

Cours de mathématiques 2022/2023 - 5TQA

Arthur Paquot

CHAPITRE 1

Système d'équations linéaires

1.1 Programme de l'année

Système d'équations linéaires

Agenda

Le chapitre sera traité durant les mois de septembre et d'octobre.

Connaître

- L'élève sera capable de reconnaître un système d'équations linéaires du premier degré (à 2 ou 3 inconnues) impossible, indéterminé ou avec une solution unique.
- L'élève sera capable d'expliquer dans ses mots les notions suivantes :
 - Équation du premier degré
 - Inconnue d'une équation
 - Un système d'équations
 - Une matrice
- L'élève sera capable d'expliquer le lien entre la représentation graphique d'un système d'équations et son nombre de solutions.

Appliquer

- L'élève sera capable de résoudre un système d'équations selon chacune de ces méthodes :
 - Résolution graphique
 - Résolution par substitution
 - Résolution par la méthode de Gauss-Jordan
 - Résolution par la méthode de Cramer
- L'élève pourra manipuler les équations d'un système de sorte à les écrire sous la forme d'équations de droites et les représenter dans un repère cartésien.

Transférer

- L'élève sera capable de résoudre un problème inconnu se ramenant à la résolution d'un système d'équations du premier degré à 2 ou 3 inconnues.

1.2 Système de deux équations à deux inconnues

Définition

Un **système de deux équations à deux inconnues** est un ensemble formé par deux équations impliquant les deux mêmes variables. Il se note, avec $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

Exemple d'introduction

Lundi, tu te rends dans un magasin de seconde main et tu ressorts avec 4 DVD et 2 livres. En tout, tu as payé 16 €. Le week-end, tu te rends à nouveau dans ce magasin et tu achètes 1 DVD et 1 livre pour 5 €. A quel prix sont vendus les livres et les DVD dans ce magasin ?

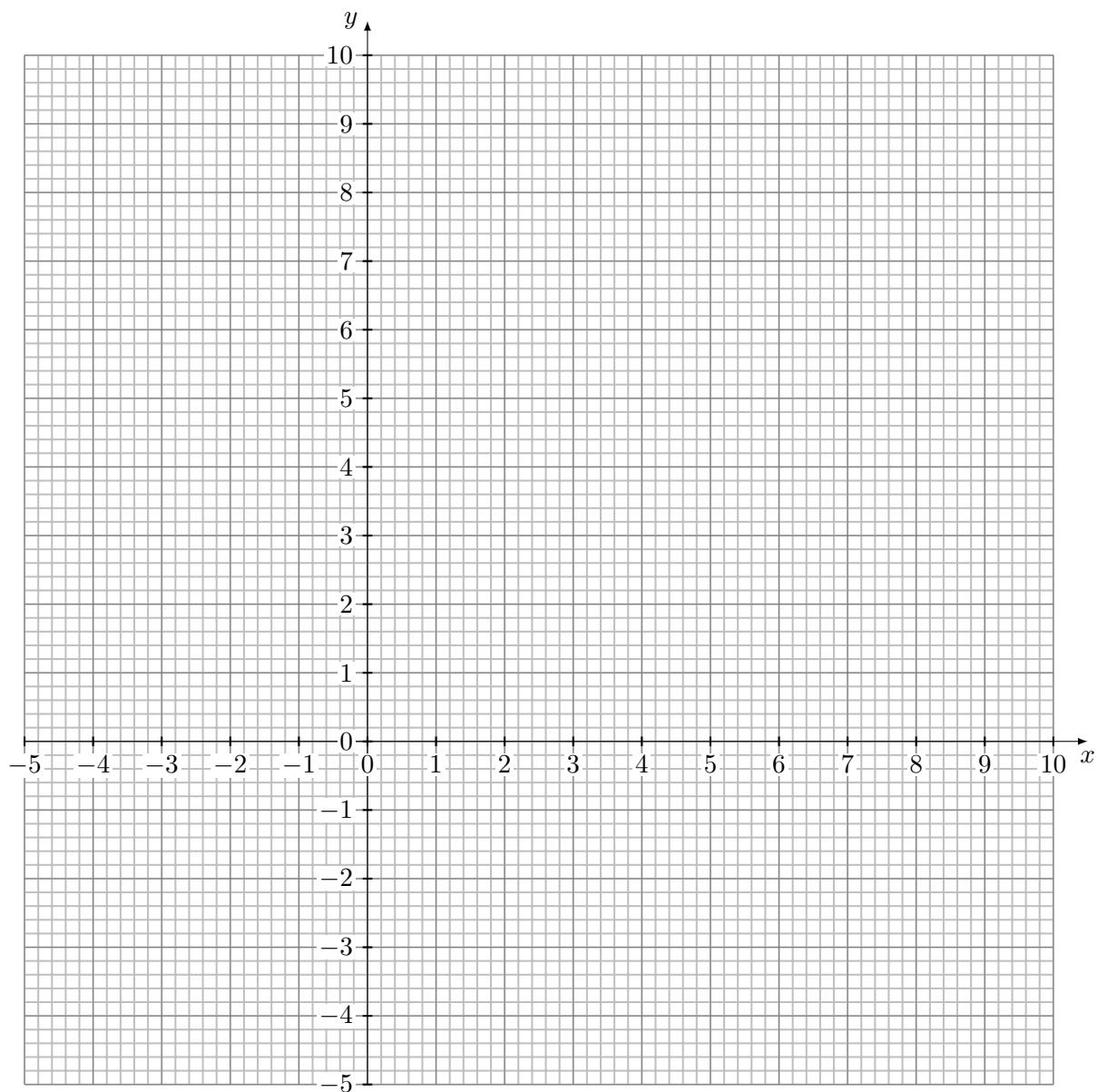
1. Exprime les deux achats sous forme d'équations en utilisant x pour représenter le prix d'un DVD et y le prix d'un livre. Écris le système correspondant.

2. Dans une des équations précédentes, isole une des deux variables.

3. Remplace cette variable dans l'autre équation de départ. Résous.

4. Maintenant que tu as exprimé le prix d'un de deux articles en fonction de l'autre, trouve le prix du deuxième au moyen des équations de départ.

5. Isole la variable y dans chacune des deux équations de départ. A quelles fonctions te font penser ces expressions ? Trace le graphique associé dans le plan ci-dessous.



6. Observe le graphique. Que constates-tu ?

Résolution d'un système

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système d'équations. Nous allons en étudier quelques-unes cette année.

Résolution graphique

Un système d'équation de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme suivante, à condition que $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

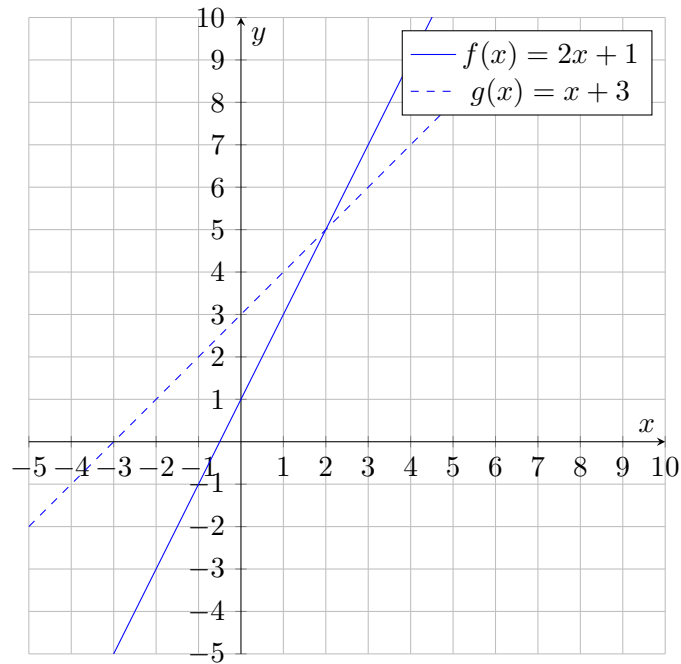
$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases} \quad (1.1)$$

Les deux équations du système sont des équations de droites. L'**ensemble des points d'intersection** de ces deux droites formera l'**ensemble solution du système**.

Exemple : Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad (1.2)$$

La représentation graphique du système est celle-ci :



Le point d'intersection des deux droites est le point $(2, 5)$, qui correspond à la solution du système $S = \{(2, 5)\}$. En effet, les équations du système sont vérifiées pour les valeurs $x = 2$ et $y = 5$.

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} 5 = 2 \times 2 + 1 \\ 5 = 2 + 3 \end{cases} \quad (1.4)$$

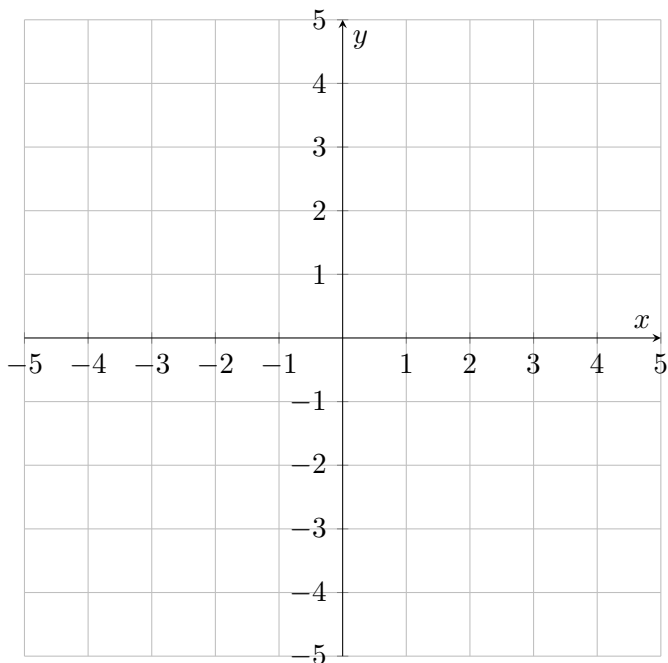
$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 5 = 5 \end{cases} \quad (1.5)$$

Remarques

La solution du système s'exprime par un couple de valeur (x, y) .
Dans l'exemple ci-dessus la solution est $S = \{(2, 5)\}$.

Exercice : Résous graphiquement le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \quad (1.6)$$



Vérifie grâce aux équations que la solution trouvée est bien correcte.

.....

.....

.....

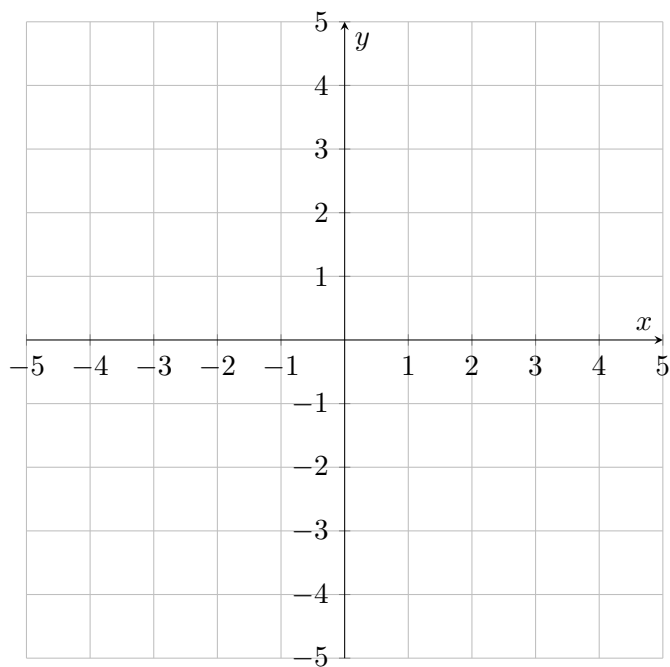
.....

.....

Toujours une solution ?

Essaye de résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad (1.7)$$



Que remarques-tu ?

.....

.....

Que peux-tu conclure sur les solutions du système ?

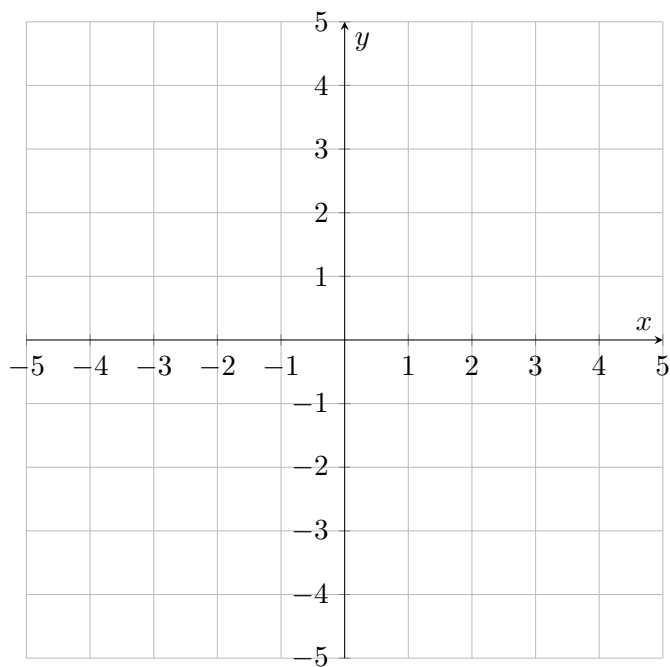
.....

.....

Toujours une seule solution ?

Essaye de résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y &= x + 3 \\ 2y &= 2x + 6 \end{cases} \quad (1.8)$$



Que remarques-tu ?

.....

.....

Que peux-tu conclure sur les solutions du système ?

.....

.....

Synthèse

Un système de deux équations à deux inconnues peut :

1. **Avoir une unique solution.** Dans ce cas, les droites qui forment le système se croisent en un point d'intersection dont les coordonnées sont les solutions du système. L'ensemble solution est un couple de valeur $S = \{(x, y)\}$.
2. **Ne pas avoir de solution**, on dit alors que **le système est impossible**. Dans ce cas, les droites qui forment le système sont parallèles et distinctes. Elles n'ont donc pas de point d'intersection. L'ensemble solution est l'ensemble vide $S = \{\emptyset\}$
3. **Avoir une infinité de solutions.** Les deux droites qui forment le système sont alors confondues. Elles ont donc tous leurs points en commun. Dans ce cas, le système est dit **indéterminé**. L'ensemble solution contient tous les points d'une droite. Si la solution est la droite $y = mx + p$, l'ensemble solution se note $S = \{(x, mx + p)\}$.

Rappel

- Deux droites sont parallèles si elles ont la même pente. Exemple : les droites $d_1 \equiv y = 2x + 5$ et $d_2 \equiv y = 2x + 8$ sont parallèles car leur pentes sont égales à 2.

Exercices :

1. Sans faire de calculs ni de graphiques, identifie si les systèmes suivants sont impossibles, indéterminés, ou si ils ont une solution unique. Justifie.

(a)

$$\begin{cases} y &= 3x + 1 \\ y &= 3x \end{cases}$$

.....

.....

(b)

$$\begin{cases} y &= x - 3 \\ y &= 6x + 6 \end{cases}$$

.....

.....

.....

(c)

$$\begin{cases} y &= x + 3 \\ y &= x + 4 \end{cases}$$

.....

.....

.....

(d)

$$\begin{cases} 3y &= 3x + 9 \\ y &= x + 3 \end{cases}$$

.....

.....

.....

(e)

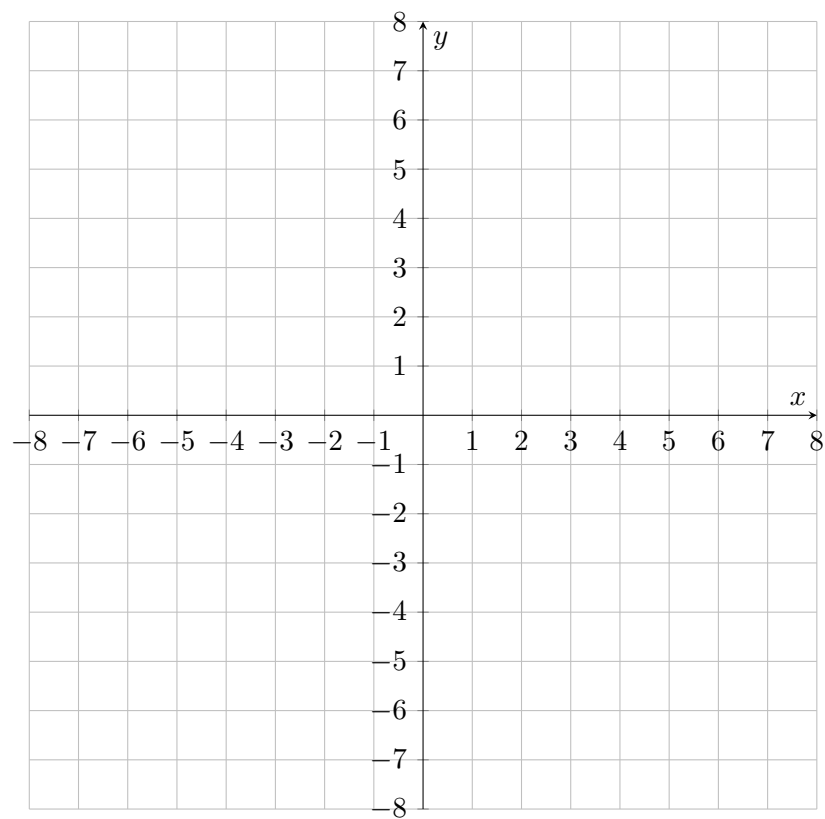
$$\begin{cases} 2y &= 2x + 3 \\ y &= x + 1 \end{cases}$$

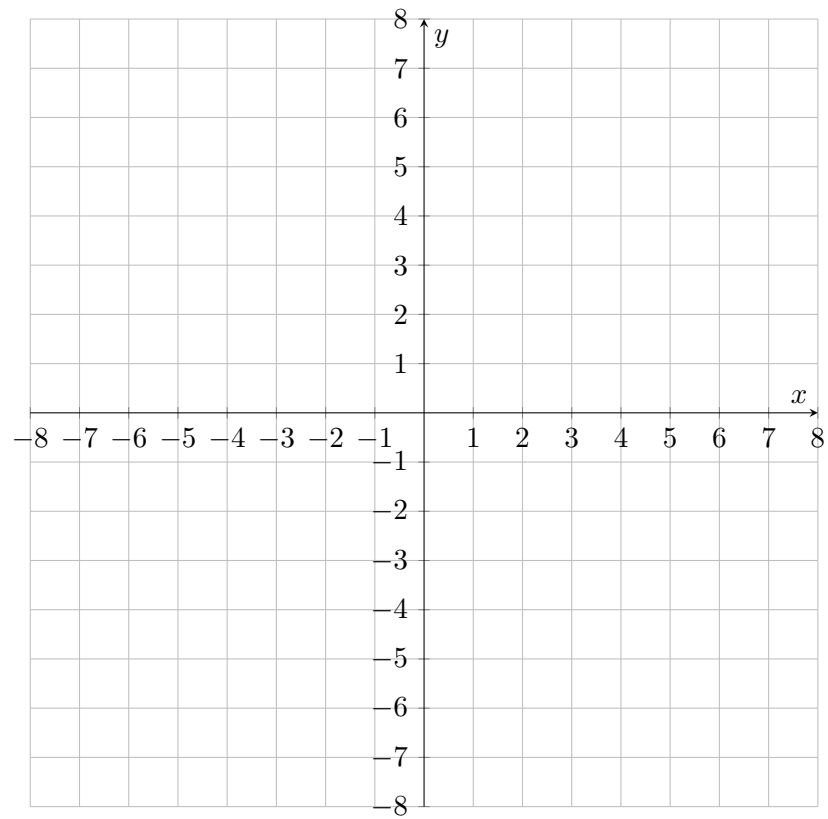
.....

.....

.....

2. Vérifie graphiquement tes réponses pour les deux premiers systèmes.





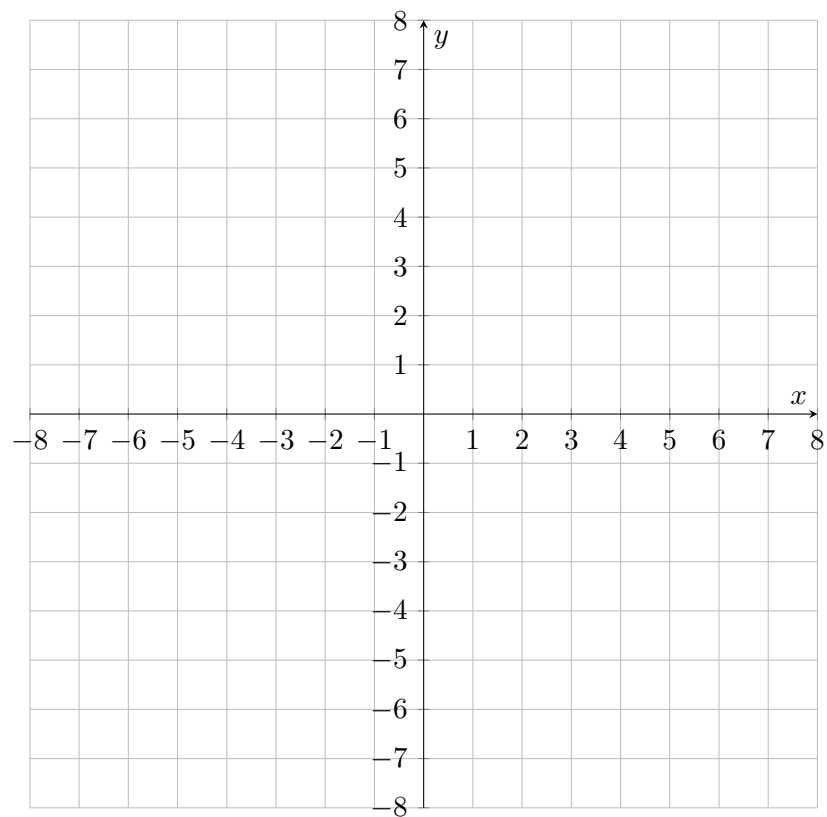
Méthode de substitution

Les limites de la méthode graphique

Exercices : Résous graphiquement le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 5y + 3x = 3 \\ 10y + 3x = 4 \end{cases}$$

Calculs



Quel est le problème ?

.....

Méthode de substitution

1. On isole une variable dans une des deux équations.
2. On substitue (remplace) la variable dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape 1.
3. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 2.
4. On substitue la variable par la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.
5. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 4 afin d'obtenir la solution du système.

Exemple :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

1. **On isole une variable dans une des deux équations.** On choisit d'isoler y dans la première équation.

2. **On substitue (remplace) la variable dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape 1.** Dans ce cas-ci, on substitue y dans la deuxième équation.

3. **On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 2.**

4. On substitue la variable par la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.

5. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 4 afin d'obtenir l'ensemble solution du système.

Système impossible

Si le système est impossible, c'est à dire qu'il ne possède pas de solution, la méthode de la substitution va aboutir à une égalité impossible.

Exemple : Résous ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + 2 &= y - 3 \\ 2x + 2 &= 2y - 6 \end{cases}$$

Systeme indéterminé

Si le système est indéterminé, c'est à dire qu'il possède une infinité de solutions, la méthode de la substitution à un système à une équation.

Exemple : Résous ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + 2 &= y - 3 \\ 2x + 4 &= 2y - 6 \end{cases}$$

Exercices : Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants.

1.

$$\begin{cases} y &= 3x + 1 \\ y &= 2x \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y &= x - 3 \\ y &= 6x + 6 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} y &= x + 3 \\ y &= x + 4 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 3y &= 3x + 9 \\ y &= x + 3 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 2y &= 2x + 3 \\ y &= x + 1 \end{cases}$$

Exercices transversaux

1. Dans une ferme, on compte 28 têtes et 82 pattes, sachant que dans cette ferme il n'y a que des poules et des lapins. Calcule le nombre de poules et de lapins par la méthode de substitution.

Choix des inconnues :

2. Une entreprise artisanale fabrique des chaises et des tables en bois. Pour faire une chaise, il faut 3 kilos de bois, tandis qu'il en faut 5 pour faire une table. Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163kg de bois pour faire 43 objets. Combien de tables et de chaises ont été fabriquées ?

choix des inconnues :

La méthode de Gauss

Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de résoudre des systèmes en manipulant les équations et en les additionnant/soustrayant l'une à l'autre (combinaison linéaire).

1. Multiplier/Diviser une équation afin que les coefficients d'une variable soient les mêmes dans les deux équations.
2. Soustraire une équation à l'autre afin d'éliminer les variables ayant le même coefficient.
3. Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
4. Substituer la valeur trouvée dans une des deux équations afin de résoudre le système.

Exemple : Le centre scolaire Sainte-Marie la sagesse organise une sortie dans un centre sportif. Deux classes participent à cette journée. Une classe de 12 élèves accompagné-es de 3 enseignant-es et une classe de 6 élèves accompagné-es de 2 enseignant-es. Sachant que la première classe a payé 81 et la seconde 44 . Combien coûte l'entrée pour l'élève et pour l'enseignant ?

1. Écris l'énoncé sous forme de système d'équations.

2. Résous par la méthode de Gauss.

- (a) **Multiplier/Diviser une équation afin que les coefficients d'une variable soient les mêmes dans les deux équations.** Nous allons multiplier la première équation par 2 afin de faire apparaître $12x$ dans les deux équations.

(b) Soustraire une équation à l'autre afin d'éliminer les variable ayant le même coefficient.

(c) Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.

(d) Substituer la valeur trouvée dans une des deux équations afin de résoudre le système.

Méthode de Gauss avec matrice

La méthode de Gauss peut être un peu pénible en terme de calcul. Une façon de simplifier cette méthode est d'utiliser **la représentation matricielle** du système.

Représentation matricielle

Représenter un système d'équation linéaire par **une matrice** (tableau de nombres) consiste à créer la matrice contenant les différents coefficients des variables. Chaque ligne de la matrice correspondant à une équation.

Attention

- Chaque colonne de la matrice correspond à la même variable.
- Chaque ligne correspond à une équation.
- Les termes indépendants sont mis dans une colonne à part.

Exemple : Le système de l'exercice précédent peut se représenter par la matrice augmentée suivante.

$$\begin{cases} 6x + 2y &= 44 \\ 12x + 3y &= 81 \end{cases}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 44 \\ 12 & 3 & 81 \end{array} \right)$$

L'élimination de gauss consiste ensuite en les étapes suivantes :

1. **Soustraire/additionner à la seconde ligne un multiple de la première ligne de sorte à faire apparaître un zéro à la place du premier élément de la seconde ligne.**

2. Multiplier/diviser la deuxième ligne, de sorte à faire apparaître un 1 à la place du deuxième élément de la seconde ligne.

3. Soustraire/additionner à la première ligne un multiple de la seconde ligne de sorte à faire apparaître un zéro à la place du deuxième élément de la première ligne.

4. Multiplier/diviser la première ligne, de sorte à faire apparaître un 1 à la place du premier élément de la première ligne.

5. Écrire les solutions à partir de la matrice augmentée.

Exercices

Résous les systèmes suivants par la méthode de Gauss.

1.

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 6x + y &= -5 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 6x + 2y &= 12 \\ 3x + y &= 6 \end{cases}$$

3. A résoudre avec la matrice.

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 8 \\ 3x - y &= 4 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 6x - y &= 10 \\ 18x - 3y &= 10 \end{cases}$$

Exercices transversaux

Résous ces problèmes par la méthode de Gauss.

1. Marina et Malika travaillent dans le même magasin. Elles sont payées selon leur ancienneté, ce qui fait que Malika gagne le double de Marina. Un jour elles travaillent toutes les deux 8 heures et gagnent ensemble 360 €. Quel est le salaire par heure de Marina et de Malika ?
2. Martin organise une tombola qui se déroule en 2 tirages suivant l'importance des lots. Pour les 2 tirages, il a vendu au total 850 billets. Le prix du billet pour le premier tirage est de 4,50 euros et pour le deuxième tirage de 5 euros. Sachant que la vente de tous les billets lui a rapporté 4000 euros, calculer le nombre de billets vendus pour chaque tirage.

Système de trois équations à trois inconnues

Système d'équations linéaires à trois inconnues

Un système d'équations linéaires à trois inconnues est un système de la forme, les différents coefficients étant des nombres réels.

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= -5 \\ -5x - 6y &= 0 \end{cases}$$

Les limites de la méthode de substitution

Essayons de résoudre ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z &= 9 \\ 3x + 2y + 4z &= 19 \\ -x - 2y + z &= -2 \end{cases}$$

Méthode de Gauss

Pour les systèmes à trois équations dans lequel chaque équation contient les trois variables, il faut privilégier la méthode de Gauss comme méthode de résolution.

Reprenons le système de la page précédente et essayons de le résoudre par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z &= 9 \\ 3x + 2y + 4z &= 19 \\ -x - 2y + z &= -2 \end{cases}$$

Méthode de Gauss avec matrice

La méthode de Gauss peut être un peu pénible en terme de calcul. Une façon de simplifier cette méthode est d'utiliser **la représentation matricielle** du système.

Représentation matricielle

Représenter un système d'équation linéaire par **une matrice** (tableau de nombres) consiste à créer la matrice contenant les différents coefficients des variables. Chaque ligne de la matrice correspondant à une équation.

Attention

- Chaque colonne de la matrice correspond à la même variable.
- Chaque ligne correspond à une équation.
- Les termes indépendants sont mis dans une colonne à part.

Élimination de Gauss avec matrice

L'élimination de gauss consiste ensuite en les étapes suivantes :

1. Multiplier les lignes de sorte à avoir le même nombre dans la première colonne.
2. Soustraire la première ligne à la deuxième et troisième ligne.
3. Multiplier la deuxième et troisième ligne de sorte à avoir le même nombre dans la deuxième colonne.
4. Soustraire la deuxième ligne à la troisième.
5. Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 dans la troisième colonne.
6. Soustraire un multiple de la troisième ligne à la deuxième ligne afin d'avoir un zéro à la troisième colonne
7. Diviser la deuxième ligne de sorte à avoir un 1 à la deuxième colonne
8. Soustraire un multiple de la deuxième et troisième ligne à la première de sorte à avoir un zéro à la deuxième et troisième colonne.
9. Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 à la première colonne
10. Écrire la solution du système.

Exemple : Le système de l'exercice précédent peut se représenter par la matrice augmentée suivante.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z &= 9 \\ 3x + 2y + 4z &= 19 \\ -x - 2y + z &= -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 19 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

1. Multiplier les lignes de sorte à avoir le même nombre dans la première colonne.
2. Soustraire la première ligne à la deuxième et troisième ligne.
3. Multiplier la deuxième et troisième ligne de sorte à avoir le même nombre dans la deuxième colonne.

4. Soustraire la deuxième ligne à la troisième.
5. Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 dans la troisième colonne.
6. Soustraire un multiple de la troisième ligne à la deuxième ligne afin d'avoir un zéro à la troisième colonne
7. Diviser la deuxième ligne de sorte à avoir un 1 à la deuxième colonne

8. Soustraire un multiple de la deuxième et troisième ligne à la première de sorte à avoir un zéro à la deuxième et troisième colonne.

9. Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 à la première colonne

10. Écrire la solution du système.

Exercices

Exercices transversaux

1. Marwa se rend à la banque et retire au guichet la somme de 725 euros. Le banquier lui remet 45 billets : des billets de 5, 10 et 20 euros. A la sortie de la banque, elle se rend dans un magasin. Après avoir payé, il lui reste la moitié du nombre de billets de 10 euros, la moitié du nombre de bille de 20, toujours le même nombre de bien de 5 et une somme totale de 375 euros.

Combien Marwa avait-elle de billet de 5, 10 et 20 euros à la sortie de la banque ?

2. Déterminer un nombre à 3 chiffres tel que : - la somme des chiffres qui le constituent est égale à 14 - si on intervertit les chiffres des centaines et des unités, le nombre augmente de 297. - si on intervertit les chiffres des dizaines et des unités, le nombre diminue de 18.