METODE NUMERICE DE REZOLVARE A ECUATIILOR ALGEBRICE SI TRANSCENDENTE

REALIZAT DE APACHIȚEI LUCIANA, 12T

SCOP/OBIECTIVE

- Recunoasterea prezenței soluțiilor unei ecuații algebrice sau transcendentepe un interval dat;
- Separarea intervalelor domeniului de definitie a unei funcții f(x), care vor conține exact o soluție a ecuației f(x)=0;
- Utilizarea algoritmilor de rezolvare a ecuațiilor algebrice si transcendente prin metoda bisecției;
- Elaborarea programelor de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente prin metoda bisecției;
- Combinarea metodelor studiate pentru elaborarea algoritmilor eficienți de rezolvare a ecuațiilor algebrice si transcendente și a programelor care realizează acești algoritmi.

CUPRINS

SEPARAREA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE

A rezolva ecuația algebrică sau transcendentă f(x)=0 înseamnă a determina acele valori ale variabilei x pentru care egalitatea f(x)=0 este una adevărată.

Fie dată ecuația f(x)=0, f(x) fiind definită pe un oarecare interval $a<x<b$.

<u>Ecuații</u>

<u>algebrică</u>

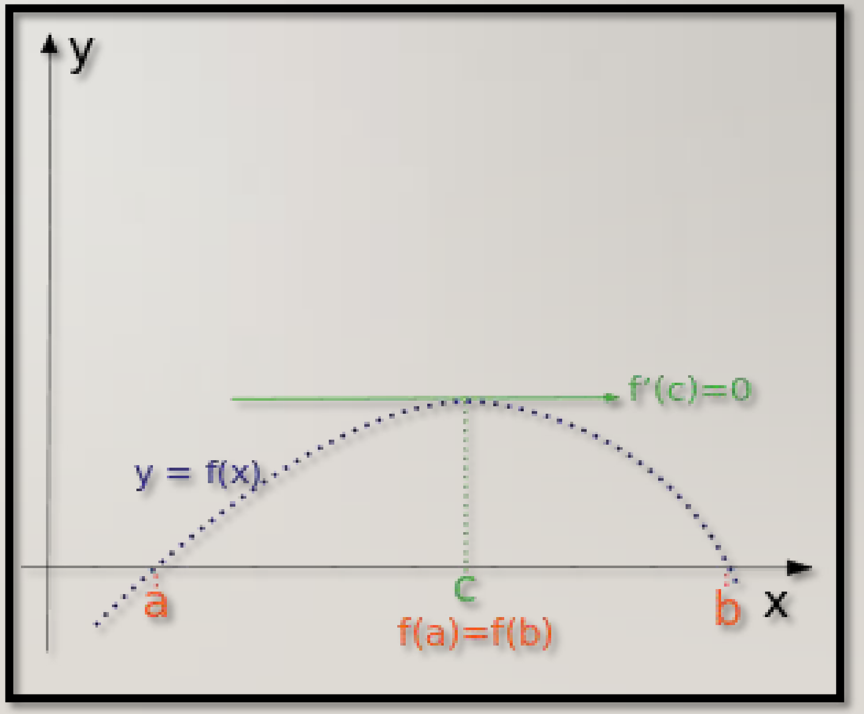
Daca f(x) are forma unui polinom sau poate fi adusă la această formă.

<u>transcendentă</u>

Dacă f(x) nu este polinomială.

<u>Def.:</u> Orice valoare ξ, pentru care expresia f(ξ) = 0 este adevărată, se numeşte zerou al funcţiei f (x) sau soluţie a ecuaţiei f (x) = 0.

<u>Teoremă:</u> Dacă funcţia f(x), con- tinuă pe segmentul [a, b], primeş- te la extremităţile lui valori de semn diferit (f (a) × f (b) < 0), atunci pe acest segment există cel puţin un punct ξ, astfel încît f (ξ) = 0. Dacă pe [a, b] există derivata f '(x), continuă, care are un semn constant, atunci ξ este soluţie unică a ecuaţiei f (x) = 0 pe acest segment.



METODA ANALITICĂ

Pentru separarea analitică a soluţiilor vor fi folosite proprietăţile derivatei. Dacă soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$ pot fi uşor calculate, atunci, pentru a separa soluţiile $f(x)=0$, este necesar: 1. să se determine soluţiile distincte $a \le x_1 \le x_2 \le \ldots, \le x_n \le b$ ale ecuaţiei $f'(x)=0$; 2. considerînd $a = x_0$ şi $b = x_{n+1}$, să se calculeze valorile $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})$. Segmentele $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, pentru care $f(x_i) \times f(x_{i+1}) < 0$ vor conţine cîte cel puţin o soluţie a ecuaţiei $f(x)=0$.

EXEMPLE:

Exemplul 1: Să se determine numărul de soluții ale ecuației $e^x + x = 0$

$$f'(x) = e^x + 1; \quad f'(x) > 0 \ \forall\, x \in R.$$

Întrucît $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, ecuația inițială are o singură soluție.

Exemplul 2: Să se separe rădăcinile ecuației $x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0$ pe segmentul $[0, 8]$.

Rezolvare:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24.$$

Rezolvînd ecuația $f'(x) = 0$, se obțin soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

x	$f(x)$	Semn $f(x)$
0	−19	−
2	1	+
4	−3	−
8	109	+

Deci ecuația va avea trei soluții, cîte una pe fiecare din segmentele $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 8]$.

METODA GRAFICĂ

O altă posibilitate de separare a rădăcinilor ecuaţiei f (x) = 0 este cercetarea directă a graficului funcţiei f (x).

Separarea grafică a soluțiilor unei ecuații pe un segment dat poate fi realizată şi local, cu ajutorul unei aplicații de calcul tabelar. Este suficient să se construiască un tabel cu două coloane. Prima coloană va reprezenta o divizare a segmentului în segmente elementare de lungimi egale. Cea de-a doua coloană va conține o formulă care calculează valoarea funcției f(x) pentru valorile respective din prima coloană. În baza datelor din coloana cu valorile f (x) se construieşte o diagramă liniară, care reprezintă graficul funcției analizate.

EXEMPLU

Exemplu: $f(x)=x^{\cos(2x)}+3\sin(x)$. Soluțiile se caută pe segmentul [0,2, 10] (*fig. 3.1 a, 3.1 b*).

B2 =EXP(COS(2*A2)*LN(A2))+3*SIN(A2)

	A	B	C	D	E	F
1	x	y				
2	0,2	0,823102167				
3	0,4	1,696399241				
4	0,6	2,5249[illegible]				
46	[illegible]	5,50315[illegible]				
47	9,2	8,048154414				
48	9,4	9,448504359				
49	9,6	7,844007308				
50	9,8	4,209027748				
51	10	0,927006056				

Fig. 3.1a. Funcția *f*(*x*) reprezentată tabelar în foaia de calcul. Colana A conține valorile *x* de la 0,2 la 10 cu *pasul 0,2*. Coloana B conține valorile *f*(*x*)

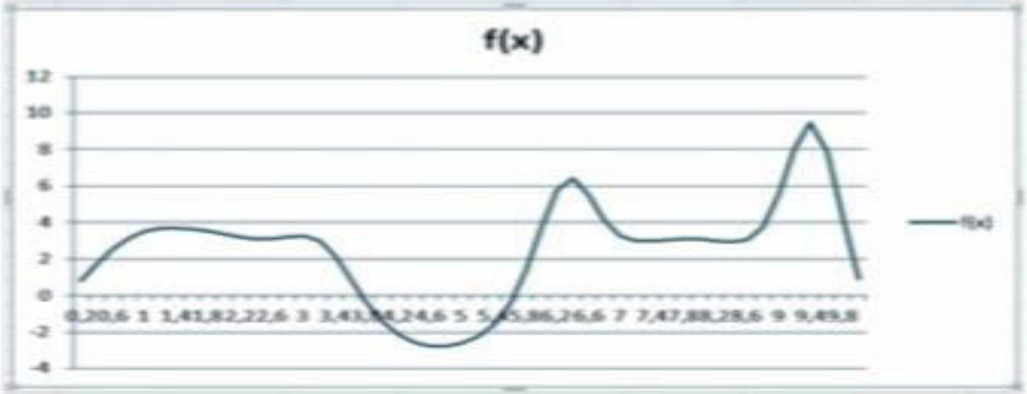


Fig. 3.1b. Funcția *f*(*x*) reprezentată grafic în baza datelor din tabel. Pot fi ușor identificate două segmente oarecare, ce conțin exact câte o soluție a ecuației *f*(*x*)=0, de exemplu: [3, 5] și [5, 6]

METODA BISECȚIEI

Una dintre cele mai simple metode de determinare a unei soluţii a ecuaţiei f (x) = 0 este metoda bisecţiei. Metoda presupune determinarea punctului de mijloc c al segmentului [a, b], apoi calculul valorii f (c). Dacă f (c) = 0, atunci c este soluţia exactă a ecuaţiei. În caz contrar, soluţia este căutată pe unul dintre segmentele [a, c] şi [c, b]. Ea va aparţine segmentului pentru care semnul funcţiei în extremităţi este diferit

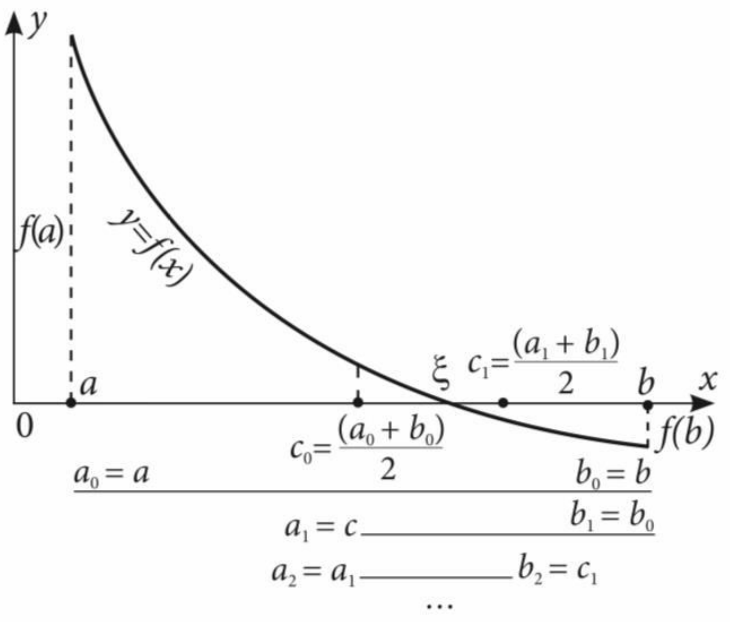


Fig. 3.2. Calculul consecutiv al segmentelor, care conțin soluția ecuației *f*(*x*)=0

Dacă $f(a) \times f(c) > 0$, atunci soluţia e căutată în continuare pe segmentul [a1, b1], unde a1 primeşte valoarea c, iar b1 – valoarea b. În caz contrar, a1 primeşte valoarea a, iar b1 – valoarea c. Procesul de divizare se reia pe segmentul [a1, b1], repetîndu-se pînă cînd nu se obţine soluţia exactă sau (în majoritatea absolută a cazurilor!) devierea soluţiei calculate ci de la cea exactă nu devine suficient de mică.

În urma divizărilor succesive se obţine con- secutivitatea segmentelor[a0,b0], [a1, b1], [a2, b2], ..., [ai, bi], ... Pentru fiecare dintre ele are loc relaţiaf $(ai) \times f(bi) < 0$, i = 0, 1, 2, ...

ESTIMAREA ERORII

Deoarece soluţia exactă ξ a ecuaţiei este un punct al segmentului [ai, bi], rezultă că diferenţa dintre soluţia exactă şi cea calculată nu depăşeşte lungimea acestui seg- ment. Prin urmare, localizarea soluţiei pe un segment cu lungimea ε asigură o eroare de calcul a soluţiei ce nu depăşeşte valoarea ε:

$$\left|\xi - c_i\right| < \varepsilon = \left|b_i - a_i\right|.$$

ALGORITMIZAREA METODEI

A1. Algoritmul de calcul pentru un număr prestabilit n de divizări consecutive:

Pasul 0. Iniţializare: i ⇐ 0.

Pasul 1. Determinarea mijlocului segmentului c <— (a+b)/2.

Pasul 2. Reducerea segmentului ce conţine soluţia: dacă f (c) = 0,atunci soluţia calculată este x = c. SFÎRŞIT. În caz contrar, dacă f (a) × f (c) > 0, atunci a ⇐ c; b ⇐ b, altfel a ⇐ a; b ⇐ c.

Pasul 3. i ⇐ i + 1. Dacă i = n, atunci soluţia calculată este x=(a+b)/2. SFÎRŞIT. În caz contrar, se revine la pasul 1.

A2. Algoritmul de calcul pentru o precizie2 ε dată:

Pasul 1. Determinarea mijlocului segmentului c<— (a+b)/2.

Pasul 2. Dacă $f(c) = 0$, atunci soluţia calculată este $x = c$. SFÎRŞIT. În caz contrar, dacă $f(a) \times f(c) > 0$, atunci $a \Leftarrow c$; $b \Leftarrow b$, altfel $a \Leftarrow a$; $b \Leftarrow c$

Pasul 3. Dacă $|b - a| < \varepsilon$, atunci soluţia calculată este $x=(a+b)/2$. SFÎRŞIT. În caz contrar, se revine la pasul 1.

EXEMPLE

Exemplul 1: Să se determine o rădăcină a ecuaţiei x4 + 2x3 – x –1 = 0 pe segmentul [0, 1] pentru 16 divizări consecutive.

Deoarece numărul de aproximări succesive este fixat, iar extremităţile segmentuluicunoscute, atribuirile se realizează nemijlocit în program.

```
program cn05;
var   a,b,c: real;
      i,n:integer;
function f(x:real):real;
begin  f:=sqr(sqr(x))+2*x*sqr(x)-x-1;end;
begin  a:=0; b:=1; n:=16;
       for i:=1 to n do
        begin c:=(b+a)/2;
          writeln('i=',i:3,' x=',c:10:8,' f(x)=',f(c):12:8);
          if f(c)=0 then break;
          else if f(c)*f(a)>0 then a:=c else b:=c;
        end;
end.
```

Rezultate:

```
i= 1 x=0.50000000 f(x)= -1.18750000
i= 2 x=0.75000000 f(x)= -0.58984375
...
i= 15 x=0.86679077 f(x)= 0.00018565
i= 16 x=0.86677551 f(x)= 0.00009238
```

Exemplul 2: Să se determine o rădăcină a ecuaţiei 6cos(x) + 8sin(x) = 0 pe segmentul [2, 4] cu precizia ε=0,00017.

```
program cn06;
var  a,b,c,eps: real;

function f(x:real):real;
begin f:=6*cos(x)+8*sin(x);end;

begin a:=2; b:=4; eps:=0.00017;
      repeat
        c:=(b+a)/2;
        writeln('x=',c:10:8,' f(x)=',f(c):12:8);
        if f(c)=0 then break
        else if f(c)*f(a)>0 then a:=c else b:=c;
      until abs(b-a)<eps;
end.
```

Rezultate:

```
x=3.00000000 f(x)= -4.81099492
x=2.50000000 f(x)= -0.01908454
...
x=2.49829102 f(x)= -0.00199471
x=2.49816895 f(x)= -0.00077401
```

CONCLUZIE

În concluzie, metoda bisecției se utiliează la rezolvarea ecuațiilor cu structuri complicate, procedura de determinare a soluțiilor fiind mai anevoioasa. Metoda respectivă este folosită când ecuația modelează anumite situații, fenomene care depind de mai mulți parametri, iar valoarea acestora este cunoscuta doar aproximativ. Din acest motiv, este util de a cunoaște metoda bisecției de calcul a soluțiilor ecuaților.

BIBLIOGRAFIE

- Manual de informatică clasa a XII-a http://www.ctice.md/ctice2013/?page_id=1690
- https://en.m.wikipedia.org/wiki/Rolle%27s_theorem