Devoir à remettre pour le jeudi 22 septembre.

1. **Résous ces systèmes par la méthode de substitution**

   (a)
   $$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+4y & = & 2 \\ 3x+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

   (b)
   $$\left\{\begin{array}{rcr} 5x+2y & = & 3 \\ 10x+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

2. **Résous ces systèmes par la méthode de Gauss.**

   (a)
   $$\left\{\begin{array}{rcr} 3x+4y & = & 5 \\ 6x+8y & = & 2 \end{array}\right.$$

   (b)
   $$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+4y & = & -4 \\ 3x+2y & = & -6 \end{array}\right.$$

3. **Ces système sont-ils impossibles ? Justifie sans calculer les solutions.**

   (a)
   $$\left\{\begin{array}{rcr} 3x+4y & = & 5 \\ 6x+8y & = & 2 \end{array}\right.$$

   (b)
   $$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y & = & -4 \\ 3x+y & = & -6 \end{array}\right.$$

Correction

1. Substitution

   (a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y & = & 2 \\ 3x+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

   i. Isoler une variable.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & 2-4y \\ 3x+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \dfrac{2-4y}{2} \\ 3x+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2y \\ 3x+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

   ii. Substitution.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2y \\ 3(1-2y)+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

   iii. Résolution équation du premier degré en y.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2y \\ 3-6y+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2y \\ -4y & = & -1-3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2y \\ y & = & \dfrac{-4}{-4} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2y \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

   iv. Substitution

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2(1) \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1-2 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & -1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

   $S=\{(-1,1)\}$

(b)

$$\begin{cases} 5x + 2y &= 3 \\ 10x + 4y &= 6 \end{cases}$$

Il est possible de remarquer que les deux équations sont multiples l'une de l'autre. En effet, si on multiplie par 2 l'équation $5x + 2y = 3$, on obtient l'équation $10x + 4y = 6$ qui correspond à la deuxième équation du système. Les deux équations sont donc les mêmes.

Le système est dès lors indéterminé. La solution est donc $S = \left\{(x, \dfrac{3-5x}{2})\right\}$.

Si on décide tout de même de le résoudre par la méthode la substitution, on obtient :

i. Isoler une variable.

$$\begin{cases} 2y &= 3 - 5x \\ 10x + 4y &= 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y &= \dfrac{3-5x}{2} \\ 10x + 4y &= 6 \end{cases}$$

ii. Substituer.

$$\begin{cases} y &= \dfrac{3-5x}{2} \\ 10x + 4(\dfrac{3-5x}{2}) &= 6 \end{cases}$$

iii. Résoudre l'équation du premier degré.

$$\begin{cases} y &= \dfrac{3-5x}{2} \\ 10x + 2(3-5x) &= 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y &= \dfrac{3-5x}{2} \\ 10x + 6 - 10x &= 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y &= \dfrac{3-5x}{2} \\ 6 &= 6 \end{cases}$$

Le système est indéterminé car $6 = 6$ est toujours vrai.

Le système se résume donc à une seule équation : $5x + 2y = 3$. J'exprime y par rapport à x : $y = \dfrac{3-5x}{2}$. Les solutions du système sont tous les points appartenant à la droite $y = \dfrac{3-5x}{2}$ autrement dit, l'ensemble solution du système est constitué de tous les points de coordonnées $(x, \dfrac{3-5x}{2})$.

$$S = \left\{(x, \frac{3-5x}{2})\right\}.$$

2. Méthode de Gauss

(a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y &=& 5 \\ 6x+8y &=& 2 \end{array}\right.$$

i. On multiplie la première ligne par 2 pour obtenir le même coefficient devant les x.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+8y &=& 10 \\ 6x+8y &=& 2 \end{array}\right.$$

ii. On soustrait la première équation à la deuxième.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 6x+8y & = & 10 \\ 6x+8y & = & 2 \\ -------------- & - & -------- \\ 0x+0y & = & -8 \end{array}\right.$$

Nous obtenons une incohérence mathématique : $0 = -8$.
Le système est donc impossible : $S = \phi$.

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y &=& -4 \\ 3x+2y &=& -6 \end{array}\right.$$

Je vais détailler deux façons différentes de résoudre l'équation, selon la variable que l'on choisit d'éliminer.

i. On décide d'éliminer les x.

A. On multiplie la première équation par $\dfrac{3}{2}$ pour obtenir les mêmes coefficient devant le x.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{2}\times 3x + \frac{3}{2}\times 4y & = & \frac{3}{2}\times -4 \\ 3x+2y & = & -6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y &=& -6 \\ 3x+2y &=& -6 \end{array}\right.$$

B. On soustrait la première équation à la deuxième.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3x+6y & = & -6 \\ 3x+2y & = & -6 \\ -------- & - & ------- \\ 0x-4y & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous obtenons $y = 0$.

C. On substitue.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3x+6y & = & -6 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3x+6.0 & = & -6 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3x & = & -6 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{-6}{3} \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions du système sont $S = \{(-2, 0)\}$.

ii. On élimine y.

A. On multiplie la deuxième équation par 2 pour obtenir le même coefficient devant les y. (Il était aussi possible de diviser la première par 2).

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x+4y & = & -4 \\ 6x+4y & = & -12 \end{array}\right.$$

B. On soustrait la première équation à la deuxième.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x+4y & = & -4 \\ 6x+4y & = & -12 \\ ---------- & - & ------- \\ 4x+0y & = & -8 \end{array}\right.$$

$$x = \frac{-8}{4} = -2$$

C. On substitue x dans une des équations.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2\times -2+4y & = & -4 \\ x=2 & & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} 4y & = & 0 \\ x=2 & & \end{array}\right.$$

On obtient la solutions $S = \{(-2, 0)\}$.

(c)

3. Identifier les systèmes impossibles sans calcul.

   Pour identifier si un système est impossible, une des façons est de transformer les équations afin qu'elle soit de la forme $y = mx + p$ (équation de droite). Ensuite si les deux droites qui constituent le système ont le même pente, le système est impossible. Si les deux droites sont identiques, le système est indéterminé.

(a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 4y & = & 5 \\ 6x + 8y & = & 2 \end{array}\right.$$

i. On isole y dans chaque équation afin qu'elle soit de la forme $y = mx + p$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4y & = & 5 - 3x \\ 8y & = & 2 - 6x \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{5 - 3x}{4} \\ y & = & \frac{2 - 6x}{8} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{5}{4} - \frac{3x}{4} \\ y & = & \frac{2}{8} - \frac{6x}{8} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{5}{4} - \frac{3x}{4} \\ y & = & \frac{1}{4} - \frac{3x}{4} \end{array}\right.$$

Les deux droites représentées par les équations ci-dessus ont la même pente : $\frac{3}{4}$. Le système est donc impossible.

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & -4 \\ 3x + y & = & -6 \end{array}\right.$$

i. On isole y afin d'avoir les équations sous la forme $y = mx + p$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -4 - 2x \\ y & = & -6 - 3x \end{array}\right.$$

Les deux droites représentées par les équations ci-dessus ont deux pentes différentes, le système possède donc une solution unique qui sera les coordonnées du point d'intersection des deux droites.