Cours de mathématiques 2022/2023 - Exercices corrigés système équations linéaires

Arthur Paquot

1 Résolution graphique

1. Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y & = & 6x+3 \\ 2y+2x & = & 8 \end{array}\right. \tag{1}$$

On écrit les équations de sorte à avoir des équations de droites de la forme $y = mx + p$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{6x+3}{3} \\ y & = & \frac{8-2x}{2} \end{array}\right. \tag{2}$$

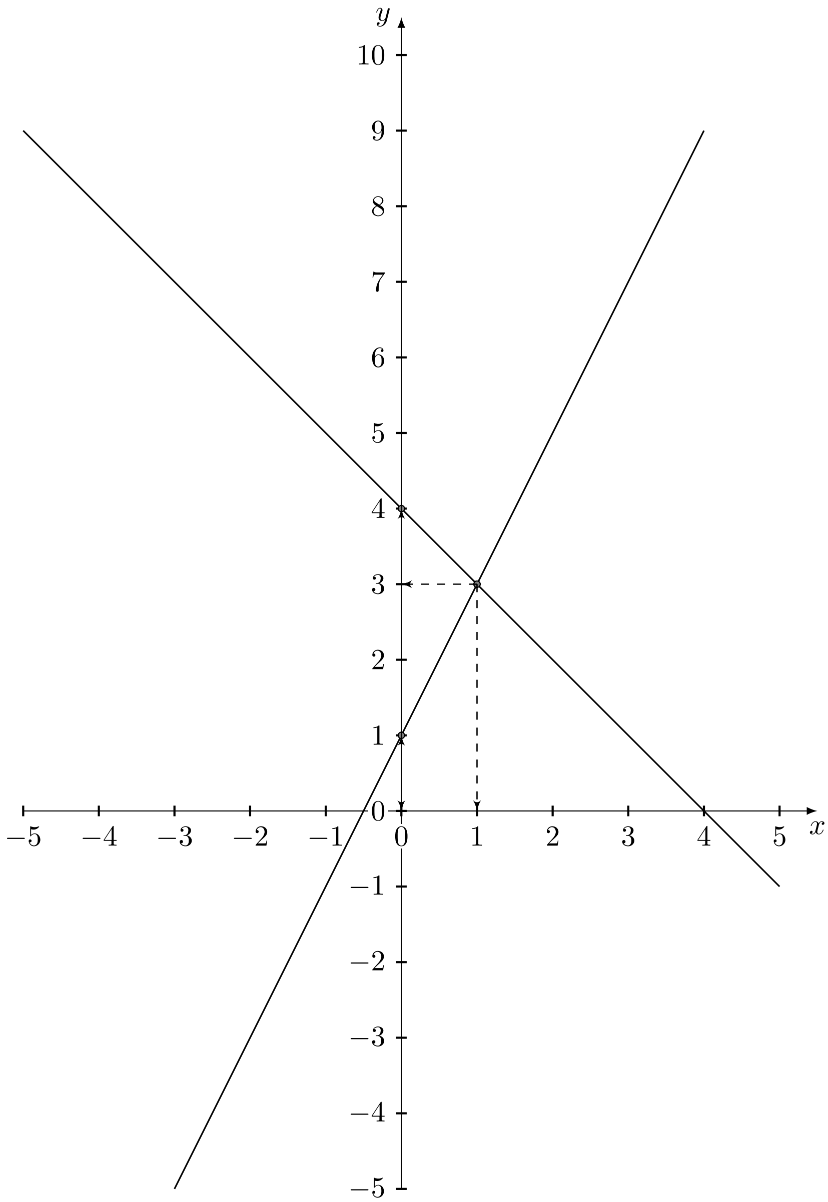
On simplifie,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+1 \\ y & = & 4-x \end{array}\right. \tag{3}$$

On cherche deux points appartenant aux droites :

x	0	1
2x+1	1	3
4-x	4	3

La représentation graphique du système est celle-ci :



Le point d'intersection des deux droites est le point $(1, 3)$, qui correspond à la solution du système $S = \{(1, 3)\}$.

2. Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 4y & = & 8 \\ 3y + 3x & = & 3 \end{array} \right. \tag{4}$$

On écrit les équations de sorte à avoir des équations de droites de la forme $y = mx + p$.

$$\begin{cases} y = \dfrac{8-6x}{4} \\ y = \dfrac{3-3x}{3} \end{cases} \tag{5}$$

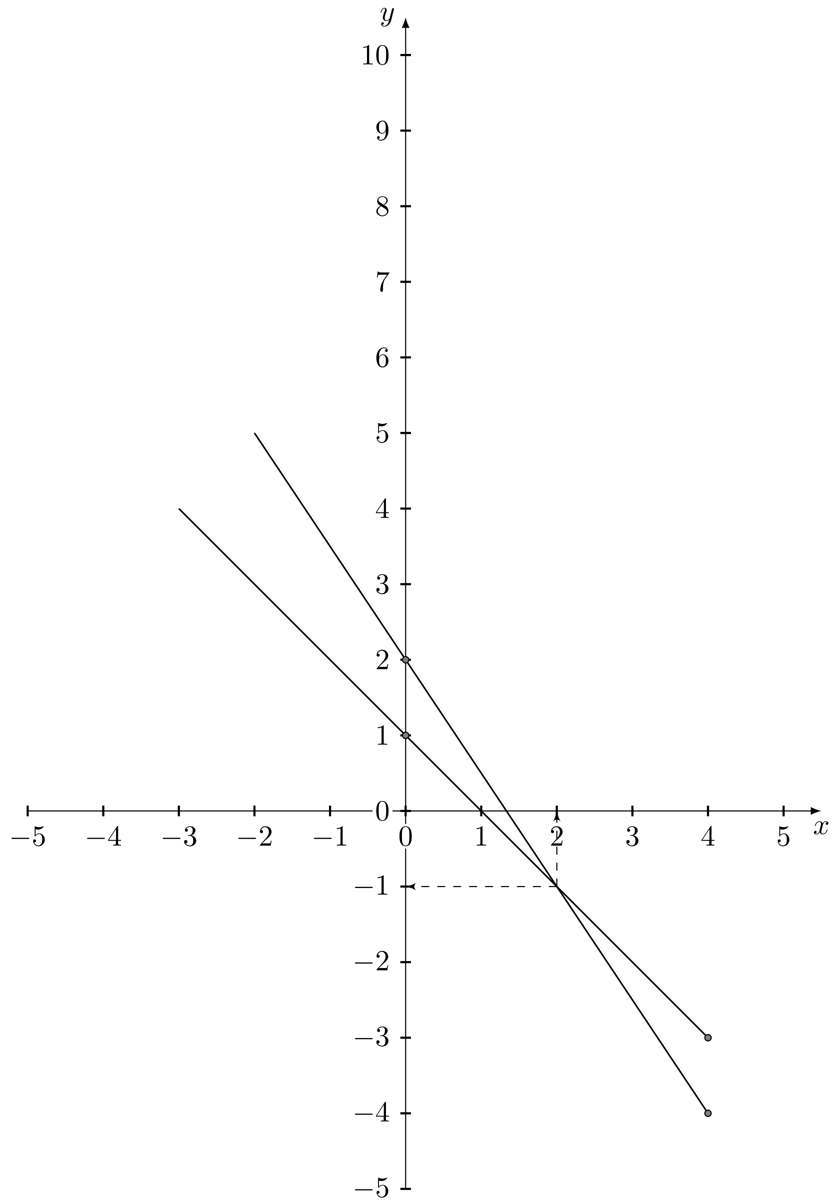
On simplifie,

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{3x}{2} \\ y = 1 - x \end{cases} \tag{6}$$

On cherche deux points appartenant aux droites :

x	0	4
$2 - \frac{3x}{2}$	2	-4
$1 - x$	1	-3

La représentation graphique du système est celle-ci :



Le point d'intersection des deux droites est le point $(2, -1)$, qui correspond à la solution du système $S = \{(2, -1)\}$.

3. Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 2y & = & 8 \\ y + 3x & = & 3 \end{array} \right. \tag{7}$$

On écrit les équations de sorte à avoir des équations de droites de la forme $y = mx + p$.

$$\begin{cases} y &= \dfrac{8-6x}{2} \\ y &= 3-3x \end{cases} \tag{8}$$

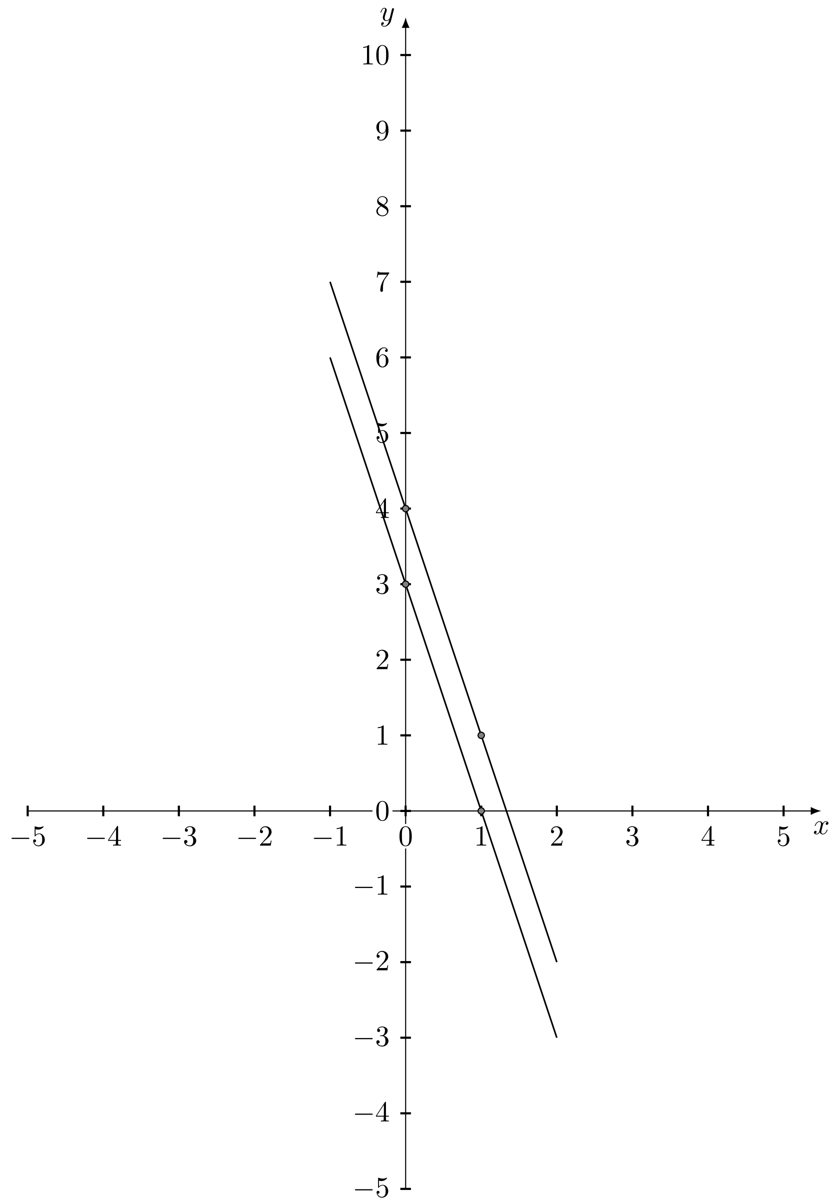
On simplifie,

$$\begin{cases} y &= 4-3x \\ y &= 3-3x \end{cases} \tag{9}$$

On cherche deux points appartenant aux droites :

x	0	1
$4-3x$	4	1
$3-3x$	3	0

La représentation graphique du système est celle-ci :



Les deux droites sont parallèles, il n'y a donc pas de solution. Le système est impossible. Il était possible de le remarquer dès le début, car les deux droites ont la même pente, mais ne sont pas confondues.

4. Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 2y & = & 8 \\ y + 3x & = & 4 \end{array} \right. \tag{10}$$

On écrit les équations de sorte à avoir des équations de droites de la forme $y = mx + p$.

$$\begin{cases} y = \dfrac{8-6x}{2} \\ y = 4-3x \end{cases} \tag{11}$$

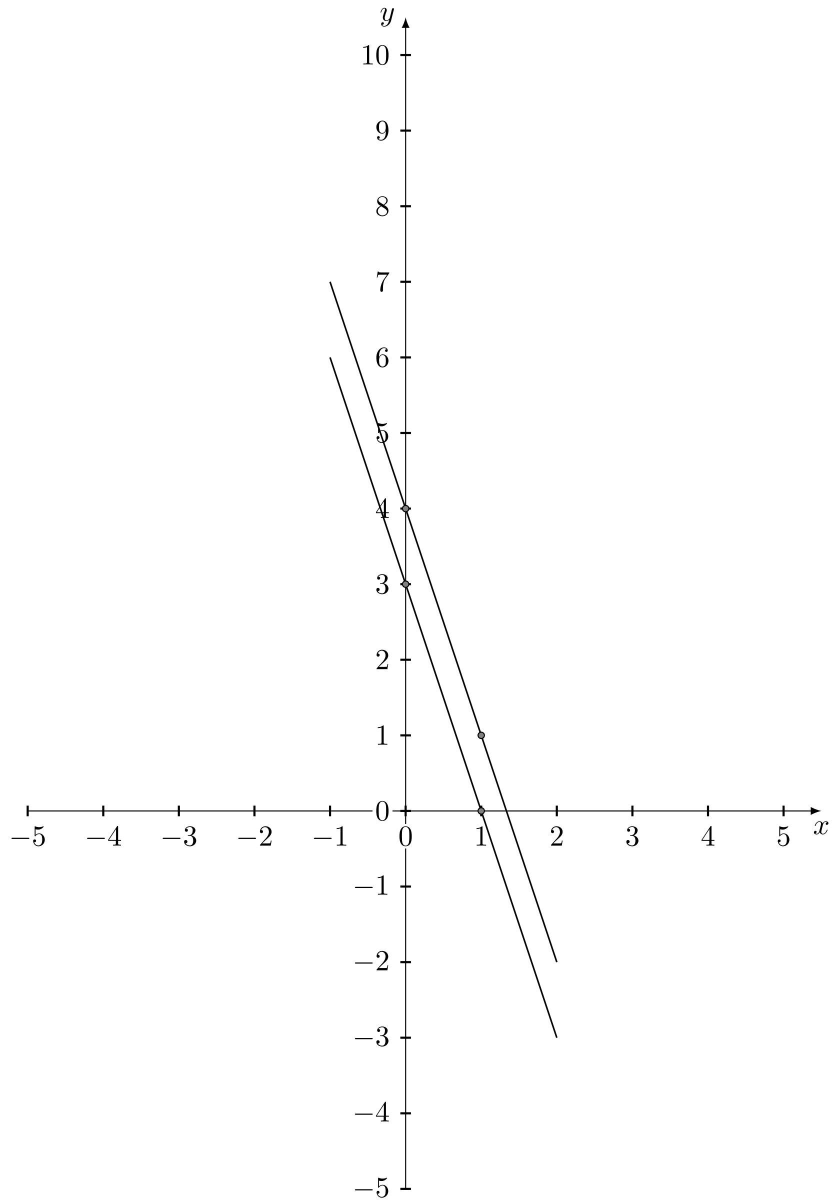
On simplifie,

$$\begin{cases} y = 4-3x \\ y = 4-3x \end{cases} \tag{12}$$

On cherche deux points appartenant aux droites :

x	0	1
$4-3x$	4	1
$4-3x$	4	1

La représentation graphique du système est celle-ci :



Les deux droites sont confondues (ce sont les mêmes droites), le système est indéterminé et possède une infinité de solutions : $S = \{(x, 4 - 3x)\}$. Il était possible de le remarquer dès le début, en voyant que les deux droites étaient identiques.

2 Méthode de substitution

1. Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 3y & = & 6x+3 \\ 2y+2x & = & 8 \end{array} \right. \tag{13}$$

   (a) On isole une variable.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x+1 \\ 2y+2x & = & 8 \end{array} \right. \tag{14}$$

   (b) On substitue.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x+1 \\ 2(2x+1)+2x & = & 8 \end{array} \right. \tag{15}$$

   (c) On résout.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x+1 \\ 4x+2+2x & = & 8 \end{array} \right. \tag{16}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x+1 \\ 6x & = & 6 \end{array} \right. \tag{17}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x+1 \\ x & = & 1 \end{array} \right. \tag{18}$$

   (d) On substitue.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2\times 1+1 \\ x & = & 1 \end{array} \right. \tag{19}$$

   (e) On résout.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 3 \\ x & = & 1 \end{array} \right. \tag{20}$$

   La solution du système est $S = \{(1,3)\}$.

2. Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y & = & 6x-6 \\ y+2x & = & 2 \end{array}\right. \tag{21}$$

(a) On isole une variable.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y & = & 6x-6 \\ y & = & 2-2x \end{array}\right. \tag{22}$$

(b) On substitue.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(2-2x) & = & 6x-6 \\ y & = & 2-2x \end{array}\right. \tag{23}$$

(c) On résout.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4-4x & = & 6x-6 \\ y & = & 2-2x \end{array}\right. \tag{24}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10 & = & 10x \\ y & = & 2-2x \end{array}\right. \tag{25}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & x \\ y & = & 2-2x \end{array}\right. \tag{26}$$

(d) On substitue.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & x \\ y & = & 2-2\times 1 \end{array}\right. \tag{27}$$

(e) On résout.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \tag{28}$$

La solution du système est $S = \{(1,0)\}$.

3 Méthode de Gauss avec matrice

1.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+4y-z & = & 4 \\ x+2y-3z & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 \times 2$
$L_2 \to L_2 \times 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 - L_1$
$L_3 \to L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$L_2 \to \dfrac{7}{4} \times L_2$ (cela revient à diviser la ligne par 4 et puis la multiplier par 7. Vous pouvez le faire en deux étapes si vous le désirez).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$L_3 \to L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$L_3 \to \dfrac{L_3}{8}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L2 + 7L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \to \dfrac{L_2}{-7}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 + 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - 8L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to \dfrac{L_1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$S = \{(1,1,1)\}$

2.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & -2 \\ 2x + 2y + 4z & = & -2 \\ x + 3y - 3z & = & 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 \times 2$
$L_3 \to L_3 \times 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -6 & 8 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 - L_1$
$L_3 \to L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -12 & 12 \end{array}\right)$$

$L_3 \to L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$L_3 \to \dfrac{L_3}{-14}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L2 + 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_2 \to \dfrac{L_2}{-2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - 6L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - 4L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to \dfrac{L_1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$S = \{(1, 0, -1)\}$