Cours de mathématiques 2022/2023 - 7GTPE

Arthur Paquot

CHAPITRE 1

Tableaux, graphiques, formules - Puissance, proportionnalité inverse et croissance exponentielle

1.1 Programme de l'année

Puissance, proportionnalité inverse et croissance exponentielle

Agenda

Le chapitre sera traité durant les mois de septembre à décembre.

Connaître

- L'élève sera capable d'exprimer dans ses mots les notions suivantes :
  - Deux grandeurs proportionnelles
  - Deux grandeurs inversement proportionnelles
  - Le coefficient de proportionnalité
  - L'exposant
  - Une puissance
  - Une fonction exponentielle
- Justifier la proportionnalité inverse d'une relation à partir de tableaux de nombres, de graphiques ou de formules issus de contextes variés.
- Identifier une croissance exponentielle à partir de graphiques ou de formules issus de contextes variés.

Appliquer

L'élève sera capable de :

- Calculer un élément d'un tableau de proportionnalité inverse.
- Construire un graphique à partir d'un tableau de nombres ou d'une formule.
- Construire un tableau de nombres à partir d'un graphique ou d'une formule.

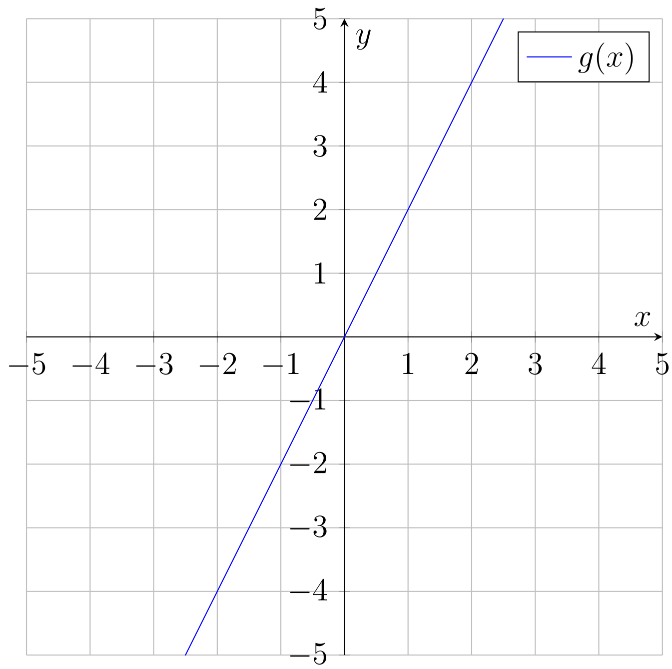
Transférer

- Associer graphiques, tableaux de nombres, formules.
- Choisir et utiliser les unités de mesure pertinentes dans une situation contextualisée.
- Résoudre un problème en mobilisant les puissances de 10 à exposant entier.
- Répondre à des questions inhérentes à une situation en se servant de l'outil approprié (graphique, tableau de nombres, formule).

1.2 Rappel

Les fonctions du premier degré

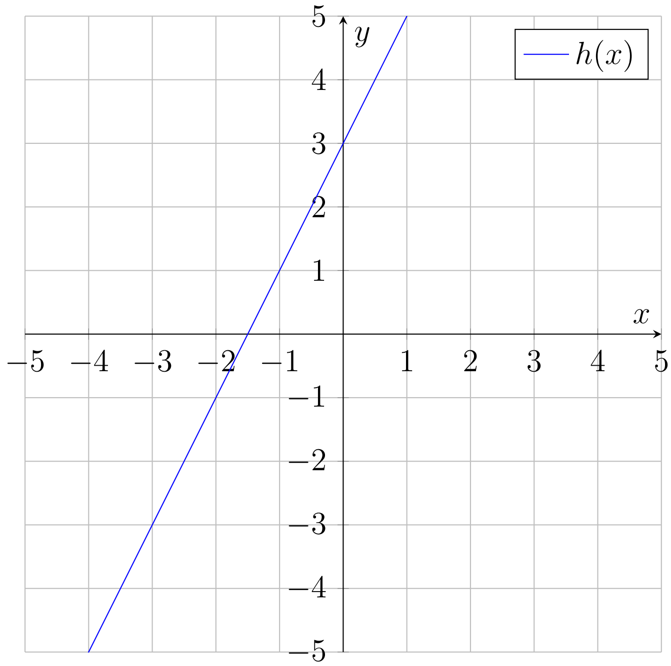
Complète les tableaux correspondant à chaque graphique, et déduis-en l'expression de la fonction représentée. Indique pour chaque fonction quelle est sa pente, son ordonnée à l'origine et sa racine.



x	1	2	3	4	5
y					

$g(x) =$ ....

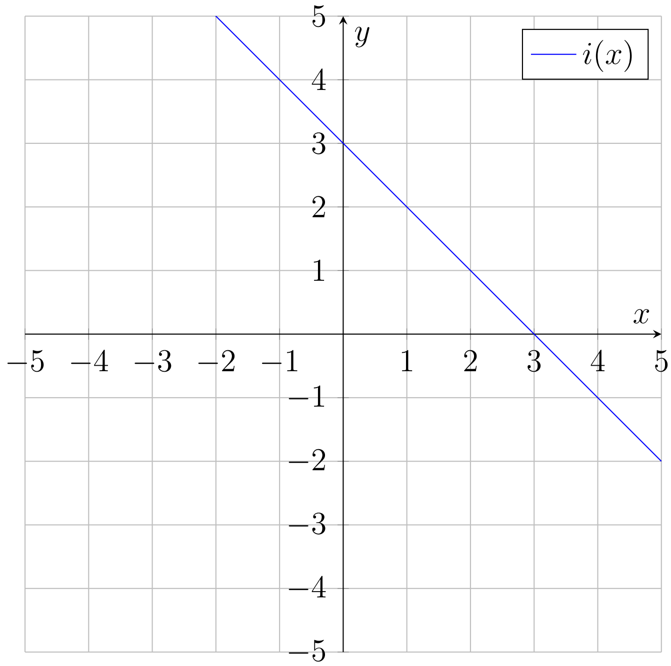
Pente = ... Racine = ... Ordonnée à l'origine = ...



x	1	2	3	4	5
y					

$h(x) =$ ....

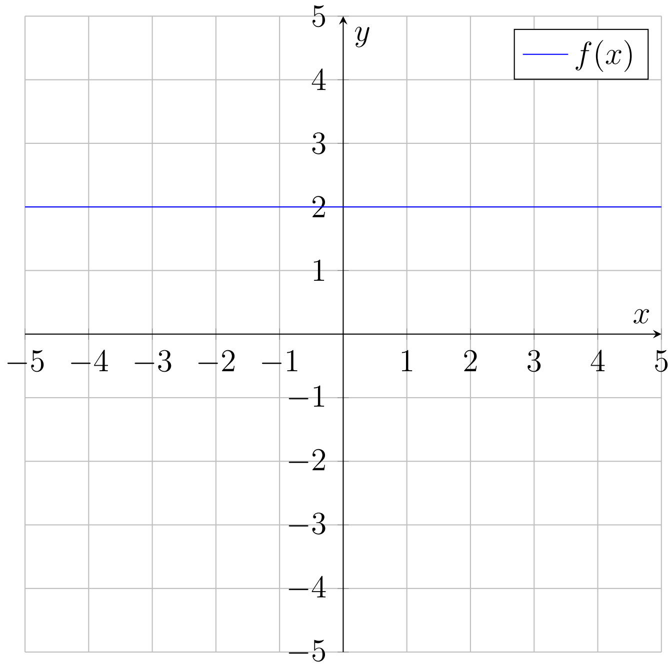
Pente = ... Racine = ... Ordonnée à l'origine = ...



x	1	2	3	4	5
y					

$i(x) =$ ....

Pente = ... Racine = ... Ordonnée à l'origine = ...



x	1	2	3	4	5
y					

$f(x) =$ ....

Pente = ...   Racine = ...   Ordonnée à l'origine = ...

Proportionnalité

Complète le tableau suivant pour des bonbons coûtant 3 euros le kilo.

poids(kg)	1	2	5	10	20
prix(euro)	3				

Dans ce cas-ci, comment peux-tu exprimer en français la valeur du prix des bonbons par rapport à leur poids ? Et mathématiquement ?

....

....

Complète le tableau suivant exprimant la température du sol en fonction de l'épaisseur de la couche de neige posée dessus, si tu sais que pour chaque centimètre de neige ajouter, il fait deux fois plus froid.

épaisseur(cm)	1	2	5	8	10	15
température(degré)	-2	-4	-10			

Dans ce cas-ci, comment peux-tu exprimer en français la valeur de la température par rapport à l'épaisseur de la neige ? Et mathématiquement ?

....

....

Trace les graphiques des fonctions correspondant aux deux cas précédents.

Quelles sont les caractéristiques communes aux deux graphiques ?

Un peu de théorie

Les grandeurs des exercices précédents sont dites **proportionnelles**.

Définition

Deux grandeurs sont dites proportionnelles si en multipliant (ou en divisant) par une même constante non nulle les valeurs de l'une, on obtient les valeurs de l'autre. Cette constante est appelée **coefficient de proportionnalité**.

La relation entre deux grandeurs proportionnelles x et y s'écrit $y = kx$, avec $k \neq 0$, où k est le coefficient de proportionnalité.

En reprenant notre exemple de bonbons qui coûte 3 euros le kilo. Si on pose x comme étant le nombre de kilo et y le prix, on obtient le tableau ci-dessous qui illustre la relation de proportionnalité avec $y = 3x$. Dans cet exemple, le coefficient de proportionnalité est égal à 3.

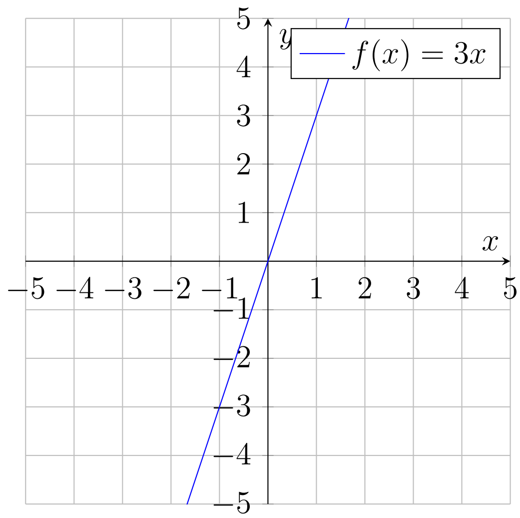
x	1	2	3	5	10
y	3	6	9	15	30

x 3

Représentation graphique

La relation de proportionnalité peut être représenté par le graphique d'une droite passant par l'origine.

Soit le graphique de la relation de proportionnalité de l'exemple des bonbons à 3 euros le kilo.



A quoi correspond la pente de cette droite ?

....

....

1.3 Proportionnalité inverse

Mise en situation

1. Tu as 100 kg de carottes que tu dois ramasser et stocker dans des sacs. Complète le tableau qui fait correspondre le nombre de sacs nécessaire pour stocker toutes les carottes en fonction de leur capacité.

Capacité des sacs(kg)	1	5	10	20	50	100
Nombre de sacs						

Comment as-tu calculé le nombre de sacs nécessaire ? Résume ton calcul par une règle qui met en relation la capacité des sacs x, le nombre de sacs y et le poids total de carottes k.

....

....

Règle

....

2. Soit une personne devant parcourir 10 km.

   (a) Complète le tableau suivant.

Vitesse (km/h)	1	2	5	10	20
Temps (heures)					

(b) Quel est le coefficient de proportionnalité dans cette situation ?

....

(c) Que vaut le produit de la *vitesse* et du *temps* ?

....

(d) Quelle est la relation de proportionnalité dans cette situation ?

....

(e) Sans faire de calcul, explique comment évoluera le temps pour des vitesses immenses ?

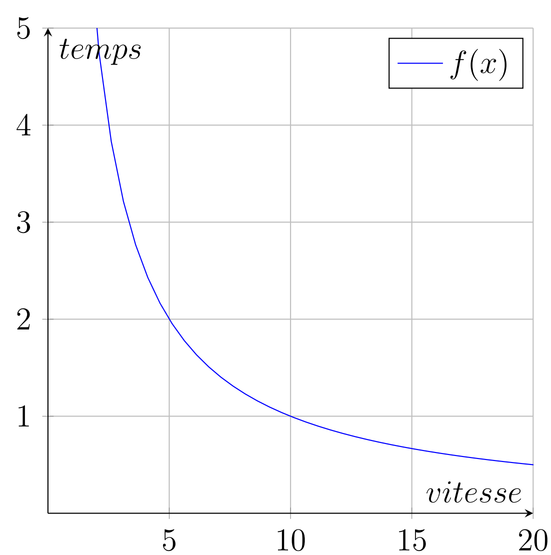
....

(f) Inversement, comment évolueront les valeurs du temps pour des vitesses minuscules ?

....

(g) Vérifie que tes intuitions sont cohérentes avec le graphique ci-dessous représentant la situation.

....



Quelle différence remarques-tu avec les graphiques représentant les situations de proportionnalité directe ?

....

....

....

Un peu de théorie

Définition

Deux grandeurs, x et y, sont dites **inversement proportionnelles**, si y est directement proportionnelle à **l'inverse de x**.

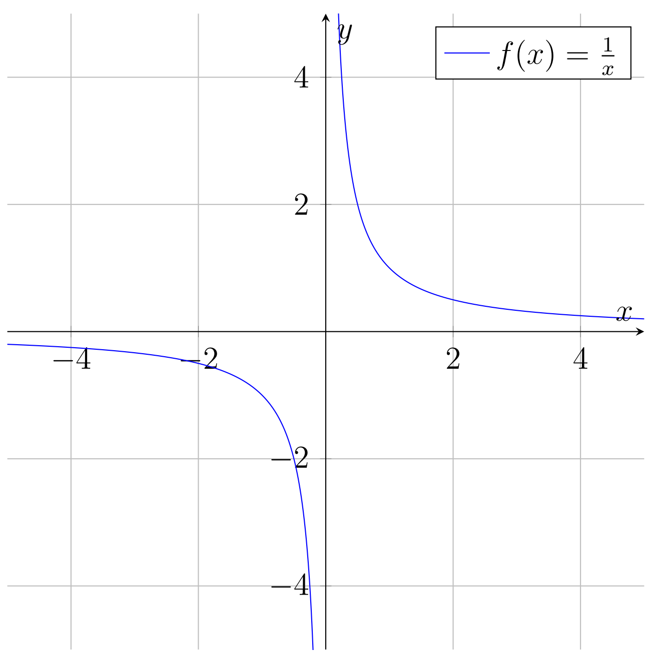
La **relation** entre deux grandeurs x et y **inversement proportionnelles** s'écrit $y = \dfrac{k}{x}$, avec $k \neq 0$, où k le coefficient de proportionnalité.

Propriété

Le **produit** de deux valeurs, x et y, **inversement proportionnelles** est égal au coefficient de proportionnalité k : $xy = k$.

Représentation graphique

Le graphique associé à la fonction $y = \dfrac{k}{x}$ est appelé une **hyperbole**.



Il convient de remarquer que :

— La croissance/décroissance de la courbe n'est pas constante

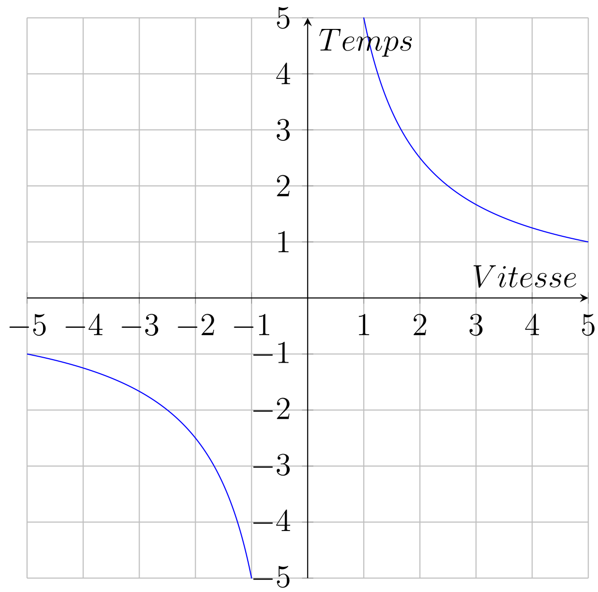
— La courbe ne coupe à aucun endroit ni l'axe des abscisses, ni l'axe des ordonnées

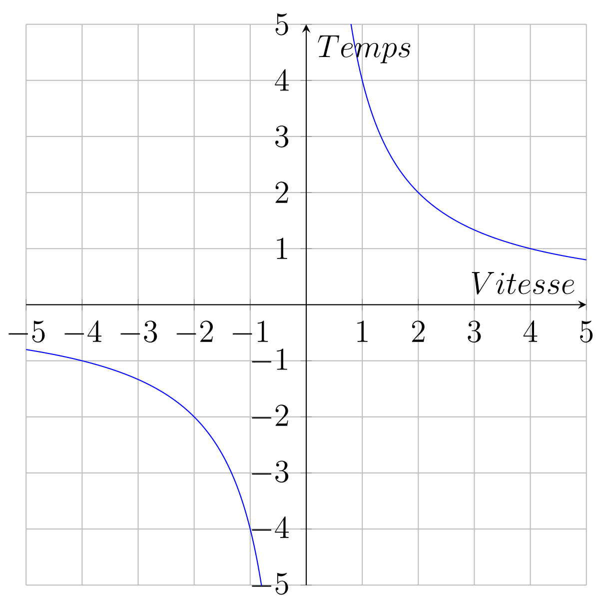
— Quand les abscisses augmentent (x), les ordonnées (y) diminuent et inversement.

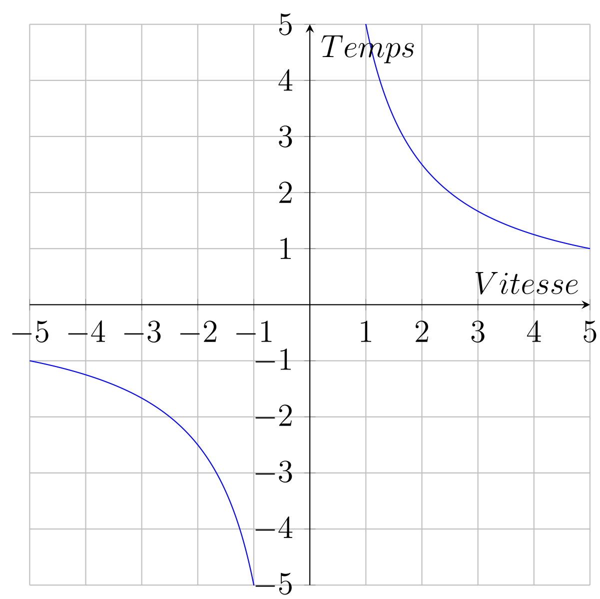
Parmi les graphiques suivants, lequel représente la situation de proportionnalité correspondant au tableau de valeur ? Quelle est cette relation ?

Vitesse (km/h)	1	2	4	8
Temps (h)	4	2	1	0.5

$Temps =$







Exercices

1. Indique si les grandeurs dans les situations suivantes sont proportionnelles ou inversement proportionnelles. Justifie.

   (a) Sarah est sauveteuse à une plage non loin de chez elle. Elle est payée 13 euros par heure. Sarah se demande combien elle gagnera après 40 heures de travail.

   ....

   ....

   ....

   (b) Safouane est livreur pour le journal local. Chaque samedi matin, il doit distribuer 100 journaux dans son quartier. Ce samedi, il demande à ses amis de l'aider. Safouane s'interroge à savoir combien de journaux chacun devra livrer s'il réussit à convaincre 5 de ses amis.

   ....

   ....

   ....

   (c) Si la relation entre deux grandeurs, x et y, est $y = \dfrac{x}{10}$

   ....

   ....

   (d) Mr Paquot souhaite partager un paquet de bonbons avec chacune de ses classes. Selon les classes, le nombre d'élèves varient. Monsieur Paquot se demande combien de bonbons les élèves des différentes classes auront.

....

....

....

(e) Une pompe vide cave dont le débit est de 200 litres par minutes met 4 heures (240 min) pour vider une cave inondée. Combien de temps durerait ce pompage si le débit était de 100, 400, 600 ou 800 litres par minute ?

....

....

(f) Si la relation entre deux grandeurs, x et y, est $y = \dfrac{1}{10x}$

....

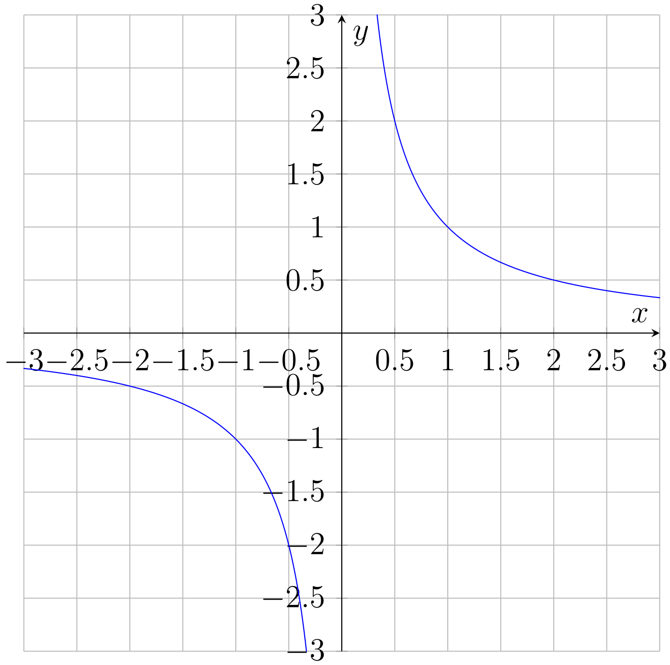
....

2. Complète le tableau suivant, sachant que deux personnes mettent 12 heures pour construire un mur. Combien d'heures mettraient 4 personnes pour construire le même mur ? Quel est le coefficient de proportionnalité k ?

Nombre de personnes	1	2	3	4	6	8	48
Nombre d'heures							

$k =$ ....

3. En t'aidant du graphique, compète le tableau ci-dessous.



x	-2	-1	1	2
y				

Si tu sais que ce graphique représente la relation entre des grandeurs inversement proportionnelles, quelle est le facteur de proportionnalité k ? Justifie.

$k =$ ....

4. Une pompe vide cave dont le débit est de 200 litres par minute met 4 heures (240 min) pour vider une cave inondée. Combien de temps durerait ce pompage si le débit était de 100, 400, 600 ou 800 litres par minute ?

Débit (l/min)	100	200	400	600	800
Temps (heures)		4			

Quelle est valeur est constante dans les différents cas de figure ?

....

Écris la relation de proportionnalité.

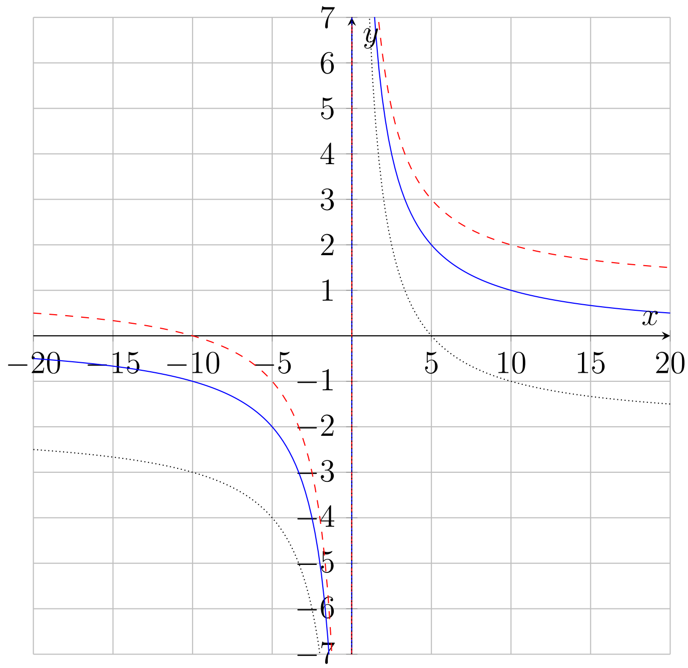
....

5. Yasmina gagne au loto la somme de 10 000 euros. Étant généreuse, elle décide de partager cette somme avec tous les membres de sa famille. Sachant que chaque personne a reçu 250 euros, écris la relation de proportionnalité et détermine combien de personnes constituent la famille de Yasmina.

   Relation de prop. : ....

   Membres de la famille : ....

6. Soit les graphiques suivants, associe chaque graphique à sa fonction et complète la phrase ci-dessous en sachant qu'ils représentent les fonctions :
   (a) $f(x) = \frac{10}{x}$
   (b) $g(x) = \frac{10}{x} + 1$
   (c) $h(x) = \frac{10}{x} - 2$



Le graphique associé à la fonction $y = \frac{k}{x} + b$, est le graphique de la fonction décalée de .... unités vers le .... si $b > 0$, vers le .... si $b < 0$.

7. Dix chevaux ont consommé, en 12 jours, 200 kg de foin. En combien de jours ce foin sera consommé si on a trente chevaux ?

   (a) La relation est-elle proportionnelle ou inversement proportionnelle ?

   ....

   (b) Quelle est le coefficient de proportionnalité ?

   ....

   (c) Quelle est la formule qui exprime la relation ?

   ....

   (d) Déduis la réponse à la question grâce à la formule.

   ....

   ....

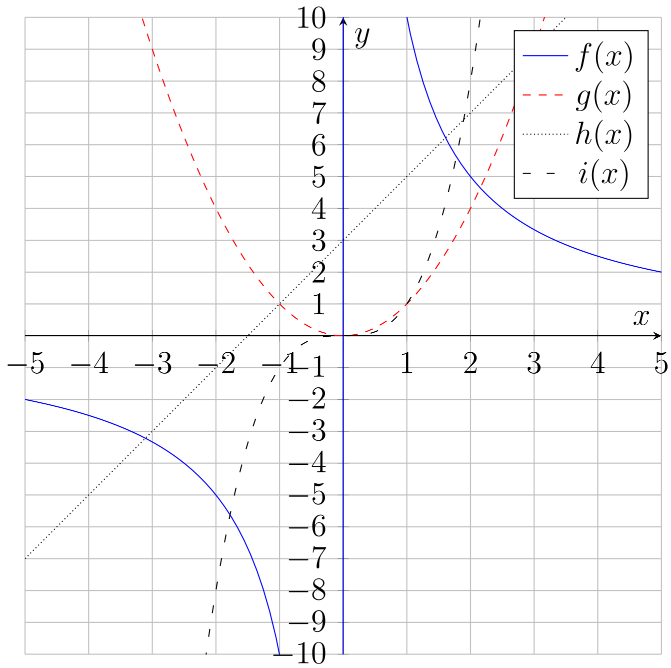
1.4 Fonctions puissances à exposant entier

Mise en situation

Complète le tableau et puis identifie parmi les graphiques ci-dessous, lequel peut être associé à la fonction x^2, x^3, $\dfrac{10}{x}$, $2x+3$?

x	-2	-1	0	1	2
x^2					
x^3					
$\dfrac{10}{x}$					
$2x+3$					

	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)
x^2				
x^3				
$\dfrac{10}{x}$				
$2x+3$				

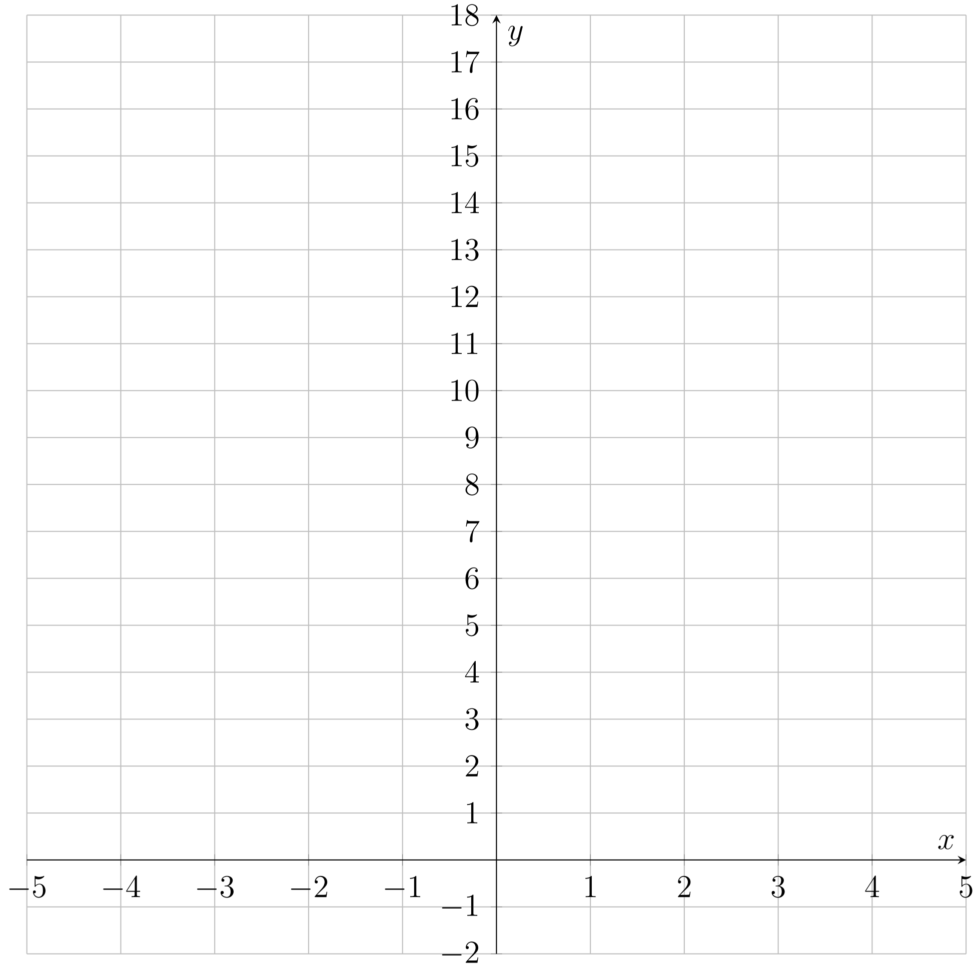


Fonction carré

La fonction carré est la fonction qui, à tout réel x, associe son carré : $f(x) = x^2$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2									



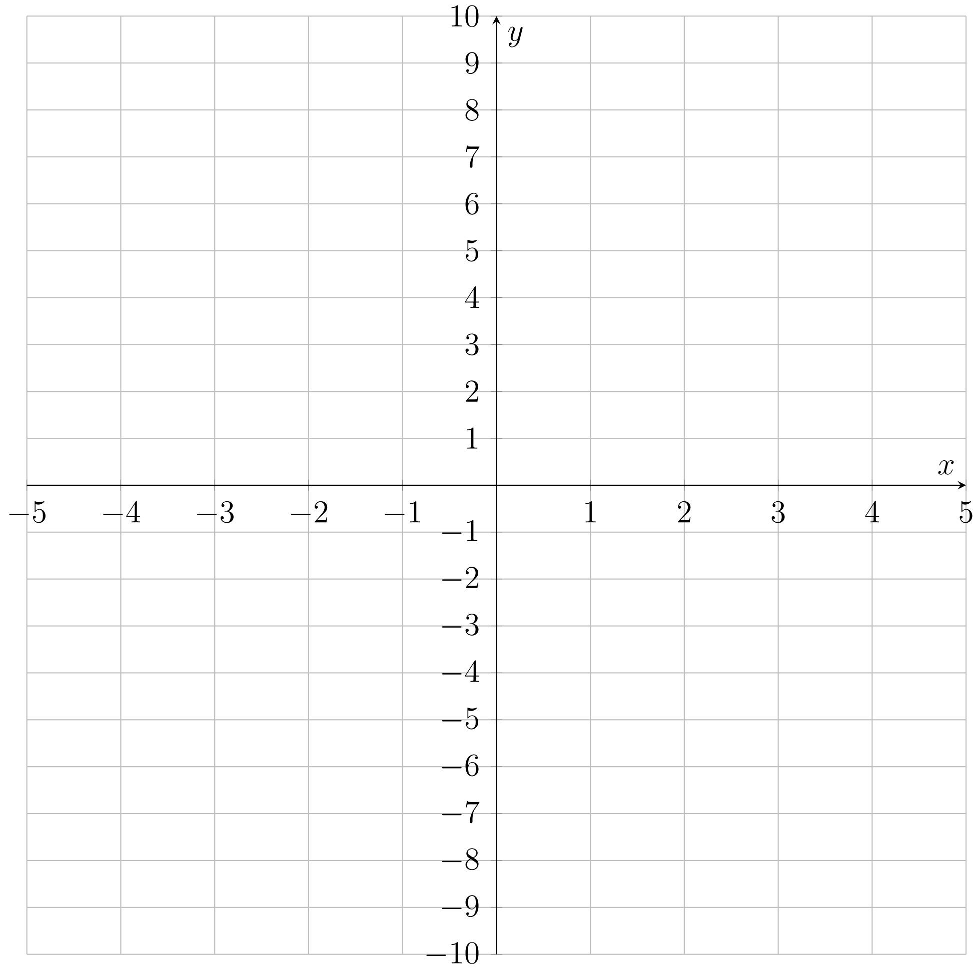
Le graphique associé à la fonction carré est une **parabole**.

Fonction cube

La fonction cube est la fonction qui, à tout réel x, associe son cube : $f(x) = x^3$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
x^3					

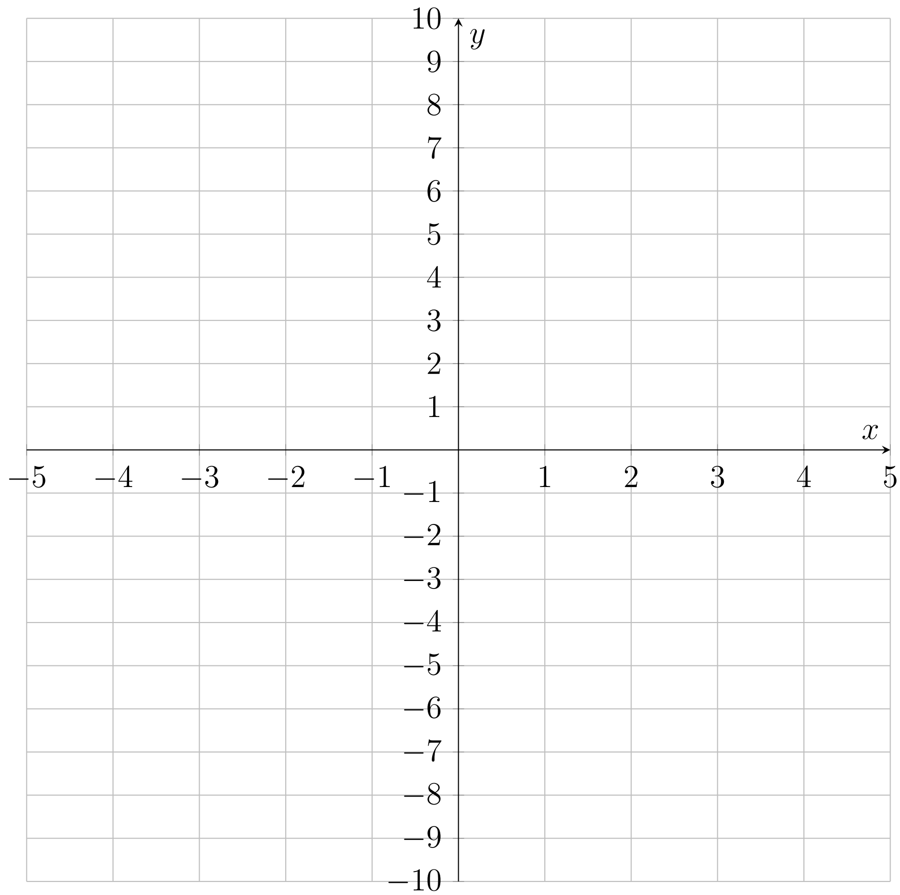


1.5 Fonction du premier degré

Les fonctions du premier degré sont les fonctions de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des nombres réels non nuls. Exemple : $y = 3x + 2$ est la fonction avec $m = 3$ et $p = 2$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3x + 2$					



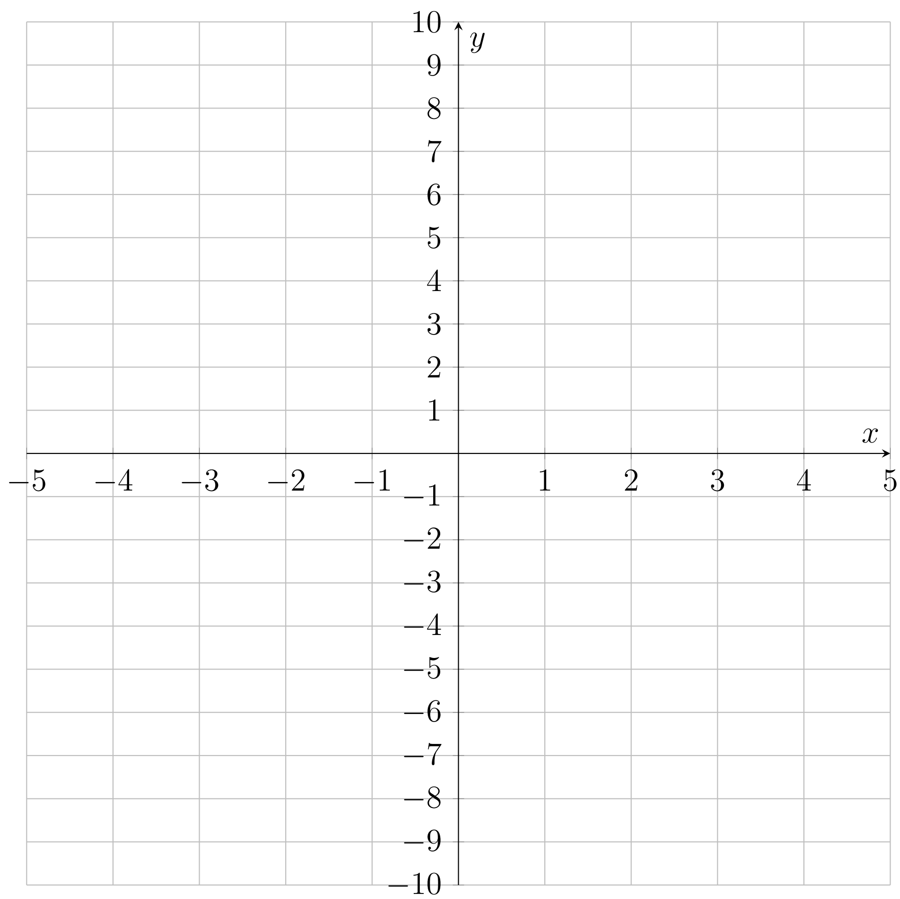
Le graphique d'une fonction du premier degré est ....

1.6 Fonctions constantes

Les fonctions constantes sont des cas particuliers des fonctions du premier degré ($y = mx + p$), pour lesquelles $m = 0$. Exemple : $y = 2$.

Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2$					



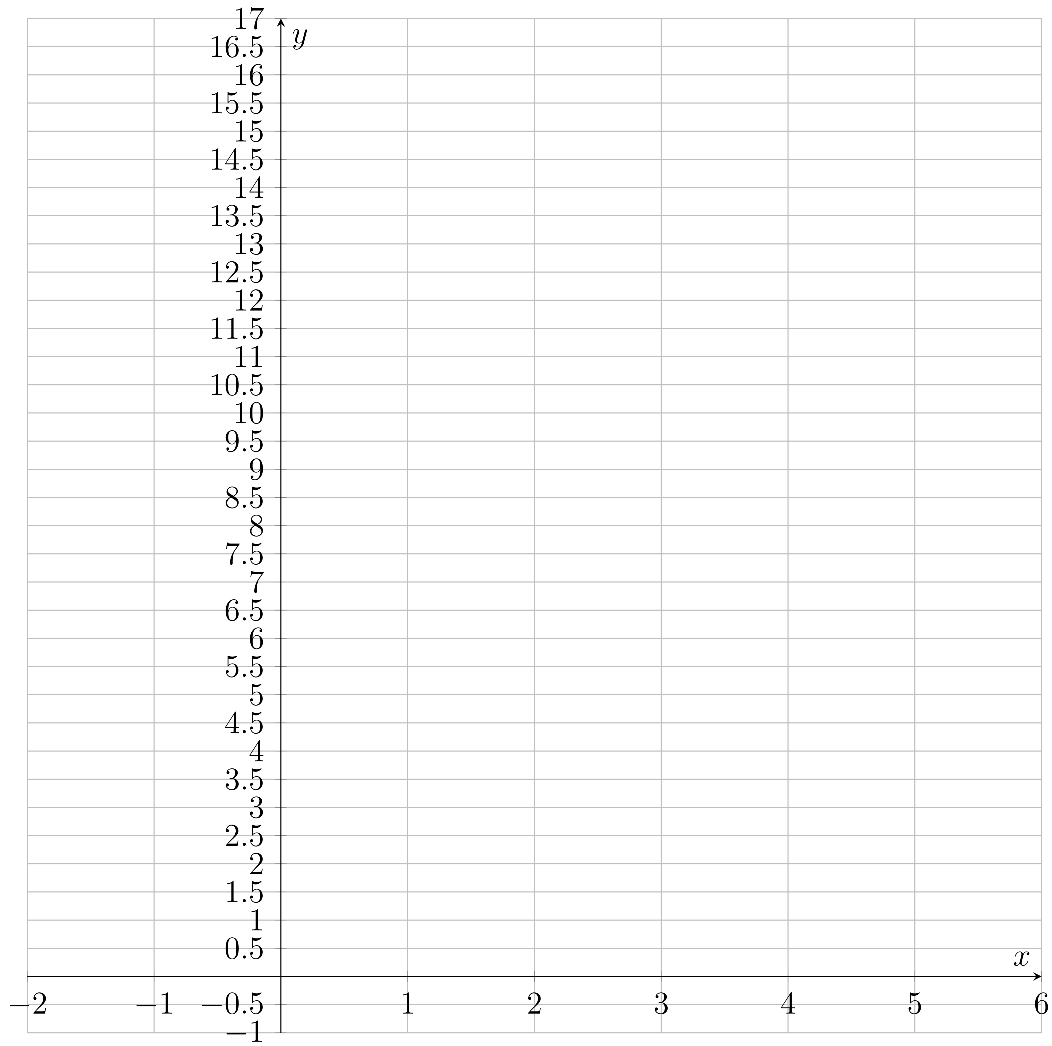
Le graphique d'une fonction constante est ....

1.7 Fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont des fonctions de la forme $y = a^x$ avec a un nombre réel positif non nul. Exemple : $y = 2^x$.

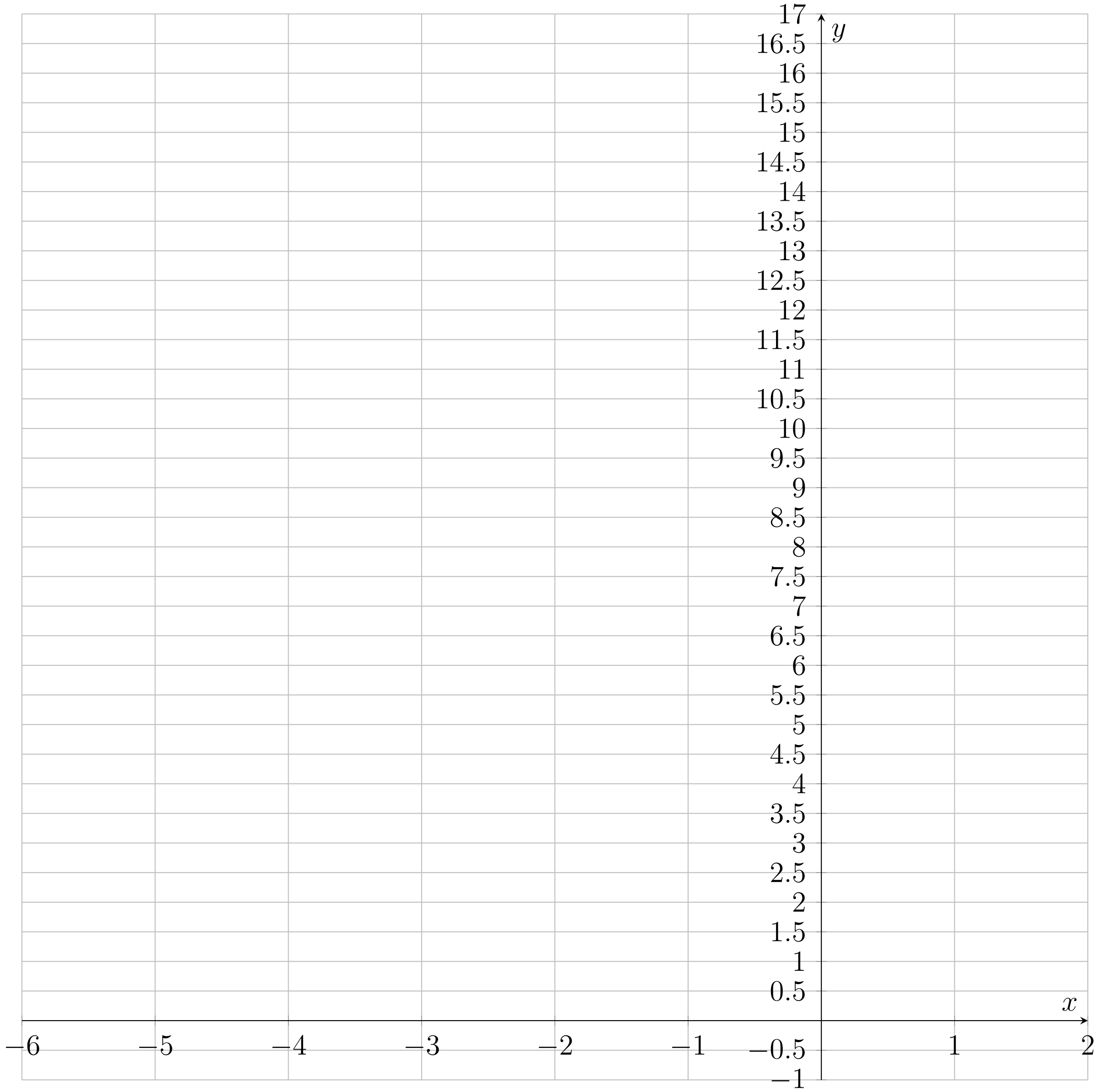
Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$							



Complète le tableau et place les différents points dans le plan ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = (\frac{1}{2})^x$							



1.8 Croissance des fonctions

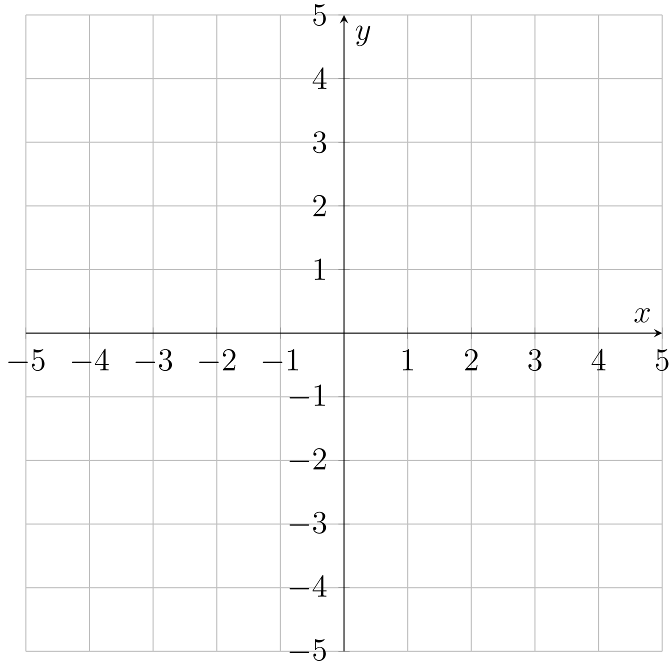
Une fonction est dite croissante sur un intervalle, si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x croît.

Une fonction est dite décroissante sur un intervalle, si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x croît.

Pour les fonctions vues en cours, dessine le graphique correspondant et indique si elles sont croissantes, décroissantes ou constantes tout le temps ou sur certains intervalles.

1. $f(x) = 3x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

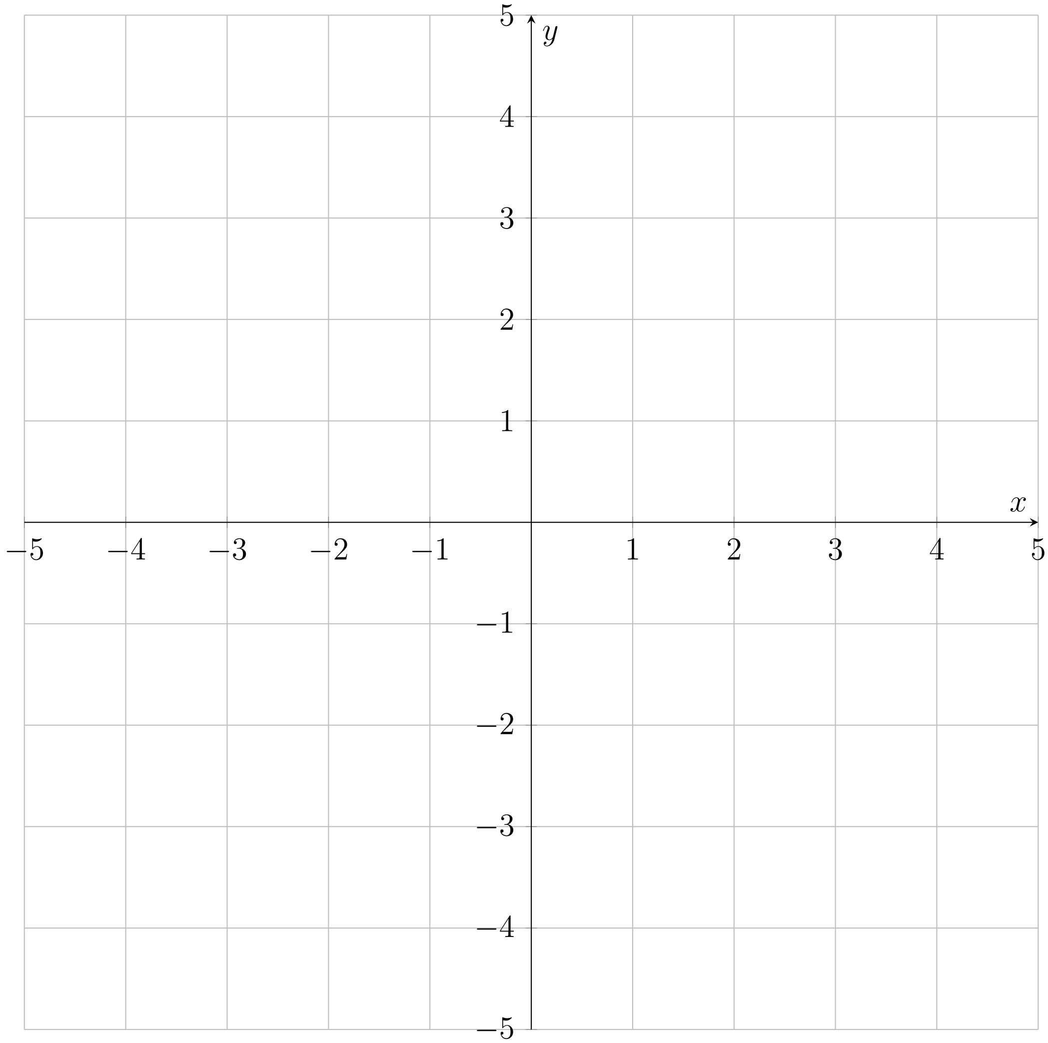


....

....

2. $f(x) = -2x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

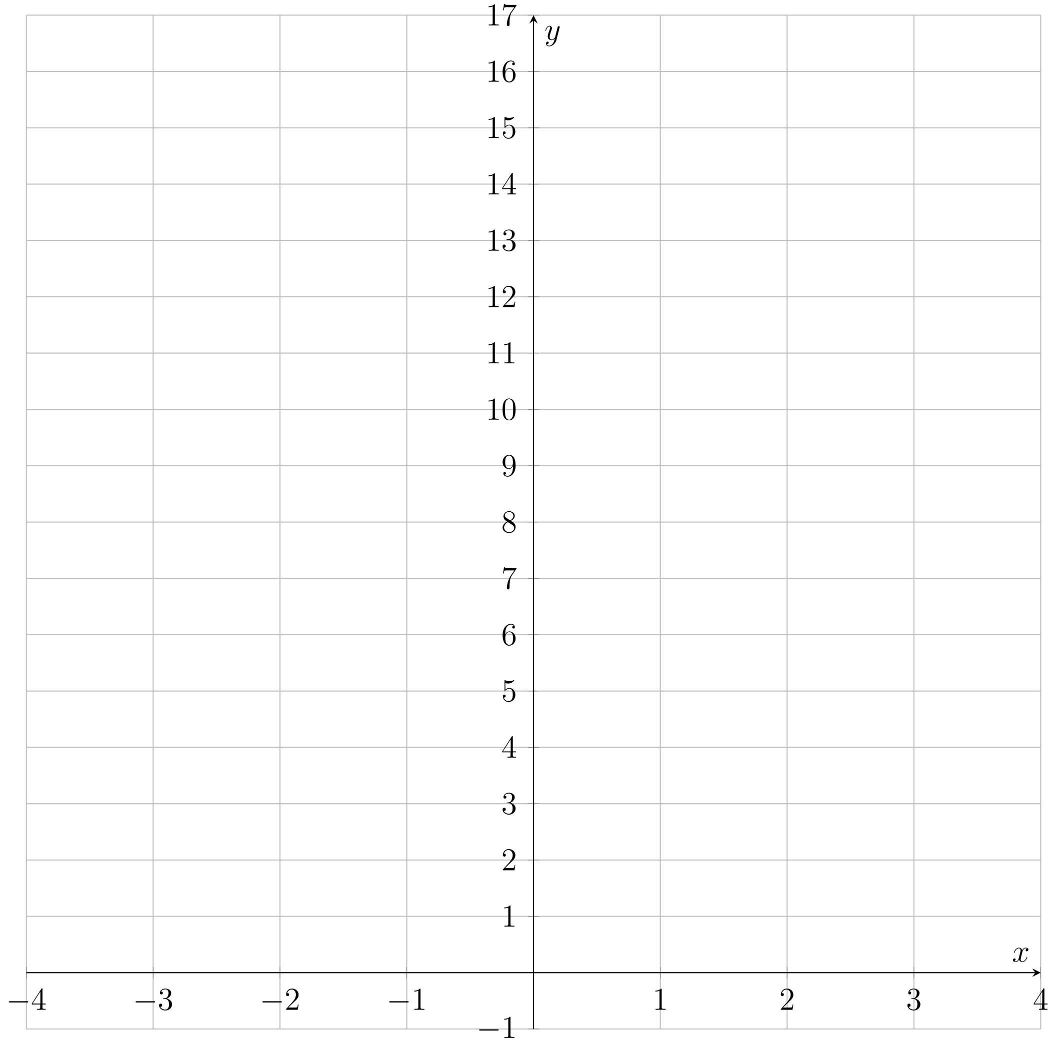


....

....

3. $f(x) = x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

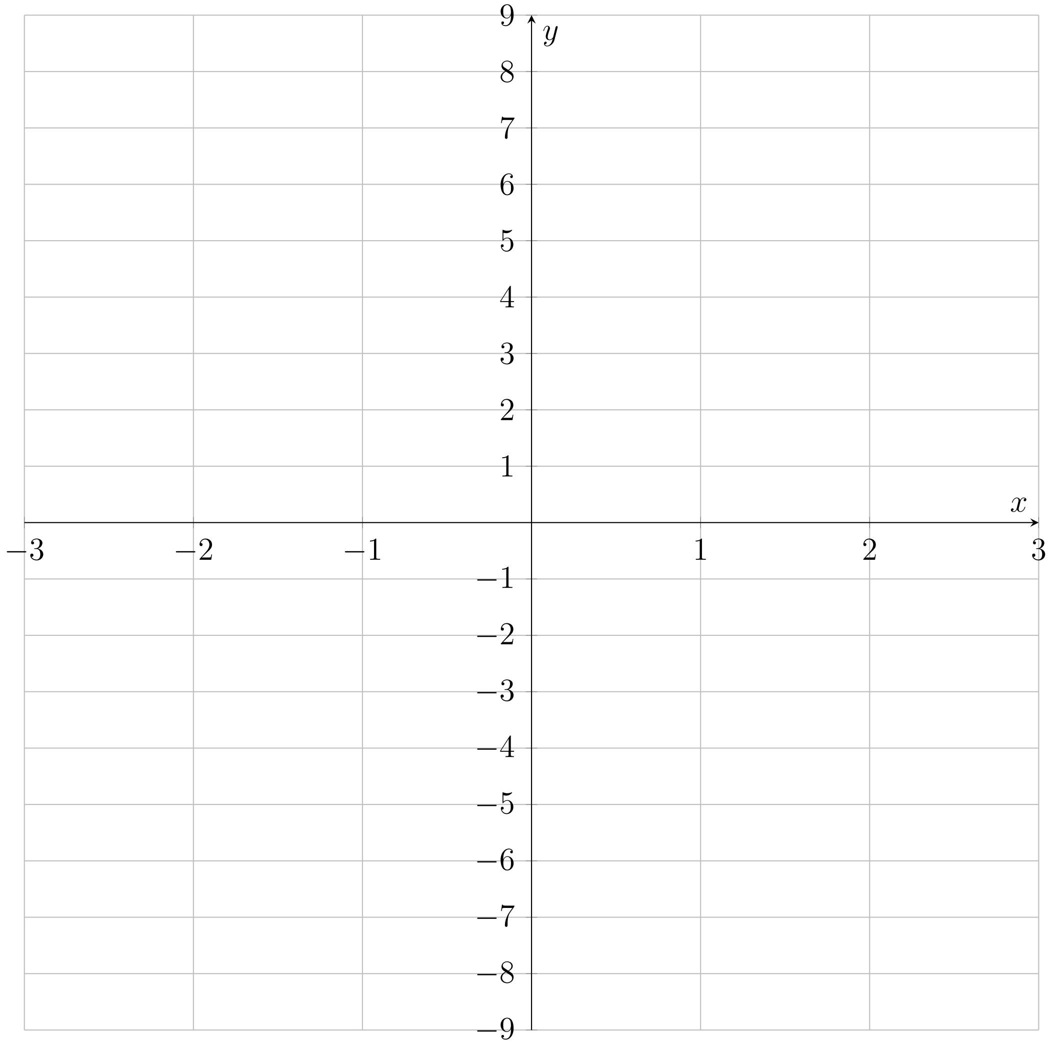


....

....

4. $f(x) = x^3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

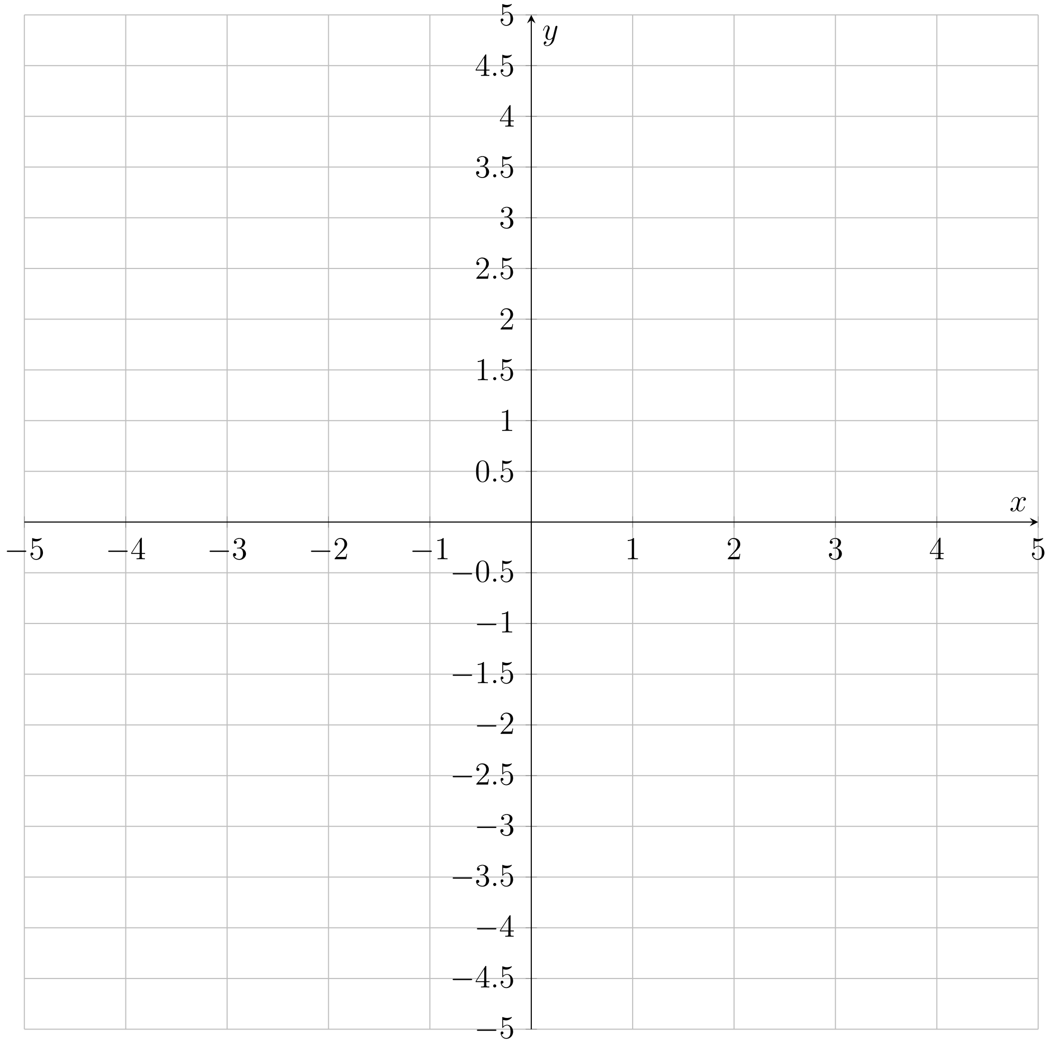


....

....

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$							

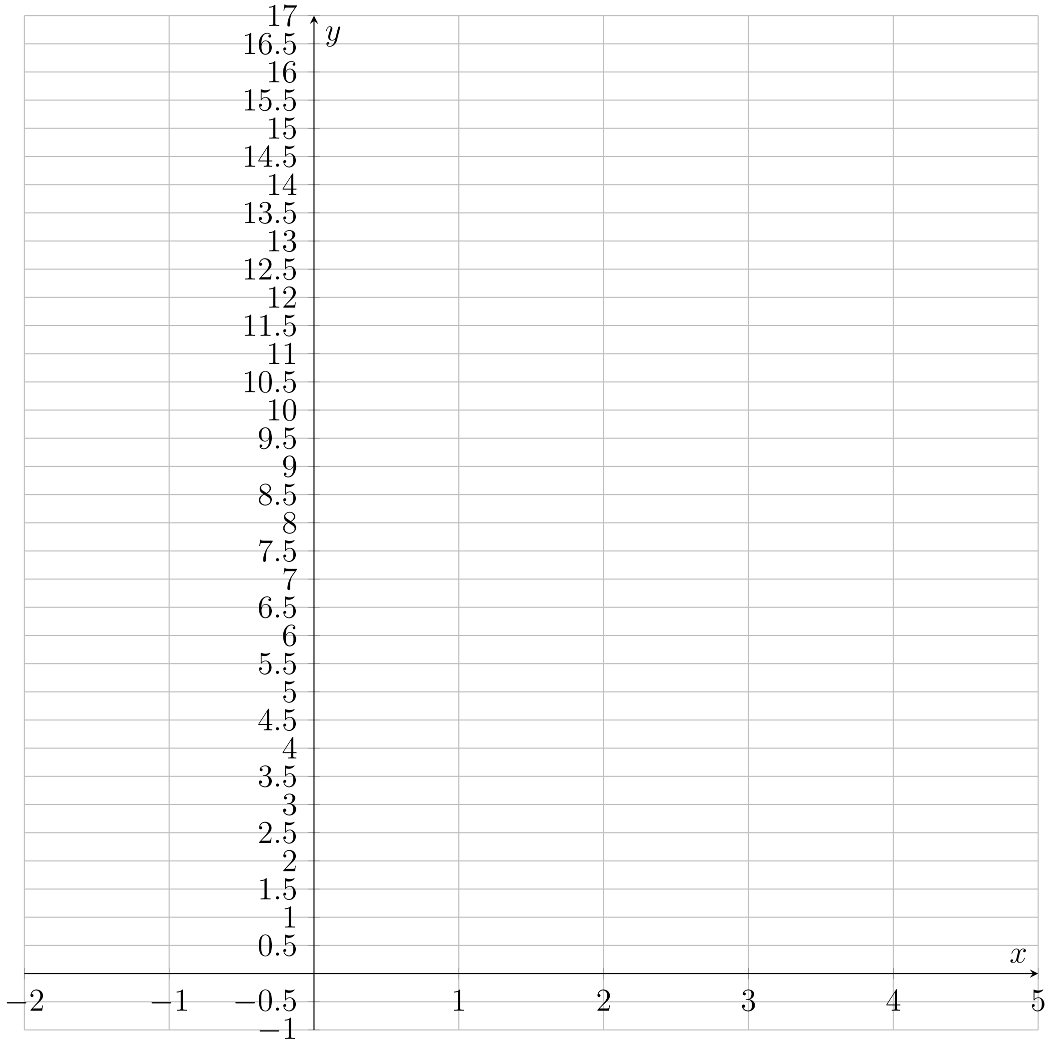


....

....

6. $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

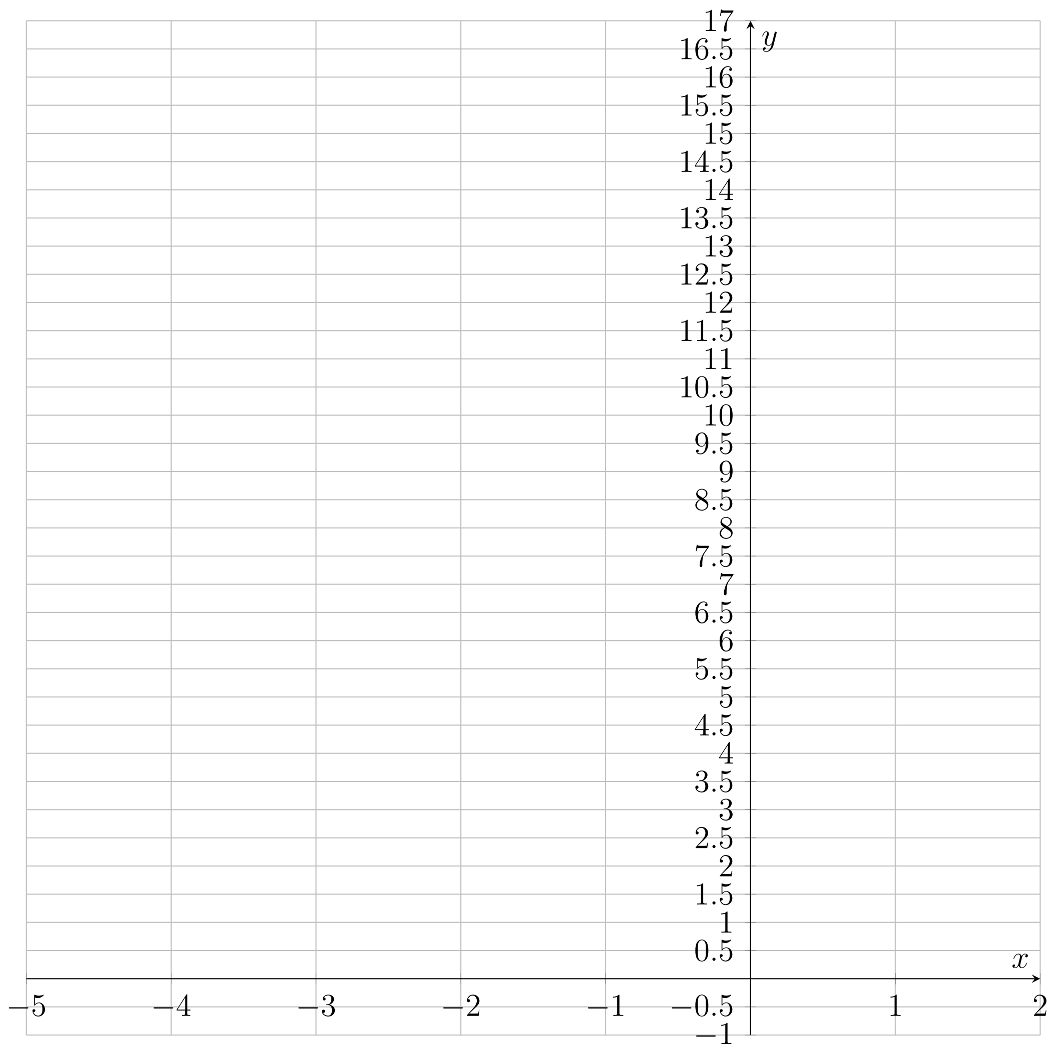


....

....

7. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							



....

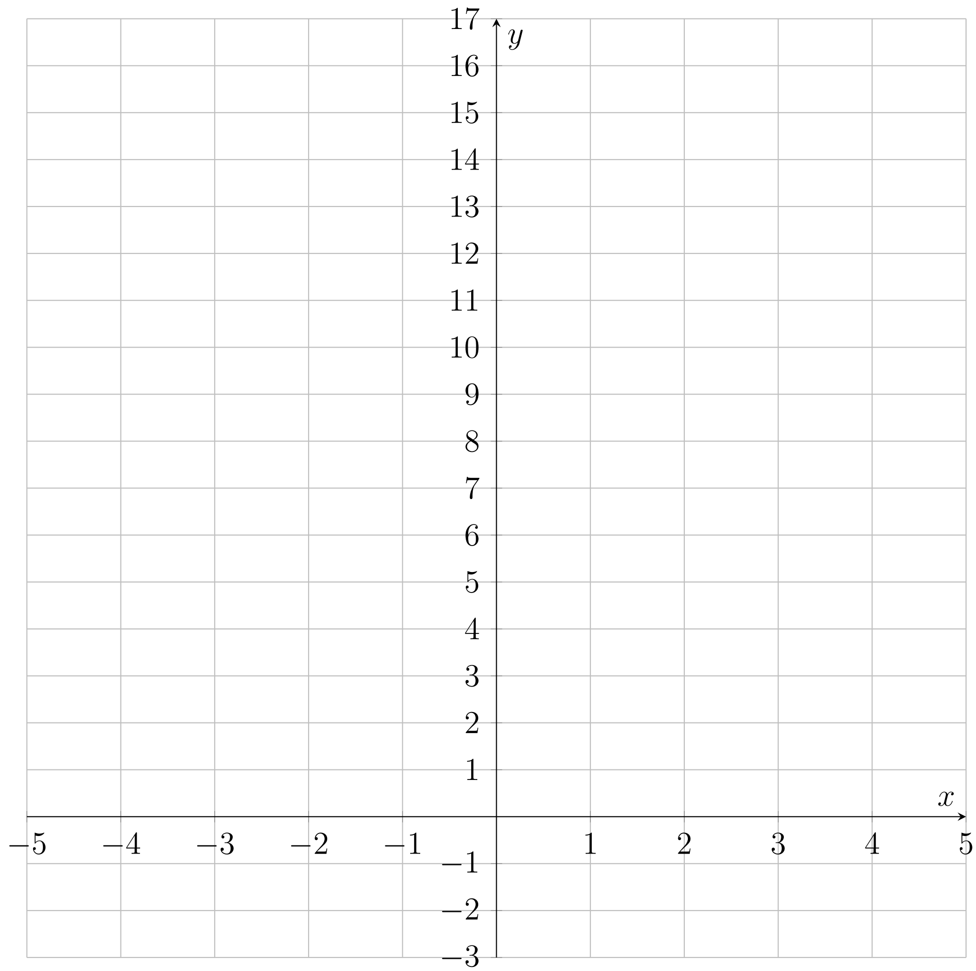
....

1.9 Manipulation de fonctions

Complète le tableau ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$ et trace les graphiques correspondants aux fonctions.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$f(x)+2$					

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)-3$					



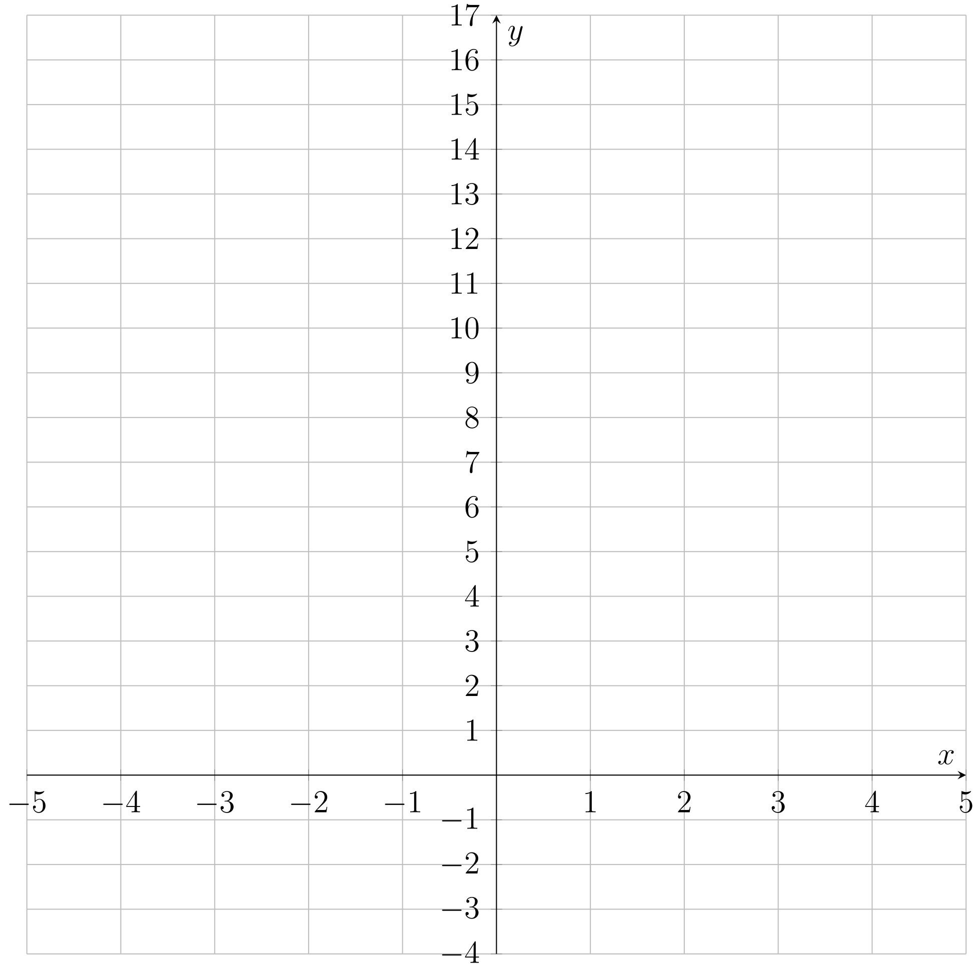
Quelle transformation subit le graphique d'un fonction $f(x)$ si on lui additionne un réel k $(f(x)+k)$?

....

Complète le tableau ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$ et trace les graphiques correspondants aux fonctions.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$f(x+2)$					

x	-2	-1	0	1	2
$f(x-3)$					



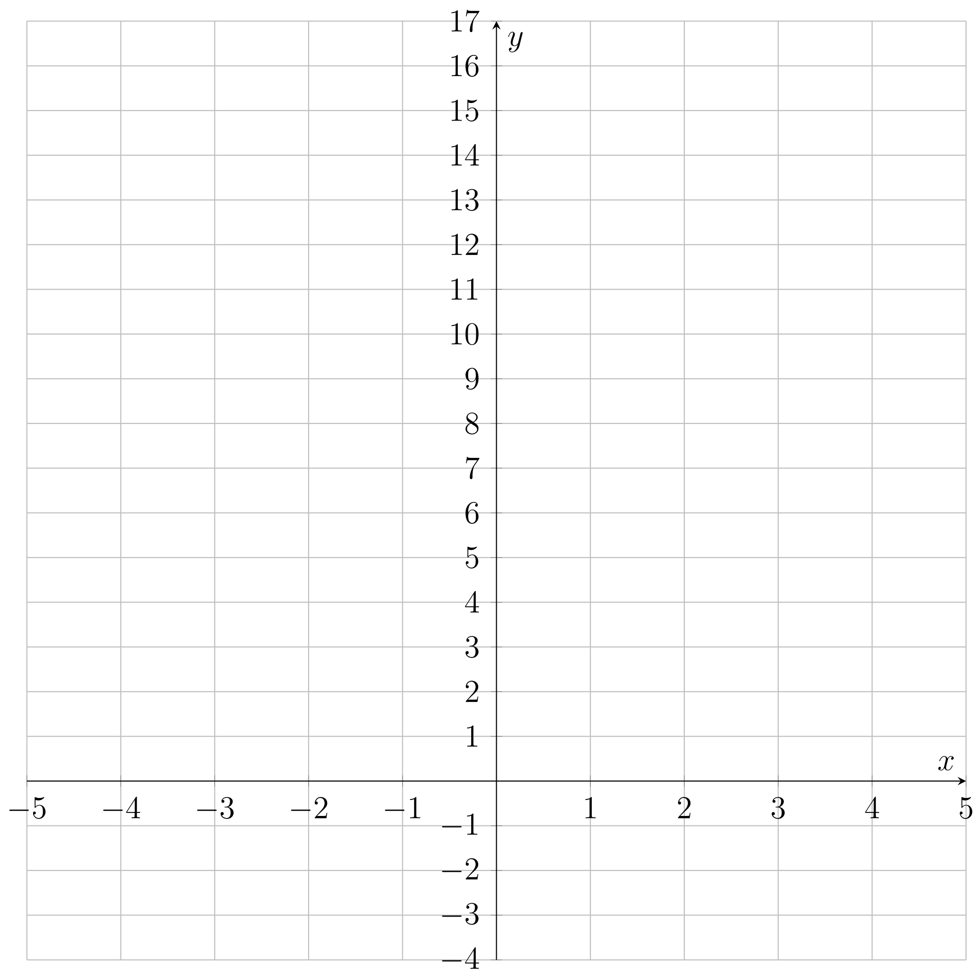
Quelle transformation subit le graphique d'un fonction $f(x)$ si on lui applique la transformation suivante : $f(x+k)$?

....

Complète le tableau ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$ et trace les graphiques correspondants aux fonctions.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$f(2x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$f(\frac{x}{2})$					

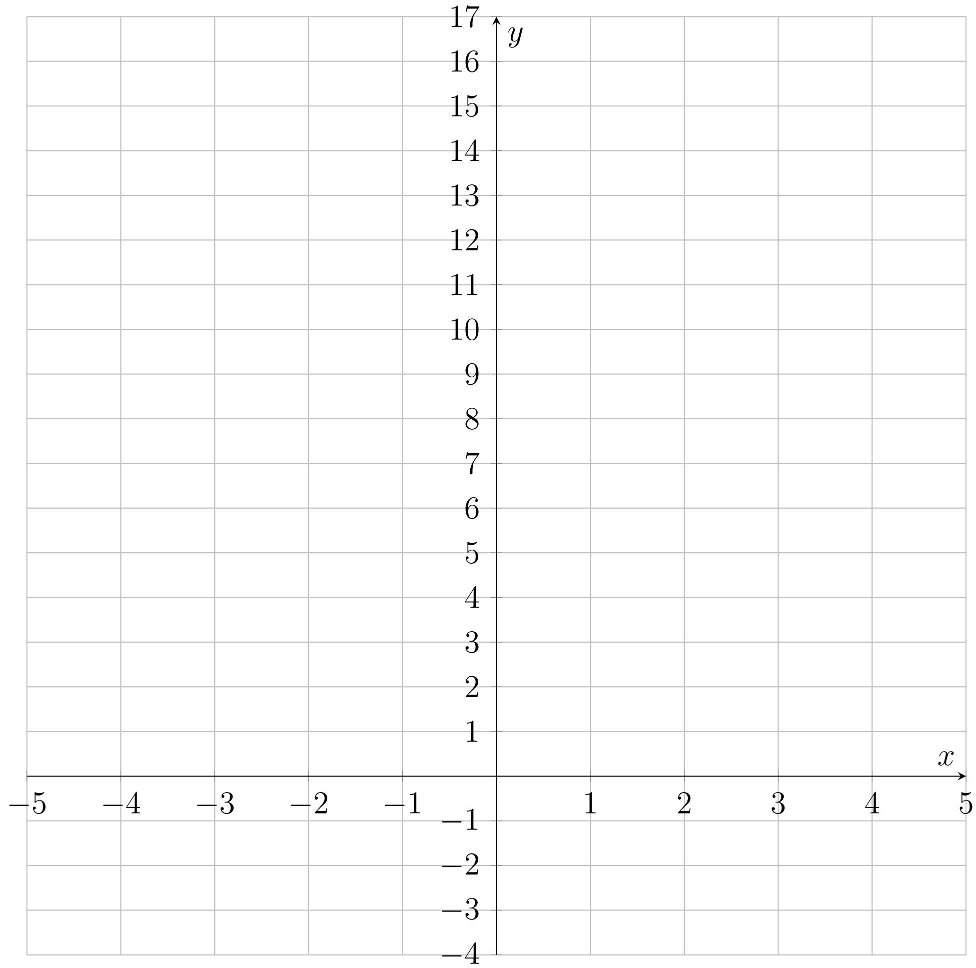


Quelle transformation subit le graphique d'un fonction $f(x)$ si on lui applique la transformation suivante : $f(kx)$?

....

Complète le tableau ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$ et trace les graphiques correspondants aux fonctions.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$-f(x)$					



Quelle transformation subit le graphique d'un fonction $f(x)$ si on lui applique la transformation suivante : $-f(x)$?

....