Cours de mathématiques 2022/2023 - 5TQA

Arthur Paquot

CHAPITRE 1

Système d'équations linéaires

1.1 Programme de l'année

Système d'équations linéaires

Agenda

Le chapitre sera traité durant les mois de septembre et d'octobre.

Connaître

- L'élève sera capable de reconnaître un système d'équations linéaires du premier degré (à 2 ou 3 inconnues) impossible, indéterminé ou avec une solution unique.
- L'élève sera capable d'expliquer dans ses mots les notions suivantes :
  - Équation du premier degré
  - Inconnue d'une équation
  - Un système d'équations
  - Une matrice
- L'élève sera capable d'expliquer le lien entre la représentation graphique d'un système d'équations et son nombre de solutions.

Appliquer

- L'élève sera capable de résoudre un système d'équations selon chacune de ces méthodes :
  - Résolution graphique
  - Résolution par substitution
  - Résolution par la méthode de Gauss-Jordan
  - Résolution par la méthode de Cramer
- L'élève pourra manipuler les équations d'un système de sorte à les écrire sous la forme d'équations de droites et les représenter dans un repère cartésien.

Transférer

- L'élève sera capable de résoudre un problème inconnu se ramenant à la résolution d'un système d'équations du premier degré à 2 ou 3 inconnues.

1.2 Système de deux équations à deux inconnues

Définition

Un **système de deux équations à deux inconnues** est un ensemble formé par deux équations impliquant les deux mêmes variables. Il se note, avec $a, a', b, b', c, c' \in \Re$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array} \right.$$

Exemple d'introduction

Lundi, tu te rends dans un magasin de seconde main et tu ressors avec 4 DVD et 2 livres. En tout, tu as payé 16 . Le week-end, tu te rends à nouveau dans ce magasin et tu achètes 1 DVD et 1 livre pour 5 . A quel prix sont vendus les livres et les DVD dans ce magasin ?

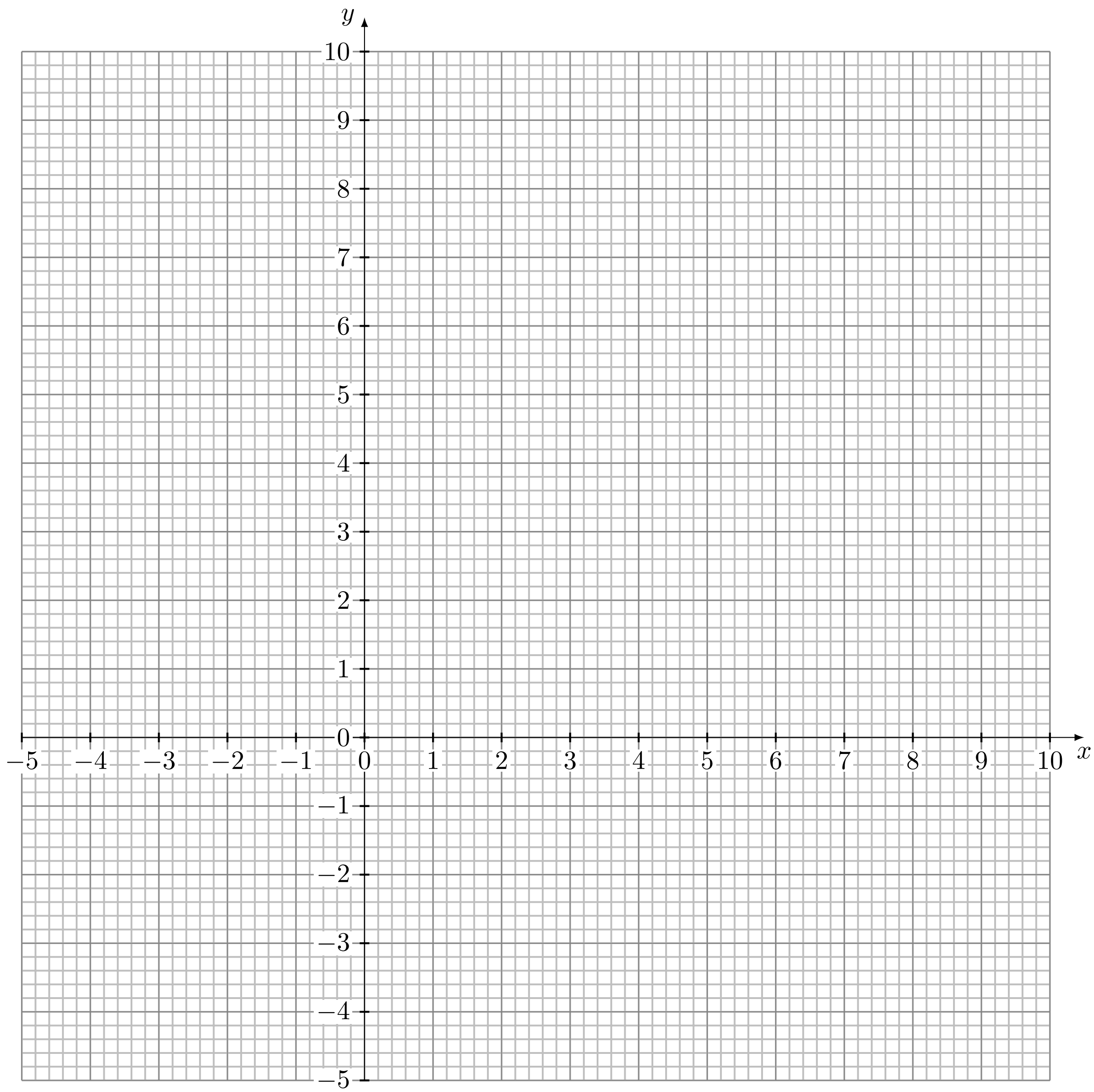
1. Exprime les deux achats sous forme d'équations en utilisant x pour représenter le prix d'un DVD et y le prix d'un livre. Écris le système correspondant.

2. Dans une des équations précédentes, isole une des deux variables.

3. Remplace cette variable dans l'autre équation de départ. Résous.

4. Maintenant que tu as exprimé le prix d'un de deux articles en fonction de l'autre, trouve le prix du deuxième au moyen des équations de départ.

5. Isole la variable y dans chacune des deux équations de départ. A quelles fonctions te font penser ces expressions ? Trace le graphique associé dans le plan ci-dessous.



6. Observe le graphique. Que constates-tu ?

....

....

Résolution d'un système

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système d'équations. Nous allons en étudier quelques-unes cette année.

Résolution graphique

Un système d'équation de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array} \right.$$

peut s'écrire sous la forme suivante, à condition que $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

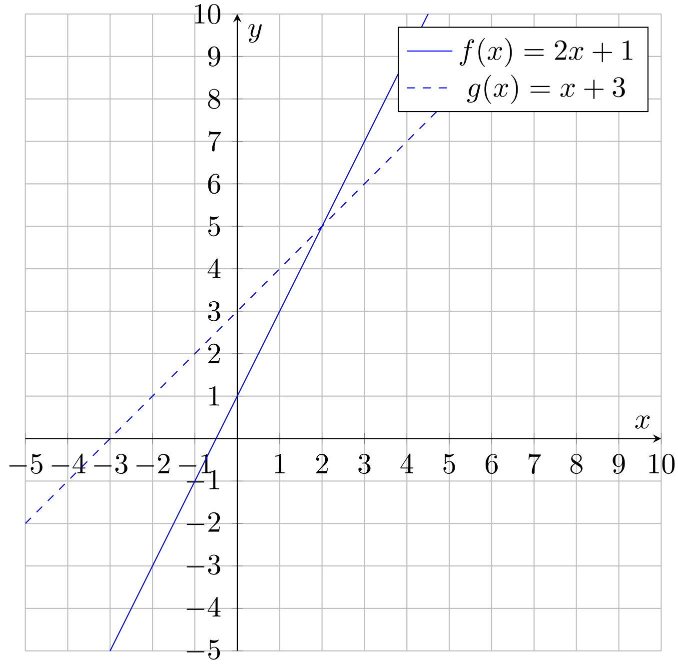
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & mx + p \\ y & = & m'x + p' \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Les deux équations du système sont des équations de droites. L'**ensemble des points d'intersection** de ces deux droites formera l'**ensemble solution du système**.

Exemple : Soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x + 1 \\ y & = & x + 3 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

La représentation graphique du système est celle-ci :



Le point d'intersection des deux droites est le point $(2, 5)$, qui correspond à la solution du système $S = \{(2, 5)\}$. En effet, les équations du système sont vérifiées pour les valeurs $x = 2$ et $y = 5$.

$$\begin{cases} y & = & 2x + 1 \\ y & = & x + 3 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} 5 & = & 2 \times 2 + 1 \\ 5 & = & 2 + 3 \end{cases} \tag{1.4}$$

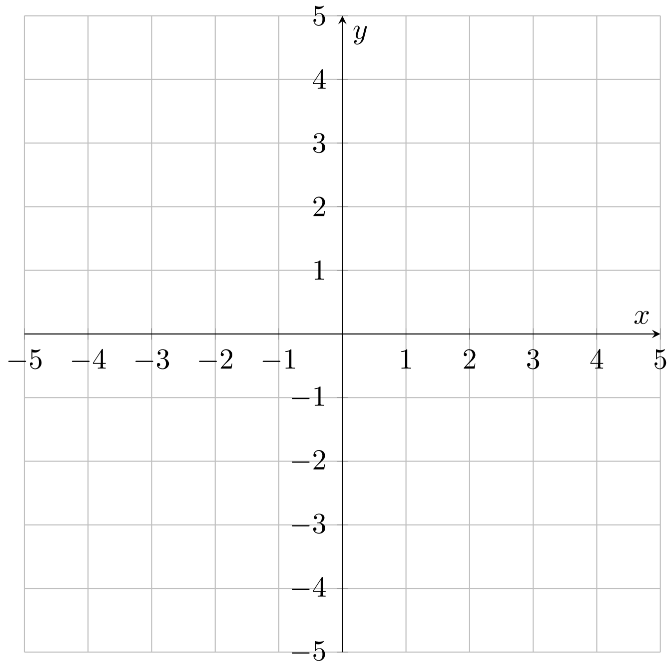
$$\begin{cases} 5 & = & 5 \\ 5 & = & 5 \end{cases} \tag{1.5}$$

Remarques

La solution du système s'exprime par un couple de valeur (x, y).
Dans l'exemple ci-dessus la solution est $S = \{(2, 5)\}$.

Exercice : Résous graphiquement le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & x+1 \\ y & = & -2x+1 \end{array} \right. \tag{1.6}$$



Vérifie grâce aux équations que la solution trouvée est bien correcte.

....

....

....

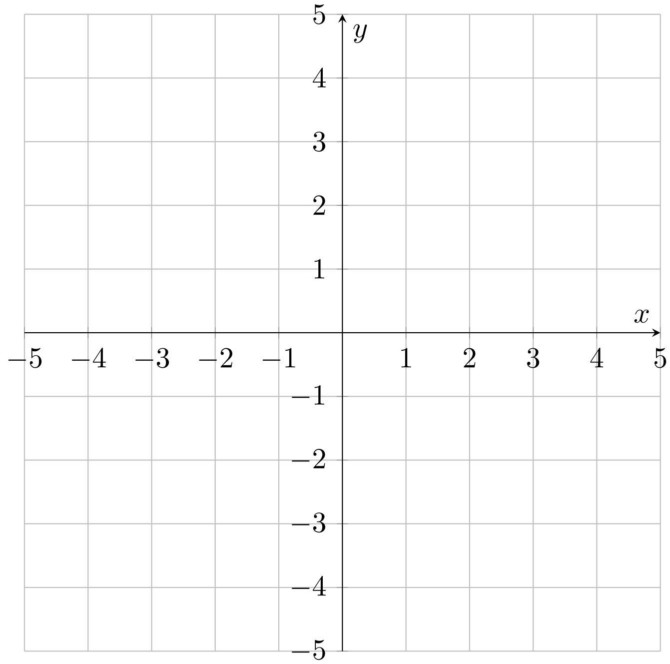
....

....

Toujours une solution ?

Essaye de résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = x+1 \end{cases} \tag{1.7}$$



Que remarques-tu ?

....

....

Que peux-tu conclure sur les solutions du système ?

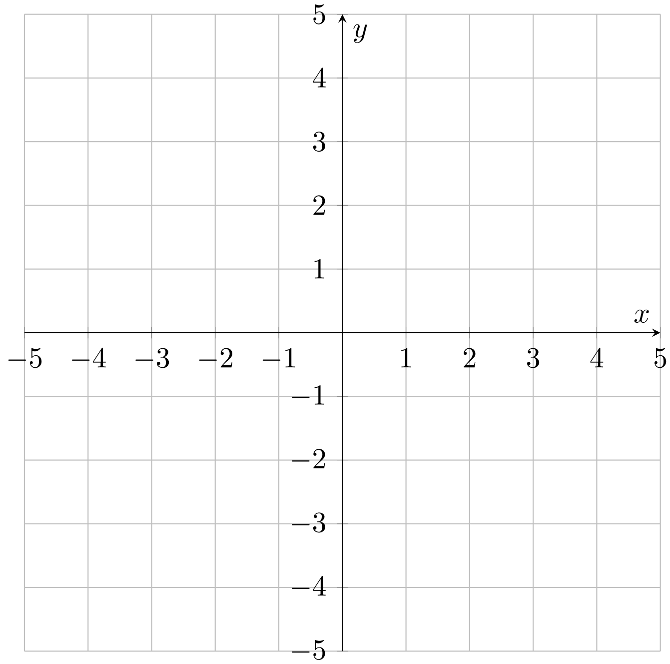
....

....

Toujours une seule solution ?

Essaye de résoudre graphiquement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+3 \\ 2y & = & 2x+6 \end{array}\right. \tag{1.8}$$



Que remarques-tu ?

....

....

Que peux-tu conclure sur les solutions du système ?

....

....

Synthèse

Un système de deux équations à deux inconnues peut :

1. **Avoir une unique solution**. Dans ce cas, les droites qui forment le système se croisent en un point d'intersection dont les coordonnées sont les solutions du système. L'ensemble solution est un couple de valeur $S = \{(x, y)\}$.

2. **Ne pas avoir de solution**, on dit alors que **le système est impossible**. Dans ce cas, les droites qui forment le système sont parallèles et distinctes. Elles n'ont donc pas de point d'intersection. L'ensemble solution est l'ensemble vide $S = \{\phi\}$

3. **Avoir une infinité de solutions**. Les deux droites qui forment le système sont alors confondues. Elles ont donc tous leurs points en commun. Dans ce cas, le système est dit **indéterminé**. L'ensemble solution contient tous les points d'une droite. Si la solution est la droite $y = mx + p$, l'ensemble solution se note $S = \{(x, mx + p)\}$.

Rappel

— Deux droites sont parallèles si elles ont la même pente. Exemple : les droites $d_1 \equiv y = 2x + 5$ et $d_2 \equiv y = 2x + 8$ sont parallèles car leur pentes sont égales à 2.

<u>Exercices :</u>

1. Sans faire de calculs ni de graphiques, identifie si les systèmes suivants sont impossibles, indéterminés, ou si ils ont une solution unique. Justifie.

(a)

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x \end{cases}$$

....

....

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x-3 \\ y & = & 6x+6 \end{array}\right.$$

....

....

....

(c)

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+3 \\ y & = & x+4 \end{array}\right.$$

....

....

....

(d)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y & = & 3x+9 \\ y & = & x+3 \end{array}\right.$$

....

....

....

(e)

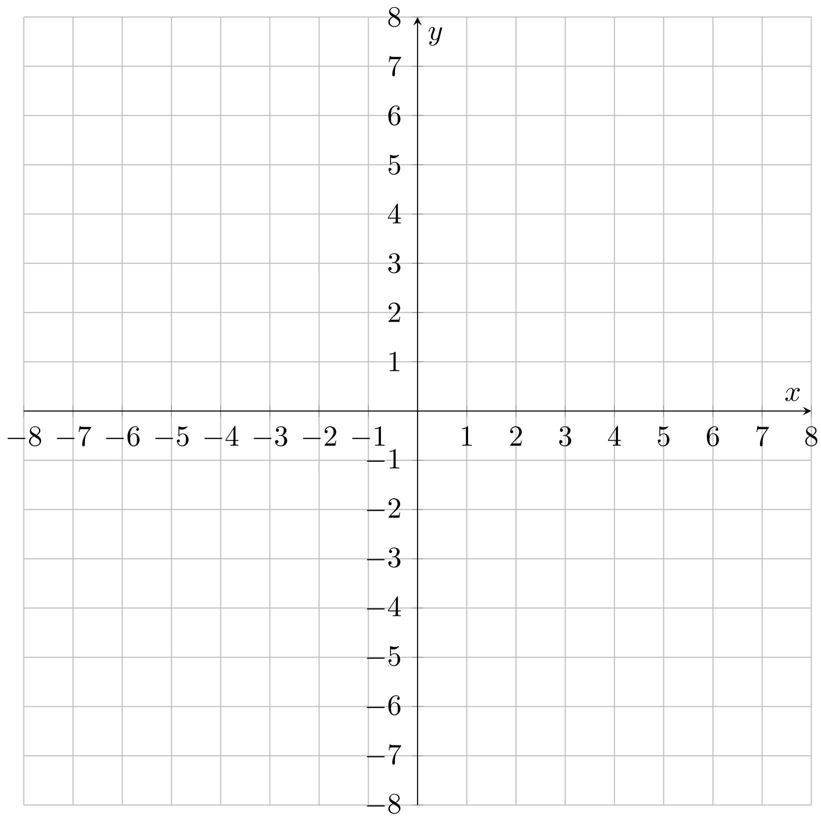
$$\begin{cases} 2y = 2x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

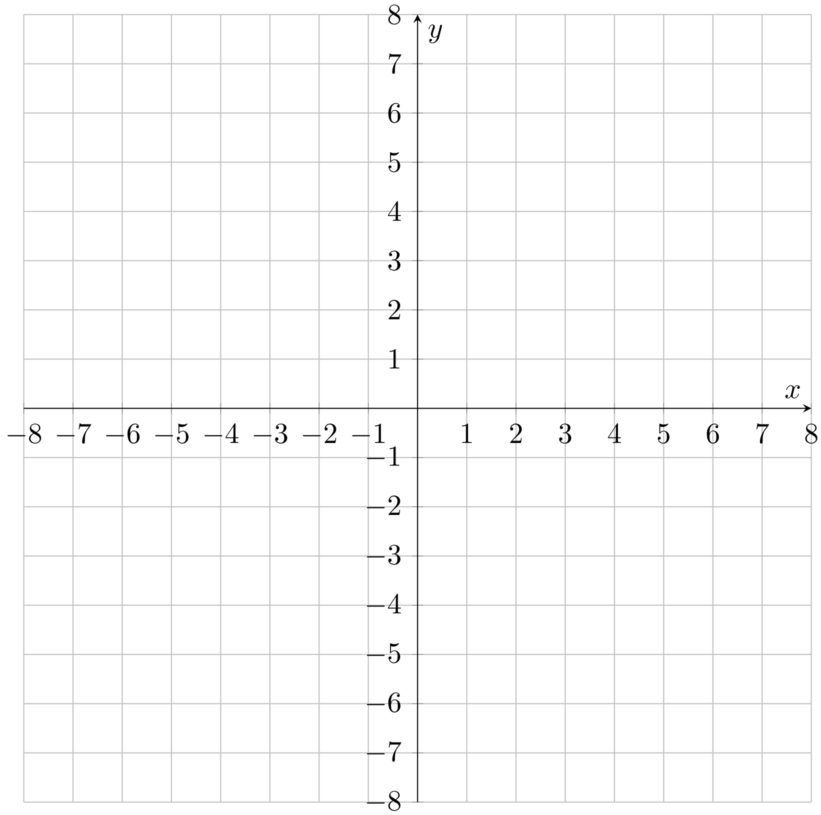
....

....

....

2. Vérifie graphiquement tes réponses pour les deux premiers systèmes.





y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8

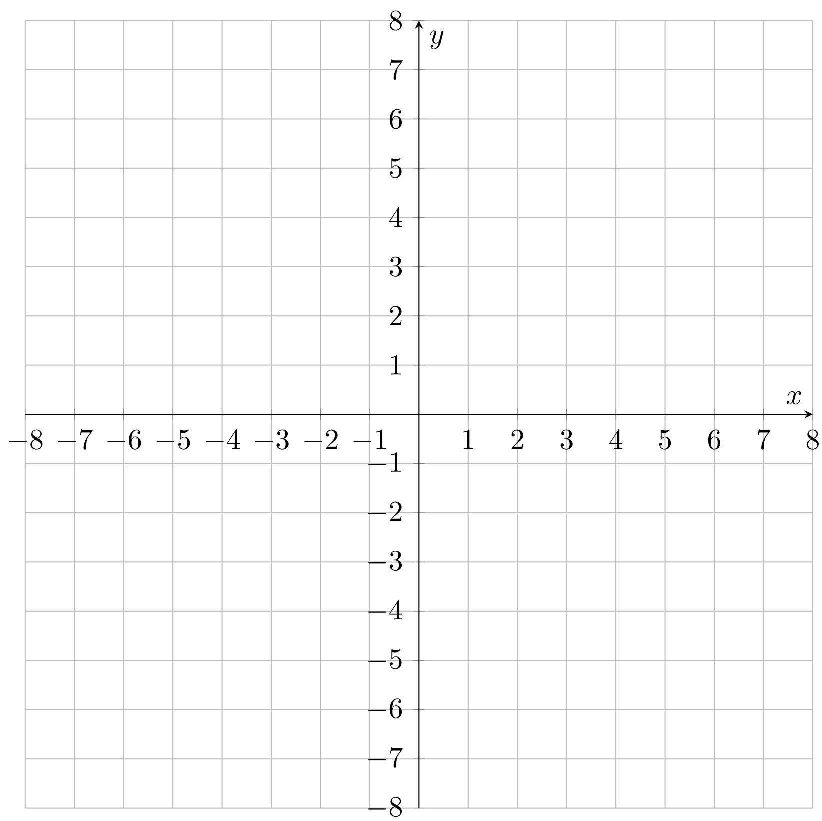
Méthode de substitution

Les limites de la méthode graphique

Exercices : Résous graphiquement le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 5y + 3x &= 3 \\ 10y + 3x &= 4 \end{cases}$$

Calculs



Quel est le problème ?

....

Méthode de substitution

1. On isole une variable dans une des deux équations.

2. On substitue (remplace) la variable dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape 1.

3. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 2.

4. On substitue la variable par la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.

5. On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 4 afin d'obtenir la solution du système.

Exemple :

Soit le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -3x + y & = & 9 \\ 4x - 3y & = & -17 \end{array} \right.$$

1. **On isole une variable dans une des deux équations**. On choisit d'isoler y dans la première équation.

2. **On substitue (remplace) la variable dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape 1.** Dans ce cas-ci, on substitue y dans la deuxième équation.

3. **On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 2.**

4. **On substitue la variable par la valeur trouvée à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1.**

5. **On résout l'équation à une inconnue obtenue à l'étape 4 afin d'obtenir l'ensemble solution du système.**

Système impossible

Si le système est impossible, c'est à dire qu'il ne possède pas de solution, la méthode de la substitution va aboutir à une égalité impossible.

Exemple : Résous ce système par la méthode de substitution.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2 & = & y-3 \\ 2x+2 & = & 2y-6 \end{array}\right.$$

Système indéterminé

Si le système est indéterminé, c'est à dire qu'il possède une infinité de solutions, la méthode de la substitution à un système à une équation.

Exemple : Résous ce système par la méthode de substitution.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2 & = & y-3 \\ 2x+4 & = & 2y-6 \end{array}\right.$$

<u>Exercices :</u> Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants.

1. $$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3x+1 \\ y & = & 2x \end{array}\right.$$

2.

$$\begin{cases} y &= x-3 \\ y &= 6x+6 \end{cases}$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x+3 \\ y & = & x+4 \end{array} \right.$$

4.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y & = & 3x+9 \\ y & = & x+3 \end{array}\right.$$

5.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y & = & 2x+3 \\ y & = & x+1 \end{array}\right.$$

Exercices transversaux

1. Dans une ferme, on compte 28 têtes et 82 pattes, sachant que dans cette ferme il n'y a que des poules et des lapins. Calcule le nombre de poules et de lapins par la méthode de substitution.

   Choix des inconnues : ....

2. Une entreprise artisanale fabrique des chaises et des tables en bois. Pour faire une chaise, il faut 3 kilos de bois, tandis qu'il en faut 5 pour faire une table. Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163kg de bois pour faire 43 objets. Combien de tables et de chaises ont été fabriquées ?

   choix des inconnues : ....

La méthode de Gauss

Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de résoudre des systèmes en manipulant les équations et en les additionnant/soustrayant l'une à l'autre (combinaison linéaire).

1. Multiplier/Diviser une équation afin que les coefficients d'une variable soient les mêmes dans les deux équations.
2. Soustraire une équation à l'autre afin d'éliminer les variables ayant le même coefficient.
3. Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
4. Substituer la valeur trouvée dans une des deux équations afin de résoudre le système.

Exemple : Le centre scolaire Sainte-Marie la sagesse organise une sortie dans un centre sportif. Deux classes participent à cette journée. Une classe de 12 élèves accompagné·es de 3 enseignant·es et une classe de 6 élèves accompagné·es de 2 enseignant·es. Sachant que la première classe a payé 81 et la seconde 44 . Combien coûte l'entrée pour l'élève et pour l'enseignant ?

1. Écris l'énoncé sous forme de système d'équations.

2. Résous par la méthode de Gauss.

   (a) **Multiplier/Diviser une équation afin que les coefficients d'une variable soient les mêmes dans les deux équations.** Nous allons multiplier la première équation par 2 afin de faire apparaître $12x$ dans les deux équations.

(b) **Soustraire une équation à l'autre afin d'éliminer les variable ayant le même coefficient.**

(c) **Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.**

(d) **Substituer la valeur trouvée dans une des deux équations afin de résoudre le système.**

Méthode de Gauss avec matrice

La méthode de Gauss peut être un peu pénible en terme de calcul. Une façon de simplifier cette méthode est d'utiliser **la représentation matricielle** du système.

Représentation matricielle

Représenter un système d'équation linéaire par **une matrice** (tableau de nombres) consiste à créer la matrice contenant les différents coefficients des variables. Chaque ligne de la matrice correspondant à une équation.

Attention

— Chaque colonne de la matrice correspond à la même variable.
— Chaque ligne correspond à une équation.
— Les termes indépendants sont mis dans une colonne à part.

Exemple : Le système de l'exercice précédent peut se représenter par la matrice augmentée suivante.

$$\begin{cases} 6x + 2y & = & 44 \\ 12x + 3y & = & 81 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 44 \\ 12 & 3 & 81 \end{array}\right)$$

L'élimination de gauss consiste ensuite en les étapes suivantes :

1. **Soustraire/additionner à la seconde ligne un multiple de la première ligne de sorte à faire apparaître un zéro à la place du premier élément de la seconde ligne.**

2. **Multiplier/diviser la deuxième ligne, de sorte à faire apparaître un** 1 **à la place du deuxième élément de la seconde ligne.**

3. **Soustraire/additionner à la première ligne un multiple de la seconde ligne de sorte à faire apparaître un zéro à la place du deuxième élément de la première ligne.**

4. **Multiplier/diviser la première ligne, de sorte à faire apparaître un** 1 **à la place du premier élément de la première ligne**.

5. **Écrire les solutions à partir de la matrice augmentée.**

Exercices

Résous les systèmes suivants par la méthode de Gauss.

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 1 \\ 6x+y & = & -5 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+2y & = & 12 \\ 3x+y & = & 6 \end{array}\right.$$

3. A résoudre avec la matrice.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 8 \\ 3x-y & = & 4 \end{array}\right.$$

4.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x-y & = & 10 \\ 18x-3y & = & 10 \end{array}\right.$$

Exercices transversaux

Résous ces problèmes par la méthode de Gauss.

1. Marina et Malika travaillent dans le même magasin. Elles sont payées selon leur ancienneté, ce qui fait que Malika gagne le double de Marina. Un jour elles travaillent toutes les deux 8 heures et gagnent ensemble 360 . Quel est le salaire par heure de Marina et de Malika ?

2. Martin organise une tombola qui se déroule en 2 tirages suivant l'importance des lots. Pour les 2 tirages, il a vendu au total 850 billets. Le prix du billet pour le premier tirage est de 4,50 euros et pour le deuxième tirage de 5 euros. Sachant que la vente de tous les billets lui a rapporté 4000 euros, calculer le nombre de billets vendus pour chaque tirage.

Système de trois équations à trois inconnues

Système d'équations linéaires à trois inconnues

Un système d'équations linéaires à trois inconnues est un système de la forme, les différents coefficients étant des nombres réels.

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & d \\ a'x+b'y+c'z & = & d' \\ a''x+b''y+c''z & = & d'' \end{array}\right.$$

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3z & = & 3 \\ x+2y+4z & = & -5 \\ -5x-6y & = & 0 \end{array}\right.$$

Les limites de la méthode de substitution

Essayons de résoudre ce système par la méthode de substitution.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+z & = & 9 \\ 3x+2y+4z & = & 19 \\ -x-2y+z & = & -2 \end{array}\right.$$

Méthode de Gauss

Pour les systèmes à trois équations dans lesquels chaque équation contient les trois variables, il faut privilégier la méthode de Gauss comme méthode de résolution.

Reprenons le système de la pagé précédente et essayons de le résoudre par la méthode de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+z & = & 9 \\ 3x+2y+4z & = & 19 \\ -x-2y+z & = & -2 \end{array}\right.$$

Méthode de Gauss avec matrice

La méthode de Gauss peut être un peu pénible en terme de calcul. Une façon de simplifier cette méthode est d'utiliser **la représentation matricielle** du système.

Représentation matricielle

Représenter un système d'équation linéaire par **une matrice** (tableau de nombres) consiste à créer la matrice contenant les différents coefficients des variables. Chaque ligne de la matrice correspondant à une équation.

Attention

— Chaque colonne de la matrice correspond à la même variable.
— Chaque ligne correspond à une équation.
— Les termes indépendants sont mis dans une colonne à part.

Élimination de Gauss-Jordan avec matrice

L'élimination de gauss consiste ensuite en les étapes suivantes :

1. Multiplie les lignes de sorte à avoir le même nombre dans la première colonne.
2. Soustraire la première ligne à la deuxième et troisième ligne.
3. Multiplier la deuxième et troisième ligne de sorte à avoir le même nombre dans le deuxième colonne.
4. Soustraire la deuxième ligne à la troisième.
5. Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 dans la troisième colonne. (Ici s'arrête la méthode de Gauss. Il est possible de substituer les valeurs des variables dans les différentes équations).
6. Soustraire un multiple de la troisième ligne à la deuxième ligne afin d'avoir un zéro à la troisième colonne
7. Diviser la deuxième ligne de sorte à avoir un 1 à la deuxième colonne
8. Soustraire un multiple de la deuxième et troisième ligne à la première de sorte à avoir un zéro à la deuxième et troisième colonne.
9. Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 à la première colonne
10. Écrire la solution du système.

Exemple : Le système de l'exercice précédent peut se représenter par la matrice augmentée suivante.

$$\begin{cases} 2x+2y+z &= 9 \\ 3x+2y+4z &= 19 \\ -x-2y+z &= -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 19 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

1. **Multiplie les lignes de sorte à avoir le même nombre dans la première colonne.**

2. **Soustraire la première ligne à la deuxième et troisième ligne.**

3. **Multiplier la deuxième et troisième ligne de sorte à avoir le même nombre dans le deuxième colonne.**

4. **Soustraire la deuxième ligne à la troisième.**

5. **Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 dans la troisième colonne.**

6. **Soustraire un multiple de la troisième ligne à la deuxième ligne afin d'avoir un zéro à la troisième colonne**

7. **Diviser la deuxième ligne de sorte à avoir un 1 à la deuxième colonne**

8. **Soustraire un multiple de la deuxième et troisième ligne à la première de sorte à avoir un zéro à la deuxième et troisième colonne.**

9. **Diviser la première ligne de sorte à avoir un 1 à la première colonne**

10. **Écrire la solution du système.**

Pas de calculs inutiles !

Avant de se lancer dans la résolution d'un système, il faut vérifier si il est possible de le résoudre ! Un système est impossible à résoudre si deux lignes sont multiple l'une de l'autre, sauf la colonne correspondant aux termes indépendants.

Exemples :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 4 \\ 2x+5y+z & = & 9 \\ 2x+2y-2z & = & 17 \end{array}\right.$$

Si j'écris la matrice augmentée correspondant au système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & -2 & 17 \end{array}\right)$$

Je remarque que si je multiplie par deux la première ligne, j'obtiens la deuxième ligne (sauf pour la dernière colonne).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & -2 & 17 \end{array}\right)$$

Dans ce cas le système est impossible. Je peux en effet soustraire la première ligne à la troisième ligne. J'obtiens alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Ce qui correspond au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-2z & = & 8 \\ 2x+5y+z & = & 9 \\ 0 & = & 17 \end{array}\right.$$

Ce système est bel et bien impossible.

Un système est indéterminé, quand une ligne entière est multiple d'une autre, la colonne des termes indépendants y compris.

Exemples :

$$\begin{cases} x+y-z &= 4 \\ 2x+5y+z &= 9 \\ 2x+2y-2z &= 8 \end{cases}$$

Si j'écris la matrice augmentée correspondant au système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Je remarque que si je multiplie par deux la première ligne, j'obtiens la deuxième ligne (sauf pour la dernière colonne).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Dans ce cas le système est indéterminé. Je peux en effet soustraire la première ligne à la troisième ligne. J'obtiens alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ce qui correspond au système :

$$\begin{cases} 2x+2y-2z &= 8 \\ 2x+5y+z &= 9 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Ce système est bel et bien indéterminé.

Exercices

1. Écris la matrice associée à chacun des systèmes suivants.

(a)

$$\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ 2x+5y+z &= 9 \\ 4x+9y-z &= 17 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x+2y &= 2-x \\ x+z &= 5-y \\ 5y-3x &= 4+z \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x+2y &= 5 \\ y-2z &= 4 \\ x+3z &= 0 \end{cases}$$

2. Détermine les solutions de ces systèmes à partit de leur matrice échelonnée. Il faut écrire les équations correspondantes, et puis substituer.

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

(d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

3. La méthode de Gauss est-elle pertinente pour résoudre les systèmes suivants ? Justifie.

(a)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= -2 \\ x+5y-z &= 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x-y+3z &= 4 \\ 2x+5y-z &= 1 \\ 2x-2y+6z &= -5 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ y+z &= 1 \\ z &= -5 \end{cases}$$

Exercices transversaux

Exercices tirés du livre Quadrant 5ème

Résous par la méthode de ton choix les différents problèmes.

1. Maroua se rend à la banque et retire au guichet la somme de 725 euros. Le banquier lui remet 45 billets : des billets de 5, 10 et 20 euros. A la sortie de la banque, elle se rend dans un magasin. Après avoir payé, il lui reste la moitié du nombre de billets de 10 euros, la moitié du nombre de bille de 20, toujours le même nombre de bien de 5 et une somme totale de 375 euros. Combien Maroua avait-elle de billet de 5, 10 et 20 euros à la sortie de la banque ?

2. Un chauffagiste propose 5 convecteurs électriques et 4 radiateurs à accumulation au prix de 540 euros. Pour 7 radiateurs à accumulation et 6 convecteurs, il en coûtera 802 euros. Une

petite note mentionne qu'un forfait de 100 euros est deamdné pour toute installation quelle qu'elle soit. Dans la maison, on souhaite installer 3 convecteurs et 10 radiateurs. Combien cela coûtera-t-il ?

3. Gando a des pièces de 20 centimes et des pièces de 50 centimes. Il en a 23 au total, pour une valeur de 7 euros. Combien de chaque pièce a-t-il ?

4. Soit 26 jeunes volontaires répartis dans trois équipes pour nettoyer les abords d'un ruisseau. Ils sont payés deux euros par heure de travail. La première équipe a travaillé 8 heures et chaque personne ramené 3 sacs de déchets. La deuxième équipe a travaillé 10 heures et a ramené 4 sacs par personne. La dernière équipe a travaillé 4 heures et a ramené deux sacs par personne. Sachant que la mairie a dépensé 344 euros pour les salaires et a récolté 72 sacs de déchets, combien y avait-il de jeunes dans chaque équipe ?

5. Si mon âge et celui de mon père font ensemble 56 ans, que mon père et mon grand-père ont ensemble 100 ans et que mon âge et celui de mon grand père font ensemble 80 ans, quel âge avons-nous individuellement ?

CHAPITRE 2

Programmation linéaire

2.1 Mise en situation - Résoudre une inéquation linéaire à deux inconnues

Tu regardes actuellement deux séries différentes, une dont un épisode dure 40 minutes, une autre dont un épisode dure 20 minutes. Tu décides de regarder **au maximum** 200 minutes un écran par jour (cela peut être moins). Quelles sont les différentes possibilités de visionnage possible ?

1. Donne l'inéquation correspondant au problème.

   ....

2. Sachant que tu n'es pas obligé·e de regarder 200 minutes l'écran, c'est un maximum, donne trois solutions différentes pour l'inéquation trouvée précédemment.

   ....

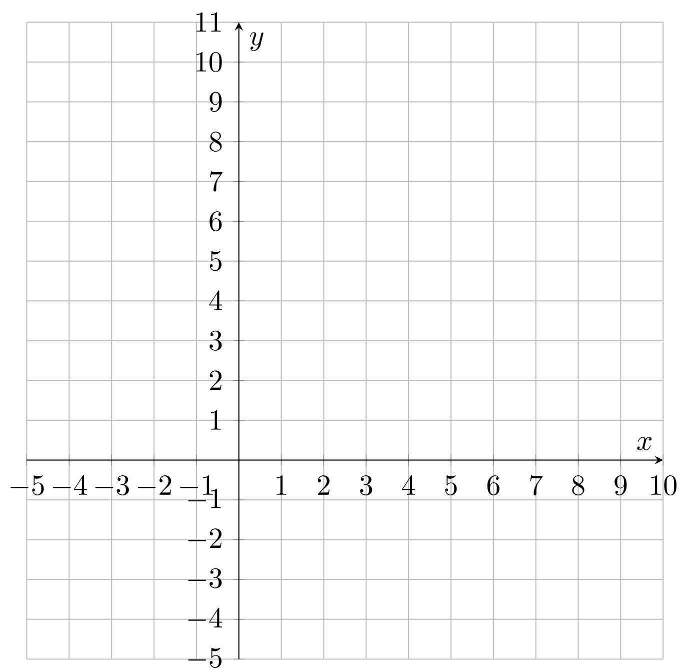
   ....

   ....

3. Transforme l'inéquation en équation, et trace la droite correspondante.

   ....

   ....



4. Place les différentes solutions que tu as trouvées au début dans le même plan. Ou se trouvent-elles par rapport à la droite ?

....

5. Que peux-tu dire des autres points situés de ce côté de la droite ?

....

6. Les points situés sur la droite sont-ils solutions de l'inéquation ?

....

....

2.2 Inéquations linéaires à deux inconnues

Une inéquation linéaire à deux inconnues est une inéquation de la forme $ax + by < c$, $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$. Avec a et b des nombres réels non nuls et c un nombre réel.

Tout couple (x, y) vérifiant l'inéquation est solution de l'inéquation (il y en a donc une infinité).

Exercices

Parmi les couples suivants, lesquels sont solutions de l'inéquation $6x + 3y > 9$?

(x,y)	(0,1)	(3,2)	(-3,9)	(-3,12)
$6x + 3y > 9$				

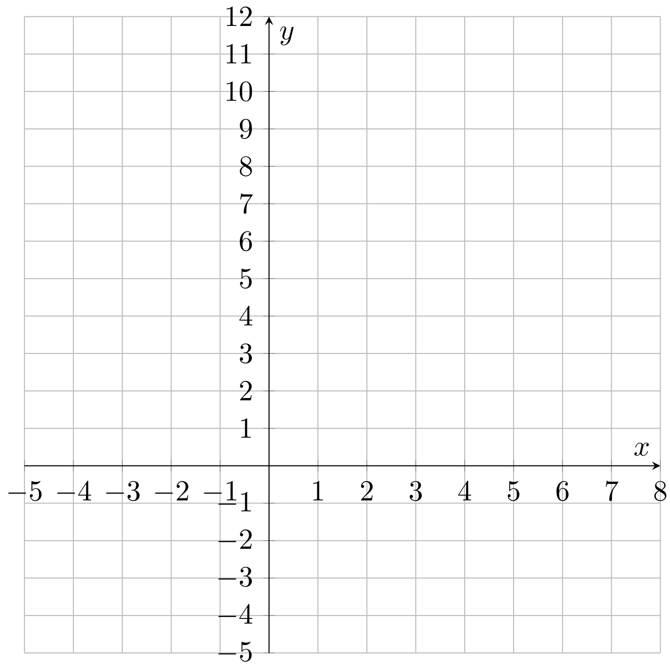
....

....

....

....

Vérifie tes réponses en traçant la droite correspondant à l'inéquation et en plaçant les différents points dans le plan.



2.3 Système d'inéquations à deux inconnues - Mise en situation

Une entreprise fabrique des portes et des chaises à l'aide d'une machine M_1 et d'une machine M_2. Pour fabriquer une porte, on utilise chaque machine **2 heures**. Pour fabriquer une chaise on utilise la machine M_1 4 heures et la machine M_2 pendant une heure. Sachant que la machine M_1 est disponible 60 heures par mois et la machine M_2 40 heures par mois, combien de portes et de chaises l'entreprise peut-elle fabriquer par mois ?

1. Complète le tableau suivant :

	Machine M_1	Machine M_2
Chaise		1 h
Porte		2 h
Disponibilité de chaque machine	60 h	

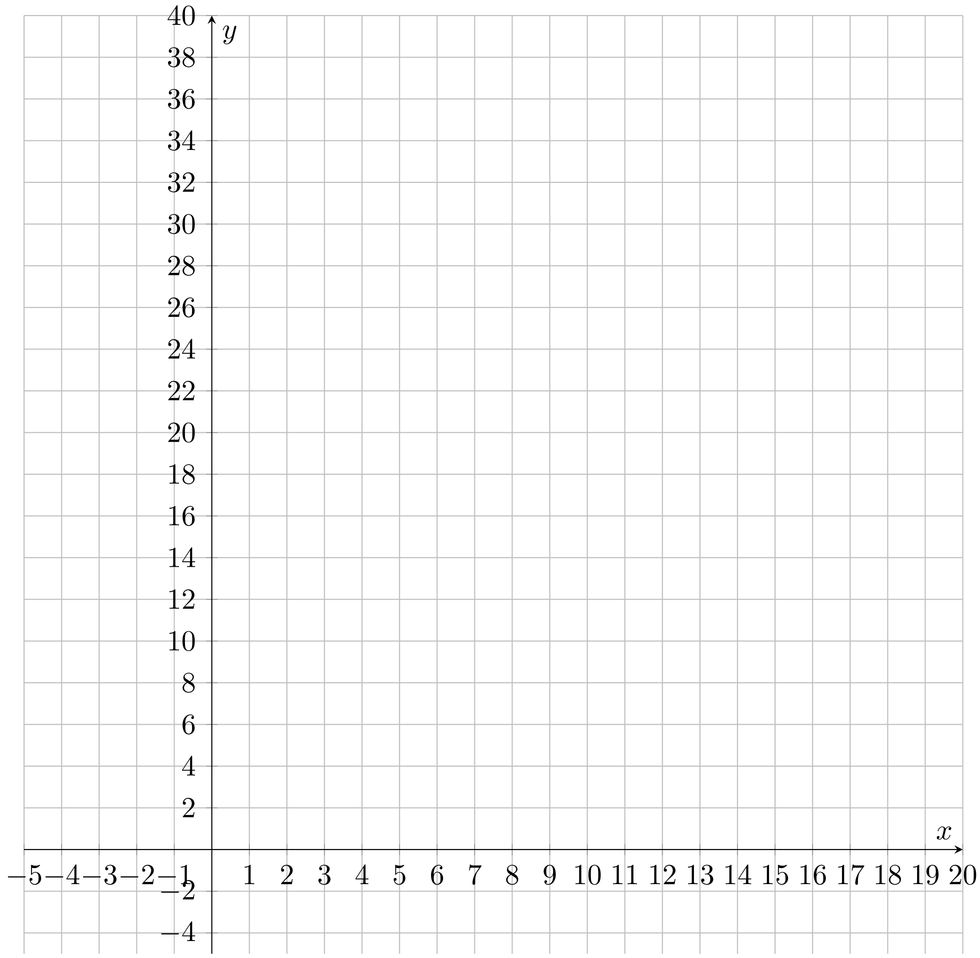
2. Si on fabrique x chaises et y portes, exprime par une inéquation la contrainte d'utilisation pour la machine M_1.

....

....

....

3. Résous graphiquement cette inéquation en traçant la droite correspondante dans le plan.



4. Si on fabrique x chaises et y portes, exprime par une inéquation la contrainte d'utilisation pour la machine M_2.

....

....

....

5. Résous graphiquement cette inéquation en traçant la droite correspondante dans le même plan.

6. Quelle partie du plan est solution des deux inéquations ?

....

....

7. En te basant sur le graphique, est-ce que l'entreprise peut fabriquer en un mois :

   — 10 chaises et 12 portes ?

   — 1 chaise et 18 portes ?

   — 8 chaises et 14 portes ?

   — 10 chaises et 24 portes ?

   — 0 chaise et 20 portes ?

2.4 Système d'inéquations à deux inconnues

Pour résoudre un système d'inéquations à deux inconnues, il faut :

1. Résoudre graphiquement dans le même plan chacune des inéquations
2. Hachurer l'intersection des demi-plans solutions pour déterminer le polygine des solutions appelé aussi **polygone des contraintes**.

Exemple :

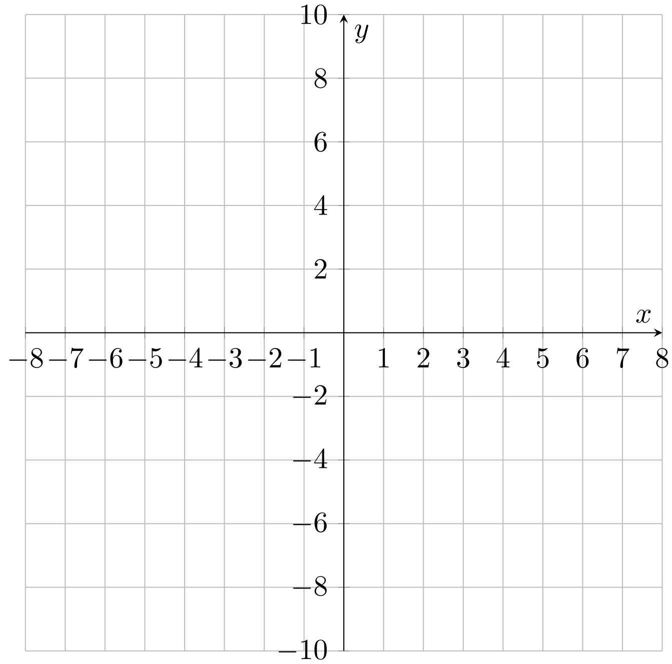
Soit le système formé par les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} 3x + 6y & \leq & 12 \\ 12x - 4y & > & -4 \end{cases} \tag{2.1}$$

1. On trace dans le plan les droites correspondant aux inéquations :

   (a) $y = 2 - \dfrac{x}{2}$

   (b) $y = 3x + 4$

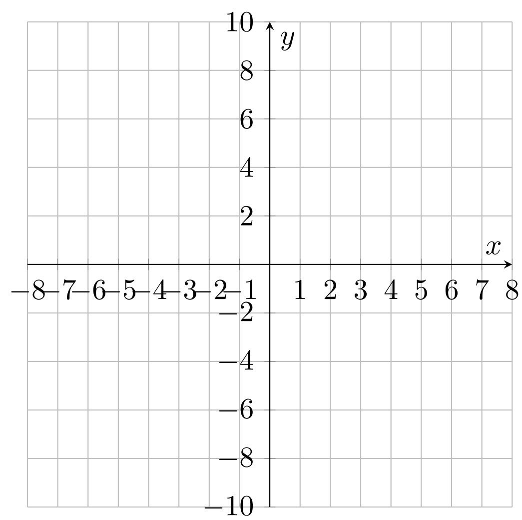


2. On hachure dans un sens les solutions d'une inéquation, et dans l'autre sens les solutions de l'autre inéquation.
3. La solution est la partie comportant les deux hachures différentes.

Exercices

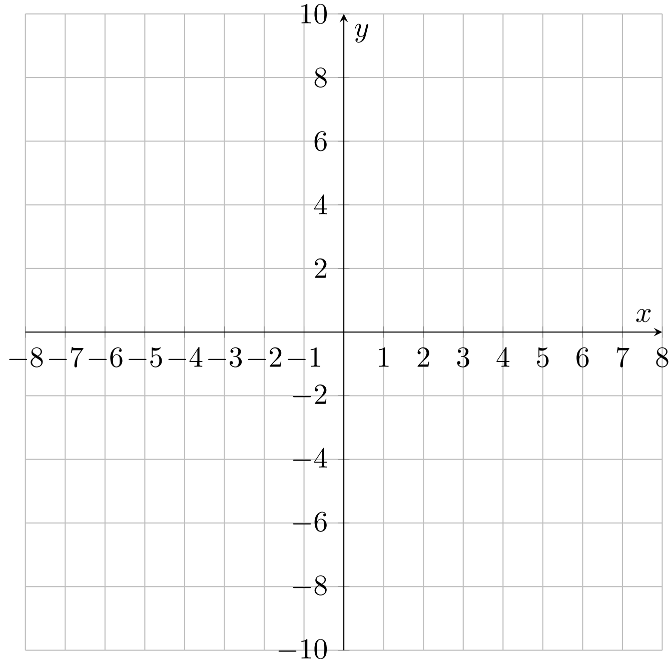
Résous les différents systèmes d'inéquations suivant :

1. $$\left\{ \begin{array}{lcl} -y+2x & < & -1 \\ x-2y & > & -4 \end{array} \right.$$



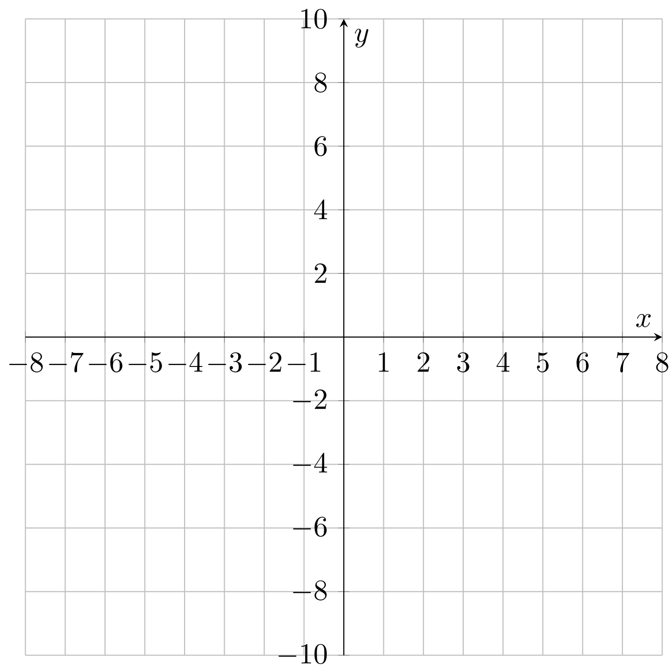
2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y-2x & \geq & 3 \\ 2y-4x & < & -2 \end{array}\right.$$

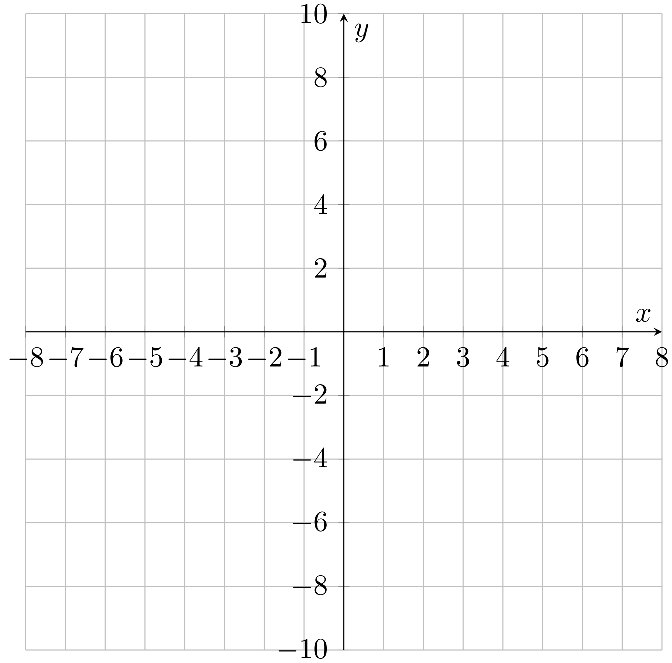


3.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & \leq & 12 \\ x+y & \geq & 12 \end{array}\right.$$



4.
$$\begin{cases} 3x + y & \leq & 12 \\ 3x + y & \leq & 4 \end{cases}$$



2.5 Programmation linéaire : optimisation d'une fonction

Mise en situation

Un fabricant produit deux types de yaourt à la fraise (A et B). Chaque kilo de yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2

Le fabricant dispose dans son stock de 50 kilos de fraises et 40 kg de lait. Sachant que la vente de 1 kilo de yaourt A rapporte 4 euros alors que 1 kilo de yaourt B rapporte 5 euros. Combien de yaourt de chaque sorte le fabricant doit-il faire pour **maximiser** son profit ?

1. Exprime les contraintes de fabrication par un système d'inéquations.

2. Résous graphiquement le système d'inéquations.

   ....

   ....

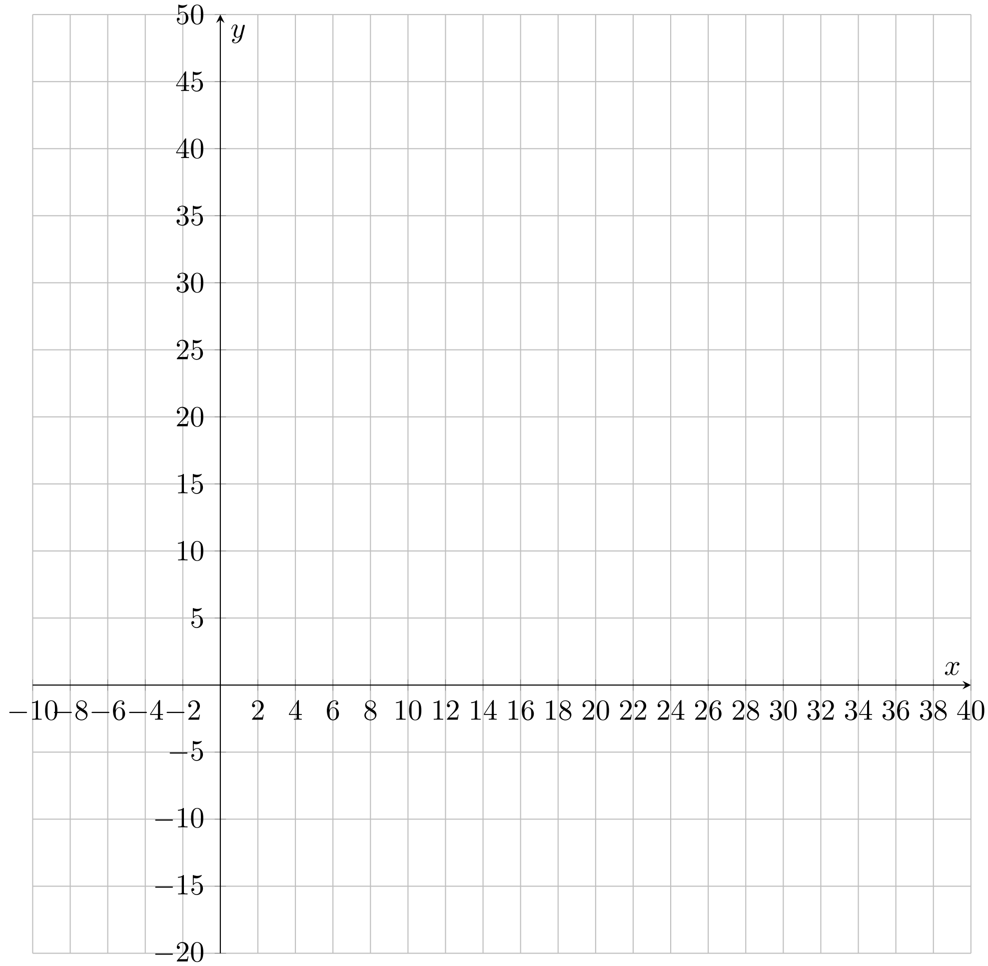
   ....

   ....

   ....

   ....

   ....



3. Exprime la fonction qu'il faut optimiser (le profit).

    ....

4. Essaye de trouver parmi les solutions du système celle qui optimise cette fonction.

    ....

Programmation linéaire

Pour optimiser une fonction selon certaines contraintes d'un problème, il faut :

1. Traduire les contraintes en système d'inéquations.
2. Trouver graphiquement le polygone de contrainte qui représente les solutions du système.
3. Exprimer la fonction à optimiser.
4. Déterminer les sommets du polygone.
5. Calculer la valeur de la fonction à chacun des sommets du polygone.
6. Sélectionner le sommet ou la valeur est la plus grande/plus petite.

Exemple : Quelles sont les valeurs qui maximisent la fonction $f(x, y) = 6x + 3y$, si les contraintes sur x et y sont exprimées par le système suivant ?

$$\begin{cases} -y + 2x & < & -1 \\ x - 2y & > & -4 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

1. Je transforme les inéquations en équations :

   (a) $-y + 2x = -1$

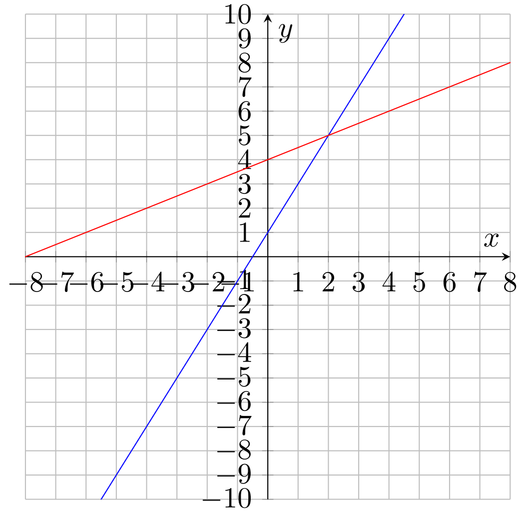
   (b) $x - 2y = -4$

2. J'isole y pour avoir les équations de droite.

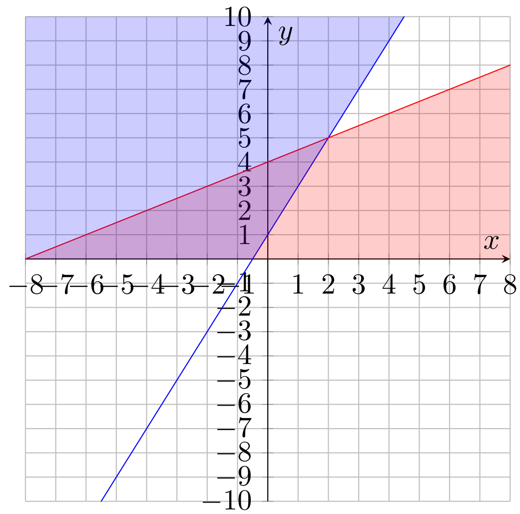
   (a) $y = 2x + 1$

   (b) $y = \dfrac{x}{2} + 4$

3. Je trace les droites :



4. Je détermine le polygone de contrainte en résolvant graphiquement les deux inéquations.



5. Je détermine les coordonnées des trois sommets du polygone de contrainte :

— $A(-8, 0)$

— $B(-\frac{1}{2}, 0)$

— $C(2, 5)$

6. Je calcule les valeurs de la fonction à optimiser aux trois sommets :

   (a) $f(-8,0) = 6. - 8 + 3.0 = -48$

   (b) $f(-\frac{1}{2},0) = 6. - \frac{1}{2} + 3.0 = -3$

   (c) $f(2,5) = 6.2 + 3.5 = 27$

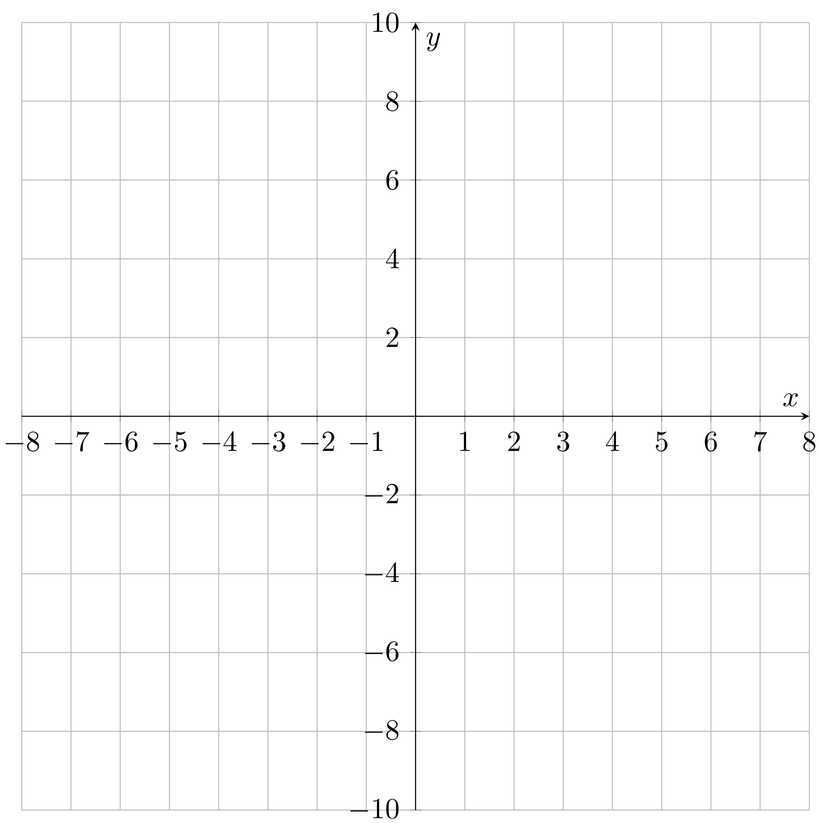
7. Je choisis le point où la valeur est maximale : $(2,5)$. La fonction a sa valeur maximale pour $x = 2$ et $y = 5$.

Exercices

Résous les problèmes de programmation linéaire suivants :

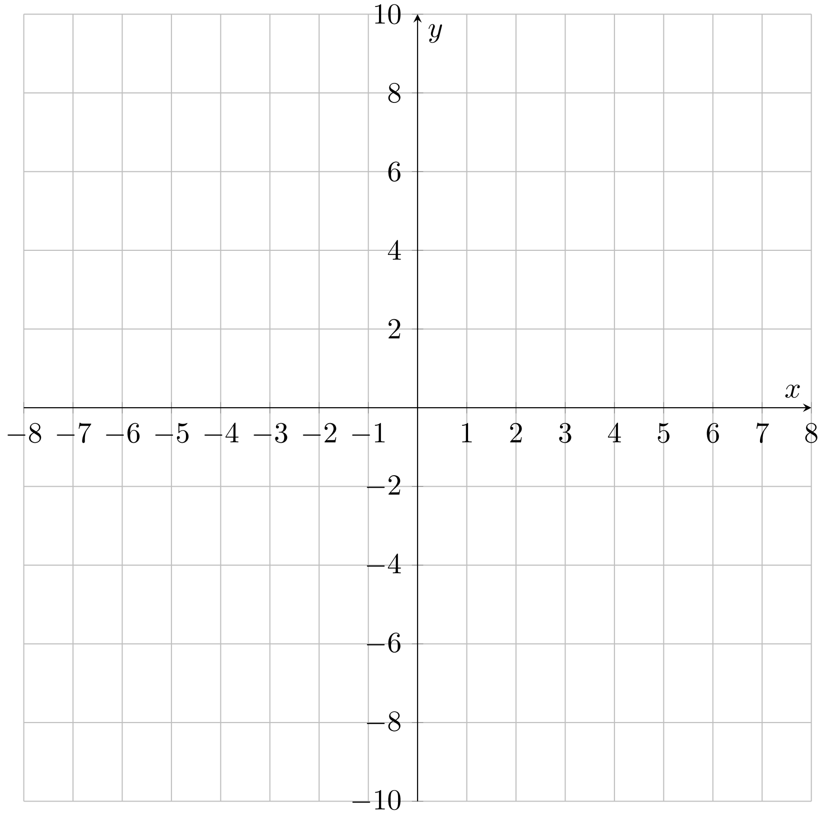
1. La fonction à optimiser est $f(x,y) = -2x - y$ (minimum) et les contraintes sont :

$$\begin{cases} 2x - 4y & \geq & 4 \\ -x - y & \leq & 4 \\ x & \leq & 0 \end{cases}$$



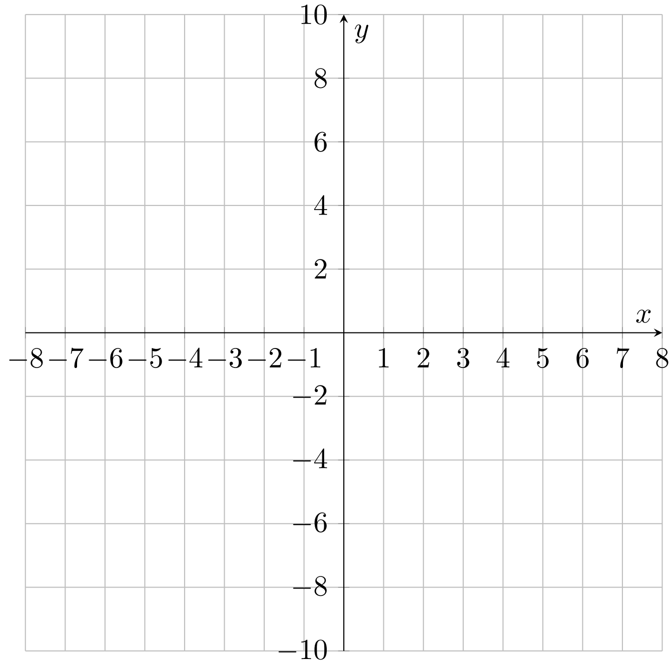
2. La fonction à optimiser est $f(x, y) = 5x - y$ (maximum) et les contraintes sont :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 4x - y & \leq & 6 \\ -x - y & \leq & 4 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$



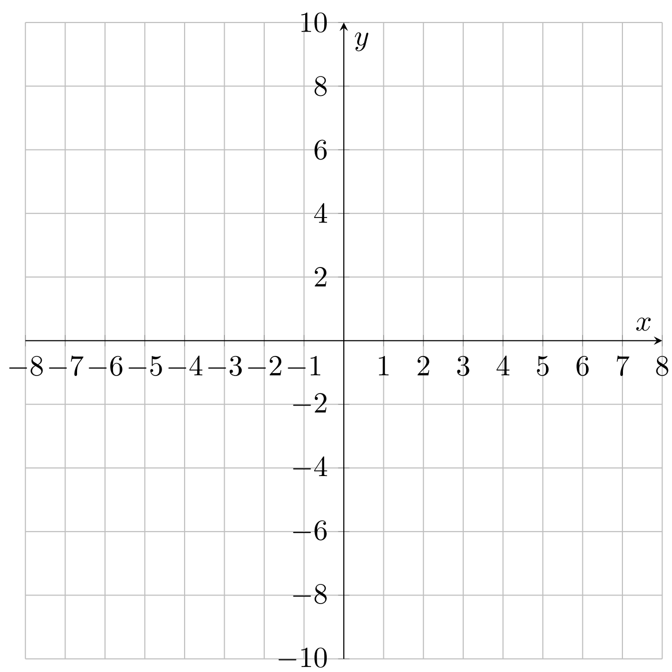
3. La fonction à optimiser est $f(x, y) = 3y + x$ (maximum) et les contraintes sont :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x - 4y & < & -2 \\ 4x - 8y & > & 16 \\ x & \leq & 0 \end{array}\right.$$



4. La fonction à optimiser est $f(x, y) = 2x + y$ (minimum) et les contraintes sont :

$$\begin{cases} x + y & \leq & 6 \\ x + y & \geq & 1 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$



5. Deux modèles de table sont fabriqués dans un atelier de menuiserie. Le modèle A nécessite 3 heures de travail et 4 panneaux de bois. Le modèle B nécessite 2 heures de travail et 6 panneaux. Chaque jour l'atelier dispose d'un maximum de 120 heures de travail et de 300 panneaux.
   (a) Traduis les données en inéquations.
   (b) Vérifie graphiquement et algébriquement si l'atelier peut fabriquer en une journée :
      i. 25 tables de modèle A et 15 tables de modèle B.
      ii. 28 tables de modèle A et 20 tables de modèle B.

....

....

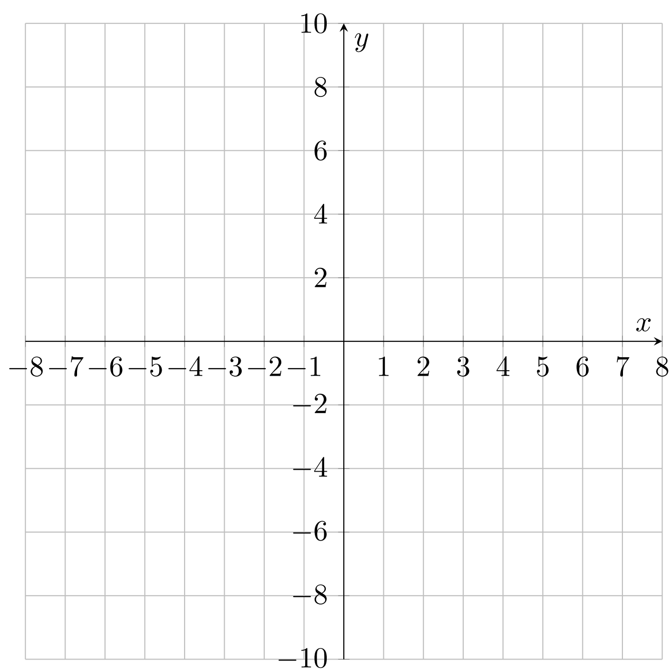
....

....

....

....

....



6. Un agriculteur doit ensemencer 28 hectares de froment et de soja. Le tableau qui suit précise pour chaque céréale et à l'hectare, le coût de préparation du sol, le nombre de jours de travail et le profit espéré pour chaque récolte.

	Froment	Soja
Préparation du sol par hectare	115 euros	225 euros
Nombre de jours de travail par hectare	10	7,5
Profit par hectare	375 euros	675 euros

Le cultivateur ne peut investir plus de 2700 euros dans la préparation des sols et peut y consacrer 120 journées de travail.

Comment doit-il répartir ses cultures pour avoir un profit maximum ? Quel est ce profit ?

....

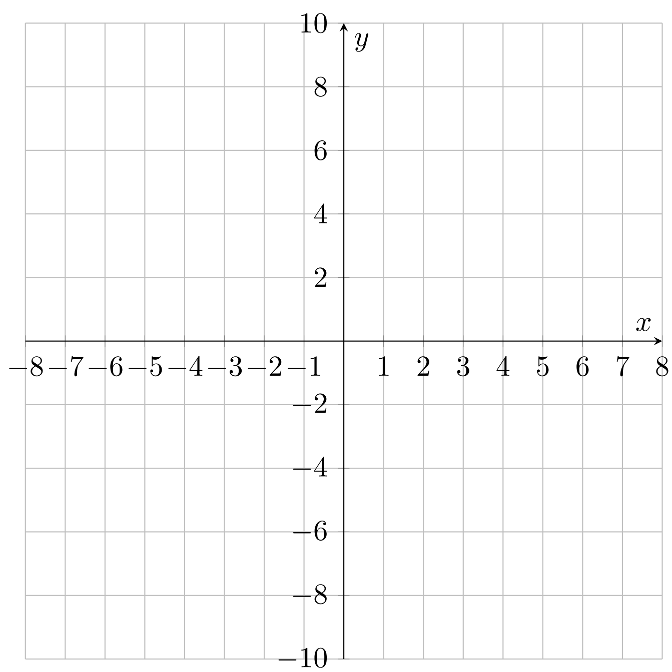
....

....

....

....

....



CHAPITRE 3

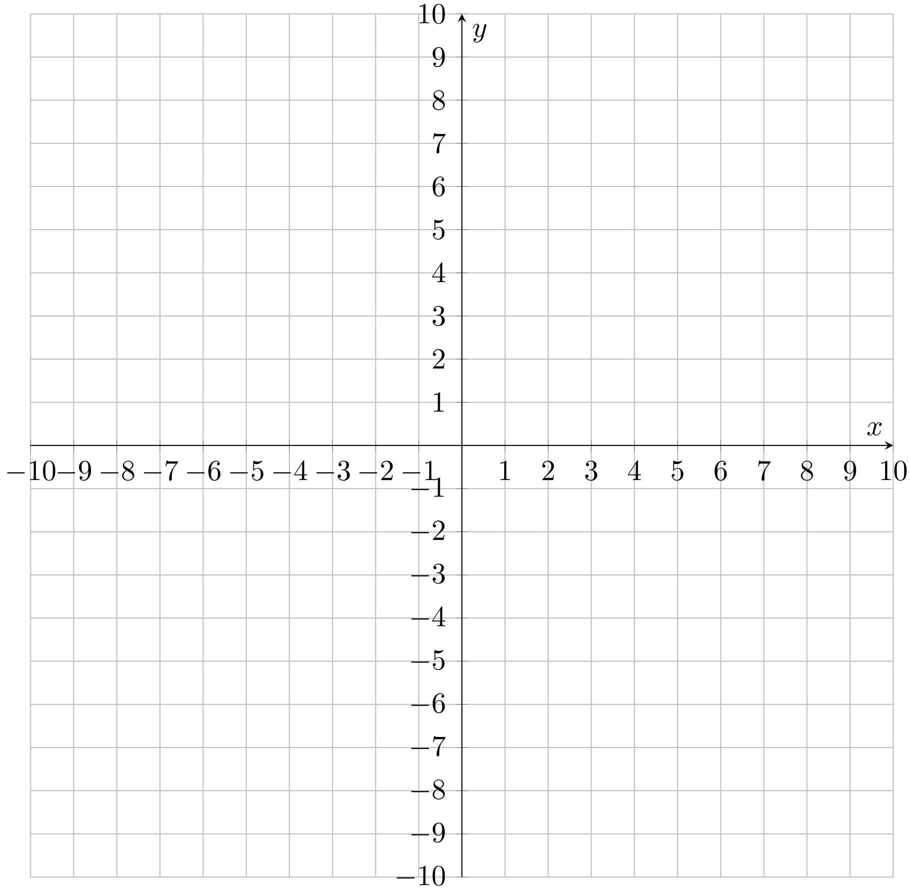
Comportement asymptotique

3.1 Mise en situation

Complète pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ le tableau ci-dessous et trace le graphique correspondant.

x	-1000	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$
$\frac{1}{x}$										

x	0	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	1000
$\frac{1}{x}$											



Que peux-tu dire sur les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de plus en plus grandes de x ?

....

....

Que peux-tu dire sur les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de plus en plus petites de x ?

....

....

Que peux-tu dire sur les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de x qui se rapprochent de plus en plus de 0 du côté des nombres négatifs ?

....

....

Que peux-tu dire sur les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de x qui se rapprochent de plus en plus de 0 du côté des nombres positifs ?

....

....

3.2 Limites d'une fonction en un réel

Limite d'une fonction en un réel

La limite d'une fonction $f(x)$ en un réel a décrit l'approximation des valeurs de la fonction lorsque la variable x se rapproche de a. Elle se note :

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

.

Limite d'une fonction en plus l'infini

La limite en plus l'infini d'une fonction $f(x)$ décrit l'approximation des valeurs d'une fonction lorsque la variable x est un très grand nombre. Elle se note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

.

Limite d'une fonction en moins l'infini

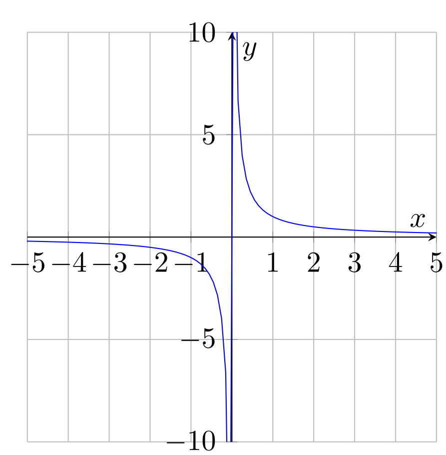
La limite en moins l'infini d'une fonction $f(x)$ décrit l'approximation des valeurs d'une fonction lorsque la variable x est un très petit nombre. Elle se note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

.

Déduire graphiquement les limites d'une fonction

Exemple : Si on reprend la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$,



1. En se basant sur le graphique, que valent les limites de $f(x)$ si x tend vers $-\infty$ et $+\infty$?

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} =$ ....

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$ ....

2. Quelle est la limite de la fonction si x tend vers 0 ?

   ....

   ....

Limite à gauche, limite à droite

Limite à gauche d'une fonction

La limite à gauche d'une fonction $f(x)$ en un réel a décrit l'approximation des valeurs de f lorsque la variable x se rapproche de a par des valeurs inférieures à a. Elle se note :

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

.

Limite à droite d'une fonction

La limite à droite d'une fonction $f(x)$ en un réel a décrit l'approximation des valeurs de f lorsque la variable x se rapproche de a par des valeurs supérieures à a. Elle se note :

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

.

En te basant sur le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcule les deux limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} =$ ....

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} =$ ....

Calculer les limites d'une fonction algébriquement

Pour calculer la limite d'une fonction lorsque x tend vers a, il suffit de remplacer x par a dans l'expression de la fonction.
Attention : $\dfrac{a}{0} = \pm\infty$ selon le signe de a.

Exemples :

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x} =$ ....
2. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{1}{x} =$ ....
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \dfrac{1}{x} =$ ....
4. $\lim\limits_{x\to \frac{-1}{1000}} \dfrac{1}{x} =$ ....

Que se passe-t-il si on calcule la limite algébriquement la limite en 0 de $f(x)$?

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} =$ ....

Grâce au graphique, on sait cependant que la limite à gauche n'est pas la même que la limite à droite. Comment trouver ce résultat algébriquement ?

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} =$ ....

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} =$ ....

Si la limite à gauche d'une fonction en un réel a n'est pas égale à la limite à droite en ce même réel a alors la limite en a n'existe pas pour cette fonction.

Exemple :

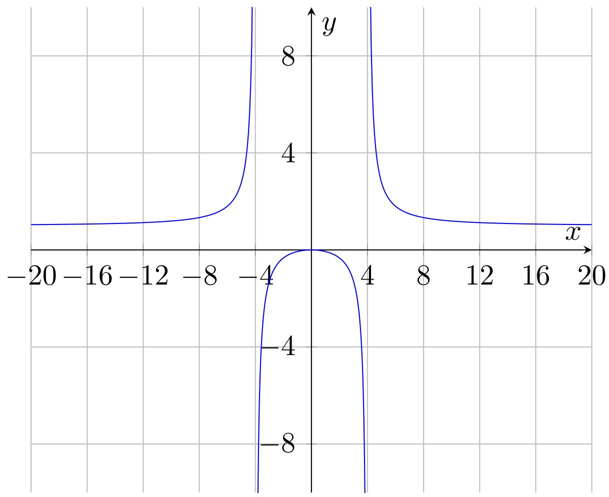
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Et dès lors, puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}$ alors la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'existe pas.

Exercices

Pour chaque graphique, estime les différentes limites demandées.



1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

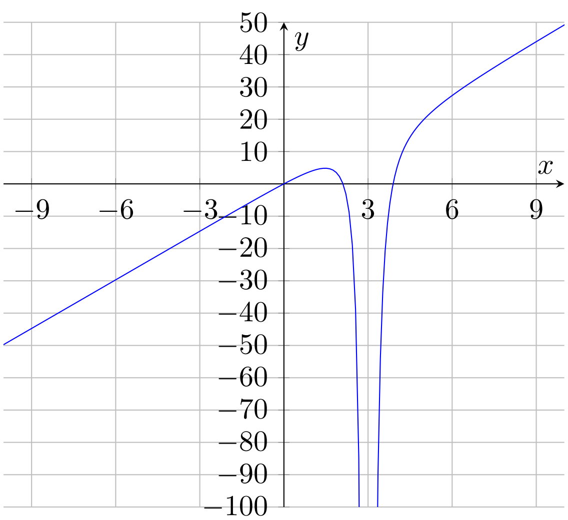
2. $\lim_{x\to-4^-} \frac{1}{x} =$

3. $\lim_{x\to-4^+} f(x) =$

4. $\lim_{x\to4^-} f(x) =$

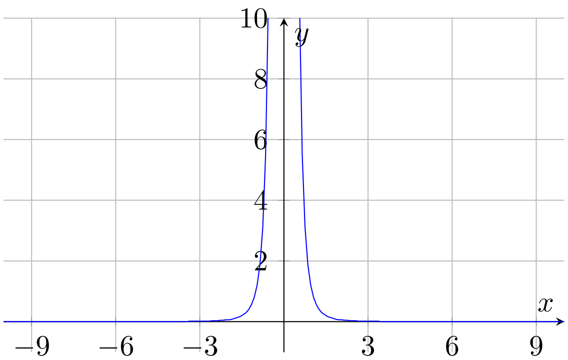
5. $\lim_{x\to4^+} f(x) =$

6. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$



1. $\lim_{x\to3^-} f(x) =$

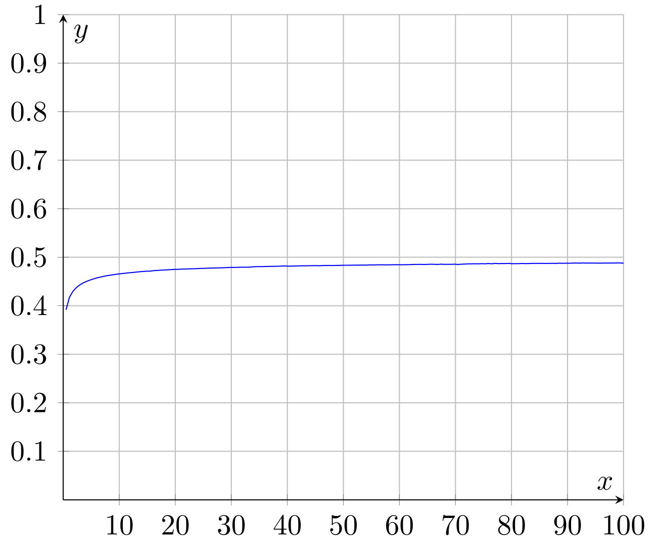
2. $\lim_{x\to3^+} f(x) =$



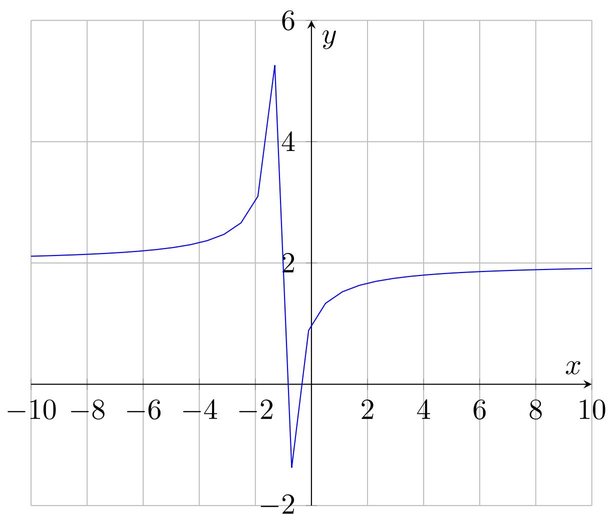
1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

2. $\lim_{x\to0} f(x) =$

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$



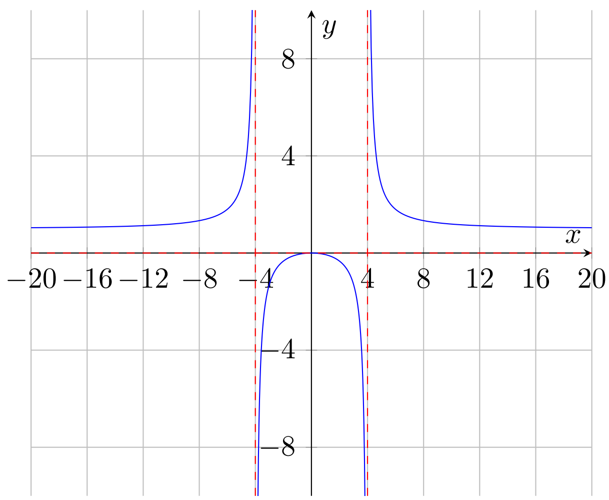
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$



1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

Soient les graphiques des exercices précédents. Sur chacun des graphiques sont dessinées des droites verticales et horizontales. Donne l'équation des droites et compare les avec les limites calculées.



1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

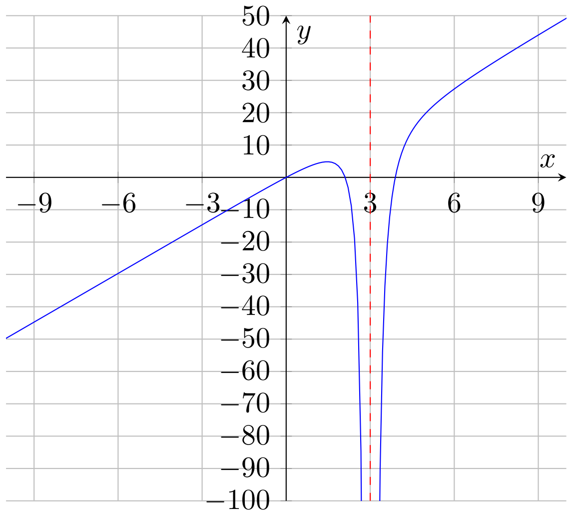
2. $\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{x} =$

3. $\lim_{x \to -4^+} f(x) =$

4. $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$

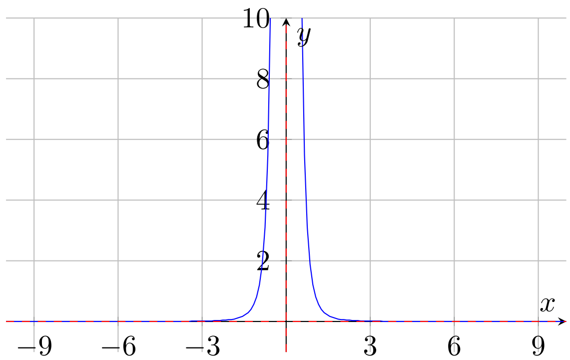
5. $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$

6. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



1. $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

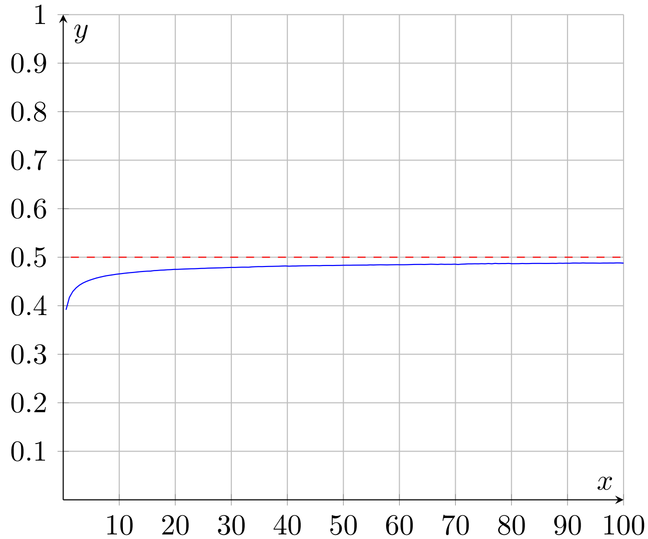
2. $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$



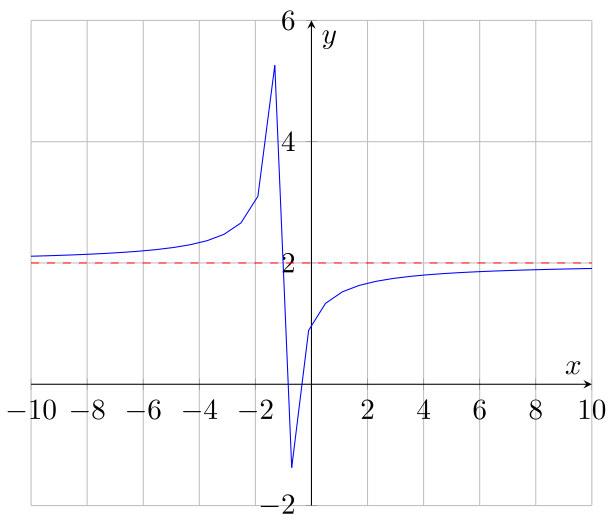
1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

2. $\lim_{x \to 0} f(x) =$

3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$



1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

Les asymptotes

Les droites tracées en rouge dans les exercices précédents sont appelées des **asymptotes**.

Asymptote

Une asymptote est une droite dont une courbe s'approche de plus en plus, sans jamais l'atteindre.

Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des réels x qui ont une image par f, c'est-à-dire tous les x pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Pour chacune des fonctions suivantes, détermine le domaine de définition :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   ....

2. $f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$

   ....

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

   ....

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

   ....

5. $f(x) = \sqrt{x}$

   ....

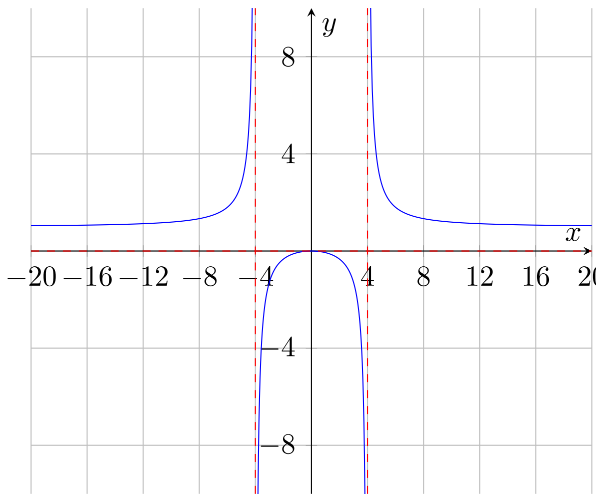
6. $f(x) = \sqrt{x-3}$

   ....

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$

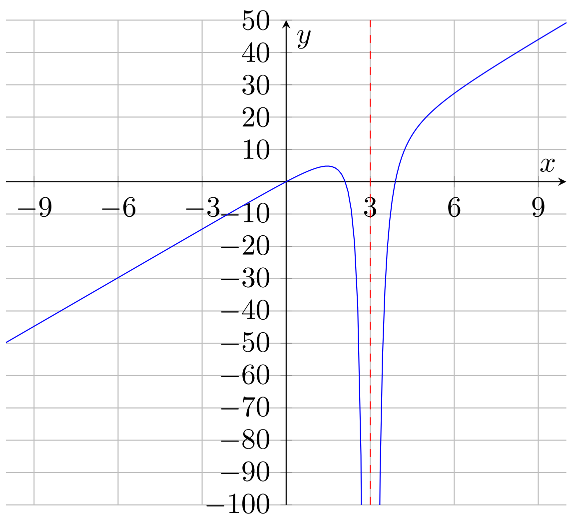
   ....

Détermine pour chacune des fonctions le domaine de définition. Compare-le avec les équations des asymptotes. Que constates-tu ?



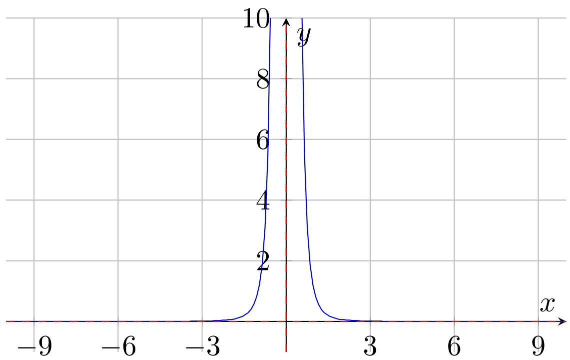
$$f(x) == \frac{x^2}{x^2 - 16}$$

$Dom_f =$



$$f(x) = x5 - \frac{4}{(x-3)^2})$$

$Dom_f =$



$$f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$Dom_f =$

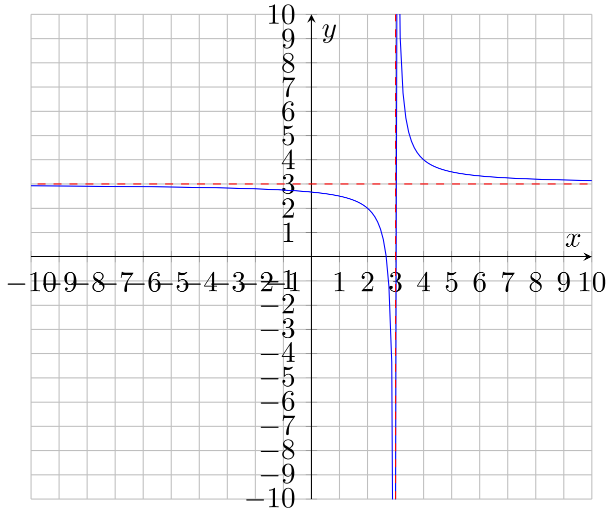
Asymptotes verticales

Asymptote verticale

Un asymptote verticale est une asymptote d'équation $x = a$ avec a qui est un réel.

La fonction f possède une asymptote en $x = a$ si et seulement si ....
ou ....

Exemple :



$f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ possède une asymptote d'équation $x = 3$ car

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

Remarque : La fonction f ne peut avoir une asymptote en a que si a est une **borne du domaine** de f mais n'appartient pas au domaine. C'est à dire que a est une des extrémités des intervalles sur lesquels f est définie, mais a ne fait pas partie du domaine.

Exemple : Le domaine de $f = \dfrac{1}{x-3}$ est égal à $R\backslash\{3\}$. Le réel 3 est une borne du domaine, sans en faire partie.

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont possiblement une asymptote verticale ? En quelle réel ?

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$

   ....

   ....

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

....

....

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

....

....

4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-9}$

....

....

5. $f(x) = x^2 + 6$

....

....

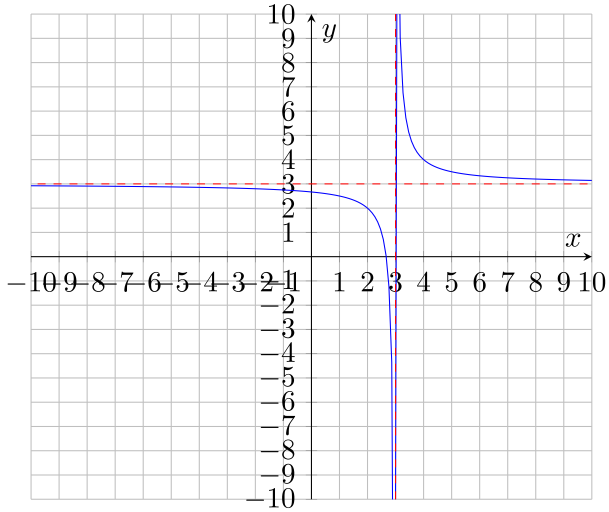
Asymptotes horizontales

Asymptote horizontale

Un asymptote horizontale est une asymptote d'équation $y = b$ avec b qui est un réel.

La fonction f possède une asymptote d'équation $y = b$ si et seulement si .... ou ....

Exemple :



$f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-3}$ possède une asymptote d'équation $y = 3$ car :

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Calculer les limites d'une fonction algébriquement

Pour calculer la limite d'une fonction lorsque x tend vers a, il suffit de remplacer x par a dans l'expression de la fonction.
Attention : $\dfrac{a}{0} = \pm\infty$ selon le signe de a.

Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x} =$ ....

2. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{1}{x} =$ ....

3. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{1}{x} =$ ....

4. $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{1000}} \dfrac{1}{x} =$ ....

Que se passe-t-il si on calcule la limite algébriquement la limite en 0 de $f(x)$?

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} =$ ....

Grâce au graphique, on sait cependant que la limite à gauche n'est pas la même que la limite à droite. Comment trouver ce résultat algébriquement ?

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$ ....

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$ ....

Si la limite à gauche d'une fonction en un réel a n'est pas égale à la limite à droite en ce même réel a alors la limite en a n'existe pas pour cette fonction.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$

Et dès lors, puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ alors la limite en 0 de $f(x) = \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Exercices

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes, détermine ensuite les différentes asymptotes (verticales et horizontales).

1. $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

   ....

   ....

   ....

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$

   ....

   ....

   ....

3. $f(x) = x - 5$

   ....

   ....

Opérations sur les limites

Le tableau reprend les différents cas de figure pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	m	m	m	$+\infty$	∞	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	p	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$	m+p	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	Indétermination $+\infty-\infty$

Exemple :

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-3}=$$

Le tableau reprend les différents cas de figure pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	m	$m>0$	$m<0$	$m>0$	$m<0$	$+\infty$	∞	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	p	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$	$m\times p$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	∞	Indétermination $0\times\pm\infty$

Exemple :

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-4}\times\frac{1}{x-3}=$$

Le tableau reprend les différents cas de figure pour calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	m	m	m	m	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$p \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{m}{p}$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$	Indétermination $\dfrac{0}{0}$	Indétermination $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x-4} =$