

# Cours de mathématiques 2022/2023 - 5TQA

Arthur Paquot



---

## CHAPITRE 1

---

# Système d'équations linéaires

## 1.1 Programme de l'année

### Système d'équations linéaires

#### Agenda

Le chapitre sera traité durant les mois de septembre et d'octobre.

#### Connaître

- L'élève sera capable de reconnaître un système d'équations linéaires du premier degré (à 2 ou 3 inconnues) impossible, indéterminé ou avec une solution unique.
- L'élève sera capable d'expliquer dans ses mots les notions suivantes :
  - Équation du premier degré
  - Inconnue d'une équation
  - Un système d'équations
  - Une matrice
- L'élève sera capable d'expliquer le lien entre la représentation graphique d'un système d'équations et son nombre de solutions.

#### Appliquer

- L'élève sera capable de résoudre un système d'équations selon chacune de ces méthodes :
  - Résolution graphique
  - Résolution par substitution
  - Résolution par la méthode de Gauss-Jordan
  - Résolution par la méthode de Cramer
- L'élève pourra manipuler les équations d'un système de sorte à les écrire sous la forme d'équations de droites et les représenter dans un repère cartésien.

#### Transférer

- L'élève sera capable de résoudre un problème inconnu se ramenant à la résolution d'un système d'équations du premier degré à 2 ou 3 inconnues.

## 1.2 Système de deux équations à deux inconnues

### Définition

Un **système de deux équations à deux inconnues** est un ensemble formé par deux équations impliquant les deux mêmes variables. Il se note, avec  $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

### Exemple d'introduction

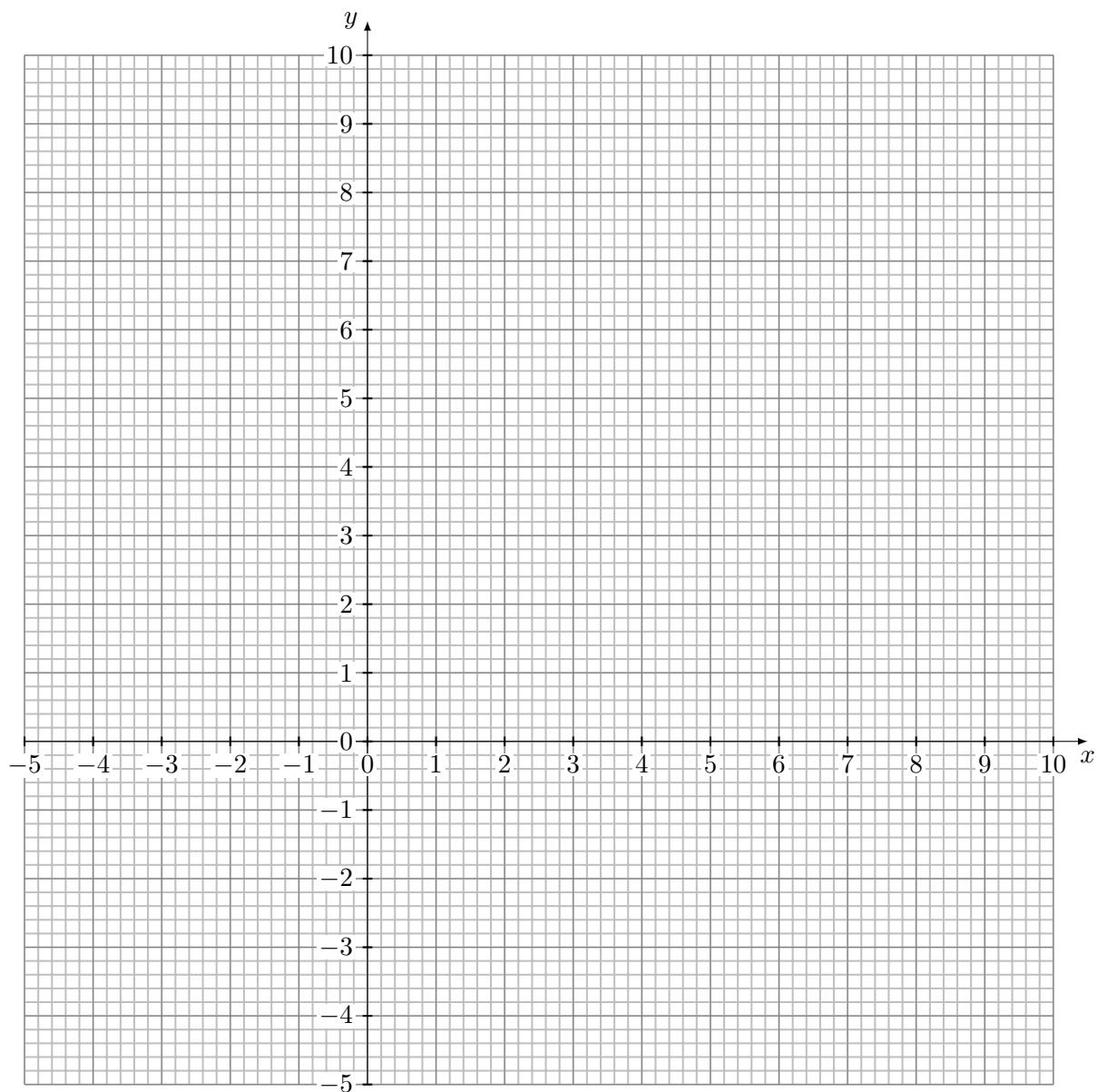
Lundi, tu te rends dans un magasin de seconde main et tu ressorts avec 4 DVD et 2 livres. En tout, tu as payé 16 euros. Le week-end, tu te rends à nouveau dans ce magasin et tu achètes 1 DVD et 1 livre pour 5 euros. A quel prix sont vendus les livres et les DVD dans ce magasin ?

1. Exprime les deux achats sous forme d'équations en utilisant  $x$  pour représenter le prix d'un DVD et  $y$  le prix d'un livre. Écris le système correspondant.
2. Dans une des équations précédentes, isole une des deux variables.

3. Remplace cette variable dans l'autre équation de départ. Résous.

4. Maintenant que tu as exprimé le prix d'un de deux articles en fonction de l'autre, trouve le prix du deuxième au moyen des équations de départ.

5. Isole la variable  $y$  dans chacune des deux équations de départ. A quelles fonctions te font penser ces expressions ? Trace le graphique associé dans le plan ci-dessous.



6. Observe le graphique. Que constates-tu ?

---

---

## Résolution d'un système

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système d'équations. Nous allons en étudier quelques-unes cette année.

### Résolution graphique

Un système d'équation de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme suivante, à condition que  $b \neq 0$  et  $b' \neq 0$ .

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases} \quad (1.1)$$

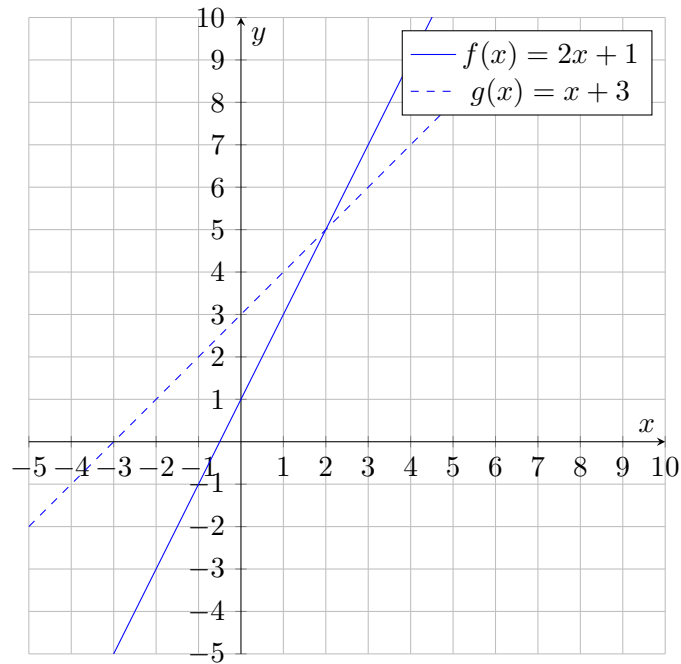
Les deux équations du système sont des équations de droites. L'**ensemble des points d'intersection** de ces deux droites formera l'**ensemble solution du système**.

**Exemple** : Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad (1.2)$$



La représentation graphique du système est celle-ci :



Le point d'intersection des deux droites est le point  $(2, 5)$ , qui correspond à la solution du système  $S = \{(2, 5)\}$ . En effet, les équations du système sont vérifiées pour les valeurs  $x = 2$  et  $y = 5$ .

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} 5 = 2 \times 2 + 1 \\ 5 = 2 + 3 \end{cases} \quad (1.4)$$

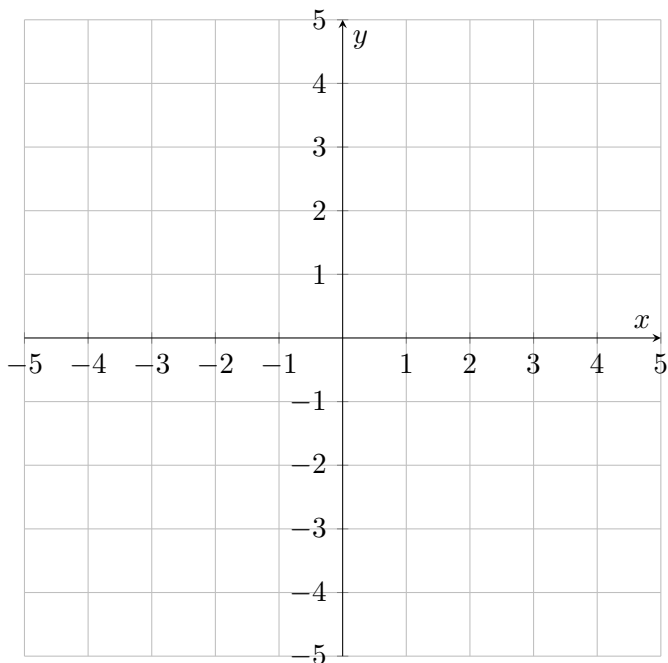
$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 5 = 5 \end{cases} \quad (1.5)$$

#### Remarques

La solution du système s'exprime par un couple de valeur  $(x, y)$ .  
Dans l'exemple ci-dessus la solution est  $S = \{(2, 5)\}$ .

**Exercice :** Résous graphiquement le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \quad (1.6)$$



Vérifie grâce aux équations que la solution trouvée est bien correcte.

.....

.....

.....

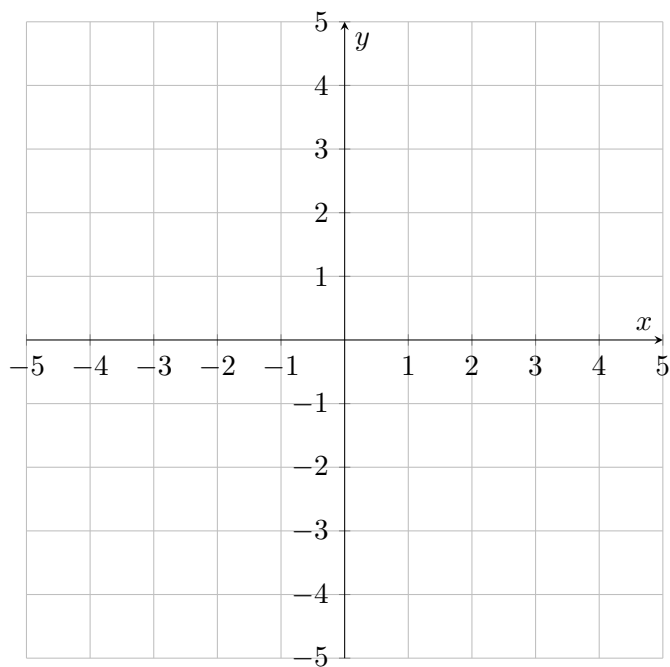
.....

.....

### Toujours une solution ?

Essaye de résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad (1.7)$$



Que remarques-tu ?

.....

.....

Que peux-tu conclure sur les solutions du système ?

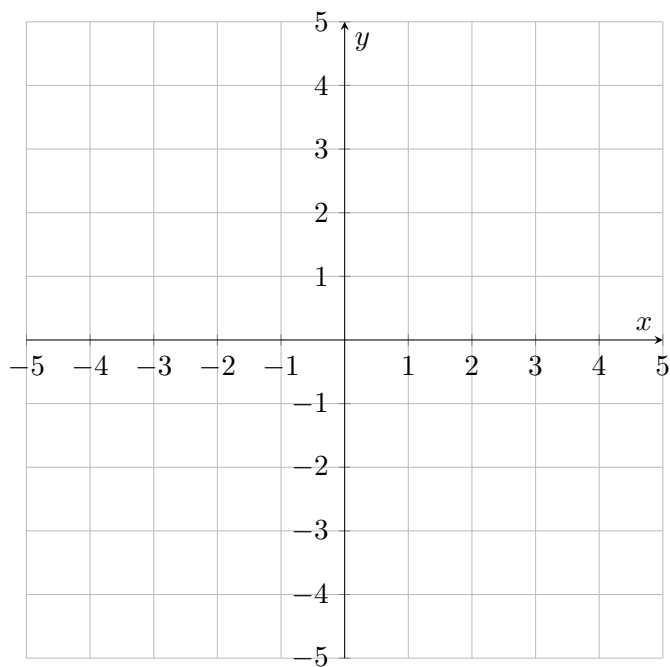
.....

.....

### Toujours une seule solution ?

Essaye de résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y &= x + 3 \\ 2y &= 2x + 6 \end{cases} \quad (1.8)$$



Que remarques-tu ?

.....

.....

Que peux-tu conclure sur les solutions du système ?

.....

.....

## Synthèse

Un système de deux équations à deux inconnues peut :

1. **Avoir une unique solution.** Dans ce cas, les droites qui forment le système se croisent en un point d'intersection dont les coordonnées sont les solutions du système. L'ensemble solution est un couple de valeur  $S = \{(x, y)\}$ .
2. **Ne pas avoir de solution**, on dit alors que **le système est impossible**. Dans ce cas, les droites qui forment le système sont parallèles et distinctes. Elles n'ont donc pas de point d'intersection. L'ensemble solution est l'ensemble vide  $S = \{\emptyset\}$
3. **Avoir une infinité de solutions.** Les deux droites qui forment le système sont alors confondues. Elles ont donc tous leurs points en commun. Dans ce cas, le système est dit **indéterminé**. L'ensemble solution contient tous les points d'une droite. Si la solution est la droite  $y = mx + p$ , l'ensemble solution se note  $S = \{(x, mx + p)\}$ .

## Rappel

- Deux droites sont parallèles si elles ont la même pente. Exemple : les droites  $d_1 \equiv y = 2x + 5$  et  $d_2 \equiv y = 2x + 8$  sont parallèles car leur pentes sont égales à 2.

## Exercices :

1. Sans faire de calculs ni de graphiques, identifie si les systèmes suivants sont impossibles, indéterminés, ou si ils ont une solution unique. Justifie.

(a)

$$\begin{cases} y &= 3x + 1 \\ y &= 3x \end{cases}$$

.....

.....

(b)

$$\begin{cases} y &= x - 3 \\ y &= 6x + 6 \end{cases}$$

.....

.....

.....

(c)

$$\begin{cases} y &= x + 3 \\ y &= x + 4 \end{cases}$$

.....

.....

.....

(d)

$$\begin{cases} 3y &= 3x + 9 \\ y &= x + 3 \end{cases}$$

.....

.....

.....

(e)

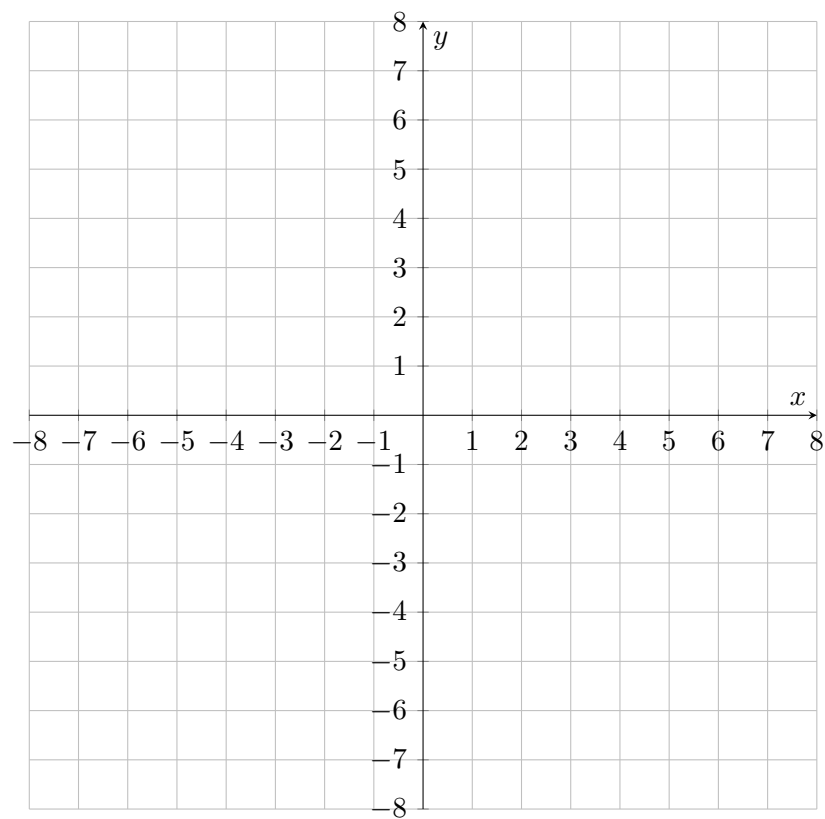
$$\begin{cases} 2y &= 2x + 3 \\ y &= x + 1 \end{cases}$$

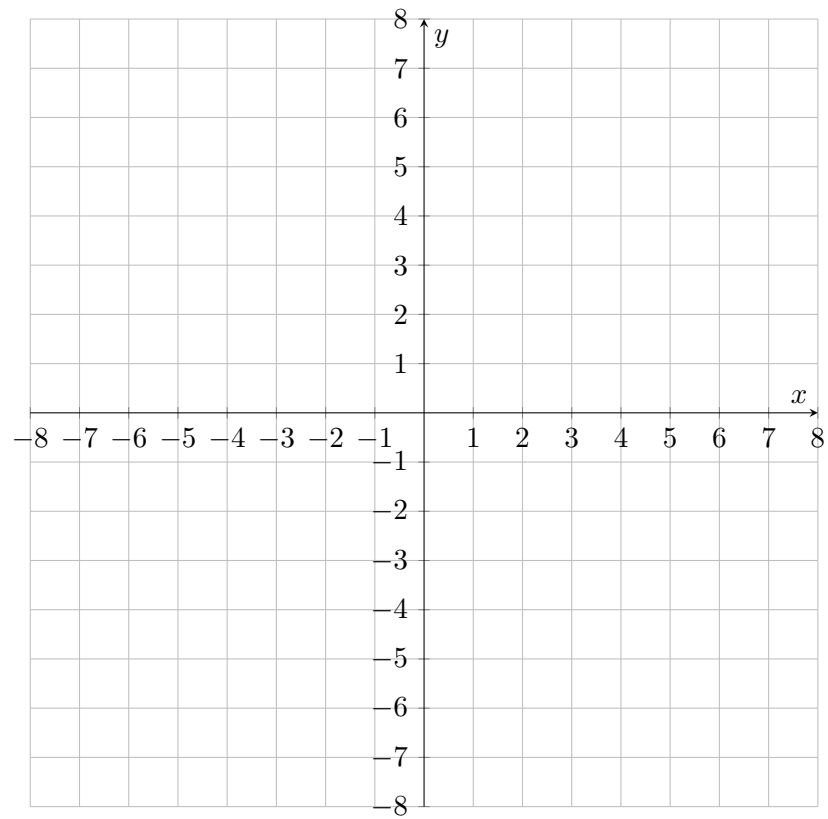
.....

.....

.....

2. Vérifie graphiquement tes réponses pour les deux premiers systèmes.







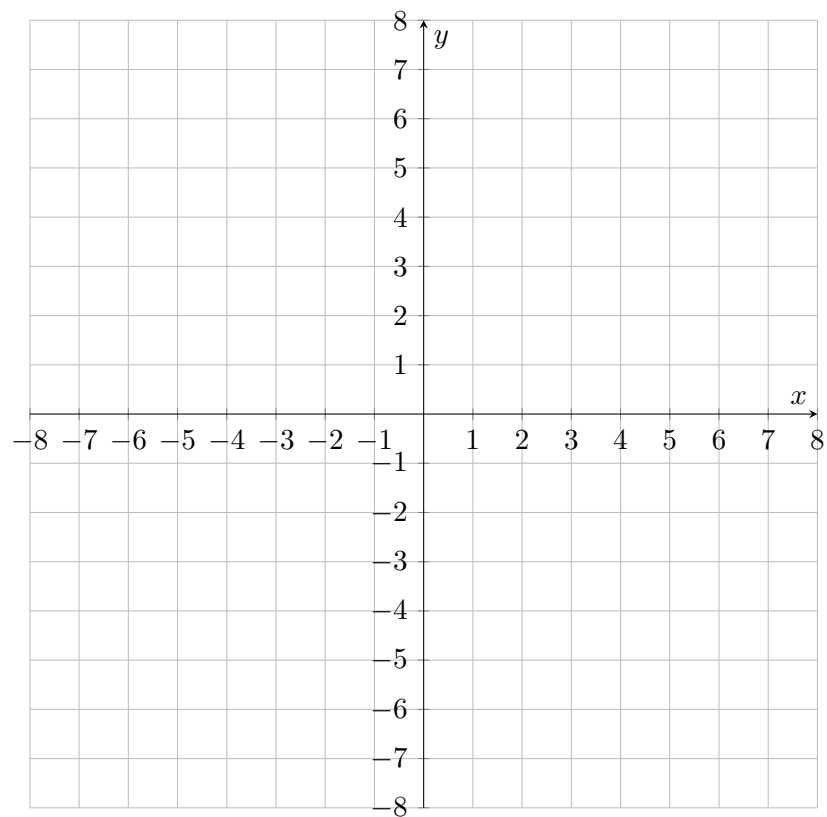
## Méthode de substitution

### Les limites de la méthode graphique

Exercices : Résous graphiquement le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 5y + 3x = 3 \\ 10y + 3x = 4 \end{cases}$$

### Calculs



Quel est le problème ?

.....

### Méthode de substitution

1. On isole une variable dans une des deux équations.
2. On substitue (remplace) la variable dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape 1.
3. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 2.
4. On substitue la variable par la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.
5. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 4 afin d'obtenir la solution du système.

### Exemple :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

1. **On isole une variable dans une des deux équations.** On choisit d'isoler  $y$  dans la première équation.

2. **On substitue (remplace) la variable dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape 1.** Dans ce cas-ci, on substitue  $y$  dans la deuxième équation.

3. **On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 2.**

4. On substitue la variable par la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 4 afin d'obtenir l'ensemble solution du système.

### **Systeme impossible**

Si le système est impossible, c'est à dire qu'il ne possède pas de solution, la méthode de la substitution va aboutir à une égalité impossible.

**Exemple :** Résous ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + 2 &= y - 3 \\ 2x + 2 &= 2y - 6 \end{cases}$$

### Systeme indéterminé

Si le système est indéterminé, c'est à dire qu'il possède une infinité de solutions, la méthode de la substitution à un système à une équation.

**Exemple :** Résous ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + 2 &= y - 3 \\ 2x + 4 &= 2y - 6 \end{cases}$$

**Exercices :** Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants.

1.

$$\begin{cases} y &= 3x + 1 \\ y &= 2x \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y &= x - 3 \\ y &= 6x + 6 \end{cases}$$



3.

$$\begin{cases} y &= x + 3 \\ y &= x + 4 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 3y &= 3x + 9 \\ y &= x + 3 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 2y &= 2x + 3 \\ y &= x + 1 \end{cases}$$

## Exercices transversaux

1. Dans une ferme, on compte 28 têtes et 82 pattes, sachant que dans cette ferme il n'y a que des poules et des lapins. Calcule le nombre de poules et de lapins par la méthode de substitution.

Choix des inconnues : .....

2. Une entreprise artisanale fabrique des chaises et des tables en bois. Pour faire une chaise, il faut 3 kilos de bois, tandis qu'il en faut 5 pour faire une table. Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163kg de bois pour faire 43 objets. Combien de tables et de chaises ont été fabriquées ?

choix des inconnues : .....

## La méthode de Gauss

### Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de résoudre des systèmes en manipulant les équations et en les additionnant/soustrayant l'une à l'autre (combinaison linéaire).

1. Multiplier/Diviser une équation afin que les coefficients d'une variable soient les mêmes dans les deux équations.
2. Soustraire une équation à l'autre afin d'éliminer les variables ayant le même coefficient.
3. Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
4. Substituer la valeur trouvée dans une des deux équations afin de résoudre le système.

**Exemple :** Le centre scolaire Sainte-Marie la sagesse organise une sortie dans un centre sportif. Deux classes participent à cette journée. Une classe de 12 élèves accompagné-es de 3 enseignant-es et une classe de 6 élèves accompagné-es de 2 enseignant-es. Sachant que la première classe a payé 81 euros et la seconde 44 euros. Combien coûte l'entrée pour l'élève et pour l'enseignant ?

1. Écris l'énoncé sous forme de système d'équations.

2. Résous par la méthode de Gauss.

- (a) **Multiplier/Diviser une équation afin que les coefficients d'une variable soient les mêmes dans les deux équations.** Nous allons multiplier la première équation par 2 afin de faire apparaître  $12x$  dans les deux équations.

(b) Soustraire une équation à l'autre afin d'éliminer les variable ayant le même coefficient.

(c) Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.

(d) Substituer la valeur trouvée dans une des deux équations afin de résoudre le système.

## Méthode de Gauss avec matrice

La méthode de Gauss peut être un peu pénible en terme de calcul. Une façon de simplifier cette méthode est d'utiliser **la représentation matricielle** du système.

### Représentation matricielle

Représenter un système d'équation linéaire par **une matrice** (tableau de nombres) consiste à créer la matrice contenant les différents coefficients des variables. Chaque ligne de la matrice correspondant à une équation.

### Attention

- Chaque colonne de la matrice correspond à la même variable.
- Chaque ligne correspond à une équation.
- Les termes indépendants sont mis dans une colonne à part.

**Exemple :** Le système de l'exercice précédent peut se représenter par la matrice augmentée suivante.

$$\begin{cases} 6x + 2y &= 44 \\ 12x + 3y &= 81 \end{cases}$$
$$\left( \begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 44 \\ 12 & 3 & 81 \end{array} \right)$$

L'élimination de gauss consiste ensuite en les étapes suivantes :

1. **Soustraire/additionner à la seconde ligne un multiple de la première ligne de sorte à faire apparaître un zéro à la place du premier élément de la seconde ligne.**



2. Multiplier/diviser la deuxième ligne, de sorte à faire apparaître un 1 à la place du deuxième élément de la seconde ligne.

3. Soustraire/additionner à la première ligne un multiple de la seconde ligne de sorte à faire apparaître un zéro à la place du deuxième élément de la première ligne.

4. Multiplier/diviser la première ligne, de sorte à faire apparaître un 1 à la place du premier élément de la première ligne.

5. Écrire les solutions à partir de la matrice augmentée.