Cours de mathématiques 2022/2023 - 5PA

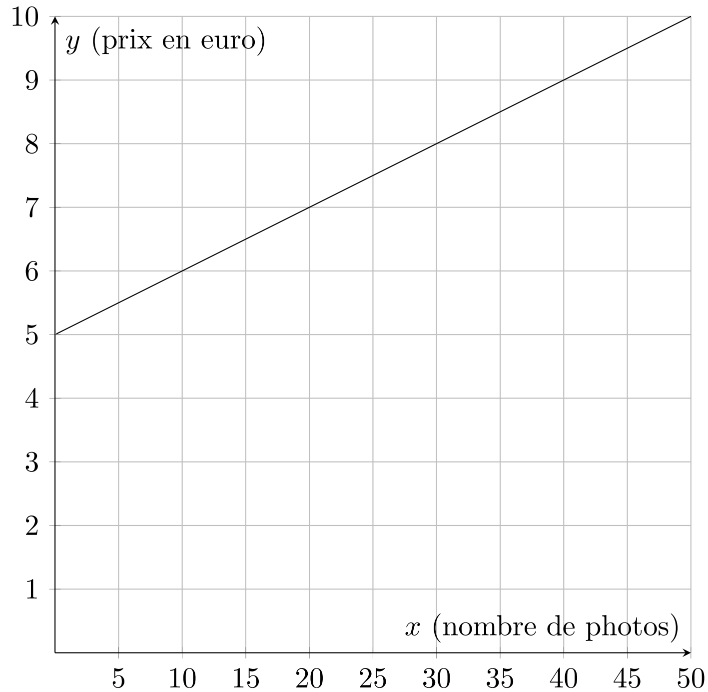
Arthur Paquot

CHAPITRE 1

Tableaux, graphiques, formules - La fonction du premier degré

1.1 Mise en situation

Soit un site internet proposant un service d'impression de photos. Chaque photo développée coûte 10 centimes et les frais de ports sont de 5 euros peu importe le nombre de photos commandé. Le prix total à payé en fonction du nombre de photos est représenté dans le graphique ci-dessous.



Sur base du graphique, réponds aux questions suivantes :

1. A l'aide des mots « prix » et « nombre de photos », complète la phrase suivante :

.... dépend du ....

2. Complète le tableau ci-dessous :

Nombre de photos	10		30		40
Prix		7		8,5	

3. Parmi les expressions suivantes, laquelle correspond à la situation décrite ci-dessus ? Entoure la réponse correcte.

(a) $Prix = 10 \times NombrePhotos$

(b) $NombrePhotos = 10 \times Prix + 5$

(c) $Prix = 0,1 \times NombrePhotos + 5$

(d) $Prix = NombrePhotos + 5$

4. Pour chacune des questions suivantes, indique si il est possible de trouver l'information avec le graphique de l'énoncé, le tableau de nombres de la question 2 et la formule de la question 3.

	Graphique	Tableau	Formule
Prix de 50 photos			
Prix de 31 photos			
Prix de 1000 photos			

Pour chacune des représentations, exprime quels sont ses avantages et ses inconvénients.

- Tableau de valeur :
  - Avantages : ....

    ....
  - Inconvénients : ....

    ....
- Graphique
  - Avantages : ....

    ....
  - Inconvénients : ....

    ....
- Fonction :
  - Avantages : ....

    ....
  - Inconvénients : ....

    ....

1.2 Les fonctions

Représentation d'une relation

Dans la mise en situation précédente nous avons illustré le fait qu'une relation entre deux grandeurs A et B appelées variables peut être représentée par :

1. Un **tableau** de valeurs qui associe les valeurs de B à celles de A.

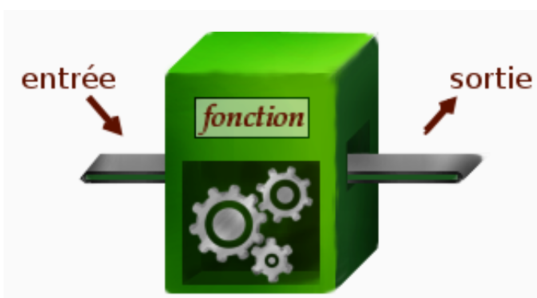
2. Un **graphique** qui représente l'ensemble des points de coordonnées (v_A, v_B) avec v_A et v_B les valeurs des variables A et B.

3. Une formule, que l'on appellera **fonction** par la suite, qui exprime le lien entre les deux variables.

Notion de fonction

Dans la mise en situation de ce chapitre, nous avons exprimé la relation entre le nombre de photos commandé et le prix de l'impression au moyen d'une formule. En mathématique, ce genre de formule est appelée **une fonction**.

Une fonction peut être vue comme une machine, appelée f, qui prend en entrée une valeur, un nombre réel et donne aussi en sortie une valeur (différente ou pas). La valeur d'entrée est souvent appelée x et la valeur de sortie est appelée $f(x)$ ou encore **l'image de x par la fonction f**.



Dans l'exemple d'introduction, la machine f est celle qui associe au nombre de photos le prix de l'impression.

Écris l'expression $Prix = 0,1 \times NombrePhotos + 5$ en utilisant la notation des fonctions, c'est à dire en utilisant $f(x)$ et x. Comment choisir qui est x et qui est $f(x)$?

J'ai choisi .... pour $f(x)$ car ....

Les fonctions du premier degré

Cette année nous allons seulement étudier les fonctions du premier degré, c'est à dire les fonctions dont l'expression contient une variable de degré 1.

Fonction du premier degré

Un **fonction du premier degré** s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$ avec $a \in \Re_0, b \in \Re$.

Note : Une autre notation pour une fonction du premier degré est $y = mx + p$. Elle est parfaitement équivalente à $f(x) = ax + b$.

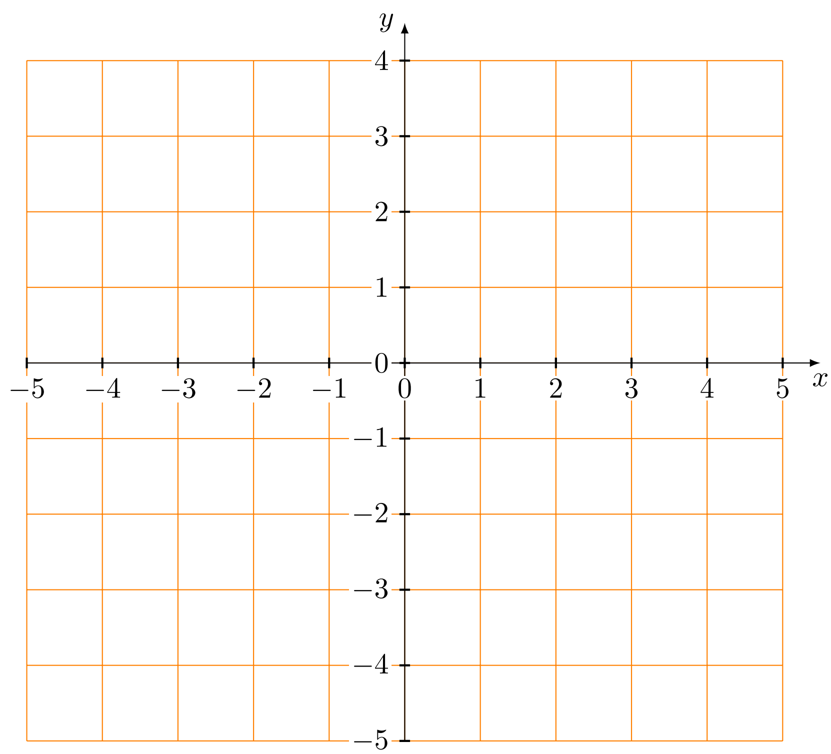
Représentation graphique

Les fonctions sont souvent représentées graphiquement dans le plan grâce à un repère cartésien.

Repère cartésien

Un **repère cartésien** est constitué de deux droites sécantes (le plus souvent perpendiculaires) et graduées. L'axe horizontal est appelé **axe des abscisses** tandis que l'axe vertical est appelé **axe des ordonnées**.

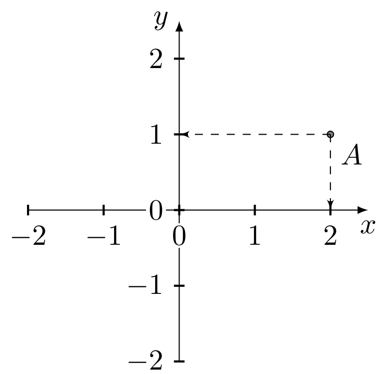
Exemple :



Coordonnées d'un point

La position d'un point est représentée dans le plan cartésien grâce à ses **coordonnées**. Les coordonnées d'un point A sont le couple de valeur (x_A, y_A) avec x_A **l'abscisse** du point A et y_A **l'ordonnée** du point A.

Exemple : Le point A a pour coordonnée $(2, 1)$.



Abscisse

L'abscisse d'un point est sa coordonnée horizontale. Elle est représentée par la lettre x.

Dans l'exemple, l'abscisse de A est $x =$ ....

Ordonnée

L'ordonnée d'un point est sa coordonnée verticale. Elle est représentée par la lettre y.

Dans l'exemple, l'ordonnée de A est $y =$ ....

Représentation d'une fonction du premier degré

Une fonction du premier degré $y = mx + p$ (ou $f(x) = ax + b$) est représentée graphiquement par **une droite**.

Tracer le graphique d'une droite

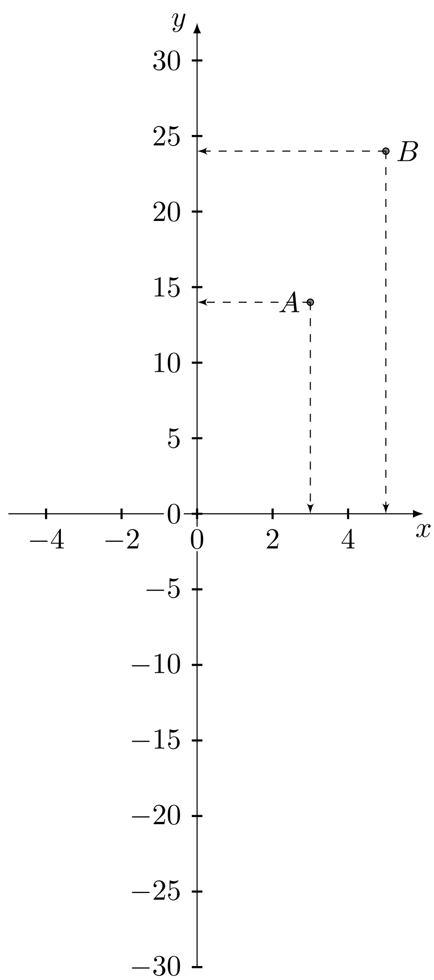
Pour tracer le graphique d'une droite, il suffit de connaître les coordonnées de deux points appartenant à la droite et de les relier entre eux.

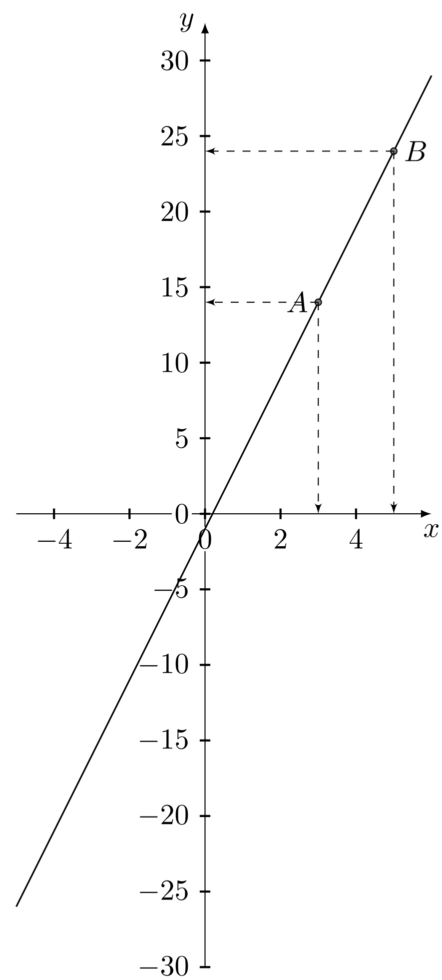
1. Si on veut tracer une droite à partir du tableau de valeurs associé, on choisit deux couples de valeurs parmi celles disponibles et on trace la droite passant par les deux points.

   Exemple : Pour tracer la droite associée à ce tableau de valeurs :

x	1	3	5	10
y	4	14	24	49

   On choisit deux couples de valeurs : $A(3, 14)$ et $B(5, 24)$. On les place dans un repère et ensuite on trace la droite passant par les deux points.





2. Si on veut tracer une droite à partir de sa formule, il faut aussi trouver deux points appartenant à cette droite. Pour ce faire, on choisit deux abscisses (généralement $x = 0$ et $x = 1$ car ce sont les plus faciles à calculer, mais pas toujours) et on trouve la valeur de l'ordonnée en substituant les abscisses choisies dans la formule.

   Exemple : Soit l'équation de droite suivante $y = -2x + 3$.

   Je remplace dans l'équation x par 0.

$$y = -2 \times 0 + 3 \tag{1.1}$$
$$y = 3 \tag{1.2}$$

   J'ai trouvé un premier point $A(0, 3)$.

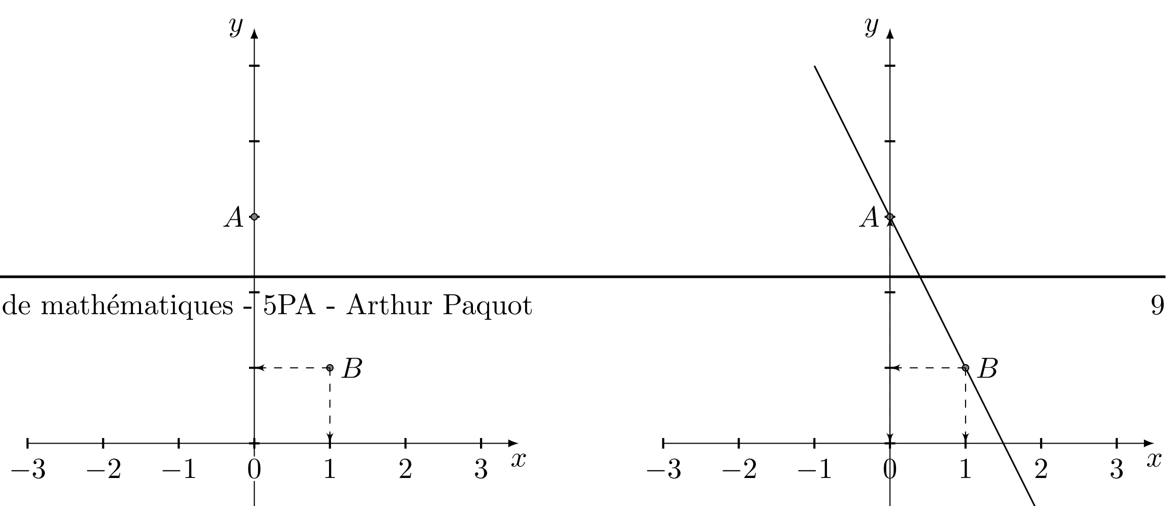
   Je remplace dans l'équation x par 1.

$$y = -2 \times 1 + 3 \tag{1.3}$$
$$y = 1 \tag{1.4}$$

   J'ai trouvé un second point $B(1, 1)$.
   Cela revient à compléter le tableau suivant :

x	0	1
y	3	1

   Je peux maintenant tracer la droite passant par A et B.



Exemple :

Soit un opérateur de téléphonie qui propose l'internet mobile à un tarif composé d'un coût fixe de connexion et un prix par mégabyte utilisé. Si le prix de connexion est de 10 cents et que le prix par Mb est de 2 cents,

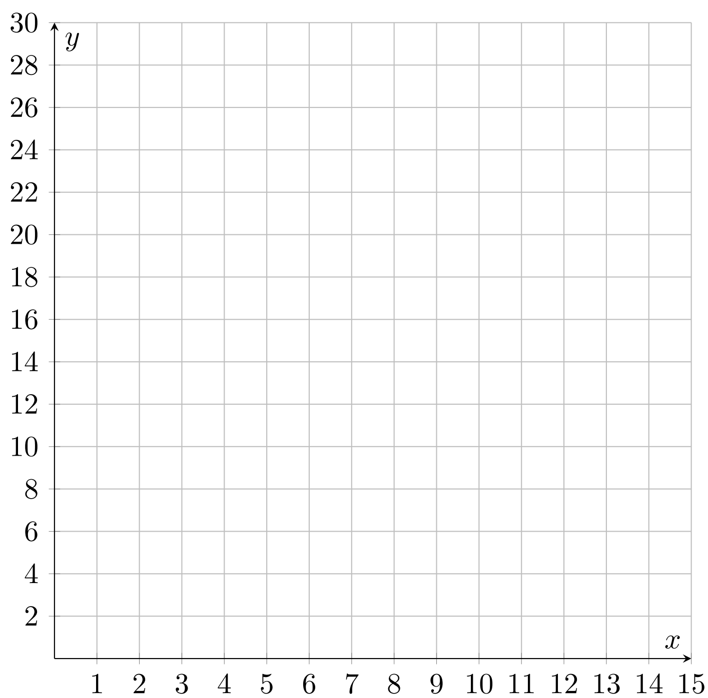
1. Quelle grandeur sera $f(x)$ (ou y) et quelle grandeur sera x ?

2. quelle est l'expression de la fonction correspondant à la situation ?

3. Complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	10
f(x)					

4. Place les différents points trouvés dans le repère ci-dessous et relie les au moyen d'une latte.



5. Pour chacune des situations suivantes, donne l'expression de la nouvelle fonction et trace son graphique dans le même repère que la fonction précédente :

   (a) L'opérateur décide de faire une promotion et diminue le prix du mégabyte à un cent.

   $f_2(x) =$

x	0	2	4	6
f(x)				

   (b) C'est la crise. L'opérateur est obligé d'augmenter ses prix, le mégabyte passe maintenant à 5 cents.

   $f_3(x) =$

x	0	2	4	6
f(x)				

6. Quelle est l'influence du prix du mégabyte sur l'allure de la droite ?

   ....

   ....

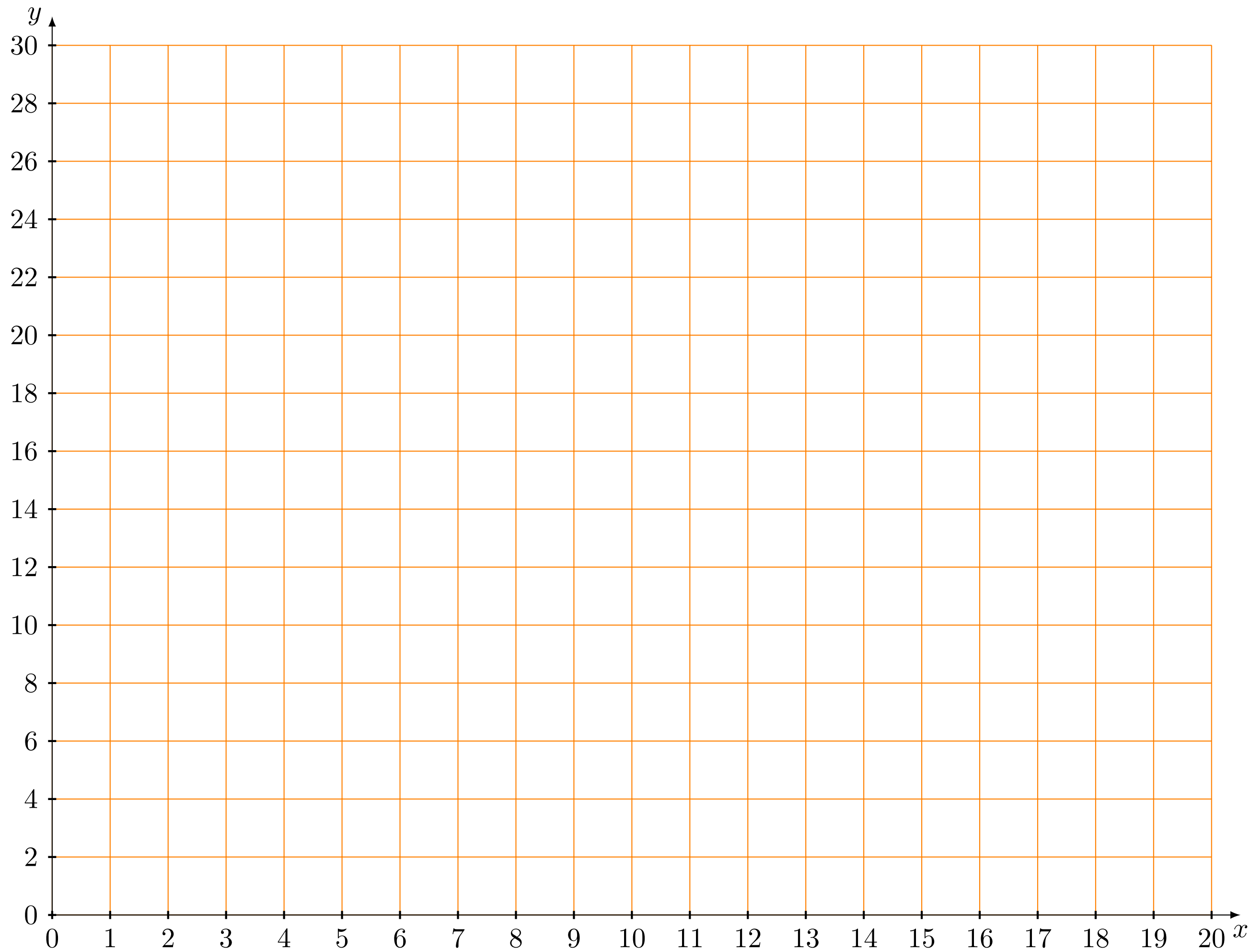
7. Dans le repère ci-dessous, retrace le graphique de la fonction avec les prix de base ainsi que ceux des situations suivantes :

   (a) L'opérateur décide de faire une promotion et diminue le prix de la connexion à 6 cents.

   $f_4(x) =$

   (b) C'est la crise. L'opérateur est obligé d'augmenter ses prix, la connexion passe maintenant à 12 cents.

$f_5(x) =$



8. Quelle est l'influence du prix de la connexion sur l'allure des droites ?

....

....

La pente d'une droite

Pente d'une droite

La pente d'une droite, appelée aussi coefficient angulaire, est un nombre qui permet de décrire à la foi le sens de l'inclinaison de la droite (si elle monte ou descend) et la force de cette inclinaison (pente forte ou pas).

Calcul

Soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ appartenant à la même droite, la pente de cette droite est :

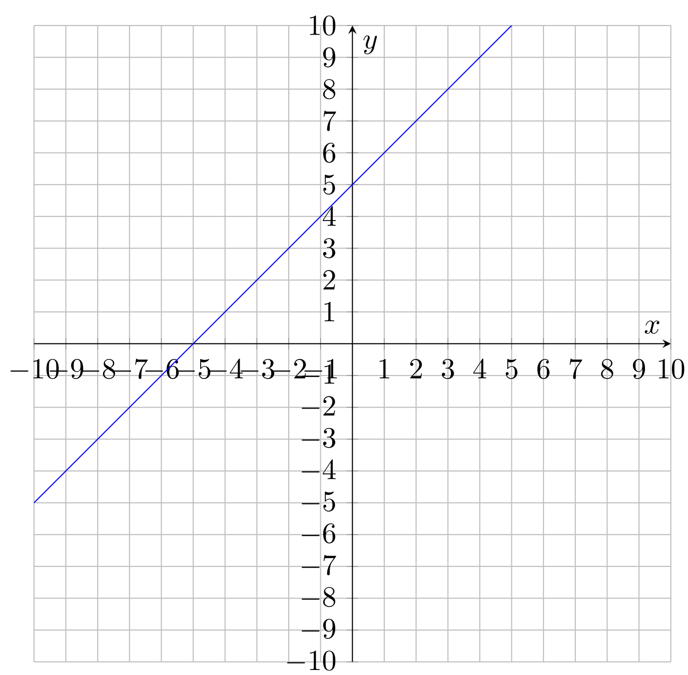
$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Valeur depuis l'équation de la droite

Soient une droite d'équation $y = mx + p$, la pente de cette droite est égale à m.

Exemple :

Sur base du graphique ci-dessous, réponds aux questions suivantes :



1. Trouve les coordonnées de deux points de la droite :

....

2. Calcule la pente à partir de ces coordonnées.

....

3. Trouve la fonction associée à cette droite parmi les suivantes :

   (a) $f(x) = 4x + 5$

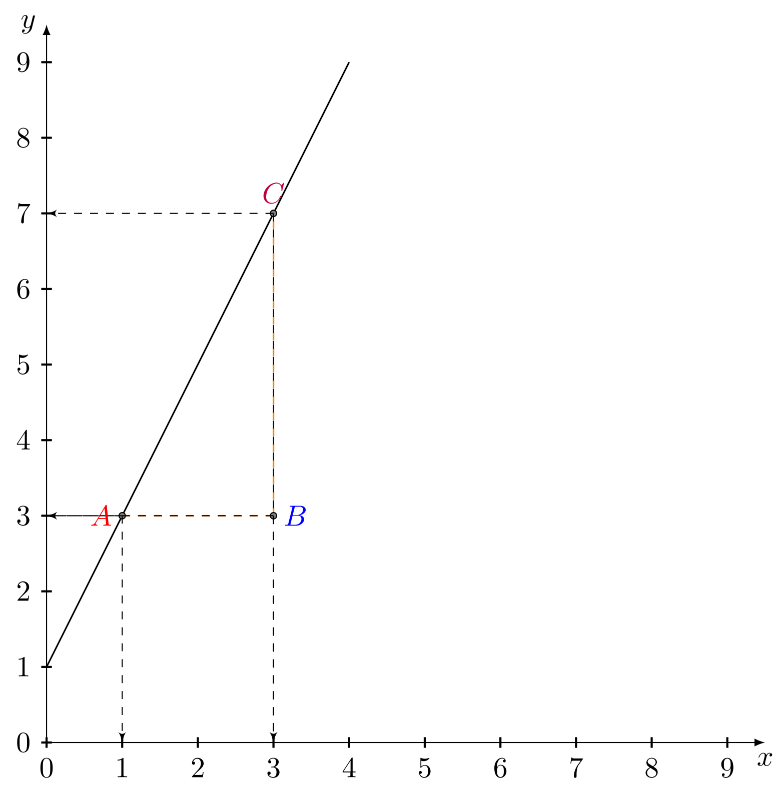
   (b) $f(x) = 3x + 5$

   (c) $f(x) = 2x + 5$

   (d) $f(x) = x + 5$

Une façon plus graphique de calculer la pente est de prendre deux points qui appartiennent à la droite et de tracer le triangle rectangle ayant la droite pour hypoténuse.
La pente est égale au rapport des longueurs du côté du triangle : $m = \dfrac{C_y}{C_x}$ avec C_y le côté parallèle à l'axe des ordonnées et C_x le coté parallèle à l'axe des abscisses.

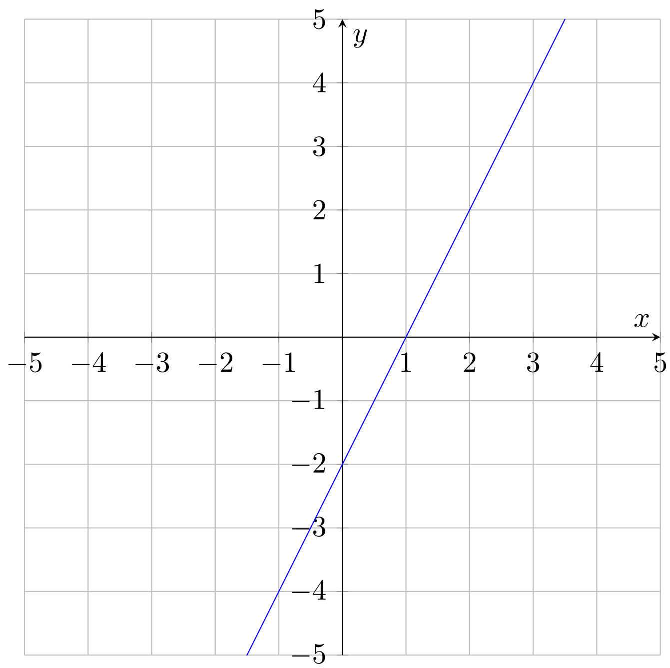
Exemple :



La pente de la droite est $m = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Pour trouver la pente d'une droite à partir du tableau de valeurs associé, il suffit de voir de combien augmentent les ordonnées chaque fois que l'abscisse augmente de 1.

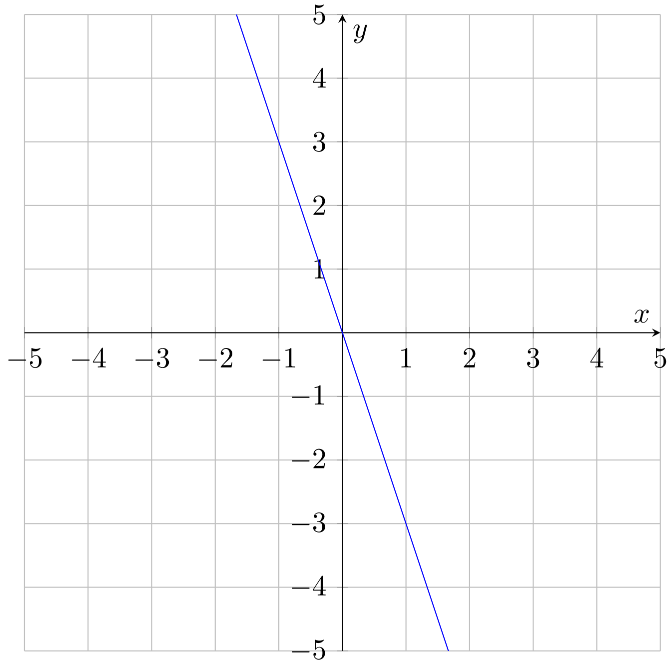
Exemple :



Soit le tableau des valeurs prises par la fonction.

x	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8

Dans ce tableau-ci, chaque fois que l'on augmente l'abscisse de 1, on .... l'ordonnée de .... unités. La pente est égale à .....



Soit le tableau des valeurs prises par la fonction.

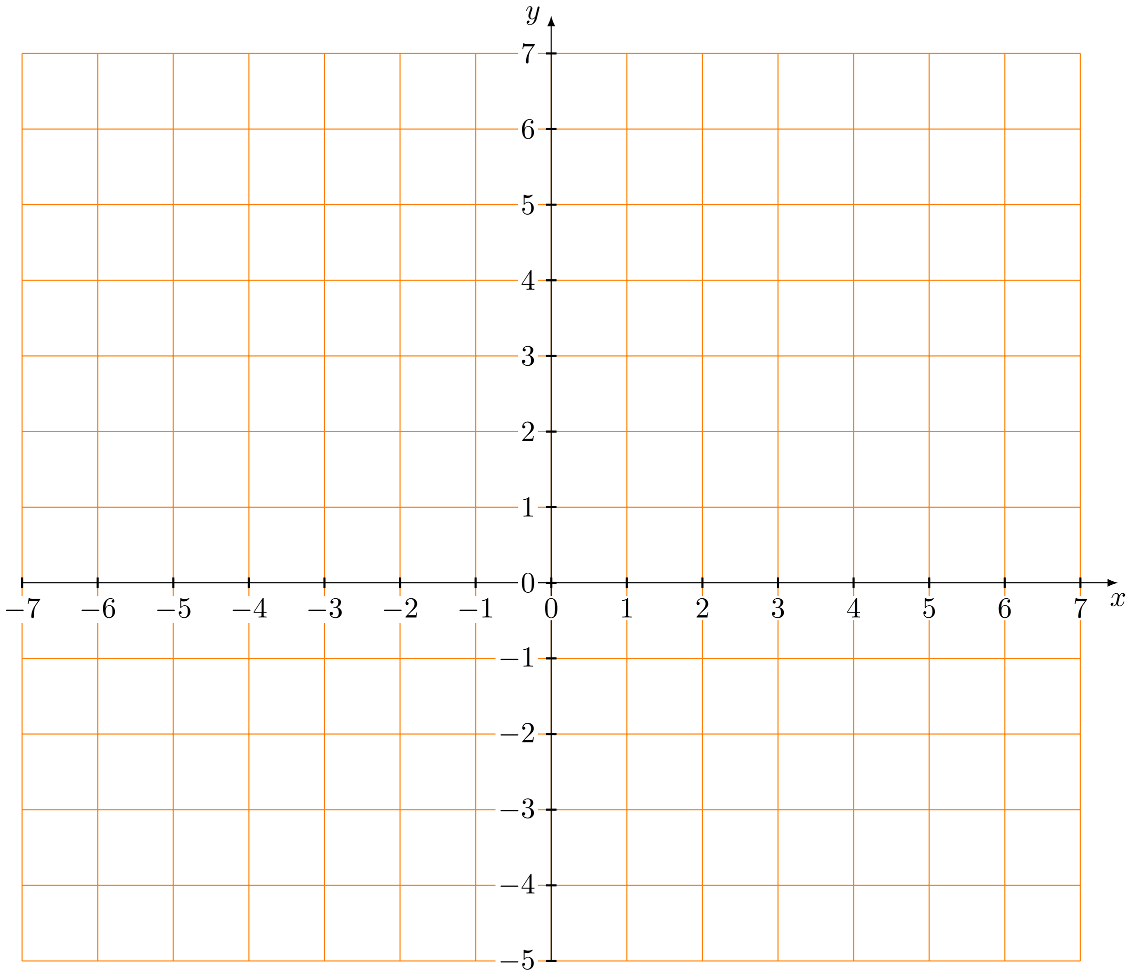
x	1	2	3	4	5
y	-3	-6	-9	-12	-15

Dans ce tableau-ci, chaque fois que l'on augmente l'abscisse de 1, on .... l'ordonnée de .... unités. La pente est égale à .....

Influence de la pente sur le graphique d'une droite

Trace dans le même repère cartésien les droites suivantes :

$$f(x) = x \mid g(x) = 2x \mid h(x) = 3x \mid i(x) = 5x$$



Que remarques-tu ?

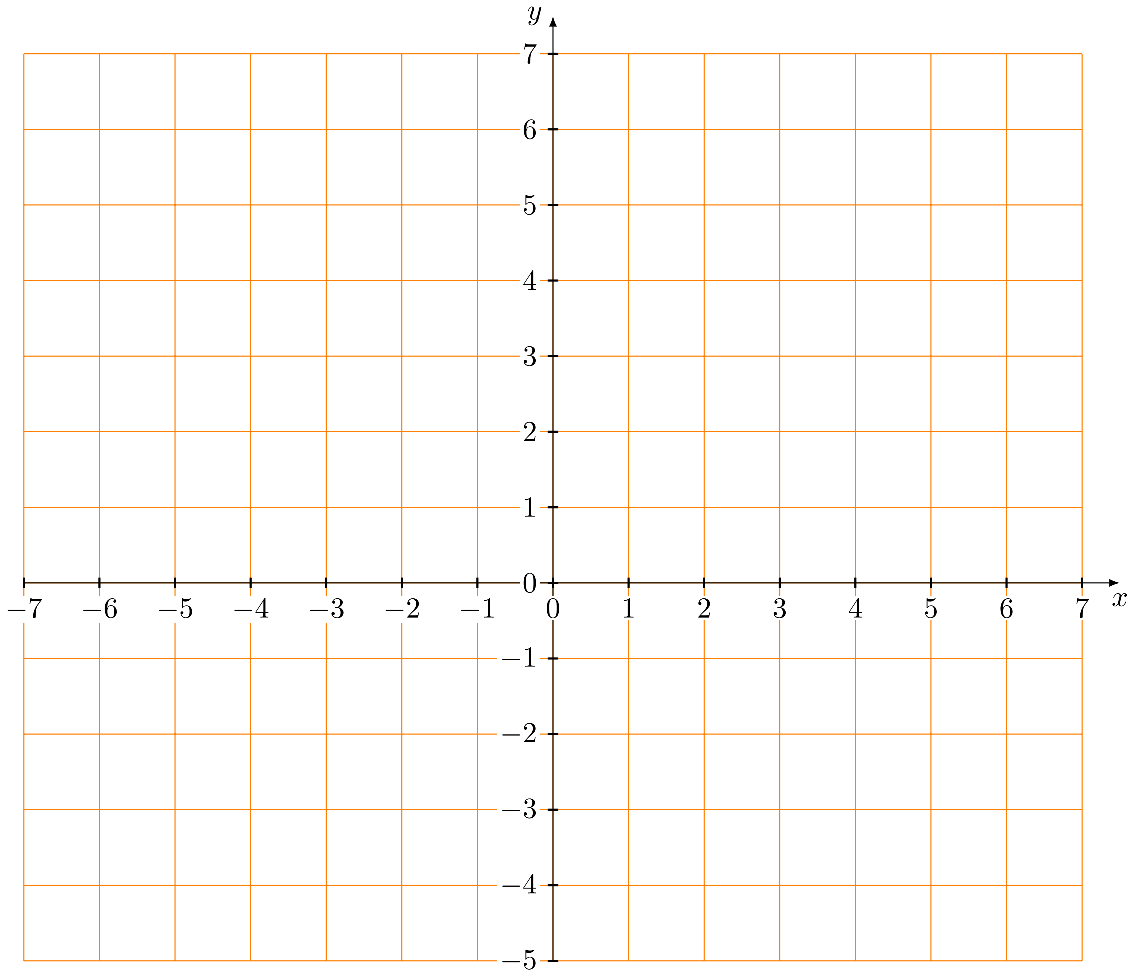
....

Quel est le lien avec la pente de ces droites ?

....

Trace dans le même repère cartésien les droites suivantes :

$$f(x) = 2x \;\Big|\; g(x) = 2x - 2 \;\Big|\; h(x) = 2x + 2 \;\Big|\; i(x) = 2x + 3$$



Que remarques-tu ?

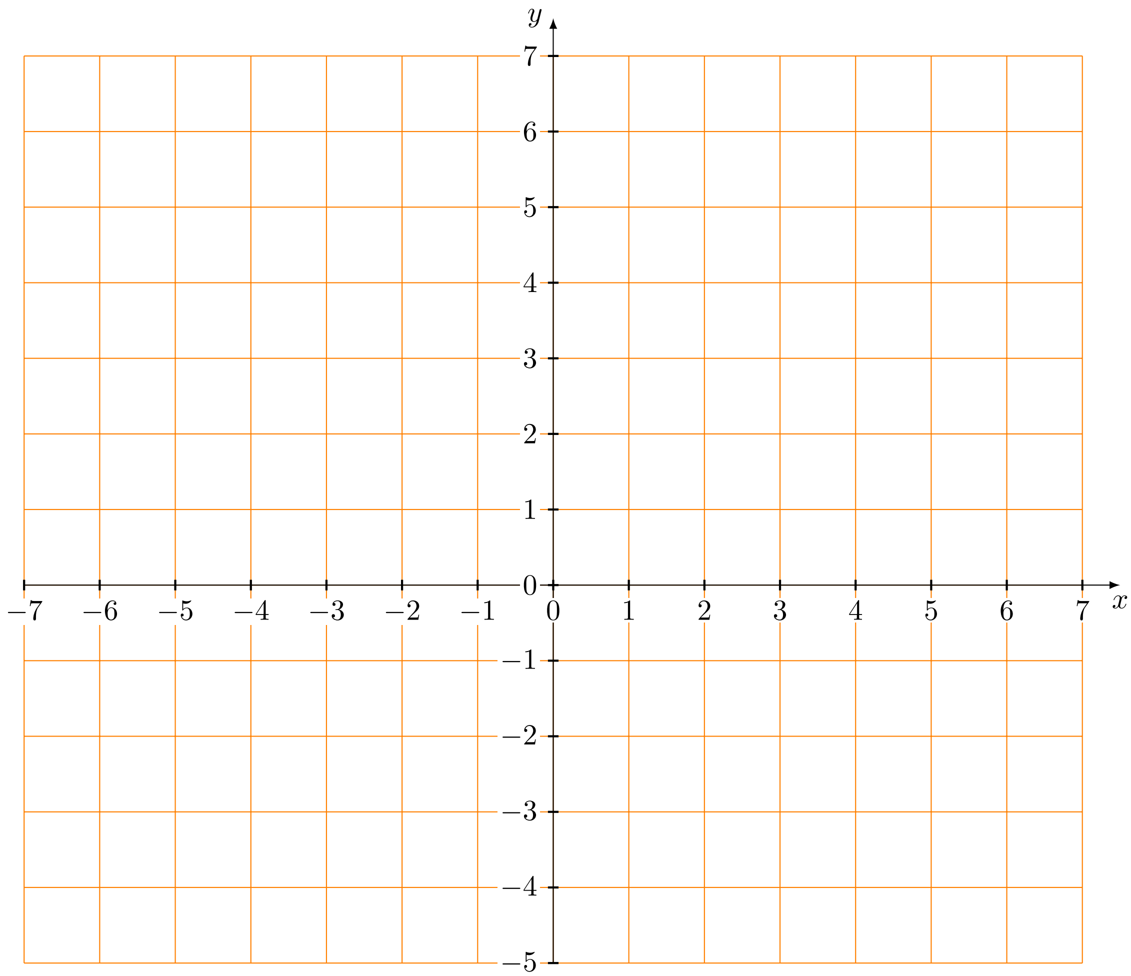
....

Quel est le lien avec la pente de ces droites ?

....

Trace dans le même repère cartésien les droites suivantes :

$$f(x) = 2x \;\Big|\; g(x) = -2x \;\Big|\; h(x) = x + 2 \;\Big|\; i(x) = -x + 10$$



Que remarques-tu ?

....

Quel est le lien avec la pente de ces droites ?

....

Exercices

1. Les situations suivantes peuvent être modélisées par des droites. Que vas-tu choisir pour x et $f(x)$? Justifie.
   (a) Tu roules à une vitesse constante de 50 km/h. Tu aimerais connaître la distance parcourue en fonction du temps que tu as roulé.

   ....

   (b) Tu veux envoyer un colis par la poste. Le tarif dépend de la masse du colis. Combien vas-tu payer ?

   ....

   (c) Si un magasin indique que tous les articles sont soldés à 50%. Tu aimerais exprimer la réduction obtenue.

   ....

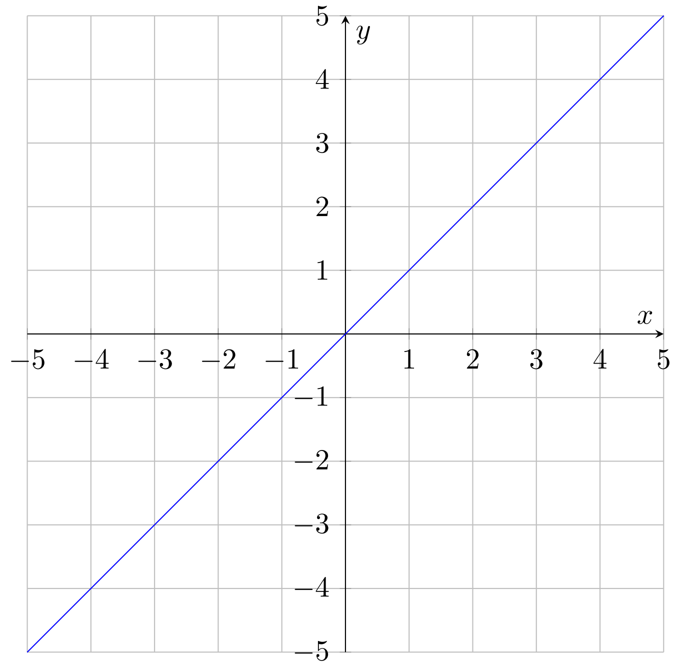
   (d) Modéliser la vitesse du vent et l'énergie produite par une éolienne.

   ....

2. Complète les différents tableaux en fonction du graphique associé.

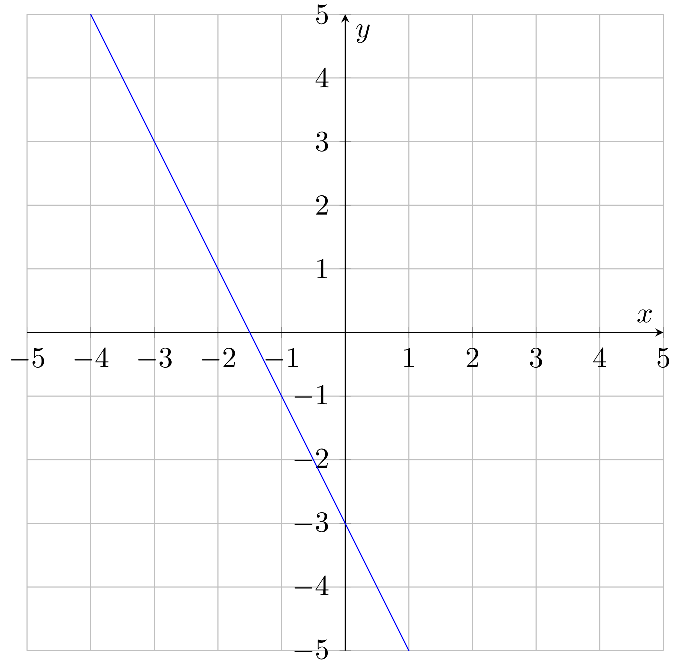
(a)

x	**y**
-2	
	-1
	0
3	
	5



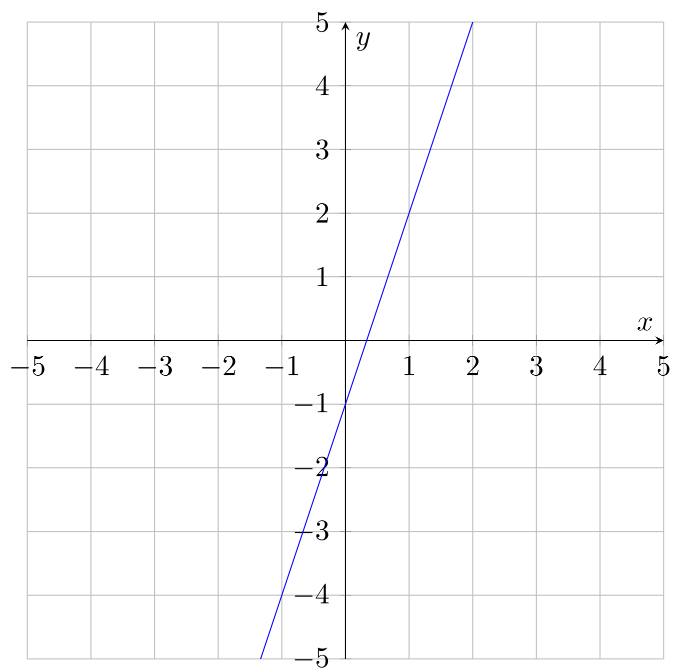
(b)

x	**y**
-2	
	3
1	
0	
	5



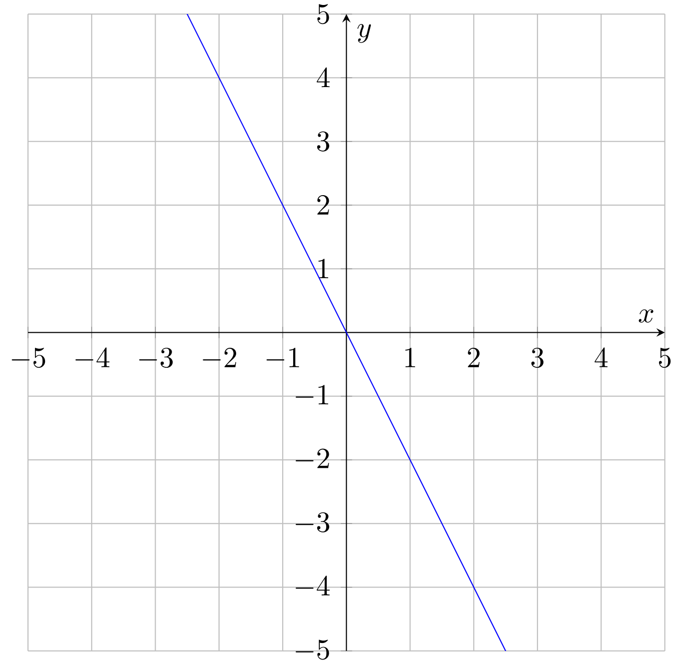
(c)

x	**y**
-1	
	-1
	2
0	
2	

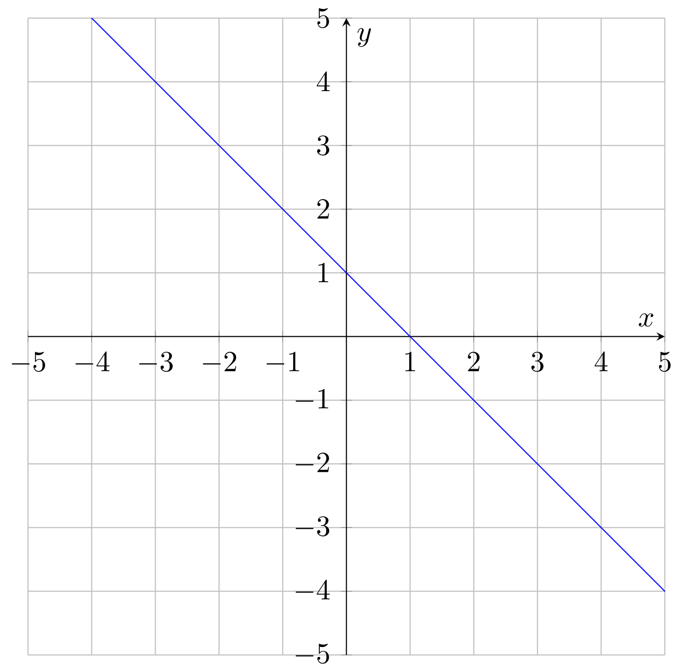


3. Associe les tableaux aux graphiques correspondant.

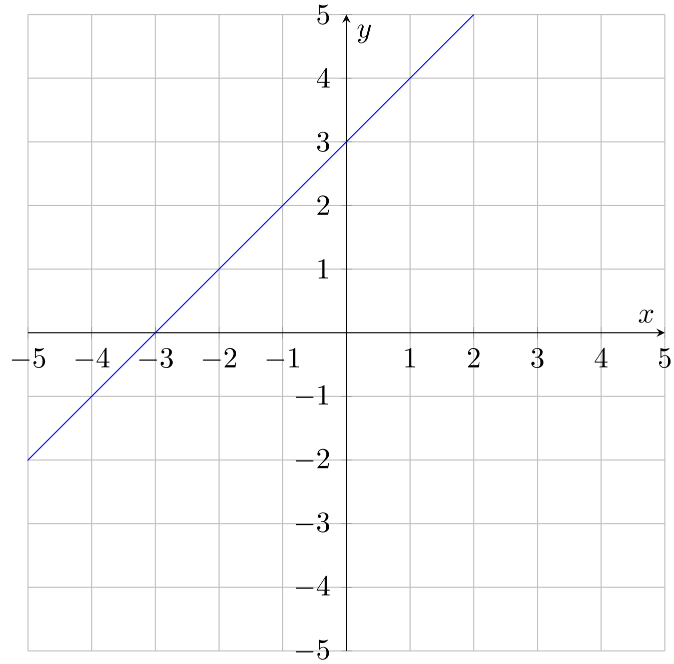
x	**y**
-1	2
0	3
1	4
2	5
3	6



x	**y**
-1	2
0	1
1	0
2	-1
3	-2



x	y
-1	2
0	0
1	- 2
2	-4
3	-6



4. Complète les tableaux en fonction des formules associées.

   (a) $f(x) = 2x + 2$

x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)						

   (b) $f(x) = 3 - x$

x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)						

   (c) $f(x) = -3x - 3$

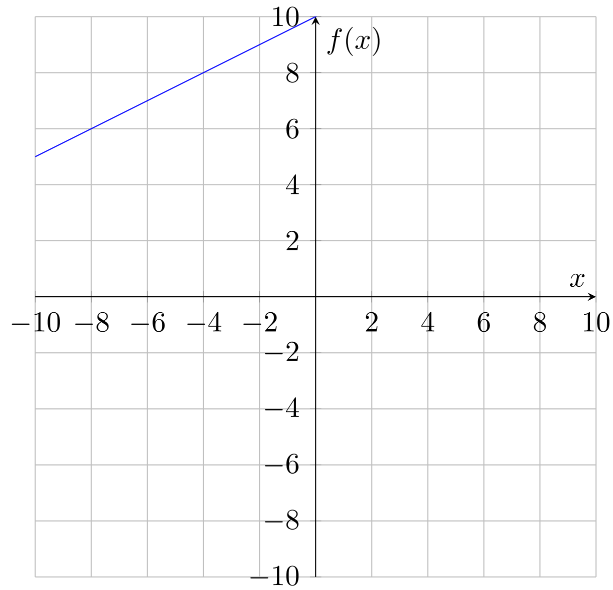
x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)						

(d) $f(x) = -x$

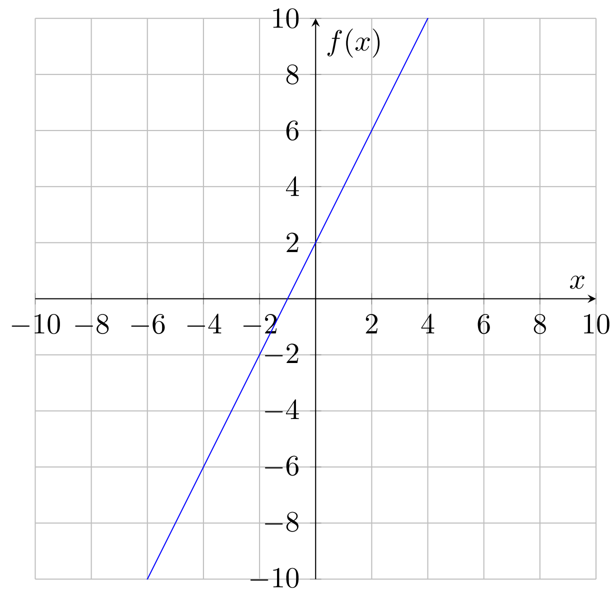
x	-10	-3	-1	0	2	8
f(x)						

5. Associe les fonctions à leur graphique.

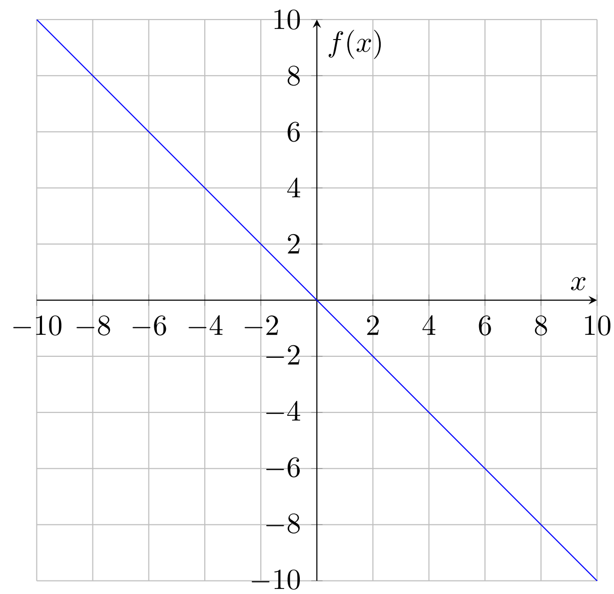
$f(x) = 2x + 2$



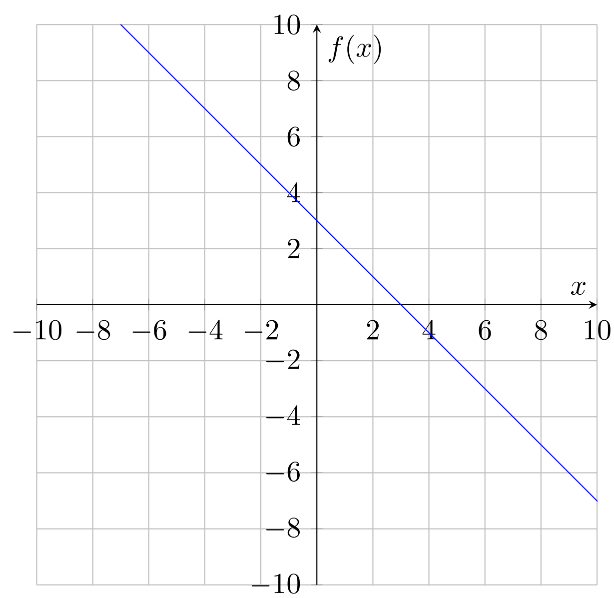
$f(x) = 3 - x$



$f(x) = \frac{x}{2} + 10$



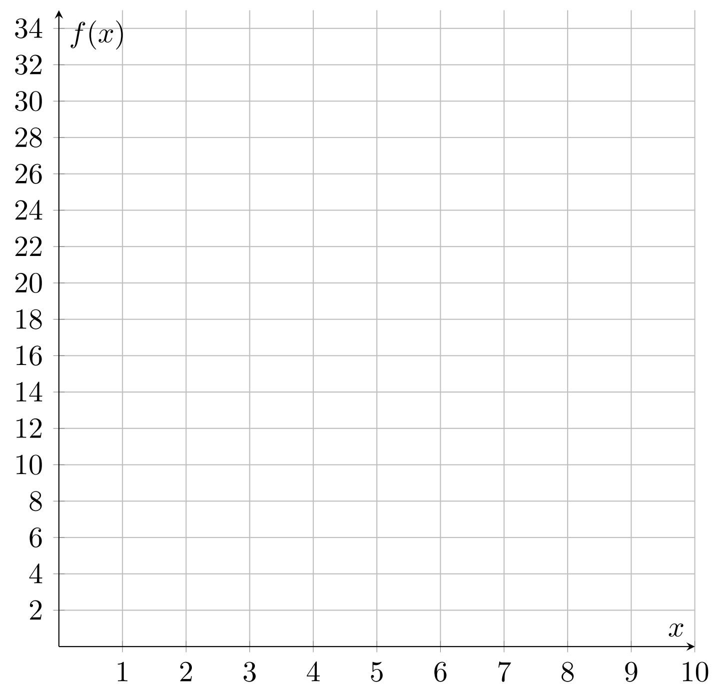
$f(x) = -x$



6. Abdel hésite entre deux opérateurs pour son abonnement de téléphone. Les formules tarifaires des deux entreprises sont les suivantes :

	Coût de connexion (cents)	Coût par mégabyte (cent/Mb)
Entreprise 1	10	2
Entreprise 2	2	3

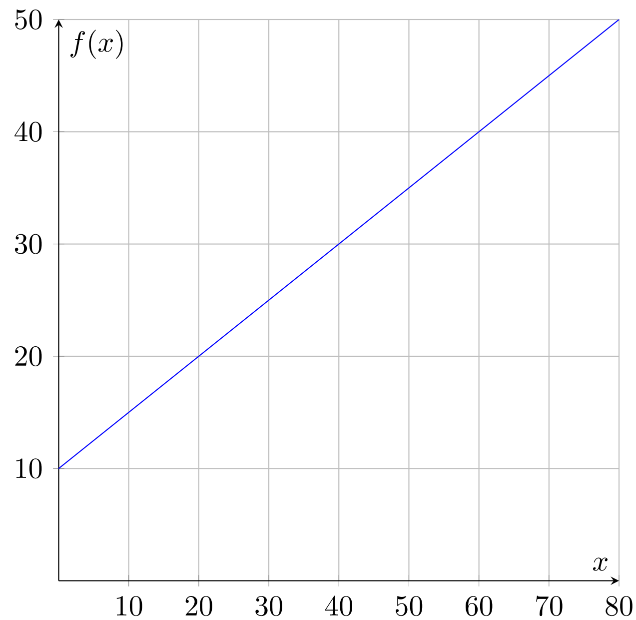
Sachant que lorsqu'il se connecte pour utiliser ses données mobiles, il utilise en moyen 5 Mb et qu'il dépasse très rarement les 8Mb, quelle entreprise conseillerais-tu à Abdel de choisir ? Justifie à l'aide d'un graphique.



....

....

7. Un automobiliste s'arrête dans une station-service pour faire le plein. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la quantité de carburant (en litres) se trouvant dans le réservoir au cours du remplissage en fonction du temps (en secondes). Voici le graphique représentant la situation lorsqu'on fait le plein de la voiture.



(a) Quelle variable vas-tu choisir pour x et pour $f(x)$?

....

(b) Quelle quantité de carburant se trouvait dans le réservoir en arrivant à la station service ?

....

(c) Quelle est la capacité du réservoir si l'automobiliste a fait le plein ?

....

(d) Combien de temps faut-il pour faire le plein ?

....

(e) Complète le tableau de nombres suivant en utilisant tes réponses précédentes.

x				
f(x)				

(f) Quel est le débit de la pompe en litres par secondes ?

....

8. Calcule la pente de la droite représentée par :

(a) ce tableau de valeur :

x	-3	-2	1	2
f(x)	5	15	30	35

....

....

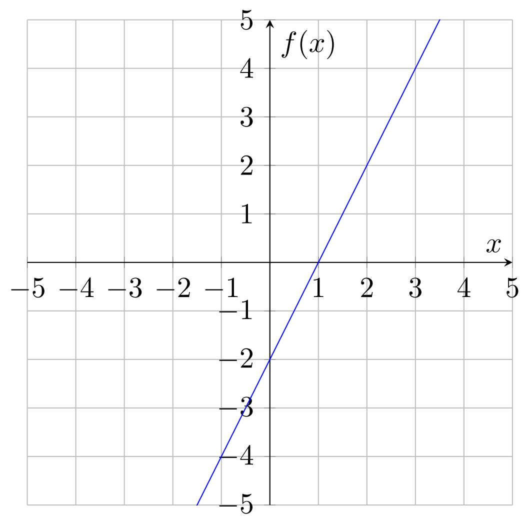
(b) ce tableau de valeur :

x	0	2	4	6
f(x)	5	1	-3	-7

....

....

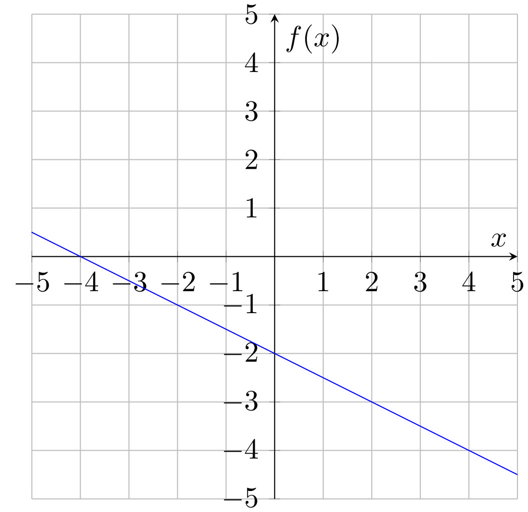
(c) Ce graphique :



....

....

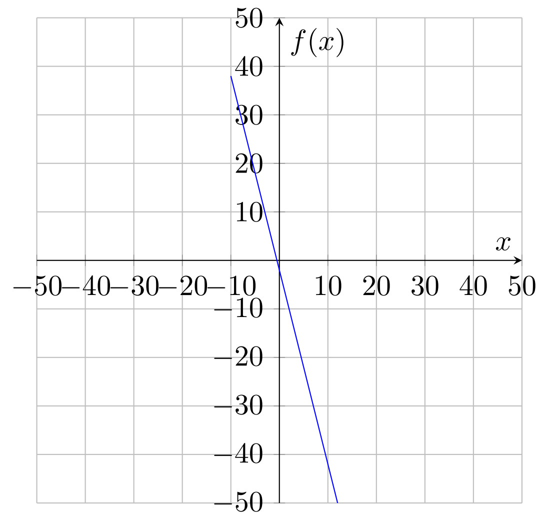
(d) Ce graphique :



....

....

(e) Ce graphique :



....

....

(f) Cette fonction : $f(x) = 3x + 5$

....

(g) Cette fonction : $i(x) = -x + 2$

....

(h) si la droite passe par les points $A(1, 3)$ et $B(-2, 0)$.

....

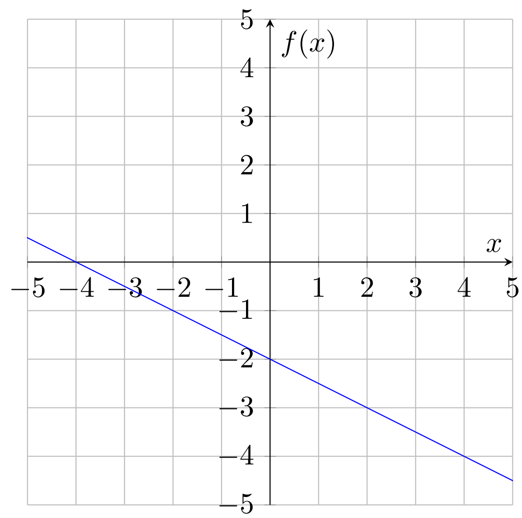
9. Parmi ces quatre fonctions, laquelle correspond au graphique ? Utilise la pente pour justifier ta réponse.

   (a) $f(x) = 3x - 2$

   (b) $g(x) = 5 - x$

   (c) $h(x) = -3x + 3$

   (d) $i(x) = \dfrac{-x}{2} - 2$

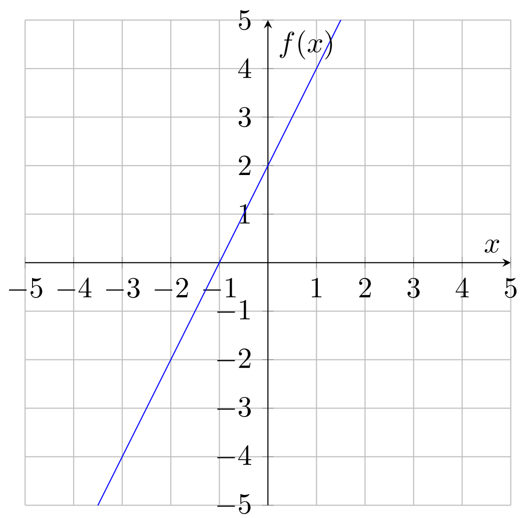


L'ordonnée à l'origine

Ordonnée à l'origine

L'ordonnée à l'origine du graphe d'une fonction désigne la valeur de l'ordonnée y lorsque l'abscisse x vaut 0.

Pour les fonctions du premier degré de la forme $y = mx + p$, l'ordonnée à l'origine est égale à p. En effet, si $x = 0$ alors $y = p$.

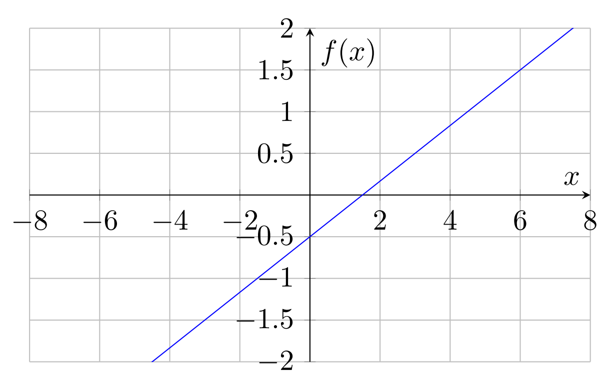


Sur ce graphique, l'ordonnée à l'origine est égale à ....

On remarque qu'il s'agit de l'ordonnée du point d'intersection entre la courbe et l'axe des ordonnées.

Exemple : Quelle est l'ordonnée à l'origine des droites représentées par ces fonctions ? Laquelle correspond au graphique ci-dessous ?

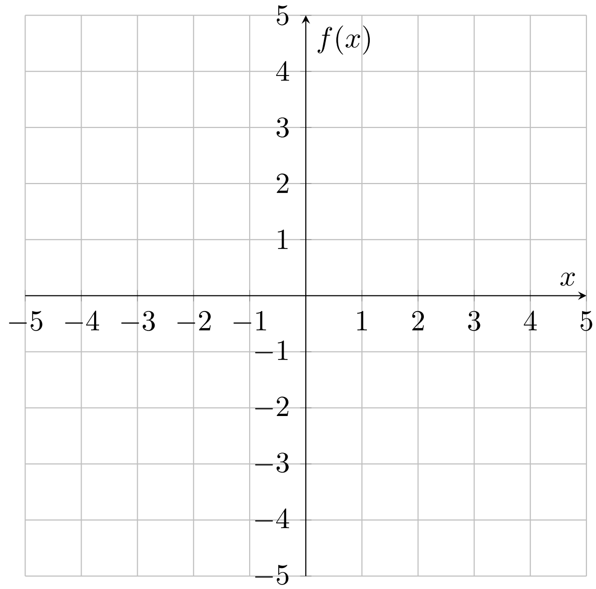
1. $f(x) = 5x + 3$
2. $g(x) = -2x$
3. $h(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$
4. $i(x) = 2 - \frac{x}{2}$



Exercices :

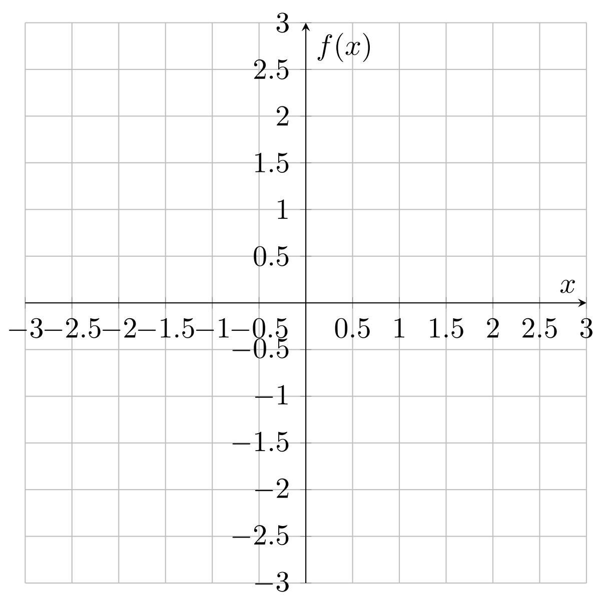
1. Donne la formule et trace le graphique de la fonction dont l'ordonnée à l'origine est -2 et la pente est 1.

$$f(x) =$$



2. Donne la formule et trace le graphique de la fonction dont l'ordonnée à l'origine est 0 et la pente est $\dfrac{-1}{2}$.

$$f(x) =$$



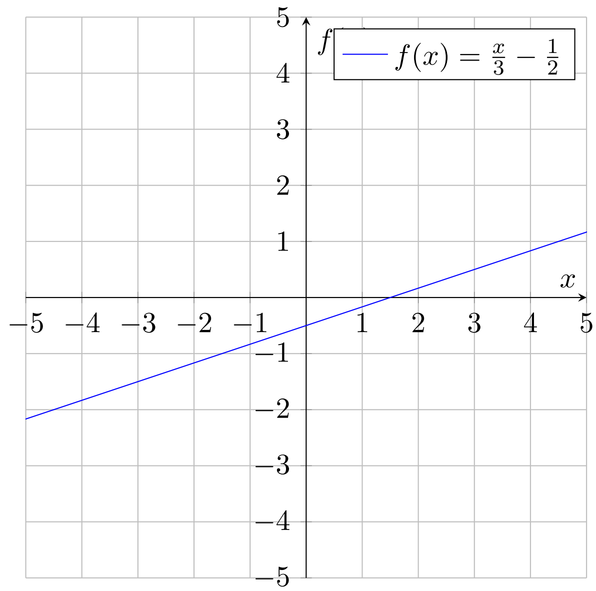
Racine d'une fonction

Racine d'une fonction

La racine d'une fonction est la valeur de x qui annule la fonction. Autrement dit, elle est la valeur de l'abscisse, x pour laquelle l'ordonnée y vaut 0.

Trouver la racine d'une fonction du premier degré $y = mx + p$ revient à résoudre l'équation $mx + p = 0$.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{-1}{2}$. En te basant sur sa représentation graphique, identifier quelle est sa racine et son ordonnée à l'origine.



Racine : ....

Ordonnée à l'origine : ....

Vérifie que la racine trouvée correspond bien à la solution de l'équation $f(x) = 0$, c'est à dire, $\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2} = 0$.

....

....

....

Exercices : Calcule les racines et les ordonnées à l'origine des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x - 2$

   ....

   ....

   ....

2. $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$

   ....

   ....

   ....

3. $f(x) = x$

   ....

   ....

   ....

4. $f(x) = \frac{2 - 3x}{3}$

   ....

   ....

   ....

5. $f(x) =$

   ....

   ....

   ....