

Cours de mathématiques 2022/2023 - 7GTPE

Arthur Paquot

CHAPITRE 1

Tableaux, graphiques, formules - Puissance,
proportionnalité inverse et croissance
exponentielle

1.1 Programme de l'année

Puissance, proportionnalité inverse et croissance exponentielle

Agenda

Le chapitre sera traité durant les mois de septembre à décembre.

Connaître

- L'élève sera capable d'exprimer dans ses mots les notions suivantes :
 - Deux grandeurs proportionnelles
 - Deux grandeurs inversement proportionnelles
 - Le coefficient de proportionnalité
 - L'exposant
 - Une puissance
 - Une fonction exponentielle
- Justifier la proportionnalité inverse d'une relation à partir de tableaux de nombres, de graphiques ou de formules issus de contextes variés.
- Identifier une croissance exponentielle à partir de graphiques ou de formules issus de contextes variés.

Appliquer

- L'élève sera capable de :
- Calculer un élément d'un tableau de proportionnalité inverse.
 - Construire un graphique à partir d'un tableau de nombres ou d'une formule.
 - Construire un tableau de nombres à partir d'un graphique ou d'une formule.

Transférer

- Associer graphiques, tableaux de nombres, formules.
- Choisir et utiliser les unités de mesure pertinentes dans une situation contextualisée.
- Résoudre un problème en mobilisant les puissances de 10 à exposant entier.
- Répondre à des questions inhérentes à une situation en se servant de l'outil approprié (graphique, tableau de nombres, formule).

1.2 Rappel

Les fonctions du premier degré

Proportionnalité

Complète le tableau suivant pour des bonbons coûtant 3 euros le kilo.

poids(kg)	1	2	5	10	20
prix(euro)	3				

Dans ce cas-ci, comment peux-tu exprimer en français la valeur du prix des bonbons par rapport à leur poids ? Et mathématiquement ?

.....

.....

Complète le tableau suivant exprimant la température du sol en fonction de l'épaisseur de la couche de neige posée dessus, si tu sais que pour chaque centimètre de neige ajouter, il fait deux fois plus froid.

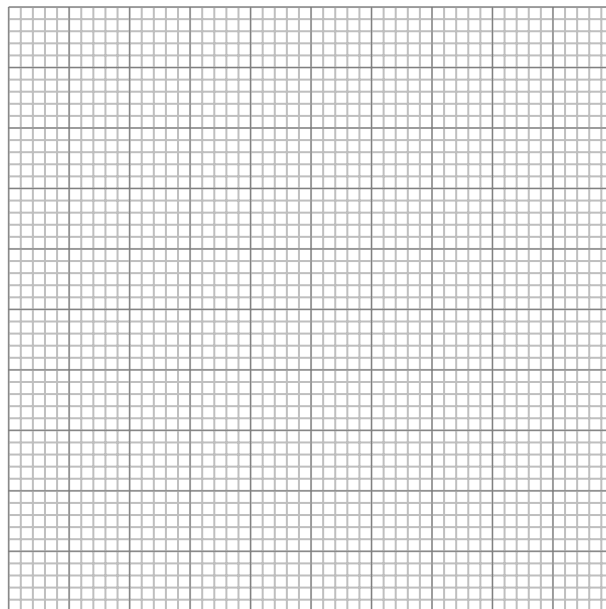
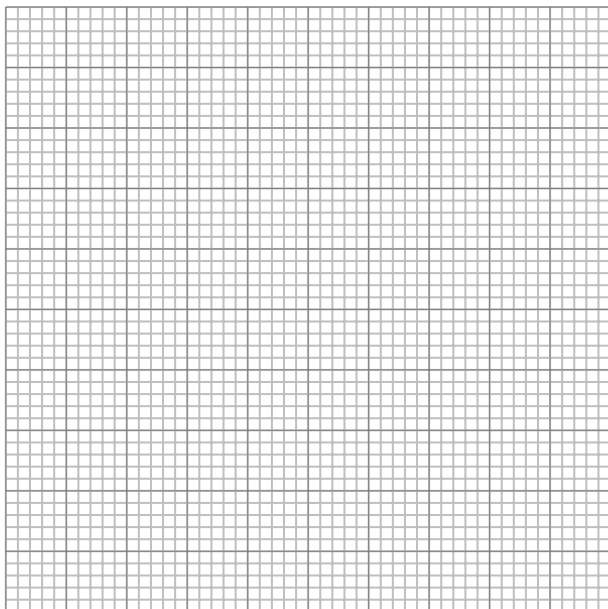
épaisseur(cm)	1	2	5	8	10	15
température(degré)	-2	-4	-10			

Dans ce cas-ci, comment peux-tu exprimer en français la valeur de la température par rapport à l'épaisseur de la neige ? Et mathématiquement ?

.....

.....

Trace les graphiques des fonctions correspondant aux deux cas précédents.



Quelles sont les caractéristiques communes aux deux graphiques ?

.....

.....

.....

.....

.....

Un peu de théorie

Les grandeurs des exercices précédents sont dites **proportionnelles**.


Définition

Deux grandeurs sont dites proportionnelles si en multipliant (ou en divisant) par une même constante non nulle les valeurs de l'une, on obtient les valeurs de l'autre. Cette constante est appelée **coefficient de proportionnalité**.

La relation entre deux grandeurs proportionnelles x et y s'écrit $y = kx$, avec $k \neq 0$, où k est le coefficient de proportionnalité.

En reprenant notre exemple de bonbons qui coûte 3 euros le kilo. Si on pose x comme étant le nombre de kilo et y le prix, on obtient le tableau ci-dessous qui illustre la relation de proportionnalité avec $y = 3x$. Dans cet exemple, le coefficient de proportionnalité est égal à 3.

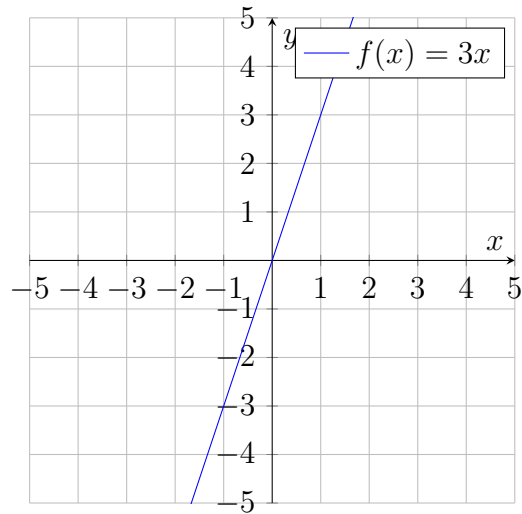
x	1	2	3	5	10
y	3	6	9	15	30



Représentation graphique

La relation de proportionnalité peut être représenté par le graphique d'une droite passant par l'origine.

Soit le graphique de la relation de proportionnalité de l'exemple des bonbons à 3 euros le kilo.



A quoi correspond la pente de cette droite ?

.....

.....

1.3 Proportionnalité inverse

Mise en situation

1. Tu as 100 kg de carottes que tu dois ramasser et stocker dans des sacs. Complète le tableau qui fait correspondre le nombre de sacs nécessaire pour stocker toutes les carottes en fonction de leur capacité.

Capacité des sacs(kg)	1	5	10	20	50	100
Nombre de sacs						

Comment as-tu calculé le nombre de sacs nécessaire ? Résume ton calcul par une règle qui met en relation la capacité des sacs x , le nombre de sacs y et le poids total de carottes k .

.....

.....

Règle
.....

2. Soit une personne devant parcourir 10 km.
 - (a) Complète le tableau suivant.

Vitesse (km/h)	1	2	5	10	20
Temps (heures)					

(b) Quel est le coefficient de proportionnalité dans cette situation ?

.....

(c) Que vaut le produit de la *vitesse* et du *temps* ?

.....

(d) Quelle est la relation de proportionnalité dans cette situation ?

.....

(e) Sans faire de calcul, explique comment évoluera le temps pour des vitesses immenses ?

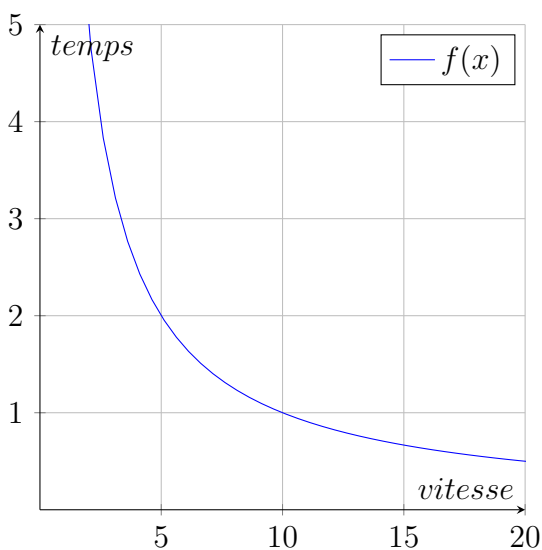
.....

(f) Inversement, comment évolueront les valeurs du temps pour des vitesses minuscules ?

.....

(g) Vérifie que tes intuitions sont cohérentes avec le graphique ci-dessous représentant la situation.

.....



Quelle différence remarques-tu avec les graphiques représentant les situations de proportionnalité directe ?

.....

.....

.....

Un peu de théorie

Définition

Deux grandeurs, x et y , sont dites **inversement proportionnelles**, si y est directement proportionnelle à **l'inverse de x** .

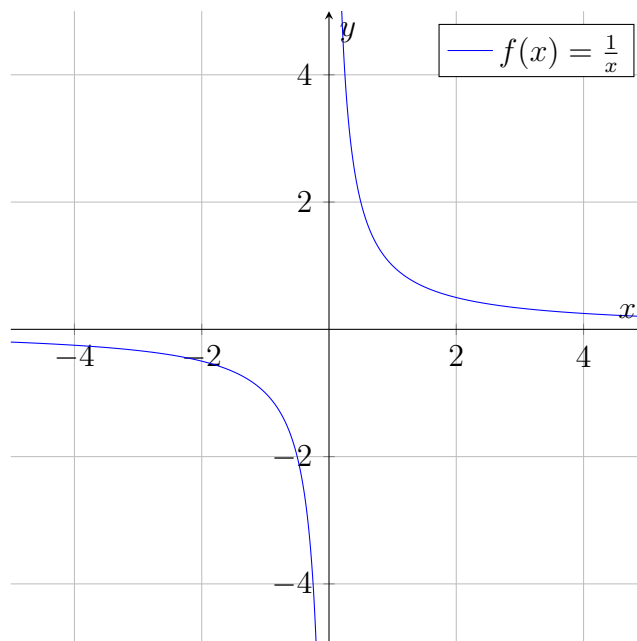
La **relation** entre deux grandeurs x et y **inversement proportionnelles** s'écrit $y = \frac{k}{x}$, avec $k \neq 0$, où k le coefficient de proportionnalité.

Propriété

Le **produit** de deux valeurs, x et y , **inversement proportionnelles** est égal au coefficient de proportionnalité k : $xy = k$.

Représentation graphique

Le graphique associé à la fonction $y = \frac{k}{x}$ est appelé une **hyperbole**.



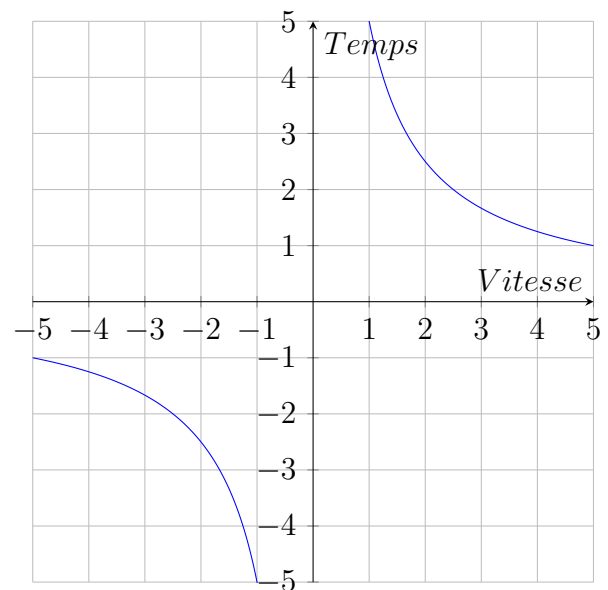
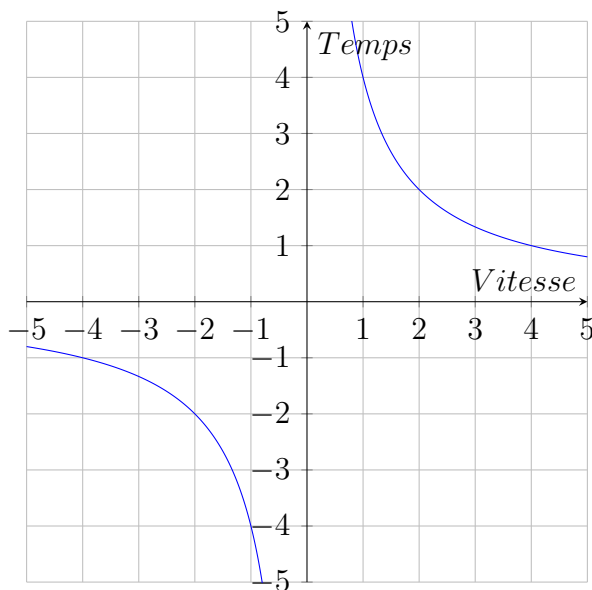
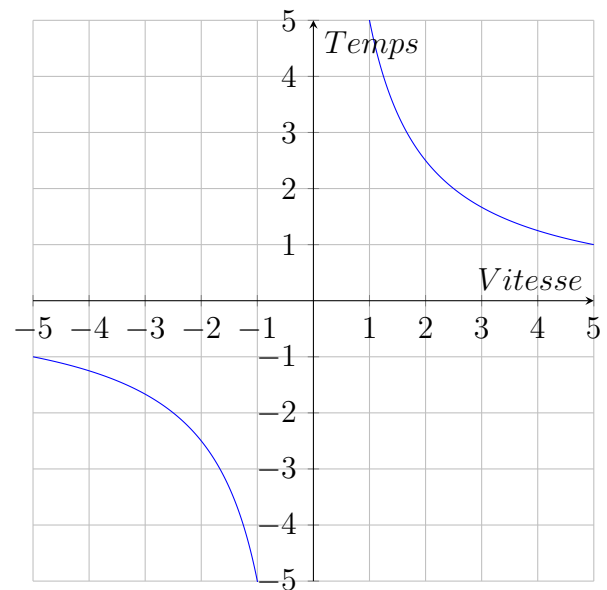
Il convient de remarquer que :

- La croissance/décroissance de la courbe n'est pas constante
- La courbe ne coupe à aucun endroit ni l'axe des abscisses, ni l'axe des ordonnées
- Quand les abscisses augmentent (x), les ordonnées (y) diminuent et inversement.

Parmi les graphiques suivants, lequel représente la situation de proportionnalité correspondant au tableau de valeur ? Quelle est cette relation ?

Vitesse (km/h)	1	2	4	8
Temps (h)	4	2	1	0.5

$Temps =$



Exercices

1. Indique si les grandeurs dans les situations suivantes sont proportionnelles ou inversement proportionnelles. Justifie.

- (a) Sarah est sauveteuse à une plage non loin de chez elle. Elle est payée 13 euros par heure. Sarah se demande combien elle gagnera après 40 heures de travail.

.....

.....

.....

- (b) Safouane est livreur pour le journal local. Chaque samedi matin, il doit distribuer 100 journaux dans son quartier. Ce samedi, il demande à ses amis de l'aider. Safouane s'interroge à savoir combien de journaux chacun devra livrer s'il réussit à convaincre 5 de ses amis.

.....

.....

.....

- (c) Si la relation entre deux grandeurs, x et y , est $y = \frac{x}{10}$

.....

.....

- (d) Mr Paquot souhaite partager un paquet de bonbons avec chacune de ses classes. Selon les classes, le nombre d'élèves varient. Monsieur Paquot se demande combien de bonbons les élèves des différentes classes auront.

.....

.....

.....

- (e) Une pompe vide cave dont le débit est de 200 litres par minutes met 4 heures (240 min) pour vider une cave inondée. Combien de temps durerait ce pompage si le débit était de 100, 400, 600 ou 800 litres par minute ?

.....

.....

- (f) Si la relation entre deux grandeurs, x et y , est $y = \frac{1}{10x}$

.....

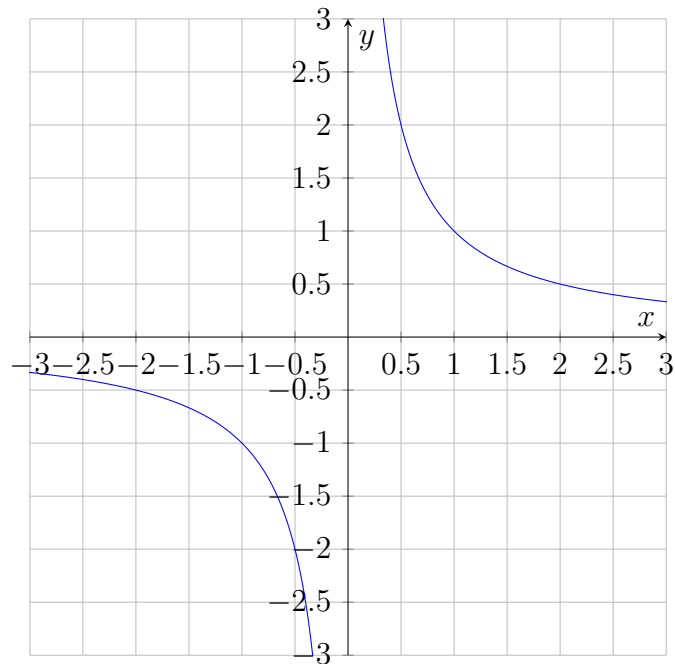
.....

2. Complète le tableau suivant, sachant que deux personnes mettent 12 heures pour construire un mur. Combien d'heures mettraient 4 personnes pour construire le même mur ? Quel est le coefficient de proportionnalité k ?

Nombre de personnes	1	2	3	4	6	8	48
Nombre d'heures							

$k =$

3. En t'aidant du graphique, complète le tableau ci-dessous.



x	-2	-1	1	2
y				

Si tu sais que ce graphique représente la relation entre des grandeurs inversement proportionnelles, quelle est le facteur de proportionnalité k ? Justifie.

$k =$

4. Une pompe vide cave dont le débit est de 200 litres par minute met 4 heures (240 min) pour vider une cave inondée. Combien de temps durerait ce pompage si le débit était de 100, 400, 600 ou 800 litres par minute ?

Débit (l/min)	100	200	400	600	800
Temps (heures)		4			

Quelle est valeur est constante dans les différents cas de figure ?

.....

Écris la relation de proportionnalité.

.....

5. Yasmina gagne au loto la somme de 10 000 euros. Étant généreuse, elle décide de partager cette somme avec tous les membres de sa famille. Sachant que chaque personne a reçu 250 euros, écris la relation de proportionnalité et détermine combien de personnes constituent la famille de Yasmina.

Relation de prop. :

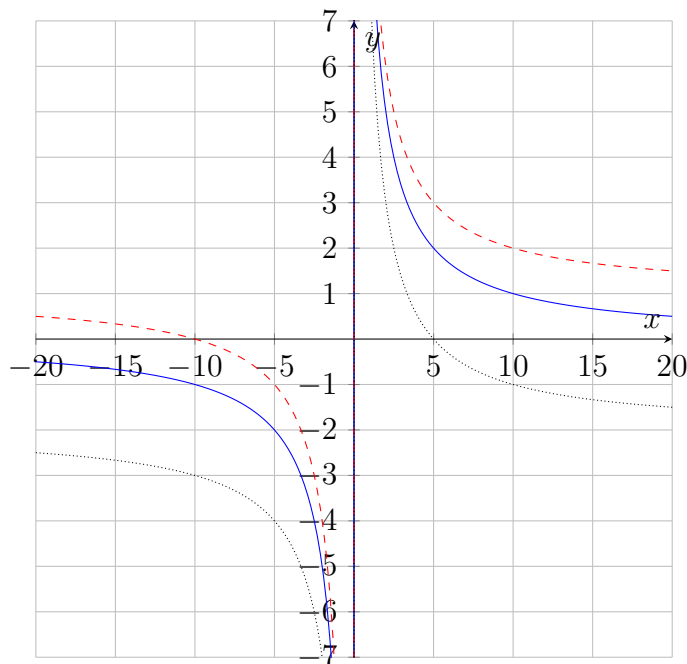
Membres de la famille :

6. Soit les graphiques suivants, associe chaque graphique à sa fonction et complète la phrase ci-dessous en sachant qu'ils représentent les fonctions :

(a) $f(x) = \frac{10}{x}$

(b) $g(x) = \frac{10}{x} + 1$

(c) $h(x) = \frac{10}{x} - 2$



Le graphique associé à la fonction $y = \frac{k}{x} + b$, est le graphique de la fonction décalée de unités vers le si $b > 0$, vers le si $b < 0$.

7. Dix chevaux ont consommé, en 12 jours, 200 kg de foin. En combien de jours ce foin sera consommé si on a trente chevaux ?

(a) La relation est-elle proportionnelle ou inversement proportionnelle ?

.....

(b) Quelle est le coefficient de proportionnalité ?

.....

(c) Quelle est la formule qui exprime la relation ?

.....

(d) Déduis la réponse à la question grâce à la formule.

.....

.....

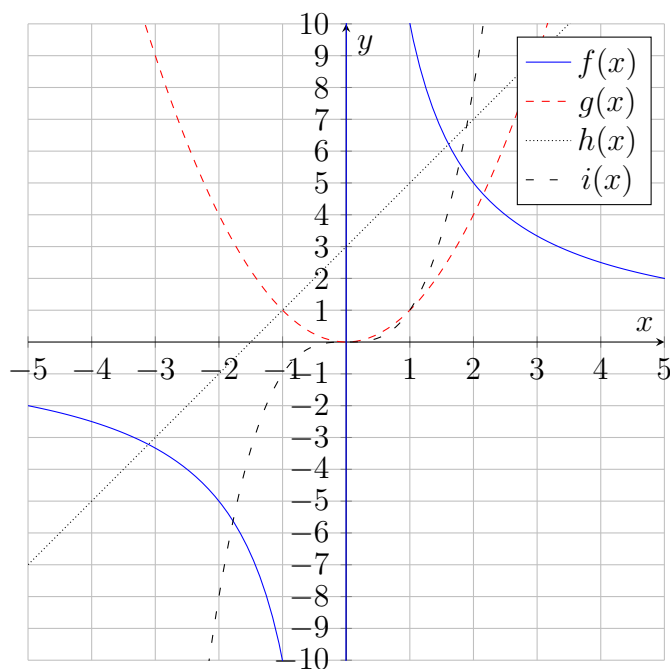
1.4 Fonctions puissances à exposant entier

Mise en situation

Complète le tableau et puis identifie parmi les graphiques ci-dessous, lequel peut être associé à la fonction x^2 , x^3 , $\frac{10}{x}$, $2x + 3$?

x	-2	-1	0	1	2
x^2					
x^3					
$\frac{10}{x}$					
$2x + 3$					

	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)
x^2				
x^3				
$\frac{10}{x}$				
$2x + 3$				

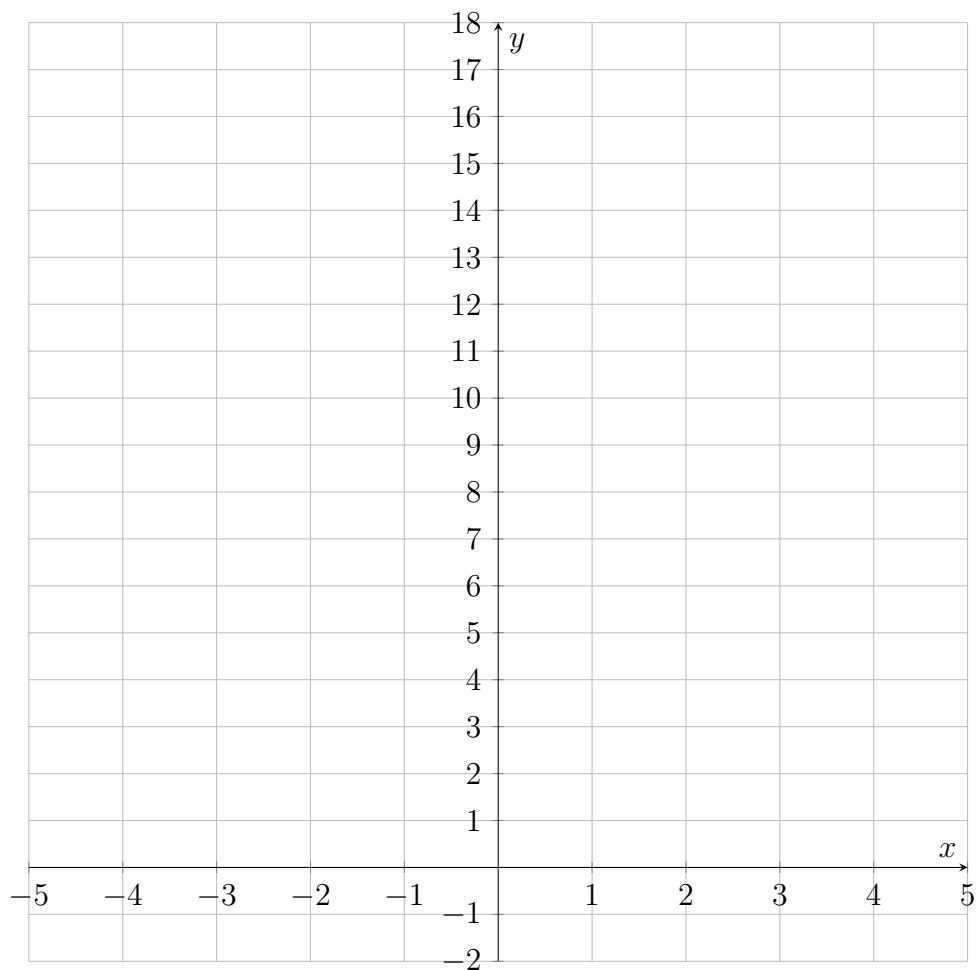


Fonction carré

La fonction carré est la fonction qui, à tout réel x , associe son carré : $f(x) = x^2$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2									



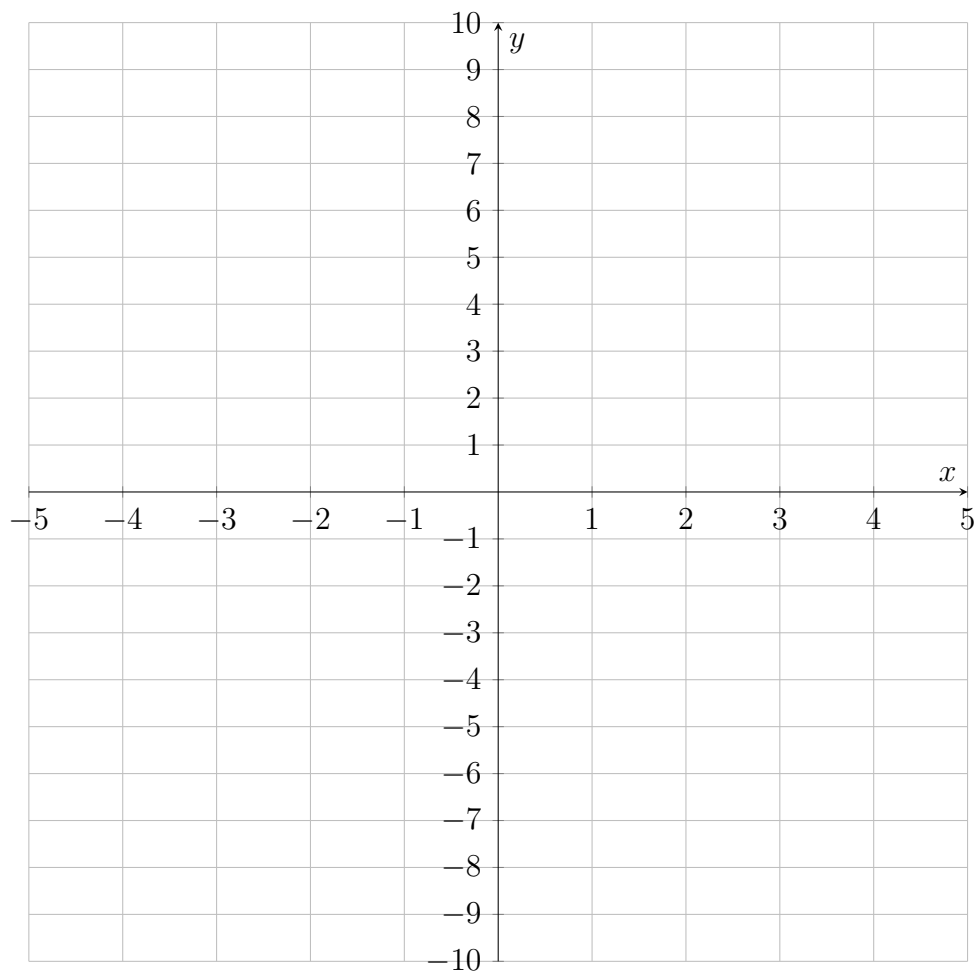
Le graphique associé à la fonction carré est une **parabole**.

Fonction cube

La fonction cube est la fonction qui, à tout réel x , associe son cube : $f(x) = x^3$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
x^3					

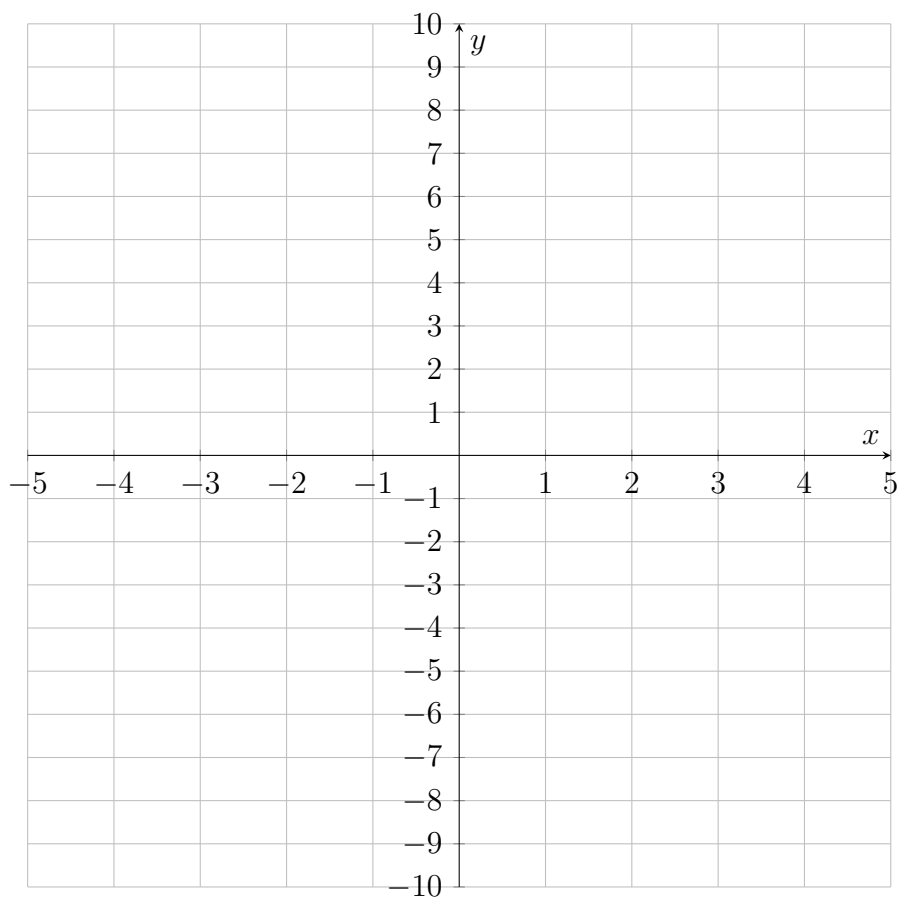


1.5 Fonction du premier degré

Les fonctions du premier degré sont les fonctions de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des nombres réels non nuls. Exemple : $y = 3x + 2$ est la fonction avec $m = 3$ et $p = 2$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3x + 2$					



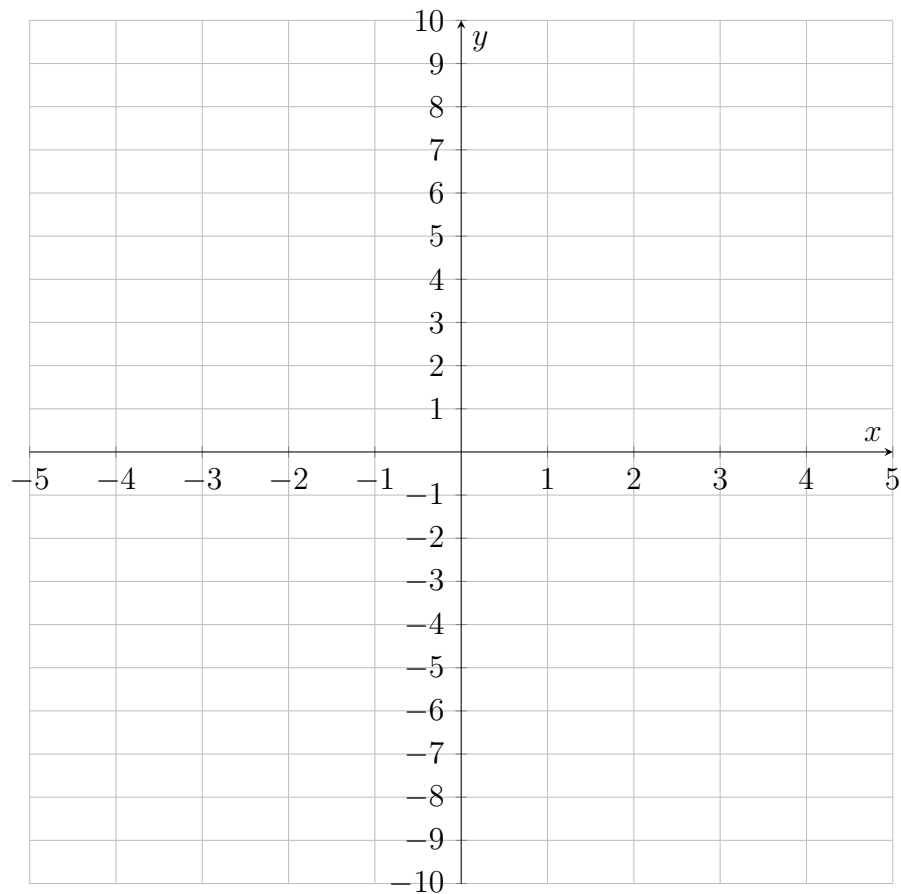
Le graphique d'une fonction du premier degré est

1.6 Fonctions constantes

Les fonctions constantes sont des cas particuliers des fonctions du premier degré ($y = mx + p$), pour lesquelles $m = 0$. Exemple : $y = 2$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2$					



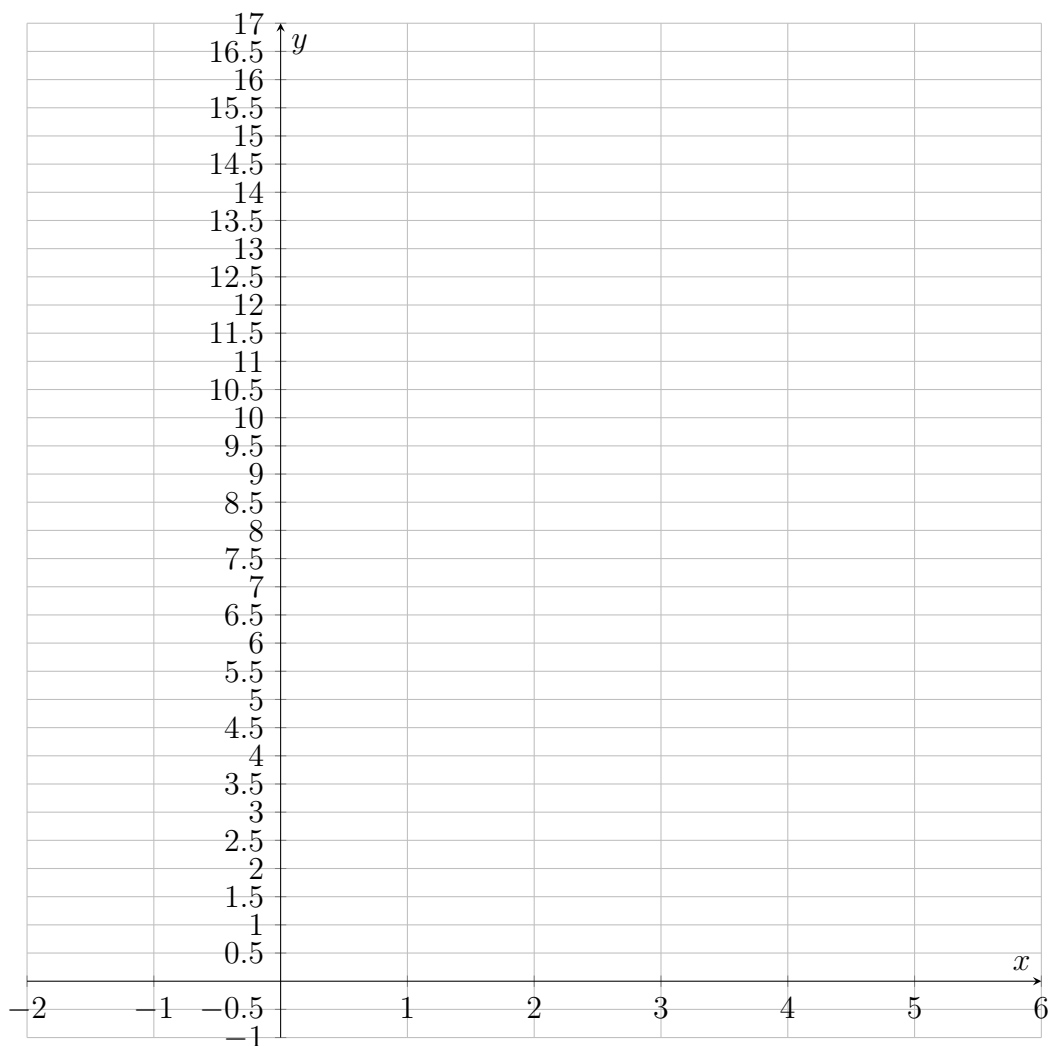
Le graphique d'une fonction constante est

1.7 Fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont des fonctions de la forme $y = a^x$ avec a un nombre réel positif non nul. Exemple : $y = 2^x$.

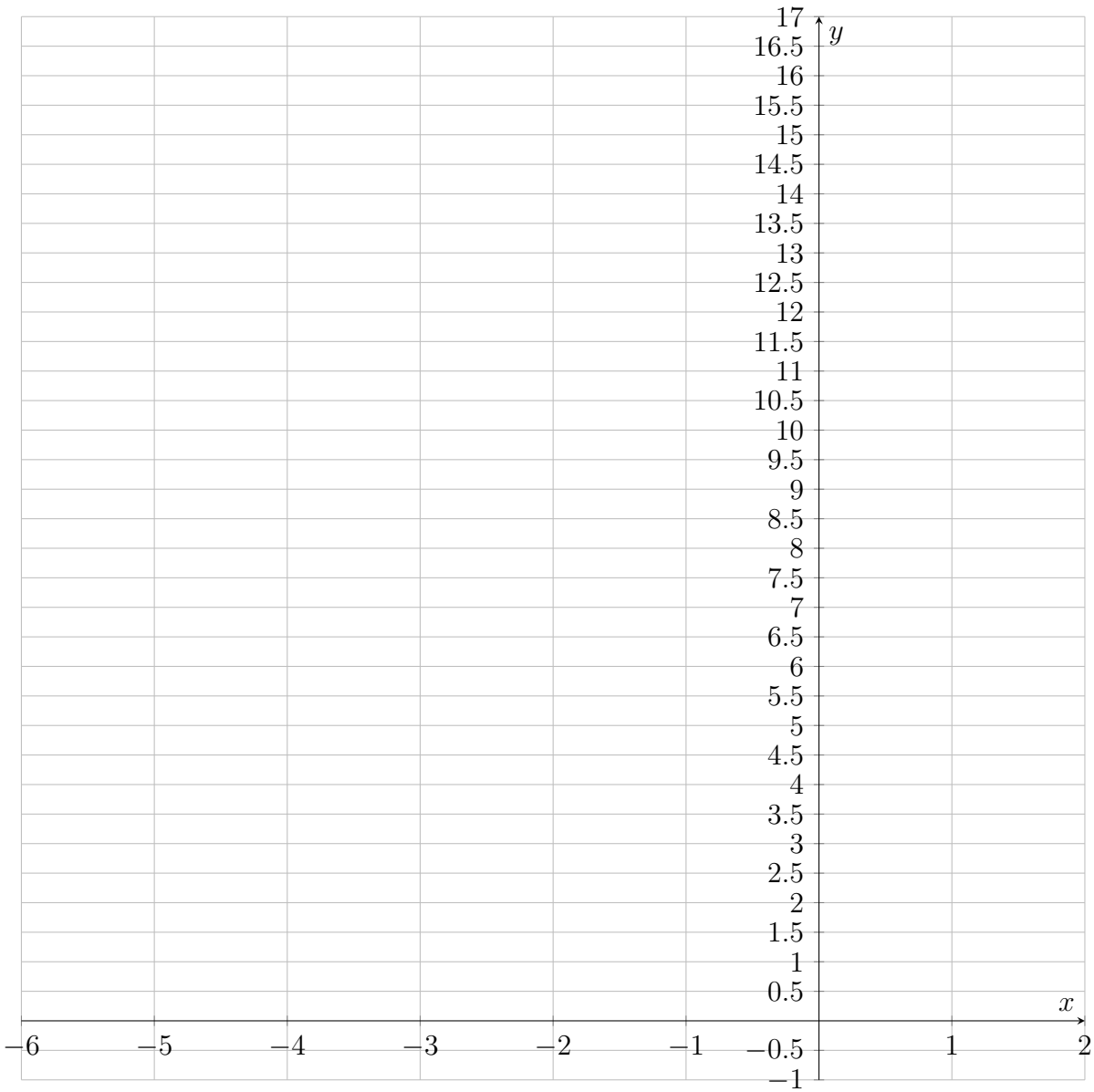
Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$							



Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = (\frac{1}{2})^x$							



1.8 Croissance des fonctions

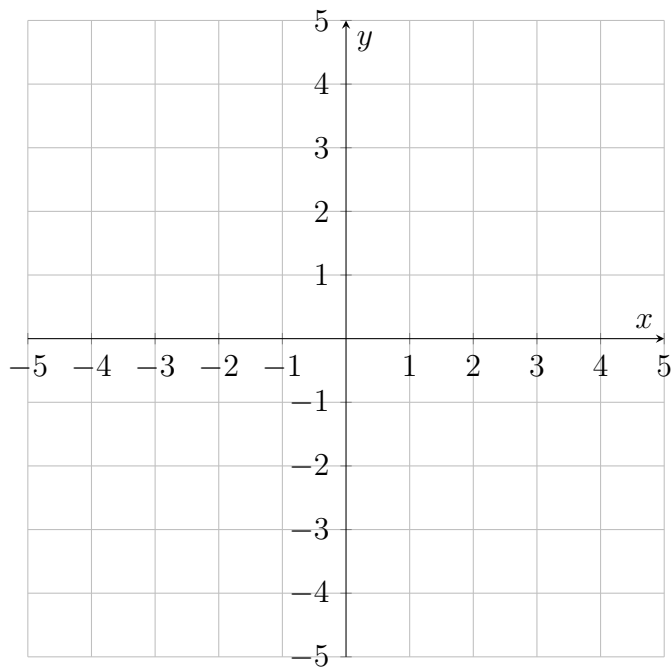
Une fonction est dite croissante sur un intervalle, si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x croît.

Une fonction est dite décroissante sur un intervalle, si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x croît.

Pour les fonctions vues en cours, dessine le graphique correspondant et indique si elles sont croissantes, décroissantes ou constantes tout le temps ou sur certains intervalles.

1. $f(x) = 3x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

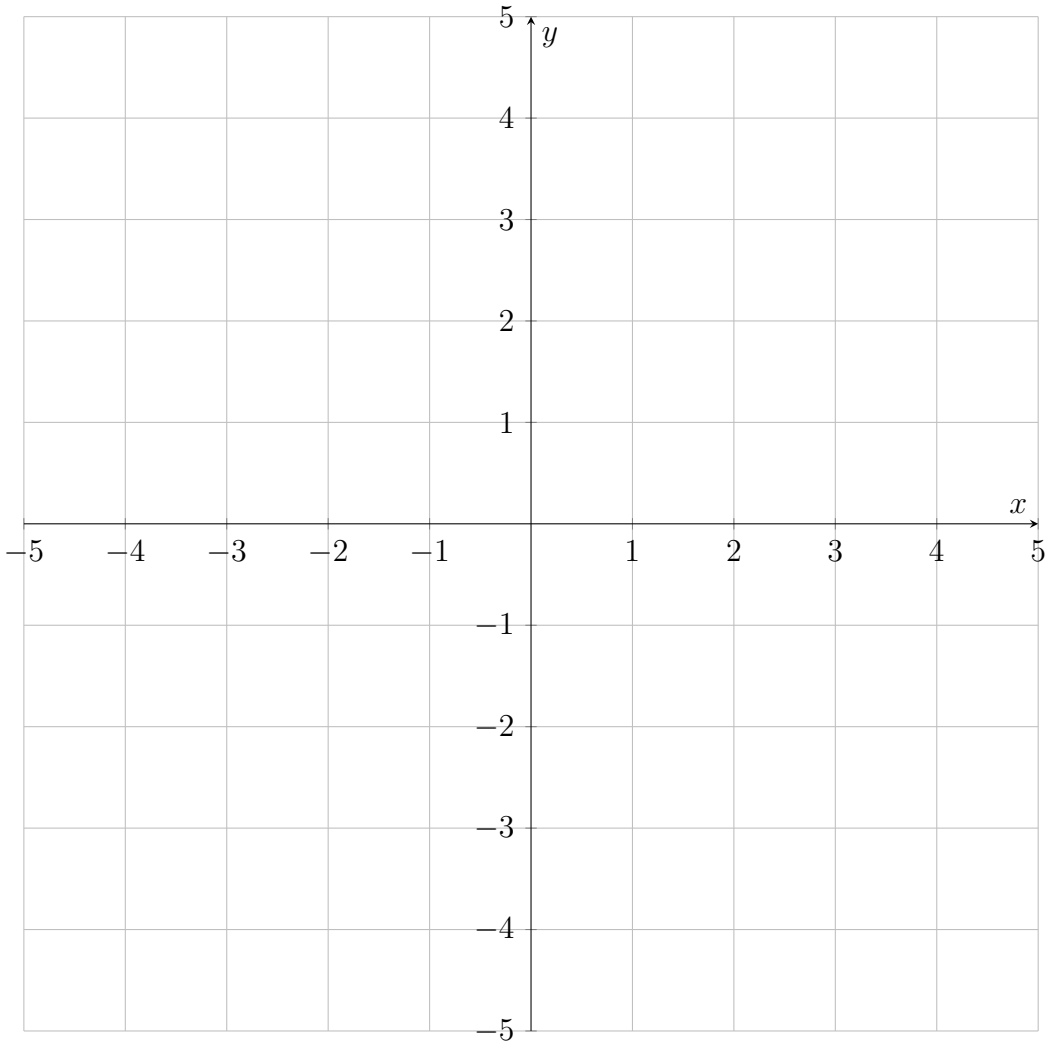


.....

.....

2. $f(x) = -2x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

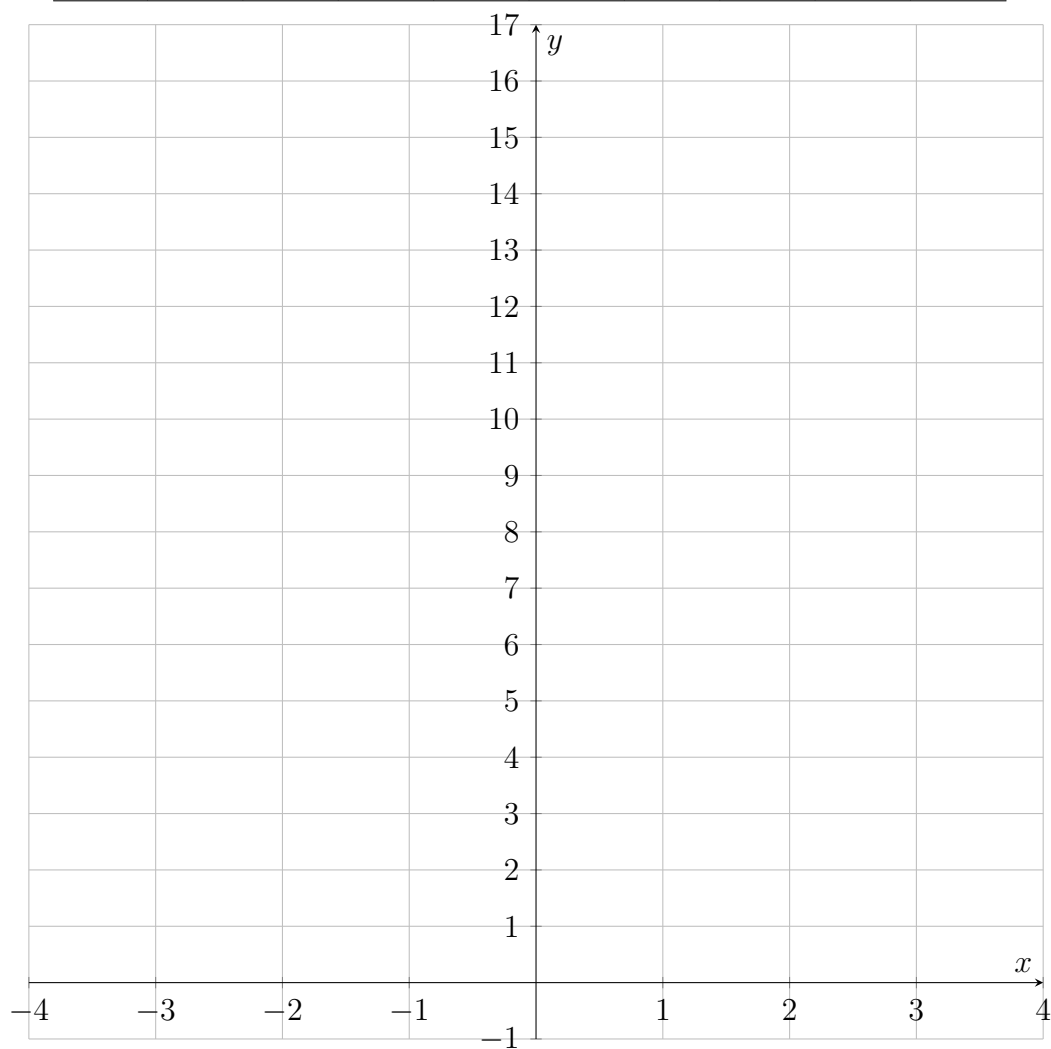


.....

.....

3. $f(x) = x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

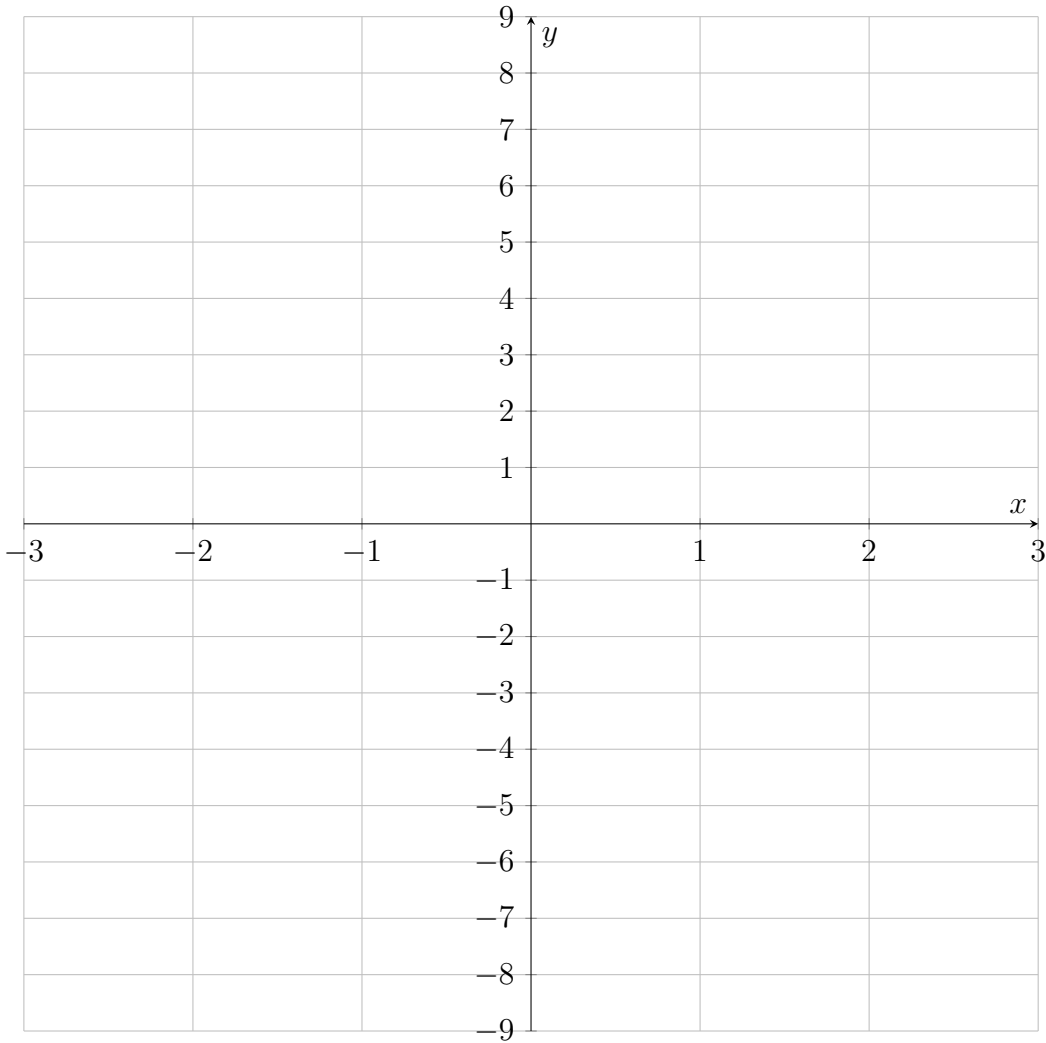


.....

.....

4. $f(x) = x^3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

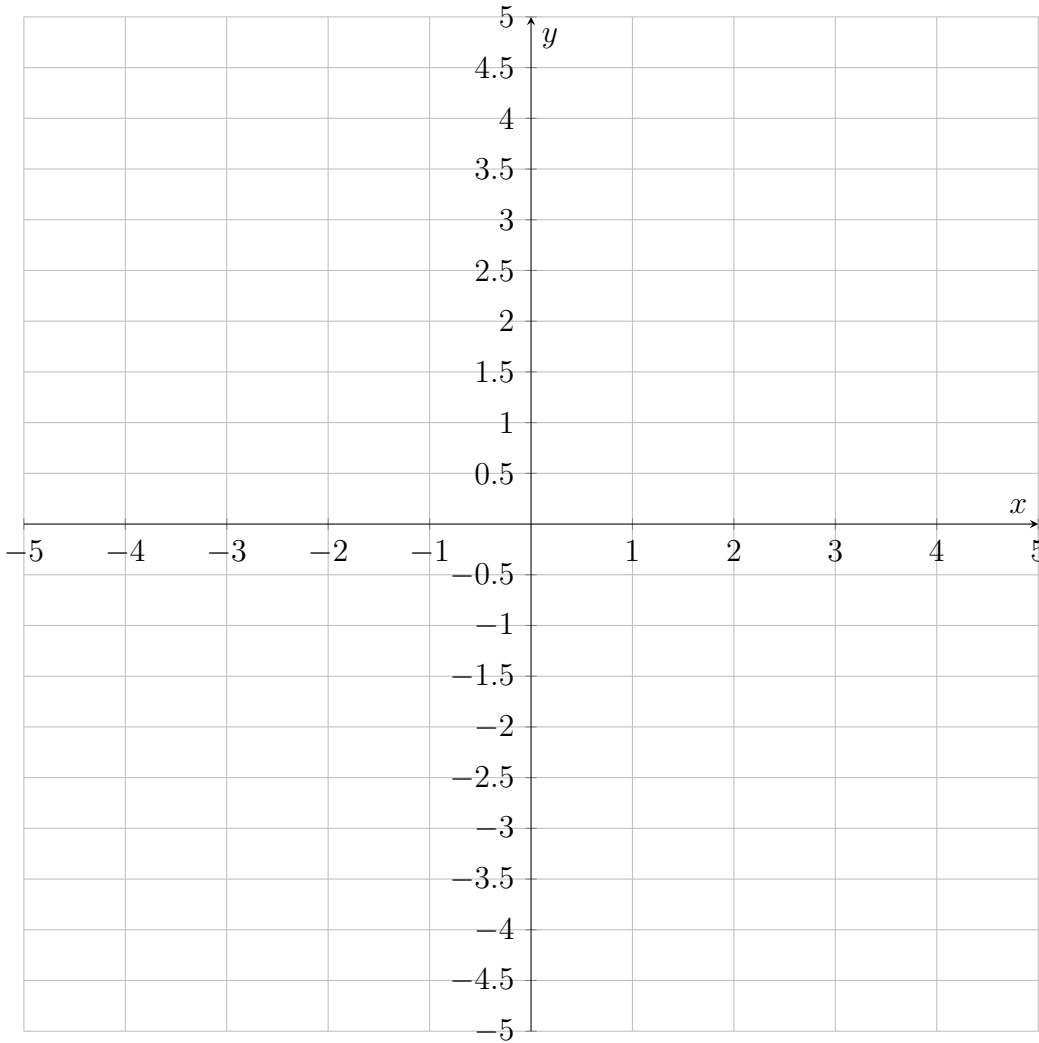


.....

.....

5. $f(x) = \frac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$							

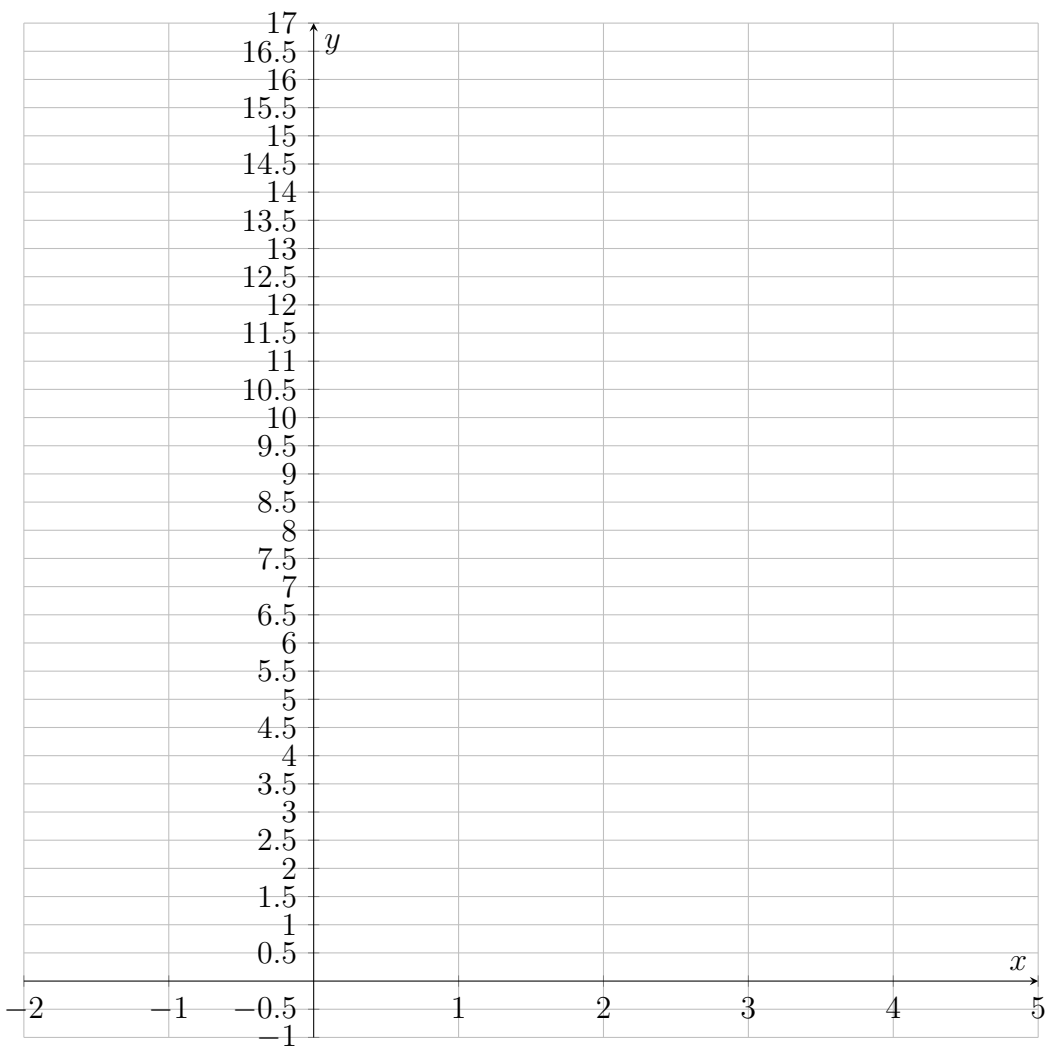


.....

.....

6. $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

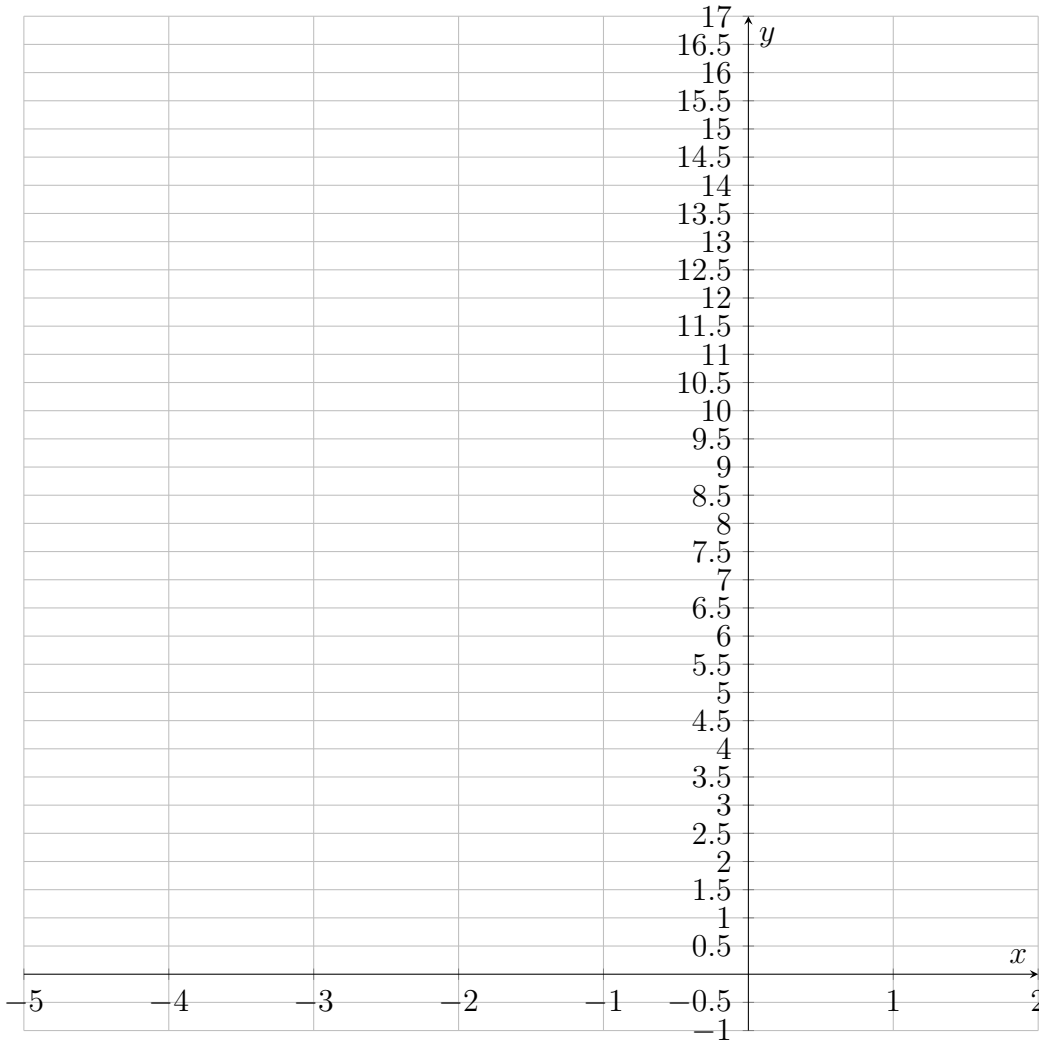


.....

.....

7. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							



.....

.....

Exercices supplémentaires

- Pour ton abonnement de téléphone, tu as le choix entre deux entreprises qui te propose les formules suivantes par mois :

(a) 10 euros de frais de connexion et 2 euros par GB

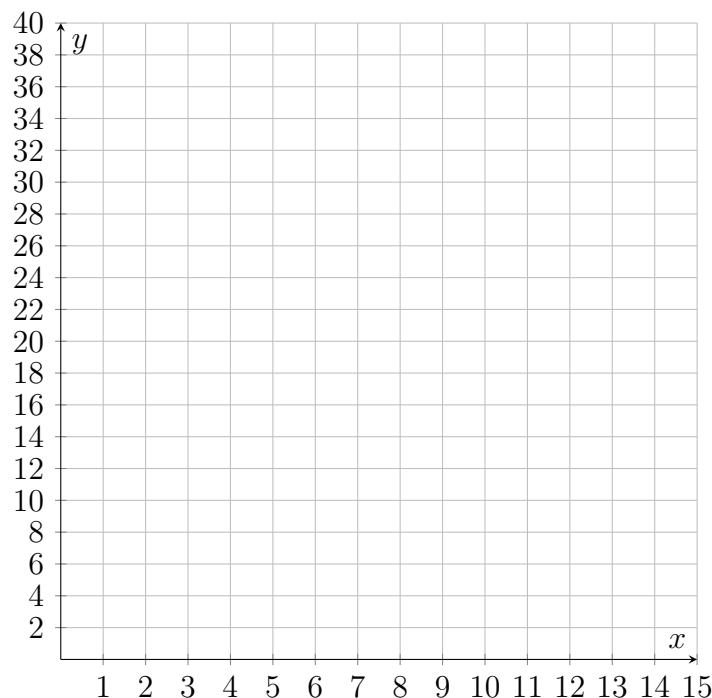
(b) 20 euros de frais de connexion et 1 euro par GB

Sachant que tu télécharges en moyenne 8 GB par mois, laquelle des deux formules est la plus avantageuses ? Trace le graphique pour trouver la réponse.

$Formule_1(x) = \dots\dots\dots$

$Formule_2(x) = \dots\dots\dots$

x		
$F_1(x)$		
$F_2(x)$		



- Ton employeur te propose deux formules de salaire :

(a) 20 euros de frais de déplacement et 15 euros par heure

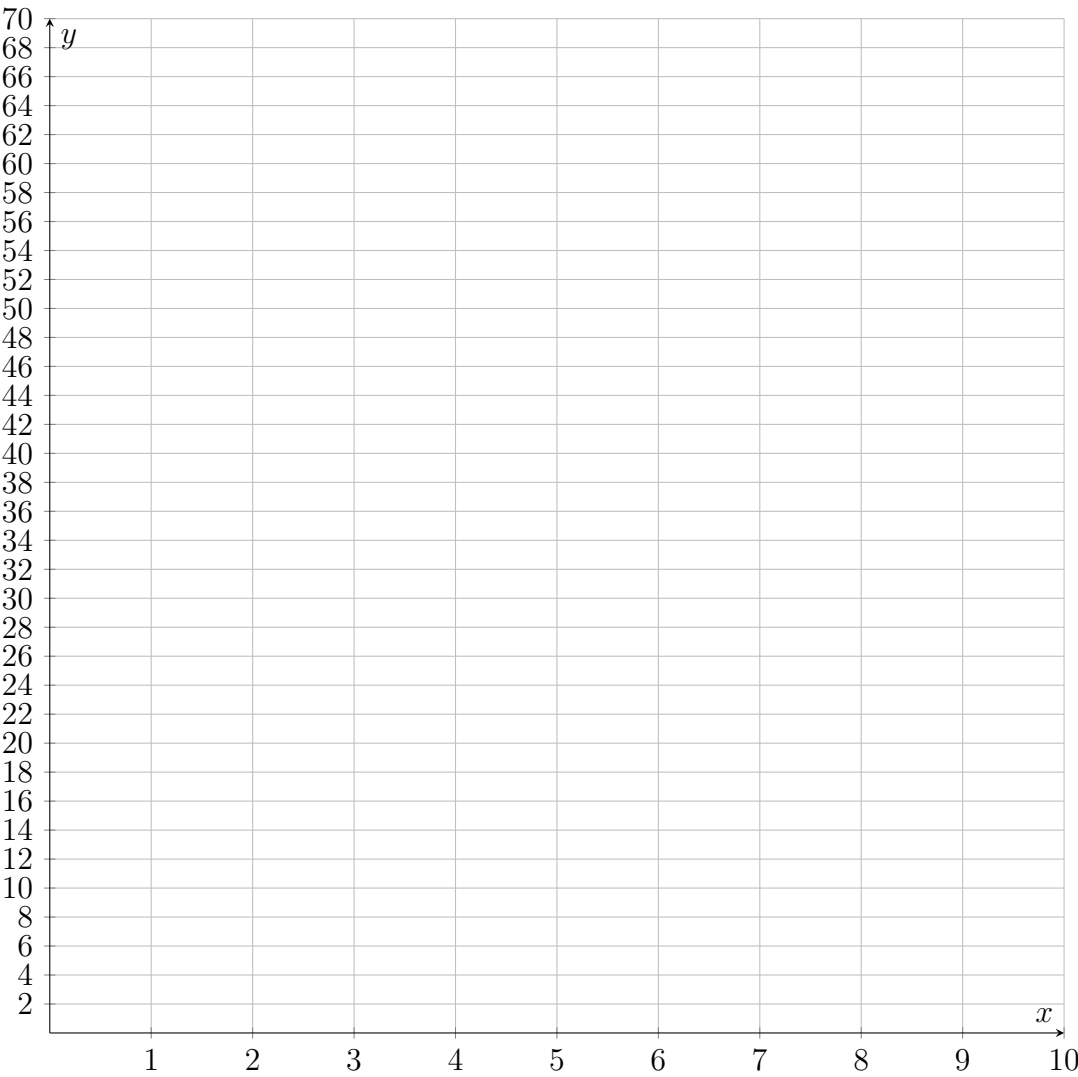
(b) Pas de frais de déplacement et ton salaire correspond au nombre d'heures que tu travailles élevé au cube.

Sachant que tu travailles 6 heures par jour, lequel des deux salaires choisis-tu ? Trace le graphique pour trouver la réponse.

$Salaire_1(x) = \dots\dots\dots$

$Salaire_2(x) = \dots\dots\dots$

x		
$S_1(x)$		
$S_2(x)$		



CHAPITRE 2

Statistique et probabilité

2.1 Vocabulaire

— La statistique :

.....

.....

— Les statistiques :

.....

.....

— La population :

.....

.....

— Les individus :

.....

.....

— Échantillon :

.....

.....

— Le caractère :

.....

.....

— L'effectif d'une valeur :

.....

Dans les études suivantes, identifie la population, l'échantillon et le caractère étudié.

Dans l'école Sainte-Marie la sagesse, le directeur aimerait avoir une idée de la série la plus appréciée par les élèves de l'école. Pour ça, il fait remplir un sondage par une classe de chaque niveau d'étude (une classe de première, une classe de deuxième,...).

— Population :

— Échantillon :

— Caractère étudié :

En allant au supermarché, tu décides de faire une étude statistique sur la couleur des voitures présentes sur le parking. Pour ce faire, tu notes toutes les couleurs des voitures dans un carnet et les comptabilise.

— Population :

— Échantillon :

— Caractère étudié :

Les différents caractères

— Un caractère quantitatif est

.....

— Un caractère quantitatif continu est

.....

— Un caractère quantitatif discret est

.....

— Un caractère qualitatif est

.....

Parmi les études suivantes, quels sont la population et le caractère étudié ? Les caractères étudiés sont-ils qualitatifs, quantitatifs continus ou quantitatifs discrets ?

1. Étude statistique sur les moyennes en math des élèves de la classe.

— Population :

— Caractère étudié :

— Le caractère étudié est

2. Étude statistique sur les séries préférées des élèves de la classe.

— Population :

— Caractère étudié :

— Le caractère étudié est

3. Étude statistique sur le nombre d'heures passé devant un écran par les élèves de l'école.

— Population :

— Caractère étudié :

— Le caractère étudié est

4. Étude sur le nombre d'épisodes regardé tous les jours par les élèves de la classe.

— Population :

— Caractère étudié :

— Le caractère étudié est

5. Étude sur les couleurs des voitures des enseignant·es de l'école.

— Population :

— Caractère étudié :

— Le caractère étudié est

2.2 Outils statistiques

La moyenne

Moyenne d'une série statistique

La moyenne d'une série statistique s'obtient en divisant la somme des toutes les valeurs de la série par la taille de l'échantillon.

Exemple :

Soit les résultats sur 20 d'un élève obtenu pour le cours de math : 12,14,8,4,12,15,14,12,15,16.

La moyenne est :

La médiane

La médiane d'une série statistique

La médiane d'une série statistique est la valeur de la série de sorte que 50% des valeurs de la série sont inférieurs ou égale à cette valeur.

Exemple :

Soit les résultats sur 20 d'un élève obtenu pour le cours de math : 12,14,8,4,12,15,14,12,15,16.

La médiane est :

L'étendue

L'étendue d'une série statistique

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de cette série.

Exemple :

Soit les résultats sur 20 d'un élève obtenu pour le cours de math : 12,14,8,4,12,15,14,12,15,16.

L'étendue est :

Le mode

Le mode d'une série statistique

Le mode d'une série statistique est la valeur la plus souvent observée de la série. Il peut cependant avoir plusieurs modes.

Exemple :

Soit les résultats sur 20 d'un élève obtenu pour le cours de math : 12,14,8,4,12,15,14,12,15,16.

Le mode est :

La fréquence

La fréquence d'une série statistique

La fréquence d'une série statistique est le quotient de l'effectif de cette valeur par la taille de la population.

Exemple :

Soit les résultats sur 20 d'un élève obtenu pour le cours de math : 12,14,8,4,12,15,14,12,15,16.

Le fréquence de la valeur 14 est :

Exercices

1. Soit le tableau de données suivant reprenant les résultats d'un élève :

Matières	I1	I2	I3	E1	I4	I5	I6	I7	E2
Math	12	11	8	7	14	12	4	15	19
Religion	12	11	10	8	4	7	15	12	13
Français	12	13	12	14	15	12	12	14	13
Histoire	12	15	8	12	14	7	14	7	12

Calcule :

— La moyenne obtenue en Math (interro + Examen) :

— La moyenne obtenue aux examens de religion :

- La moyenne des examens de la session de décembre (E1) :
- La médiane des résultats obtenus en histoire :
- La médiane des résultats des examens de la session de juin (E2) :
- Le mode de tous les résultats confondus :
- La fréquence de la valeur 12 en français :
- La fréquence de la valeur 7 parmi tous les résultats :
- L'étendue des résultats d'histoire :

- Un chercheur souhaite déterminer quelle est la profession la plus dangereuse pour la santé. Pour ça, il encode l'âge des personnes lors de leur décès et leur profession. Il réalise ensuite une moyenne pour chaque profession et la place dans un tableau. Soit le tableau de résultat suivant :

Profession	Policier	Pompier·ère	Étudiant·e	Professeur	Ministre
Moyenne âge de décès	67	72	21	70	75

Quel est le métier le plus dangereux ? Comment expliquer ce résultat ?

.....

.....

.....

- Deux de tes amis ont lancé un commerce il y a 10 ans.

Le premier te dit que entre la deuxième année et maintenant, son chiffre d'affaire a fait fois 10 ! Impressionné tu demandes à ton autre ami les même détails, et lui te dit que entre la deuxième année et maintenant son chiffre d'affaire a triplé. Ces informations sont-elles suffisantes pour savoir dans laquelle des deux entreprises investir tes économies ?

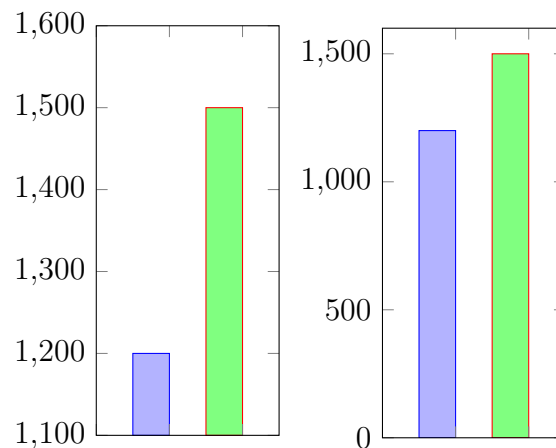
.....

.....

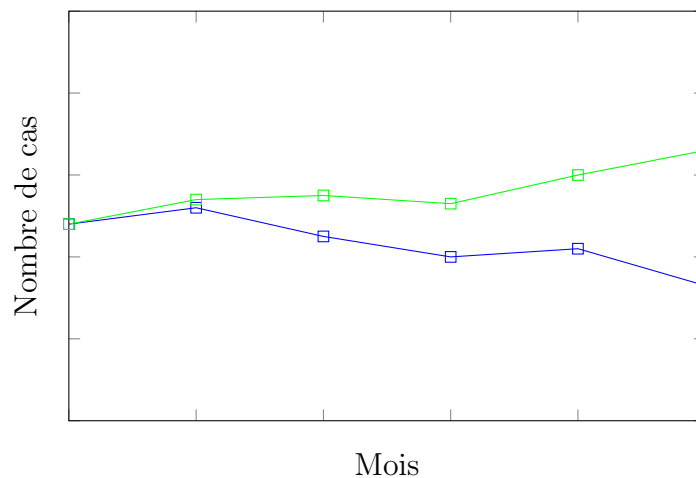
Représentations graphiques

- Un entreprise lance un nouveau produit et illustre les performances de celui-ci comparées à celles d'une entreprise concurrente (premier graphique).

En faisant toi même les comparaisons tu arrives au deuxième graphique. L'entreprise a-t-elle menti ?

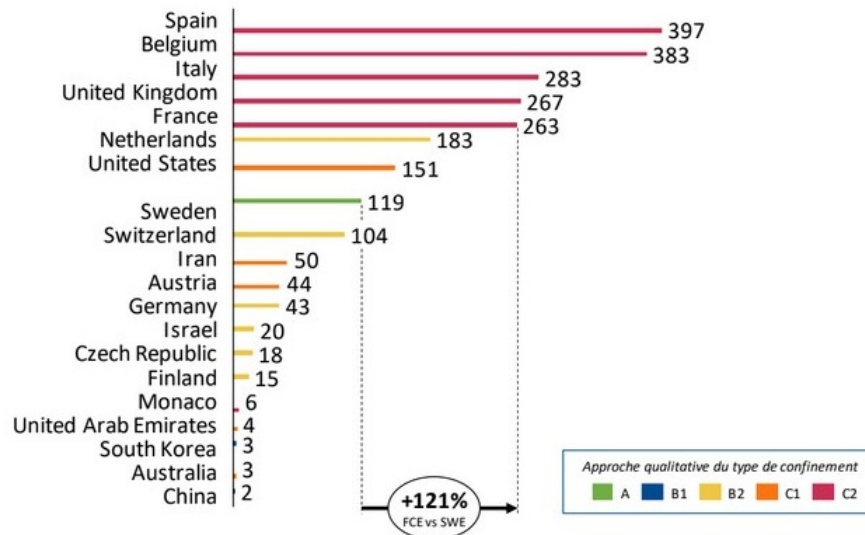


2. Soit le graphique ci-dessous représentant le nombre de cas COVID par mois en Californie (en bleu) et dans l'état de New York (en vert). Peut-on sur base de ce graphique juger lequel des deux états a pris les meilleures dispositions pour gérer la crise ?

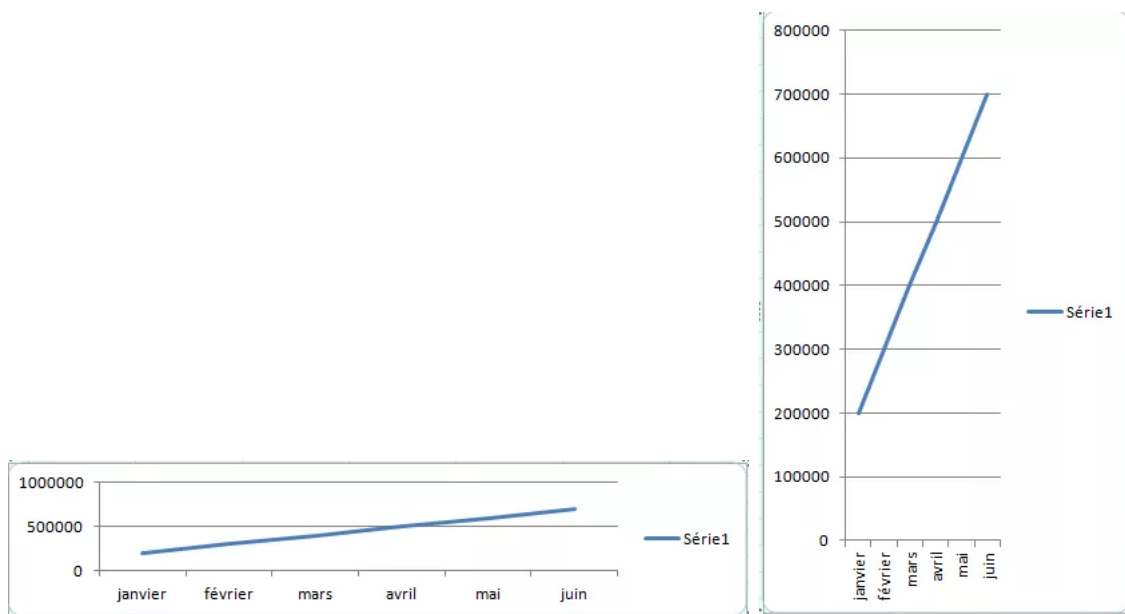


3. En se basant sur le graphique ci-dessous votre ami vous affirme que confiner entraîne plus de morts que de ne pas confiner. En effet, la Suède qui n'a presque pas confiné compte beaucoup moins de morts que la France qui a eu un confinement très strict. Qu'en pensez-vous ?

Total des morts confirmés par million d'habitants au même stade de l'épidémie par pays (40^{ème} jour de chacun des pays)



4. Laquelle de ces deux entreprises possède une augmentation de bénéfices plus importante ?



Les différentes représentations graphiques

Diagramme circulaire

Soit les résultats des élèves pour les examens de fin d'année :

Réussi	Examen de passage	Raté
70	20	10

Représente ces données dans le diagramme circulaire ci-dessous.

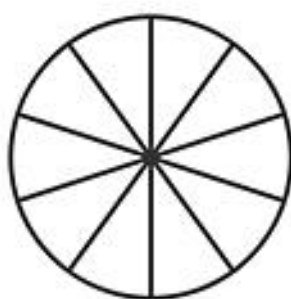
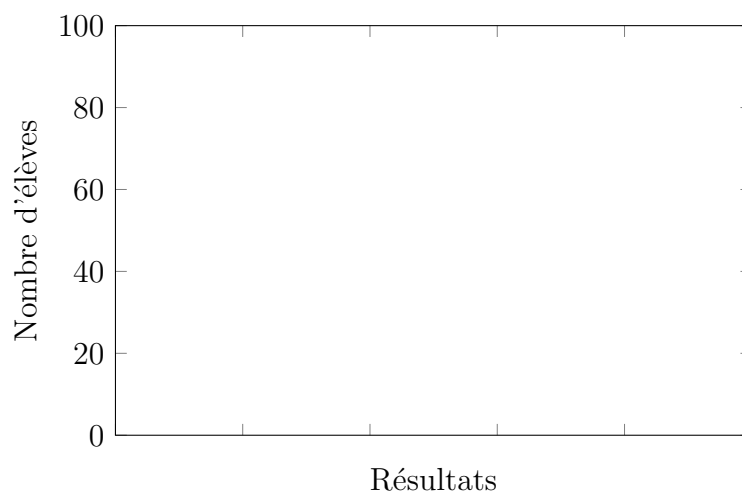


Diagramme en bâtons

Représente les mêmes résultats avec un diagramme en bâtons.

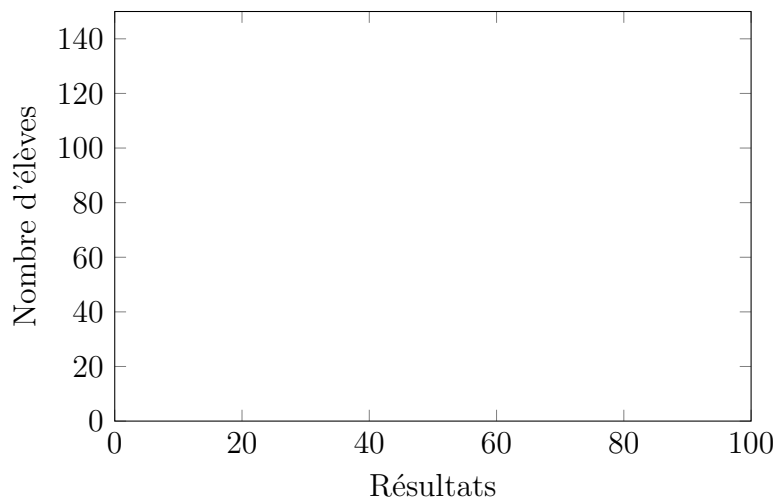


Histogramme

Soient les moyennes des élèves reprises dans le tableau ci-dessous :

Moyenne	20-40	40-60	60-80	80-100
Nombre d'élèves	40	120	140	40

Représente les grâce à un histogramme.



Exercices

Représente graphiquement les résultats des études statistiques suivantes :

1. On a interrogé 100 personnes sur la question suivante : « Combien de fois avez-vous été au cinéma le mois dernier ? » Les réponses ont été rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Nombre de séances	0	1	2	3	4
Effectif	18	30	22	19	11

2. Dans une entreprise, pour être vendues, les pommes de terre sont triées selon leur calibre. On a regroupé les résultats dans le tableau suivant.

Calibre en mm	[60 ; 65[[65 ; 70[[70 ; 75[[75 ; 80[
Quantité en kg	105	156	145	98

3. À l'occasion d'une épreuve de saut en hauteur, on a noté les résultats des participants dans le tableau ci-dessous.

Hauteur en cm	105	110	115	120	125
Effectif	4	3	12	4	5

2.3 Probabilités

Probabilité

Les probabilités consistent en l'étude des phénomènes aléatoires. Les résultats de l'expérience sont appelés éventualités et l'ensemble des éventualités est appelé événement. Si l'on peut associer les issues d'un événement avec une fréquence d'apparition, l'expérience est appelée « épreuve ».

Comment calculer une probabilité ?

Une probabilité qu'un événement se produise est égale à $\frac{\text{nombreSucces}}{\text{nombreTotal}}$.

Avec *nombreSucces* qui est le nombre de cas où l'événement se produit, le nombre total étant tous les événements possibles.

Exemple : Si je lance un dé à 6 faces, le nombre total d'événements possibles est égal à 6 :

1. La face montre le chiffre 1.
2. La face montre le chiffre 2.
3. La face montre le chiffre 3.
4. La face montre le chiffre 4.
5. La face montre le chiffre 5.
6. La face montre le chiffre 6.

Si l'événement dont je veux calculer la probabilité est « obtenir le chiffre 3 », la probabilité est égale à $\frac{\text{nombreSucces}}{\text{nombreTotal}} = \frac{1}{6}$.

Exemples

Quelle est la probabilité que ces événements se produisent ?

1. Piocher le huit de carreaux dans un paquet de 52 cartes ?
.....

2. Obtenir un nombre pair en lançant un dé à six faces ?
.....

3. Piocher un huit dans un paquet de 52 cartes ?

.....

4. Piocher une carte noire (pique ou trèfle) dans un paquet de 52 cartes ?

5. Piocher une figure (roi, valet, dame) dans un paquet de 52 cartes ?

.....

Caractéristiques

1. Une probabilité est un nombre compris entre et

2. La somme des probabilités de tous les résultats possibles d'une expérience est égale à