

Cours de mathématiques 2022/2023 - 6PA

Arthur Paquot

CHAPITRE 1

Tableaux, graphiques, formules - Les intérêts

1.1 Programme de l'année

Les intérêts simples et composés

Agenda

Le chapitre sera traité durant les mois de septembre à décembre.

Connaître

- L'élève sera capable d'exprimer dans ses mots les notions suivantes :
 - Un capital
 - Un taux d'intérêt
 - Intérêts simples
 - Intérêts composés

Appliquer

L'élève sera capable de :

- Calculer le pourcentage d'une grandeur.
- Augmenter/diminuer une grandeur d'un certain pourcentage.
- Construire un tableau de nombres à partir d'une formule d'intérêt.
- Calculer et comparer les intérêts simples et composés appliqués à un capital.
- Calculer le capital initial à partir du capital final, du taux d'intérêt et du nombre de périodes.
- Calculer le capital final à partir du capital initial, du taux d'intérêt et du nombre de périodes.
- Calculer le taux d'intérêt, à partir du capital initial, du capital final et du nombre de périodes.
- Calculer le taux d'intérêt à partir du capital final, du capital initial et du nombre de périodes.
- Calculer le nombre de périodes à partir du capital final, du capital initial et du capital initial.
- Déduire si un capital est soumis à un taux d'intérêt simple ou composé à partir des différentes valeurs des intérêts.
- Représenter graphiquement l'évolution d'un capital dans le temps.

Transférer

- Associer les graphiques, les tableaux de nombres et les formules correspondantes.
- Répondre à des questions relatives à une situations en se servant de l'outil approprié (graphique, tableau de nombres, formule).
- Pouvoir résoudre un problème inconnu faisant intervenir les notions d'intérêts vues en cours.

1.2 Rappel

Comment résoudre une équation du premier degré ?

Une équation est résolue lorsqu'on a trouvé la valeur de l'inconnue qui la vérifie. C'est à dire lorsqu'on a obtenu une expression de la forme $x = \dots$

Afin d'**isoler une variable**, c'est à dire que la variable soit seule d'un côté de l'équation ($x = \dots$), on va transposer tous les termes numériques d'un côté de l'équation.

Isoler la variable dans une équation du premier degré

1. Comment éliminer les termes positifs ?

Pour éliminer un terme positif d'un membre de l'équation, il faut lui ajouter son opposé. Or, lorsque l'on soustrait un terme d'un membre de l'égalité, nous devons le soustraire de l'autre afin de maintenir cette égalité.

Si nous retranchons un même terme aux deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned}x + 2 &= 5 \\x + 2 - 2 &= 5 - 2 \\x &= 3\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 3$.

Exercices : Résous les équations suivantes

(a) $x + 3 = 10$

.....

.....

.....

(b) $x + 1 = -3$

.....

.....

.....

2. Comment éliminer les termes négatifs ?

Pour éliminer un terme négatif d'un membre de l'équation, il faut lui ajouter son opposé. Or, lorsque l'on additionne un terme à un membre de l'égalité, nous devons l'additionner à l'autre membre afin de préserver l'égalité.

Si nous ajoutons un même terme aux deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned}x - 2 &= 5 \\x - 2 + 2 &= 5 + 2 \\x &= 7\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 7$.

Remarque : Il est possible d'utiliser ces propriétés avec toutes les expressions mathématiques, même celles qui contiennent des variables.

$$\begin{aligned}2x + 2 &= 3x \\2x - 2x + 2 &= 3x - 2x \\2 &= x\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 2$.

Exercices : Résous les équations suivantes

(a) $x - 3 = 10$

.....

.....

.....

(b) $x - 1 = -3$

.....

.....

.....

3. **Que faire si l'inconnue est multipliée par une valeur ?**

Pour éliminer le facteur qui multiplie une variable, il faut diviser les deux membres de l'équation par ce facteur.

Si nous divisons par un même facteur les deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 4 \\ \frac{2x}{2} & = & \frac{4}{2} \\ x & = & 2 \end{array}$$

La solution de l'équation est donc $x = 2$.

Exercices : Résous les équations suivantes

(a) $5x = 10$

.....

(b) $-2x = -3$

4. Que faire si l'inconnue est divisée par une valeur ?

Pour éliminer le facteur qui divise une variable, il faut multiplier les deux membres de l'équation par ce facteur.

Si nous multiplions par un même facteur les deux membres d'une équation, l'égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} &= 4 \\ \frac{x}{5} \times 5 &= 4 \times 5 \\ x &= 20\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 20$.

Attention !

Il faut d'abord éliminer les termes (addition et soustraction) et ensuite les facteurs (multiplication et division).

$$\begin{array}{rcl}
3x + 1 & = & 7 \\
3x + 1 - 1 & = & 7 - 1 \\
3x & = & 6 \\
\frac{3x}{3} & = & \frac{6}{3} \\
x & = & 2
\end{array}$$

La solution de l'équation est donc $x = 2$.

Exercices : Résous les équations suivantes

(a) $\frac{x}{2} = 10$

.....

.....

.....

(b) $\frac{x}{5} = -3$

.....

.....

.....

Pour résumer

Pour résoudre une équation du premier degré ($2x + 3 = 5x - 2$) :

(a) Je transpose tous les termes indépendants (qui ne contiennent pas une variable) d'un côté de l'équation.

$$2x + 3 = 5x - 2 \Rightarrow 2x + 3 + 2 = 5x.$$

(b) Je transpose tous les termes qui contiennent la variable de l'autre côté.

$$2x + 3 + 2 = 5x \Rightarrow 3 + 2 = 5x - 2x \Rightarrow 5 = 3x.$$

(c) J'élimine les facteurs multipliant la variable.

$$5 = 3x \Rightarrow \frac{5}{3} = x$$

Résous les équations suivantes :

1. $x + 3 = 5$

.....

.....

.....

2. $2 - x = 0$

.....

.....

.....

3. $-t + 3 = 2$ (t étant l'inconnue)

.....

.....

.....

4. $2m = 4$ (m étant l'inconnue)

.....

.....

.....

5. $5u + 2 = -2$ (u étant l'inconnue)

.....

.....

$$6. \frac{x}{2} = 8$$

$$7. \frac{x-2}{3} = 6$$

$$8. \frac{2u+2}{3} = 4 \text{ (} u \text{ étant l'inconnue)}$$

$$9. \frac{-3s+3}{2} = 5 \text{ (} s \text{ étant l'inconnue)}$$

Calcul de pourcentage

Pourcentage d'une grandeur

Prendre x % d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Exemple :

- 10% de 50 euros représente $\frac{10}{100} \times 50 = 0,1 \times 50 = 5$ euros.
- 15% de 60 élèves représente $\frac{15}{100} \times 60 = 0,15 \times 60 = 9$ élèves.

Exercices :

1. Exprime ces pourcentages sous forme de fraction, sous forme décimale et calcule le pourcentage de la grandeur donnée.

Pourcentage	Fraction	Décimale	Grandeur	Calculs	Résultat
10%			150		
4%			10		
15%			3000		
1%			150		
97%			1000		

Pourcentage d'augmentation d'une grandeur

Augmenter une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$.

En effet, pour augmenter un capital de 100 euros de 2% :

1. Je calcule l'augmentation : $capital_{initial} \times pourcentage = 100 \times \frac{2}{100} = 100 \times 0,02 = 2$ euros
2. Je l'ajoute à mon capital initial : $capital_{Final} = capital_{initial} + 2 = 100 + 2 = 102$ euros

Ces étapes reviennent à multiplier le capital initial par $1 + \frac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$.
Vérifions, $100 \times 1,02 = 102$. Nous obtenons bien le même prix.

Exercices : Augmente les différentes grandeurs du pourcentage indiqué.

Grandeur	Augmentation	Calculs	Résultat
100	10%		
20	1%		
400	25%		
5	95%		
55	75%		

Pourcentage de diminution d'une grandeur

Diminuer une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$.

Exemple :

Pour solder un objet qui coûte 10 euros de 20% :

1. Je calcule la diminution : $prix_{initial} \times pourcentage = 10 \times \frac{20}{100} = 2$ euros
2. Je la soustrais à mon prix initial : $prix_{Final} = prix_{initial} - 2 = 10 - 2 = 8$ euros

Ces étapes reviennent à multiplier le prix initial par $1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$.

Vérifions, $10 \times 0,8 = 8$. Nous obtenons bien le même prix.

Exercices : Diminue les différentes grandeurs du pourcentage indiqué.

Grandeur	Diminution	Calculs	Résultat
100	10%		
20	1%		
400	25%		
5	95%		
55	75%		

1.3 Mise en situation - intérêt simple

Une personne décide de placer son argent, 1000 euros, à la banque sur un compte d'épargne. La banque lui promet un taux d'intérêt fixe de 4% si cette personne ne touche pas à l'argent sur son compte pendant 10 ans.

1. Complète le tableau suivant.

Années	Intérêt annuel		Somme totale des intérêts		Capital total	
	Calculs	Total	Calculs	Total	Calculs	Total
1						
2						
3						
10						
.						
n						

2. En te basant sur l'expression du capital après 1 an, exprime le capital après 2 ans et 10 ans en fonction du capital initial C_0 et du taux d'intérêt i .

— $C_1 = C_0 + i \times C_0$

— $C_2 =$

— $C_{10} =$

3. Comment pourrait-on généraliser le calcul ? Quelle serait la formule pour calculer le capital C_n en fonction du taux d'intérêt i et du capital de départ C_0 ?

$C_n = \dots\dots\dots$

4. Exprime le capital après un an, deux ans et 10 ans en fonction du capital de l'année précédente.

— $C_1 = C_0 +$

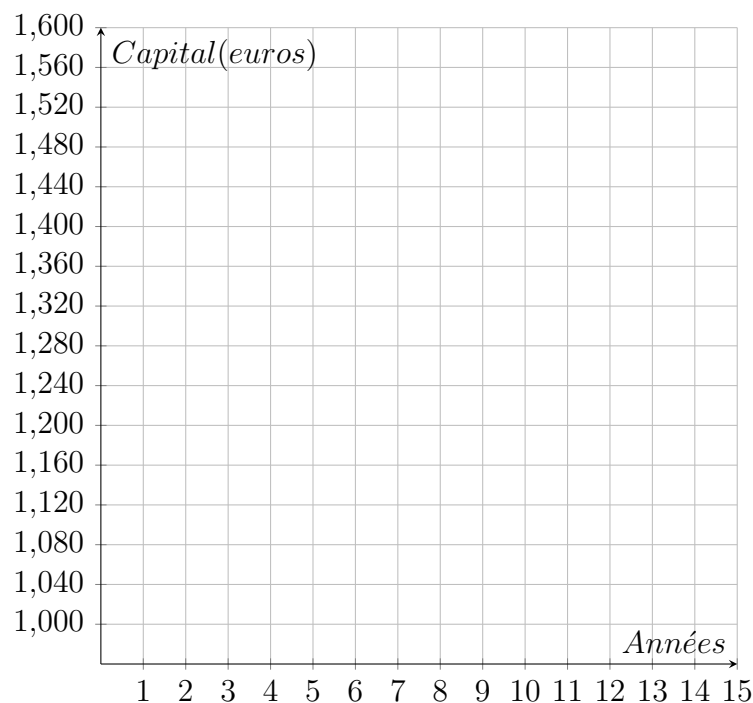
— $C_2 = C_1 +$

— $C_{10} =$

5. Comment pourrait-on exprimer le capital C_{n+1} en fonction du capital de l'année précédente C_n ?

$C_{n+1} = \dots\dots\dots$

5. Trace le graphique de l'évolution du capital dans le temps dans le plan ci-dessous.



1.4 Intérêts simples

Définition

Un capital est dit placé à un taux d'intérêt simple lorsque les intérêts ne s'ajoutent pas au capital pour porter eux-mêmes intérêt.

Propriétés

Les intérêts gagnés sont proportionnels à la durée du placement.

Notations

- C_n est le capital après n périodes d'intérêt. Exemple : C_0 est le capital initial, C_2 est le capital augmenté de deux périodes d'intérêts.
- i est le taux d'intérêt. Il est exprimé en %.
- n est la durée (nombre de périodes d'intérêt) pendant laquelle le capital est placé.

Calcul du capital final

Si on place un capital initial C_0 à un taux d'intérêt simple annuel de $i\%$, le capital après n années, noté C_n s'élèvera à :

$$C_n = C_0 + n \times i \times C_0.$$

Rappel

Prendre x % d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Appliquer un taux d'intérêt de $i\%$ à un capital revient à le multiplier par $\frac{i}{100}$.

Exemple

Prendre 5% d'un capital de 2000 euros se calcule comme ceci : $\frac{5}{100} \times 2000 = 100$.

Exemples :

Soit un capital initial C_0 de 2500 euros placé à un taux d'intérêt simple de 2% par an.
Quel est le capital après 2 ans ? 3 ans ? 5 ans ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Si on souhaite calculer le capital C_{n+1} à la fin d'une année en fonction du capital de l'année précédente C_n , du capital initial C_0 et du taux d'intérêt i , celui-ci s'exprimera comme suit :

$$C_{n+1} = C_n + i \times C_0.$$

En effet, le nouveau capital C_{n+1} sera égal au capital de l'année précédente C_n augmenté des intérêts d'une année $i \times C_0$.

Exemples :

Si on reprend l'exemple précédent et qu'on souhaite calculer C_3 sachant que $C_2 = 2600$, $C_0 = 2500$ et que $i = 2\%$. On calcule :

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 + 0,02 \times 2500 \\ C_3 &= 2600 + 50 \\ C_3 &= 2650 \end{aligned}$$

Le capital après trois années d'intérêts s'élèvera à 2650 euros, ce qui correspond bien à la valeur que nous avons trouvé précédemment.

Représentation et résolution graphiques

Pour avoir une vue d'ensemble de l'évolution d'un capital placé à intérêt simple, on peut la représenter par un graphique.

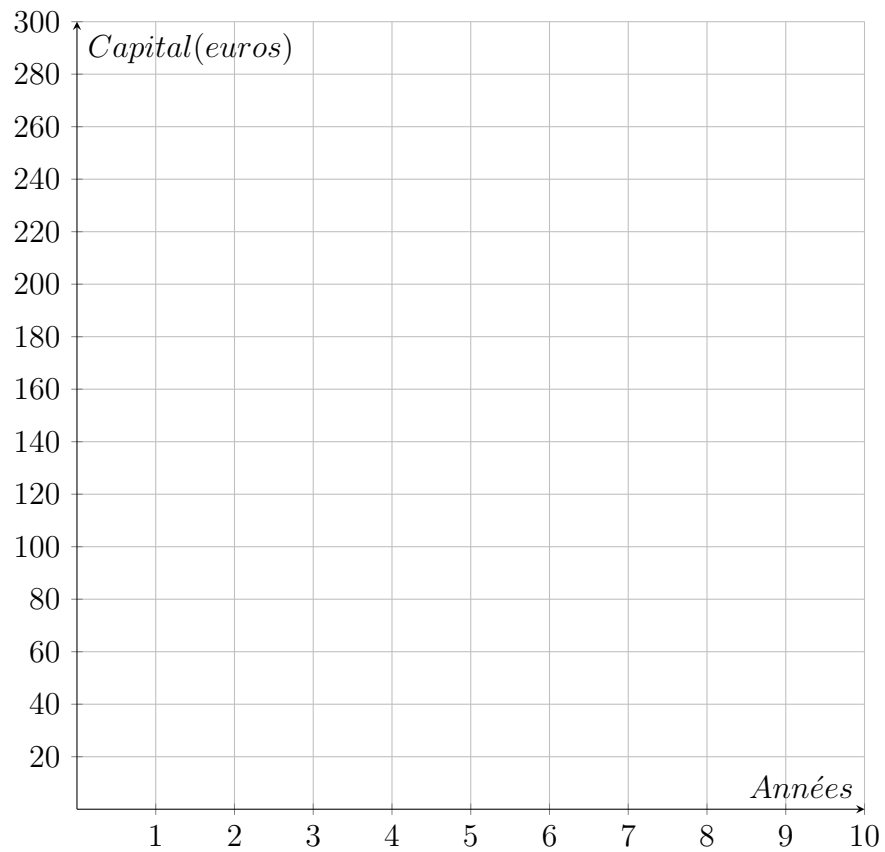
Soit un capital de 100 euros placé à un taux d'intérêt de 2%.

1. Exprime le capital final en fonction du nombre de périodes pendant lequel le capital est soumis aux intérêts.

2. A quoi ressemblera le graphique de cette fonction ?

.....

3. Trace le graphique dans le plan ci-dessous.



4. Que vaut la pente de la droite ? A quoi correspond-elle ?

.....

5. En te basant sur le graphique, complète le tableau suivant :

Années	1	2	5	7	10
Capital					

6. En te basant sur la formule du capital final, calcule le capital après 20 ans, et après 50 ans.

(a) $C_{20} =$

(b) $C_{50} =$

Calculer le capital initial, la durée de placement ou le taux d'intérêt

Pour trouver la valeur d'une variable inconnue à partir des autres grandeurs connues dans une formule, il faut :

1. Remplacer dans la formule toutes les variables dont la valeur est connue.
2. Résoudre l'équation par rapport à la variable inconnue.

1. Comment calculer la durée n de dépôt d'un capital à taux d'intérêt simple à partir du capital initial C_0 , du capital final C_n et du taux d'intérêt i ?

Exemple : Si $C_0 = 2000$, $C_n = 2060$ et $i = 1\%$, il suffit de :

- (a) Remplacer dans la formule les variables par leur valeurs.

$$C_n = C_0 + n \times i \times C_0$$

.....

- (b) Résoudre l'équation :

.....

.....

.....

2. Comment calculer le taux d'intérêt simple i à partir du capital initial C_0 , du capital final C_n et du temps de dépôt n ?

Exemple : Si $C_0 = 2000$, $C_n = 2080$ et $n = 2$, il suffit de :

- (a) Remplacer dans la formule les variables par leur valeurs.

$$C_n = C_0 + n \times i \times C_0$$

-
- (b) Résoudre l'équation :

-
-
-
3. Comment calculer le capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt simple à partir du capital final C_n , du taux d'intérêt i et de la durée de dépôt n ?

Exemple : Si $C_n = 108000$, $n = 4$ et $i = 2\%$, il suffit de :

- (a) Remplacer dans la formule les variables par leur valeurs.

$$C_n = C_0 + n \times i \times C_0$$

-
- (b) Résoudre l'équation :

.....

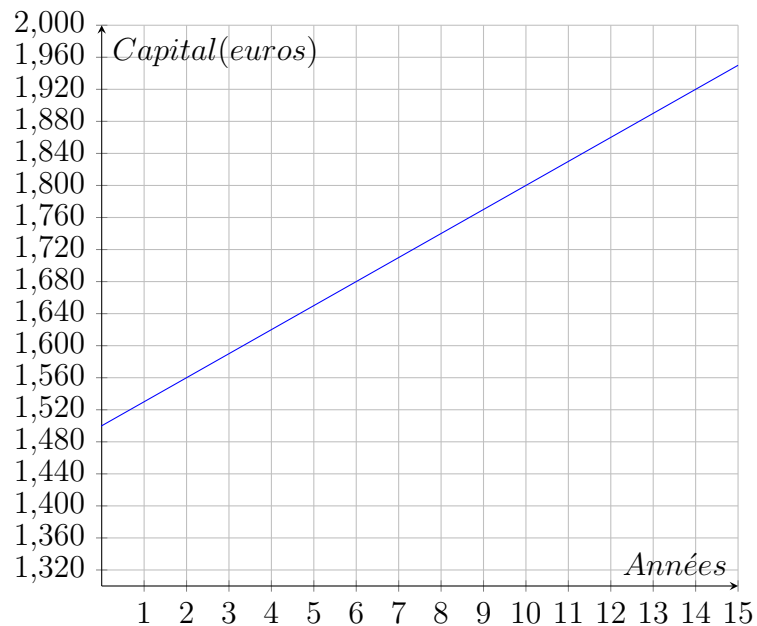
.....

Exercices

1. Si je place un capital de 2000 euros à un taux d'intérêt simple de 2%,
(a) combien d'intérêts aurais-je gagné après 7 ans ?

-
- (b) Quel sera mon capital total si je retire tous mon argent après 15 ans ?
-

2. Soit le graphique associé à l'évolution d'un capital soumis à un taux d'intérêt simple.



- (a) Quel est mon capital initial C_0 ?
-

(b) Quel sera mon capital après 6 ans ?

.....

(c) Combien de temps devrais-je laisser mon argent en banque avant d'avoir 1920 euros au total ?

.....

3. Mon compte épargne m'indique une somme de 1950 euros. Je me souviens que j'avais un capital de départ de 1500 euros et que je l'ai placé à un taux d'intérêt de 1%. Combien de temps ai-je laissé mon capital sur mon compte épargne ?

.....

.....

.....

.....

4. Soit un capital final C_n de 3360 euros qui est le résultat d'un placement long de 6 ans à un taux d'intérêt simple égal à 2%. Quel était le capital de départ ?

.....

.....

.....

.....

5. Soit un capital initial $C_0 = 1500$ euros, qui après avoir été placé pendant 7 ans à intérêts simples est devenu un capital C_7 de 1710 euros. A quel taux d'intérêt a-t-il été placé ?

.....

.....

.....

.....

6. Tu veux t'acheter la dernière PS5 qui coûte 750 euros. Seulement, tu ne veux pas toucher à ton argent que tu as placé (1000 euros) en banque. Combien de temps devras-tu attendre pour pouvoir l'acheter avec seulement les intérêts si ton taux d'intérêt est de 5% ?

.....

.....

.....

7. Complète le tableau suivant :

Capital initial	Taux d'intérêt annuel	Temps de dépôt	Capital final	Calculs
EUR	%	Année	EUR	
1000	2	3		
4000	4	6		
	1	3	30900	
	2	4	2160	
1000	1		1090	
2500	4		3000	
1000		2	1080	
2000		4	2240	