Cours de mathématiques 2022/2023 - Fiches récapitulatives

Arthur Paquot

Table des matières

1 Fonction du premier degré

1.1 Théorie

1.2 Représentation d'une relation

Dans la mise en situation précédente nous avons illustré le fait qu'une relation entre deux grandeurs A et B appelées variables peut être représentée par :

1. Un **tableau** de valeurs qui associe les valeurs de B à celles de A.

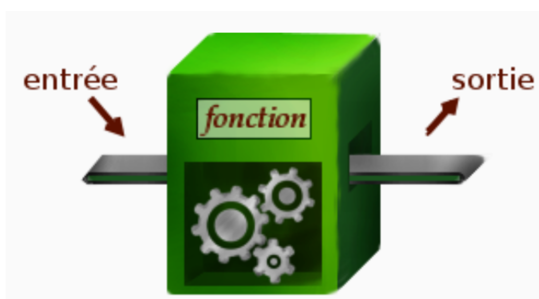
2. Un **graphique** qui représente l'ensemble des points de coordonnées (v_A, v_B) avec v_A et v_B les valeurs des variables A et B.

3. Une formule, que l'on appellera **fonction** par la suite, qui exprime le lien entre les deux variables.

1.3 Notion de fonction

Dans la mise en situation de ce chapitre, nous avons exprimé la relation entre le nombre de photos commandé et le prix de l'impression au moyen d'une formule. En mathématique, ce genre de formule est appelée **une fonction**.

Une fonction peut être vue comme une machine, appelée f, qui prend en entrée une valeur, un nombre réel et donne aussi en sortie une valeur (différente ou pas). La valeur d'entrée est souvent appelée x et la valeur de sortie est appelée $f(x)$ ou encore **l'image de x par la fonction f**.



Dans l'exemple d'introduction, la machine f est celle qui associe au nombre de photos le prix de l'impression.

Écris l'expression $Prix = 0,1 \times NombrePhotos + 5$ en utilisant la notation des fonctions, c'est à dire en utilisant $f(x)$ et x. Comment choisir qui est x et qui est $f(x)$?

J'ai choisi **Prix** pour $f(x)$ car il dépend du nombre de photos x.

$$f(x) = 0,1x + 5$$

1.4 Les fonctions du premier degré

Cette année nous allons seulement étudier les fonctions du premier degré, c'est à dire les fonctions dont l'expression contient une variable de degré 1.

Fonction du premier degré

Un **fonction du premier degré** s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$ avec $a \in \Re_0, b \in \Re$.

Note : Une autre notation pour une fonction du premier degré est $y = mx + p$. Elle est parfaitement équivalente à $f(x) = ax + b$.

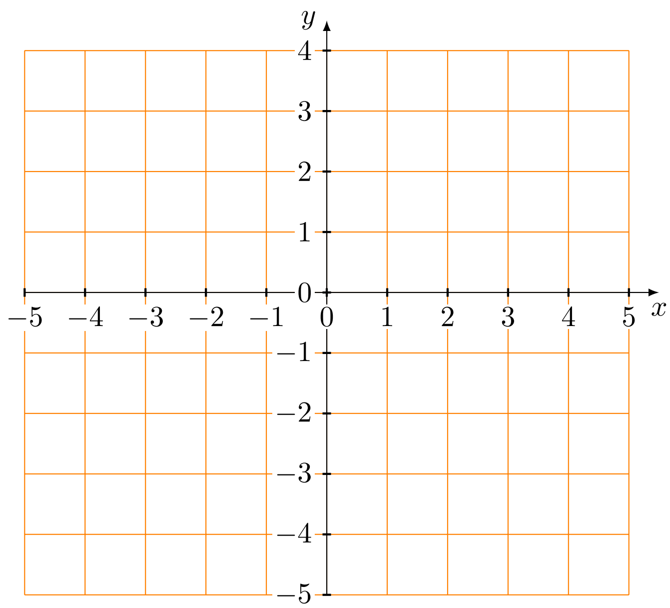
1.4.1 Représentation graphique

Les fonctions sont souvent représentées graphiquement dans le plan grâce à un repère cartésien.

Repère cartésien

Un **repère cartésien** est constitué de deux droites sécantes (le plus souvent perpendiculaires) et graduées. L'axe horizontal est appelé **axe des abscisses** tandis que l'axe vertical est appelé **axe des ordonnées**.

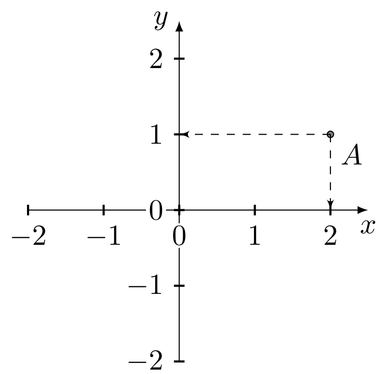
Exemple :



Coordonnées d'un point

La position d'un point est représentée dans le plan cartésien grâce à ses **coordonnées**. Les coordonnées d'un point A sont le couple de valeur (x_A, y_A) avec x_A **l'abscisse** du point A et y_A **l'ordonnée** du point A.

Exemple : Le point A a pour coordonnée $(2, 1)$.



Abscisse

L'abscisse d'un point est sa coordonnée horizontale. Elle est représentée par la lettre x.

Dans l'exemple, l'abscisse de A est $x = 2$.

Ordonnée

L'ordonnée d'un point est sa coordonnée verticale. Elle est représentée par la lettre y.

Dans l'exemple, l'ordonnée de A est $y = 1$.

1.4.2 Représentation d'une fonction du premier degré

Une fonction du premier degré $y = mx + p$ (ou $f(x) = ax + b$) est représentée graphiquement par **une droite**.

1.4.3 Tracer le graphique d'une droite

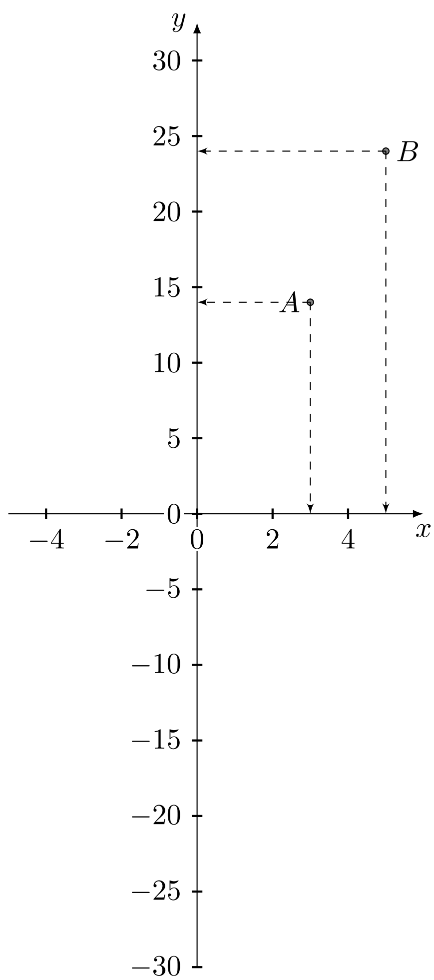
Pour tracer le graphique d'une droite, il suffit de connaître les coordonnées de deux points appartenant à la droite et de les relier entre eux.

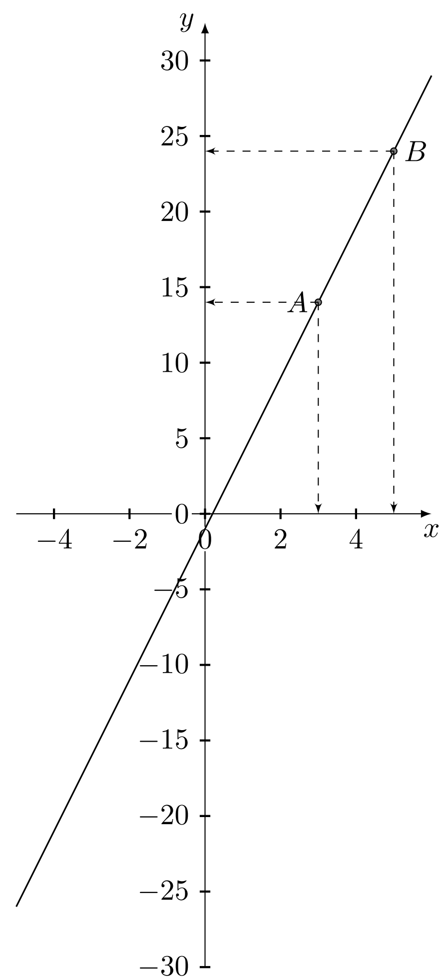
1. Si on veut tracer une droite à partir du tableau de valeurs associé, on choisit deux couples de valeurs parmi celles disponibles et on trace la droite passant par les deux points.

<u>**Exemple :**</u> Pour tracer la droite associée à ce tableau de valeurs :

x	1	3	5	10
y	4	14	24	49

On choisit deux couples de valeurs : $A(3,14)$ et $B(5,24)$. On les place dans un repère et ensuite on trace la droite passant par les deux points.





2. Si on veut tracer une droite à partir de sa formule, il faut aussi trouver deux points appartenant à cette droite. Pour ce faire, on choisit deux abscisses **au hasard** (généralement $x = 0$ et $x = 1$ car ce sont les plus faciles à calculer, mais pas toujours) et on trouve la valeur de l'ordonnée en substituant les abscisses choisies dans la formule.

   Exemple : Soit l'équation de droite suivante $y = -2x + 3$.

   Je remplace dans l'équation x par 0.

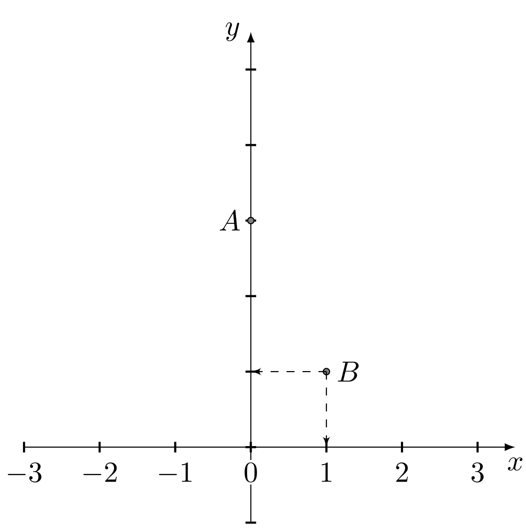
$$\begin{aligned} y &= -2 \times 0 + 3 \qquad (1) \\ y &= 3 \qquad (2) \end{aligned}$$

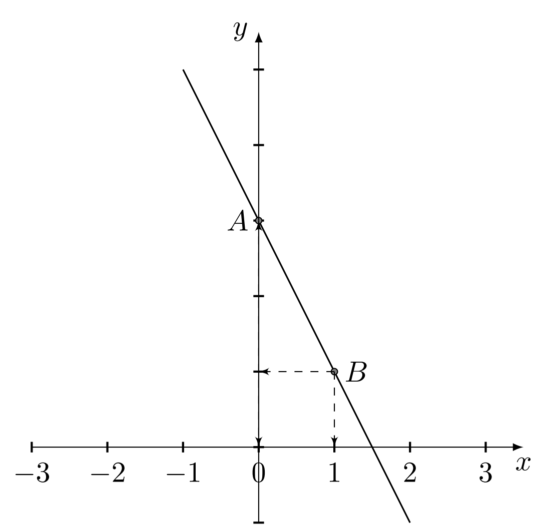
   J'ai trouvé un premier point $A(0, 3)$.

   Je remplace dans l'équation x par 1.

$$\begin{aligned} y &= -2 \times 1 + 3 \qquad (3) \\ y &= 1 \qquad (4) \end{aligned}$$

   J'ai trouvé un second point $B(1, 1)$. Je peux maintenant tracer la droite passant par A et B.





Exemple :

Soit un opérateur de téléphonie qui propose l'internet mobile à un tarif composé d'un coût fixe de connexion et un prix par mégabyte utilisé. Si le prix de connexion est de 10 cents et que le prix par Mb est de 2 cents,

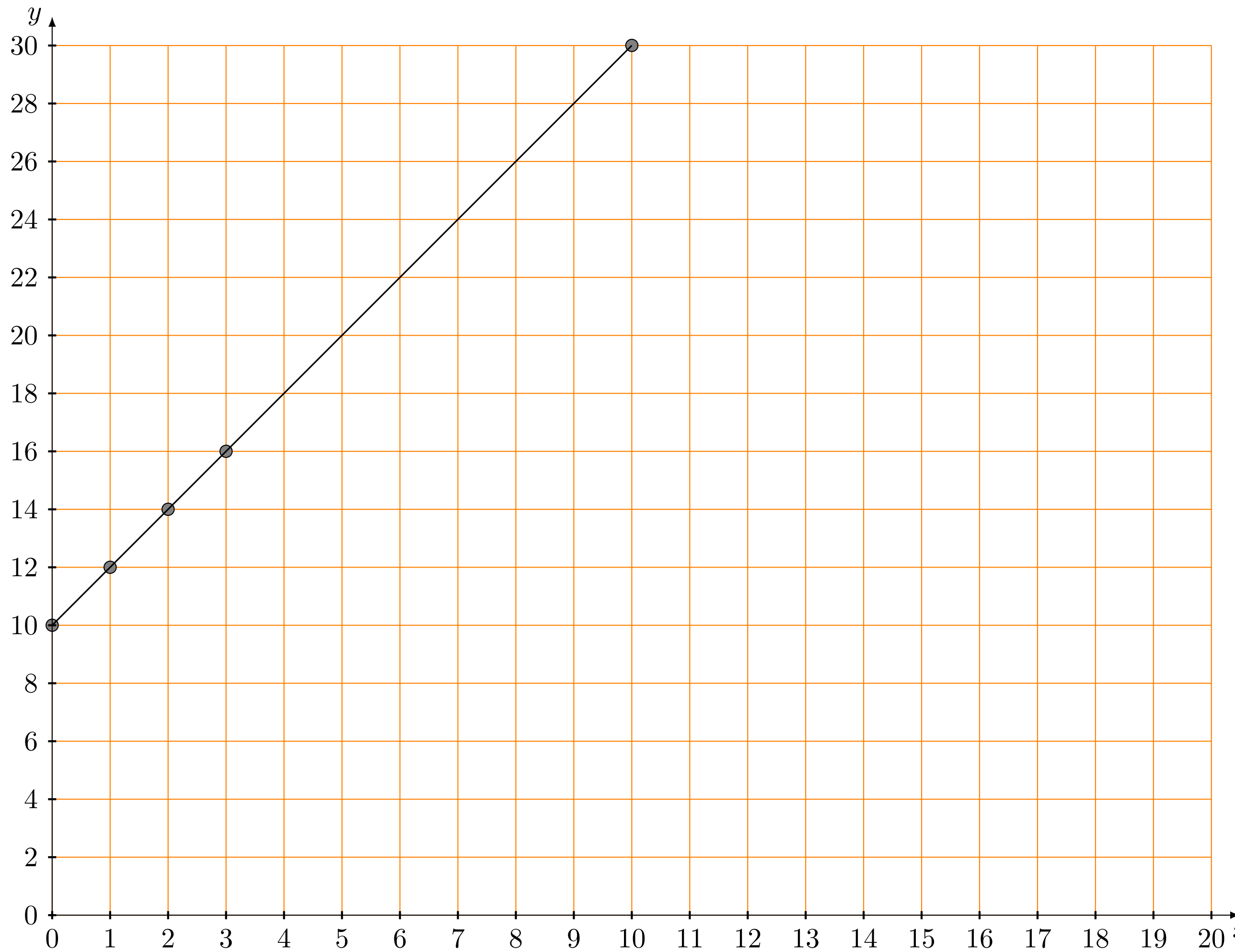
1. Quelle grandeur sera $f(x)$ (ou y) et quelle grandeur sera x ?

   x sera le nombre de mégabyte et f(x) le prix. Car le prix évolue en fonction du nombre de mégabyte consommé et non l'inverse.
2. quelle est l'expression de la fonction correspondant à la situation ?

   $f(x) = 2x + 10$
3. Complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	10
f(x)	10	12	14	16	30

   Pour trouver les valeurs de $f(x)$ on remplace dans la formule la variable x par la valeur du tableau. **Exemple** : si $x = 2$ alors $f(2) = 2 \times 2 + 10 = 14$.
4. Place les différents points trouvés dans le repère ci-dessous et relie les au moyen d'une latte.


y
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
x

5. Pour chacune des situations suivantes, donne l'expression de la nouvelle fonction et trace son graphique dans le même repère que la fonction précédente :
   (a) L'opérateur décide de faire une promotion et diminue le prix du mégabyte à un cent.

   $$f_2(x) = x + 10$$

x	0	2	4	6
f(x)	10	12	14	16

   (b) C'est la crise. L'opérateur est obligé d'augmenter ses prix, le mégabyte passe maintenant à 5 cents.

   $$f_3(x) = 5x + 10$$

x	0	2	4	6
f(x)	10	20	30	40

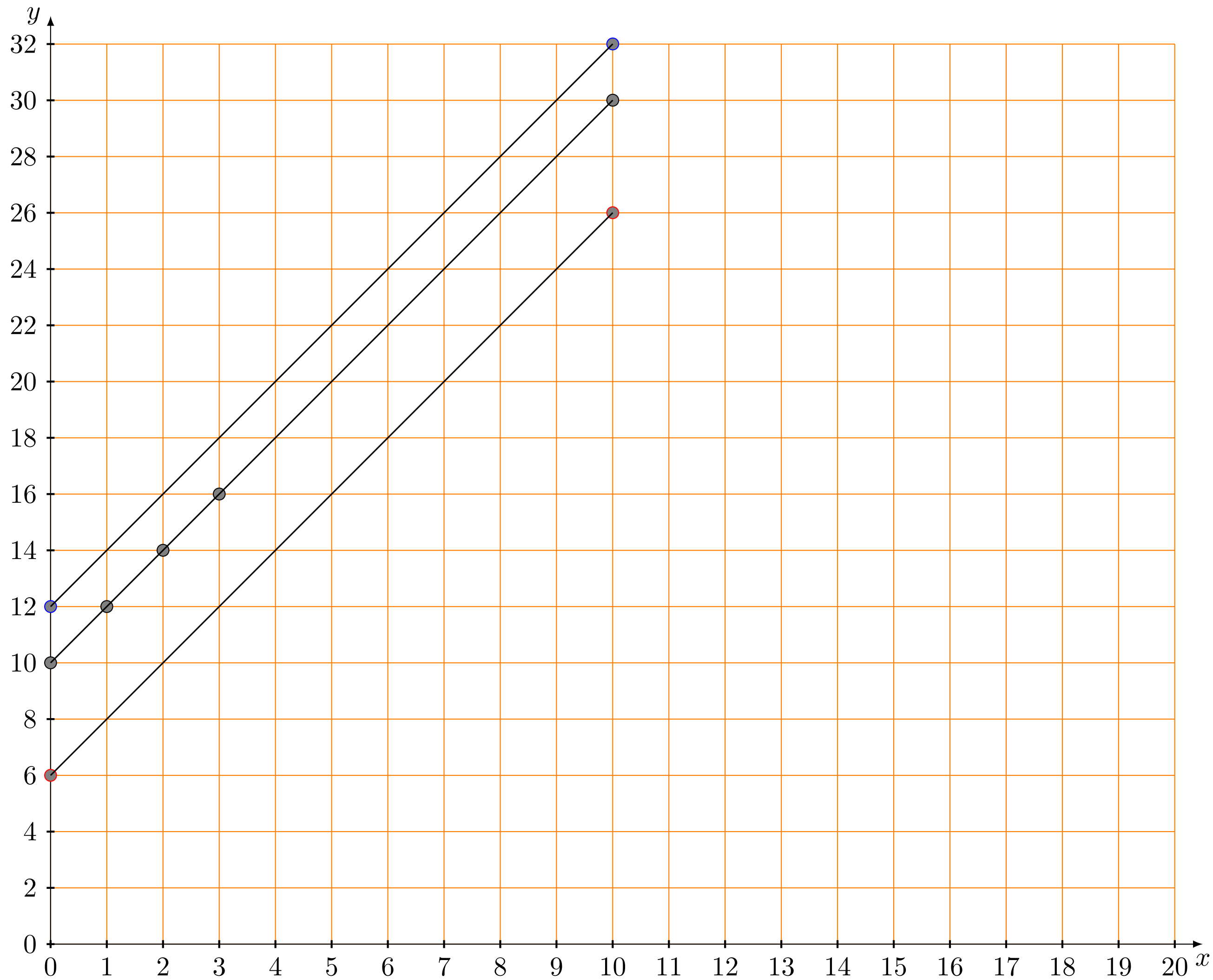
6. Quelle est l'influence du prix du mégabyte sur l'allure de la droite ?

   Il détermine l'inclinaison de la droite. Plus le prix du mégabyte est élevé plus la droite monte fort.
7. Dans le repère ci-dessous, retrace le graphique de la fonction avec les prix de base ainsi que ceux des situations suivantes :
   (a) L'opérateur décide de faire une promotion et diminue le prix de la connexion à 6 cents.

   $$f_4(x) = 2x + 6$$

   (b) C'est la crise. L'opérateur est obligé d'augmenter ses prix, la connexion passe maintenant à 12 cents.

   $$f_5(x) = 2x + 12$$



8. Quelle est l'influence du prix de la connexion sur l'allure des droites ?

   Il change la position verticale de la droite. Plus le prix de connexion est grand, plus la droite est haute dans le graphique. L'inclinaison ne change pas.

1.4.4 La pente d'une droite

Pente d'une droite

La pente d'une droite, appelée aussi coefficient angulaire, est un nombre qui permet de décrire à la foi le sens de l'inclinaison de la droite (si elle monte ou descend) et la force de cette inclinaison (pente forte ou pas).

Calcul

Soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ appartenant à la même droite, la pente de cette droite est :

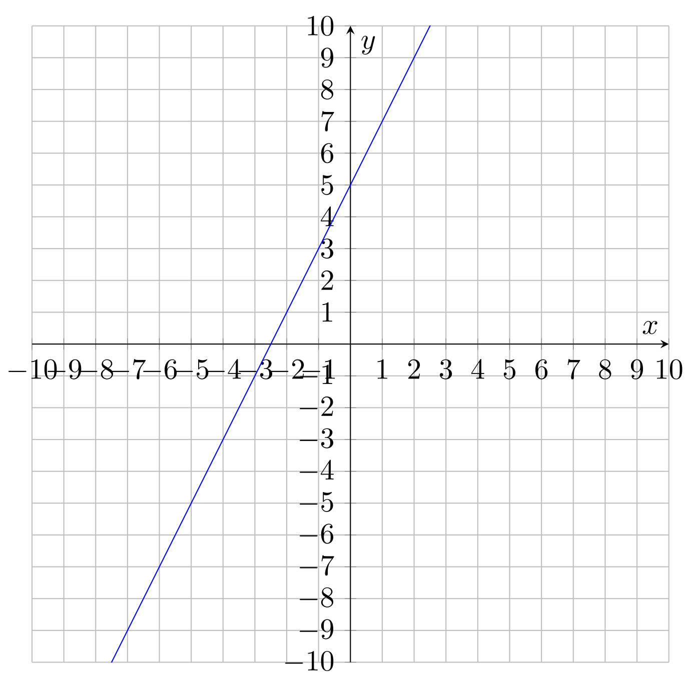
$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Valeur depuis l'équation de la droite

Soient une droite d'équation $y = mx + p$, la pente de cette droite est égale à m.

Exemple :

Sur base du graphique ci-dessous, réponds aux questions suivantes :



1. Trouve les coordonnées de deux points de la droite :

   $A(1, 7)$ et $B(2, 9)$ (Plein d'autres choix possibles, il faut regarder sur le graphique).

2. Calcule la pente à partir de ces coordonnées.

$$m\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-7}{2-1} = \frac{2}{1} = 1$$

3. Trouve la fonction associée à cette droite parmi les suivantes : réponse : c)

   (a) $f(x) = 4x + 5$

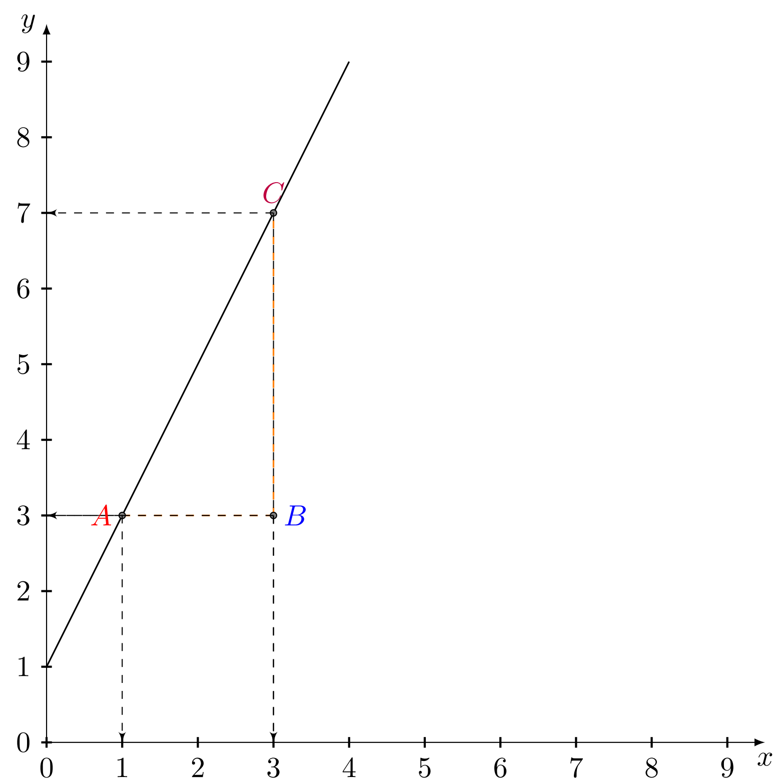
   (b) $f(x) = 3x + 5$

   (c) $\underline{f(x) = 2x + 5}$ (c'est la seule avec une pente égale à 2).

   (d) $f(x) = x + 5$

Une façon plus graphique de calculer la pente est de prendre deux points qui appartiennent à la droite et de tracer le triangle rectangle ayant la droite pour hypoténuse.
La pente est égale au rapport des longueurs du côté du triangle : $m = \frac{C_y}{C_x}$ avec C_y le côté parallèle à l'axe des ordonnées et C_x le coté parallèle à l'axe des abscisses.

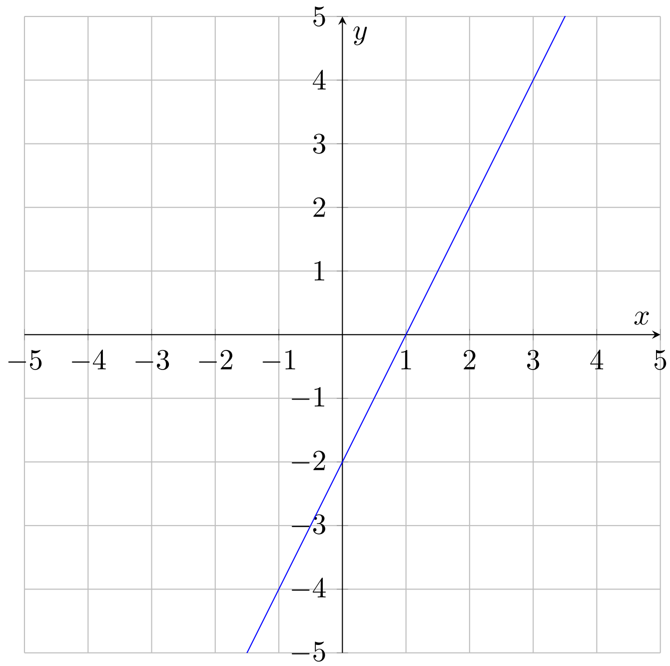
Exemple :



La pente de la droite est $m = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Pour trouver la pente d'une droite à partir du tableau de valeurs associé, il suffit de voir de combien augmentent les ordonnées chaque fois que l'abscisse augmente de 1.

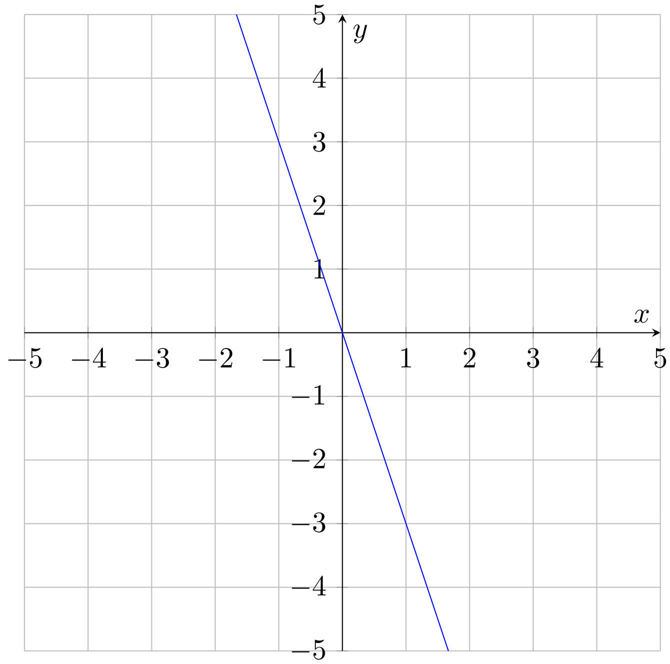
Exemple :



Soit le tableau des valeurs prises par la fonction.

x	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8

Dans ce tableau-ci, chaque fois que l'on augmente l'abscisse de 1, on **augmente** l'ordonnée de **2** unités. La pente est égale à **2**



Soit le tableau des valeurs prises par la fonction.

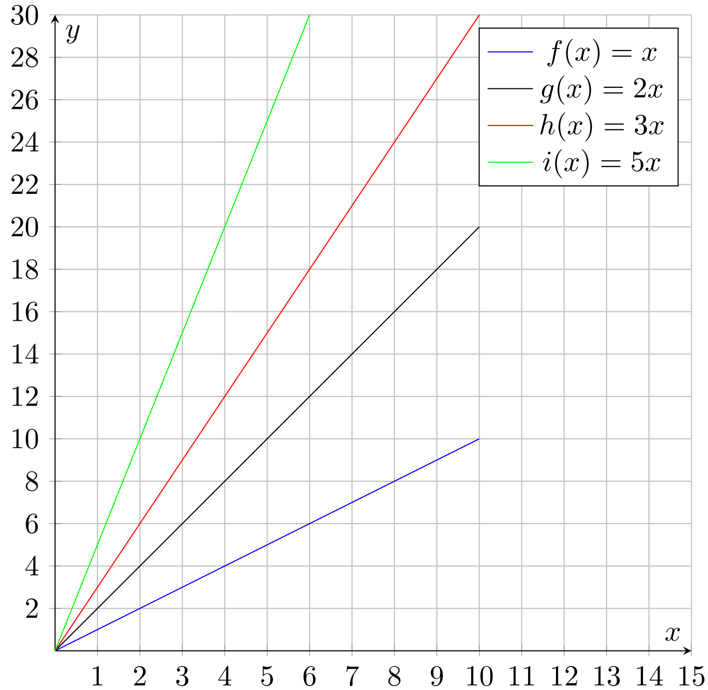
x	1	2	3	4	5
y	-3	-6	-9	-12	-15

Dans ce tableau-ci, chaque fois que l'on augmente l'abscisse de 1, on **diminue** l'ordonnée de **3** unités. La pente est égale à **-3**

1.4.5 Influence de la pente sur le graphique d'une droite

Trace dans le même repère cartésien les droites suivantes :

$$f(x) = x \mid g(x) = 2x \mid h(x) = 3x \mid i(x) = 5x$$



Que remarques-tu ?

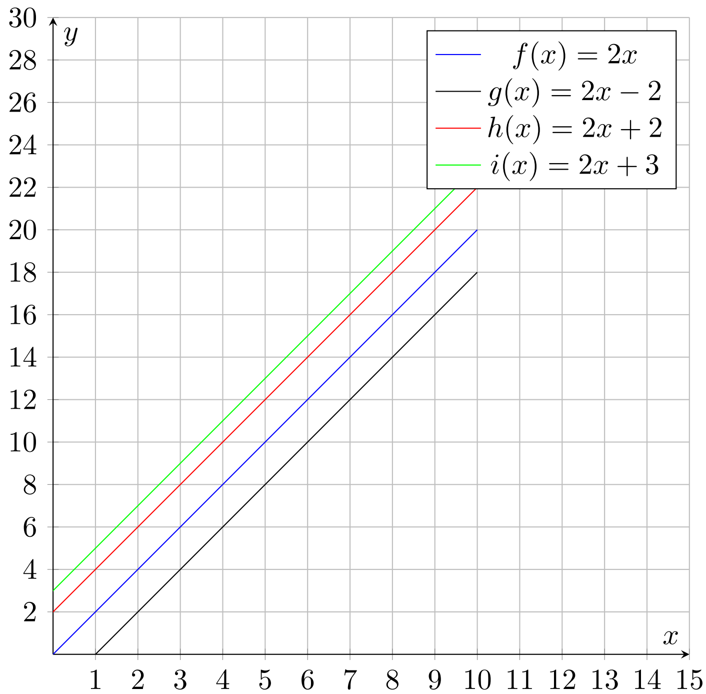
Que l'inclinaison des droites varie.

Quel est le lien avec la pente de ces droites ?

Plus la pente est grande, plus la droite monte fort.

Trace dans le même repère cartésien les droites suivantes :

$$f(x) = 2x \mid g(x) = 2x - 2 \mid h(x) = 2x + 2 \mid i(x) = 2x + 3$$



Que remarques-tu ?

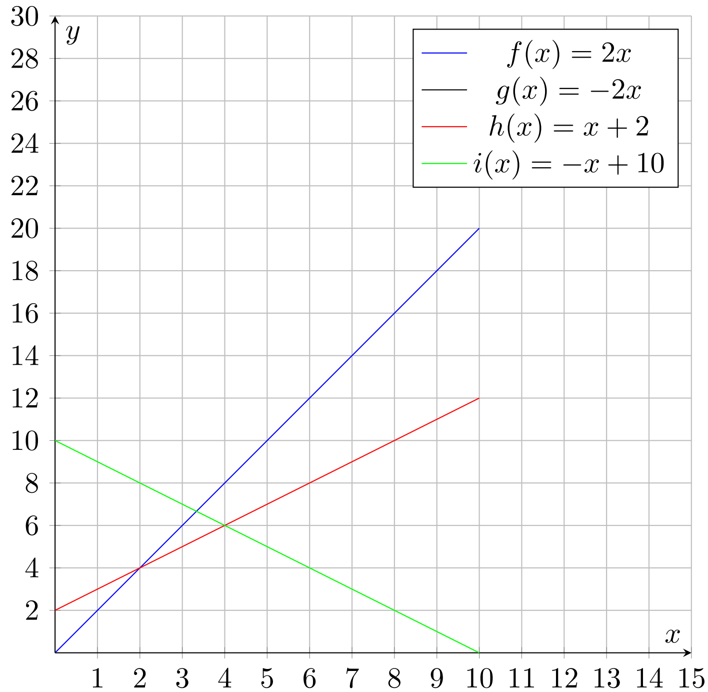
Que les droites sont déplacées verticalement et sont parallèles.

Quel est le lien avec la pente de ces droites ?

Les droites ayant la même pente sont parallèles.

Trace dans le même repère cartésien les droites suivantes :

$$f(x) = 2x \;\big|\; g(x) = -2x \;\big|\; h(x) = x + 2 \;\big|\; i(x) = -x + 10$$



Que remarques-tu ?

Certaines droites montent, d'autres descendent.

Quel est le lien avec la pente de ces droites ?

Les droites avec une pente positive montent, celles avec une pente négative descendent.

Exercices

1. Les situations suivantes peuvent être modélisées par des droites. Que vas-tu choisir pour x et $f(x)$? Justifie.

   (a) Tu roules à une vitesse constante de 50 km/h. Tu aimerais connaître la distance parcourue en fonction du temps que tu as roulé.

   x **sera le temps et** $f(x)$ **la distance parcourue. Car la distance dépend du temps**

   (b) Tu veux envoyer un colis par la poste. Le tarif dépend de la masse du colis. Combien vas-tu payer ?

   x **sera la masse et** $f(x)$ **le tarif. Car le tarif dépend de la masse**

   (c) Si un magasin indique que tous les articles sont soldés à 50%. Tu aimerais exprimer la réduction obtenue.

   x **sera le prix de base et** $f(x)$ **la réduction obtenue. Car la réduction dépend du prix**

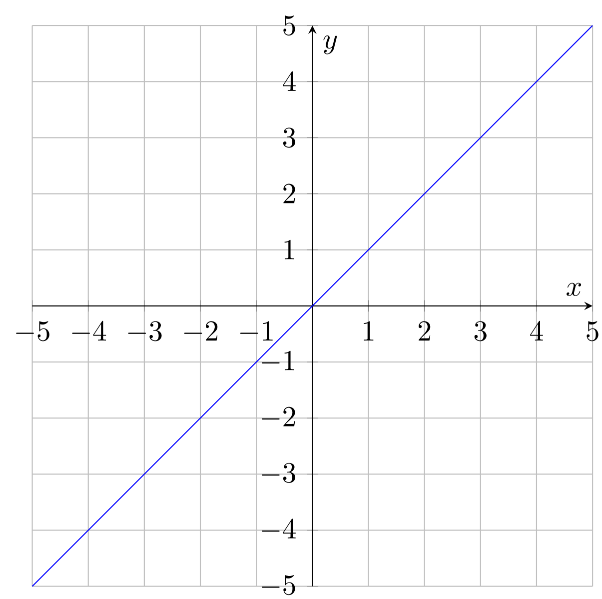
   (d) Modéliser la vitesse du vent et l'énergie produite par une éolienne.

   x **sera la vitesse du vent et** $f(x)$ **l'énergie produite. Car l'énergie dépend de la vitesse du vent.**

2. Complète les différents tableaux en fonction du graphique associé.

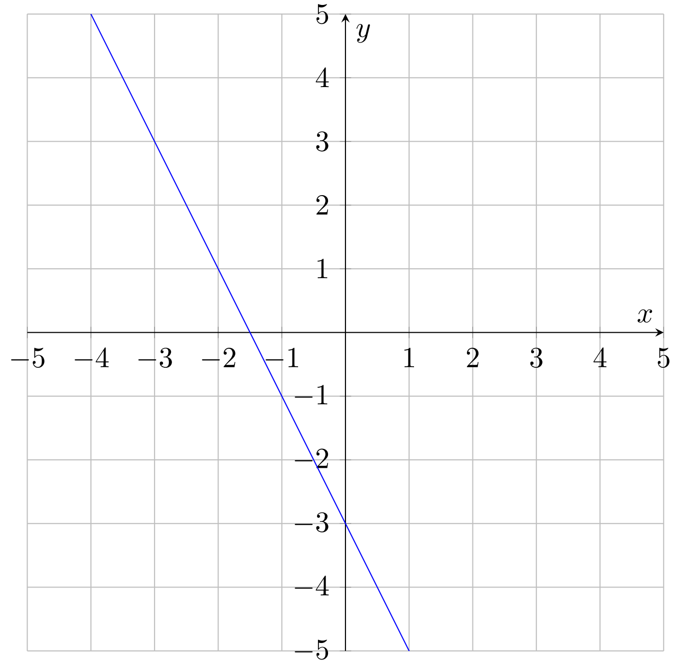
   (a)

x	**y**
-2	**-2**
-1	-1
0	0
3	**3**
5	5



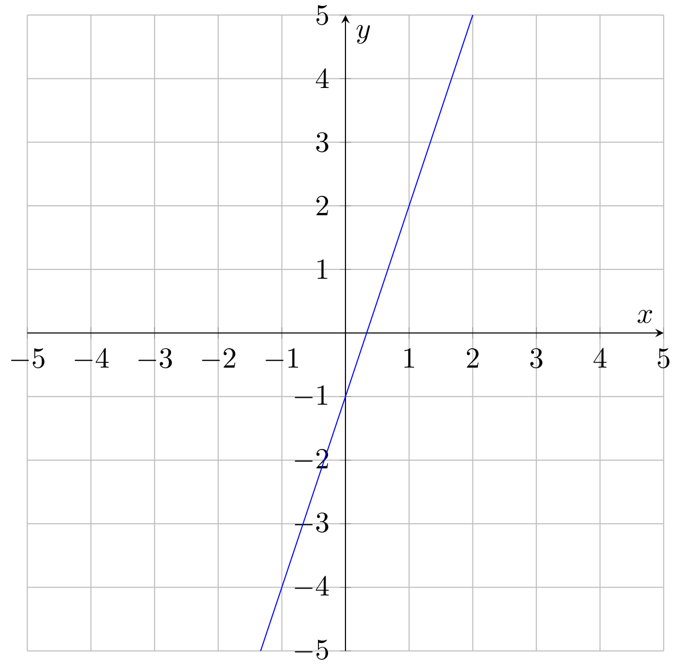
(b)

x	y
-2	**1**
-3	3
1	**-5**
0	**-3**
-4	5



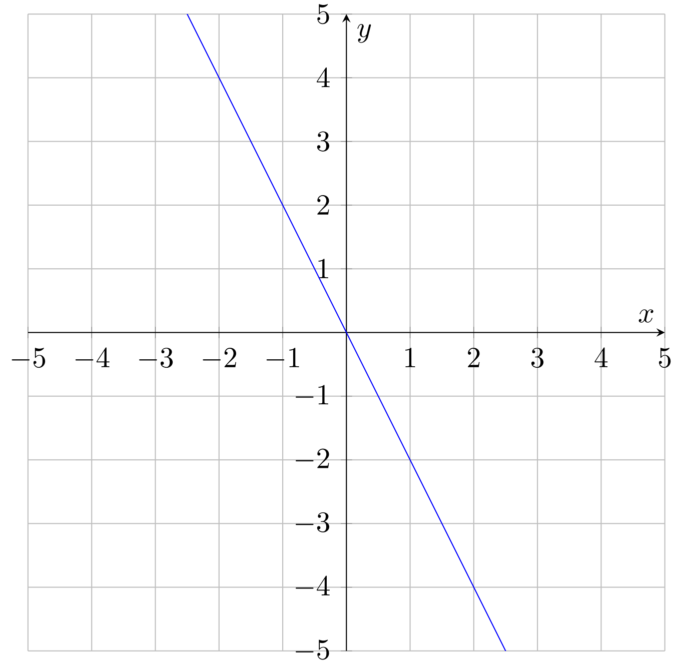
(c)

x	y
-1	**-4**
0	-1
1	2
0	**-1**
2	**5**



3. Associe les tableaux aux graphiques correspondant.

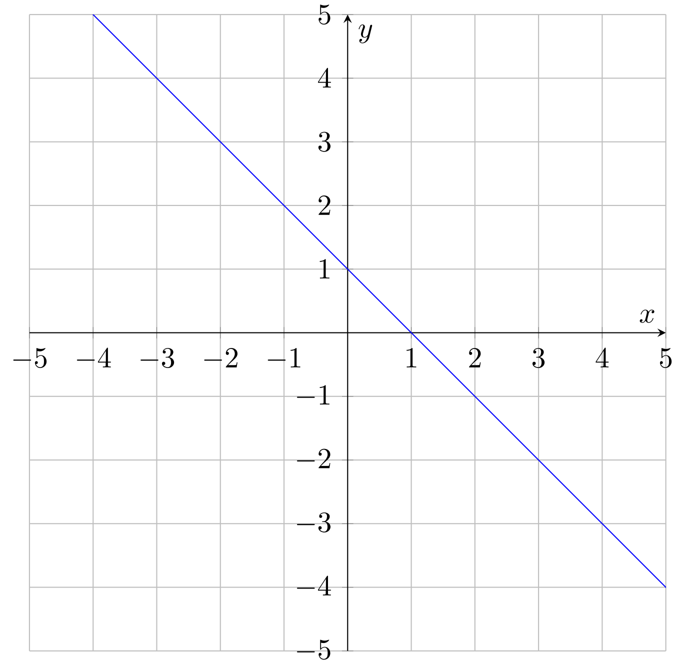
x	**y**
-1	2
0	3
1	4
2	5
3	6



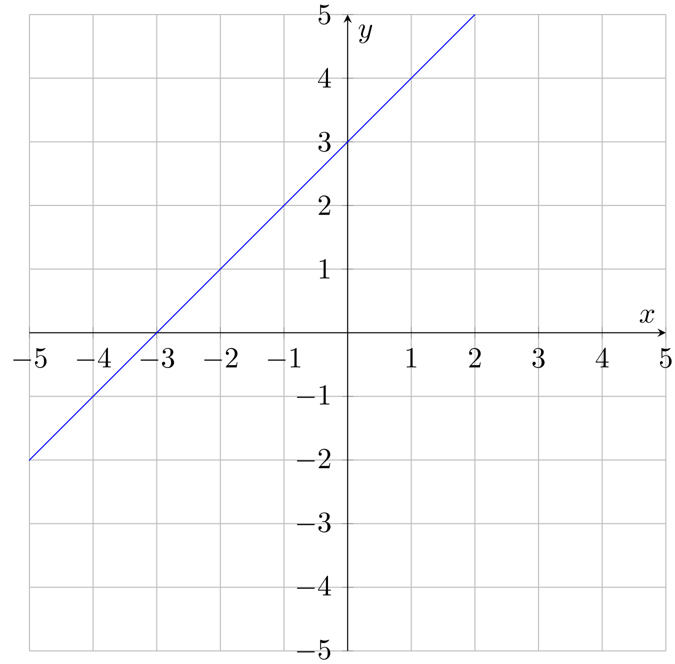
Ce tableau va avec le 3ème graphique.

x	**y**
-1	2
0	1
1	0
2	-1
3	-2

Ce tableau va avec le 2ème graphique.



x	**y**
-1	2
0	0
1	- 2
2	-4
3	-6



Ce tableau va avec le 1er graphique.

4. Complète les tableaux en fonction des formules associées.

(a) $f(x) = 2x + 2$

x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)	**-18**	**-4**	**0**	**2**	**6**	**18**

(b) $f(x) = 3 - x$

x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)	**7**	**6**	**4**	**3**	**1**	**-5**

(c) $f(x) = -3x - 3$

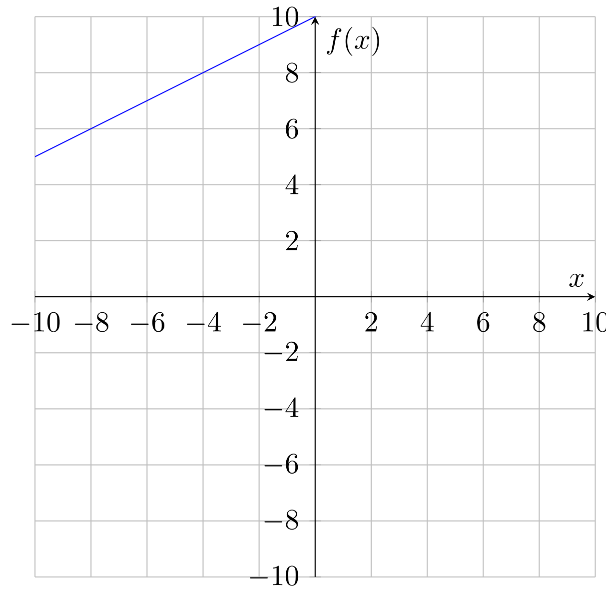
x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)	**27**	**6**	**0**	**-3**	**-9**	**-27**

(d) $f(x) = -x$

x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)	**10**	**3**	**1**	**0**	**-2**	**-8**

5. Associe les fonctions à leur graphique.

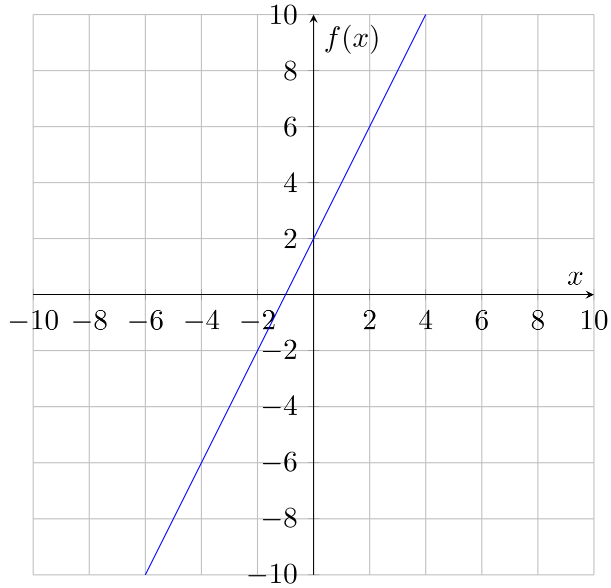
$f(x) = 2x + 2$



Cette fonction est associée au deuxième graphique

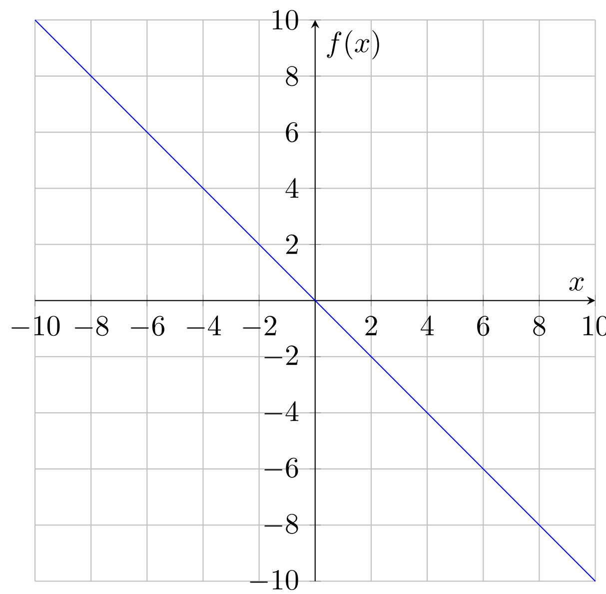
$f(x) = 3 - x$

Cette fonction est associée au qua-



trième graphique

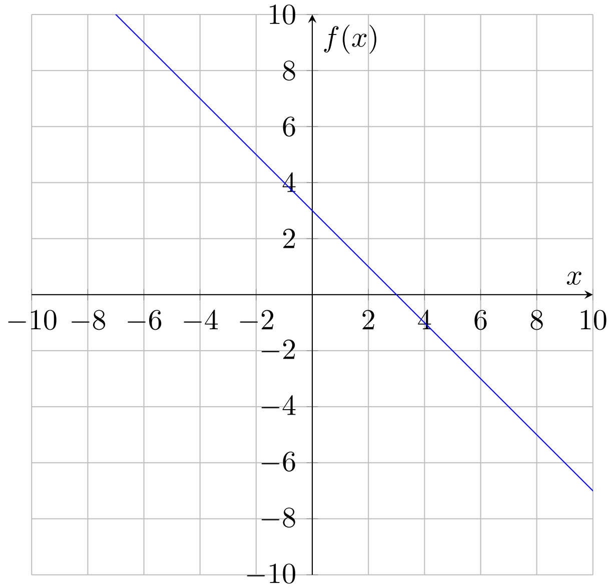
$$f(x) = \frac{x}{2} + 10$$



Cette fonction est associée au premier graphique

$$f(x) = -x$$

Cette fonction est associée au troisième

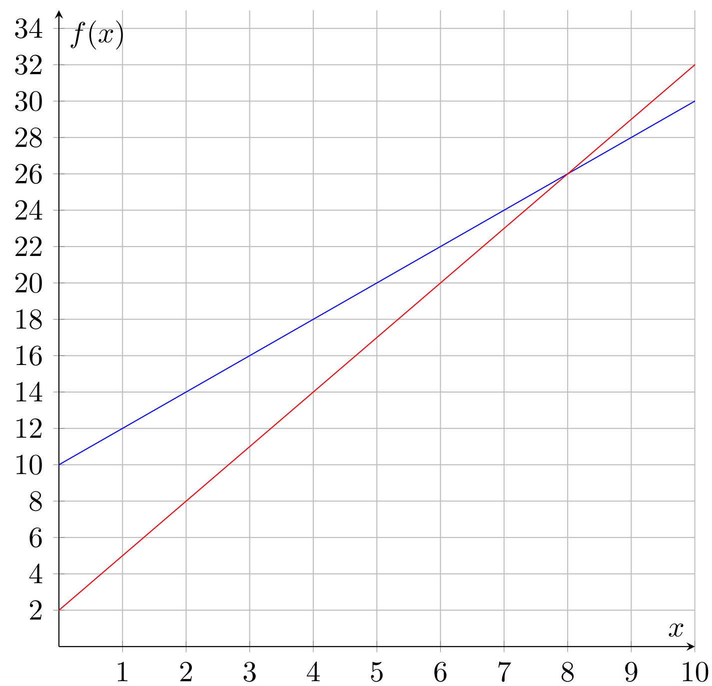


graphique

6. Abdel hésite entre deux opérateurs pour son abonnement de téléphone. Les formules tarifaires des deux entreprises sont les suivantes :

	Coût de connexion (cents)	Coût par mégabyte (cent/Mb)
Entreprise 1	10	2
Entreprise 2	2	3

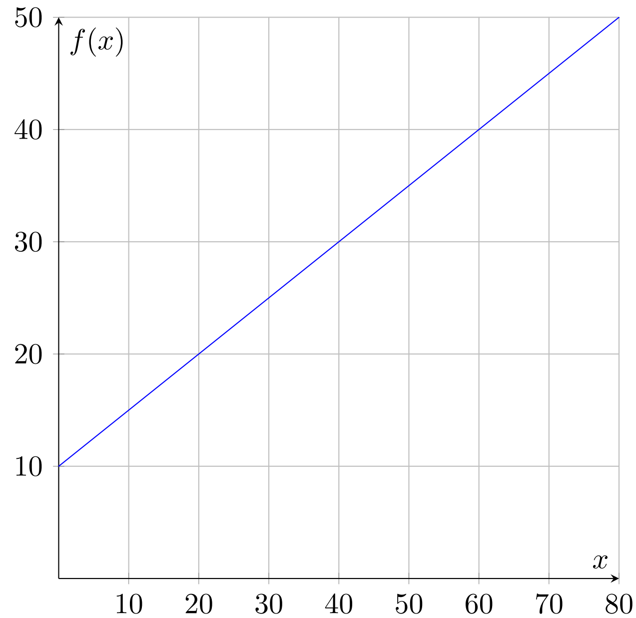
Sachant que lorsqu'il se connecte pour utiliser ses données mobiles, il utilise en moyen 5 Mb et qu'il dépasse très rarement les 8Mb, quelle entreprise conseillerais-tu à Abdel de choisir ? Justifie à l'aide d'un graphique.



Il est plus avantageux pour Abdel de choisir la deuxième entreprise car en dessous de 8Mb, son prix est plus avantageux.

Remarques : Il convient de remarquer que à partir de 8Mb la première entreprise est beaucoup plus avantageuse.

7. Un automobiliste s'arrête dans une station-service pour faire le plein. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la quantité de carburant (en litres) se trouvant dans le réservoir au cours du remplissage en fonction du temps (en secondes). Voici le graphique représentant la situation lorsqu'on fait le plein de la voiture.



(a) Quelle variable vas-tu choisir pour x et pour $f(x)$?

On choisit le temps comme x et le volume comme $f(x)$ car le volume d'essence dans le réservoir dépend du temps de remplissage.

(b) Quelle quantité de carburant se trouvait dans le réservoir en arrivant à la station service ?

Le réservoir contient 10 litres. On le voit sur le graphique quand $x = 0$. C'est à dire quand la personne n'a pas encore commencé à remplir le réservoir.

(c) Quelle est la capacité du réservoir si l'automobiliste a fait le plein ?

La capacité du réservoir est de 50 litres. On voit sur le graphique que le dernier point est (80,50), c'est à dire que à la fin du remplissage (80 secondes) le réservoir contient 50 litres.

(d) Combien de temps faut-il pour faire le plein ?

80 secondes.

(e) Complète le tableau de nombres suivant en utilisant tes réponses précédentes.

x	0	80
f(x)	10	50

(f) Quel est le débit de la pompe en litres par secondes ?

Le réservoir contenait 10 litres en arrivant. Après 20 secondes, il contient 20 litres (voir graphique). La pompe a donc versé 10 litres dans le réservoir en 20 secondes. Le débit est donc de $\frac{10 litres}{20 secondes} = \frac{1 litre}{2 secondes} = 0,5 \frac{litres}{secondes}$.

2 Equation du premier degré

2.1 Théorie

Une équation est résolue lorsqu'on a trouvé la valeur de l'inconnue qui la vérifie. C'est à dire lorsqu'on a obtenu une expression de la forme $x = ...$

Afin d'**isoler une variable**, c'est à dire que la variable soit seule d'un côté de l'équation ($x = ...$), on va transposer tous les termes numériques d'un côté de l'équation.

2.1.1 Isoler la variable dans une équation du premier degré

1. **Comment éliminer les termes positifs ?**

   Pour éliminer un terme positif d'un membre de l'équation, il faut lui ajouter son opposé. Or, lorsque l'on soustrait un terme d'un membre de l'égalité, nous devons le soustraire de l'autre afin de maintenir cette égalité.

   Si nous retranchons un même terme aux deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned} x+2 &= 5 \\ x+2-2 &= 5-2 \\ x &= 5-2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

   La solution de l'équation est donc $x = 3$.

2. **Comment éliminer les termes négatifs ?**

   Pour éliminer un terme négatif d'un membre de l'équation, il faut lui ajouter son opposé. Or, lorsque l'on additionne un terme à un membre de l'égalité, nous devons l'additionner à l'autre membre afin de préserver l'égalité.

   Si nous ajoutons un même terme aux deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned} x-2 &= 5 \\ x-2{\color{red}+2} &= 5{\color{red}+2} \\ x &= 5{\color{red}+2} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 7$.

Remarque : Il est possible d'utiliser ces propriétés avec toutes les expressions mathématiques, même celles qui contiennent des variables.

$$\begin{aligned} 2x+2 &= 3x \\ 2x{\color{red}-2x}+2 &= 3x{\color{red}-2x} \\ 2 &= 3x{\color{red}-2x} \\ 2 &= x \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 2$.

3. **Que faire si l'inconnue est multipliée par une valeur ?**

   Pour éliminer le facteur qui multiplie une variable, il faut diviser les deux membres de l'équation par ce facteur.

   > Si nous divisons par un même facteur les deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned} 2x &= 4 \\ \frac{2x}{\color{red}2} &= \frac{4}{\color{red}2} \\ x &= \frac{4}{\color{red}2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 2$.

4. **Que faire si l'inconnue est divisée par une valeur ?**

   Pour éliminer le facteur qui divise une variable, il faut multiplier les deux membres de l'équation par ce facteur.

Si nous multiplions par un même facteur les deux membres d'une équations, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{5} &= 4 \\
\frac{x}{5} \times 5 &= 4 \times 5 \\
x &= 4 \times 5 \\
x &= 20
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 20$.

Exemple récapitulatif

$$\begin{aligned}
3x + 1 &= 7 \\
3x + 1 - 1 &= 7 - 1 \\
3x &= 6 \\
\frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 2$.

Pour résumer

Pour résoudre une équation du premier degré ($2x + 3 = 5x - 2$) :

(a) Je transpose tous les termes indépendants (qui ne contiennent pas une variable) d'un côté de l'équation.
$2x + 3 = 5x - 2 \Rightarrow 2x + 3 + 2 = 5x$.

(b) Je transpose tous les termes qui contiennent la variable de l'autre côté.
$2x + 3 + 2 = 5x \Rightarrow 3 + 2 = 5x - 2x \Rightarrow 5 = 3x$.

(c) J'élimine les facteurs multipliant la variable.
$5 = 3x \Rightarrow \frac{5}{3} = x$

2.2 Exercices corrigés

1. $x + 3 = 10$

solution :

$$\begin{aligned}
x &= 10 - 3 \\
x &= 7
\end{aligned}$$

2. $x + 1 = -3$

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} x &= -3 - 1 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

3. $x + 3 = 5$

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} x &= 5 - 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

4. $2 - x = 0$

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} 2 &= x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

5. $-t + 3 = 2$ (t étant l'inconnue)

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} -t &= 2 - 3 \\ -t &= -1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

6. $x - 3 = 10$

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} x &= 10 + 3 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

7. $x - 1 = -3$

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} x &= -3 + 1 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

8. $5x = 10$

<u>**solution :**</u>

$$\begin{aligned} x &= \frac{10}{5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

9. $-2x = -3$

solution :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3}{-2} \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

10. $\dfrac{x}{2} = 10$

solution :

$$\begin{aligned} x &= 10 \times 2 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

11. $\dfrac{x}{5} = -3$

solution :

$$\begin{aligned} x &= -3 \times 5 \\ x &= -15 \end{aligned}$$

12. $2m = 4$ (m étant l'inconnue)

solution :

$$\begin{aligned} m &= \frac{4}{2} \\ m &= 2 \end{aligned}$$

13. $3x = 7$

solution :

$$x = \frac{7}{3}$$

14. $5u + 2 = -2$ (u étant l'inconnue)

solution :

$$\begin{aligned} 5u &= -2 - 2 \\ 5u &= -4 \\ u &= \frac{-4}{5} \end{aligned}$$

15. $\frac{x}{2} = 8$

solution :

$$\begin{aligned} x &= 8 \times 2 \\ x &= 16 \end{aligned}$$