TURING 图灵数学·统计学丛书 43

Springer

Basic Topology

基础拓扑学

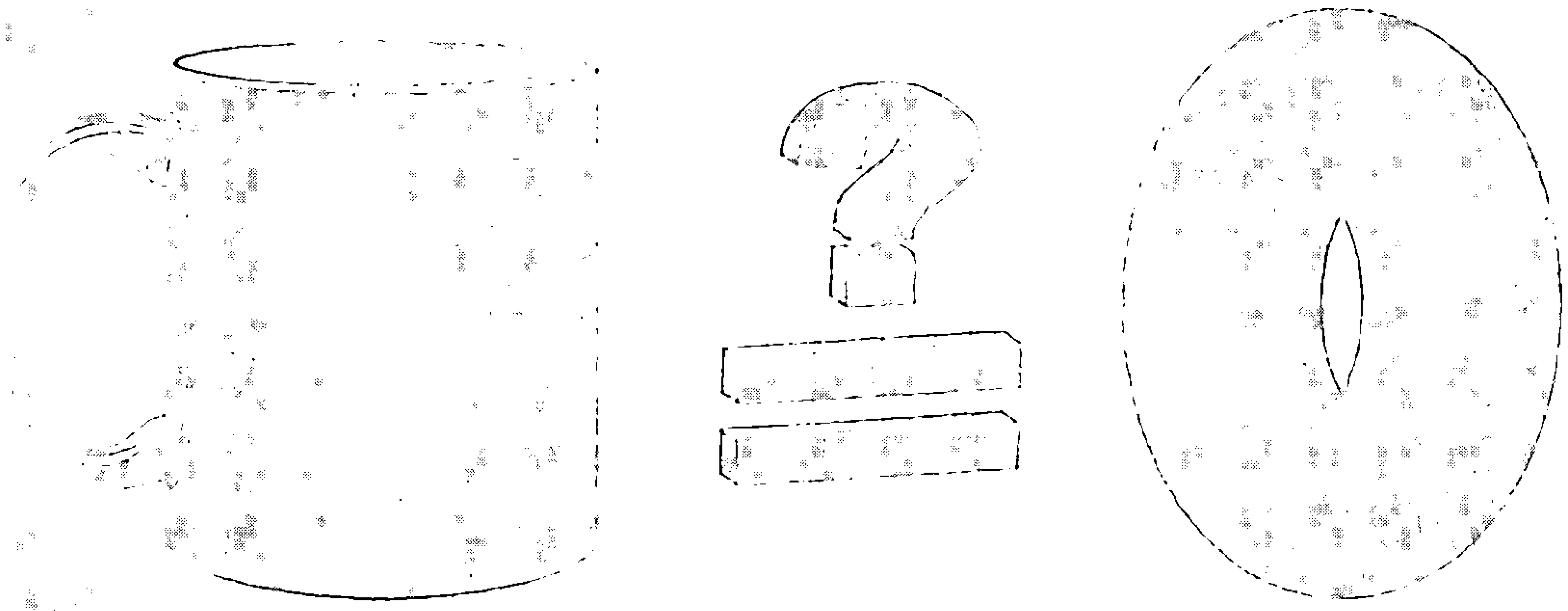
[英] M. A. Armstrong 著

孙以丰 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 43

Springer



Basic Topology

基础拓扑学

[英] M. A. Armstrong 著

孙以丰 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

基础拓扑学/(英)阿姆斯特朗(Armstrong, M. A.)著；孙以丰译. —北京：人民邮电出版社, 2010.4

(图灵数学·统计学丛书)

书名原文：Basic Topology

ISBN 978-7-115-21886-5

Ⅰ. ① 基… Ⅱ. ① 阿… ② 孙… Ⅲ. ① 拓扑 Ⅳ. ① O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 221430 号

内 容 提 要

本书是一本拓扑学入门图书，注重培养学生的几何直观能力，突出单纯同调的处理要点，并使抽象理论与具体应用保持平衡. 全书内容包括连续性、紧致性与连通性、粘合空间、基本群、单纯剖分、曲面、单纯同调、映射度与 Lefschetz 数、纽结与覆叠空间.

本书的读者对象为高等院校数学及其相关专业的学生、研究生，以及需要拓扑学知识的科技人员、教师等.

图灵数学·统计学丛书

基础拓扑学

◇ 著　[英] M. A. Armstrong

译　孙以丰

责任编辑　明永玲

◇ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号

邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn

网址 http://www.ptpress.com.cn

北京鑫正大印刷有限公司印刷

◇ 开本：700×1000　1/16

印张：13

字数：243 千字　2010 年 4 月第 1 版

印数：1 –3 000 册　2010 年 4 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-5817 号

ISBN 978-7-115-21886-5

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版 权 声 明

译　者　序

近年来，国外出版了许多拓扑学入门书籍，本书就是其中之一. 它的一部分内容曾经作为教材在吉林大学使用. 我认为，对于学习拓扑学课程的大学高年级学生来说，这本书确实是一本程度适当、值得推荐的参考读物.

本书作者很注意数学的美. 原文在第 1 章开头引用了英国数学家哈代的一句名言. 大意是说，只有令人产生美感的数学才可能长久流传. 这大概是作者在本书的取材和表述方面为自己立下的一条标准吧.

作者强调几何直观. 拓扑学里严谨而形式化的表述方式往往使本质的几何思想被冲淡或掩盖，这是作者所不欣赏的. 10.2 节中虚拟的一段代数学家与几何学家的对话，反映了作者的看法.

在拓扑学里，特别是涉及同调群的部分，从引进概念到主要定理的证明，中间有一个较长的准备阶段，动机不明显，而又容易使人感到太抽象. 这个过程往往使初学者扫兴. 不过基础一旦建成，就能引出多方面具体而生动的应用. 作者则力求使二者取得平衡，使形式化、抽象的论述与直观性强的内容、具体应用方面的内容有机地穿插在一起.

如果读本书时果真令人产生某种舒畅的感觉，那或许是作者按这些想法进行的编排取得了成效.

孙以丰

前　　言

这是一本为大学本科生写的拓扑学，其目的有二：一是使学生能接触到点集、几何与代数拓扑学的一些技巧与应用，而又不过分深入其中任何一个领域；二是增进学生的几何想象力．拓扑学毕竟是几何学的一个分支．

阅读这本书所需要的预备知识不多：有比较扎实的实分析初步（通常都需要）、初等群论与线性代数的知识就已足够．在数学上具有一定程度的"成熟性"比事先学点儿拓扑学知识更为重要．

本书总共 10 章．第 1 章不妨看作是学习拓扑学的动员令．其他 9 章各有专题，其中粘合空间、基本群、单纯剖分、曲面、单纯同调、纽结与覆叠空间单独成章来讨论．

介绍一些来龙去脉是必需的．我认为，像这种水平的拓扑书一开始就理所当然地给出拓扑空间的一组公理，是注定要失败的．另一方面，拓扑学也不应写成如同供人消遣的杂要节目（比如纽结与地图的染色，住宅到公用设施之间管道的布线，以及观看苍蝇从 Klein 瓶里逃出，等等）．这些东西都有它们各自的地位，但必须有机地融合在统一的数学理论中，它们本身并不是最后目的．正因为这个缘故，纽结出现在书的最末一章而不是开始．因为我们更感兴趣的不是纽结本身，而是处理纽结需要的多种多样的工具与技巧．

第 1 章从关于多面体的 Euler 定理开始，本书的主题是探索拓扑不变量及其计算技巧．按其本性拓扑不变量往往很难计算，而一些简单的数量，如 Euler 示性数的拓扑不变性，证明起来又极费事．这就使得拓扑学错综复杂．

本书取材尽量保持平衡，使理论与其应用受到同等重视．比如，同调论的建立是相当麻烦的事（用了整整一章），于是值得用一整章的篇幅讲同调论的应用．每写到一个论题总想加入更多内容以致难以做到适可而止．但为了使篇幅适度，不得不割舍有些内容．这里我要特别提到，本书没有介绍任何计算同调群的比较系统的方法．定义与证明并不总是选取那些最简捷的．因为用起来最方便的定义与结果，在初次接触时往往显得并不那么自然，而本书毕竟是一本入门读物，应该注意使初学者容易接受．

对于（英国制）大学三年级程度的学生，一学年的课程可以讲完本书的大部分内容．也可有种种方式从本书选一些论题而构成较短的课程，而本书前半部的许多内容甚至可以讲授给二年级学生．每节末尾附有习题，书末附有简短的文献介绍，

并指出哪些可以与本书平行阅读,哪些可供进一步深入之用.

本书所包含的材料可以说都是很基本的,绝大部分在别处也可见到. 如果说我作了什么贡献的话,只不过是在取材与表述方面做了一些工作.

有两个论题值得特别提一下. 我从 J. F. P. Hudson 那里初次学到 Alexander 多项式,E. C. Zeeman 告诉我怎样对曲面作剜补运算. 特别地,Christopher Zeeman 教我拓扑学时表现出了极大的耐心. 对他们三人,我衷心地表示感谢.

还要感谢 R. S. Roberts 和 L. M. Woodward 与我进行了多次有益磋商,感谢 J. Gibson 夫人快速熟练地准备了原稿,以及感谢剑桥大学出版社允许我从该社出版的 G. H. Hardy 著的《一个数学家的自白》一书中摘取一句语录置于第 1 章正文之前. 最后,对我的妻子 Anne Marie 给予我的不断鼓励专诚致谢.

M. A. A.

1978 年 7 月于 Durham

目　录

第1章 引 论

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics. (美是首要的试金石:丑陋的数学不可能永存.)

G. H. Hardy

1.1 Euler 定理

一开始,我们来证明关于多面体的优美的 Euler 定理. 以后你将看到,这个定理及其证明是拓扑学中很多思想的根源.

图 1.1 中有 4 个多面体,看起来各不相同,但是如果我们将顶点数(v)减去棱数(e),再加上面的数目(f),则对于这 4 个多面体所得到的结果都是 2. 是不是公式 $v-e+f=2$ 对于所有的多面体都对呢? 答案是否定的. 但是对于一大类有意思的多面体,这个结果总是成立的.

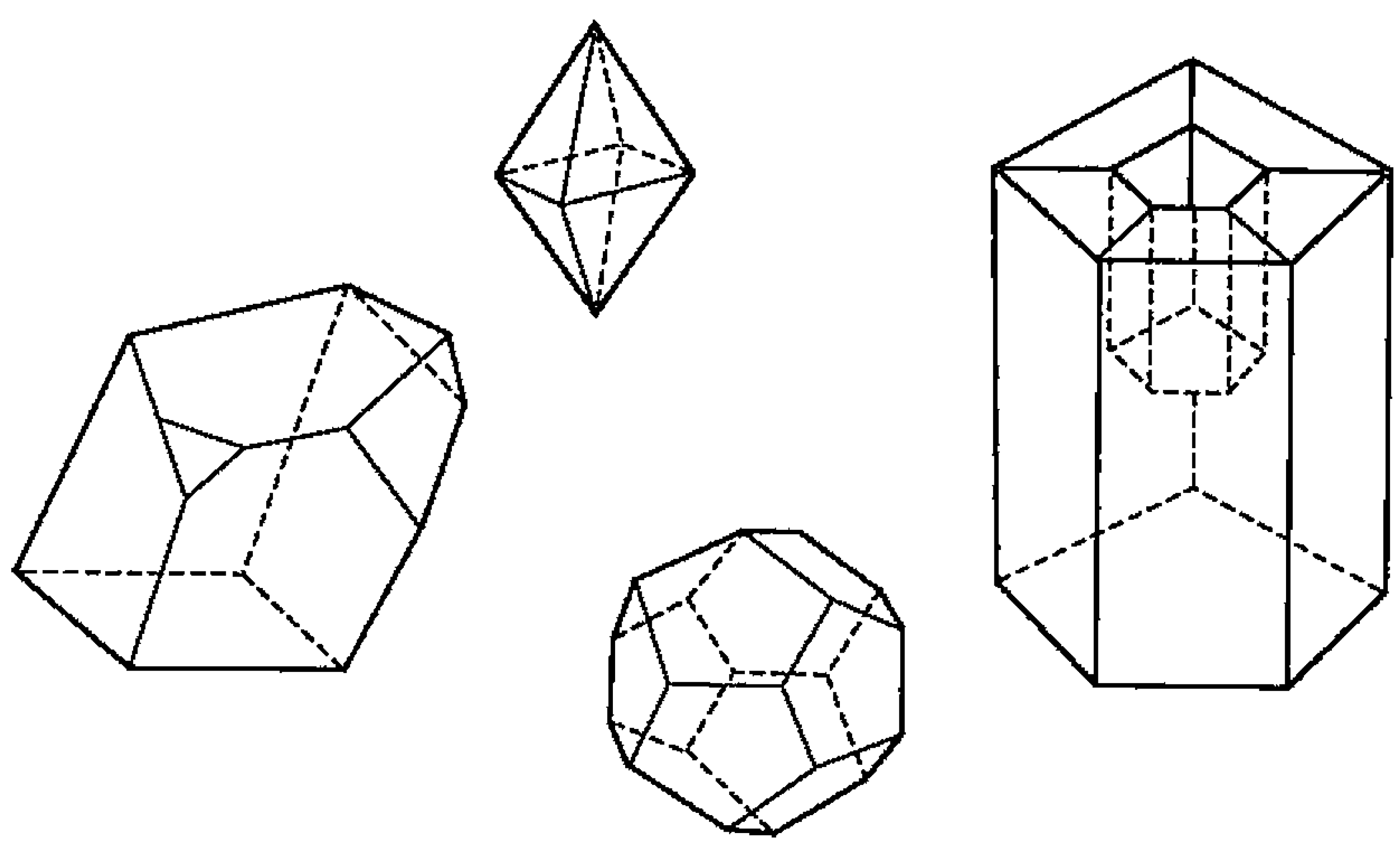
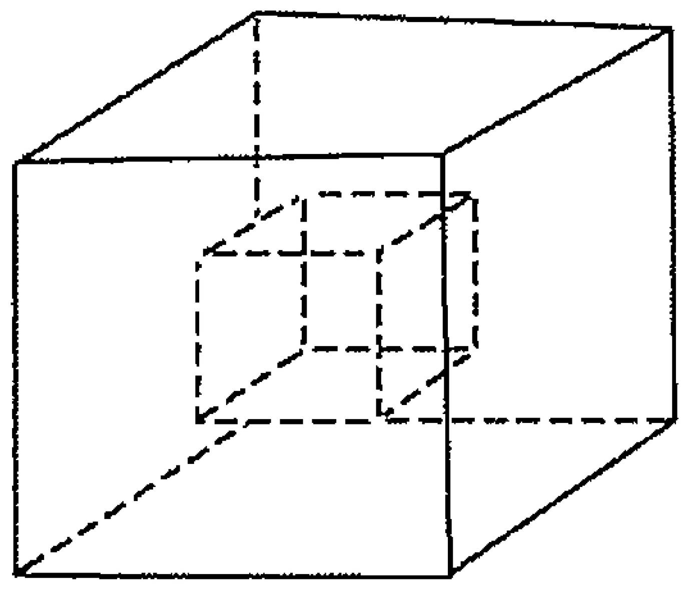


图 1.1

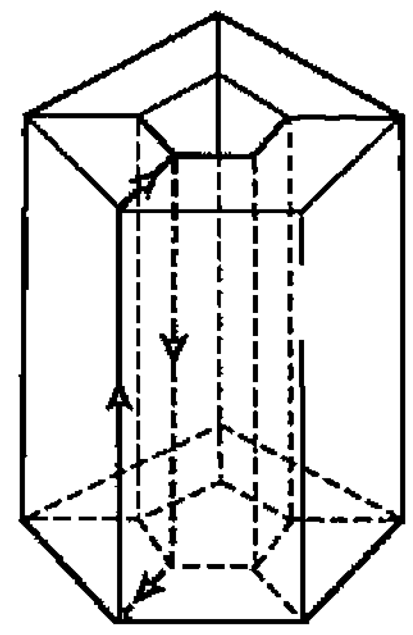
开始我们也许会倾向于只考虑正多面体,或者凸多面体,对它们来说,$v-e+f$ 确实等于 2. 但是,上面所举的例子当中有一个不是凸的,却也满足这个公式,而我们又不愿把它忽略. 为找出反例,我们要开动脑筋. 如果对图 1.2 与图 1.3 进行计算,就将分别得到 $v-e+f=4$ 以及 $v-e+f=0$. 什么地方出了问题呢? 第一个图中多面体的表面分开成两块,用专业一些的语言来说就是这个表面不连通. 有理由把这种情形排除在外,因为这两块中的每一块都将使 $v-e+f$ 产生等于 2 的值. 但即使这样,也不能说明图 1.3 的情况,这时多面体的表面只有一整块. 不过这个表面有一个重要方面与前面考虑过的例子不同. 我们可以在这个表面上找到一个不

分割表面为两部分的圈. 换句话说,若设想用剪刀沿着这个圈将曲面剪开,则不至于使曲面分成两块. 在图 1.3 中用箭头标出了具有这种性质的一个圈. 我们将证明,如果多面体不具有如图 1.2 与图 1.3 所列举的缺陷,则必定满足关系 $v-e+f=2$.



空心方体

图　1.2



穿孔棱柱

图　1.3

进一步探讨前,有必要把话说得精确一些. 到现在为止(除了谈到多面体的凸性),实际上只涉及多面体的表面. 因此,"多面体"这个词将用来表示所说的表面,而不是指那些实心的立体. 因此,一个*多面体*是指按下述意义很好地拼凑在一起的有限多个平面多边形:若两个多边形相交,则它们交于一条公共边;多边形的每一条边恰好还是另一个(且只有这一个)多边形的边. 不仅如此,还要求对于每个顶点,那些含有它的多边形可以排列成 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$,使得 Q_i 与 Q_{i+1} 有一条公共边,$1\leqslant i<k$,而 Q_k 与 Q_1 有一条公共边. 换句话说,这些多边形拼成围绕着该顶点的一块区域(多边形的数目 k 则可以随顶点的不同而变动). 其中最后一个条件就使两个方体只在一个公共顶点相衔接的情形排除在外了.

(1.1) Euler 定理　*设 P 为满足下列条件的多面体:*

(a) P 的任何两个顶点可以用一串棱相连接;

(b) P 上任何由直线段(不一定非是 P 的棱)构成的圈,把 P 分割成两片,则对于 P 来说,$v-e+f=2$.

公式 $v-e+f=2$ 有一段漫长而曲折的历史. 它最早出现在 1750 年 Euler 写给 Goldbach 的一封信里. 但 Euler 对所考虑的多面体没加任何限制,他的论证只适用于凸多面体的情形. 直到 60 多年以后,Lhuilier(于 1813 年)才注意到如在图 1.2 与图 1.3 中的多面体所产生的问题. 定理(1.1)的准确表述以及下面给出的证明梗概是 von Staudt 于 1847 年发表的.

证明提要　P 的一组连通的顶点与棱叫做一个*图*,连通的意思就是任意两个顶点可以用图中的一串棱连接. 更一般些,我们将用图这个字来表示三维空间内任何一组如图 1.4 那样很好地衔接起来的有限多个直线段(若两个线段相交,则交于公共顶点). 不包含任何圈的图叫做*树形*. 注意,对于一个树形来说,顶点数减去

棱数等于 1. 若以 T 来记树形,则可以写成公式

$$v(T) - e(T) = 1.$$

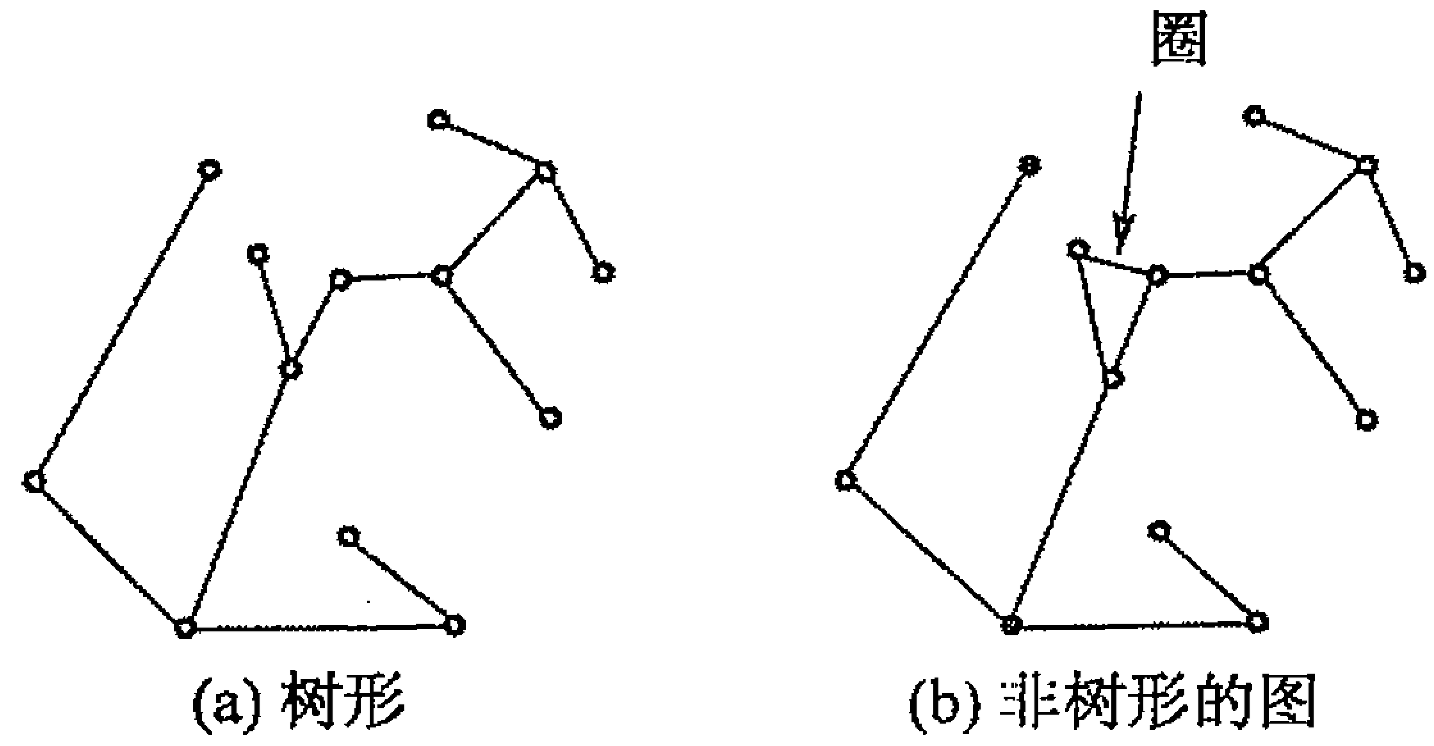


图 1.4

按假设(a),P 的全体顶点与棱构成一个图. 不难证明,在任何图中可以找到含有全体顶点的树形子图. 于是,我们选择一个树形 T,它包含 P 的某些棱,但包含 P 的全体顶点(图 1.4a 对于图 1.1 所画的一个多面体给出了这样一个树形).

然后构造 T 的一种"对偶". 这种对偶是按下述方式定义的一个图 Γ. 相应于 P 的每个面 A,我们给出 Γ 的一个顶点 $\hat{A}$. Γ 的两个顶点 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 有一条棱相连,当且仅当它们相应的面 A 与面 B 在 P 内有一条不属于 T 的公共棱. 人们甚至可以将 Γ 在 P 上表示出来,使得它与 T 不相交(顶点 $\hat{A}$ 相当于 A 的一个内点),当然这时要允许它的棱可以有一个曲折点. 图 1.5 显示了作法.

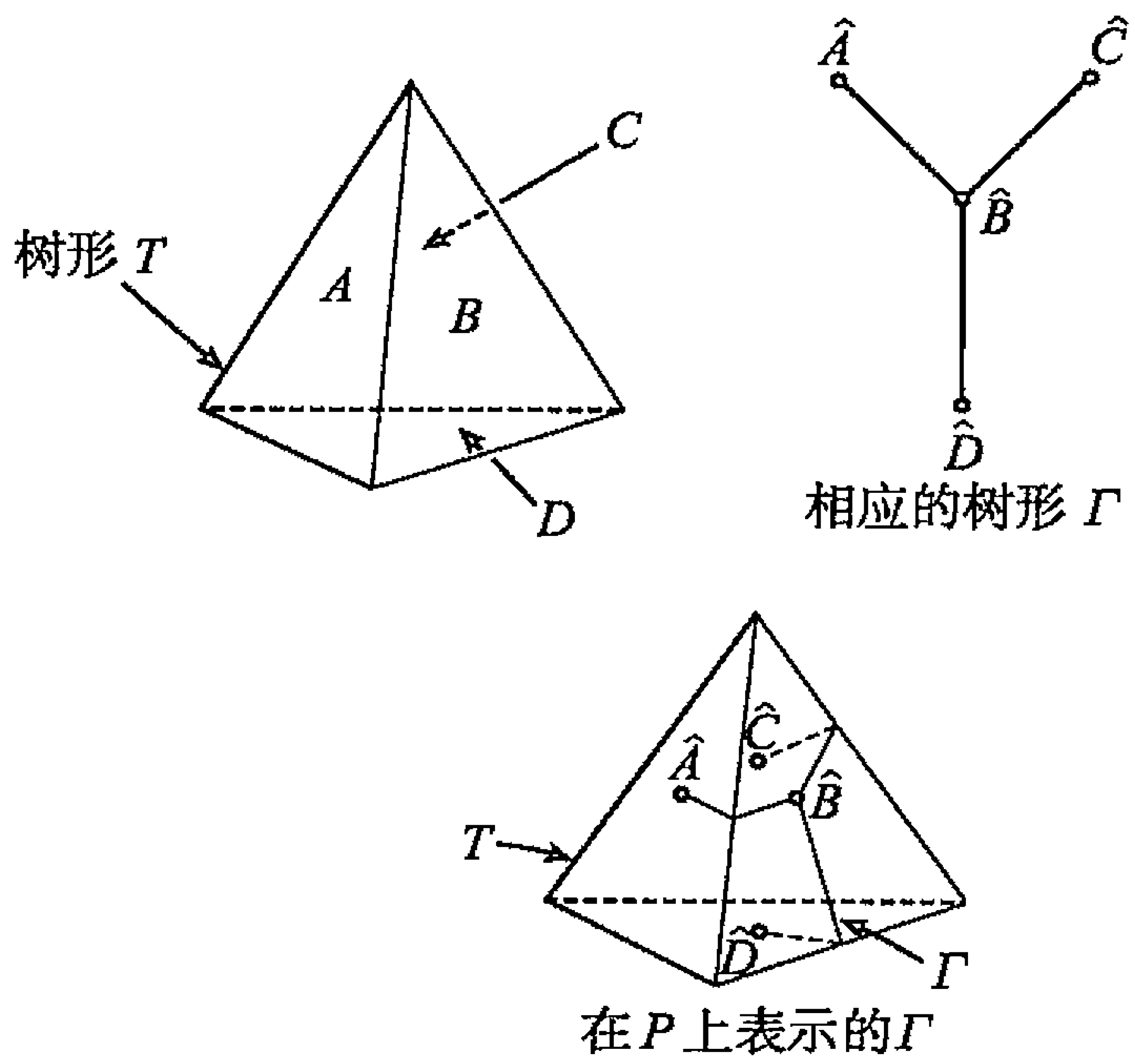


图 1.5

读者很容易相信对偶 Γ 是连通的,从而是一个图. 直观地看,如果 Γ 的某两个顶点不能用 Γ 内的一串棱相连接,则它们必然被 T 内的一个圈分开(这需要证明,我们将在第 7 章给出详细证明). 由于 T 不包含任何圈,可以推断 Γ 必然连通.

事实上,Γ 是树形. 若 Γ 内有圈,则按假设(b),这个圈将把 P 分成两块,每一块将含有 T 的至少一个顶点. 想把分属 T 的这两块的两个顶点用一串棱相连,就不可避免地要碰上那个隔离圈,因此,这一串棱不能全在 T 内. 这就与 T 的连通性矛盾. 因此 Γ 是树形(对于像图 1.3 所示的多面体,这个证明就不成立了,因为对偶图 Γ 必定含有圈).

由于任何树形的顶点数比棱数多 1,我们有 $v(T)-e(T)=1$,以及 $v(\Gamma)-e(\Gamma)=1$. 于是

$$v(T)-[e(T)+e(\Gamma)]+v(\Gamma)=2.$$

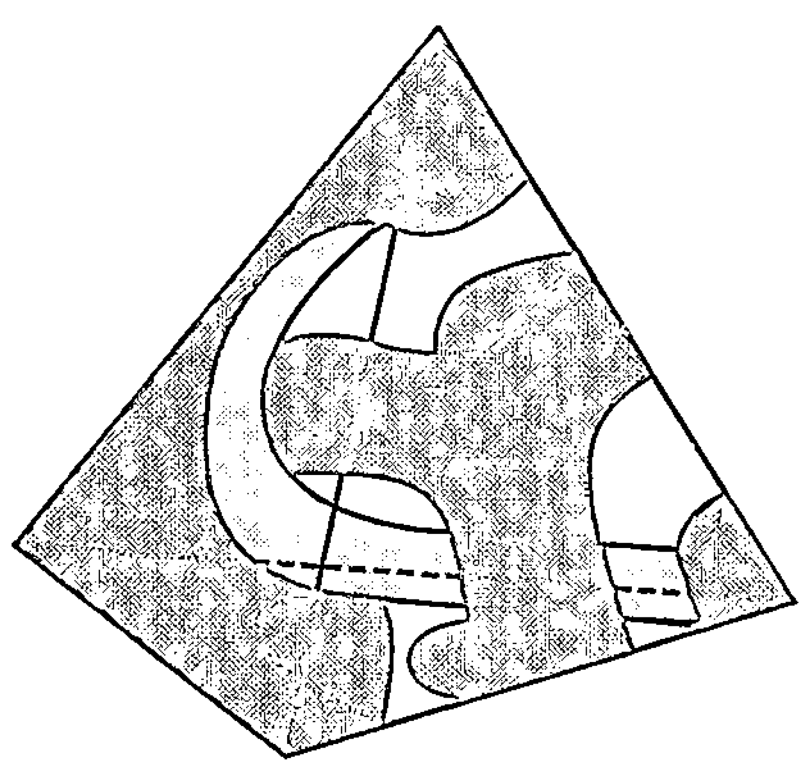
但根据构造方式

$$v(T)=v, e(T)+e(\Gamma)=e, v(\Gamma)=f.$$

这就完成了 Euler 定理的证明.

1.2 拓扑等价

Euler 定理有好几种证明. 有两点理由使我们选择了上面的证明. 首先,这个证明很精致,而其他大多数的证明是对于 P 的面数用归纳法. 其次,它给出了比 Euler 公式更多的东西. 只要稍微再多费点力气就可证明,P 是由两个盘形沿着它们的边界粘合而得到的. 为了看出这一点,将 T 与 Γ 在 P 上略微增厚(图 1.6),得到两个不相交的盘子(将树形增厚总是得到盘形,将有圈的图增厚则得到有空洞的空间). 使这两个盘子逐步扩大直到它们的边界完全重合. 这时多面体 P 就由两个具有公共边界的盘形构成. 当然这些盘子可以是奇形怪状的,但可以把它们变形,逐步变成又圆又平的圆盘. 再回想,球面是由两个盘形(即南半球与北半球)沿着公共边界(即赤道)缝合而得到的(图 1.7). 换句话说,Euler 定理的假设告诉我们,P 在某种意义下看起来就像是变了形的球面.



在 P 上增厚的 T 与 Γ

图 1.6

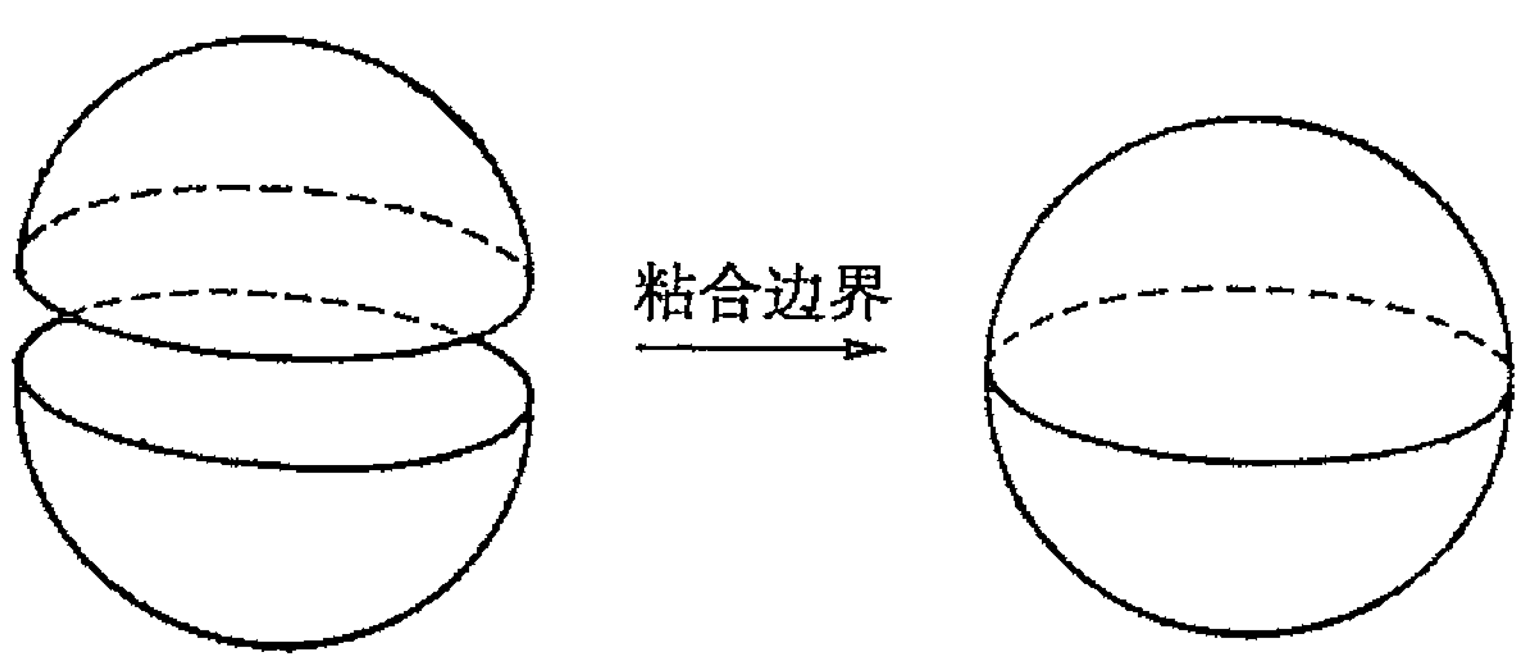


图 1.7

对于具体的多面体,当然可以很容易地建立它的点与球面的点之间明显的对

应关系. 例如,对于正四面体 T,可以从 T 的重心 $\hat{T}$ 作径向投影,把 T 映满以 $\hat{T}$ 为中心的某个球面. T 的各个面映为球面上的弯曲三角形,如图 1.8 所示. 事实上,Legendre 正是用这种方法(在 1794 年)针对凸多面体来证明 Euler 定理的,后面我们还将叙述 Legendre 的论证.

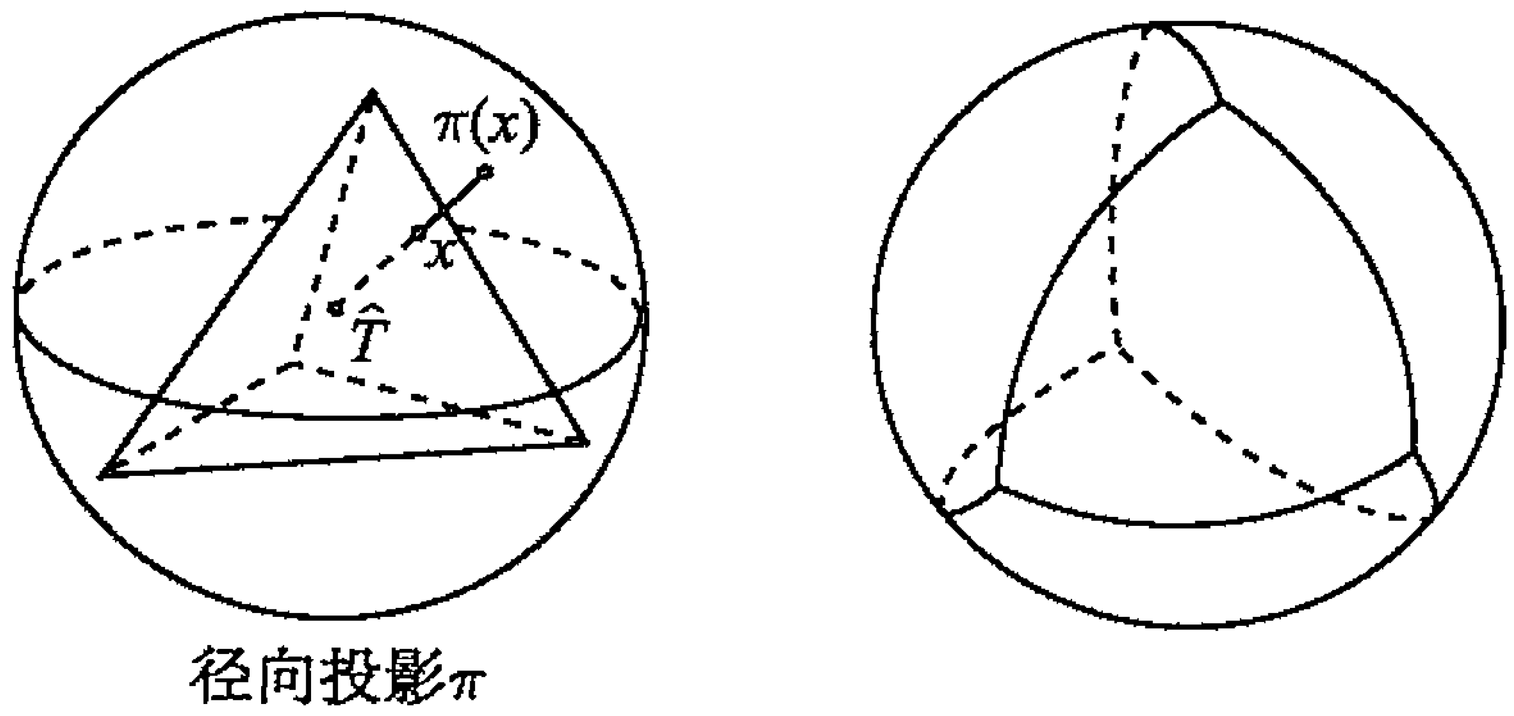


图 1.8

图 1.1 右边的多面体并不是凸的,上面的论证对它不适用. 但如果我们设想它是用橡皮做的,则不难想象怎样把它形变成一个普通的圆球. 在形变过程中可以把多面体任意拉伸、弯曲,但不允许撕裂,不允许把不同的点粘在一起. 这样所得多面体的点与球面的点之间的对应就是所谓**拓扑等价**或**同胚**的一个例子. 确切地说,就是一对一的连续满映射,并且逆映射也连续.

在 1.4 节中我们将详细地给出同胚的定义,目前为了使这个概念比较具体形象,先举出 4 个互相同胚的空间的例子(见图 1.9):

(a)有限高度的圆柱面,去掉两端的圆周;

(b)由方程 $x^2+y^2-z^2=1$ 给出的单叶双曲面;

(c)复平面上由 $1<|z|<3$ 确定的开环形域;

(d)除去南极与北极的球面.

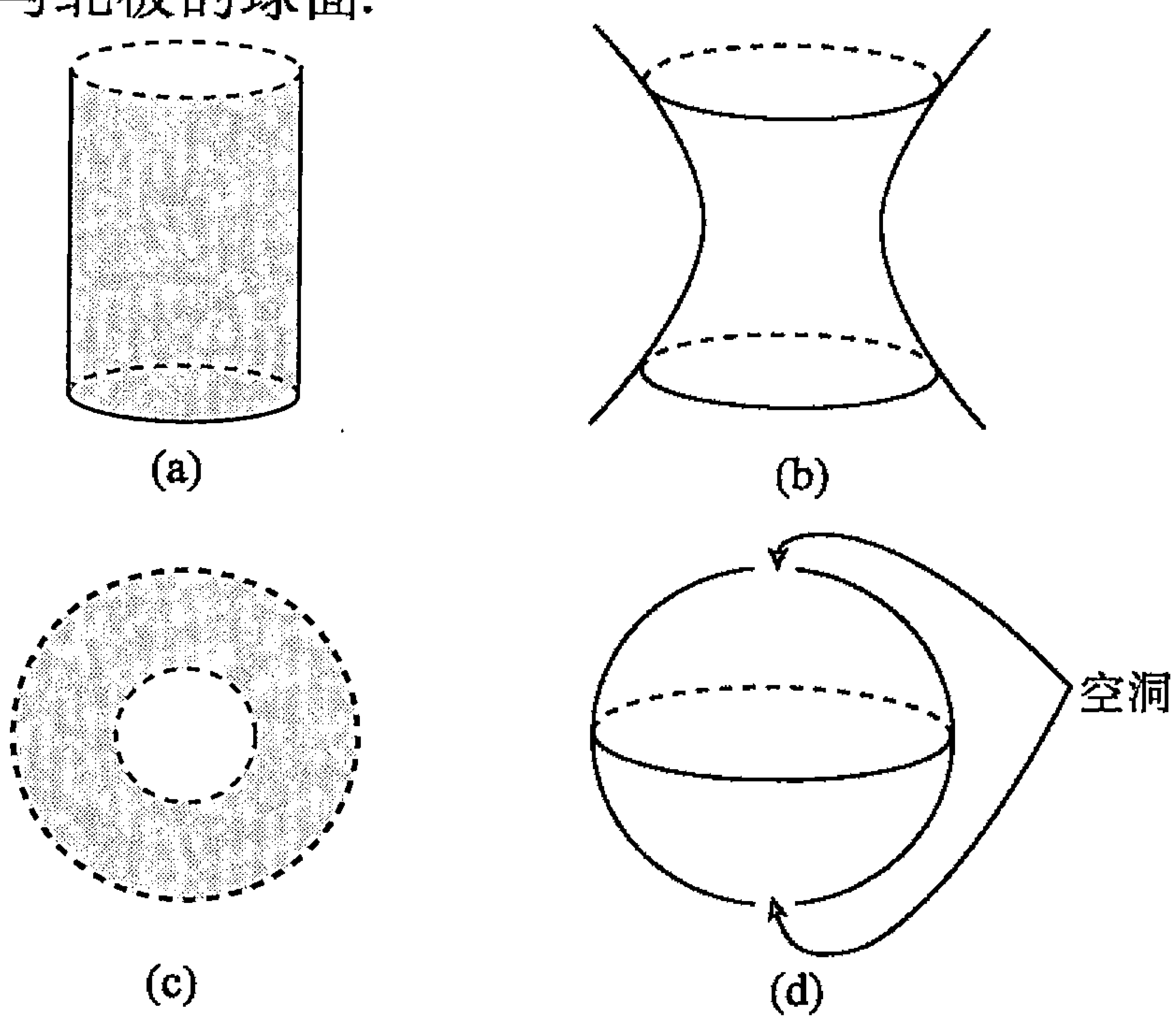


图 1.9

我们在这里给出空间(b)到空间(c)的具体的同胚(连续,一对一,满映射,并且逆映射也连续).将(b)的点用柱极坐标(r,θ,z)来刻画最方便,对于空间(c),则用平面极坐标来描述.在(b)内当$\theta=0$时,我们得到双曲线$x^2-z^2=1$的一支,设法把它好好地送到环形区域内相应的一段,即射线段$\{(x,y)\mid 1<x<3,y=0\}$.如果能对于每个θ都这样做,并且当θ从0变到2π时所作出的结果连续地依赖于θ,则将得到所需要的同胚.如以$f(x)=x/(1+|x|)+2$来定义$f:(-\infty,\infty)\to(1,3)$,则$f$是一对一连续满映射,并且有连续的逆映射.然后令双曲线的点(r,θ,z)对应于平面环形域的点$(f(z),\theta)$.

我们留给读者自己去考虑其他几种情形:注意拓扑等价显然是个等价关系,因此,只需证明空间(a)与(d)都同胚于空间(c)就够了.在拓扑学里把这4个空间看作是"同一个空间".球面上挖去3个点则不同(与上面这几个不同胚).为什么?你能描述出复平面上与球面挖去三点同胚的子空间吗?

回到Euler定理的证明,增厚树形T与Γ,使P分解成两个具有公共边界的盘形之后,把一个盘形的点对应于北半球的点,另一个对应到南半球,我们便有了一种方法来定义从多面体P到球面的同胚.相反的方向也可以论证(我们将在第7章中讨论),即证明若P拓扑等价于球面,则P满足定理(1.1)的假设(a)与(b)①,从而Euler定理对于P成立.所以,若多面体P与Q都同胚于球面,并且若把$v-e+f$叫做多面体的**Euler数**,则从以上的讨论知道P与Q有相同的Euler数,都等于2.

图1.3中的多面体却完全是另一种形状.它同胚于环面(我们也可以想象怎样把它连续地形成如图1.10b所画的环面),它的Euler数是0.对于任何其他同胚于环面的多面体计算Euler数必然得0(但这是比较难证明的,一直要等到第9章才给出证明).现在我们只差一步②就到达拓扑学里最基本的一个主要结果了.

(1.2)定理 *拓扑等价的多面体具有相同的Euler数.*

这个十分引人注目的结果是现代拓扑学的出发点.它的令人惊奇的地方在于计算多面体的Euler数时用了多面体的顶点数、棱数与面数,这些在拓扑等价之下都不是保持不变的东西.于是引起人们去寻找空间在同胚之下不改变的其他性质.

以后我们还要回到Euler数说明对于比迄今为止所考虑的多面体更广泛得多的一类空间可以定义Euler数.前面考虑的多面体只不过是有顶点、棱与面的一些具体对象,除此之外并没有使我们特别感兴趣的地方.从拓扑学的观点来看,球面就足以代表图1.1中画的所有多面体.我们的原则大体是:Euler数2不是从属于某一类多面体的,而实际上是*从属于球面的*.满足Euler定理假设的多面体(也就

① 假设(a)容易易证;假设(b)较为困难,它是著名的Jordan曲线定理的一个特殊情形.

② 只差一步是从直观数学的意义来说.若要给出严谨的证明,则还有一大段路要走.

是同胚于球面的多面体)只不过是提供了计算球面 Euler 数的一种简便的方式. 这样着重说明以后,定理(1.2)所说的就是:从看起来不同的途径计算,所得的结果是相同的. 在 9.2 节中将继续这方面的讨论.

我们用 Legendre 对于凸多面体 Euler 公式所给出的颇具匠心的证明来结束这一节. 如同图 1.8 中用径向投影将多面体映到半径为 1 的球面上. 多面体的面映为球面多边形. 若 Q 为球面 n 边形,以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为它的角,则 Q 的面积是

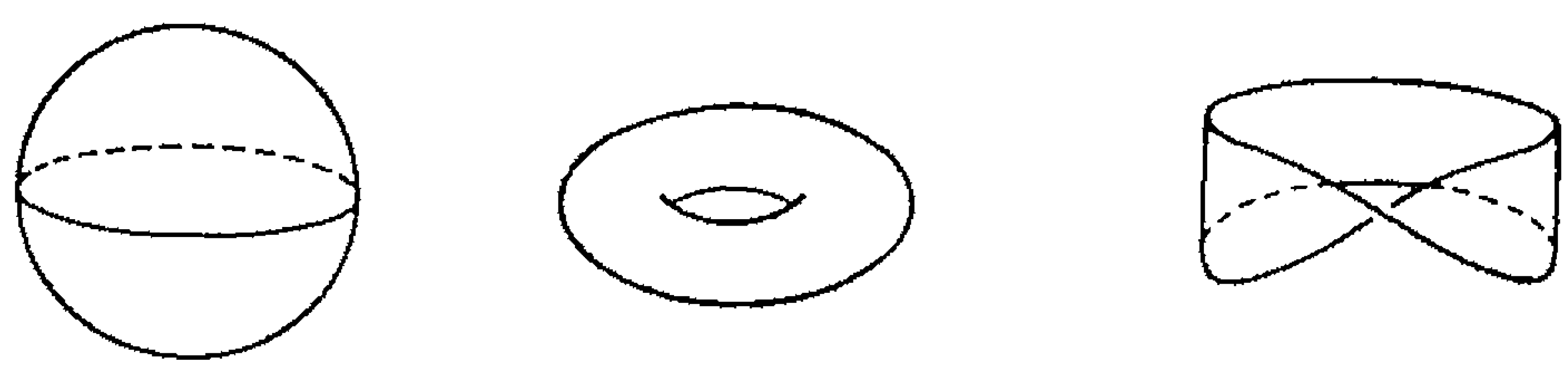
$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k-(n-2)\pi=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)-n\pi+2\pi.$$

从而各个球面多边形面积之和是 $2\pi v-2\pi e+2\pi f$(在每个顶点处,角度总和为 2π,所以 $2\pi v$ 包括了所有各个 α;每条棱算了两次,因为它恰好属于两个多边形;每个面贡献出 2π). 这个面积与单位球面的面积 4π 相等,从而得出结果.

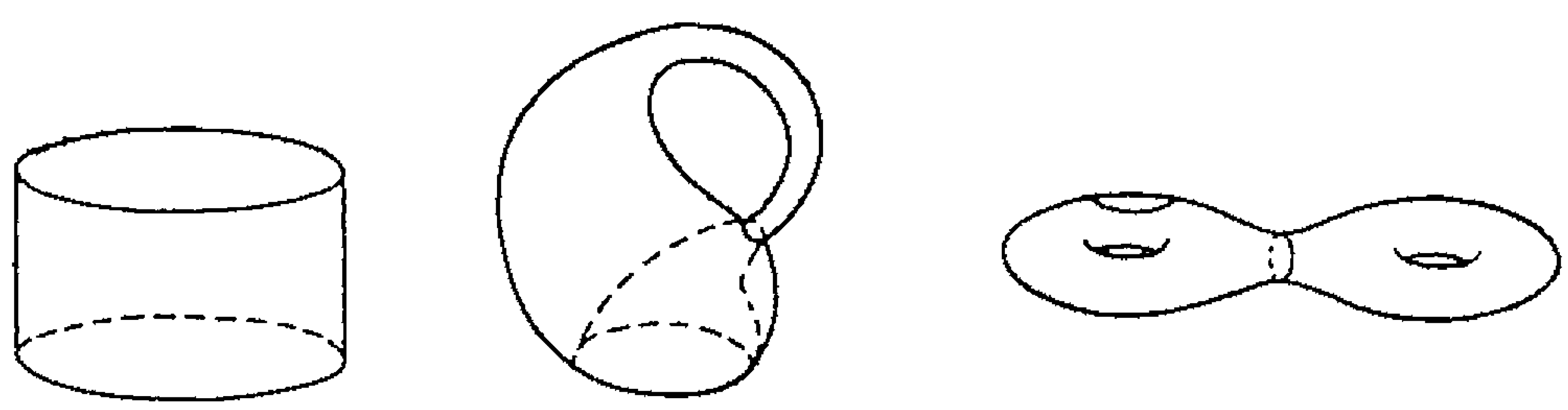
1.3 曲 面

拓扑学所讨论的空间性质是空间在前面所说拓扑等价或同胚之下不改变的性质. 但什么类型的空间是我们感兴趣的,“空间”的确切含意是什么呢? 同胚的概念全靠连续性的概念来说明. 我们所说的两个空间之间的连续映射又指什么呢? 本节以及 1.4 节将回答这些问题.

先看几个有趣的空间. 搞分析的人习惯于把实数轴、复平面,甚至把单位闭区间上定义的全体连续实函数看作(度量)空间. 作为热心于几何的人,我们的兴趣更偏向于在欧氏空间内自然出现的某些有界图形. 例如,平面上的单位圆周、单位圆盘,又如图 1.10 中画的球面、环面、Möbius 带以及穿孔的双环面等曲面都是在我们所生活的三维空间内实际存在的.



(a) 球面 (b) 环面 (c) Möbius带(麦比乌斯带)



(d) 柱面 (e) Klein瓶(克莱因瓶) (f) 穿孔双环面

图 1.10

比较复杂和难以想象的是像 Klein 瓶那样的曲面. 任何企图把 Klein 瓶在三维

空间内表现出来的尝试,都必然要使曲面自己相交. 在我们所画的图 1.10 中,曲面自己相交于一个小圆. 用一个模型来理解 Klein 瓶或许更好些. 通常用来表示环面模型的方法是取一个长方形纸片按图 1.11 的方式粘合它的边. 若要制作 Klein 瓶,前半部分的构造完全一样,即先得出一个圆柱面,然后将圆柱面的两端按照相反的方向粘合. 为了做到这一点,需要把圆柱弯过来穿到自己里面去,如图 1.12 所画的那样.

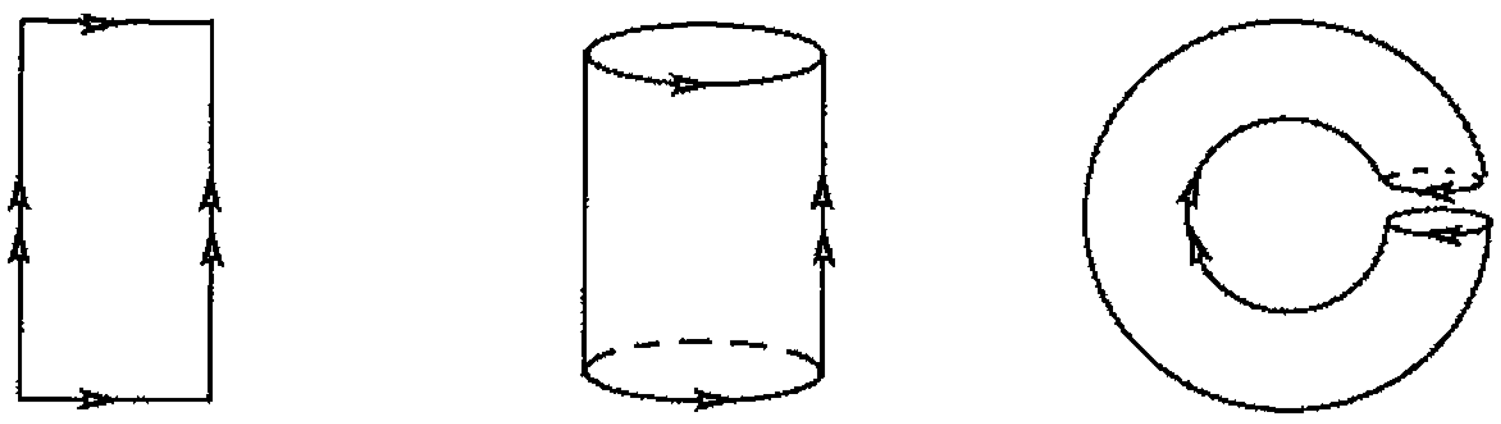


图 1.11

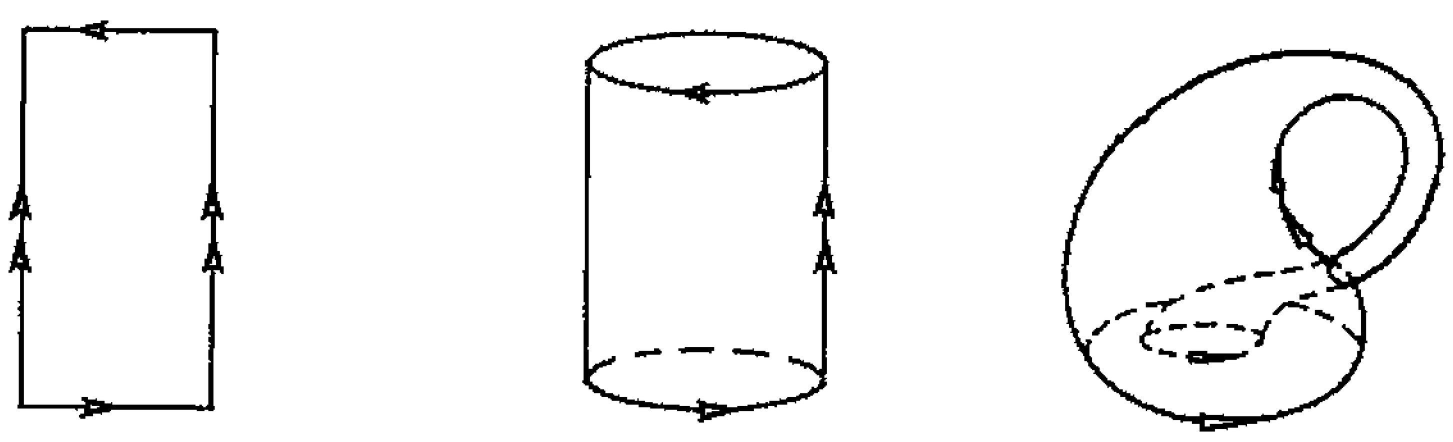


图 1.12

在四维空间内,Klein 瓶(K)可以完全避免自己相交而表示出来. 设想垂直于纸面还有另外一个第 4 维数,并且记住纸面表示通常的 3 维空间. 在 K 的自交圆处有两个管子穿过. 现在把其中一个略微提高一些到 4 维空间中,就避开了自相交叉. 如果你觉得不好理解,可以先看下面的简单情况,或许容易想象一些:图 1.13a 中是平面上正交的两条直线. 设想我们希望略微变动一点位置而使它们不再相交. 显然限制在平面内是做不到的. 但是,如果把垂直于纸面的第 3 维也考虑进去,在交点附近将其中一条直线顺着新添加的方向略微提高一些就消除了交点,给出如图 1.13b 所示的两条不相交的直线.

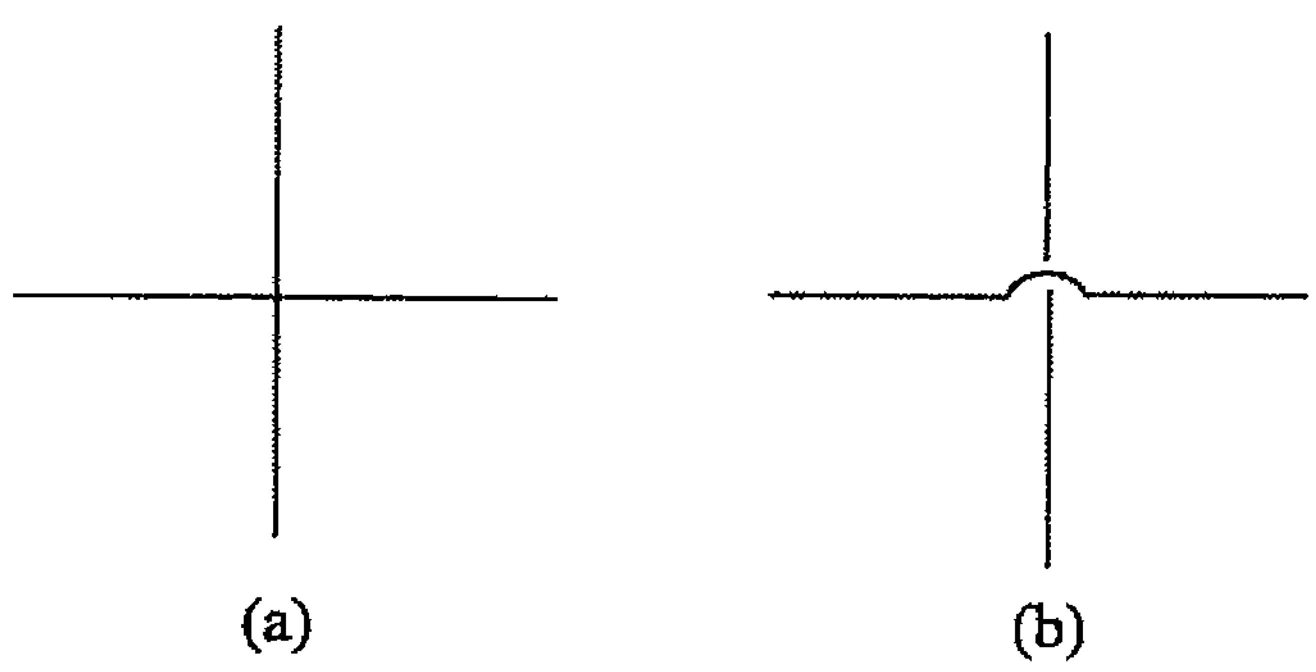


图 1.13

依靠其在欧氏空间内的表现而介绍曲面,并不像初看起来那样令人满意. 同胚的曲面在我们看来是一样的,应当作同一个的空间来处理. 在图 1.14 中列举了

Möbius 带 M 的三个副本. 前两个之间的同胚是毋庸置疑的,只要把它们当作是橡皮做的就不难看出[①]. 橡皮做的前一个 Möbius 带经过撑拉就可变成第二个的模样. 但是图 1. 14a 与图 1. 14c 又怎么样呢? 这两个空间是同胚的,但无论怎么撑拉、弯曲、扭转,都不能将一个形变为另一个. 要说明这两个空间同胚,需要找到它们之间的一个连续一一映射,并且逆映射也是连续的. 忘掉 M 的那几种图样而自己思考 M 怎样造出. 构造一个模型是容易的:取一个长方形纸条来,扭转半周后将一对对边粘合(如图1. 15). 这就得到如图 1. 14a 那样最常见的 Möbius 带. 要得到图 1. 14c,我们必须在以上的制作过程中将纸条多扭转一整周,也就是,总共将纸条扭转一周半,然后粘合. 但是从边 A 与边 B 的粘合关系来看,扭转半周与一周半并无差别,两次都是把同样的点对粘合起来. 因此,图 1. 14a 与图 1. 14c 中的空间是同胚的. 它们只不过是同一个空间在欧氏空间内的不同表示. 虽然二者之间可以建立同胚,但是这种同胚无法扩张为整个欧氏空间到自身的同胚;所谓不同的表示就是在这种意义之下来说的. 换句话说,不存在从整个欧氏空间到自身的同胚把图 1. 14a 映为图 1. 14c.

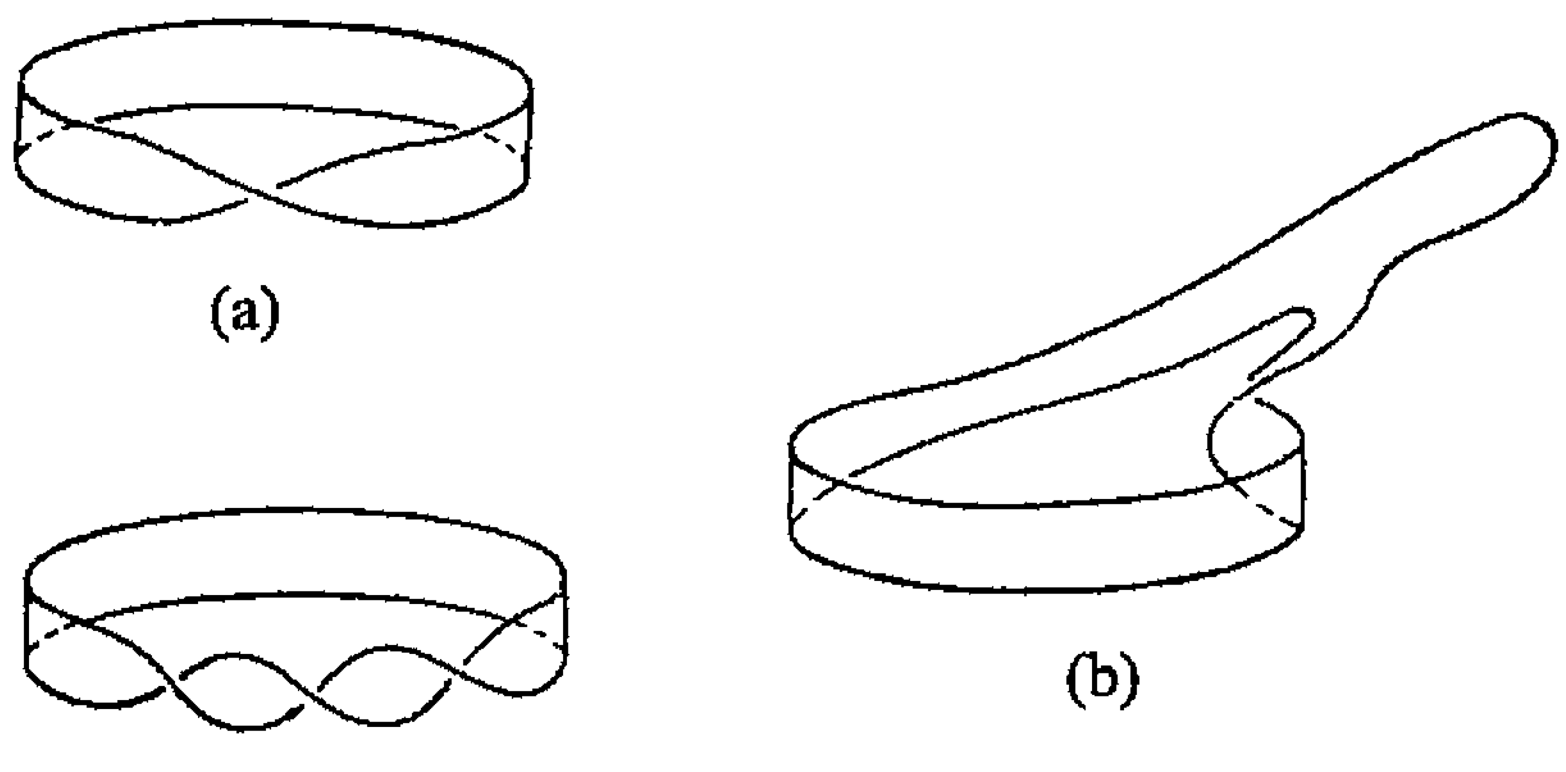


图 1. 14

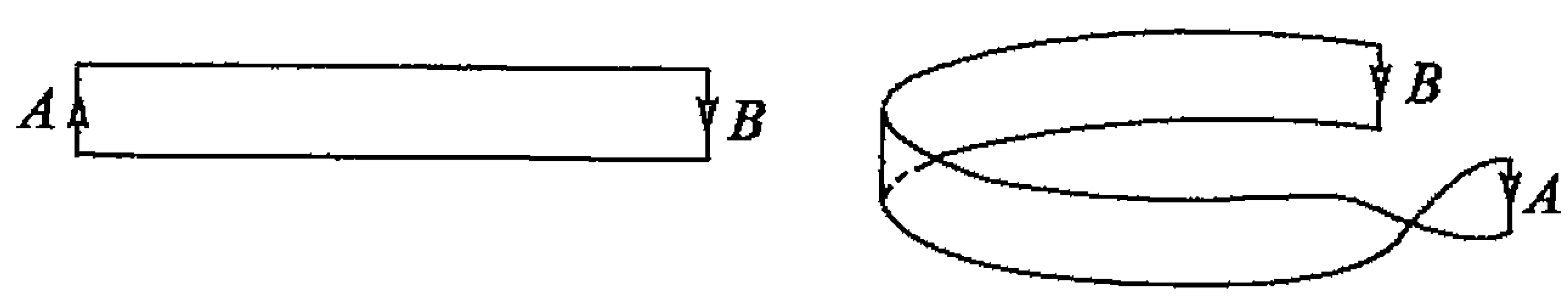


图 1. 15

如图 1. 14 那样一个简单而毫不夸张造作的例子,使我们深切感到单凭直观有时候也会将人们引入歧途. 这就产生了强烈的要求,要人们按某种抽象的方式来考虑空间的概念,不能单单依靠它们在欧氏空间内的特殊表示. 下面我们将设法把曲面的概念用严格的数学语言表述出来. 整个过程将是相当长的,首先要定义抽象

① 把空间看作是橡皮做的,用以解释拓扑等价已有相当长的历史;这种想法源出于 Möbius,大约在 1860 年左右.

(拓扑)空间,然后从中识别出曲面,即局部像欧氏平面的空间.

1.4 抽象空间

探索拓扑空间令人满意的定义时,有两点是需要注意的①. 这个定义应该足够广泛,使得能够把形形色色的对象包括进来作为空间. 我们将把有限离散点集看作空间,同样也把像实数轴那样的不可数连续点集作为空间;我们所得意的几何曲面固然包括在空间之列,诸如复平面的单位圆上复值连续函数所构成的函数空间也是拓扑空间. 我们还希望能对这些空间进行某些简单的构造,诸如作两个空间的笛卡儿乘积,或将一个空间的某些点粘合而得出一个新空间(如前面 Möbius 带的制作). 另一方面,空间的定义应包括足够多的信息,使得两个空间之间映射的连续性可以定义. 实际上,正是这后一个考虑导致下面的抽象定义.

设f为两个欧氏空间之间的映射,$f:\mathbb{E}^m\to\mathbb{E}^n$. 古典的连续性定义可以陈述如下:$f$在$x\in\mathbb{E}^m$连续,假如给定$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当$\|y-x\|<\delta$时有$\|f(y)-f(x)\|<\varepsilon$. 若$f$在每点$x\in\mathbb{E}^m$满足这个条件,则称$f$是连续映射. $\mathbb{E}^m$的子集N叫做点$p\in\mathbb{E}^m$的一个邻域,假如对于某个实数$r>0$,以p为中心、r为半径的闭圆盘包含在N内. 上面的连续性定义不难重述成下面的形式:f是连续的,假如对于任何$x\in\mathbb{E}^m$,以及$f(x)$在$\mathbb{E}^n$内的邻域N, $f^{-1}(N)$为x在$\mathbb{E}^m$内的一个邻域.

空间的每点有一组"邻域",这些邻域又引出了连续映射的适当定义,这就是关键所在. 注意在欧氏空间内定义邻域时完全依靠两点之间的欧氏距离. 在构造抽象空间时,我们希望保留邻域的概念,但要避免对距离概念的任何依赖(拓扑等价不保持距离).

通过对欧氏空间内邻域性质的考察,得到下列关于拓扑空间的公理.

(1.3)设有一个集合X,并且对于X的每一点x选定了一个以X的子集为成员的非空组合,这每个子集叫做x的一个邻域. 邻域需要满足下列四条公理:

(a)x在它自己的每个邻域里.

(b)x的任何两个邻域的交集为x的一个邻域.

(c)若N是x的邻域,U为X的子集,它包含N,则U是x的邻域.

(d)若N是x的邻域,并且若$\mathring{N}$表示集合$\{z\in N\mid N是z的邻域\}$,则$\mathring{N}$是x的邻域(集合$\mathring{N}$叫做N的内部.)

这一整套结构就叫做一个**拓扑空间**. 每点$x\in X$指定满足公理(a)~(d)的一组邻域,就叫做在集合X上给了一个**拓扑结构**,或简称**拓扑**. (为了对公理(d)的背景稍作说明,取一点$x\in\mathbb{E}^m$,并令B(球)为到x的距离小于等于1的点集. 则B是x

① 现代的定义很晚才出现,拓扑空间的公理最早于1914年在 Hausdorff 的书中出现.

的一个邻域. B 的内部就是到 x 的距离小于 1 的点所构成的集合(球体减去它的边界),它仍是 x 的邻域.)

现在我们可以精确地说明什么是连续映射,什么是同胚了. 设 X 与 Y 是拓扑空间①. 映射 $f:X\to Y$ 是**连续的**,假如对于 X 的每点 x,以及 $f(x)$ 在 Y 内的任意邻域 N,集合 $f^{-1}(N)$ 为 x 在 X 内的邻域. 映射 $h:X\to Y$ 叫做是一个同胚,假如它是一对一的连续满射,并且有连续的逆映射. 如果这样一个映射存在,则称 X **同胚于** Y,或 X **拓扑等价于** Y.

突然之间事情变得复杂起来,我们需要一些例子来缓和一下,这将会比较直观.

例子

1. 任何欧氏空间按通常的方式定义邻域就是一个拓扑空间. 稍后,我们将证明不同维数的欧氏空间不能互相同胚. 这是一个困难的问题,但是它的解决关系到我们所给的同胚定义是否能与空间维数的概念并行不悖.

2. 设 X 为拓扑空间,Y 为 X 的子集. 我们可以在 Y 上按如下的方式定义一个拓扑. 对于一点 $y\in Y$,取出它在拓扑空间 X 的全体邻域,使这每个邻域与 Y 相交. 所得的交集作为 y 在 Y 内的邻域. 拓扑结构的公理不难验证,我们说 Y 具有**子空间拓扑**. 这是一个非常有用的手段. 例如,这使我们可以把欧氏空间的任何子集看作一个拓扑空间. 特别地,我们曾经举出过的各个曲面都成了拓扑空间.

3. 设 C 为复平面上的单位圆周,$[0,1)$ 为大于等于 0、小于 1 的全体实数. 使这两个集合分别具备平面与实数轴的子空间拓扑. 按 $f(x)=e^{2\pi ix}$ 定义 $f:[0,1)\to C$,则给出了一个连续映射. 注意这个映射是一对一的满射. 它的逆映射不连续(为什么?). 这说明在同胚定义中对于逆映射的连续性要求是非常重要的:如果得出圆周同胚于区间,那将是很令人扫兴的事.

4. 考虑图 1.8 所显示的情况,并把球面与四面体表面看作是 $\mathbb{E}^3$ 的子空间. 验证径向投影 π 给出这两个空间之间的一个同胚. 这种类型的同胚叫做**单纯剖分**(这里得到的是球面的一种单纯剖分),后面将有一章专门讨论它.

5. 集合上的距离函数或度量给出这个集合上的拓扑. 邻域的构造恰如欧氏空间的情形. 我们对于某个函数空间来阐明这一点. 设 X 为在实数轴的闭区间 I 上定义的连续实值函数集合. 这个集合内的函数必然是有界的,X 上通常的距离函数定义为

$$d(f,g)=\sup_{x\in I}|f(x)-g(x)|.$$

对于 $f\in X$,X 的子集 N 是 f 的邻域,假如对于某个正实数 ε,所有与 f 的距离小于或等于 ε 的函数都在 N 内.

① 每个字母 X 与 Y 包含了一大堆内容,即定义(1.3)中所描绘的复杂结构.

6. 两个不同拓扑空间的点集可以是同一个. 作为一个比较奇怪的拓扑结构的例子,在全体实数上定义一个子集为某实数的邻域,假如它含有该实数,并且它的余集是有限集. 这就给出了与实数轴很不一样(不同胚)的拓扑空间. 注意,实数集合上没有一个距离函数给出这个拓扑(为什么?).

7. 设 X 为一个集合,并且对每点 $x\in X$,定义 $\{x\}$ 为 x 的一个邻域. 从而按公理(c),X 内任何含有 x 的子集是 x 的邻域. 直观地看,这个拓扑使 X 成为离散的点集,每点 x 有一个邻域不包含任何其他的点,在这个拓扑之下,任何以 X 为定义域的映射是连续的.

我们现在已经有了充分的准备来确切地说明什么是曲面,不用一定要限制在某个欧氏空间内来考虑问题了.

(1.4) 定义 曲面是这样的拓扑空间,它的每一点有同胚于平面的邻域,并且任意不同的两点有不相交的邻域.

值得花一点时间来较为详细地研究这个定义. 要求空间的每一点有邻域同胚于平面,这正好符合我们直观印象中曲面应该有的样子. 设想我们站在这种曲面上的某点,低头看脚下不远的地方,我们将会觉得自己是站在一张平面上. 地球表面就是一个很好的例子. 除非你是天圆地方学会的会员,否则你一定相信它是一个球面,可是从局部来看它非常像平面. 更仔细地想一想这个要求:空间的每点有邻域同胚于平面. 我们必须把这种邻域本身看作一个拓扑空间才有意义. 但这不至于带来困难,邻域也不外乎是空间的一个子集,因此可以给它以子空间拓扑.

第二个要求(关于每两个不同的点,有不相交邻域)是更带有技术性的. 根据经验,曲面的各种具体的例子都具有这个性质;然而遗憾的是局部像平面的空间不能自动满足它.

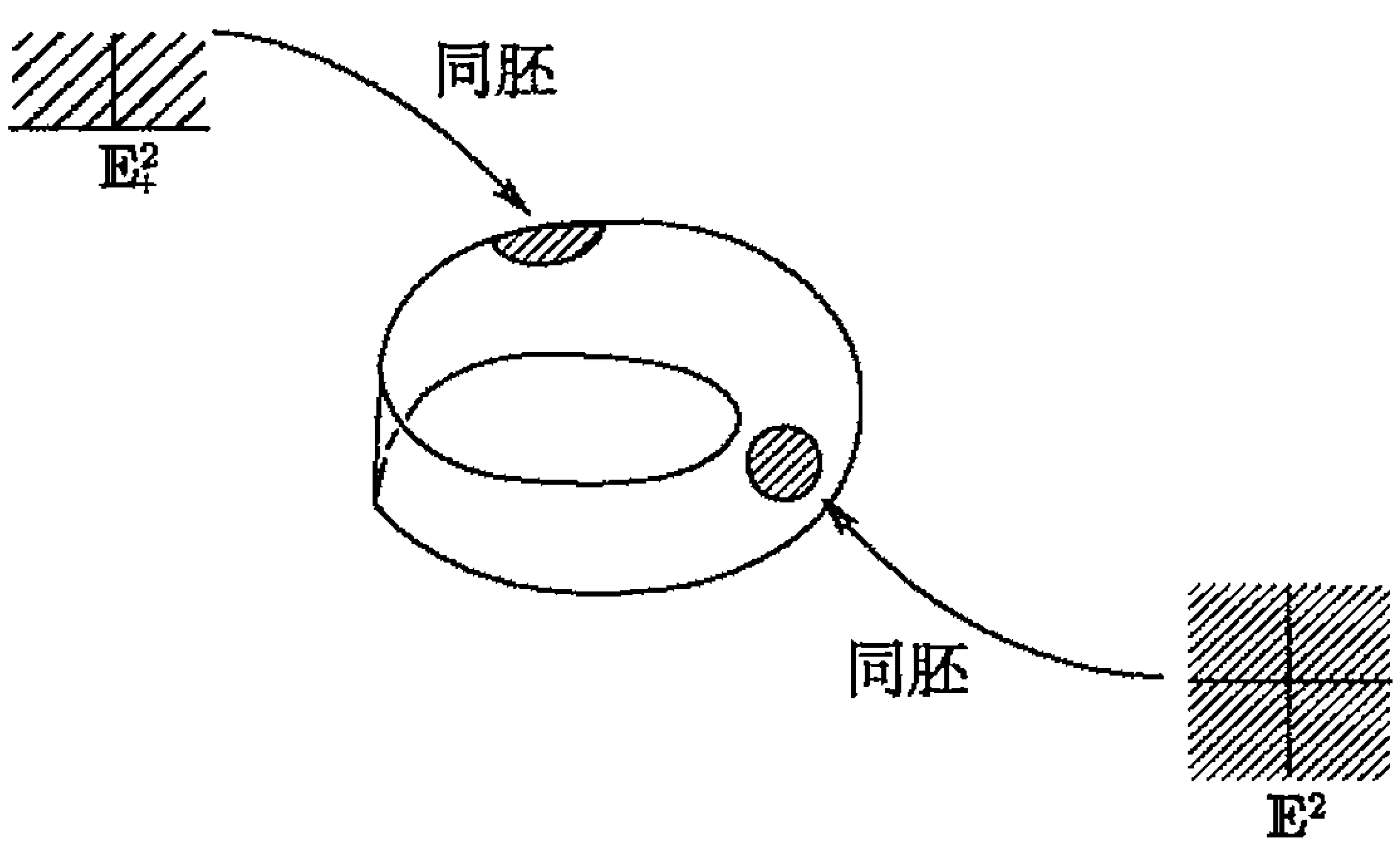


图 1.16

我们所给出的是尽可能简单的定义. 如果允许曲面有棱或边缘(像 Möbius 带的情形),则不能期望每点有邻域同胚于平面. 我们还必须允许某些点具有同胚于上半平面(由平面上 y 坐标大于或等于零的点构成). 所有我们见到的关于曲面的例子,当它们被给以欧氏空间的子空间拓扑时,都能很好地符合这个定义. 图 1.16 举例说明 Möbius 带是符合这个定义的.

1.5　一个分类定理

在 1.3 节的开头,我们曾经表白自己是热衷于几何的人,可是后来逐渐陷入了技术性的细节. 为了摆脱这种处境(至少暂时地),我们回到曲面的理论. 抽象拓扑空间的性质将在第 2 章作比较详细的讨论.

我们将限于考虑比较好的一类曲面,只考虑那种没有边缘的曲面,它们在某种意义之下是自己封闭的:除此之外,还要求曲面是连通的,即只有一整块. 球面、环面、Klein 瓶是我们中意的曲面;圆柱面与 Möbius 带则应排除在外,因为它们有棱. 全平面以及像图 1.9 表示的曲面不是"封闭"的,也排除在外. 确切地说,我们所考虑的是紧致连通曲面,不过紧致性与连通性的精确定义需要等到第 3 章才讲.

值得注意的事实是,如果我们同意限于考虑这些所谓的"闭曲面",则我们可以确切地说出这种曲面一共有多少,也就是可以把它们**分类**. 这就是说,列出一张曲面的表,使得任何闭曲面必定同胚于表上的一个曲面. 并且,这张表不应过大;换句话说,表上的任何两个曲面不同胚.

可以按下述方式造出一些闭曲面. 取一个普通的球面来,挖去两个不相交的圆盘,然后添加上一个圆柱面,使得圆柱面的两个边界圆分别粘在球面上开出的圆孔上,如图 1.17 所示. 这个过程叫做"添加一个环柄"到球面上. 重复进行,得到添上两个、三个或任意有限多个环柄的球面. 你应能看出带有一个环柄的球面只不过是(同胚于)一个环面. 通过添加环柄将给出我们列表中曲面的半数.

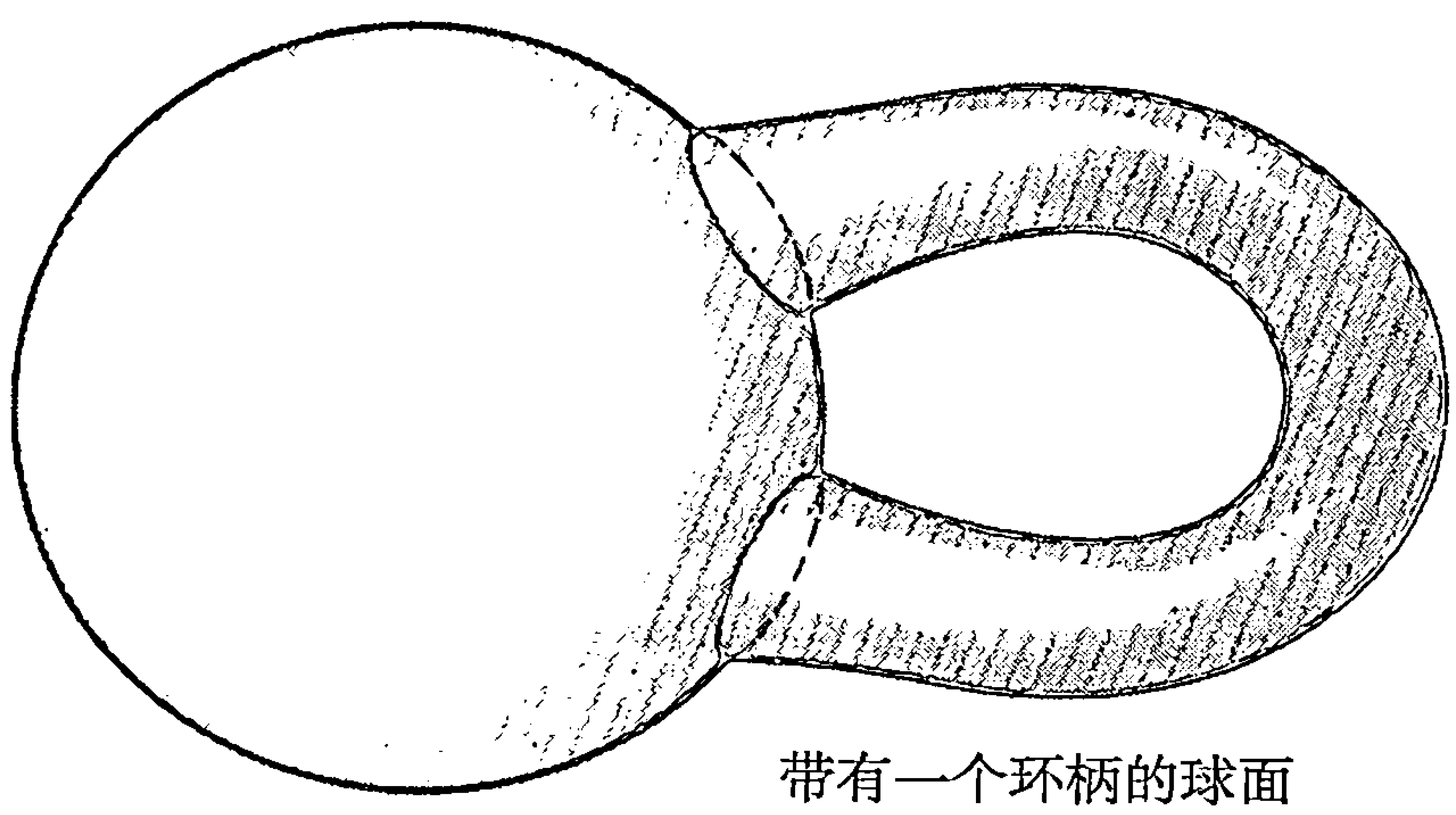
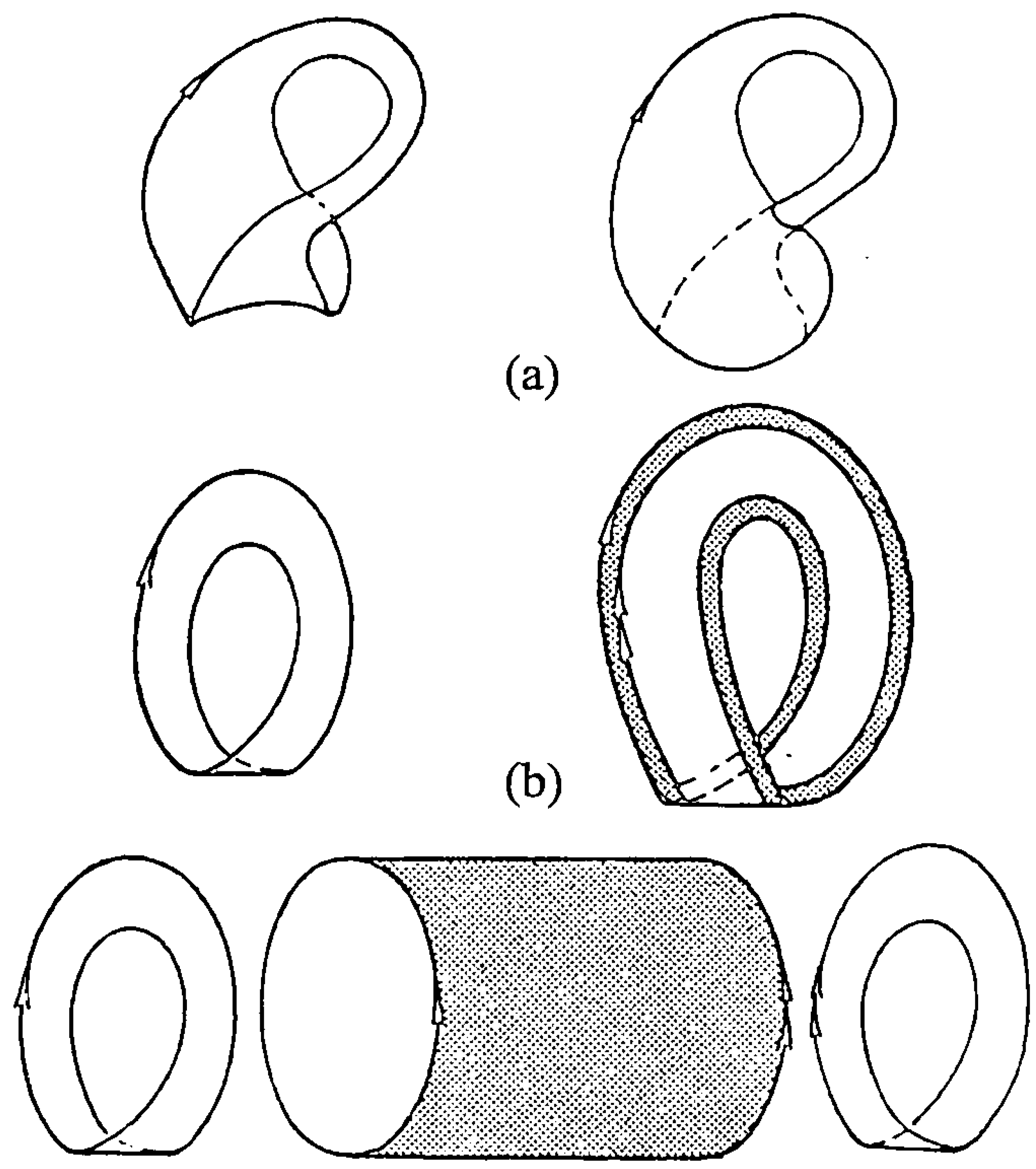


图　1.17

遗憾的是,另一半就像 Klein 瓶那样不能在三维欧氏空间内表示出来,因此比较难以想象. 幸而这些曲面模型的构造过程还不难描述. 从一个球面开始,挖去一个圆盘,并在此处添上一个 Möbius 带. 注意 Möbius 带的边缘是由一整个圆周构成,所以只需将这个圆周与球面上所开圆洞的边界圆周粘起来便可. 你必须想象这

个粘合过程是在某个具有充分余地的空间①内完成的(四维欧氏空间就足够). 如同上面所注意的,不使 Möbius 带自己相交而在三维空间内做这种粘合是办不到的. 所得到的闭曲面叫做**射影平面**.

对于每个正整数 n,我们可以从球面挖去 n 个互不相交的圆盘,然后各替换上一个 Möbius 带,从而得到一个闭曲面. 当 $n=2$ 时,就重新得到 Klein 瓶,图 1.18 的用意就是打算说明为什么是这样. 将 Klein 瓶在三维空间内的通常示意图一劈为两半,并将这两片各作稍许挪动以避免自己相交,于是得到两个 Möbius 带,如图 1.18a所示. 取出其中之一来,标出边界圆周的一个小邻域;这个邻域同胚于圆柱面. 除去圆柱面(见图 1.18c),剩下一个略微小些的 Möbius 带. 读者自然会想起圆柱面同胚于挖去两个不相交的圆盘的球面. 因此,Klein 瓶的通常描述与这里 $n=2$ 时的构造完全一致.



(a)

(b)

(c)

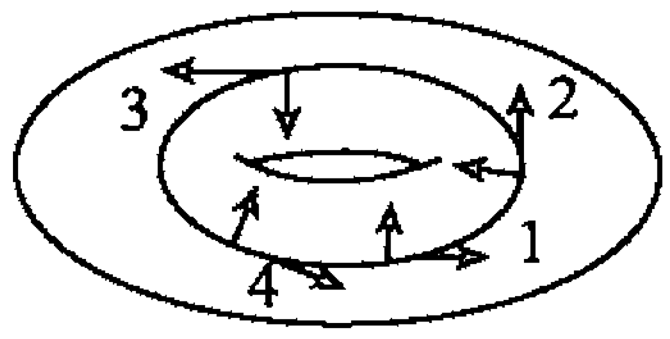
图　1.18

(1.5) 分类定理　任何闭曲面或者同胚于球面,或者同胚于添加了有限多个环柄的球面,或者同胚于挖去有限多个圆盘而以 Möbius 带代替的球面. 而这些球面中的任何两个都不同胚.

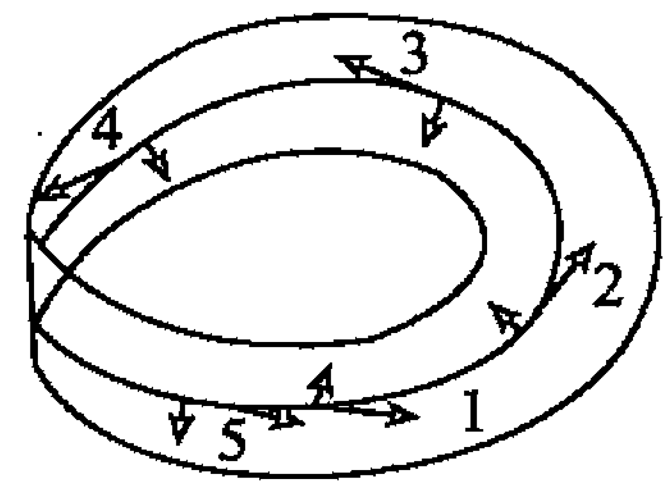
例如,带有一个环柄的球面挖去一圆盘,代之以 Möbius 带,所得的曲面就同胚于从球面挖去三个互不相交的圆盘而代之以 Möbius 带的球面. 分类定理将在第 7 章中证明.

① 在第4章中,我们将介绍怎样可以毫不涉及空间 $\mathbf{E}^3$ 或 $\mathbf{E}^4$ 内的模型而将两个拓扑空间粘合,以得到一个新的拓扑空间.

添加了 n 个环柄的球面叫做**亏格**为 n 的**可定向**曲面. 称它可定向,是由于下面的理由. 如果在这种曲面上画一条平滑的闭曲线,在曲线上某些点选定切向量与法向量(也就是说,在各点附近选定了坐标系——常叫做局部定向),然后让这些向量沿曲线运行一周,则仍然回到原来的一组向量(图 1. 19a). 任何包含有 Möbius 带的曲面不满足这个性质,因此叫做不可定向曲面. 所列表中的后一半都是这一类. 图 1. 19b 表明当切向量与法向量沿着 Möbius 带的中心圆运行一周时,法向量方向逆转.



(a)



(b)

图 1. 19

可定向曲面的分类是 Möbius(1790—1868)在一篇为申请巴黎科学院数学大奖所写的论文中初次提出并解决的,当时他已 71 岁. 审查机构认为当时收到的一些手稿都不值得获奖,因此,Möbius 的工作最后以一篇普通数学论文的面目出现.

1.6 拓扑不变量

我们应当立即指出,试图将所有的拓扑空间予以分类是毫无可能的. 但是我们愿意谋求一些途径,使得能够判断两个具体的空间(比如曲面)是否为同胚的.

求证两个空间拓扑等价是一个几何问题,将涉及怎样造出两个空间之间具体的同胚. 所用的技巧则随问题的不同而互异. 我们已经(至少提要地)给出了例子,证明 Klein 瓶同胚于挖去球面上两个不相交的圆盘而代之以 Möbius 带所得的球面.

求证两个空间不同胚,则是性质完全不同的另一个问题. 不可能将两个空间之间的每个映射都拿来检验,断定它们不同胚. 这时采取的办法是依靠空间的"拓扑不变量":不变量可以是空间的某种几何性质,也可以是数,比如像对空间有定义的 Euler 数,也可以是代数系统,比如从空间造出来的群或者环. 重要之点在于这些不变量为同胚所保持——名称正是由此得来. 如果我们怀疑两个空间不同胚,可以计算它们的某些不变量,一旦发现算出的答案不一样,我们的设想就得到证实. 下面举两个例子.

在第 3 章中我们将引进连通性的概念:大体上说,空间是连通的,假如它是一整块. 这个概念可以很准确地定义,并且人们也会毫不惊奇地看出,当施用拓扑映

射于连通空间时,所得的结果仍然是连通的;也就是说,连通性是拓扑不变量. 平面 $\mathbb{E}^2$ 是连通空间的一个例子,直线 $\mathbb{E}^1$ 也是. 但是,如果我们从 $\mathbb{E}^1$ 除去原点,则空间分成了两块(相应于正的实数与负的实数),这就是一个不连通的空间. 假定有一个同胚 $h:\mathbb{E}^1\to\mathbb{E}^2$ 存在,则它将诱导一个从 $\mathbb{E}^1-\{0\}$ 到 $\mathbb{E}^2-\{h(0)\}$ 的同胚. 但 $\mathbb{E}^2$ 除去一点后是个连通空间(还是一整块),而 $\mathbb{E}^1-\{0\}$ 则不连通. 因此,可以得出 $\mathbb{E}^1$ 不同胚于 $\mathbb{E}^2$ 的结论.

第二个例子考虑 Poincaré 所引入的一种构造,这将是第5章的主题. 他的想法是把每个拓扑空间对应于一个群,使得同胚的空间具有同构的群. 如果我们想区别两个空间,可以先尝试以代数的方式来解决问题,计算它们的群,看看这些群是否同构. 如果这些群不同构,则空间是不同的(不同胚). 当然也许我们运气不好,得出同构的群,这时就得谋求更精细的不变量来区别这两个空间.

考虑图 1.20 所画的两个空间. 我们不能指望这两个空间之间存在着同胚,毕竟环形区域中间有个洞而圆盘没有. 这个洞的影响可由图 1.21 内的环道 α 很好地反映出来. 正是由于有这个洞,使得环道 α 不能在环形区域里面连续地缩成一点,而在一个圆盘里,任何环道可以连续地缩为一点. Poincaré 的构造是用像 α 这样的环道来产生一个群,所谓(这个环形区域的)**基本群**:这个群将使环形域有洞的事实得到突出的反映.

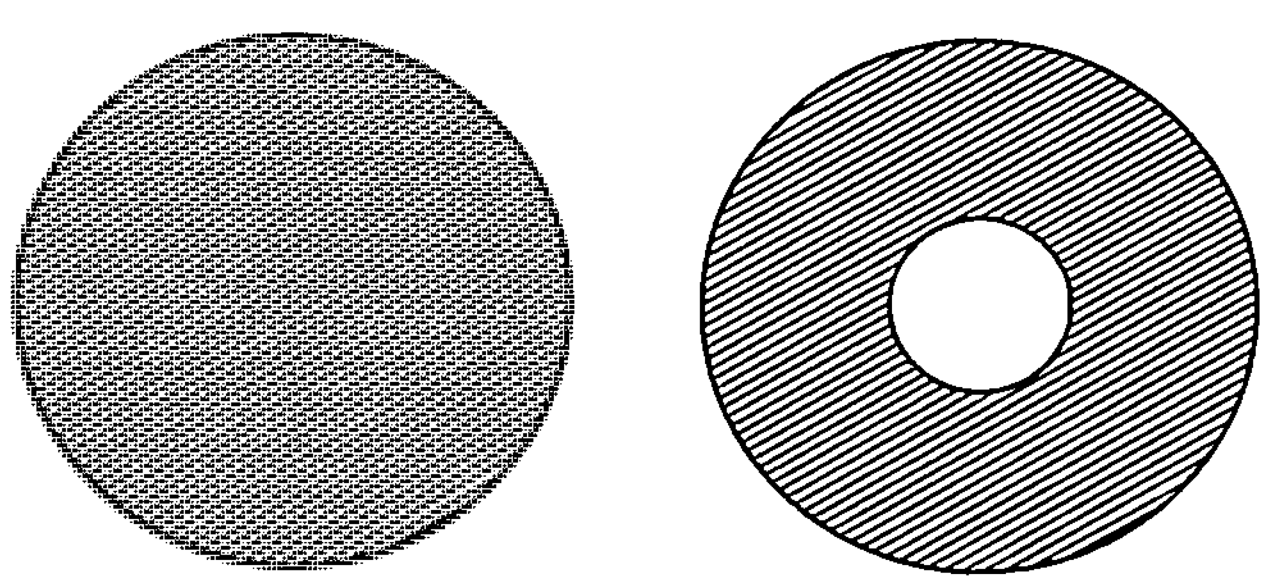


图　1.20

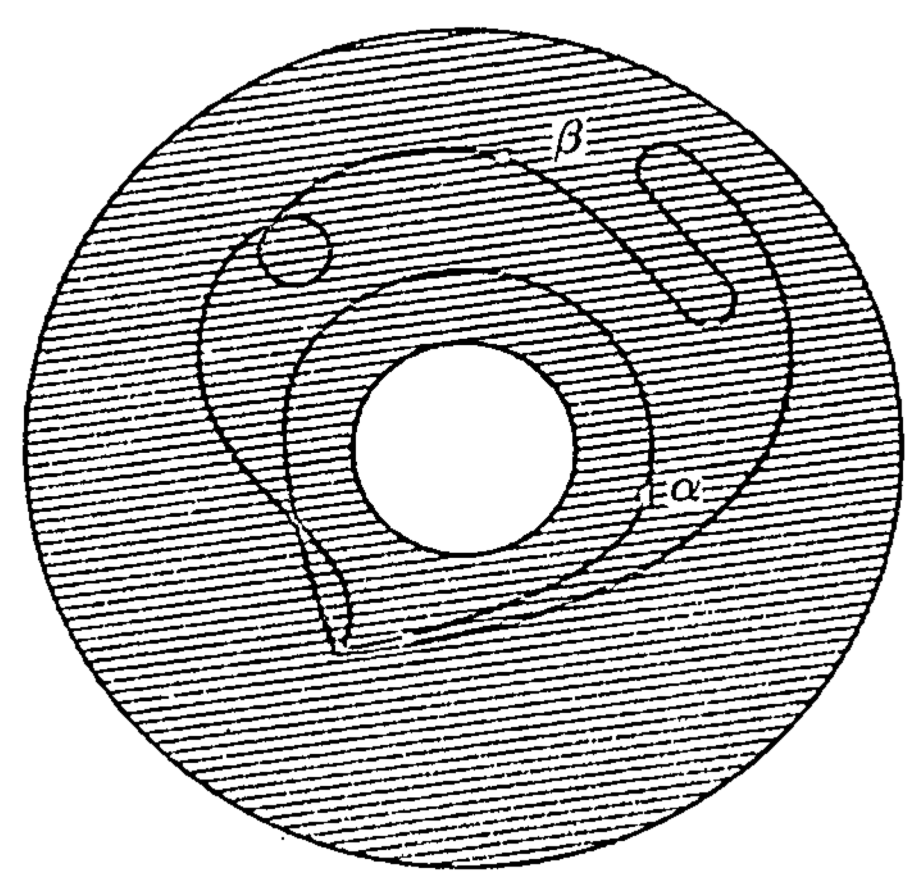


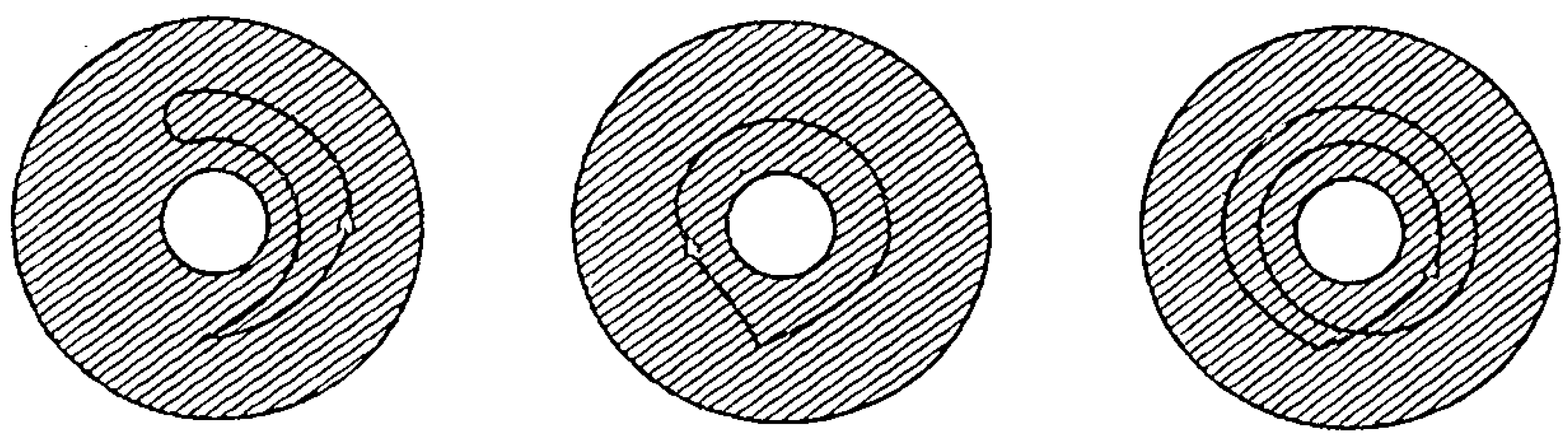
图　1.21

像 α 这样的环道将给出基本群的一个非平凡元素. 再看环形区域,环道 β 也同 α 一样能使我们识别洞的存在,因为 β 可以作不经过洞区的连续形变而变成 α. 这就提示说 β 应与 α 代表基本群内的同一个元素. 考虑以某个特定的点为环道的起点与终点,就可以按自然的方式作环道的乘积. 环道 α 与 β 的乘积 $\alpha\cdot\beta$,可以理解为先沿 α 而行,接着沿 β 而行的复合环道. 在这个乘法之下,环道集合本身不能构成一个群,但如果把(保持端点不动)可以互相连续形变的环道等同起来,则所得到的环道等价类集合确实成一个群.

以上的讨论可以严格化. 从数学上说,拓扑空间 X 内的环道不外是一个连续

映射 $\alpha:C\to X$,其中 C 表示复平面上的单位圆周;若 $\alpha(1)=p$,其中点 p 在 X 中,则我们说环道以 p 为起点与终点. 图中环道上标出的箭头指示 θ 增加的方向,其中 θ 为 C 的参数,C 参数化为 $\{e^{i\theta}\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$. 把箭头逆转产生另一个不同的环道,相当于在基本群内取逆元素. 最简单的环道是把 C 映为一点 p 的映射,这个环道代表基本群内的单位元素.

圆盘的基本群是平凡群,这是因为任何环道可连续地缩为一点——连续形变定义的细节到第 5 章再说. 环形区域的基本群为整数所构成的无限循环群. 图1.22 给出了代表 0, -1 与 +2 的环道.



0　　　　-1　　　　+2

图 1.22

不难想象同胚的空间具有同构的基本群. 若 $\alpha:C\to X$ 为 X 内的环道,$h:X\to Y$ 为同胚,则 $h\alpha:C\to Y$ 定义了 Y 内的一个环道;连续形变也由同胚从 X 送到 Y. 我们可以得出结论说圆盘与环形区域不是同胚的.

列举几个将利用基本群来解决的问题(三个来自几何,一个来自代数),这或许是结束本章,并使读者能够窥见以后各章端倪的最佳方式.

曲面的分类　定理(1.5)所列的表中任何两个曲面的基本群不同构,因此,这些曲面互不同胚.

Jordan 分离定理　平面内的任何简单闭曲线将平面分为两块.

Brouwer 不动点定理　圆盘到自己的任何连续映射至少有一个不动点.

Nielsen-Schreier 定理　自由群的子群是自由群.

习　题

1. 证明:对于任何树形 T,$v(T)-e(T)=1$.
2. 更进一步,证明:对任何图 Γ,$v(\Gamma)-e(\Gamma)\leqslant 1$,等号仅当 Γ 为树形时成立.
3. 证明在任何图内总可找到一个树形包含所有的顶点.
4. 在图 1.3 的多面体中找一个树形包含所有的顶点. 构造对偶图 Γ,并证明 Γ 含有环道.
5. 作了习题 4 以后,将 T 与 Γ 都在多面体内增厚. T 是树形,所以增厚以后变成盘形. Γ 增厚变成什么?
6. 设 P 为正多面体,它的每个面有 p 个边,每个顶点是 q 个面的交点. 用 Euler 公式证明.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}.$$

7. 从习题6导出,正多面体只有5种.

8. 对于图1.3所画的多面体验证 $v-e+f=0$. 找出一个可以形变为哑铃面(见图1.23c)的多面体,并计算它的 Euler 数.

9. 观察一个网球的表面,是否能看出哪是两个盘形相交于它们的公共边界.

10. 试写出实数轴与开区间(0,1)之间的一个同胚. 证明任意两个开区间同胚.

11. 设想图1.23所画的曲面是橡皮做的. 对于每一对空间 X,Y,通过自己思考而确认 X 可以连续地形变为 Y.

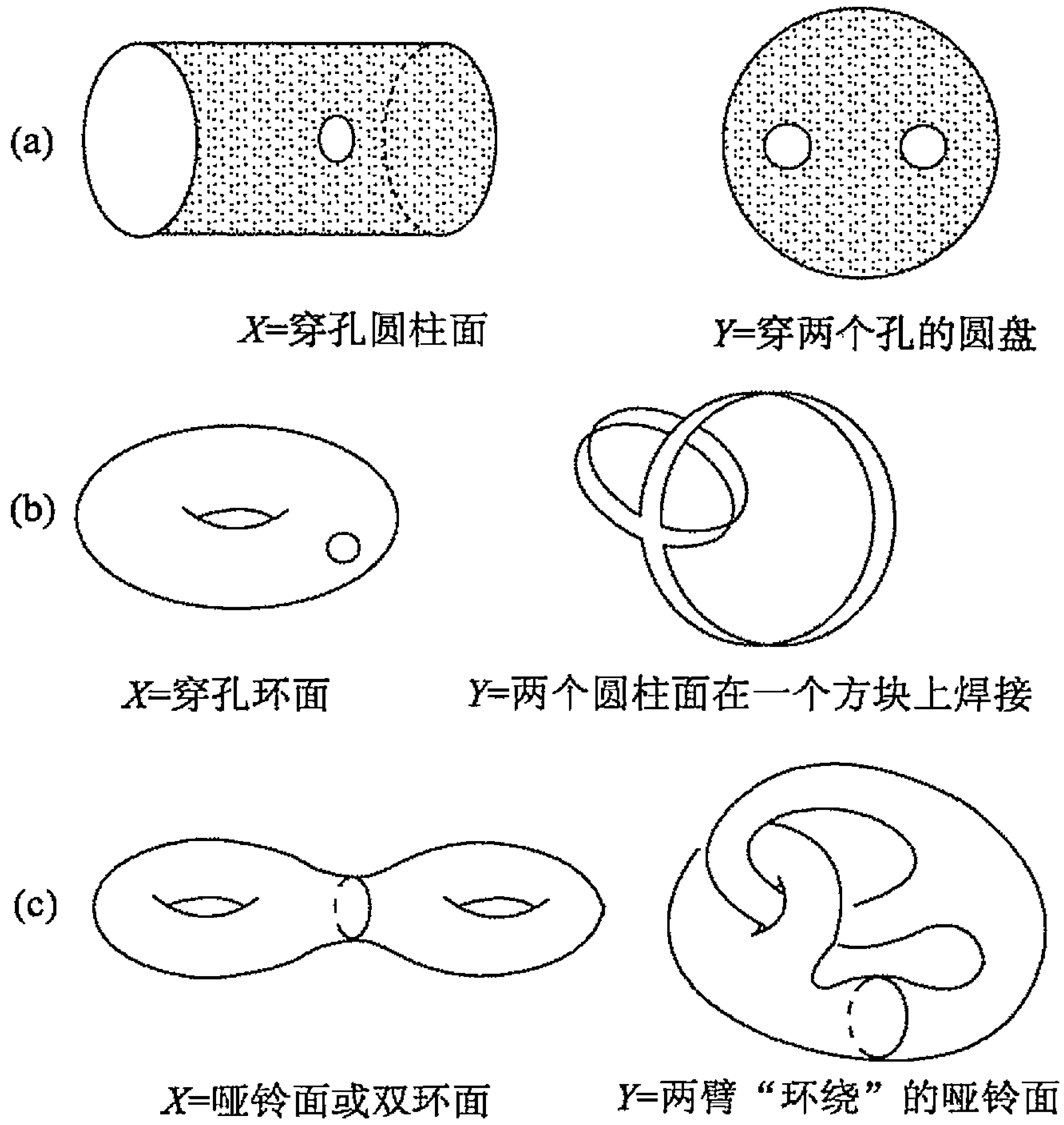


图　1.23

12. 图1.24画出从除去了北极的球面到平面的“球极平面投影”π,写出 π 的公式,并验证 π 是同胚.

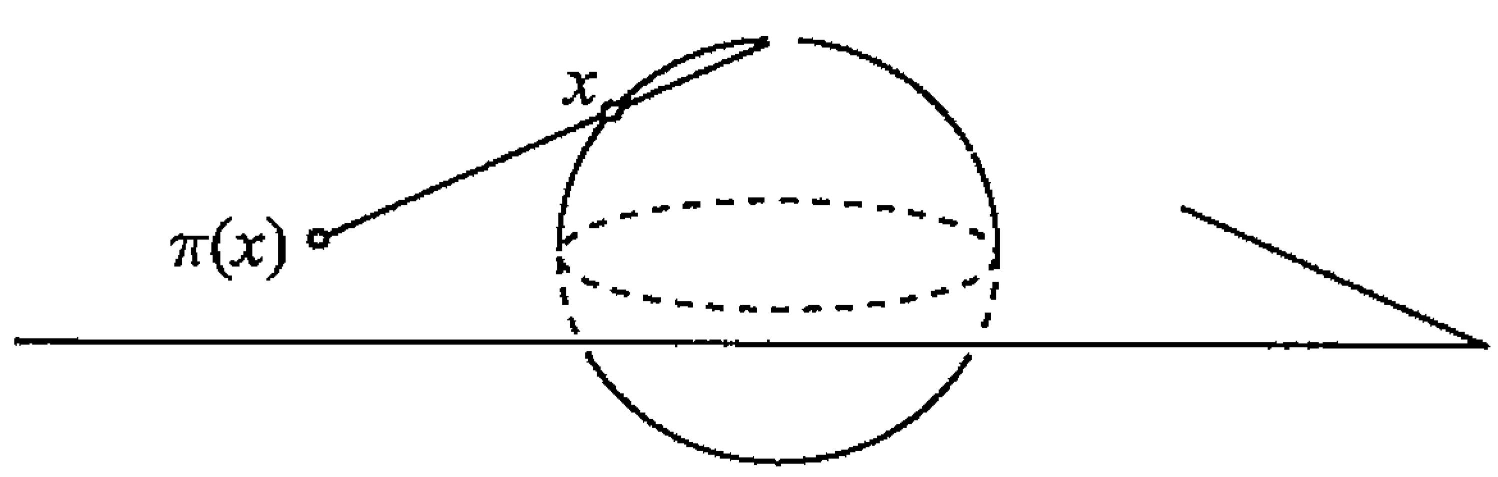


图　1.24

注意 π 提供了除去南北极的球面与除去原点的平面间的一个同胚.

13. 设 x 与 y 为球面上的点. 求出球面的一个把 x 送到 y 的同胚. 将球面换为平面、环面,作同一个问题.

14. 用长方形纸条作一个 Möbius 带,并沿着它的中心圆剪开. 结果如何?

15. 将 Möbius 带沿着在边界与中心圆正中间的圆周剪开. 沿着从边界算起三分之一距离的圆周剪开. 得到的都是什么空间?

16. 若将长方纸条扭转一整周粘起来,并沿着中心圆剪开,结果如何?

17. 定义$f:[0,1)\to C$按照$f(x)=e^{2\pi ix}$. 证明f为连续满单射. 找一点$x\in[0,1)$与x在$[0,1)$的一个邻域N,使得$f(N)$不是$f(x)$在C内的一个邻域. 由此,导出f不是同胚.

18. 如果你感到习题 11(b)有困难,按下述方式作挖去一个圆盘的环面. 先取一个正方形来,它的边将要按通常的方式粘合以得到环面(图 1.25). 注意,那四块阴影部分拼起来构成环面上的一个盘形. 将这四块从正方形割掉,剩下部分按原来该粘合之处粘上.

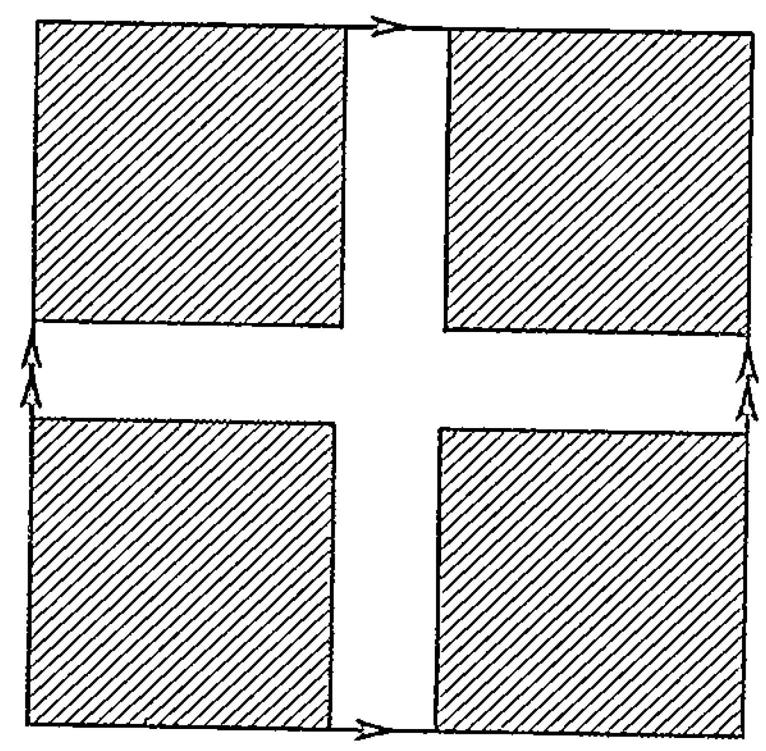


图 1.25

19. 设X为拓扑空间,Y是X的子集. 验证所谓子空间拓扑确实是Y上的一个拓扑.

20. 证明图 1.8 的向径投影是从四面体表面到球面的一个同胚(二者都假设具有从$\mathbf{E}^3$得来的子空间拓扑).

21. 设C为复平面上的单位圆周,D为以C为边界的圆盘,给定两点$x,y\in D-C$,找一个从D到D的同胚,使x与y互换,并且使C上每点不动.

22. C,D如前一题,定义$h:D—C\to D—C$按照

$$h(0)=0,$$
$$h(re^{i\theta})=r\exp\left[i\left(\theta+\frac{2\pi r}{1-r}\right)\right].$$

证明h为同胚,但h不能扩张为一个从D到D的同胚. 画图显示h在D的一条直径上的影响.

23. 用连通性的直观概念论证圆周与长了一个角的圆周不能同胚(图 1.26).

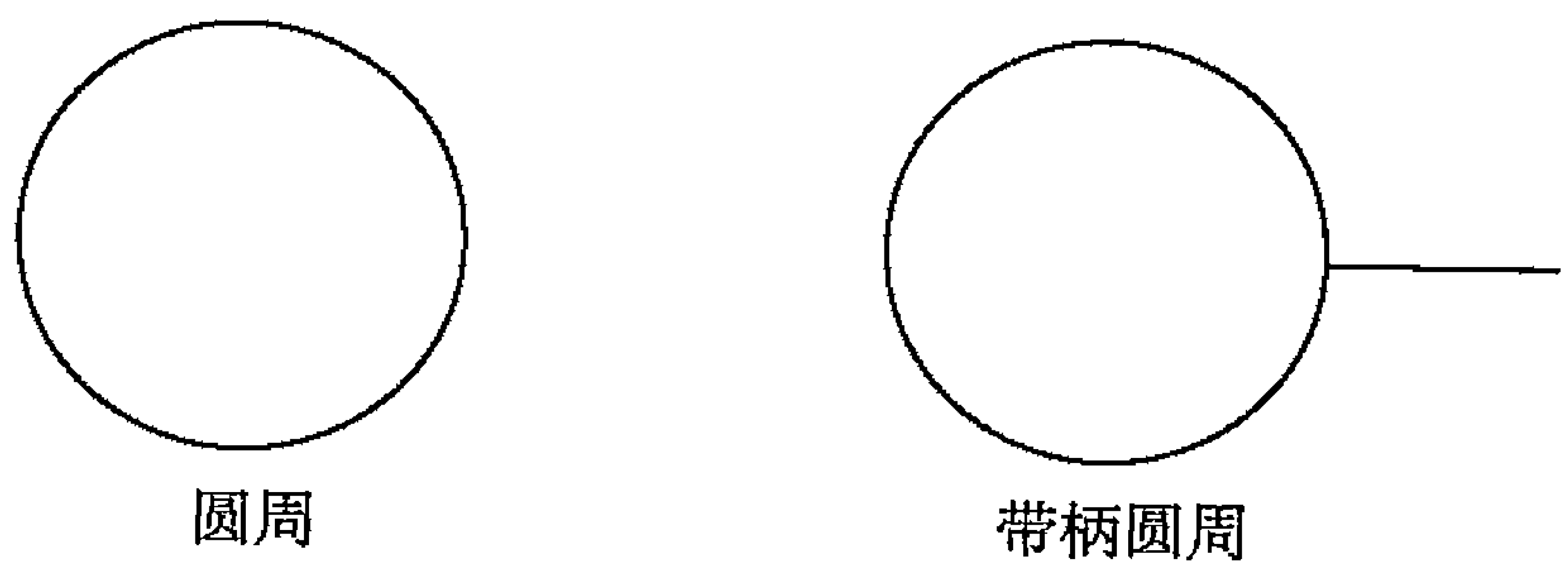


图 1.26

24. 设X,Y为平面上的子空间,如图 1.27. 假定环形区域到自身的同胚必将两个边界圆周上的点映到边界圆周上①,论证X不能同胚于Y.

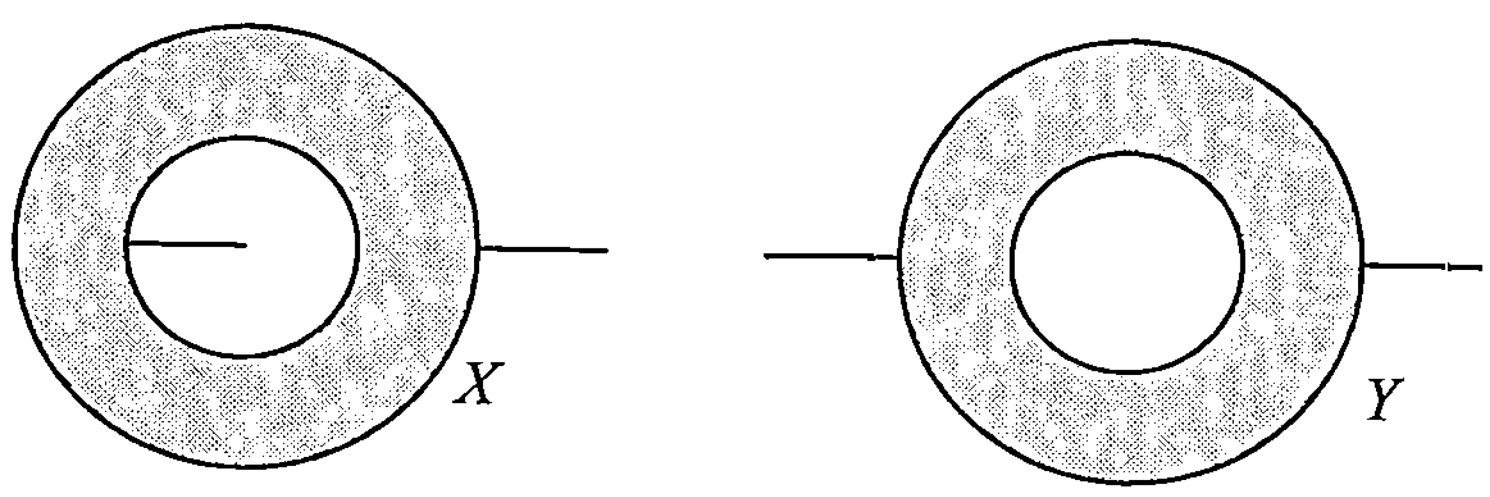


图 1.27

① 不太容易证明:见定理(5.24)的证明.

25. 设 X 与 Y 如上题,考虑 $\mathbf{E}^3$ 的下列两个子空间

$$X\times[0,1]=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in X,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\},$$
$$Y\times[0,1]=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in Y,\quad 0\leqslant z\leqslant 1\}.$$

读者试自己通过思考而确信如果这两个空间是橡皮做的,则从一个可以形变成另一个,从而它们是同胚的.

26. 假定读者已作了习题 14,证明将圆柱面边界圆周之中一个的各对对径点粘合就得到一个 Möbius 带.

27. 如图 1.28 作出 Klein 瓶的一个模型. 沿直线 CD 切开,然后粘合标有 AB 字样的两条线. 观察所得结果,并导出:Klein 瓶是由两个具有公共边界的 Möbius 带构成.

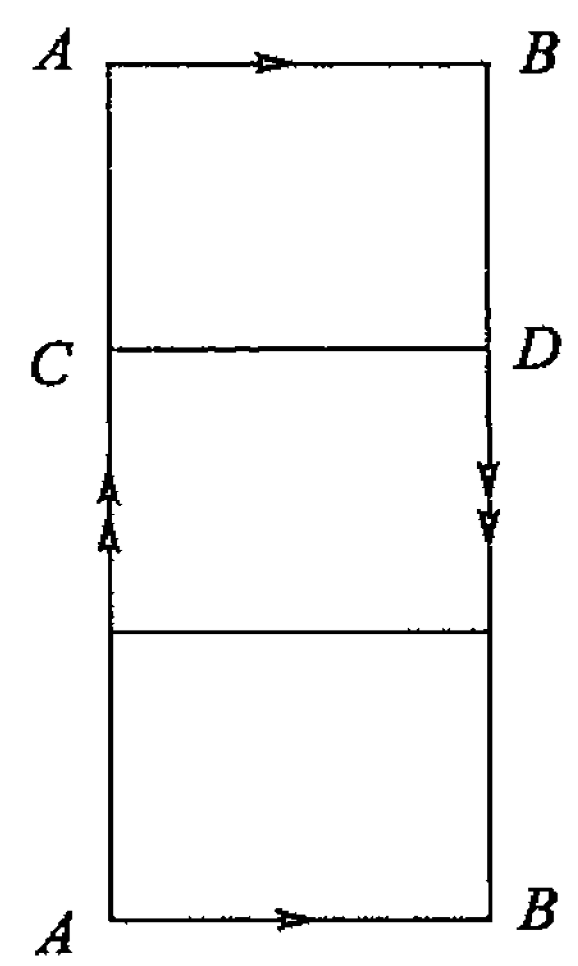


图 1.28

第2章 连 续 性

Geometry formerly was the chief borrower from arithmetic and algebra, but it has since repaid its obligations with abundant usuary; and if I were asked to name, in one work, the pole star round which the mathematical firmament revolves, the certral idea which pervades the whole corpus of mathematical doctrine, I should point to Continuity as contained in our notions of space, and say, it is this, it is this! (几何曾经大量地从算术与代数中借用概念,但是到了今天,它已经大大超额地补偿了宿债. 如果有人要我说出有哪一个概念,堪比数学的苍穹所环绕的北极星,是闪现于整个数学文献里的中心概念,我一定会指着描述空间性质的"连续性",说道:就是它,就是它!)

J. J. Sylvester

2.1 开集与闭集

第 1 章所给的拓扑空间定义虽然合乎我们直观上对于空间的要求,但用起来并不十分方便,因此,我们的第一个任务就是拿出一组与之等价的,但更便于运用的公理.

设 X 为拓扑空间,X 的子集 O 称为**开集**,假如它是它自己每个点的邻域. 注意按定义(1.3)的公理(c),任意一组开集的并集是开集. 按那里的公理(b),任意有限多个开集的交集为开集. 整个空间 X 与空集$\varnothing$是开集. 而且对于一点 x 的邻域 N,公理(d)告诉我们 N 的内部是一个开集,它含有 x,并且包含在 N 内.

在 $\mathbb{E}^3$ 内,一个集合是开集,假如对于它的每点有以这点为中心的球包含在集合内. 例如,由不等式 $z>0$ 定义的半空间是开集,坐标满足 $x^2+y^2+z^2<1$ 的点集也是开集. 另一方面,由 $z\geqslant 0$ 定义的半空间不是开集,因为包围着(x,y)平面上一点的球,无论多么小,一定伸到由 $z<0$ 决定的下半空间内去. 一组无穷多个开集的交集不一定是开集,例如,集合组

$$\left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<\frac{1}{n}\right\},\quad n=1,2,3,\cdots$$

的各集合一齐拿来作交集得到的是 $\mathbb{E}^3$ 的原点,不是开集.

现在我们试从另一个方向着手,从开集的概念出发,对于每点造出一组邻域来. 于是假定对于集合 X 给定了它的一组子集(称为开集),使得任意多个开集的并集是开集,任意有限多个开集的交集是开集,整个 X 与空集也是开集. 对于 X 的

点 x,我们称 X 的子集 N 为 x 的**邻域**,假如可以找到开集 O,满足 $x \in O \subseteq N$.

我们说,这个邻域的定义使 X 成为一个拓扑空间. 每点至少有一个邻域,全空间 X 就是;定义(1.3)的公理(a)与(c)显然满足. 若 N_1, N_2 是 x 的邻域,则有开集 O_1, O_2 满足 $x \in O_1 \subseteq N_1$, $x \in O_2 \subseteq N_2$,于是有 $x \in O_1 \cap O_2 \subseteq N_1 \cap N_2$. 但 $O_1 \cap O_2$ 是开集,因此,$N_1 \cap N_2$ 是 x 的邻域,这就验证了公理(b). 最后,设 N 是 x 的邻域,令$\mathring{N}$为以 N 为邻域的点 z 的全体. 取开集 O,使得 $x \in O \subseteq N$. 作为开集,O 是它自己每一点的邻域,因此,O 包含于$\mathring{N}$. 因此,$\mathring{N}$为 x 的邻域,这就验证了公理(d).

我们决定兜一个圈子. 换句话说,从一组所谓的开集出发,构造出一个拓扑空间 X,然后再看这个空间内的开集. 这两个"开"的概念是否一致呢? 回答是肯定的. 因为若 O 是原来的开集之一,则按邻域的定义,O 是它自己每点的邻域,因此它是拓扑空间 X 内的一个开集. 反之,若 U 是空间 X 的一个开集,它是它自己每点的邻域. 因此,对于 $x \in U$,可以找到原来的开集 O_x 使得 $x \in O_x \subseteq U$. 于是 $U = \cup\{O_x \mid x \in U\}$ 是原来意义下的开集,因为任意一组开集的并集是开集. 我们留给读者去检验另一种可能性,即从一个拓扑空间出发,引进开集的概念,然后用这些开集对于每点造出一族邻域,则所得的这些邻域正是原来空间内按公理规定的邻域.

以上的讨论说明,有充分的根据将拓扑空间的定义以开集为出发点来重述.

(2.1) 定义 集合 X 上的一个**拓扑**是由 X 的子集所构成的一个非空组,它的成员叫做开集,它们满足下列要求:任意多个开集的并集是开集,有限多个开集的交集是开集,X 与空集是开集. 集合配备了它上面的一个拓扑以后叫做**拓扑空间**.

以后,我们将采用这个定义.

在 $\mathbb{E}^n$ 的"通常"拓扑中,开集的刻画如下. 集合 U 为开集,假如对于 $x \in U$,总可以找到正的实数 ε,使得以 x 为中心,ε 为半径的球整个落在 U 内. 每当提到 $\mathbb{E}^n$ 时,我们总认为给的是这个拓扑.

若 X 为拓扑空间,Y 为 X 的子集,Y 上的**子空间拓扑**,或**诱导拓扑**是以 X 的开集与 Y 的交集作为这个拓扑的开集而定义的. 换句话说,Y 的子集 U 在子空间拓扑之下为开集,假如我们可以找到 X 的开集 O,使得 $U = O \cap Y$. 比如,欧氏空间的任何子集就按这种方式得到一个拓扑. 每当我们说起拓扑空间 X 的一个**子空间** Y 时,总是理解为 Y 是 X 的子集,并配备了子空间拓扑.

一个极端的情形是 X 上的**离散拓扑**. 这时,X 的每个子集是开集. 这是在一个给定的集合 X 上所可能有的最大拓扑(如果一个拓扑包含了另一个拓扑内所有的开集,则说它"大于"另外那个拓扑). 具有离散拓扑的空间叫做**离散空间**. 例如,若我们取 $\mathbb{E}^n$ 内具有整数坐标的全体点,并给以子空间拓扑,则所得的是离散空间.

拓扑空间的子集叫做**闭集**,假如它的余集是开集. 考虑平面上的子集,如单位圆周、单位圆盘(坐标满足 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 的点)及函数 $y = e^x$ 的图像,或满足 $x \geqslant y^2$ 的点(x, y),等等. 所有这些都是闭集. 其次在 $\mathbb{E}^2$ 内考虑满足 $x \geqslant 0$ 与 $y > 0$ 的点$(x,$

y)的全体所构成的集合 A. A 不是闭集,因为 x 轴在它的余集内,但是中心在正 x 轴上的任何球体必与 A 相交. 同时注意 A 也不是开集. 因此,子集可以既不是开的也不是闭的. 但集合也可以同时是开的又是闭的. 例如,取空间 X 为 $\mathbb{E}^2$ 内满足 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$ 的所有的点(x,y)构成,具备由 $\mathbb{E}^2$ 诱导的拓扑. X 内第一个坐标为正的点所构成的子集是 X 内既开又闭的子集(但它当然不是 $\mathbb{E}^2$ 的开集). 注意任意多个闭集的交集为闭集,有限多个闭集的并集是闭集. 只需用 De Morgan 公式就可证明这些.

闭集可按下述方式刻画. 设 A 为拓扑空间 X 的子集,一点 $p\in X$ 叫做 A 的**极限点**(或**聚点**),假如 p 的每个邻域包含了 $A-\{p\}$ 的至少一点. 如下面的例子表明,A 的极限点可以属于 A,也可以不属于 A.

例子

1. 取 X 为实数轴 $\mathbb{R}$(即 $\mathbb{E}^1$ 的通常称呼与记法),并设 A 由点 $1/n(n=1,2,\cdots)$ 构成. 则 A 恰好有一个极限点,即原点.

2. 仍然取 X 为实数轴,设 $A=[0,1)$. 则 A 的每点为 A 的极限点,除此之外,1 也是 A 的一个极限点.

3. 设 X 为 $\mathbb{E}^3$,A 由坐标为有理数的点的全体构成. 则 $\mathbb{E}^3$ 的每点为 A 的极限点.

4. 另一个极端,设 $A\subseteq\mathbb{E}^3$ 为坐标是整数的点集. 则 A 没有任何极限点.

5. 取 X 为全体实数配备以所谓**余有限拓扑**. 这里,一个集合为开集,假如它的余集为有限或整个 X. 若取 A 为 X 的任何无穷子集(比如说全体整数),则 X 的每点为 A 的一个极限点. 另一方面,X 的有限子集在这个拓扑之下没有极限点.

(2.2) 定理 一个集合为闭集,当且仅当它包含了自己所有的极限点.

证明 若 A 为闭集,则它的余集 $X-A$ 为开集. 由于开集是它自己每一点的邻域,$X-A$ 的任何一点不能是 A 的极限点. 因此,A 包含了它自己所有的极限点. 反之,若 A 包含了它自己的所有极限点,对于任意的 $x\in X-A$,由于 x 不是 A 的极限点,可以找到 x 的邻域 N 与 A 不相交. 因此,N 在 $X-A$ 内,这表示说 $X-A$ 为它自己每点的邻域,从而是开集. 于是知道 A 是闭集.

A 与它所有的极限点的并集叫做 A 的**闭包**,记作 $\bar{A}$.

(2.3) 定理 A 的闭包是最小的包含 A 的闭集,换句话说,是包含 A 的一切闭集之交.

证明 首先,注意 $\bar{A}$ 确实是闭集. 因为若 $x\in X-\bar{A}$,我们可以找到 x 的开邻域 U 与 A 不相交. 由于开集是它每一点的邻域,U 也不能包含 A 的任何极限点. 因此,有开集 U 使得 $x\in U\subseteq X-\bar{A}$. 因此,$X-\bar{A}$ 是它自己每一点的邻域,它必然是开集. 若 B 是包含 A 的任意一个闭集. 则 A 的每个极限点也是 B 的一个极限点,因此必属于 B. 这就得到 $\bar{A}\subseteq B$. 由于 $\bar{A}$ 为闭集,包含 A,并且包含于任何包含 A 的闭集,所以 $\bar{A}$ 必

然是所有包含 A 的闭集的交集.

(2.4) 系　*一个集合为闭集,当且仅当它等于自己的闭包.*

闭包等于整个空间的集合叫做是**稠密的**. 上面例3就是这个情形. 稠密集与空间的任何开集相交.

集合 A 的**内部**是包含于 A 的所有开集之并,记作 $\mathring{A}$. 立刻可以验证,一点 x 属于 A 的内部,当且仅当 A 是 x 的邻域. 开集是它自己的内部. 在 $\mathbb{E}^2$ 内如果用 D 表示单位圆盘,即满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点 (x,y) 的集合,则 D 的内部是 $D-C$,这里 C 是单位圆周;圆周 C 的内部为空集,因为平面上包含于 C 的开集只有空集.

另一个有用的概念是集合的**边界**. 集合 A 的边界定义为 A 的闭包与 $X-A$ 的闭包之交. 一个等价的定义是 X 内既不属于 A 的内部,又不属于 $X-A$ 内部的点所构成的集合. 例如,在平面内,单位圆盘 D,它的内部 $\mathring{D}$,以及单位圆周 C 都有相同的边界,即 C. $\mathbb{E}^3$ 内具有有理坐标的全体点以整个 $\mathbb{E}^3$ 为边界,因此,一个子集的边界可以是整个空间.

设集合 X 上有了一个拓扑,β 为这个拓扑的一组开集,使得每个开集可以写成 β 中成员的并集. 则 β 叫做这个拓扑的一组**拓扑基**. 一个等价的陈述方式是对于任意点 $x\in X$ 以及 x 的邻域 N,有 β 的成员 B,使得 $x\in B\subseteq\beta$. 实数轴的拓扑提供了一个很好的例子,在那里,全体开区间构成一组拓扑基. 而具有有理数端点的开区间全体构成一组更小些的拓扑基(注意第二组拓扑基是可数的).

用给出一组拓扑基的办法来描述拓扑结构往往是很有用处的. 为此,我们愿意知道在什么条件下 X 的一组子集是某个拓扑的拓扑基.

(2.5) 定理　*设 β 是由 X 的子集构成的一个非空组. 若 β 内有限多个成员的交仍属于 β,并且若 $\cup\beta=X$,则 β 是 X 上某个拓扑的拓扑基.*

证明　取 β 成员一切可能的并集作为开集,然后验证它们满足一个拓扑必须满足的要求.

习　　题

1. 对于拓扑空间 X 内的任意子集 A,B,验证下列性质:

   (a) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$;　(b) $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$;　(c) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$;

   (d) $(A\cup B)^\circ\supseteq\mathring{A}\cup\mathring{B}$;　(e) $(A\cap B)^\circ=\mathring{A}\cap\mathring{B}$;　(f) $(\mathring{A})^\circ=\mathring{A}$.

   试说明在(b)与(d)内等号未必成立.
2. 在实数轴上找一组闭集,它们的并集不闭.
3. 试确定下列平面点集的内部,闭包与边界:

   (a) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$;

   (b) $\mathbb{E}^2$ 除去两条坐标轴;

基础拓扑学

Basic Topology

“这是一本不可多得的优秀教材，内容精心选择，阐述出色，图示丰富……对于作者来说，拓扑学首先是一门几何学……”

——数学公报 （*MATHEMATICAL GAZETTE*）

本书是一部拓扑学入门书籍，主要介绍了拓扑空间中的拓扑不变量，以及相应的计算方法。内容涉及点集拓扑、几何拓扑、代数拓扑中的各类方法及其应用，包含139个图示和350个难度各异的思考题，有助于培养学生的几何直观能力，加强对书中内容的理解。本书注重抽象理论与具体应用相结合，要求读者具有实分析、初等群论和线性代数的知识。作者在选材和阐述上都着意体现数学的美，注重培养读者的直觉，经常从历史的观点介绍拓扑学。

本书是许多国外知名高校的拓扑学指定教材，在我国也被许多大学采用。

M. A. Armstrong　英国拓扑学家。1966年获得Warwick大学博士学位，师从著名拓扑学家Erik Zeeman。Armstrong长期任教于英国Durham大学。他撰写的多部教材广受好评，已被译为多种文字。

孙以丰　著名的拓扑学家和数学教育家，曾任吉林大学数学系教授、博士生导师。

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010)51095186
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com
分类建议：数学/拓扑学
人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn

ISBN 978-7-115-21886-5

9 787115 218865 >

ISBN 978-7-115-21886-5
定价：29.00 元