x \in R_f$.

Sifat 3.5 di atas dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi invers dari fungsi f atau bukan. Agar kamu lebih memahami, perhatikan kembali Contoh 3. 9 berikut.

Contoh 3.9

Buktikanlah bahwa $f(x) = 10x - 1$ dan $g(x) = \dfrac{x+1}{10}$ merupakan fungsi yang saling invers.

Alternatif Penyelesaian

Untuk membuktikan bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ saling invers, cukup menunjukkan fungsi komposisi $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Bukti

(i) $$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{x+1}{10}\right) \\ &= 10(g(x)) - 1 \\ &= f\left(\frac{x+1}{10}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(10x - 1) \\ &= \frac{(10x-1)+1}{10} \\ &= \frac{10x}{10} \\ &= x \end{aligned}$$

Karena $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, maka kedua fungsi saling invers.

Perhatikan kembali Contoh 3.10 berikut.

Contoh 3.10

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = x - 1$. Tentukanlah $(f^{-1})^{-1}(x)$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan rumus $(f^{-1})^{-1}(x)$, maka langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan $f^{-1}(x)$ sebagai berikut.

Diketahui bahwa $f(x) = x - 1$, karena $f(x) = y$, maka $y = x - 1$ atau $x = y + 1$

Oleh karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$.

Langkah kedua, menentukan fungsi invers dari $f^{-1}(x)$ sebagai berikut.

Misalkan $f^{-1}(x) = h(x)$, maka fungsi invers dari $h(x)$ adalah $h^{-1}(x)$ yang ditentukan seperti berikut.

Misalkan h^{-1} adalah fungsi invers h. Untuk setiap $x \in D_h$ dan $y \in R_h$ berlaku $y = h(x)$ jika dan hanya jika $x = h^{-1}(y)$.

Karena $h(x) = x + 1$ dan $h(x) = y$, kita peroleh hubungan $y = x + 1$ atau $x = y - 1$.

Karena $x = h^{-1}(y)$, maka $h^{-1}(y) = y - 1$ sehingga $h^{-1}(x) = x - 1$.

Karena $f^{-1}(x) = h(x)$ dan $h^{-1}(x) = x - 1$, maka $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Jadi, $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Perhatikan kembali rumus fungsi $(f^{-1})^{-1}(x)$ yang kita peroleh dengan rumus fungsi $f(x)$ yang diketahui, dari kedua nilai ini kita peroleh bahwa $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) = x - 1$.

Berdasarkan hasil uraian pada Contoh 3.10 di atas, maka diperoleh sifat fungsi invers sebagai berikut.

Sifat 3.6

Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, dan dapat disimbolkan dengan

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Sekarang, kita akan menentukan fungsi invers dari suatu fungsi komposisi. Untuk memahami hal tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.11

Diketahui fungsi f dan g adalah fungsi bijektif yang ditentukan dengan $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukanlah soal berikut.

a) $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$

b) f^{-1} dan g^{-1}

c) $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$

d) $(g^{-1} \circ f^{-1})$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})$

e) Hubungan antara $(g \circ f)^{-1}$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})$

f) Hubungan antara $(f \circ g)^{-1}$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})$

Alternatif Penyelesaian

a) $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$

(i) $(g \circ f) = g(f(x))$

$= f(x) - 2$

$= (2x + 5) - 2$

$= 2x + 3$

(ii) $(f \circ g) = f(g(x))$

$= 2(g(x)) + 5$

$= 2(x - 2) + 5$

$= 2x - 4 + 5$

$= 2x + 1$

b) f^{-1} dan g^{-1}

(i) f^{-1}

$f(x) = 2x + 5$

Karena $f(\mathrm{x}) = y$, maka $y = 2x + 5$

$2x = y - 5$

$$x = \frac{y-5}{2}$$

Karena $f^{-1}(y) = x$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{2}$

Dengan demikian $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

(ii) g^{-1}

$g(x) = x - 2$

Karena $g(x) = y$, maka $y = x - 2$ sehingga $x = y + 2$

Karena $g^{-1}(y) = x$, maka $g^{-1}(y) = y + 2$ sehingga $g^{-1}(x) = x + 2$

c) $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$

(i) $(g \circ f)^{-1}$

$(g \circ f)(x) = 2x + 3$

Misalkan $(g \circ f)(x) = h(x)$, sehingga $h(x) = 2x + 3$

Karena $h(x) = y$, maka $y = 2x + 3$, sehingga $x = \dfrac{y-3}{2}$

Karena $h^{-1}(y) = x$, maka $h^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$ sehingga, $h^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

Karena $(g \circ f)(x) = h(x)$, maka $(g \circ f)^{-1}(x) = h^{-1}(x)$, sehingga $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

(ii) $(f \circ g)^{-1}$

$(f \circ g)(x) = 2x + 1$

Misalkan $(f \circ g)(x) = k(x)$, sehingga $k(x) = 2x + 1$

Karena $k(x) = y$, maka $y = 2x + 1$, sehingga $x = \dfrac{y-1}{2}$

Karena $k^{-1}(y) = x$, maka $k^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$, sehingga $k^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

Karena $(f \circ g)(x) = k(x)$, maka $(f \circ g)^{-1}(x) = k^{-1}(x)$, sehingga $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

d) $g^{-1} \circ f^{-1}$ dan $f^{-1} \circ g^{-1}$

(i) $g^{-1} \circ f^{-1}$

Pada butir (*b*) telah ditemukan bahwa $g^{-1}(x) = x + 2$ dan $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

$$
\begin{aligned}
(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
&= (f^{-1}(x)) + 2 \\
&= \frac{x-5}{2} + 2 \\
&= \frac{x-5+4}{2} \\
&= \frac{x-1}{2}
\end{aligned}
$$

(ii) $(f^{-1} \circ g^{-1})$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\
&= \frac{g^{-1}(x) - 5}{2} \\
&= \frac{(x+2) - 5}{2} \\
&= \frac{x-3}{2}
\end{aligned}
$$

e) Hubungan antara $(g \circ f)^{-1}$ dengan $f^{-1} \circ g^{-1}$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(g \circ f)^{-1}$ sama dengan $f^{-1} \circ g^{-1}$ atau $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \dfrac{x-1}{2}$

f) Hubungan antara $(f \circ g)^{-1}$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(f \circ g)^{-1}$ sama dengan $g^{-1} \circ f^{-1}$ atau $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x-3}{2}$

Berdasarkan Contoh 3.11 di atas, maka dapat kita simpulkan sifat berikut.

Sifat 3.7

Jika f dan g fungsi bijektif, maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$

Agar kamu lebih memahami Sifat 3.7, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan 3.4

Fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dan g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 5x - 4$ dan $g(x) = 3x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$.

Uji Kompetensi 3.2

1. Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 100x + 500$, x merupakan banyak potong kain yang terjual.
   a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 100 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
   b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp 500.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
   c) Jika A merupakan himpunan daerah asal (*domain*) fungsi $f(x)$ dan B merupakan himpunan daerah hasil (*range*) fungsi $f(x)$, gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.

2. Tentukanlah fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut jika ada.
   a) $f(x) = 2x^2 + 5$
   b) $g(x) = \dfrac{2x-1}{6}$
   c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2}$

3. Diketahui f dan g suatu fungsi dengan rumus fungsi $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$. Buktikanlah bahwa $f^{-1}(x) = g(x)$ dan $g^{-1}(x) = f(x)$.

4. Diketahui fungsi f: $R \rightarrow R$ dengan rumus fungsi $f(x) = x^2 - 4$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar fungsi f memiliki invers dan tentukan pula rumus fungsi inversnya untuk daerah asal yang memenuhi.

5. Untuk mengubah satuan suhu dalam derajat Celcius (°C) ke satuan suhu dalam derajat Fahrenheit (°F) ditentukan dengan rumus $F = \dfrac{9}{5}C + 32$.

a) Tentukanlah rumus untuk mengubah satuan derajat Fahrenheit (°F) ke satuan suhu dalam derajat Celcius (°C).

b) Jika seorang anak memiliki suhu badan 86°F, tentukanlah suhu badan anak itu jika diukur menggunakan satuan derajat Celcius.

6. Jika $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$, maka tentukanlah nilai $(f \circ g)^{-1}(x)$.

7. Diketahui fungsi f: $R \rightarrow R$ dan g: $R \rightarrow R$ dirumuskan dengan $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, untuk $x \neq 0$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukanlah $(g \circ f(x))^{-1}$.

8. Diketahui $f(x) = 3^{x-1}$. Tentukanlah rumus fungsi $f^{-1}(x)$ dan tentukan juga $f^{-1}(81)$.

9. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $(f \circ g)\,(x + 1) = -2x^2 - 4x - 1$. Tentukanlah $g^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(-2)$!

10. Fungsi f: $R \rightarrow R$ dan g: $R \rightarrow R$ ditentukan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 2x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$.

11. Diketahui $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x-2}\sqrt{x^2-4x+5}$. Tentukanlah $(f \circ g)^{-1}(x)$.

12. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $x \neq 0$ dan f^{-1} adalah invers fungsi f. Jika k adalah banyaknya faktor prima dari 210, tentukanlah nilai $f^{-1}(k)$.

Proyek

Rancanglah sebuah permasalahan kehidupan nyata dan selesaikan dengan menggunakan konsep fungsi komposisi. Buatlah laporannya dan presentasikan di depan kelas.

Rangkuman

Berdasarkan uraian materi pada Bab 3 ini, ada beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Jika f suatu fungsi dengan daerah asal $\boldsymbol{D_f}$ dan g suatu fungsi dengan daerah asal $\boldsymbol{D_g}$, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

   (1) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

   (2) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

   (3) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.

   (4) Pembagian f dan g ditulis $\dfrac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$.

2. Jika f dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis $g \circ f$) yang ditentukan dengan

   $$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

3. Sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak memenuhi, $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.

4. Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $\emptyset$; $R_{g \circ h} \cap D_f \neq \emptyset$, $R_g \cap D_f \neq \emptyset$; $R_h \cap D_{f \circ g} \neq \emptyset$, maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

5. Diketahui f fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_I \cap D_f \neq \emptyset$, maka terdapat sebuah fungsi identitas, yaitu $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu $f \circ I = I \circ f = f$.

6. Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan terurut $f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) memetakan B ke A, dalam pasangan terurut dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B \text{ dan } x \in A\}$.

7. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi yang bijektif.

8. Jika fungsi $f: D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers dari fungsi f adalah fungsi f^{-1} yang didefinisikan sebagai $f^{-1}: D_f \rightarrow R_f$.

9. Jika f fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri.

10. Jika f dan g fungsi bijektif, maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$.

Beberapa hal yang telah dirangkum di atas adalah modal dasar bagimu dalam belajar fungsi secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

BAB 4

Trigonometri

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran trigonometri, siswa mampu 1. menunjukkan sikap jujur, tertib dan mengikuti aturan, konsisten, disiplin waktu, ulet, cermat dan teliti, maju berkelanjutan, bertanggung jawab berpikir logis, kritis, kreatif, dan analitis serta memiliki rasa senang, motivasi internal, ingin tahu dan ketertarikan pada ilmu pengetahuan dan teknologi serta sikap terbuka, percaya diri, kemampuan bekerja sama, toleransi, santun, objektif, dan menghargai; 2. menjelaskan hubungan antara radian dan derajat sebagai satuan pengukuran sudut; 3. menjelaskan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku; 4. menggeneralisasi rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi; 5. menjelaskan identitas dasar trigonometri sebagai hubungan antara rasio trigonometri dan perannya dalam membuktikan identitas trigonometri lainnya;	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: ❖ Menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik. ❖ Berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur. ❖ Berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik.

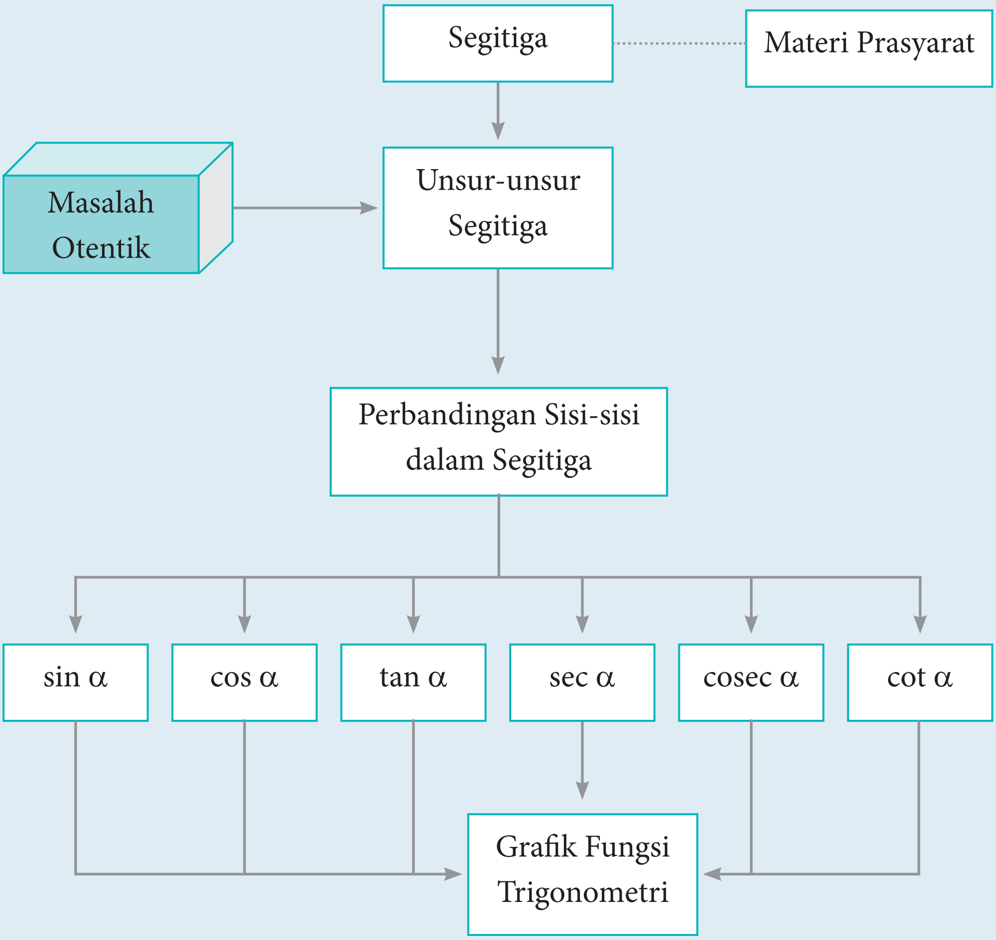
Kompetensi Dasar

6. menjelaskan aturan sinus dan cosinus;
7. menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan;
8. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengukuran sudut dalam satuan radian atau derajat;
9. menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku;
10. menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi;
11. menggunakan identitas dasar trigonometri untuk membuktikan identitas trigonometri lainnya;
12. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan sinus dan cosinus;
13. membuat sketsa grafik fungsi trigonometri.

Istilah-istilah

- Sudut
- Perbandingan sudut
- Aturan sinus
- Derajat
- Identitas trigonometri
- Grafik fungsi trigonometri
- Radian
- Sudut berelasi
- Amplitudo
- Kuadran
- Aturan sinus

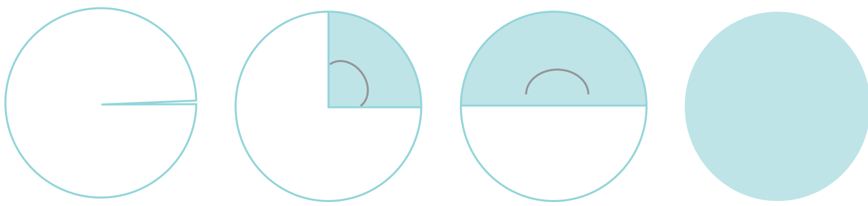
B. Diagram Alir



C. Materi Pembelajaran

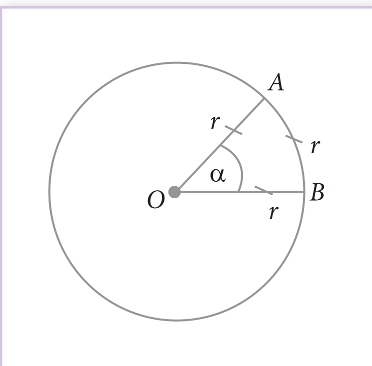
4.1 Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu *derajat* dan *radian*. Tanda " ^{o} " dan " *rad* " berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh $= 360^{o}$, atau 1^{o} didefenisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\dfrac{1}{360}$ kali putaran.



Gambar 4.1 Beberapa besar putaran/rotasi

Tentunya dari Gambar 4. 1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Misalnya, untuk $\dfrac{1}{3}$ putaran, $\dfrac{1}{6}$ putaran, $\dfrac{2}{3}$ putaran. Sebelum kita memahami hubungan derajat dengan radian, mari pelajari teori mengenai radian berikut.



Gambar 4.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai besar ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 4.2. Jika $\angle AOB = \alpha$ dan $\overline{AB} = OA = OB$, **maka** $\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{r} = 1$ **radian**.

Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian dapat dihitung menggunakan perbandingan:

Sifat 4.1

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r}\ rad$$

Lebih lanjut, dapat dikatakan bahwa hubungan satuan derajat dengan satuan radian, adalah 1 putaran sama dengan 2π *rad*. Oleh karena itu, berlaku

Sifat 4.2

$$360^\circ = 2\pi\ rad \textbf{ atau } 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\ rad \textbf{ atau } 1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57{,}3^\circ$$

Dari Sifat 4.2, dapat disimpulkan sebagai berikut.

- Konversi x derajat ke *radian* dengan mengalikan $x \times \dfrac{\pi}{180^\circ}$.

  Misalnya, $45^\circ = 45^\circ \times \left(\dfrac{\pi}{180^\circ}\right) rad = \dfrac{\pi}{4} rad$.

- Konversi x *radian* ke derajat dengan mengalikan $x \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$.

  Misalnya, $\dfrac{3}{2}\pi\ rad = \dfrac{3}{2}\pi \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$.

Contoh 4.1

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini.

1. $\dfrac{1}{4}$ putaran = $\dfrac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$ atau $90^\circ = 90 \times \dfrac{\pi}{180} rad = \dfrac{1}{2}\pi\ rad$.
2. $\dfrac{1}{3}$ putaran = $\dfrac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$ atau $120^\circ = 120 \times \dfrac{\pi}{180} rad = \dfrac{2}{3}\pi\ rad$.
3. – putaran = $\dfrac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$ atau $180^\circ = 180 \times \dfrac{\pi}{180} rad = \pi\ rad$.
4. 4 putaran = $4 \times 360^\circ = 1.440^\circ$ atau $1.440^\circ = 1.440 \times \dfrac{\pi}{180} rad = 8\pi\ rad$
5. 5 putaran = $5 \times 360^\circ = 1.800^\circ$ atau $1.800^\circ = 1.800 \times \dfrac{\pi}{180} rad = 10\pi\ rad$.

6. $225^{o} = 225^{o} \times \dfrac{1}{360^{o}}$ putaran $= \dfrac{5}{8}$ putaran **atau** $225^{o} = 225^{o} \times \dfrac{\pi}{180^{o}}\, rad = \dfrac{5}{4}\pi\ rad$

7. $1.200^{o} = 3 \times 360^{o} + 120^{o} = \left[\left(3\times 360^{o}\right)\times\dfrac{1}{360^{o}}+\left(120^{o}\right)\times\dfrac{1}{360^{o}}\right]$putaran

$$= \left[3+\frac{1}{3}\right]\text{putaran } = 3\ \frac{1}{3}\ \text{putaran}$$

8. Pada saat pukul 11.00, berarti jarum panjang pada jam menunjuk ke angka 12 dan jarum pendek pada jam menunjuk ke angka 11. Artinya besar sudut yang terbentuk oleh setiap dua angka yang berdekatan adalah 30^{o}.

$$30^{o} = 30^{o} \times \frac{\pi}{180^{o}}\, rad = \frac{1}{6}\pi\ rad$$

9. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka setiap satu detik pemancar berputar sebanyak 3.600 putaran.

> 360^{o} pertama kali diperkenalkan oleh bangsa Babilonia. Hal ini merupakan hitungan satu tahun pada kalender.

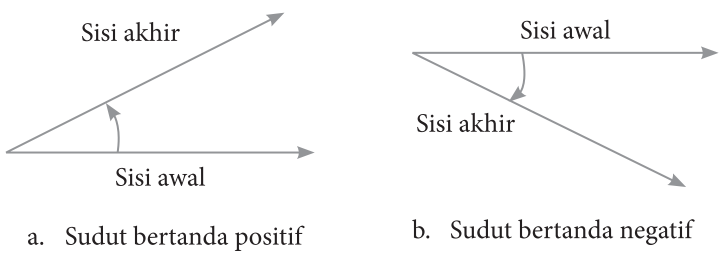
Selanjutnya, dalam pembahasan topik selanjutnya terdapat beberapa sudut (sudut istimewa) yang sering digunakan. Secara lengkap disajikan dalam tabel berikut ini, tetapi kamu masih harus melengkapinya.

Tabel 4.1 Sudut istimewa yang sering digunakan

Derajat	Radian	Derajat	Radian
0^{o}	$0\ rad$	90^{o}	$\frac{\pi}{2}\ rad$
30^{o}	$\frac{\pi}{6}\ rad$	120^{o}	$\frac{2\pi}{3}\ rad$
45^{o}	$\frac{\pi}{4}\ rad$	135^{o}	$\frac{3\pi}{4}\ rad$
60^{o}	$\frac{\pi}{3}\ rad$	150^{o}	$\frac{5\pi}{6}\ rad$

Derajat	Radian	Derajat	Radian
180º	πrad	270º	$\frac{3\pi}{2} rad$
210º	$\frac{7\pi}{6} rad$	300º	$\frac{5\pi}{3} rad$
225º	$\frac{5\pi}{4} rad$	315º	$\frac{7\pi}{4} rad$
240º	$\frac{4\pi}{3} rad$	330º	$\frac{11\pi}{6} rad$

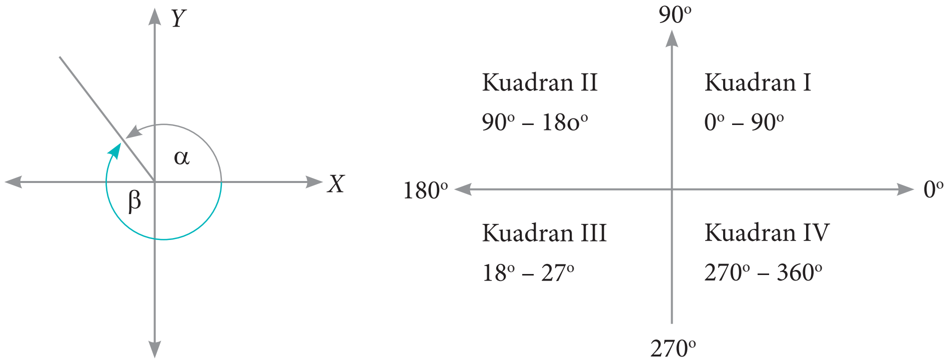
Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda "***positif***" jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda "***negatif***" jika arah putarannya searah dengan arah putaran jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



Gambar 4.3 Sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut ***standar*** (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0º, 90º, 180º, 180º, 270º, dan 360º.

Sebagai catatan bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf-huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*) dan θ (*tetha*) juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti *A*, *B*, *C*, dan *D*. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α, maka sudut β disebut sudut *koterminal*, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.



a. Sudut baku dan sudut koterminal

b. Besar sudut pada setiap kuadran

Gambar 4.4 Sudut secara geometri dan pembatasan kuadran

Untuk memantapkan pemahaman kamu akan sudut baku dan pembatas kuadran, cermati contoh dan pembahasan di bawah ini.

Contoh 4.2

Gambarkan sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

a. 60°

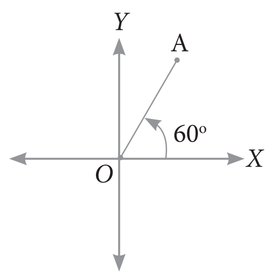
b. -45°

c. 120°

d. 600°

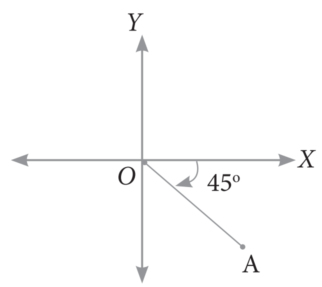
Alternatif Penyelesaian

a.



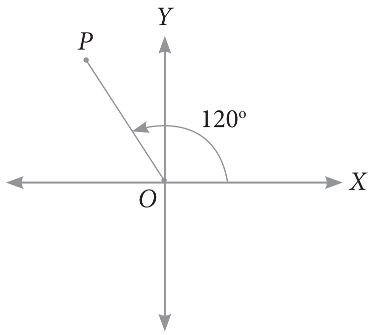
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OA* terletak di kuadran I.

b.



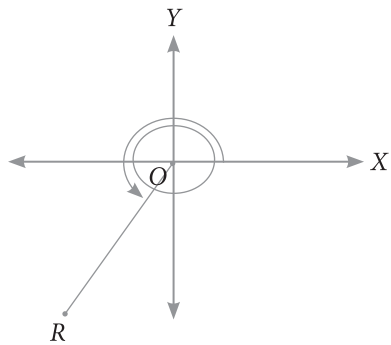
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OA* terletak di kuadran IV.

c.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OP terletak di kuadran II.

d.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OR terletak di kuadran III.

Gambar 4.5 Sudut pada setiap kuadran

Uji Kompetensi 4.1

1. Tentukan nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini. Berikan penjelasan untuk setiap jawaban yang diberikan.

   a. $\frac{1}{6}$ putaran = 0,33π *rad* = 60°

   b. 150° = putaran = $\frac{2}{3}\pi$ *rad*

   c. $4\frac{2}{5}\pi$ *rad* = 792° = 2,4 putaran

   d. 1.500° = 8π *rad* = 4 putaran

   e. Seorang atlet berlari mengelilingi lintasan *A* berbentuk lingkaran sebanyak 2 putaran. Hal itu sama saja dengan atlet berlari mengelilingi satu kali lintasan *B* berbentuk lingkaran yang jari-jarinya 2 kali jari-jari lintasan *A*.

2. Diketahui besar sudut α kurang dari 90° dan besar sudut θ lebih dari atau sama dengan 90° dan kurang dari 180°. Analisislah kebenaran setiap pernyataan berikut ini.

   a. $2\alpha \geq 90°$

   b. $\theta - \alpha \geq 30°$

   c. $2\alpha + \frac{1}{2}\theta \geq 90°$

   d. Tidak ada nilai α dan θ yang memenuhi persamaan $2\theta - 2\alpha = \theta + \alpha$

3. Berikut ini merupakan besar sudut dalam satuan derajat, tentukan kuadran setiap sudut tersebut.

   a. 90°
   b. 135°
   c. 225°
   d. 800°
   e. -270°
   f. 1.800°

   Selanjutnya, nyatakan setiap sudut di atas dalam satuan radian.

4. Tentukan (dalam satuan derajat dan radian) untuk setiap rotasi berikut.

a. $\frac{1}{9}$ putaran

b. $\frac{3}{8}$ putaran

c. $\frac{1}{5}$ putaran

d. $\frac{9}{8}$ putaran

e. $\frac{3}{4}$ putaran

f. $\frac{7}{6}$ putaran

5. Nyatakan dalam radian besar sudut yang dibentuk untuk setiap penunjukan waktu berikut.

a. 12.05

b. 00.15

c. 16.53

d. 05.57

e. 20.27

f. 07.30

6. Misalkan θ merupakan sudut lancip dan sudut β adalah sudut tumpul. Perhatikan kombinasi setiap sudut dan kedua sudut tersebut dan tentukan kuadrannya.

a. 3θ

b. 2β

c. $\theta + \beta$

d. $2\beta - \theta$

7. Perhatikan pergerakan jarum jam. Berapa kali (jika ada) dalam 1 hari terbentuk sudut-sudut di bawah ini?

a. 90^o

b. 180^o

c. 30^o

d. 120^o

8. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk derajat

a. $\frac{\pi}{12}$ rad

b. $\frac{5\pi}{7}$ rad

c. $\frac{3\pi}{5}$ rad

d. $\frac{7\pi}{8}$ rad

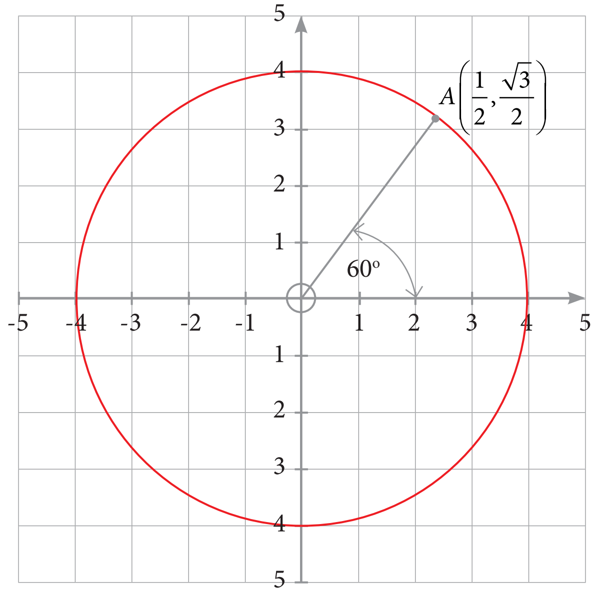
e. $\frac{7\pi}{15}$ rad

f. $\frac{8\pi}{9}$ rad

9. Gambarkan setiap ukuran sudut di bawah ini dalam koordinat kartesius.

a. 120^o
b. 600^o
c. 270^o
d. -240^o
e. 330^o
f. -800^o

10. Perhatikan gambar di bawah ini.



Selidiki dan tentukan koordinat titik jika dirotasi sejauh

a. 90^o
b. 180^o
c. 270^o
d. 260^o

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, *trigonon* artinya tiga sudut, dan *metro* artinya mengukur. Ilmuwan Yunani di masa Helenistik, **Hipparchus** (190 B.C – 120 B.C) diyakini adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang trigonometri dari keingintahuannya akan dunia. Matematikawan Yunani lainnya, **Ptolemy** sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut. Matematikawan Silesia **Bartholemaeus Pitiskus** menerbitkan sebuah karya yang berpengaruh tentang trigonometri pada 1595 dan memperkenalkan kata ini ke dalam bahasa Inggris dan Perancis.

Hippachus
(190 B.C. – 120 B.C.)

Adapun rumusan sinus, cosinus juga tangen diformulasikan oleh **Surya Siddhanta**, ilmuwan India yang dipercaya hidup sekitar abad 3 SM. Selebihnya teori tentang Trigonometri disempurnakan oleh ilmuwan-ilmuwan lain di jaman berikutnya.

Sumber: *https://en.wikipedia.org/wiki*

Pada peradaban kehidupan budaya Dayak, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan.

Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya. Apakah para Arsitektur tersebut mempelajari trigonometri juga?

Sumber: http://www.jualsewarumah.com

Gambar 4.6 Rumah adat suku Dayak

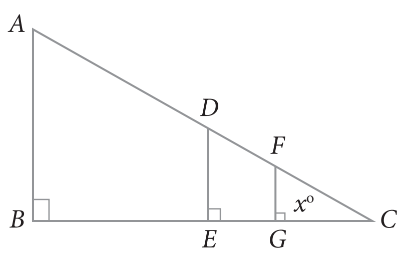
Pada subbab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku.

Coba kamu pahami deskripsi berikut.

Masalah 4.1

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda di tanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 3 m dan 15 m.Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika kamu sebagai Dani, dapatkah kamu mengukur bayangan kamu sendiri*?

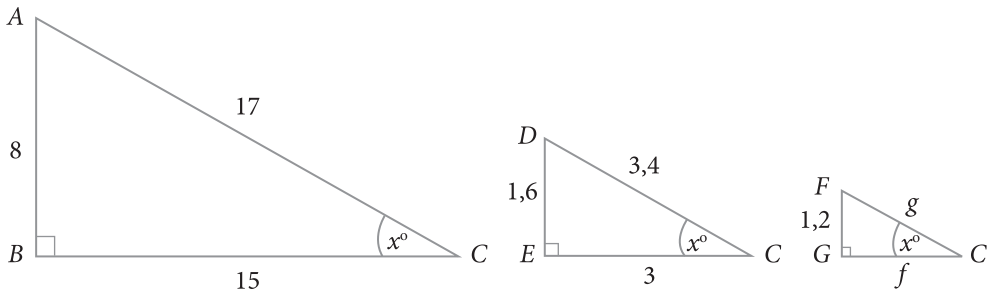
Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.



Dimana:
AB = tinggi tiang bendera (8 m)
BG = panjang bayangan tiang (15 m)
DC = tinggi pak Yahya (1,6 m)
CG = panjang bayangan pak Yahya (3 m)
EF = tinggi Dani (1,2 m)
FG = panjang bayangan Dani (4,8 m)

Gambar 4.7 Segitiga sebangun

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga segitiga, yaitu ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC sebagai berikut.



Gambar 4.8 Kesebangunan

Karena ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC adalah sebangun, maka berlaku

$$\frac{FG}{DE} = \frac{GC}{EC} = \frac{1,2}{1,6} = \frac{f}{3} \Rightarrow f = 2,25.$$

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh nilai dari

$$FC = g = \sqrt{6,5025} = 2,55 .$$

Berdasarkan ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $\dfrac{FG}{FC} = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1,2}{2,55} = \dfrac{1,6}{3,4} = \dfrac{8}{17} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,47.$

Perbandingan ini disebut dengan sinus sudut C, ditulis $\sin x^0 = \dfrac{8}{17}$.

b. $\dfrac{GC}{FC} = \dfrac{EC}{DC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2,25}{2,55} = \dfrac{3}{3,4} = \dfrac{15}{17} = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,88.$

Perbandingan ini disebut dengan cosinus sudut C, ditulis $\cos x^0 = \dfrac{15}{17}$.

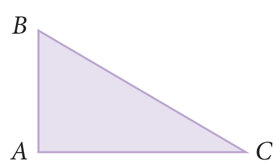
c. $\dfrac{FG}{GC} = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1,2}{2,25} = \dfrac{1,6}{3} = \dfrac{8}{15} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}} = 0,53.$

Perbandingan ini disebut dengan tangen sudut C, ditulis $\tan x^0 = \dfrac{8}{15}$.

Hubungan perbandingan sudut (lancip) dengan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 4.1

1. Sinus C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring segitiga, ditulis $\sin C = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$



2. *Cosinus C* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di samping sudut dengan sisi miring segitiga, $\cos C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$

3. *Tangen C* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, ditulis $\tan C = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}$

4. *Cosecan C* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring segitiga dengan sisi di depan sudut, ditulis $\csc C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau $\csc C = \dfrac{1}{\sin C}$

5. *Secan C* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring segitiga dengan sisi di samping sudut, ditulis $\sec C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di samping sudut}}$ atau $\sec C = \dfrac{1}{\cos C}$

6. *Cotangen C* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, ditulis $\text{cotan}\ C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau $\cot C = \dfrac{1}{\tan C}$

Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, prinsip matematika lain yang perlu diingat kembali adalah Teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring segitiga, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. Oleh karena yang telah didefinisikan perbandingan sudut untuk sudut lancip *C*, sekarang giliranmu untuk merumuskan keenam jenis perbandingan sudut lancip A.

Contoh 4.3

Diberikan segitiga siku-siku *ABC*, $\sin A = \dfrac{1}{3}$. Tentukan $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$, $\cos C$, dan $\cot C$.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $\sin A = \frac{1}{3}$, artinya $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$. Lebih tepatnya, panjang sisi (BC) di depan sudut A dan panjang sisi miring (AC) segitiga ABC memiliki perbandingan 1 : 3, lihat Gambar 4.9.

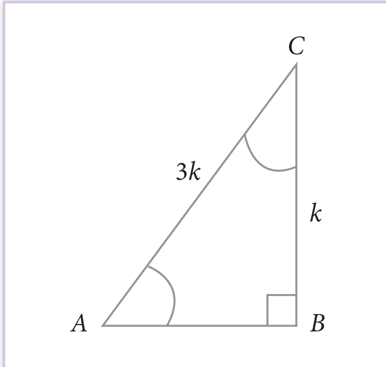
Untuk menentukan nilai cos A, tan A, sin C, cos C, dan cot C, kita memerlukan panjang sisi AB. Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(3k)^2 - (k)^2}$$

$$= \sqrt{9k^2 - k^2} = \sqrt{8k^2}$$

$$= \pm 2\sqrt{2}k$$



Gambar 4.9 Segitiga siku-siku *ABC*

Jadi, kita memperoleh panjang sisi $AB = 2\sqrt{2}k$. (Mengapa bukan $-2\sqrt{2}k$?)

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita peroleh

- $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2\sqrt{2}k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
- $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$
- $\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2\sqrt{2}k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

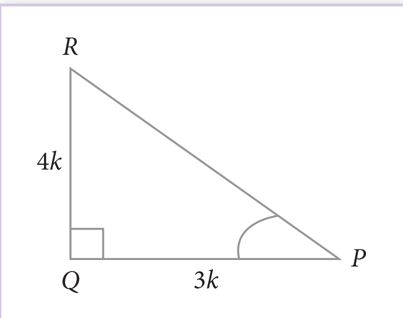
> **Perlu Diingat**
>
> Panjang sisi miring adalah sisi terpanjang pada suatu segitiga siku-siku. Akibatnya nilai sinus dan cosinus selalu kurang dari 1 (pada kondisi khusus akan bernilai 1).

Mari kita cermati kembali contoh berikut ini.

Contoh 4.4

Pada suatu segitiga siku-siku *PQR*, dengan siku-siku di *Q*, tan $P = \frac{4}{3}$. Hitung nilai perbandingan trigonometri yang lain untuk sudut *P*.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.10 Segitiga siku-siku *PQR*

Kita ketahui tan $P = \frac{4}{3}$, artinya tan $P = \frac{QR}{PQ} = \frac{4}{3}$.

Akibatnya, jika $QR = 4k$ dan $PQ = 3k$, dengan k adalah bilangan positif.

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$\Rightarrow \quad PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$$

$$= \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2}$$

$$= \sqrt{25k^2}$$

$$PR = 5k$$

Sekarang gunakan Definisi 4.1 untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri yang lain, yaitu

a. $\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5} = 0,2$

b. $\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} = 0,6$

c. $\csc P = \frac{PR}{RQ} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4} = 1,25$

d. $\sec P = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{5k}{3k} = \dfrac{5}{3} = 1{,}66$

e. $\cot P = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Selanjutnya kamu akan mengkaji bagaimana penerapan konsep perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah kontekstual.

Mari kita cermati dan pahami masalah berikut.

Masalah 4.2

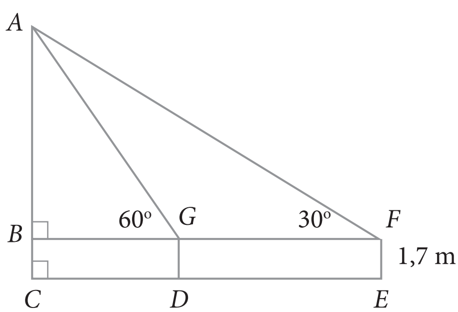
Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60° dan guru kedua 30° dapatkah kamu menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.11 Tiang bendera

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah suatu titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh suatu titik, maka dapat diperoleh Gambar 4.12 sebagai berikut.



Dimana:
AC = tinggi tiang bendera
DG = tinggi guru pertama
EF = tinggi guru kedua
DE = jarak kedua guru

Gambar 4.12 Model masalah tiang bendera

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas, maka kita memiliki perbandingan sebagai berikut.

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BG} \qquad \Leftrightarrow BG = \frac{AB}{\tan 60^\circ}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{10+BG} \qquad \Leftrightarrow AB = (10 + BG) \times \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60^\circ}\right) \times \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ = (10 \times \tan 60^\circ + AB) \times \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ + AB \times \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ - AB \times \tan 30^\circ = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB \times (\tan 60^\circ - \tan 30^\circ) = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}$$

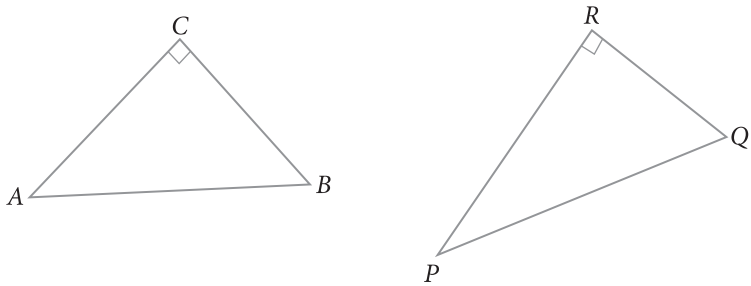
Jadi, tinggi tiang bendera adalah

$$AC = AB + BC \text{ atau } AC = \left(\frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} + 1{,}7\right) \text{m}$$

Untuk menentukan nilai tan 60° dan tan 30° akan dibahas pada subbab selanjutnya. Dengan demikian, tinggi tiang bendera dapat ditemukan.

Contoh 4.5

Diketahui segitiga siku-siku ABC dan PQR, seperti gambar berikut ini.



Gambar 4.13 Dua segitiga siku-siku yang sebangun

Jika sin B = sin Q, maka buktikan bahwa $\angle B = \angle Q$.

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 4.13, diperoleh

$\sin B = \dfrac{AC}{AB}$ dan $\sin Q = \dfrac{PR}{PQ}$

Akibatnya, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PR}{PQ}$ atau $\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ}$, dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh bahwa

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(k.PQ)^2 - (k.PR)^2}$$
$$= \sqrt{k^2.\left[(PQ)^2 - (PR)^2\right]} = k.\sqrt{(PQ)^2 - (PR)^2}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

Dengan demikian,

$$\frac{BC}{QR} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$$

Akibatnya diperoleh

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = k$$

Karena perbandingan sisi-sisi kedua segitiga sama, maka $\angle B = \angle Q$.

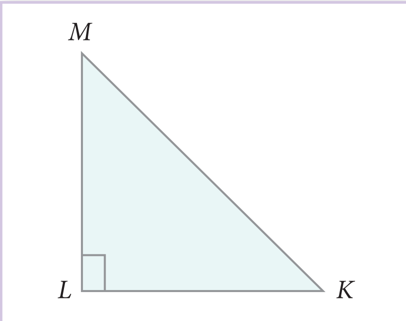
Perhatikan contoh berikut. Temukan pola dalam menentukan setiap pernyataan terkait perbandingan trigonometri.

Contoh 4.6

Diketahui suatu segitiga siku-siku KLM, $\angle L = 90^o$, dan $\tan M = 1$.

Hitung nilai dari $(\sin M)^2 + (\cos M)^2$ dan $2 . \sin M . \cos M$.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.14 Segitiga siku-siku *KLM*

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, coba cermati gambar berikut ini.

Diketahui tan $M = 1$, artinya;

$$\tan M = 1 \Rightarrow \frac{KL}{LM} = 1 \text{ atau } KL = LM = k,$$

dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$KM = \sqrt{LM^2 + LM^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2}$$
$$= k\sqrt{2}$$

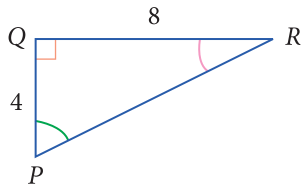
Akibatnya, $\sin M = \dfrac{KL}{KM} = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ atau $(\sin M)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

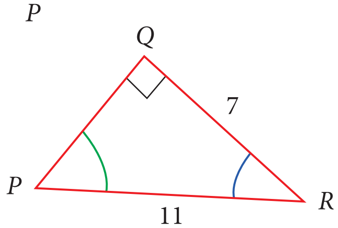
$\cos M = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ atau $(\cos M)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

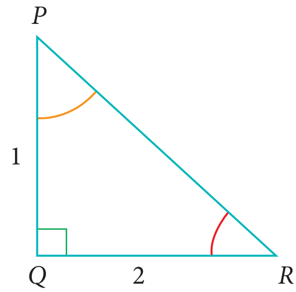
Jadi, $(\sin M)^2 + (\cos M)^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ dan $2 \cdot \sin M \cdot \cos M = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Uji Kompetensi 4.2

1. Tentukan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut P dan R pada setiap segitiga siku-siku di bawah ini. Nyatakan jawaban kamu dalam bentuk paling sederhana.

a. 

b. 

c. 

2. Pada suatu segitiga siku-siku ABC, dengan $\angle B = 90^o$, $AB = 24$ cm, dan $BC = 7$ cm, hitung:

a. sin A dan cos A

b. sin C, cos C, dan tan C

3. Untuk setiap nilai perbandingan trigonometri yang diberikan di bawah ini, dengan setiap sudut merupakan sudut lancip, tentukan nilai 5 macam perbandingan trigonometri lainnya.

a. $\sin \text{A} = \dfrac{3}{4}$

b. $15 \times \cot A = 8$

c. $\sec \theta = \dfrac{13}{12}$

d. $\tan \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e. $\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

f. $\cos \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. Pada sebuah segitiga KLM, dengan siku-siku di L, jika $\sin M = \dfrac{2}{3}$ dan panjang sisi $KL = \sqrt{10}$ cm, tentukan panjang sisi segitiga yang lain dan nilai perbandingan trigonometri lainnya.

5. Luas segitiga siku-siku RST, dengan sisi tegak RS adalah 20 cm^2. Tentukan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut lancip T

6. Jika $\cot\theta = \dfrac{7}{8}$, hitung nilai dari:

   a. $\dfrac{(1+\sin\theta).(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta).(1-\cos\theta)}$

   b. $\dfrac{1-(\tan\theta)^2}{1+(\tan\theta)^2}$

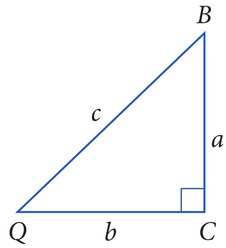
7. Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.

   Tunjukkan bahwa

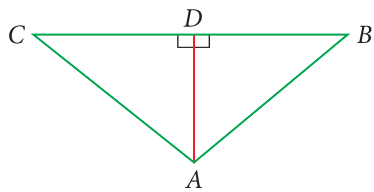
   a) $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

   b) $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

   c) $(\mathrm{scs}\ A)^2 - (\cot A)^2 = 1$



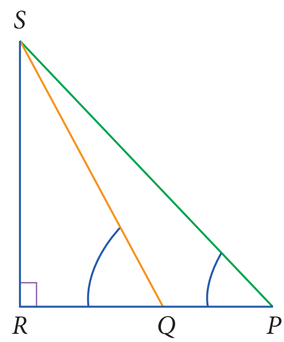
8. Dalam segitiga ABC, siku-siku di A diketahui panjang $BC = a$, (a adalah bilangan positif) dan $\cos\angle ABC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Tentukan panjang garis tinggi AD.



9. Diketahui $\sin x + \cos x = 3$ dan $\tan x = 1$, tentukan nilai $\sin x$ dan $\cos x$.

10. Pada segitiga PQR, siku-siku di Q, $PR + QR = 25$ cm, dan $PQ = 5$ cm. Hitung nilai $\sin P$, $\cos P$, dan $\tan P$.

11. Diketahui segitiga PRS, seperti gambar di samping ini. Panjang $PQ = 1$, $\angle RQS = \alpha$ rad dan $\angle RPS = \beta$ rad. Tentukan panjang sisi RS.



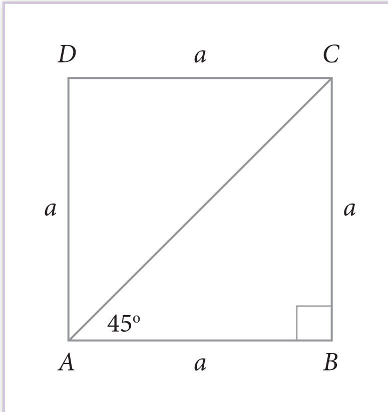
4.3 Nilai Perbandingan Trigonometri untuk 0°, 30°, 45°, 60° dan 90°

Pada saat mempelajari teori trigonometri, secara tidak langsung kamu harus menggunakan beberapa teori geometri. Dalam geometri, khususnya dalam kajian konstruksi sudah tidak asing lagi dengan penggunaan besar sudut 30°, 45°, dan 60°. Pada subbab ini, kamu akan menyelidiki dan menghitung nilai perbandingan trigonometri untuk ukuran sudut 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°.

Masalah 4.3

Diketahui suatu persegi *ABCD* dengan ukuran *a* (*a* adalah bilangan positif). Dibentuk garis diagonal *AC* sedemikian sehingga membentuk sudut dengan *AB*, seperti Gambar 4. 15.

Temukan nilai sin 45°, cos 45°, dan tan 45°.



Gambar 4.15 Persegi *ABCD*

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut 45°, coba cermati segitiga siku-siku *ABC*.

Untuk menentukan nilai sin 45°, cos 45°, dan tan 45°, perlu diingat kembali Definisi 4.1. Untuk menentukan panjang *AC*, gunakan Teorema Phytagoras, yaitu

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2a$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Dengan demikian, diperoleh:

- $\sin 45^\circ = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

- $\tan 45^o = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$

Mengingat kembali Definisi 4.1, terdapat cara lain untuk menentukan nilai tan 45º, yaitu

$$\tan 45^o = \frac{\sin 45^o}{\cos 45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Dengan nilai di atas, bukanlah sesuatu hal yang sulit untuk menentukan nilai sec 45º, csc 45º, dan cot 45º.

$$\sec 45^o = \sec 45^o = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ atau}$$

$$\sec 45^o = \frac{1}{\cos 45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^o = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ atau}$$

$$\csc 45^o = \frac{1}{\sin 45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^o = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1 \text{ atau } \cot 45^o = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

Jadi, dapat disimpulkan

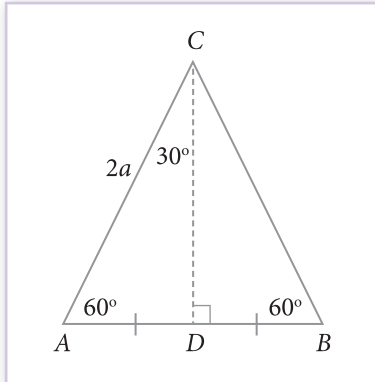
$\sin 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cot 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^o = 1$
$\csc 45^o = \sqrt{2}$	$\sec 45^o = \sqrt{2}$	$\cot 45^o = 1$

Masalah 4.4

Diberikan segitiga sama sisi ABC, dengan panjang sisi $2a$ satuan (a adalah bilangan positif). D adalah titik tengah sisi AB, seperti Gambar 4.16.

Hitung nilai:

sin 30°, cos 30°, tan 30°, sin 60°, cos 60°, dan tan 60°.



Gambar 4.16 Segitiga sama sisi *ABCD*

Alternatif Penyelesaian

Mari cermati segitiga sama sisi ABC.

Karena D merupakan titik tengah sisi AB, maka $AD = \frac{1}{2}AB = a$.

Dengan demikian, kita peroleh

$$\Delta ACD \cong \Delta BCD, \text{(simbol } \cong \text{ dibaca: kongruen)}$$

$$AD = BD = a$$

$$\angle ACD = \angle DBC = 30^\circ$$

Dengan demikian, $\angle ACD$ dan ΔBCD adalah segitiga siku-siku.

Kita fokus pada ΔACD.

Diketahui bahwa $AC = 2a$, $AD = a$, dengan menggunakan Teorema Phytagoras, dapat ditentukan panjang sisi CD, yaitu

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$

dan $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$

a. Untuk $\angle ACD = 30^\circ$, maka nilai perbandingan trigonometri (menggunakan Definisi 4.1),

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \csc 30^o = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\cos 30^o = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sec 30^o = \frac{AC}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^o = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 30^o = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

b. Untuk $\angle CAD = 60^o$, maka nilai perbandingan trigonometri (menggunakan Definisi 4.1), yaitu

$$\sin 60^o = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \csc 60^o = \frac{AC}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^o = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sec 60^o = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\tan 60^o = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 60^o = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

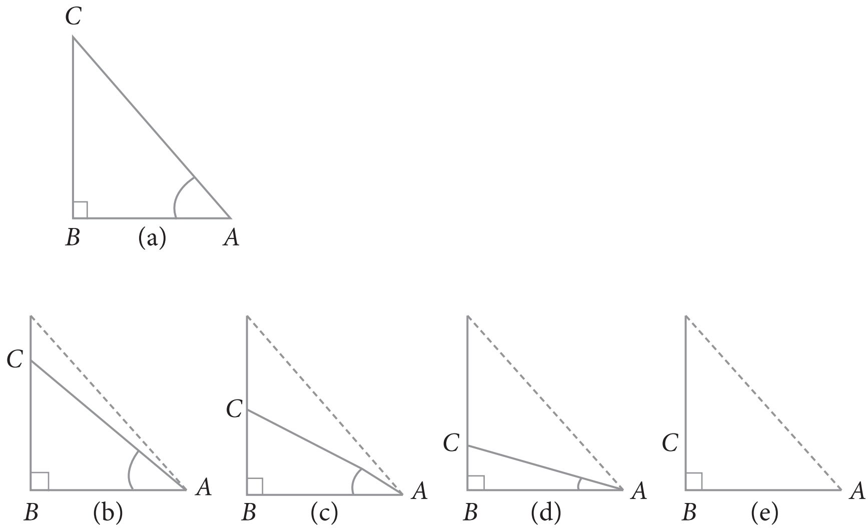
Masalah 4.5

Diberikan suatu ΔABC, siku-siku di B, misalkan $\angle BAC = \alpha$, dimana α merupakan sudut lancip.

Apa yang kamu peroleh jika α mendekati 0^o? Apa pula yang terjadi jika α mendekati 90^o?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui ΔABC, merupakan segitiga siku-siku, dengan $\angle B = 90^o$. Gambar 4.17 merupakan ilustrasi perubahan $\angle B = \alpha$ hingga menjadi nol.



Gambar 4.17 Ilustrasi perubahan $\angle B$ segitiga siku-siku *ABC* menjadi 0°

Pada waktu memperkecil $\angle A$, mengakibatkan panjang sisi BC juga semakin kecil, sedemikian sehingga AC hampir berimpit dengan AB. Jika $a = 0^o$, maka $BC = 0$, dan AC berimpit dengan AB.

Dari ΔABC (Gambar 4.17 (a)), kita memiliki

a. $\sin \alpha = \dfrac{BC}{AC}$, jika α mendekati 0^o, maka panjang BC mendekati 0.

   Akibatnya

   $\sin 0^o = \dfrac{0}{AC}$ atau $\sin 0^o = 0$

b. $\cos \alpha = \dfrac{BC}{AC}$, jika α mendekati 0^o, maka sisi AC hampir berimpit dengan sisi AB. Akibatnya

   $\cos 0^o = \dfrac{AB}{AB}$ atau $\cos 0^o = 1$

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri lainnya, yaitu

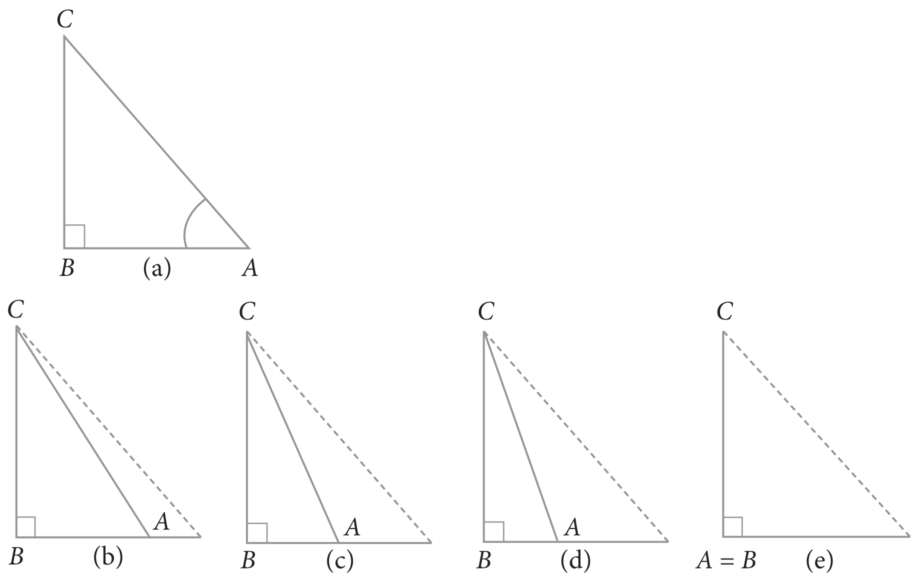
- $\tan 0^{o} = \dfrac{\sin 0^{o}}{\cos 0^{o}} = \dfrac{0}{1} = 0$

- $\csc 0^{o} = \dfrac{1}{\sin 0^{oo}} = \dfrac{1}{0}$ (*tak terdefinisi*)

- $\sec 0^{o} = \dfrac{1}{\cos 0^{oo}} = \dfrac{1}{1} = 1$

- $\cot 0^{o} = \dfrac{\cos 0^{o}}{\sin 0^{o}} = \dfrac{1}{0}$ (*tak terdefinisi*)

Selanjutnya, kita kembali mengkaji ΔABC. Kita akan cermati bagaimana perubahan segetiga tersebut jika α mendekati 90º. Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 4.18 Ilustrasi perubahan $\angle A$ segitiga siku-siku ABC menjadi 90º

Jika $\angle A$ diperbesar mendekati 90º, maka $\angle C$ diperkecil mendekati 0º. Akibatnya, sisi AC hampir berimpit dengan sisi BC.

Dari ΔABC, Gambar 4.18 (a), dapat kita tuliskan

a) $\sin \angle A = \dfrac{BC}{AC}$, karena diperbesar mendekati 90º, maka sisi AC hampir berimpit dengan BC. Akibatnya

sin 90º = atau sin 90º = 1

b) $\cos \angle A = \dfrac{AB}{AC}$, karena $\angle A$ diperbesar mendekati 90º, maka sisi AB hampir mendekati 0 atau titik A hampir berimpit dengan B. Akibatnya

$\cos 90^o = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{0}{BC}$ atau cos 90º = 0

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri yang lain, yaitu:

- $\tan 90^o = \dfrac{\sin 90^o}{\cos 90^o} = \dfrac{1}{0}$ (*tak terdefinisi*)
- $\csc 90^o = \dfrac{1}{\sin 90^{oo}} = \dfrac{1}{1} = 1$
- $\sec 90^o = \dfrac{1}{\cos 90^{oo}} = \dfrac{1}{0}$ (*tak terdefinisi*)
- $\cot 90^o = \dfrac{\cos 90^o}{\sin 90^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

Dari pembahasan Masalah 4.2, 4.3, dan 4.4, maka hasilnya dapat disimpulkan pada tabel berikut.

Tabel 4.2 Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa

	sin	**cos**	**tan**	**csc**	**sec**	**cot**
0º	0	1	0	~	1	~
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45º	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

	sin	cos	tan	csc	sec	cot
60º	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90º	1	0	~	1	~	0

Keterangan: Dalam buku ini, simbol ~ diartikan tidak terdefinisi

Contoh 4.7

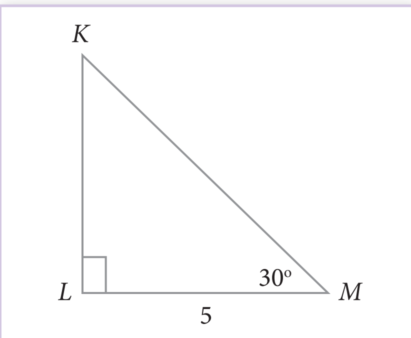
Diberikan suatu segitiga siku-siku *KLM*, siku-siku di *L*. Jika *LM* = 5 cm, dan $\angle M = 30^o$. Hitung:

a. panjang *KL* dan *MK*,

b. cos $\angle K$,

c. untuk setiap α (α adalah sudut lancip), selidiki hubungan nilai sin α dengan sin (90 – α).

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.19 Segitiga siku-siku *KLM*.

Untuk memudahkan dalam menyelesaikannya, tidak ada salahnya lagi perhatikan Gambar 4.19 berikut.

a. Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita mengartikan nilai perbandingan cos 30º, yaitu

$$\cos 30^o = \frac{LM}{MK}.$$

Dari Tabel 4.2, $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, akibatnya

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{MK} \Leftrightarrow MK = \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Selanjutnya, untuk menentukan panjang KL dapat dihitung dengan mencari sin 30º atau menggunakan Teorema Phytagoras, sehingga diperoleh $KL = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

b. Ada dua cara untuk menentukan nilai cos $\angle K$. Pertama, karena $\angle K = 90^o$ dan $\angle M = 30^o$, maka $\angle K = 60^o$. Akibatnya cos $60^o = \dfrac{1}{2}$ (Lihat Tabel 4.2).

Kedua, karena semua panjang sisi sudah dihitung dengan menggunakan Definisi 4.1, maka

$$\cos \angle K = \frac{KL}{MK} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{10\sqrt{3}}{3}K} = \frac{1}{2}$$

c. Untuk setiap segitiga berlaku bahwa

$\angle L + \alpha + \angle K = 180^o$, maka $\angle K = 180^o - (\alpha + 90^o) = (90^o - \alpha)$

Karena $\alpha = 30^o$, maka $(90^o - \alpha) = 60^o$. Oleh karena itu, dapat dituliskan bahwa

$\sin \alpha = \cos (90^o - \alpha)$, karena

$\sin 30^o = \cos (90^o - 30^o)$

$\sin 30^o = \cos 60^o$ (Lihat Tabel 4.2)

Sekarang, mari kita selidiki, jika $\alpha = 60^o$, maka

$\sin \alpha = \cos (90^o - \alpha)$, karena

$\sin 60^o = \cos (90^o - 60^o)$

$\sin 60^o = \cos 30^o$

Ternyata, pola tersebut juga berlaku untuk $\alpha = 0^o$, $\alpha = 45^o$, dan $\alpha = 90^o$

Jadi, diperoleh hubungan sinus dan cosinus. Jika $0^o \le \alpha \le 90^o$, maka $\sin \alpha = \cos ((90^o - \alpha)$

Contoh 4.8

Diketahui $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, $0^o < (A + B) < 90^o$, $A > B$

Hitung $\sin A$ dan $\tan B$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk memulai memecahkan masalah tersebut, harus dapat mengartikan $0^o < (A + B) < 90^o$, yaitu kita harus menentukan dua sudut A dan B, sedemikian sehingga $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ dan $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$

Lihat kembali Tabel 4.2, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ (α adalah sudut lancip), maka $\alpha = 60^o$

Jadi, diperoleh: $A + B = 60^o$ (1*)

Selanjutnya, dari Tabel 4.2, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (α adalah sudut lancip), maka $\alpha = 30^o$

Jadi, kita peroleh: $A - B = 30^o$ (2*)

Dari (1*) dan (2*), dengan cara eliminasi maka diperoleh $A = 45^o$ dan $B = 15^o$

Uji Kompetensi 4.3

1. Diketahui segitiga RST, dengan $\angle S = 90^o$, $\angle T = 60^o$, dan $ST = 6$ cm. Hitung:

a. Keliling segitiga RST

b. $(\sin \angle T)^2 + (\sin \angle R)^2$

2. Hitung nilai dari setiap pernyataan trigonometri berikut.

a. $\sin 60^o \times \cos 30^o + \cos 60^o \times \sin 30^o$

b. $2(\tan 45^o)^2 + (\cos 30^o) - (\sin 60^o)^2$

c. $\dfrac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \csc 30^o}$

d. $\dfrac{\sin 30^o + \tan 45^o - \csc 60^o}{\sec 30^o + \cos 60^o + \cot 45^o}$

e. $\dfrac{2\left(\cos 60^o\right)^2 + 4\left(\sec 30^o\right)^2 - \left(\tan 45^o\right)^2}{\left(\sin 30^o\right)^2 + \left(\cos 30^o\right)^2}$

3. Pilihanlah jawaban yang tepat untuk setiap pernyataan berikut ini. Berikan penjelasan untuk setiap pilihan kamu.

(i) $\dfrac{2 \times \tan 30^o}{1 + \left(\tan 30^o\right)^2}$....

A. $\sin 60^o$ B. $\cos 60^o$ C. $\tan 60^o$ D. $\sin 60^o$

(ii) $\dfrac{1 - \left(\tan 45^o\right)^2}{1 + \left(\tan 45^o\right)^2}$....

A. $\tan 90^o$ B. 1 C. $\sin 45^o$ D. 0

(iii) $\sin(2 \times A) = 2 \times \sin A$, bernilai benar untuk $A = ...$

A. 0^o B. 30^o C. 45^o D. 60^o

(iv) $\dfrac{2 \times \tan 30^o}{1 - \left(\tan 30^o\right)^2}....$

A. $\cos 60^o$ B. $\sin 60^o$ C. $\tan 60^o$ D. $\sin 60^o$

4. Jika $\tan(A + B) = \sqrt{3}$, $\tan(A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, dan $0^o < A + B \leq 90^o$. Tentukan A dan B.

5. Manakah pernyataan yang bernilai benar untuk setiap pernyataan di bawah ini.

a. $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

b. Nilai $\sin \theta$ akan bergerak naik pada saat nilai θ juga menaik, untuk $\theta^o \leq \theta \leq 90^o$

c. Nilai $\cos \theta$ akan bergerak naik pada saat nilai θ menurun, untuk $\theta^o \leq \theta \leq 90^o$

d. $\sin \theta = \cos \theta$, untuk setiap nilai $\theta = 0^o$

e. Nilai $\cot \theta$ tidak terdefinisi pada saat $\theta = 0^o$

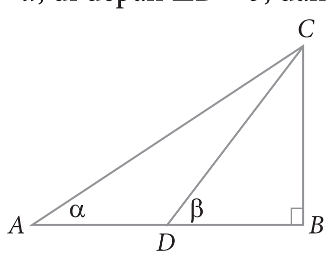
6. Jika $\dfrac{(\tan \beta)^2}{1 + \sec \beta}$, $0^o < \beta < 90^o$ hitung nilai β.

7. Jika $\sin x = a$ dan $\cos y = b$ dengan $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, dan $\dfrac{\pi}{2} < y < \pi$, maka hitung $\tan x + \tan y$. (UMPTN 98)

8. Pada suatu segitiga ABC, diketahui $a + b = 10$, $\angle A = 30^o$, dan $\angle B = 45^o$. Tentukan panjang sisi b.

(Petunjuk: Misalkan panjang sisi di depan $\angle A = a$, di depan $\angle B = b$, dan $\angle B = c$).

9. Diketahui segitiga ABC, siku-siku di B, $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$, dan $\tan \beta = 1$, seperti gambar berikut.

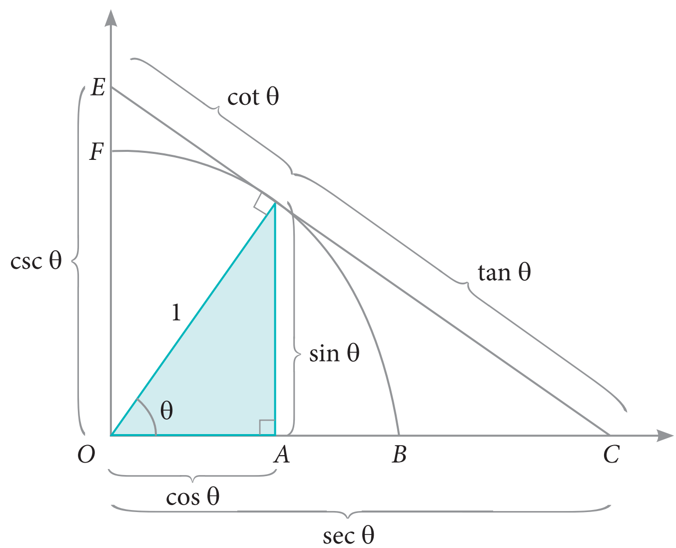


Jika $AD = a$, hitung:

a. AC

b. DC

10. Perhatikan gambar di bawah ini.



Buktikan

a. $OC = \sec\theta$

b. $CD = \tan\theta$

c. $OE = \csc\theta$

d. $DE = \cot\theta$

4.4 Relasi Sudut

Pada subbab ini, kita akan mempelajari hubungan nilai perbandingan trigonometri antardua sudut. Konsep yang telah kita miliki, yaitu Definisi 4.1 dan Tabel 4.2 yang akan digunakan untuk merumuskan relasi antardua sudut.

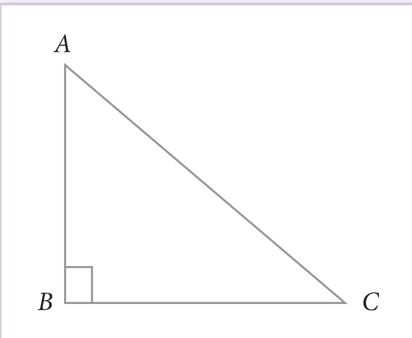
Coba cermati masalah berikut.

Masalah 4.6

Diketahui suatu segitiga *ABC*, siku-siku di *B* dengan $\angle A + \angle C = 90^o$

Selidiki hubungan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk $\angle A$ dan $\angle C$.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.20 Segitiga siku-siku *ABC*

Untuk memudahkan kita menyelidiki relasi nilai perbandingan trigonometri tersebut, perhatikan gambar di samping.

Karena $\angle A + \angle C = 90^o$,

maka $\angle C = 90^o - \angle A$

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita peroleh

$$\sin \angle A = \frac{AB}{AC}, \cos \angle A = \frac{BC}{AC},$$

$$\tan \angle A = \frac{AB}{BC}$$

Selain itu, dapat juga dituliskan

$$\sin (90^o - \angle A) = \frac{BC}{AC} = \cos \angle A$$

$$\cos (90^o - \angle A) = \frac{AB}{AC} = \sin \angle A, \text{ dan}$$

$$\tan (90^o - \angle A) = \frac{BC}{AB} = \cot \angle A$$

Jadi, relasi dua sudut yang lancip dapat dituliskan sebagai berikut.

Sifat 4.3

Jika $0^o \leq a \leq 90^o$, maka berlaku.

a. $\sin (90^o - a) = \cos a$

b. $\cos (90^o - a) = \sin a$

c. $\tan (90^o - a) = \cot a$

d. $\csc (90^o - a) = \sec a$

e. $\sec (90^o - a) = \csc a$

f. $\cot (90^o - a) = \tan a$

Contoh 4.9

a. Sederhanakan bentuk $\dfrac{\tan 65^o}{\cot 25^o}$

b. $\sin 3A = \cos (A - 26^o)$, dengan $3A$ adalah sudut lancip. Hitung A.

c. Nyatakan bentuk $\cot 85^o + \cos 75^o$ menjadi bentuk yang menggunakan perbandingan sudut di antara 0^o dan 45^o.

Alternatif Penyelesaian

a. Dari Sifat 4.3, diketahui bahwa $\cot A = \tan (90^o - A)$.

Akibatnya, $\cot 25^o = \tan (90^o - 25^o) = \tan 65^o$.

Jadi ,

$$\frac{\tan 65^o}{\cot 25^o} = \frac{\tan 65^o}{\tan 65^o} = 1$$

b. Diketahui $\sin 3A = \cos (A - 26^o)$. Dari Sifat 4.3, dan karena $3A$ adalah sudut lancip, maka $\sin 3A = \cos (90^o - 3A)$

Akibatnya, $\cos (90^o - 3A) = \cos (A - 26^o)$

$(90^o - 3A) = \cos (A - 26^o)$

$A = 26^o$

c. Dari Sifat 4.3, kita ketahui bahwa $\tan A = \cot (90^o - A)$, dan $\sin A = \cos (90^o - A)$. Dengan demikian, diperoleh

$\cot 85^o = \cot (90^o - 5^o) = \tan 5^o$, dan

$\cot 75^o = \cos (90^o - 15^o) = \sin 15^o$

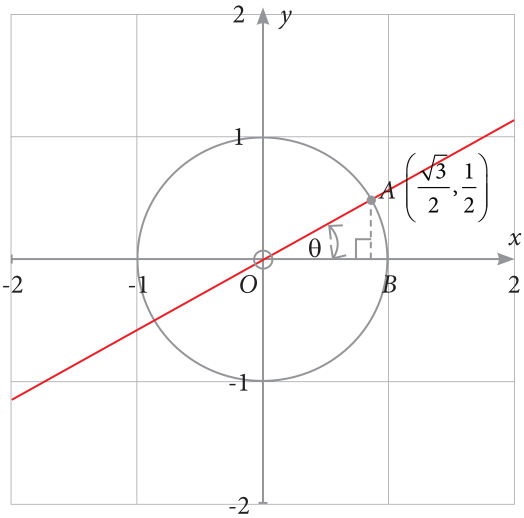
Jadi, $\cot 85^o + \cos 75^o = \tan 5^o + \sin 15^o$

Dengan modal konsep nilai perbandingan trigonometri untuk sudut lancip, selanjutnya, kita akan membahas nilai perbandingan trigonometri jika sudut θ adalah sudut tumpul.

Masalah 4.7

Diketahui grafik lingkaran dengan $r = 1$ satuan.

Terdapat titik A merupakan titik potong garis dengan lingkaran pada kuadran I. Sudut θ merupakan sudut lancip yang dibentuk jari-jari terhadap sumbu x. Misalnya, $\theta = 30^{o}$.



Gambar 4.21 Lingkaran dengan $r = OA$

Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\sin 30^{o} = \frac{AB}{OA}$$

$$\Leftrightarrow AB = OA \times \sin 30^{o}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^{o} = \frac{OB}{OA} \Leftrightarrow OB \times OA \times \cos 30^{o}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jadi, koordinat titik $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Dapatkah kamu selidiki bagaimana perubahan titik A jika diputar pada O berlawanan dengan arah putaran jarum jam sejauh 90°, 180°, dan 270°? Selanjutnya, selidiki perubahan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk setiap besar putaran.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui titik $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, berada di kuadran I. Tentu dengan mudah dapat kita pahami bahwa

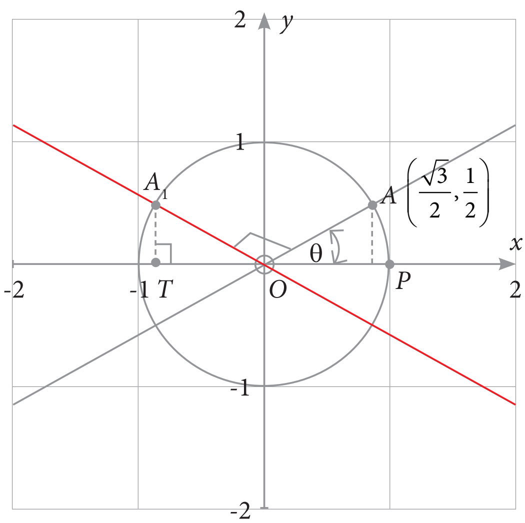
a. jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 90°, maka titik A berada di kuadran II;

b. jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 180°, maka titik A berada di kuadran III;

c. jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 270°, maka titik A berada di kuadran IV.

Sekarang kita akan mengkaji satu demi satu kejadian a, b, dan c.

a. Perubahan titik A sejauh 90°, disajikan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.22 Rotasi titik A pada O sejauh 90°.

Jika $\angle AOP = 30^o$, maka $\angle A_1OP = 30^o + 90^o = 120^o$

Akibatnya, kita peroleh $\angle TA_1O = 60^o$. Sekarang, coba cermati segitiga siku-siku A_1TO.

Perlu kamu ingat bahwa karena segitiga A_1TO berada di kuadran II, OT bertanda negatif, tetapi A_1T bertanda positif.

Akibatnya,

$$\sin 60^o = \frac{-OT}{OA_1} \Leftrightarrow OT = -OA_1 \times \sin 60^o$$

$$OT = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{A_1T}{OA_1} \Leftrightarrow A_1T = -OA_1 \times \cos 60^o$$

$$A_1T = \frac{1}{2}$$

Jadi, koordinat titik $A_1 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Akibatnya,

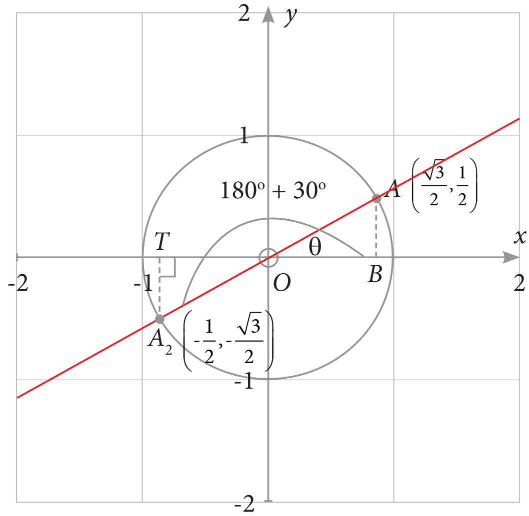
$$\tan 60^o = \frac{A_1T}{-OT} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

- $\sin (30^o + 90^o) = \sin 120^o = \cos 30^o = + \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos (30^o + 90^o) = \cos 120^o = - \sin 30^o = - \cos 60^o = -\frac{1}{2}$
- $\tan (30^o + 90^o) = \tan 120^o = - \cot 30^o = - \tan 60^o = -\sqrt{3}$

Untuk semakin memantapkan pengetahuanmu, silakan kamu lanjutkan untuk tiga perbandingan trigonometri lainnya.

b. Jika titik A di putar pada O sejauh 180°, maka perubahan titik A dideskripsikan sebagai berikut.



Gambar 4.23 Rotasi titik *A* pada *O* sejauh 180°

Dari gambar di atas, diperoleh

$\angle OA_2T = 30^\circ$

Cermati bahwa jika segitiga siku-siku OBA diputar pada O sejauh 180°, maka diperoleh segitiga siku-siku OTA_2

Akibatnya, $\sin \angle TOA_2 = \sin 30^\circ = \dfrac{-TA_2}{OA_2}$

$$\Leftrightarrow TA_2 = -\sin 30^\circ \times OA_2$$

$$\Leftrightarrow TA_2 = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \angle TOA_2 = \cos 30^\circ = \frac{-OT}{OA_2}$$

$$\Leftrightarrow OT = -\cos 30^\circ \times OA_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow OT = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jadi, koordinat titik $A_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Akibatnya,

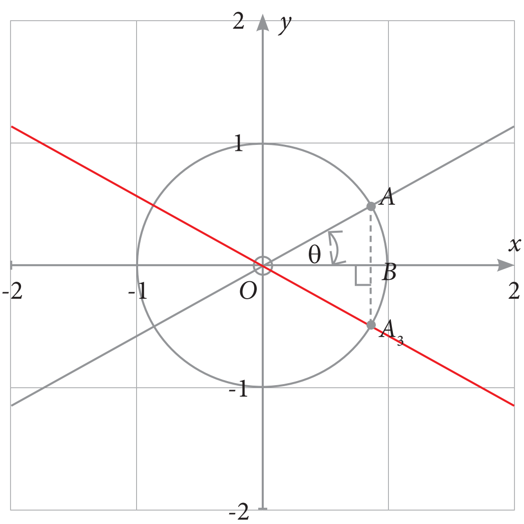
$$\tan \angle TOA_2 = \tan 30^o = \frac{-TA_2}{-OT} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

- $\sin (30^o + 180^o) = \sin 210^o = -\sin 30^o = -\frac{1}{2}$
- $\cos (30^o + 180^o) = \cos 210^o = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan (30^o + 180^o) = \tan 210^o = \tan 30^o = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Untuk tiga perbandingan trigonometri lainnya, silakan kamu temukan hubungannya.

c. Perubahan Titik A setelah diputar pada O sejauh 270^o, dideskripsikan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.24 Rotasi titik A pada O sejauh 270^o

Karena $\theta = 30^o$, maka jika titik A digeser sejauh 270^o, maka titik A_3 berada di kuadran IV. Akibatnya, $\angle BOA_3 = 60^o$ dan $\angle BA_3O = 30^o$, maka

$$\sin \angle OA_3B = \sin 30^o = \frac{OB}{OA_3}$$

$$\Leftrightarrow \text{OB} = \sin 30^o \times OA_3$$

$$\Leftrightarrow \text{OB} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\cos \angle BA_3O = \cos 30^o = \frac{-BA_3}{OA_3}$$

$$\Leftrightarrow BA_3 = -\cos 30^o \times OA_3$$

$$\Leftrightarrow BA_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dengan demikian, koordinat titik $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ dan

$$\tan \angle BA_3O = \tan 30^o = \frac{OB}{-BA_3} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

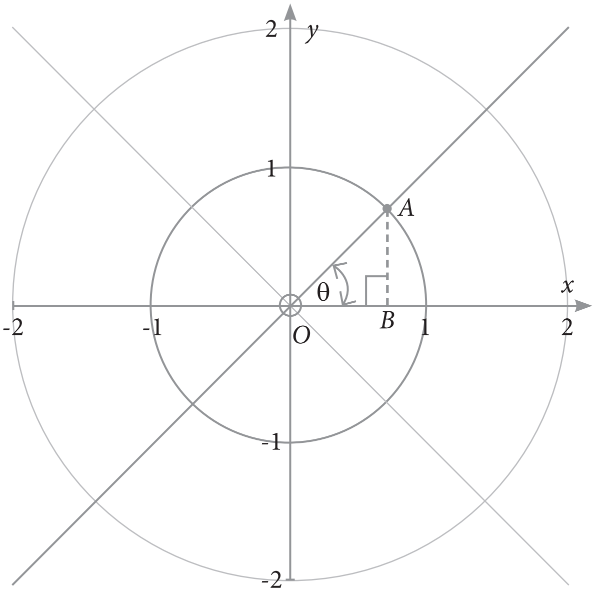
- $\sin (30^o + 270^o) = \sin 300^o = -\cos 30^o = -\sin 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos (30^o + 270^o) = \cos 300^o = \sin 30^o = \cos 60^o = \frac{1}{2}$
- $\tan (30^o + 270^o) = \tan 300^o = \cot 30^o = -\tan 60^o = -\sqrt{3}$

Silakan temukan tiga hubungan perbandingan trigonometri lainnya.

Masalah 4.8

Diketahui grafik lingkaran dengan $r = 1$ satuan.

Ada titik A merupakan titik potong garis dengan lingkaran pada kuadran I. Sudut θ merupakan sudut lancip yang dibentuk oleh jari-jari terhadap sumbu x. Misalnya, $\theta = 45^o$.



Gambar 4.25 Segitiga siku-siku *OAB* dan $\angle\theta$ = 45°

Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$\sin 45^o = \dfrac{AB}{OA}$

$\Leftrightarrow AB = OA \times \sin 45^o$

$\Leftrightarrow AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^o = \dfrac{OB}{OA}$

$\Leftrightarrow OB = OA \times \cos 45^o$

$\Leftrightarrow OB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Jadi, koordinat titik $A = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dapatkah kamu selidiki bagaimana perubahan titik *A* jika diputar berlawanan dengan arah putaran jarum jam sejauh 90°, 180°, dan 270°? Selanjutnya, selidiki perubahan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk setiap besar putaran. Apa kesimpulan yang dapat kamu tarik?

Alternatif Penyelesaian

Dari penjelasan Masalah 4.8, diketahui titik $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, berada di kuadran I.

Untuk itu dengan mudah dapat kita pahami hal-hal berikut.

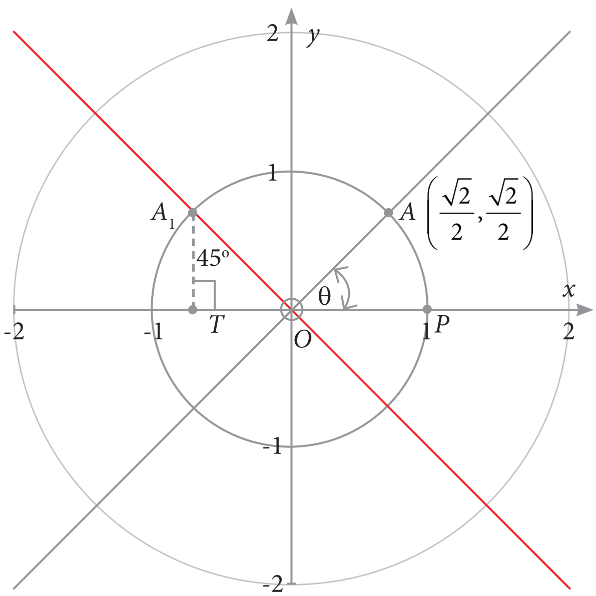
a. Jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 90°, maka titik A berada di kuadran II.

b. Jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 180°, maka titik A berada di kuadran III.

c. Jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 270°, maka titik A berada di kuadran IV.

Sekarang kita akan mengkaji satu-satu kejadian a, b, dan c.

a. Jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 90°, maka perubahan titik A disajikan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.26 Rotasi titik A pada O sejauh 90°

Jika $\angle AOP = 45°$, maka $\angle A_1OP = 45° + 90° = 135°$, sedemikian sehingga $\angle TA_1O = 45°$

Perlu kamu ingat bahwa segitiga A_1TO berada di kuadran II, TO bertanda negatif, tetapi A_1T bertanda positif, akibatnya

$$\sin 45^\circ = \frac{-OT}{OA_1} \Leftrightarrow -OT = OA_1 \times \sin 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow OT = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{A_1T}{OA_1} \Leftrightarrow A_1T = OA_1 \times \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow A_1T = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Jadi, koordinat titik $A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

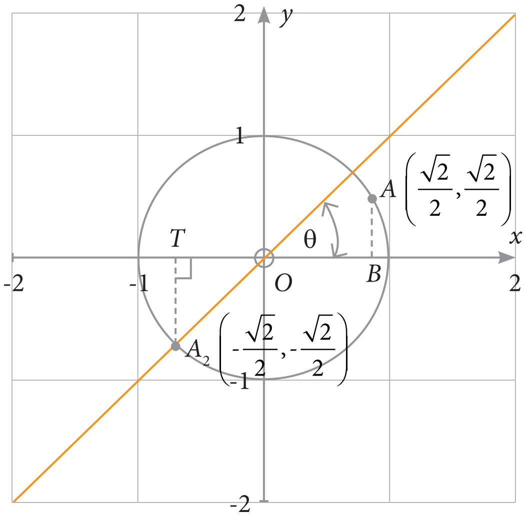
Dengan demikian, akan diperoleh $\tan 45^\circ = \dfrac{A_1T}{-OT} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

- $\sin (45^\circ + 90^\circ) = \sin 135^\circ = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos (45^\circ + 90^\circ) = \cos 135^\circ = -\sin 45^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\tan (45^\circ + 90^\circ) = \tan 135^\circ = -\cot 45^\circ = -\tan 45^\circ = -1$

Untuk tiga perbandingan lainnya, kamu diharapkan dapat menuntaskannya.

b. Jika titik A diputar (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 180°, maka perubahan titik A dideskripsikan pada Gambar 4.27. Dari gambar tersebut diperoleh bahwa $\angle OA_2T = 45^\circ$. Cermati bahwa jika segitiga siku-siku OAB diputar pada O sejauh 180°, maka diperoleh segitiga siku-siku OTA_2.



Gambar 4.27 Rotasi titik *A* pada *O* sejauh 180°

Akibatnya,

$A_2T = -OB = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dan

$OT = -AB = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Jadi, koordinat titik

$A_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Sekarang kita fokus pada segitiga OTA_2. Dari segitiga tersebut diperoleh

$$\sin \angle TA_2O = \sin 45^\circ = \frac{OT}{OA_2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \angle TA_2O = \cos 45^\circ = \frac{A_2T}{OA_2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

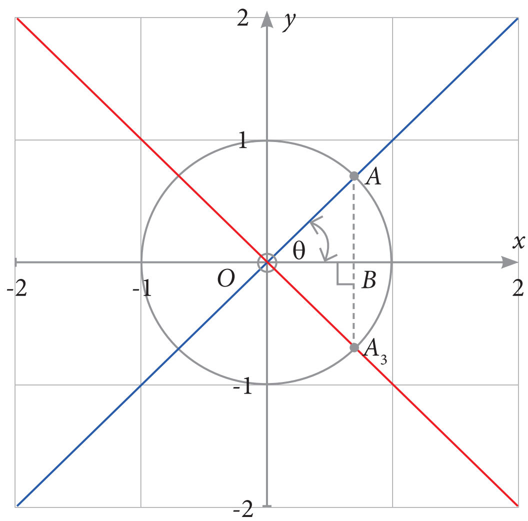
$$\tan \angle TA_2O = \tan 45^\circ = \frac{OT}{TA_2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

- $\sin (45^\circ + 180^\circ) = \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos (45^\circ + 180^\circ) = \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan (45^\circ + 180^\circ) = \tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$

Tentunya, kamu dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri lainnya.

c. Jika titik A diputar pada O (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 270º, perubahan titik A setelah diputar dideskripsikan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.28 Rotasi titik A pada O sejauh 270º

Karena $\theta = 45^o$, maka jika titik A digeser pada O sejauh 270º, maka titik A_3 berada di kuadran IV. Akibatnya, $\angle OA_3B = 45^o$, maka

$$\sin \angle OA_3B = \sin 45^o = \frac{OB}{OA_3}$$

$$\Leftrightarrow OB = \sin 45^o \times OA_3$$

$$\Leftrightarrow OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \angle OA_3B = \cos 45^o = \frac{-A_3B}{OA_3}$$

$$\Leftrightarrow A_3B = \cos 45^o \times OA_3$$

$$\Leftrightarrow A_3B = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dengan demikian, koordinat titik $A_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

dan $\tan \angle BOA_3 = \tan 45^o = \dfrac{OB}{-BA_3} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

- $\sin(45^o + 270^o) = \sin 315^o = -\cos 45^o = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(45^o + 270^o) = \cos 315^o = \sin 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan(45^o + 270^o) = \tan 315^o = \cot 45^o = -1$

Untuk melengkapi kesimpulan di atas, diharapkan kamu dapat menentukan tiga perbandingan trigonometri lainnya.

Untuk $\theta = 60^o$ dengan cara yang sama pada Masalah 4.8 dapat diperoleh kesimpulan bahwa

- $\sin(60^o + 90^o) = \sin 150^o = -\cos 60^o = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$
- $\cos(60^o + 90^o) = \cos 150^o = -\sin 60^o = -\cos 30^o = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\tan(60^o + 90^o) = \tan 150^o = -\cot 60^o = -\tan 30^o = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$
- $\sin(60^o + 180^o) = \sin 240^o = -\sin 60^o = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos(60^o + 180^o) = \cos 240^o = -\cos 60^o = -\dfrac{1}{2}$
- $\tan(60^o + 180^o) = \tan 240^o = \tan 60^o = \sqrt{3}$
- $\sin(60^o + 270^o) = \sin 330 = -\cos 60^o = -\sin 30^o = -\dfrac{1}{2}$
- $\cos(60^o + 270^o) = \cos 330^o = \sin 60^o = \cos 30^o = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\tan(60^o + 270^o) = \tan 330^o = -\cot 60^o = -\tan 30^o = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

Masalah 4.9

Diketahui grafik lingkaran dengan $r = 1$.

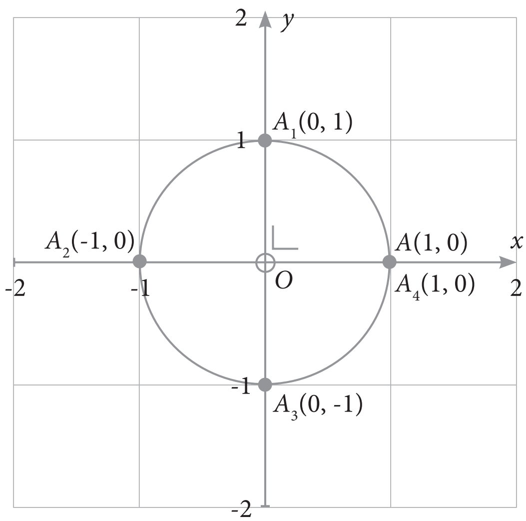
Misalkan titik $A(1, 0)$. Selidiki perubahan titik A jika diputar pada O (berlawanan dengan arah jarum jam) sejauh 180°, 270°, dan 360°.

Selanjutnya, simpulkan nilai sinus, cosinus, tangen untuk sudut-sudut 180°, 270°, dan 360°.

Alternatif Penyelesaian

Dengan pemahaman kamu dari Masalah 4.7 dan 4.8 tentunya untuk mendeskripsikan Masalah 4.9 sudah merupakan sesuatu hal yang mudah.

Perubahan titik $A(1, 0)$ setelah diputar pada O (berlawanan dengan arah jarum jam) sejauh 180°, 270°, dan 360° dapat dideskripsikan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.29 Rotasi titik A pada O sejauh 180°, 270°, dan 360°

a. Karena titik A diputar 180°, maka diperoleh titik $A_2(-1, 0)$.

   Titik $A_2(-1, 0)$ merupakan bayangan titik A di kuadran II.

   Dengan demikian, diperoleh bahwa

   $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, dan

   $$\tan 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

b. Titik $A_3 = (0, -1)$ merupakan bayangan titik $A_2\,(0, 1)$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa

$\sin 270^o = -1$, $\cos 270^o = 0$, dan

$$\tan 270^o = \frac{\sin 270^o}{\cos 270^o} = \frac{-1}{0} \text{ tak terdefinisi}$$

c. Jika titik A diputar pada O sejauh 360^o, maka akan kembali ke titik A. Dengan demikian, diperoleh bahwa

$\sin 360^o = 0$, $\cos 360^o = 1$, dan

$$\tan 360^o = \frac{\sin 360^{oo}}{\cos 360^o} = \frac{0}{1} = 0$$

Dengan demikian, nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa disajikan pada tabel berikut.

Tabel 4.3 Nilai perbandingan nilai trigonometri untuk sudut-sudut istimewa

	sin	cos	tan	csc	sec	cot
0^o	0	1	0	~	1	~
30^o	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60^o	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90^o	1	0	~	1	~	0
120^o	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
135^o	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
150^o	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

	sin	cos	tan	csc	sec	cot
180°	0	-1	0	~	-1	~
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
270°	-1	0	~	-1	~	0
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	0	1	0	~	1	~

Keterangan: Dalam buku ini, simbol ~ diartikan tidak terdefinisi.

Dengan memperhatikan secara cermat nilai-nilai pada tabel dan letaknya pada kuadran, maka dapat disimpulkan seperti dalam sifat berikut.

Sifat 4.4

Kuadran II $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ Nilai sinus bertanda positif cosinus, tangen bertanda negatif **S**(Saja)	Kuadran I $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ Nilai sinus, cosinus, tangen bertanda positif **A**(Asal)
Kuadran III $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$ Nilai tangen bertanda positif sinus, dan cosinus bertanda Negatif **T**(Tahu)	Kuadran IV $27^\circ < \theta \leq 360^\circ$ Nilai cosinus bertanda positif sinus dan tangan bertanda negatif **A**(Caranya)

Tanda positif dan negatif di setiap kuadran di atas diberikan untuk membantu kita mengingat nilai-nilai perbandingan trigonometri, selain melihat Tabel 4.3.

Selain Tabel 4.3 dan Sifat 4.4 di atas, hal penting dan yang lain juga dapat disimpulkan, yaitu sifat relasi antarsudut, seperti disimpulkan pada sifat berikut.

Sifat 4.5

Untuk setiap $0^o < a < 90^o$

a. $\sin (90^o + a) = \cos a$

b. $\cos (90^o + a) = -\sin a$

c. $\tan (90^o + a) = -\cot a$

d. $\sin (180^o - a) = \sin a$

e. $\cos (180^o - a) = -\cos a$

f. $\tan (180^o - a) = -\tan a$

g. $\sin (180^o + a) = -\sin a$

h. $\cos (180^o + a) = -\cos a$

i. $\tan (180^o + a) = \tan a$

j. $\sin (360^o - a) = -\sin a$

k. $\cos (360^o - a) = \cos a$

l. $\tan (360^o - a) = -\tan a$

Misalnya, jika $\theta = 30^o$ dan $\theta = 60^o$, dengan menggunakan Sifat 4.5, maka

a. $\cos (180^o - \theta) = \cos (180^o - 30^o)$

$= \cos 150^o = -\cos 30^o = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan

$\cos (180^o - \theta) = \cos (180^o - 60^o)$

$= \cos 120^o = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$

(pada kuadran II, nilai cosinus bertanda negatif).

b. $\sin (180^o + \theta) = \sin (180^o + 30^o)$

$= \sin 210^o = -\sin 30^o = -\frac{1}{2}$ dan

$\sin (180^o + \theta) = \sin (180^o + 60^o)$

$= \sin 240^o = -\sin 60^o = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(pada kuadran III, nilai sinus bertanda negatif).

c. $\sin(360^\circ - \theta) = \sin(360^\circ - 30^\circ)$

$= \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ dan

$\sin(360^\circ - \theta) = \sin(360^\circ - 60^\circ)$

$= \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(pada kuadaran IV, nilai sinus bertanda negatif).

d. $\tan(360^\circ - \theta) = \tan(360^\circ - 30^\circ)$

$= \tan 330^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

(pada kuadran IV tangen bertanda negatif).

Pertanyaan

Setelah menemukan Sifat 4.4 dan 4.5 di atas, kamu dapat memunculkan pertanyaan-pertanyaan menantang terkait nilai perbandingan trigonometri. Misalnya,

a. Bagaimana menentukan nilai sin 700°, cos 1.200°, dan tan 1.500°?

b. Apa bedanya $\sin(30^\circ)^2$ dengan $(\sin 30^\circ)^2$?

Sebelum kita melanjutkan kajian tentang identitas trigonometri, mari kita pahami contoh-contoh berikut.

Contoh 4.10

Jika diketahui

a. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, ($\alpha$ rad) α berada di kuadran II, tentukan nilai csc α dan cot α.

b. $\tan\beta = -\frac{6}{12}$, ($\beta$ rad) β berada di kuadran IV, tentukan nilai $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2$.

Alternatif Penyelesaian

a. Sudut α yang terletak di kuadran II menjadi penentu tanda nilai perbandingan trigonometri, seperti gambar berikut ini.

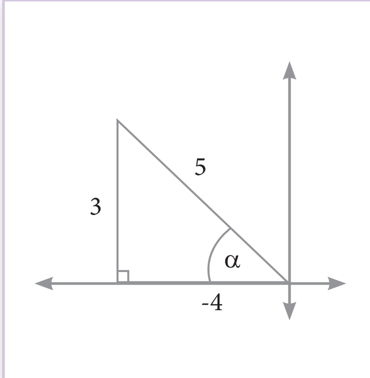
Pada segitiga siku-siku tersebut, diketahui panjang sisi miring dan sisi di samping sudut α.

Dengan Teorema Phytagoras, diperoleh panjang sisi di depan sudut adalah 3.

Dengan demikian, dengan Definisi 4.1, diperoleh

✓ $\csc \alpha = \dfrac{1}{\sin \alpha} = \dfrac{1}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{3}$

✓ $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha} = \dfrac{1}{\frac{3}{-4}} = \dfrac{-4}{3}$



Gambar 4.30 cos α di kuadran II

b. Dengan pemahaman yang sama dengan bagian a, $\tan \beta = -\dfrac{6}{12}$, dengan β pada kuadran IV, diilustrasikan sebagai berikut.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh panjang sisi miring, yaitu 20.

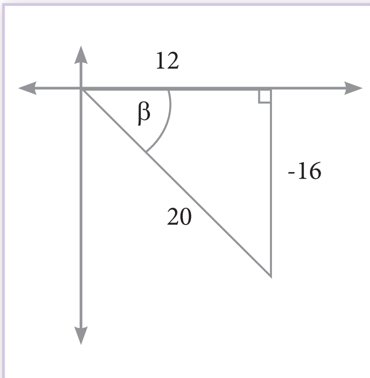
Akibatnya, dengan Definisi 4.1, diperoleh

$\sin \beta = \dfrac{-16}{20} = -\dfrac{16}{20}$ dan $\cos \beta = \dfrac{12}{20}$

Jadi,

$$(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = \left(-\frac{16}{20}\right)^2 + \left(\frac{12}{20}\right)^2 = \frac{256+144}{400}$$

$$= \frac{400}{400} = 1$$



Gambar 4.31 tan β di kuadran IV

Contoh 4.11

Di daerah pedesaan yang jauh dari bandar udara, kebiasaan anak-anak jika melihat/mendengar pesawat udara sedang melintasi perkampungan mereka mengikuti arah pesawat tersebut. Bolang mengamati sebuah pesawat udara yang terbang dengan ketinggian 120 km. Dengan sudut elevasi pengamat

(Bolang) terhadap pesawat adalah sebesar θ, tentukan jarak pengamat ke pesawat, jika

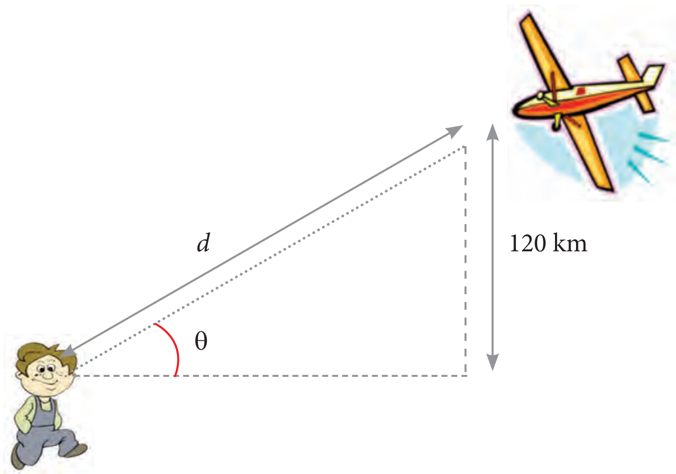
i. $\theta = 30^o$

ii. $\theta = 90^o$

iii. $\theta = 120^o$

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi persoalan di atas dapat disajikan pada Gambar 4.32



Gambar 4.32 Sketsa pengamatan terhadap pesawat udara dengan sudut elevasi θ

Untuk menentukan jarak pengamat terhadap pesawat, dengan diketahui ketinggian terbang pesawat, kita menentukan sin θ. (Mengapa?)

i. Untuk $\theta = 30^o$, maka $\sin 30^o = \dfrac{120}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{120}{\sin 30^o} = \dfrac{120}{\frac{1}{2}} = 240$ km

ii. Untuk $\theta = 90^o$, maka $\sin 90^o = \dfrac{120}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{120}{\sin 90^o} = \dfrac{120}{1} = 120$ km

Artinya, saat $\theta = 90^o$, pesawat tepat berada di atas si Bolang, sehingga sama dengan tinggi terbangnya pesawat.

iii. Untuk $\theta = 120^o$, maka $\sin 120^o = +\sin 60^o = \dfrac{120}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{120}{\sin 60^o}$

$= \dfrac{120}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{240}{3}\sqrt{3}$ km

Contoh 4.12

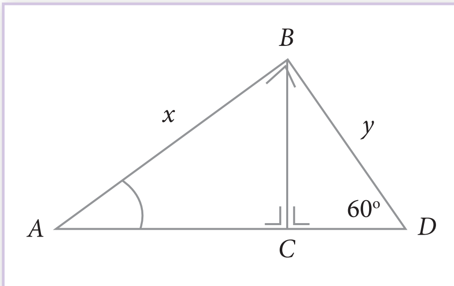
Diketahui segitiga siku-siku *ABD*, $\angle B = 90^{o}$, $\angle A = 30^{o}$, dan $AD = 8$ cm. *BC* adalah garis tinggi yang memotong *AD*. Hitung keliling dan luas segitiga *ABD*.

Alternatif Penyelesaian

Memahami dan mencermati informasi tentang segitiga *ABD* merupakan langkah awal untuk menyelesaikannya. Salah satu buktinya kamu harus memahami, maka kamu harus mampu menuliskan dan menggambarkan kejadian tersebut.

Secara lengkap informasi tentang segitiga *ABD* seperti pada gambar di samping

Untuk dapat menentukan keliling segitiga, kita harus menemukan nilai *x* dan *y*.



Gambar 4.33 Segitiga siku-siku *ABD*

Perhatikan ΔABD, kita mengetahui

$$\sin 60^{o} = \frac{AB}{AD} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow x = 8 \times \sin 60^{o}$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\cos 30^{o} = \frac{BD}{AD} = \frac{y}{8} = \Leftrightarrow y = 8 \times \cos 30^{o}$$

$$\Leftrightarrow y = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

Jadi, keliling segitiga $ABD = AB + BD + AD$

$$= 4\sqrt{3} + 8 + 4 = (4\sqrt{3} + 12) \text{ cm}$$

Untuk menghitung luas segitiga ABD, kita harus mencari panjang *BC*.

Perhatikan Gambar 4.33, fokuskan pada segitiga siku-siku *BCD* atau *ABC*.

Penulis fokus pada segitiga *BCD*.

Untuk menemukan panjang BC, gunakan sin 60º.

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{BD} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{4}$$

$$\Leftrightarrow \text{BC} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Jadi, luas segitiga ABD adalah $\dfrac{AD \times BC}{2} = \dfrac{8 \times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

4.5 Identitas Trigonometri

Pada subbab ini kita akan mengkaji ekspresi perbandingan trigonometri selain atau/dan menggunakan nilai perbandingan trigonometri yang telah kita temukan. Pengetahuan dasar yang diperlukan pada subbab ini di antaranya definisi perbandingan trigonometri dan Teorema Phytagoras.

Coba cermati masalah berikut ini.

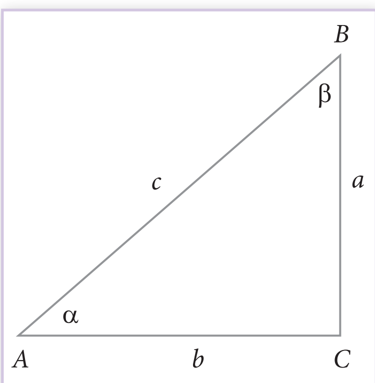
Masalah 4.10

Diketahui suatu segitiga ABC, siku-siku di C.

Misalkan $\angle A = \alpha\ rad$, $\angle B\ \beta\ rad$, $AB = c$, dan $AC = b$.

Selain perbandingan trigonometri dasar, temukan ekspresi antara $(\sin \alpha)^2$ dengan $(\cos \alpha)^2$ atau dengan $(\tan \alpha)^2$.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.34 Segitiga siku-siku *ABC*

Pada segitiga ABC, seperti pada Gambar 4.34, diperoleh bahwa

$c^2 + a^2 + b^2$

Selain itu, kita juga dapat menuliskan bahwa

a. $\sin \alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos \alpha = \dfrac{b}{c}$, dan $\tan \alpha = \dfrac{a}{b}$

Akibatnya,

$$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

$$(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$$

Penekanan yang dapat dibentuk, yaitu

i. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2} = 1$

Jadi, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (1*)

ii. Dengan persamaan (1*), jika ruas kiri dan kanan dikalikan $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, dengan $\sin^2 \alpha \neq 0$, maka diperoleh

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} \times \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha} \times 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} \times \sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} \times \cos^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Karena $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \csc \alpha$, $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2 \alpha$, dan $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot \alpha$, maka

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cot^2 \alpha$$

Akibatnya,

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$\Leftrightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ (2*)

iii. Dengan menggunakan persamaan (1*), jika ruas kiri dan kanan dikalikan dengan $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} \times \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \frac{1}{\cos^2\alpha} \times 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}\times\sin^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\times\cos^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Karena $\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$, $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$, dan $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, maka

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$$

Akibatnya

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad (3^*)$$

b. $\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta =$, dan $\tan = \frac{b}{a}$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$1 + \cot^2\beta = \csc^2\beta$, dan

$\tan^2\beta + 1 = \sec^2\beta$.

Perhatikan hasil yang diperoleh pada bagian a dan b. Setiap penekanan di atas berlaku jika sudut yang digunakan sama. Artinya, tidak dapat dituliskan seperti $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Pada suatu segitiga siku-siku, dua sudut lainnya pastilah sudut lancip. Tetapi penerapan penekanan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, juga berlaku untuk lebih dari 90^o. Misalnya, bila diberikan $\alpha = 240^o$, maka

$$\sin^2 240^o + \cos^2 240^o = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Dengan demikian, hasil pembahasan Masalah 4.9 di atas dapat disimpulkan dalam sifat berikut.

Sifat 4.6

Untuk setiap besaran sudut α, berlaku bahwa

a. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 a$ **atau** $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

b. $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha \leftrightarrow \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha - 1$ **atau** $\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$

c. $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \leftrightarrow \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$ **atau** $\tan^2 \alpha - \sec^2 \alpha = 1$

Contoh 4.13

Misalkan $0^o < \beta < 90^o$ dan $\tan \beta = 3$

Hitung nilai sin β dan cos β.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan definisi perbandingan dan identitas trigonometri, diperoleh $\cot \beta = \frac{1}{3}$.

Akibatnya, $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha \leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \csc^2 \alpha$

$$\leftrightarrow \frac{10}{9} = \csc^2 \alpha \text{ atau } \csc \alpha = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \text{ (Mengapa?)}$$

Karena $\sin \beta = \frac{1}{\csc \beta}$, maka $\sin \beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$

Dengan menggunakan $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, diperoleh:

$3^2 + 1 = \sec^2 \alpha \rightarrow \sec^2 \alpha = 10$ atau $\sec \alpha = \sqrt{10}$ (Mengapa?)

Karena $\cos \beta = \frac{1}{\csc \beta}$, maka $\cos = \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Contoh 4.14

Buktikan setiap persamaan berikut ini.

a. $(\sec \alpha - \tan \alpha) \times (\sec \alpha - \tan \alpha) = 1$

b. $\dfrac{\sec \theta}{1 - \tan \theta} = \dfrac{1}{\cos \theta - \sin \theta}, \cos \theta \neq 0$

c. $\dfrac{3}{1 - \sin \theta} - \dfrac{3}{1 + \sin \theta} = 6 \sec \theta \,.\, \tan \theta$

Alternatif Penyelesaian

a. Kita harus dapat menunjukkan yang ada di ruas kanan dengan cara memodifikasi informasi yang ada di ruas kiri. Artinya

$(\sec \alpha - \tan \alpha) \times (\sec \alpha - \tan \alpha) = \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha$

Pada Sifat 4.6, $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \leftrightarrow \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$

Dengan demikian terbukti bahwa: $(\sec \alpha - \tan \alpha) \times (\sec \alpha - \tan \alpha) = 1$

b. Dengan memodifikasi informasi yang di ruas kiri, kita dapat menuliskan:

$$\frac{\sec \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{\dfrac{1}{\cos \theta}}{1 - \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\dfrac{1}{\cos \theta}}{\dfrac{\cos \theta}{\cos \theta} - \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\dfrac{1}{\cancel{\cos \theta}}}{\dfrac{1}{\cancel{\cos \theta}} \times (\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{1}{(\cos \theta - \sin \theta)}$$

c) Dengan memodifikasi yang di ruas kiri, diperoleh:

$$\frac{3}{1 - \sin \theta} - \frac{3}{1 + \sin \theta} = \frac{3(1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} - \frac{3(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{3(1 + \sin \theta)}{(1 - \sin ,)(1 + \sin \theta)} - \frac{3(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{3 + 3 \sin \theta - 3 + 3 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{6 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

Karena $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$, maka

$$\frac{3}{1 - \sin \theta} - \frac{3}{1 + \sin \theta} = \frac{6 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{6 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 6 \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = 6 \tan \theta \,.\, \sec \theta$$

Uji Kompetensi 4.4

1. Lengkapi tabel berikut ini.

	Tanda Nilai Perbandingan		α berada di kuadran ke
a)	$\sin \alpha > 0$	$\cos \alpha > 0$	....
b)	$\sin \alpha < 0$	$\cos \alpha > 0$	....
c)	$\tan \alpha < 0$	$\sin \alpha > 0$	....
d)	$\tan \alpha = 0$	$\sin \alpha > 0$	....
e)	$\csc \alpha < 0$	$\tan \alpha < 0$	....

Berikan alasan untuk setiap jawaban yang kamu peroleh.

2. Hitung nilai dari:

a. $\sin 3.000^o$

b. $\cos 2.400^o$

c. $\sin \frac{5\pi}{4} \times \tan \frac{7\pi}{4} - (\cos 9\pi)^2$

d. $\dfrac{\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}}{2 \tan \frac{\pi}{6}}$

e. $\dfrac{\sin 45^o \times \cos 135^o + \tan^2 120^o}{2 \sin 60^o \times \cos 30^{oo}}$

3. Tentukan 5 nilai perbandingan trigonometri yang lain untuk setiap pernyataan berikut ini.

a. $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

b. $\tan \alpha = 1, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c. $4 \sin a = 2, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

d. $\sec \beta = -2, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

e. $\csc \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{2}, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

f. $3 \tan^2 \beta = 1, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

4. Selidiki kebenaran setiap pernyataan berikut. Berikan alasan untuk setiap jawabanmu.

   a. sec x dan sin x selalu mimiliki nilai tanda yang sama di keempat kuadran.

   b. Di kuadran I, nilai perbandingan sinus selalu lebih dari nilai perbandingan cosinus.

   c. Untuk $30^o < x < 90^o$ dan $120^o < y < 150^o$ maka nilai $2 \sin x < \cos^2 y$.

5. Diberikan $\tan \theta = -\dfrac{8}{15}$ dengan $\sin \theta > 0$, tentukan

   a. $\cos \theta$

   b. $\csc \theta$

   c. $\sin \theta \times \cos \theta + \cos \theta \times \sin \theta$

   d. $\dfrac{\csc \theta}{\cot \theta}$

6. Dengan menggunakan identitas trigonometri, sederhanakan setiap bentuk berikut ini.

   a. $(\tan x + \sec x)(\tan x - \sec x)$

   b. $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}$

   c. $\tan x - \dfrac{\sec^2 x}{\tan x}$

   d. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

7. Diketahui $\alpha = 45^o$ dan $\beta = 60^o$. Hitung

   a. $2 \times \sin 45^o \times \cos 60^o$

   b. $\sin 45^o \times \cos 60^o + \sin 60^o \times \cos 45^o$

   c. $\sin 45^o \times \cos 60^o - \sin 60^o \times \cos 45^o$

   d. $\dfrac{\tan 45^o + \tan 60^o}{1-(\tan 45^o \times \tan 60^o)}$

   e. $\sin^2 45^o + \cos^2 60^o + \sin^2 60^o + \cos^2 45^o$

8. Diberikan fungsi $f(x) = \sin(x + 90^{o})$, untuk setiap $0^{o} \leq x \leq 360^{o}$. Untuk semua sudut-sudut istimewa, tentukan nilai fungsi.

9. Sederhanakan bentuk persamaan berikut ini.

a. $\cos x \,.\, \csc x \,.\, \tan x$

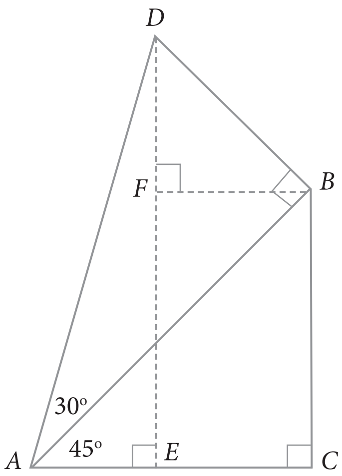
b. $\cos x \,.\, \cot x + \sin x$

c. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

d. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

e. $(\csc \theta - \cot \theta) \times (1 + \cos \theta)$

10. Cermati Gambar 4.35. Dengan menemukan hubungan antarsudut-sudut dan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku yang ada pada gambar, hitung



Gambar 4.35 Kombinasi segitiga siku-siku

a. Panjang AD, EC, BC, BD, AB, FB, AE, dan DE

b. $\sin 75^{o}$

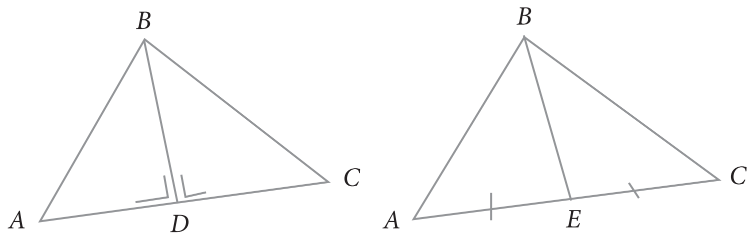
c. $\cos 75^{o}$

d. $\tan 75^{o}$

4.6 Aturan Sinus dan Cosinus

Pada subbab 4.2 – 4.5 telah kita kaji dan temukan konsep perbandingan trigonometri untuk sembarang segitiga siku-siku. Kita dengan mudah menentukan nilai sinus, cosinus, dan perbandingan trigonometri lainnya meskipun segitiga siku-siku tersebut dikaji berdasarkan posisi kuadran. Pertanyaan akan muncul, bagaimana menggunakan konsep perbandingan trigonometri tersebut pada suatu segitiga sama kaki, segitiga sama sisi, atau bahkan pada suatu sembarang segitiga? Pertanyaan ini merupakan ide untuk mengkaji subbab 4.6 ini.

Sebagai pengetahuan tambahan selain konsep yang sudah kita miliki di atas, perlu kita kenalkan istilah garis tinggi dan garis berat pada sembarang segitiga. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.36 (i) BD merupakan salah satu garis tinggi dan (ii) *BE* merupakan garis berat ΔABC

Definisi 4.2

Untuk setiap segitiga sembarang,

Garis tinggi adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan berpotongan tegak lurus dengan sisi di hadapannya.

Garis berat adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan memotong sisi di hadapannya menjadi dua bagian yang sama panjang.

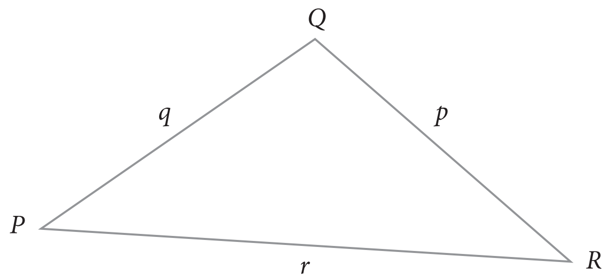
Dengan definisi tersebut, silakan tarik garis tinggi dan garis berat segitiga pada Gambar 4.36.

Selanjutnya, untuk menemukan bagaimana menerapkan konsep perbandingan trigonometri untuk setiap segitiga sembarang, coba cermati masalah berikut ini.

Masalah 4.11

Diberikan suatu segitiga sembarang, seperti pada Gambar 4.37 di bawah ini.

Misalkan $PR = q$ satuan, $PQ = r$ satuan, dan $RQ = p$ satuan, dengan $p \neq q \neq r$ serta $\angle P$ atau $\angle Q$ atau $\angle$R tidak satupun 0º dan 90º.



Gambar 4.37 Segitiga sembarang *PQR*, dengan $\angle P \neq \angle Q \neq \angle R$

Bentukan garis tinggi dari setiap sudut segitiga *PQR* dan temukan hubungan antar garis berat tersebut.

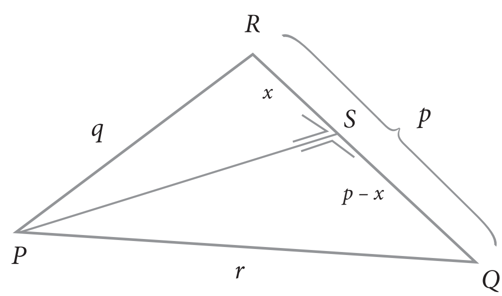
Alternatif Penyelesaian

Karena setiap segitiga sembarang memiliki tiga sudut, maka didapat membentuk tiga garis tinggi pada segitiga tersebut.

a. **Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle P$**

Garis tinggi yang dibentuk dari sudut $\angle P$ dideskripsikan pada Gambar 4.38.

Perhatikan ΔPRS dan ΔPQS .



Gambar 4.38 Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle P$

Kita dapat menuliskan bahwa

$$\sin \angle R = \frac{PS}{PR} \text{ atau } PS = PR \times \sin \angle R = q \times \sin \angle R. \quad (1)$$

$$\sin \angle Q = \frac{PS}{PQ} \text{ atau } PS = PQ \times \sin \angle Q = r \times \sin \angle Q. \quad (2)$$

Dari (1) dan (2), kita memperoleh

$$r \times \sin \angle Q = q \times \sin \angle R \leftrightarrow \frac{r}{\sin \angle R} = \frac{q}{\sin \angle Q} \quad (3)$$

Selain itu, kita juga dapat menuliskan bahwa

$$\cos \angle R = \frac{RS}{PR} = \frac{x}{q} \text{ atau } x = q \times \cos \angle R. \quad (4)$$

Kita masih fokus pada ΔPRS dan ΔPQS dengan menggunakan Teorema Phytagoras, dapat dituliskan

$r^2 = (p - x)^2 + q^2 - x^2$ dan

$q^2 = x^2 + (PS)^2$ atau $(PS)^2 = q^2 - x^2$

Akibatnya kita peroleh

$r^2 = (p - x)^2 + q^2 - x^2$

$$\leftrightarrow r^2 = p^2 - 2px + x^2 + q^2 - x^2 = p^2 + q^2 - 2px \quad (5)$$

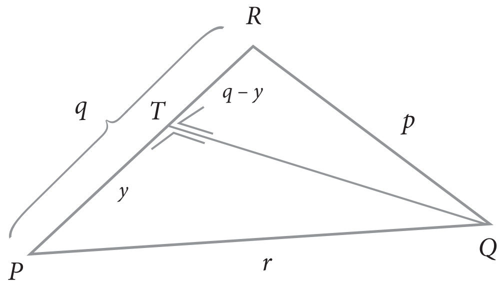
Dengan (4), maka (5) berubah menjadi

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2.p.q.\cos \angle R. \quad (6)$$

b. **Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle Q$**

Garis tinggi yang dibentuk dari sudut $\angle Q$ dideskripsikan pada Gambar 4.39.

Perhatikan ΔPQT dan ΔRQT.



Gambar 4.39 Garis tinggi ΔPQR yang dibentuk dari $\angle Q$

Dengan mudah kita menemukan bahwa

$$\sin \angle P = \frac{PT}{PQ} \text{ atau } QT = PQ \times \sin \angle P = r \times \sin \angle P \quad (7)$$

$$\sin \angle R = \frac{QT}{RQ} \text{ atau } QT = RQ \times \sin \angle R = p \times \sin \angle R \quad (8)$$

Dari (7) dan (8), diperoleh

$$p \times \sin \angle R = r \times \sin \angle P \leftrightarrow \frac{r}{\sin \angle R} = \frac{p}{\sin \angle P} \quad (9)$$

Selain itu, kita juga dapat menemukan bahwa

$$\cos \angle P = \frac{PT}{PQ} = \frac{y}{r} \text{ atau } y = r \times \cos \angle P. \quad (10)$$

Kita masih fokus pada ΔPQT dan ΔRQT, dengan Teorema Phytagoras, diperoleh bahwa

$p^2 = (q - y)^2 + (QT)^2$ dan

$r^2 = y^2 + (QT)^2$ atau $(QT)^2 = r^2 - y^2$

Akibatnya, kita peroleh

$p^2 = (q - y)^2 + r^2 - y^2$

$$\leftrightarrow p^2 = q^2 - 2.q.y + y^2 + r^2 - y^2 = q^2 + r^2 - 2.q.y \quad (11)$$

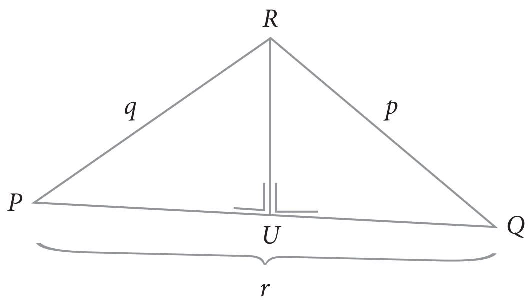
Dengan (10), maka (11) menjadi

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2.q.r.\cos \angle P. \quad (12)$$

c. **Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle R$**

Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle R$ dideskripsikan pada Gambar 4.40.

Perhatikan ΔPRU dan ΔRQU.



Gambar 4.40 Garis tinggi ΔPQR yang dibentuk dari $\angle R$

Kita dapat menemukan bahwa

$\sin \angle P = \dfrac{RU}{PR}$ atau

$$RU = PR \times \sin \angle P = q \times \sin \angle P \tag{13}$$

$$\sin Q = \frac{RU}{RQ} \text{ atau } RU = RQ \times \sin \angle Q = p \times \sin \angle Q \tag{14}$$

Dari (6e) dan (6f), diperoleh

$$q \times \sin \angle P = p \times \sin \angle Q \leftrightarrow \frac{q}{\sin \angle Q} = \frac{p}{\sin \angle P} \tag{15}$$

Selain itu, kita juga dapat menuliskan bahwa

$$\cos \angle Q = \frac{UQ}{RQ} = \frac{z}{p} \text{ atau } z = p \times \cos \angle Q \tag{16}$$

Kita masih fokus mencermati ΔPRU dan ΔRQU, dengan Teorema Phytagoras, kita dapat menuliskan

$q^2 = (r - z)^2 + (RU)^2$, dan

$p^2 = z^2 + (RU)^2$ atau $(RU)^2 = p^2 - z^2$

Akibatnya, diperoleh

$q^2 = (r - z)^2 + p^2 - z^2$

$$\leftrightarrow q^2 = r^2 - 2.r.z + z^2 + p^2 - z^2 = r^2 + p^2 - 2.r.z \tag{17}$$

Dengan (16), maka (17) menjadi

$$q^2 = r^2 + p^2 - 2.r.\, p.\cos \angle Q \tag{18}$$

Jadi, dari (3), (9), dan (15), kita menemukan bahwa

$$\frac{p}{\sin \angle P} = \frac{q}{\sin \angle Q} = \frac{r}{\sin \angle r}$$

Hal tersebut di atas sering dikenal istilah ***ATURAN SINUS***.

Selain itu, dari (6), (12), dan (18) juga kita menemukan bahwa

i. $p^2 = q^2 + r^2 - 2.q.r.\cos \angle P$ atau $\cos \angle P = \dfrac{q^2 + r^2 - p^2}{2.q.r}$

ii. $q^2 = p^2 + r^2 - 2.p.r.\cos \angle Q$ atau $\cos \angle Q = \dfrac{p^2 + r^2 - q^2}{2.p.r}$

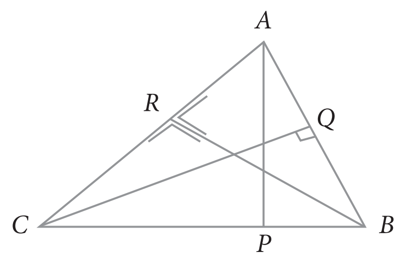
iii. $r^2 = p^2 + q^2 - 2.p.q.\cos \angle R$ atau $\cos \angle R = \dfrac{p^2 + q^2 - r^2}{2.p.q}$

Hal tersebut yang sering dikenal istilah ***ATURAN COSINUS***

Untuk membantu mengingatnya, kita jadikan sebagai sifat, seperti berikut.

Sifat 4.7

Untuk setiap segitiga, dengan $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, dengan sudut-sudutnya $\angle C$, $\angle A$ dan $\angle B$, maka berlaku



Gambar 4.41 ΔABC dengan tiga garis tinggi

ATURAN SINUS

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

ATURAN COSINUS

i. $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \angle A$ atau $\cos \angle A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$

ii. $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \angle B$ atau $\cos \angle B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$

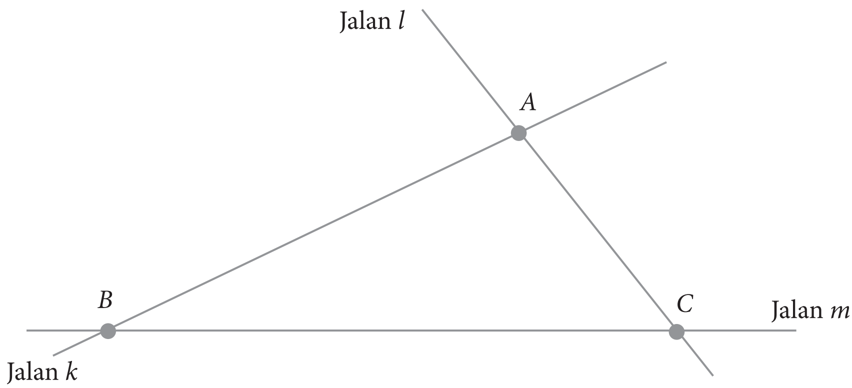
iii. $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \angle C$ atau $\cos \angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$

Kemudian, kamu harus mampu menggunakan dengan efektif aturan sinus dan aturan cosinus di atas dalam memecahkan masalah.

Coba uji pemahaman kamu dalam menggunakan Sifat 4.7.

Contoh 4.15

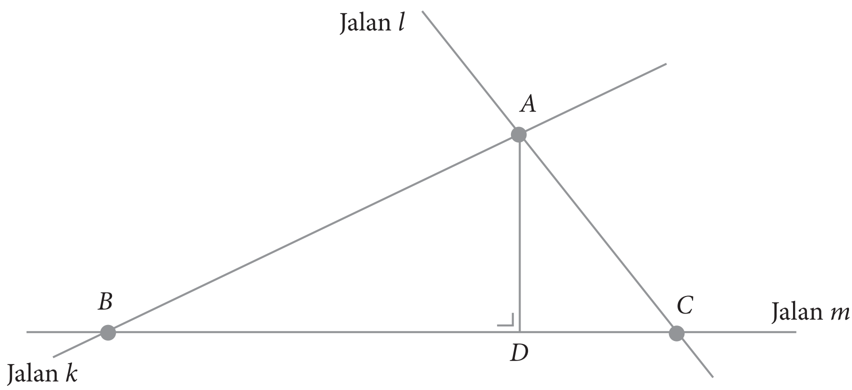
Jalan k dan jalan l berpotongan di kota A. Dinas tata ruang kota ingin menghubungkan kota B dengan kota C dengan membangun jalan m dan memotong kedua jalan yang ada, seperti yang ditunjukkan Gambar 4.42 di bawah. Jika jarak antara kota A dan kota C adalah 5 km, sudut yang dibentuk jalan m dengan jalan l adalah 75º dan sudut yang dibentuk jalan k dan jalan m adalah 30º. Tentukan jarak kota A dengan kota B.



Gambar 4.42 Jalan *k*, *l*, dan *m*

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan perhitungan, kita bentuk garis tinggi AD, dimana garis AD tegak lurus dengan garis BC, seperti pada Gambar 4.43.



Gambar 4.43 Segitiga *ABC* dengan garis tinggi *D*

Dengan menggunakan konsep perbandingan trigonometri (Definisi 4.1), pada ΔABC, dapat kita tuliskan bahwa

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \text{ atau } AD = AB \times \sin B \tag{19}$$

Sedangkan pada ΔACD, kita peroleh

$$\sin C = \frac{AD}{AC} \text{ atau } AD = AC \times \sin C \tag{20}$$

Dari persamaan (19) dan (20), kita peroleh bahwa

$$AB \times \sin B = AC \times \sin C \tag{21}$$

Karena diketahui bahwa $\angle C = 70^o$, $\angle B = 30^o$, dan jarak $AC = 5$, dengan persamaan (21) diperoleh

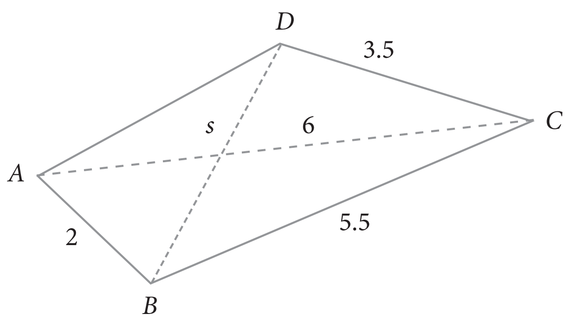
$AB \times \sin 30^o = AC \times \ \sin 70^o$,

$$\text{AB} = \frac{5 \times \sin 70^o}{\sin 30^o} = \frac{5 \times (0,94)}{0,5} = 9{,}4 \text{ km.}$$

Jadi, jarak kota A dengan kota B adalah 9, 4 km.

Contoh 4.16

Diberikan segiempat, seperti pada Gambar 4.44.



Gambar 4.44 Segiempat *ABCD*

Hitung nilai *s*.

Alternatif Penyelesaian

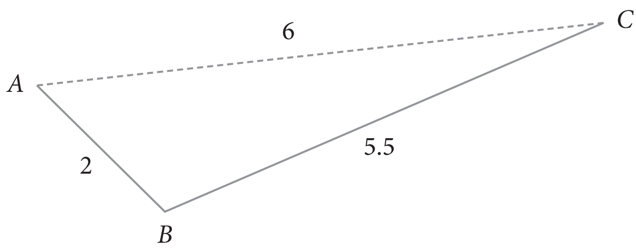
Dengan Gambar 4.44, kita melihat ΔADB, ΔADC, dan ΔABC

Hal ini kita perlukan untuk menemukan nilai cos $\angle DAB$.

Di sisi lain, $\angle DAB = \angle BAC + \angle DAC$.

Artinya, dengan menemukan besar sudut $\angle BAC$ dan $\angle DAC$, kita dapat menghitung nilai cos $\angle DAB$ (mengapa harus menentukan cos $\angle DAB$?)

Mari kita kaji ΔABC.



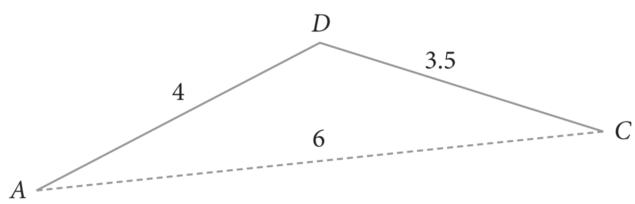
Gambar 4.45 Segitiga *ABC*

Dengan menggunakan Sifat 4.6 (Aturan Cosinus)

$$\cos\angle BAC = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2.AC.AB} = \frac{6^2 + 2^2 - (5,5)^2}{2.(6).(2)} = \frac{9,75}{24} = 0,406$$

Dengan bantuan kalkulator atau tabel trigonometri, karena cos $\angle BAC = 0{,}40625$, maka besar $\angle BAC = 66{,}03^o$.

Sekarang, mari kita kaji ΔADC.



Gambar 4.46 Segitiga *ADC.*

Dengan menggunakan Sifat 4.6 (Aturan Cosinus), kita peroleh

$$\cos\angle DAC = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2.AC.AD} = \frac{4^2 + 6^2 - (3,5)^2}{2.4.6} = 0{,}82813$$

Melalui kalkulator atau tabel trigonometri, diperoleh besar $\angle DAC = 34{,}03^o$

Dengan demikian, besar $\angle DAB = 66{,}03^o + 34{,}03^o = 100{,}06^o$

Akibatnya, untuk menentukan panjang sisi s, kita perhatikan ΔABD.

$$\cos \angle DAB = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2.AB.AD}$$

$$\cos \angle DAB = \frac{4^2 + 2^2 - s^2}{2.4.2}$$

Atau

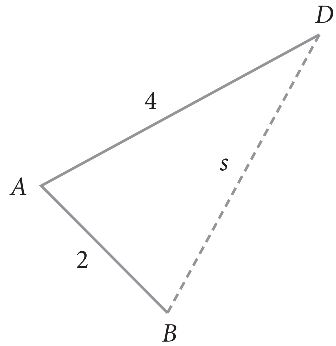
$16.(\cos 100{,}06^o) = 20 - s^2$

$\leftrightarrow 16(-0{,}174) = 20 - s^2$

$\leftrightarrow -2784 = 20 - s^2$

$\leftrightarrow s^2 = 22{,}784$

$\leftrightarrow s = \sqrt{22{,}784} = 4{,}709$



Gambar 4.47 Segitiga *ABD*

4.7 Grafik Fungsi Trigonometri

Pada subbab ini, kita akan mengkaji bagaimana konsep trigonometri jika dipandang sebagai suatu fungsi. Mengingat kembali konsep fungsi pada Bab 3, fungsi $f(x)$ harus terdefinisi pada daerah asalnya. Jika $y = f(x) = \sin x$, maka daerah asalnya adalah semua x bilangan real. Namun, mengingat satuan sudut (subbab 4.1) dan nilai-nilai perbandingan trigonometri (yang disajikan pada Tabel 4.3), pada kesempatan ini, kita hanya mengkaji untuk ukuran sudut dalam derajat . Mari kita sketsakan grafik fungsi $y = f(x) = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

a. Grafik Fungsi $y = \sin x$, dan $y = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Masalah 4.12

Dengan keterampilan kamu dalam menggambar suatu fungsi (Bab 3), gambarkan grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan mencermati nilai-nilai sinus untuk semua sudut istimewa yang disajikan pada Tabel 4.3, kita dapat memasangkan ukuran sudut dengan nilai sinus untuk setiap sudut tersebut, sebagai berikut.

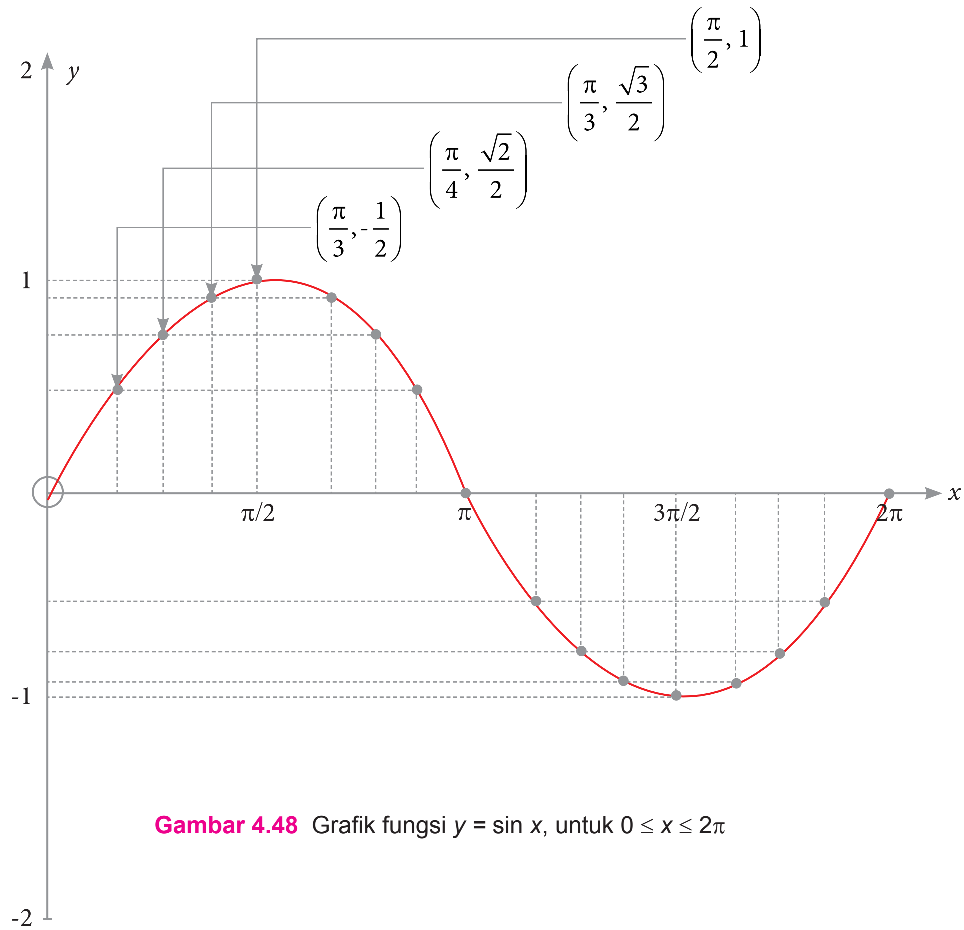
$$(0, 0); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right);$$

$$(\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{1}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{11\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \text{ dan } (2\pi, 0).$$

Selanjutnya pada koordinat kartesius, kita menempatkan pasangan titik-titik untuk menemukan suatu kurva yang melalui semua pasangan titik-titik tersebut.

Selengkapnya disajikan pada Gambar 4.48 berikut ini.



Gambar 4.48 Grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, kita dapat merangkum beberapa data dan informasi seperti brikut.

a. Untuk semua ukuran sudut x, nilai maksimum fungsi $y = \sin x$ adalah 1, dan nilai minimumnya adalah -1.

b. Kurva fungsi $y = \sin x$, berupa gelombang.

c. Untuk 1 periode (1 putaran penuh) kurva fungsi $y = \sin x$, memiliki 1 gunung dan 1 lembah.

d. Nilai fungsi sinus berulang saat berada pada lembah atau gunung yang sama.

e. Untuk semua ukuran sudut x, daerah hasil fungsi $y = \sin x$, adalah $-1 \leq y \leq 1$.

Dengan konsep grafik fungsi $y = \sin x$, dapat dibentuk kombinasi fungsi sinus.

Misalnya $y = 2.\sin x$, $y = \sin 2x$, dan $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Selengkapnya dikaji pada contoh berikut.

Contoh 4.17

Gambarkan grafik fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Kemudian tuliskanlah perbedaan kedua grafik tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri yang disajikan pada Tabel 4.3, maka pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:

Untuk $x = 0$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(0) = \sin 0 = 0. \Rightarrow (0, 0)$

Untuk $x = \left(\frac{\pi}{6}\right)$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Untuk $x = \frac{\pi}{4}$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

Demikian seterusnya hingga

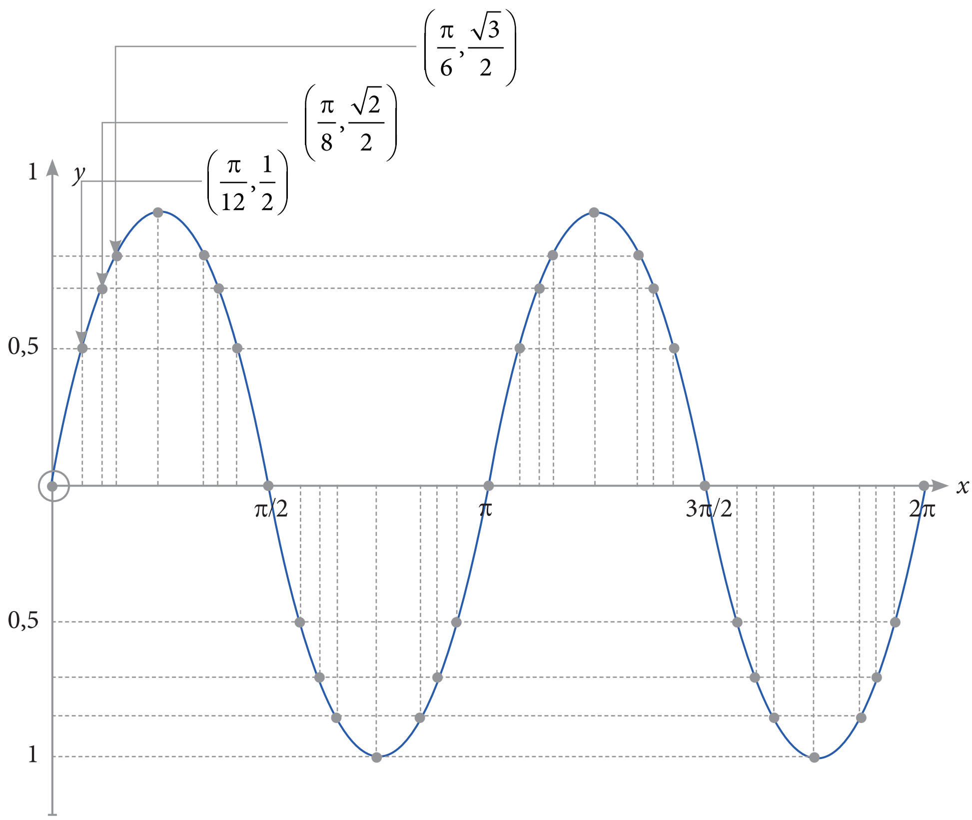
untuk $x = 2\pi$, maka niali fungsi adalah $y = \sin 2.(2\pi) = \sin 4\pi = \sin 0 = 0$ $\Rightarrow (2\pi, 0)$

Selengkapnya pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, $0 \le x \le 2\pi$, yaitu

$(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(\pi, 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ......; $(2\pi, 0)$.

Dengan pasangan titik-titik tersebut, maka grafik fungsi $y = \sin 2x$, $0 \le x \le 2\pi$ disajikan pada Gambar 4.49.



Gambar 4.49 Grafik fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \le x \le 2\pi$

Berbeda dengan fungsi y = sin 2x, setiap besar sudut dikalikan dua, tetapi untuk fungsi $y = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, setiap besar sudut ditambah $\dfrac{\pi}{2}$ atau 90°.

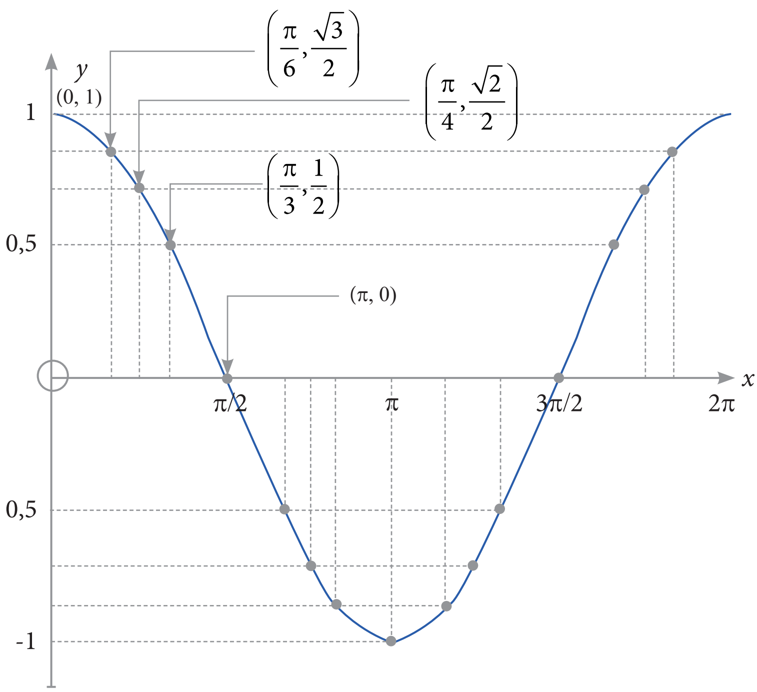
Sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, untuk $0 \le x \le 2\pi$.

Coba kita perhatikan kembali Sifat 4.4, bahwa $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Artinya, sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \le x \le 2\pi$.

Dengan menggunakan nilai-nilai cosinus yang diberikan pada Tabel 4.3 kita dapat merangkumkan pasangan titik-titik yang memenuhi fungsi y = cos x, untuk $0 \le x \le 2\pi$, sebagai berikut.

(0, 1); $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$; $\left(\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ($\pi$, -1) $\left(\dfrac{7\pi}{6},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{4\pi}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{7\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (2, 1).

Dengan demikian, grafik fungsi y = cos x, untuk $0 \le x \le 2\pi$, disajikan pada Gambar 4.50 berikut.



Gambar 4.50 Grafik fungsi y = cos x, untuk $0 \le x \le 2\pi$

Dari kajian grafik, grafik fungsi $y = \sin 2x$ sangat berbeda dengan grafik fungsi $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, meskipun untuk domain yang sama. Grafik $y = \sin 2x$, memiliki 2 gunung dan 2 lembah, sedangkan grafik fungsi $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, hanya memiliki 1 lembah dan dua bagian setengah gunung. Nilai maksimum dan minimum fungsi $y = \sin 2x$ sama $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ untuk domain yang sama. Selain itu, secara periodik, nilai fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, berulang, terkadang menaik dan terkadang menurun.

Pertanyaan

Dengan pengetahuan dan keterampilan kamu akan tiga grafik di atas dan konsep yang sudah kamu miliki pada kajian fungsi, sekarang gambarkan dan gabungkan grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, untuk domain $0 \le x \le 2\pi$.

Rangkumkan hasil analisis yang kamu temukan atas grafik tersebut.

b. Grafik fungsi $y = \tan x$, **untuk** $0 \le x \le 2\pi$

Kajian kita selanjutnya adalah untuk menggambarkan grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \le x \le 2\pi$. Mari kita kaji grafik fungsi $y = \tan x$, melalui masalah berikut.

Masalah 4.13

Untuk domain $0 \le x \le 2\pi$, gambarkan grafik fungsi $y = \tan x$.

Alternatif Penyelesaian

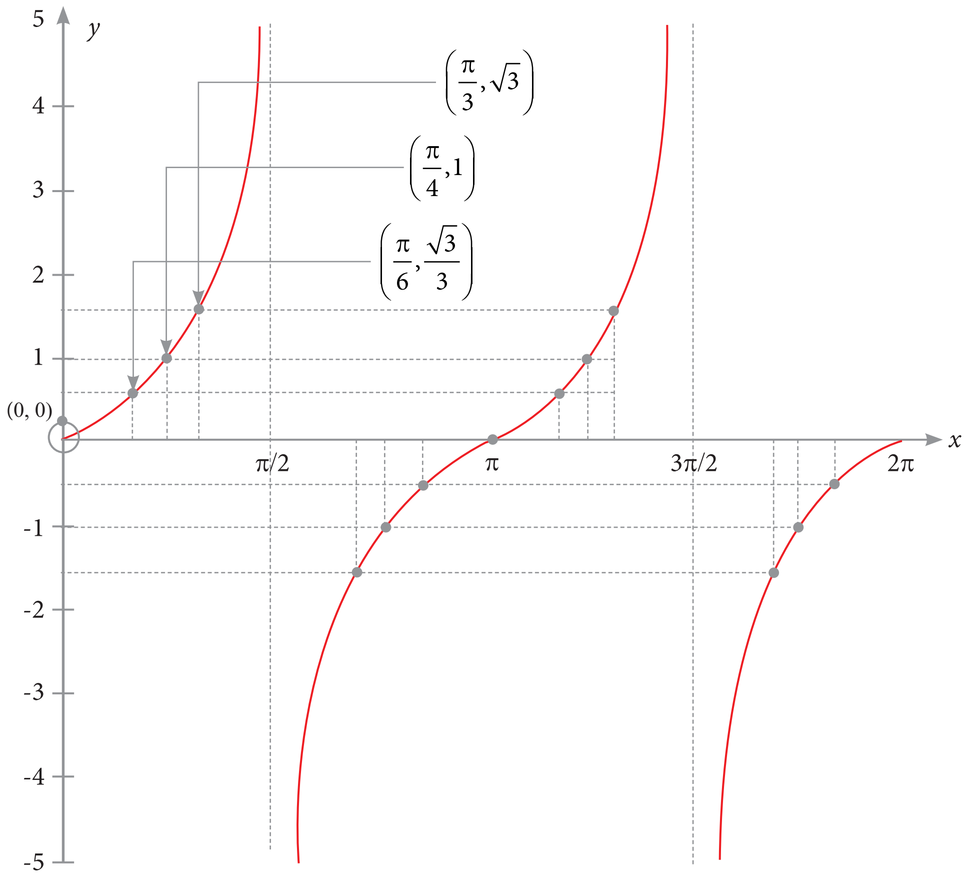
Dengan nilai-nilai tangen yang telah kita temukan pada Tabel 4.3 dan dengan pengetahuan serta keterampilan yang telah kamu pelajari tentang menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dengan mudah memahami pasangan titik-titik berikut.

$(0, 0)$; $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2}, \sim\right)$; $\left(\dfrac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{4}, -1\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$(\pi,\ 0)$; $\left(\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\dfrac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \sim\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$; $\left(\dfrac{7\pi}{4}, -1\right)$;

$\left(\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $(2\pi, 0)$.

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, seperti pada Gambar 4.51 berikut ini.



Gambar 4.51 Grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, jelas kita lihat bahwa jika x semakin mendekati $\frac{\pi}{2}$ (dari kiri), nilai fungsi semakin besar, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terbesarnya. Sebaliknya, jika x atau mendekati $\frac{\pi}{2}$ (dari kanan), maka nilai fungsi semakin kecil, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terkecilnya. Kondisi ini berulang pada saat x mendekati $\frac{3\pi}{2}$. Artinya, fungsi $y = \tan x$, tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.

Uji Kompetensi 4.5

1. Jika diketahui segitiga ABC, dengan ukuran panjang sisi dan sudut-sudutnya sebagai berikut.

   a. $b = 20$, $\angle C = 105^o$, dan $\angle B = 45^o$. Hitung panjang sisi a dan c.

   b. $c = 20$, $\angle A = 35^o$, dan $\angle B = 40^o$. Hitung panjang sisi a dan b.

   c. $a = 12{,}5$, $b = 10$, dan $\angle A = 110^o$. Hitung besar $\angle B$, $\angle C$, dan panjang sisi c.

   d. $a = 4$, $b = 6$, dan $\angle C = 120^o$. Hitung besar $\angle A$, $\angle B$, dan panjang sisi c.

2. Di bawah ini, diketahui panjang sisi-sisi segitiga PQR. Hitung nilai sinus dan tangen untuk setiap sudutnya.

   a. $p = 10$, $q = 14$, dan $r = 20$

   b. $p = 11$, $q = 15$, dan $r = 21$

   c. $p = 8$, $q = 12$, dan $r = 17$

3. Buktikan untuk setiap segitiga ABC sembarang, maka luas segitiga ABC dirumuskan dengan rumus berikut.

   a. $\text{L} = \frac{1}{2}.b.c.\sin \angle A$

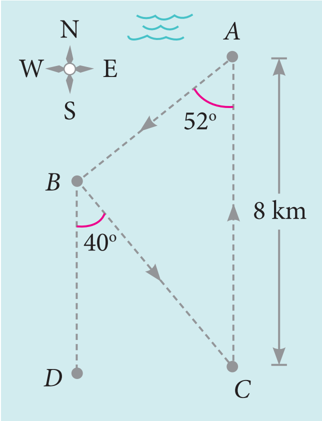
   b. $\text{L} = \frac{1}{2}.a.c.\sin \angle B$

   c. $\text{L} = \frac{1}{2}.a.b.\sin \angle C$

4. Dengan rumus luas segitiga pada soal nomor 3, hitunglah luas segitiga untuk setiap ukuran segitiga ABC pada nomor 1.

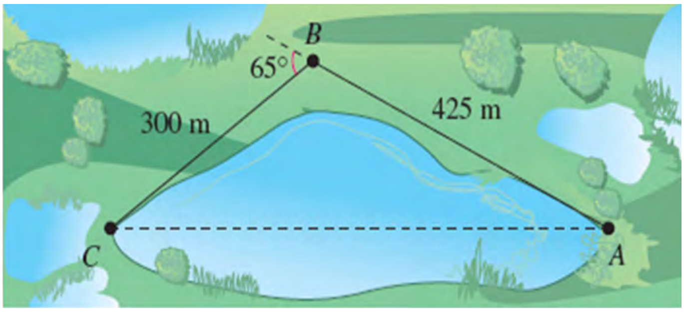
5. Diketahui segitiga ABC, dengan $AB = 20$ cm, $AC = 30$ cm, dan $\angle B = 140^\circ$. Hitung panjang BC dan $\angle A$.

6. Pada latihan mengendarai suatu kapal cepat di perairan, lintasan latihan didesaian seperti yang diberikan pada Gambar 4.52. Pengemudi harus mulai dari titik A, dan bergerak ke arah barat daya dengan membentuk sudut 52° ke titik B, kemudian bergerak ke arah tenggara dengan membentuk sudut 40° ke titik C, dilanjutkan kembali ke titik A. Jarak titik A ke C sejauh 8 km. Hitung panjang lintasan si pengemudi kapal cepat tersebut.



Gambar 4.52 Ilustrasi lintasan latihan kapal cepat

7. Pada saat mensurvei sebidang rawa-rawa, seorang pensurvei berjalan sejauh 425 meter dari titik A ke titik B, kemudian berputar 65° dan berjalan sejauh 300 meter ke titik C (lihat Gambar 4.53). Hitungl panjang AC.



Gambar 4.53 Ilustrasi sebidang rawa-rawa

8. Untuk setiap fungsi di bawah ini, manakah yang terdefinisi pada $0^o \leq x \leq 360^o$.

a. $y = \tan x$

b. $y = \cot x$

c. $y = \sec x$

d. $y = \csc x$

9. Tentukan daerah asal dan daerah hasil untuk setiap fungsi berikut.

a. $y = \sin x + \cos x$

b. $y = \sin x - \cos x$

c. $y =$

d. $y = \dfrac{1}{\cos x}$

e. $y = \dfrac{1}{\tan x}$

f. $y = \sin x + \tan x$

10. Gambarkan setiap fungsi $f(x)$ di bawah ini, untuk D_f: $\{0 \leq x \leq 2\pi\}$.

a. $y = 2 \sin x$

b. $y = \sin x + \cos x$

c. $y = -\sin x$

d. $y = -\cos x$

e. $y = -\tan x$

f. $y = 2 + \sin x$

Proyek

Himpunlah informasi penerapan grafika fungsi trigonometri dalam bidang fisika dan teknik elektro serta permasalahan di sekitarmu. Buatlah analisis sifat-sifat grafik sinus, cosinus, dan tangen dalam persamalahan tersebut.

Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

Rangkuman

Sebelum melanjutkan pembahasan topik selanjutnya, sangat penting merefleksikan semua catatan-catatan penting pada pembalajaran trigonometri. Oleh karena itu, kamu mencatat hal-hal penting pada bab ini. Untuk membantu kamu menuliskan hal-hal penting tersebut, terlebih dahulu jawab beberapa pertanyaan berikut ini:

1. Pada suatu segitiga siku-siku, coba kamu tuliskan hubungan setiap panjang sisi-sisinya.
2. Bagaimana merumuskan perbandingan trigometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada suatu segitiga siku-siku?
3. Pada kuadran berapa nilai perbandingan sinus berlaku positif? Negatif? Bagaimana dengan nilai perbandingan lainnya?
4. Bagaimana kamu membedakan aturan sinus dan aturan cosinus?
5. Untuk $f(x) = \sin x$, untuk setiap $x \in D_f$, hitunglah nilai maksimum dan nilai minimum fungsi sinus. Bagaimana dengan fungsi cosinus dan tangen?

Selain pertanyaan-pertanyaan di atas, kamu beri kesempatan untuk menuliskan hal-hal yang kamu pandang penting dari bab ini.

Bandingkan hasil rangkumanmu dengan teman-temanmu.

Glosarium

Analogi	: Suatu proses penyelesaian yang mirip/ sama dengan suatu proses lainnya yang telah dibuktikan/diselesaikan.
Daerah Asal/Domain	: tak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.
Daerah kawan/kodomain	: himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai dengan fungsi yang didefinisikan.
Daerah hasil/range	: Suatu himpunan bagian dari daerah kawan yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi fungsi yang ditentukan.
Dua segitiga sebangun	: Perbandingan sisi-sisi yang bersuaian sama dan perbandingan sudut-sudut yang bersesuaian juga sama.
Fungsi bijektif	: fungsi satu-satu dan fungsi pada.
Fungsi invers	: fungsi kebalikan dari suatu fungsi. Misalkan f sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, f^{1} disebut fungsi invers dari f jika dapat ditentukan sebuah fungsi f^{1} dari himpunan B ke himpunan A sedemikian sehingga $f^{1}(f(a)) = a$ dan $f^{1}(f(b)) = b$.
Fungsi komposisi	: sebuah fungsi hasil operasi komposisi dua buah fungsi atau lebih. Misal fungsi f dan g, fungsi komposisi f dan g (ditulis: gof) ditentukan dengan $(gof)(x) = g(f(x))$.
Invers fungsi	: suatu relasi dari himpunan B ke himpunan A.

Garis tinggi	:	Suatu gais yang dibentuk dari suatu sudut segitiga sembarang dan berpotongan tegak lurus dengan sisi di hadapannya.
Garis berat	:	Suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut segitiga sembarang dan memotong sisi di dapannya menjadi dua bagian yang sama panjang.
Periodik	:	Perubahan sesuatu/nilai yang bergantung pada satuan waktu tertentu.
Persamaan	:	Kalimat terbuka yang menggunakan relasi sama dengan.
Persamaan homogen	:	Persamaan yang konstantanya sama nol. Atau Persamaan yang nilai variabel-variabelnya semuanya nol.
Persamaan non - homogen	:	Persamaan yang konstantanya tidak (semuanya) sama dengan nol. Atau Persamaan yang nilai variabel-variabelnya tidak semuanya nol
Penyelesaian trivial	:	Penyelesaian suatu persamaan atau sistem persamaan dengan nilai variabel-variabelnya adalah nol.
Penyelesaian non - trivial	:	Penyelesaian suatu persamaan atau sistem persamaan dengan nilai variabel-variabelnya tidak semuanya nol.
Pertidaksamaan	:	Kalimat terbuka yang menggunakan relasi tidak sama
Persamaan linear satu variabel	:	Persamaan berbentuk $ax + b = 0$, dimana a, b anggota himpunan bilangan real dan $a \neq 0$, a disebut koefisien x, b disebut konstanta, dan x adalah variabel real.
Rotasi α	:	Perputaran terhadap titik pusat sejauh α.

Sudut koterminal	: Suatu sudut yang bila dijumlahkan dengan sudut yang lainnya sama dengan 180^o.
Sudut standar	: Sudut yang terbentuk dengan sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran.
Tak berhingga penyelesaian	: Memiliki lebih dari satu penyelesaian, dan banyaknya tidak terhitung
Tak terdefinisi, misalnya $\frac{1}{0}$	: tidak terdapat suatu bilangan real yang merupakan hasil dari $\frac{1}{0}$.

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education)*. United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium*. United States of America: the national academy of sciences.

Corral Michael, (2009), *Trigonometry*, Michigan, Schoolcraft College.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA,The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Larson Ron, (2011), *Trigonometry*, Eight Edition, Belmont, USA, Brooks/Colle, Cengage Learning.

Magurn A, Bruce. (2002). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally)*. United States of America: Allyn & Bacon.

Profil Penulis