Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències

Grau en Matemàtiques

Treball de Fi de Grau

Construcció de funcions-L p-àdiques

Autor: Àlex Padrós Zamora
Tutor: Marc Masdeu Sabaté

Curs 2019/20

Abstract

The main goal of this Degree Project is to present the process of p-adic interpolation of the Riemann zeta function. We fix a prime number p and we construct a p-adic version of $\zeta(1-k)$ for $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, denoted by $\zeta_p(1-k)$. We generalize it to p-adic L-functions to proof that $\zeta_p(1-k)$ is also analytic for $k \equiv 0 \pmod{p-1}$. Finally, we calculate a special value of the p-àdic L-function $L_p(1-s, \chi)$ for primitive Dirichlet characters χ, namely, at $s = 0$.

Resum

L'objectiu principal d'aquest Treball de Fi de Grau és presentar el procés d'interpolació p-àdica de la funció zeta de Riemann. Fixem un nombre primer p i construïm una versió p-àdica de $\zeta(1-k)$ per $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, denotada per $\zeta_p(1-k)$. Ho generalitzem a funcions-L p-àdiques per provar que $\zeta_p(1-k)$ és també analítica per $k \equiv 0 \pmod{p-1}$. Finalment, calculem un valor especial de la funció-L p-àdica $L_p(1-s, \chi)$ per a caràcters de Dirichlet primitius χ, concretament a $s = 0$.

Agraïments

Al meu tutor del treball Marc Masdeu per la seva ajuda. Aprofito també per agrair-li el seu esforç i èxit, ja que ha aconseguit que la docència virtual (tant en la tutoria d'aquest treball com en l'assignatura d'Aritmètica) no hagi resultat cap inconvenient pels alumnes durant aquests mesos de confinament.

A ma mare i a ma germana per fer que aquests mesos que, per desgràcia, hem hagut d'estar tancats a casa hagin estat prou fàcils. També agrair a mon pare i a la seva muller la seva preocupació per mi.

A la Cristina Rosell pel seu suport constant durant aquests quatre anys, i els que vindran.

Als meus amics i amigues de tota la vida Ainhoa Madurell, Aina López, Alejandro Oromí, Bic Silva, Eudald Mercader, Gor Khechoyan, Javier Faulón, Jenli Ariel, Marc Montblanch i Marçal Salvat, que, tot i que dubto que vulguin llegir una sola pàgina d'aquest treball a excepció d'aquesta, sé de bona mà que els fa il·lusió aparèixer aquí i, conseqüentment, em fa feliç a mi.

Als meus amics de la universitat Guillem Lleida, Joan Pujol, Marc Magaña i Marina Palomar, per escoltar-me amb interès quan els explicava curiositats dels nombres p-àdics que anava descobrint a mesura que feia el treball.

Índex

1 Conceptes previs **3**

1.1 Introducció a la norma p-àdica . . . 3

1.2 Cos dels nombres p-àdics . . . 4

2 Interpolació p-àdica de la funció ζ de Riemann **6**

2.1 Introducció a la ζ de Riemann i els polinomis i nombres de Bernouilli . . . 6

2.2 Pas previ: interpolació p-àdica de $f(s) = a^s$ . . . 8

2.3 Distribucions p-àdiques . . . 9

2.4 Construcció de la funció ζ p-àdica . . . 14

3 Funció-L p-àdica de Dirichlet **18**

3.1 Interpolació p-àdica de la funció-L de Dirichlet . . . 19

3.2 Càlcul de $L(1, \chi)$ . . . 24

3.3 Càlcul de $L_p(1, \chi)$ . . . 26

Introducció

En aquest treball s'estudiarà la construcció de la funció interpoladora de la coneguda funció zeta de Riemann al cos dels nombres p-àdics. La funció zeta de Riemann, definida per $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ per $\mathrm{Re}(s) > 1$, pren valors complexos, en general. Fixarem un nombre primer p, i veurem què vol dir "interpolar p-àdicament la funció $\zeta(s)$". Això donarà lloc a una versió p-àdica de la funció zeta, denotada per $\zeta_p(s)$, on ara tant la variable s com el conjunt de valors que pren la funció seran nombres p-àdics.

A la Secció 1 veurem una introducció als nombres p-àdics. Fixarem un nombre primer p i definirem una norma sobre $\mathbb{Q}$, denotada per $|\cdot|_p$. Veurem que aquesta és no-Arquimediana, és a dir, que compleix $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$. El propòsit d'aquesta norma serà "completar" $\mathbb{Q}$. En efecte, el cos dels racionals amb la norma habitual (el valor absolut) no és complet, és a dir, existeixen successions de Cauchy que no convergeixen a $\mathbb{Q}$ (hom pot consultar-ne un exemple a [8]). D'aquesta manera, obtindrem el cos dels p-àdics, denotat per $\mathbb{Q}_p$, i tindrem que $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ és un espai mètric complet. Un cop vistes les propietats que necessitarem de $\mathbb{Q}_p$, definirem el subanell que realment utilitzarem per la resta del treball, que és el subanell dels enters p-àdics, denotat per $\mathbb{Z}_p$, que a més té la propietat de ser compacte.

A la Secció 2, un cop ja vistes les definicions i propietats bàsiques dels nombres p-àdics, estudiarem tot el procés d'interpolació p-àdica de la funció zeta de Riemann. Farem servir els nombres de Bernouilli B_k i estudiarem algunes propietats dels polinomis de Bernouilli. La motivació de la secció ve donada pel següent teorema:

Teorema 0.0.1. *Sigui $k \in \mathbb{N}$, aleshores*

$$\zeta(2k) = (-1)^k \pi^{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} \left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right).$$

Gràcies a aquest resultat, veiem que el terme que realment és important estudiar és $\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right)$, que serà de fet, el que interpolarem p-àdicament. El primer pas serà interpolar p-àdicament la funció $f(s) = a^s$, per a enter i $s \in \mathbb{Z}_p$. Veurem que $\mathbb{Z}^+$ és dens a $\mathbb{Z}_p$ i podrem fer una extensió contínua de la funció a^s. En segon lloc, definirem un conjunt molt important per tot el treball, que també és dens a $\mathbb{Z}_p$. Fixant un $s_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, p-2\}$, definim $S_{s_0} = \{s \in \mathbb{Z}^+ : s \equiv s_0 \pmod{p-1}\}$. Gràcies a aquest conjunt, podem trobar la versió contínua de ζ_p.

$\mathbb{Q}_p$ té una base d'oberts de la forma $a + p^N\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq \frac{1}{p^N}\}$, per $a \in \mathbb{Q}_p$, als quals anomenarem "intervals". Introduirem el concepte de compacte-obert a $\mathbb{Q}_p$ i el de distribució p-àdica, que és una aplicació additiva que va des d'un conjunt d'oberts compactes fins a $\mathbb{Q}_p$. Si aquesta és acotada (en norma p-àdica) per una certa constant positiva i per tot compacte-obert, s'anomena "mesura". Tot això donarà sentit a la integració p-àdica:

Definició 0.0.2. *Sigui $X \subset \mathbb{Q}_p$ un compacte-obert. Sigui $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ una funció contínua, $x_{a,N} \in a + p^N\mathbb{Z}_p$ i μ una mesura sobre X, definim*

$$\int f\mu := \lim_{N\to\infty} \sum_{0\leq a<p^N} f(x_{a,N})\mu(a + (p^N)).$$

Així, utilitzant una certa mesura $\mu_{1,\alpha}$, podrem definir la funció zeta de Riemann p-àdica:

Definició 0.0.3. *Sigui k un enter positiu, $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ tal que $p \nmid \alpha$, definim*

$$\zeta_p(1-k) := (1-p^{k-1})\left(-\frac{B_k}{k}\right) = \frac{1}{\alpha^{-k}-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}$$

com la funció zeta de Riemann p-àdica.

Veurem que aquesta funció interpoladora és contínua per enters positius k tals que $k \equiv s_0 \pmod{p-1}$, i provarem la relació

$$\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k),$$

vàlida per $k \geq 2$.
A la Secció 3 provarem un resultat sorprenent, potser inclús inesperat, i és que la funció interpoladora $\zeta_p(1-k)$ no només és contínua pels $k \equiv 0 \pmod{p-1}$ amb k positiu, sinó que a més és analítica, és a dir, és expressable com a sèrie de potències. Per veure-ho, haurem d'introduir els caràcters de Dirichlet, denotats per χ. Obtindrem la següent funció-L p-àdica:

Definició 0.0.4. *Fixem $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$, $p \nmid \alpha$. Definim la funció-L p-àdica $L(1-s,\chi)$ per $s \in \mathbb{Z}_p$ com*

$$L_p(1-s,\chi) = \frac{1}{\chi(\alpha)^{-1}\langle\alpha\rangle^{-s}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^s \chi(x) x^{-1}\mu_{1,\alpha},$$

on $\langle x\rangle \equiv 1 \pmod{p}$.

Veurem que aquesta és analítica en la variable p-àdica pels anomenats caràcters de Dirichlet no trivials. Si $\chi = \chi_0$ és un caràcter de Dirichlet trivial, aleshores la funció-L p-àdica $L_p(1-s,\chi_0)$ tindrà un pol a $s=0$. Tot i així, aquest fet no ens generarà cap problema, ja que el rang d'interpolació amb que treballem és amb els $k \equiv 0 \pmod{p-1}$. Amb un cert caràcter trivial χ_0, obtindrem la relació

$$L_p(1-k,\chi_0) = \zeta_p(1-k).$$

Conseqüentment obtindrem l'analicitat de $\zeta_p(1-k)$ per aquest tipus d'enters.

Veurem un parell de subseccions dedicades a calcular valors explícits de les funcions $L(s,\chi)$ i $L_p(1-s,\chi)$ per caràcters de Dirichlet primitius. Concretament, calcularem $L(1,\chi)$ i $L_p(1,\chi)$ i notarem una certa similitud. En particular, l'objectiu de les dues últimes subseccions serà provar els següents resultats:

Teorema 0.0.5. *Sigui $\tau(\chi)$ la suma Gaussiana corresponent al caràcter χ de conductor m, $\overline{\chi}$ el caràcter conjugat de χ i $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$, aleshores*

$$L(1,\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{m}\sum_{\gcd(k,m)=1} \overline{\chi}(k)\log(1-\zeta^{-k}).$$

Teorema 0.0.6. *Si χ és un caràcter de Dirichlet primitiu, no trivial i de conductor $f>1$, aleshores*

$$L_p(1,\chi) = -\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{\substack{a=1\\ \gcd(a,f)=1}}^{f} \overline{\chi}(a)\log_p\left(1-\zeta^{-a}\right)$$

on $\log_p$ denota el logaritme p-àdic i $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{f}}$.

1 Conceptes previs

En aquesta secció definirem un nou tipus de mètrica per $\mathbb{Q}$. Fixant un nombre primer p, estudiarem la norma p-àdica $|\cdot|_p$, amb el propòsit de definir la compleció de $\mathbb{Q}$. Introduirem l'espai mètric complet $\mathbb{Q}_p$ (que és una extensió de $\mathbb{Q}$), conegut com el cos dels nombres p-àdics i veurem alguns subanells essencials per a seccions posteriors.

1.1 Introducció a la norma p-àdica

El primer pas per definir la nova norma és definir l'ordre p-àdic d'un nombre enter:

Definició 1.1.1. *Sigui p un nombre primer. Sigui $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definim $\operatorname{ord}_p(a)$ com la màxima potència de p que divideix a. És a dir,*

$$\operatorname{ord}_p(a) = \max\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a \equiv 0 \pmod{p^m}\}.$$

Fixem-nos que, per la definició de $\operatorname{ord}_p(a)$, si $\operatorname{ord}_p(a) = m$ i $a = p^m k$, llavors $\gcd(p, k) = 1$, és a dir, la descomposició en producte de primers de k no conté p. Per conveni, si $a = 0$, llavors $\operatorname{ord}_p(0) = \infty$. Veiem uns exemples:

- $\operatorname{ord}_3(54) = 3$, ja que $54 = 3^3 \cdot 2$.
- $\operatorname{ord}_7(-700) = 1$, ja que $-700 = 7 \cdot (-100)$ i $\gcd(7, -100) = 1$.

Per la definició, és fàcil comprovar que $\operatorname{ord}_p()$ compleix $\operatorname{ord}_p(a \cdot b) = \operatorname{ord}_p(a) + \operatorname{ord}_p(b)$. Podem estendre aquesta definició a $\mathbb{Q}$. Sigui $x = \frac{a}{b}$, amb $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimers i $b \neq 0$, definim $\operatorname{ord}_p(x) = \operatorname{ord}_p(\frac{a}{b}) = \operatorname{ord}_p(a) - \operatorname{ord}_p(b)$.

Definició 1.1.2. *Fixat un nombre primer p. Definim l'aplicació $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Q}$ com:*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\operatorname{ord}_p(x)} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Fixem-nos que, si $n \in \mathbb{Z}$, aleshores $|n|_p \leq 1$, ja que per la Definició 1.1.1, $\operatorname{ord}_p(n) \geq 0$ i per tant $|n|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(n)} \leq 1$.

Proposició 1.1.3. *$|\cdot|_p$ és una norma no-Arquimediana sobre $\mathbb{Q}$, és a dir, $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ per tot $x, y \in \mathbb{Q}$.*

Demostració. Les dues primeres propietats de norma són comprovacions rutinàries. Provarem que compleix la propietat no-Arquimediana, que implica la desigualtat triangular, i haurem acabat.
Si $x = 0$, $y = 0$ o $x + y = 0$, llavors és clara. Suposem un cas diferent d'aquests tres. Posem $x = \frac{a}{b}$ i $y = \frac{c}{d}$. Obtenim que $\operatorname{ord}_p(x + y) = \operatorname{ord}_p(ad + bd) - \operatorname{ord}_p(b) - \operatorname{ord}_p(d)$. Notem que $|\cdot|_p$ és no-Arquimediana si ens restringim a $\mathbb{Z}$, ja que si $a = p^n k$ i $b = p^m j$ amb $n \leq m$, aleshores, traient factor comú p^n, tenim que $|a + b|_p = n \leq m = \max\{|a|_p, |b|_p\}$. Aquest fet és equivalent a $\operatorname{ord}_p(ad + bd) \geq \min\{\operatorname{ord}_p(ad), \operatorname{ord}_p(bc)\}$. Així,

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_p(x+y) &\geq \min\{\operatorname{ord}_p(ad), \operatorname{ord}_p(bc)\} - \operatorname{ord}_p(b) - \operatorname{ord}_p(d) \\ &= \min\{\operatorname{ord}_p(a) + \operatorname{ord}_p(d), \operatorname{ord}_p(c) + \operatorname{ord}_p(b)\} - \operatorname{ord}_p(b) - \operatorname{ord}_p(d) \\ &= \min\{\operatorname{ord}_p(a) - \operatorname{ord}_p(b), \operatorname{ord}_p(c) - \operatorname{ord}_p(d)\} = \min\{\operatorname{ord}_p(x), \operatorname{ord}_p(y)\}, \end{aligned}$$

i per tant

$$|x+y|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x+y)} \leq \max\{p^{-\operatorname{ord}_p(x)}, p^{-\operatorname{ord}_p(y)}\} = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

$\square$

Observem amb uns exemples que la distància entre dos nombres pot variar bastant segons amb quin primer p treballem:

- $|1-26|_5 = 5^{-\operatorname{ord}_5(1-26)} = 5^{-\operatorname{ord}_5(-25)} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.
- $|1-26|_3 = 3^{-\operatorname{ord}_3(-25)} = 3^0 = 1$.

Notem que el conjunt de valors de $|\cdot|_p$ és discret, ja que $|\cdot|_p = \{0\} \cup \{p^m : m \in \mathbb{Z}\}$.

1.2 Cos dels nombres p-àdics

El cos dels racionals $\mathbb{Q}$ no és complet amb la norma habitual, és a dir, existeixen successions de Cauchy que no convergeixen dins l'espai. És per això que, per poder fer anàlisi, treballem amb la seva compleció amb la norma $|\cdot|_p$. A partir d'aquest punt, fixem un nombre primer p, i definim:

Definició 1.2.1. *El cos $\mathbb{Q}_p$ del nombres p-àdics és la compleció de $\mathbb{Q}$ amb la norma $|\cdot|_p$.*

Si es vol consultar una construcció analítica d'aquest cos, veure el Capítol 1 de [6]. Per veure una prova detallada de que $\mathbb{Q}_p$ és un espai mètric complet, veure el Teorema 1.18 de [2].
Podem escriure tot nombre p-àdic a en base p (es coneix com "extensió p-àdica de a") de la següent manera:

$$a = \frac{b_0}{p^m} + \frac{b_1}{p^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{p} + b_m + b_{m+1}p + b_{m+2}p^2 + \cdots \tag{1}$$

per $b_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ per tot j (assumint que b_0 és el primer coeficient tal que és diferent de zero) i $m \geq 0$.
Gràcies a la Proposició 1.2.4 (que veurem més endavant) podrem garantir la convergència de la sèrie i per tant es podrà donar la igualtat. Assumint aquesta convergència, prenem $a \in \mathbb{Q}_p$ i escrivim la seva extensió p-àdica com a (1). Estenem la definició de $|\cdot|_p$ per a nombres p-àdics, posant $|a|_p = p^m$ si $a \neq 0$ i $|0|_p = 0$. Veiem uns exemples:

- A $\mathbb{Q}_5$, si $a = \dfrac{2}{5^6} + \dfrac{2}{5^5} + \dfrac{2}{5^4} \cdots + \dfrac{2}{5} + 2 + 2\cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \cdots$, aleshores $|a|_5 = 5^6$.
- A $\mathbb{Q}_{13}$, si $a = 4 + 5\cdot 13 + 7\cdot 13^2 + 0 \cdot 13^3 + 11\cdot 13^4 + \cdots$, aleshores $|a|_{13} = 13^0 = 1$.
- A $\mathbb{Q}_7$, si $a = 4\cdot 7^3 + 6 \cdot 7^4 + 2\cdot 7^5 + \cdots$, aleshores $|a|_7 = 7^{-3}$.

Definim un parell de conjunts que seran molt importants per la resta del treball.

Definició 1.2.2. *Definim el conjunt dels enters p-àdics com*

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\}.$$

Aquest és el conjunt de nombres de $\mathbb{Q}_p$ tals que no hi ha potències negatives de p a la seva expansió p-àdica.

Proposició 1.2.3. *$\mathbb{Z}_p$ és un subanell de $\mathbb{Q}_p$.*

Demostració. És clar, per definició, que $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. Donats $a, b \in \mathbb{Z}_p$, tenim que

$$|a-b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\} \leq 1.$$

Per tant $a - b \in \mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Z}_p$ és subgrup de $(\mathbb{Q}_p, +)$. També és clar que $1 \in \mathbb{Z}_p$. Finalment, veiem que

$$|ab|_p = |a|_p|b|_p \leq 1,$$

i per tant $ab \in \mathbb{Z}_p$. Així, $\mathbb{Z}_p$ és un subanell de $\mathbb{Q}_p$. $\square$

Ara ja podem demostrar la proposició que ens permetrà treballar amb els p-àdics escrits en base p.

Proposició 1.2.4. *Tota expansió p-àdica amb coeficients enters p-àdics convergeix a $\mathbb{Q}_p$.*

Demostració. Donat $\varepsilon > 0$, prenem un N prou gran per tal que $\frac{1}{p^N} < \varepsilon$. Sigui $(b_i)_{i\geq 1}$ una successió d'enters p-àdics, considerem

$$S_N = \frac{b_{-m}}{p^m} + \frac{b_{-(m-1)}}{p^{m-1}} + \cdots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_N p^N.$$

Si $M > N$:

$$\begin{aligned} |S_M - S_N|_p &= \left|b_{N+1}p^{N+1} + \cdots + b_M p^M\right|_p \leq \left|b_{N+1}p^{N+1}\right|_p + \cdots + \left|b_M p^M\right|_p \\ &\leq \left|p^{N+1}\right|_p + \cdots + \left|p^M\right|_p \leq \max\{\left|p^{N+1}\right|_p, \ldots, \left|p^M\right|_p\} = \frac{1}{p^{N+1}} < \frac{1}{p^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Per tant, les sumes parcials són de Cauchy i convergeixen a $\mathbb{Q}_p$. □

Definició 1.2.5. *Definim el conjunt d'enters p-àdics invertibles com*

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Z}_p : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}_p\} = \{x \in \mathbb{Z}_p : x \not\equiv 0 \pmod p\} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}.$$

És a dir, són els enters p-àdics tals que el primer dígit de la seva expansió p-àdica és diferent de zero. Pensem l'operador " $\pmod p$" per $x \in \mathbb{Z}_p$ com l'operador habitual a $\mathbb{Z}$ amb l'expansió p-àdica d'x, que és justament una suma convergent de nombres enters, i per tant està ben definit.

El cos dels nombres p-àdics té una propietat molt desitjable per a sèries que no tenim a altres cossos com $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

Proposició 1.2.6. *Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió continguda a $\mathbb{Q}_p$. Llavors $\sum_{n=1}^\infty a_n$ convergeix a $\mathbb{Q}_p$ si i només si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostració. Suposem que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ convergeix. Posem $\alpha := \sum_{n=1}^\infty a_n$. Llavors,

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \longrightarrow \alpha - \alpha = 0.$$

Suposem ara que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Posem $S_N = \sum_{k=0}^N a_k$. Si $N > M$:

$$|S_N - S_M|_p = \left|\sum_{k=M+1}^{N} a_k\right|_p \leq \max\{|a_{M+1}|_p, \ldots, |a_N|_p\} \to 0.$$

quan $M, N \to \infty$. Per tant, les sumes parcials són de Cauchy i convergeixen a $\mathbb{Q}_p$. □

La següent proposició serà molt important per seccions posteriors.

Proposició 1.2.7. *$\mathbb{Z}_p$ és compacte.*

Demostració. Donem la demostració de [10]. Com que $\mathbb{Z}_p$ és un espai mètric, provar que és compacte és equivalent a veure que tota successió a $\mathbb{Z}_p$ té una parcial convergent (a $\mathbb{Z}_p$). Sigui $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ una successió a $\mathbb{Z}_p$. Escrivim cada α_n com la seva respectiva expansió p-àdica

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} p^i.$$

Recordem que $a_i^{(n)} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. En particular, existeix un $b_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ tal que $b_0 = a_0^{(n)}$ per infinits n. Per tant, extraiem la parcial $(\alpha_{0n})_{n\geq 0}$, que són els termes que compleixen $b_0 = a_0^{(n)}$. D'igual manera, per qualsevol $k \geq 0$, existeixen infinits termes tals que $b_k = a_k^{(n)}$ per infinits n i un $b_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ fixat. N'extraiem les parcials $(\alpha_{kn})_{n\geq 0}$ definides igual que abans. Així, construïm la successió de parcials $((\alpha_{jn})_n)_{j\geq 0}$. Observem que, per aquesta construcció, $(\alpha_{jn})_n$ és una parcial de $(\alpha_{j+1,n})_n$. També obtenim l'enter p-àdic

$$b = \sum_{j\geq 0} b_j p^j$$

que és tal que per cada j, tot terme de $(\alpha_{jn})_n$ coincideix amb b en els seus primers $j+1$ termes. Així, la seqüència diagonal (α_{jj}) és una parcial de (α_n) que convergeix cap a b. □

2 Interpolació p-àdica de la funció ζ de Riemann

En aquesta secció estudiarem un dels objectius principals del treball, que és el procés d'interpolació p-àdica de la funció zeta de Riemann. Per fer-ho, haurem de treballar amb nombres de Bernouilli i diversos conjunts densos a $\mathbb{Z}_p$.

2.1 Introducció a la ζ de Riemann i els polinomis i nombres de Bernouilli

Donem un seguit de definicions i propietats d'objectes amb els que treballarem sovint durant el treball.

Definició 2.1.1. *Definim la funció zeta de Riemann de variable $s \in \mathbb{C}$ com*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

que convergeix si $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Definició 2.1.2. *Definim els polinomis de Bernouilli com els coeficients $B_k(x)$ de*

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

Els primers polinomis són

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x - \frac{1}{6}.$$

Definim els nombres de Bernouilli com $B_n = B_n(0)$. Aquests satisfan una propietat interessant:

Lema 2.1.3. *Si $k \geq 3$ és imparell, aleshores $B_k = 0$.*

Demostració. Per definició, els nombres de Bernouilli venen venen donats per

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}. \tag{2}$$

Podem escriure el terme de la dreta de (2) com $\frac{-t}{2}+\sum_{k=0,k\neq 1}^{\infty} B_k\frac{t^k}{k!}$, i per tant

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=\sum_{k=0,k\neq 1}^{\infty} B_k\frac{t^k}{k!}. \tag{3}$$

Fent unes manipulacions algebraiques al terme de l'esquerra de (3), obtenim una expressió equivalent:

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=\frac{t}{2}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}. \tag{4}$$

Si canviem t per $-t$, l'expressió de (4) ens queda intacta. Per tant, com que (4) és justament $\sum_{k=0,k\neq 1}^{\infty} B_k\frac{t^k}{k!}$, aquesta última també quedarà intacta quan canviem t per $-t$, i això ens dona que $B_k=(-1)^kB_k$ per $k\neq 1$. En conseqüència, si $k\geq 3$ és imparell, aleshores $B_k=0$.

□

Proposició 2.1.4. *Els polinomis de Bernouilli verifiquen*

$$B_k(x)=p^{k-1}\sum_{a=0}^{p-1}B_k\left(\frac{x+a}{p}\right).$$

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{p-1}\frac{te^{(x+a)t}}{e^{pt}-1}&=\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}\frac{pte^{\frac{x+a}{p}pt}}{e^{pt}-1}=\frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}B_k\left(\frac{x+a}{p}\right)\frac{(pt)^k}{k!}\\&=\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}p^{k-1}B_k\left(\frac{x+a}{p}\right)\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}p^{k-1}\left(\sum_{a=0}^{p-1}B_k\left(\frac{x+a}{p}\right)\right)\frac{t^k}{k!}.\end{aligned}$$

Observem que el primer sumatori de totes les igualtats és una sèrie geomètrica, per tant, la sumem

$$\sum_{a=0}^{p-1}\frac{te^{(x+a)t}}{e^{pt}-1}=\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x)\frac{t^k}{k!}.$$

Per tant, igualant els coeficients de $\frac{t^k}{k!}$, obtenim que

$$B_k(x)=p^{k-1}\sum_{a=0}^{p-1}B_k\left(\frac{x+a}{p}\right).$$

□

El següent teorema és un resultat clàssic que ens servirà per donar el primer pas cap a la interpolació que busquem fer.

Teorema 2.1.5. *Sigui $k\in\mathbb{N}$, aleshores*

$$\zeta(2k)=(-1)^k\pi^{2k}\frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right).$$

Aquest teorema ens diu que la part realment important per estudiar és el factor $\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right)$, que serà el que acabem interpolant p-àdicament. Una altra motivació és calcular una equació funcional per $\zeta(1-2k)$. Veurem que molts dels termes que apareixen al teorema desapareixen. Si es vol consultar una demostració completa i detallada d'aquest teorema, veure el Capítol 2 de [6].

2.2 Pas previ: interpolació p-àdica de $f(s) = a^s$

Fixat $a \in \mathbb{R}^+$, la funció $f(s) = a^s$ es pot definir com una funció de variable real contínua definint-la per $s \in \mathbb{Q}$ i llavors estenent-la per continuïtat a $\mathbb{R}$, posant qualsevol $r \in \mathbb{R}$ com a límit d'una successió racionals $(r_n)_{n\geq 1}$. D'aquesta manera

$$f(r) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n).$$

Podem construir de diverses maneres una extensió contínua d'aquesta funció als enters p-àdics. Suposem n un enter positiu (que es pot pensar com a element a $\mathbb{Q}_p$). Per qualsevol enter no negatiu s, tenim que l'enter $n^s \in \mathbb{Z}_p$, ja que $|n^s|_p = |n|_p^s \leq 1$. La següent proposició ens serà útil:

Proposició 2.2.1. *$\mathbb{Z}^+$ és dens a $\mathbb{Z}_p$.*

Demostració. Sigui $a \in \mathbb{Z}_p$ i $\varepsilon > 0$. Prenem k prou gran per tal que $p^{-k} < \varepsilon$. Suposem que l'expansió p-àdica de a és de la forma

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots .$$

Prenem ara $z \in \mathbb{Z}^+$ prou gran per tal que $a - z = a_k p^k + a_{k+1}p^{k+1} + \cdots$, és a dir, l'enter z que talla l'expansió p-àdica fins $a_{k-1}p^{k-1}$. Per tant,

$$\begin{aligned}|a - z|_p &= \left|a_k p^k + a_{k+1}p^{k+1} + \cdots\right|_p \leq |a_k|_p \left|p^k\right|_p + |a_{k+1}|_p \left|p^{k+1}\right|_p + \cdots \\ &\leq \left|p^k\right|_p + \left|p^{k+1}\right|_p + \cdots \leq \max\{\left|p^k\right|_p, \left|p^{k+1}\right|_p, \dots\} = p^{-k} < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Gràcies a aquesta proposició, podem escriure qualsevol enter p-àdic com a límit d'una successió d'enters no negatius. D'aquesta manera, estendrem $f_n(s) = n^s$ per continuïtat de $s \in \mathbb{Z}^+$ a $s \in \mathbb{Z}_p$. Aquesta extensió serà contínua si n^s i $n^{s'}$ són propers quan s i s' són propers p-àdicament. Podem construir-ne una prenent n tal que $n \equiv 1 \pmod p$, és a dir, $n = 1 + mp$ per m enter. Suposem s i s' propers p-àdicament. Això pot passar si, per exemple, $s' = s + zp^N$ per N gran i $z \in \mathbb{Z}$. Llavors, suposant, sense pèrdua de generalitat, que $s' > s$:

$$\begin{aligned}\left|n^s - n^{s'}\right|_p &= |n^s|_p \left|1 - n^{s'-s}\right|_p = \left|1 - n^{s-s'}\right|_p = \left|1 - (1+mp)^{zp^N}\right|_p \\ &= \left|1 - \left(1 + (zp^N)mp + \frac{zp^N(zp^N - 1)}{2!}(mp)^2 + \cdots + (mp)^{zp^N}\right)\right|_p \leq \left|p^{N+1}\right|_p = p^{-(N+1)}.\end{aligned}$$

Fent $N \to \infty$, aquesta diferència va cap a zero, i per tant té sentit definir $f_n(s) = n^s$ com a $f_n : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ tal que sigui el límit d'una successió $(n^{s_i})_{i\geq 1}$ per $(s_i)_{i\geq 0}$ successió d'enters no negatius que tendeixin a s (aquesta successió sempre existirà perquè $\mathbb{Z}^+$ és dens al conjunt d'enters p-àdics). Així, $f_n(s)$ serà contínua.

Aquest últim cas ha funcionat prou bé, però és bastant restrictiu, ja que necessitàvem que $n \equiv 1 \pmod p$. Podem fer-ho millor:

Suposem n un enter no divisible per p. Fixem un $s_0 \in \{0, 1, \dots, p-2\}$. Ara, considerarem n^s per tot s enter no negatiu congruent a s_0 mòdul $(p-1)$. D'aquesta manera, posant $s = s_0 + (p-1)s_1$, amb $s_1 \in \mathbb{Z}^+$, intentarem trobar

$$n^s = n^{s_0 + (p-1)s_1} = n^{s_0}(n^{p-1})^{s_1}.$$

ja que, com que n no és divisible per p, aleshores $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ pel petit teorema de Fermat, i per tant estem en la mateixa situació d'abans. Més formalment, tenim:

Definició 2.2.2. *Fixat* $s_0 \in \{0, 1, 2, \dots, p-2\}$, *definim*

$$S_{s_0} = \{s \in \mathbb{Z}^+ : s \equiv s_0 \pmod{p-1}\}.$$

Proposició 2.2.3. S_{s_0} *és dens a* $\mathbb{Z}_p$.

Demostració. Donat $a \in \mathbb{Z}_p$ i $\varepsilon > 0$, posem $a = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \cdots$. Triem N prou gran per tal que $p^{-N} < \varepsilon$. Observem que $p^N \equiv 1 \pmod{p-1}$ per tot $N \geq 0$. Per tant, triem l'enter positiu $b = a_0 + a_1p + \cdots + a_{N-1}p^{N-1} + s_0p^N + (a_0 + a_1p + \cdots a_{N-1}p^{N-1})(p-2)p^N$. Fem mòdul $p-1$:

$$b \equiv (a_0 + a_1 + \cdots a_{N-1}) + s_0 + (a_0 + a_1 + \cdots a_{N-1})(p-2) \equiv s_0 \pmod{p-1},$$

és a dir, $b \in S_{s_0}$. Així

$$\begin{aligned} |a-b|_p &= \left|(a_N - s_0 - (a_0 + a_1p + \cdots + a_{N-1}p^{N-1})(p-2))p^N + a_{N+1}p^{N+1} + \cdots\right|_p \\ &\leq \frac{1}{p^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Per tant, S_{s_0} és dens a $\mathbb{Z}_p$.

□

Conseqüentment, la funció $f : S_{s_0} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ definida per $f(s) = n^s$ es pot estendre contínuament a $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$.
Una manera natural d'interpolar p-àdicament la funció zeta de Riemann seria intentant interpolar sumand a sumand tal i com acabem de fer-ho, però aquest cop amb la funció $f(s) = n^{-s}$. Tot i això, observem que els termes no divisibles per p formen una sèrie divergent a $\mathbb{Z}_p$, ja que si $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, llavors $|n^{-s}|_p = |n|_p^{-s} = 1$ i per la Proposició 1.2.6 tenim

$$\sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty.$$

Per tant, hem d'adoptar una altra estratègia.
El conjunt S_{s_0} serà molt important en seccions posteriors. Veurem que els nombres $\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right)$ multiplicats per $(1 - p^{2k-1})$ es poden interpolar per a $2k \in S_{2s_0}$, on $2s_0 \in \{0, 2, 4, \dots, p-3\}$. Veurem que $\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right) = \zeta(1-2k)$, és a dir, que hi ha una certa connexió funcional entre $\zeta(x)$ i $\zeta(1-x)$. De fet, el que voldrem provar és que si $2k, 2k' \in S_{s_0}$ i $k \equiv k' \pmod{p^N}$, llavors

$$(1 - p^{2k-1})\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right) \equiv (1 - p^{2k'-1})\left(-\frac{B_{2k'}}{2k'}\right) \pmod{p^{N+1}}.$$

El cas $s_0 = 0$ serà diferent.

2.3 Distribucions p-àdiques

$\mathbb{Q}_p$ té una base d'oberts de la forma $a + p^N\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq \frac{1}{p^N}\}$ per $a \in \mathbb{Q}_p$. Ens referirem a $a + p^N\mathbb{Z}_p = a + (p^N)$ com a interval.

Observació 2.3.1. *Podem expressar $\mathbb{Z}_p$ com a unió finita i disjunta d'intervals de la manera següent:*

$$\mathbb{Z}_p = \biguplus_{a=0}^{p-1} a + p\mathbb{Z}_p.$$

A $\mathbb{Q}_p$, un subconjunt obert és compacte si i només si és unió finita d'intervals. Anomenarem a aquest tipus d'oberts com "compacte-obert". $\mathbb{Z}_p$ és un exemple d'un compacte-obert com a conseqüència directa de l'Observació 2.3.1 i la Proposició 1.2.7. $\mathbb{Z}_p^\times$ també n'és un exemple.

Definició 2.3.2. *Donats X, Y espais topològics. Direm que una aplicació $f : X \to Y$ és localment constant si per tot $x \in X$ existeix un entorn $U \subset X$ tal que $f(U) \subset Y$ és constant.*

Definició 2.3.3. *Una distribució p-àdica μ sobre un compacte-obert X és una aplicació additiva que va des del conjunt d'oberts-compactes en X a $\mathbb{Q}_p$.*

Això ens diu que donat $U \subseteq X$ tal que $U = \biguplus U_i$ on cada U_i és compacte-obert, aleshores

$$\mu(U) = \mu(U_1) + \cdots + \mu(U_n).$$

Notació: Si $f : X \to \mathbb{Q}_p$ és localment constant, escriurem $\int f\mu$ per denotar el valor de μ a f.
Amb la següent proposició, tractarem el problema de la unicitat:

Proposició 2.3.4. *Tota aplicació μ : {intervals de X, X compacte-obert} $\to \mathbb{Q}_p$ tal que*

$$\mu(a + (p^N)) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu(a + bp^N + (p^{N+1}))$$

s'estén únicament a una distribució p-àdica a X.

Demostració. Donat $U \subset X$ compacte-obert, el podem escriure com a unió finita i disjunta d'intervals : $U = \uplus_{i=1}^n I_i$. Volem que μ sigui additiva, per tant definim $\mu(U) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$. Veiem que aquesta definició no depèn de la partició triada per U:
Donades dues particions d'intervals disjunts de $U = \uplus I_i$, $U = \uplus J_i$, aquestes han de tenir una sub-partició comuna que és de la forma $a + (p^N) = I_i = \cup_j I_{ij}$. Els intervals I_{ij} són de la forma $a' + (p^M)$ per un $M > N$ fixat i certs $a' \equiv a \pmod{p^N}$. Així, aplicant repetits cops la hipòtesi, tenim que

$$\mu(I_i) = \mu(a + (p^N)) = \sum_{j=0}^{p^{M-N}-1} \mu\left(a + jp^N + (p^M)\right) = \sum_j \mu(I_{ij}).$$

Per tant, $\sum_i \mu(I_i) = \sum_{i,j} \mu(I_{ij})$. Anàlogament, $\sum_i \mu(J_i) = \sum_{i,j} \mu(I_{ij})$ i $\sum_i \mu(I_i) = \sum_i \mu(J_i)$. D'aquesta manera, és clar que μ és additiva.
Si U és unió disjunta de n compacte-oberts U_i, escrivim cadascun d'aquests com a unió disjunta i finita d'intervals I_{ij}, de manera que $U = \cup_{i,j} I_{ij}$ i

$$\mu(U) = \sum_{i,j} \mu(I_{i,j}) = \sum_i \sum_j \mu(I_{ij}) = \sum_i \mu(U_i).$$

□

Definim ara el que serà una distribució molt habitual en tot el treball.

Definició 2.3.5. *Donat un interval $a + (p^N)$ amb $0 \leq a \leq p^N - 1$. Fixem un enter positiu k i definim l'aplicació*

$$\mu_{B,k}\left(a + \left(p^N\right)\right) = p^{N(k-1)} B_k \left(\frac{a}{p^N}\right)$$

Proposició 2.3.6. *$\mu_{B,k}$ estén a una distribució a $\mathbb{Z}_p$, coneguda com la k-èssima distribució de Bernouilli.*

Demostració. Degut a la Proposició 2.3.4, hem de provar que $\mu_{B,k}(a+(p^N)) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu_{B,k}(a+bp^N + (p^{N+1}))$. Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{b=0}^{p-1} \mu_{B,k}(a + bp^N + (p^{N+1})) &= \sum_{b=0}^{p-1} p^{(N+1)(k-1)} B_k \left(\frac{a + bp^N}{p^{N+1}}\right) \\ &= p^{(N+1)(k-1)} \sum_{b=0}^{p-1} B_k \left(\frac{a + bp^N}{p^{N+1}}\right).\end{aligned}$$

Per la Proposició 2.1.4 amb $x = \frac{a}{p^N}$, tenim que

$$p^{-(k-1)} B_k \left(\frac{a}{p^N}\right) = \sum_{b=0}^{p-1} B_k \left(\frac{a + bp^N}{p^{N+1}}\right).$$

Substituint, obtenim que

$$\sum_{b=0}^{p-1} \mu_{B,k}(a + bp^N + (p^{N+1})) = p^{N(k-1)} B_k \left(\frac{a}{p^N}\right) = \mu_{B,k}(a + (p^N)).$$

$\square$

Observació 2.3.7. *També podem pensar la k-èssima distribució de Bernouilli com l'aplicació*

$$\mu_{B,k} \colon \mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p, \quad x \mapsto p^{N(k-1)} B_k \left(\frac{x}{p^N}\right).$$

Definició 2.3.8. *Una distribució p-àdica μ sobre un compacte-obert X és una mesura si*

$$|\mu(U)|_p \leq B$$

per una certa constant $B \geq 0$ i per tot compacte-obert $U \subseteq X$.

Les distribucions de Bernouilli no són mesures, però es poden "regularitzar" perquè ho siguin. Donat $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, $\alpha \neq 0$ i $U \subset \mathbb{Q}_p$ un compacte-obert, definim $\alpha U := \{\alpha u : u \in U\}$.
Notació: Si $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, denotem $\{\alpha\}_N$ com l'enter entre 0 i $p^N - 1$ congruent a $\alpha \pmod{p^N}$. Si

$$\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$$

aleshores

$$\{\alpha\}_N = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{N-1} p^{N-1},$$

i per tant

$$\frac{\{\alpha\}_N}{p^N} = \frac{\alpha}{p^N} - \left\lfloor \frac{\alpha}{p^N} \right\rfloor,$$

on $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la part entera inferior.

Definició 2.3.9. *Sigui $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ i no divisible per p. Definim*

$$\mu_{k,\alpha}(U) := \mu_{B,k}(U) - \alpha^{-k}\mu_{B,k}(\alpha U)$$

com la k-èssima distribució de Bernouilli regularitzada a $\mathbb{Z}_p$.

Proposició 2.3.10. *$|\mu_{1,\alpha}(U)|_p \leq 1$ per tot compacte-obert $U \subset \mathbb{Z}_p$.*

Demostració. Comencem trobant una "fórmula" per $\mu_{1,\alpha}(a + (p^N))$. Tenim que

$$\begin{aligned}\mu_{1,\alpha}(a + (p^N)) &= \mu_{B,1}(a + (p^N)) - \alpha^{-1}\mu_{B,1}(\alpha a + (p^N)) \\ &= B_1\left(\frac{a}{p^N}\right) - \frac{1}{\alpha}B_1\left(\frac{\{\alpha a\}_N}{p^N}\right) = \frac{a}{p^N} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\{\alpha a\}_N}{p^N} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{a}{p^N} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha a}{p^N} - \left\lfloor\frac{\alpha a}{p^N}\right\rfloor - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left\lfloor\frac{\alpha a}{p^N}\right\rfloor + \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{2}.\end{aligned}$$

Per definició, $\alpha \neq 1$ i no és divisible per p, per tant $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$, és a dir, $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$. A més, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ per $p \neq 2$, per tant $\frac{\alpha^{-1}-1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ si $p \neq 2$. Si $p = 2$, llavors $1 - \frac{1}{\alpha} \equiv 0 \pmod 2$ i $\frac{\alpha^{-1}-1}{2} \in \mathbb{Z}_2$. Per definició, $\left\lfloor\frac{\alpha a}{p^N}\right\rfloor$ és enter, i conseqüentment és a $\mathbb{Z}_p$. Agrupant-ho tot, tenim que $\mu_{1,\alpha}(a+(p^N)) \in \mathbb{Z}_p$. Tot compacte-obert es pot escriure com a unió disjunta d'intervals I_j. Per tant $|\mu_{1,\alpha}(U)|_p = \left|\sum_{j\in J}\mu_{1,\alpha}(I_j)\right|_p \leq \max\{|\mu_{1,\alpha}(I_j)|_p\} \leq 1$. □

Gràcies a aquesta proposició, tenim que $\mu_{1,\alpha}$ és una mesura. Utilitzant el següent lema (el qual es pot consultar la seva demostració a la pàgina 37 de [6]), provarem que no només pel particular $k = 1$ ho és, sinó que ho és per tot $k \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.11. *Sigui d_k el mínim comú denominador dels coeficients de $B_k(x)$. Llavors*

$$d_k\mu_{k,\alpha}(a + (p^N)) \equiv d_k k a^{k-1}\mu_{1,\alpha}(a + (p^N)) \pmod{p^N}.$$

Corol·lari 2.3.12. *$\mu_{k,\alpha}$ és una mesura per tot $k \in \mathbb{N}$ i per tot $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ tal que $p \nmid \alpha$.*

Demostració.

$$\begin{aligned}\left|\mu_{k,\alpha}(a + (p^N))\right|_p &\leq \max\{\left|\frac{p^N}{d_k}\right|_p, \left|ka^{k-1}\mu_{1,\alpha}(a + (p^N))\right|_p\} \\ &\leq \max\{\left|\frac{1}{d_k}\right|_p, \left|\mu_{1,\alpha}(a + (p^N))\right|_p\} \leq M\end{aligned}$$

per alguna constant $M \geq 1$. Això és degut a que d_k és un nombre fixat, i per tant el seu mòdul p-àdic és acotat, i $\left|\mu_{1,\alpha}(a + (p^N))\right|_p \leq 1$. □

Enunciem i demostrem un teorema molt important, gràcies al qual tindrà sentit parlar d'integrals a $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 2.3.13. *Donat un compacte-obert $X \subseteq \mathbb{Z}_p$. Sigui μ una mesura p-àdica en X, $x_{a,N} \in a + (p^N) \subset X$ i sigui $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ una funció contínua. Aleshores les sumes de Riemann*

$$S_{N,\{x_{a,N}\}} := \sum_{0\leq a<p^N} f(x_{a,N})\mu(a + (p^N))$$

convergeixen a $\mathbb{Q}_p$ quan $N \to \infty$. A més, aquest límit no depèn de la tria de $x_{a,N}$.

Demostració. Per hipòtesi, existeix una constant $B > 0$ tal que per tot compacte-obert $U \subset X$ es compleix $|\mu(U)|_p \leq B$. Primer, comprovem que les sumes $S_{N,\{x_{a,N}\}}$ són de Cauchy per veure la convergència a $\mathbb{Q}_p$. Com que X és compacte-obert, el podem escriure com a unió finita i disjunta d'intervals $a+(p^N)$. Triem un N prou gran per tal que tots els intervals $a+(p^N)$ estiguin totalment continguts a X o bé $a+(p^N)\cap X = \emptyset$. Sigui $M > N$ tal que $a+(p^M) \subset X$, denotem per $\hat{a} \geq 0$ el residu més petit de $a \pmod{p^N}$. D'aquesta manera, si $x_{\hat{a},N} \in \hat{a}+(p^N)$ i $x_{a,M} \in a+(p^M)$, tindrem que $x_{\hat{a},N} \equiv x_{a,M} \pmod{p^N}$.
Com que μ és additiva, podem reescriure la suma com

$$S_{N,\{x_{a,N}\}} = \sum_{0\leq a<p^M} f(x_{\hat{a},N})\mu(a+(p^M)).$$

f és una funció contínua en un compacte, per tant és uniformement contínua. Donat $\varepsilon > 0$ i $x \equiv y \pmod{p^N}$, podem assumir N prou gran per tal que $|f(x)-f(y)|_p < \varepsilon$. Així,

$$\begin{aligned}\left|S_{M,\{x_{a,M}\}} - S_{N,\{x_{a,N}\}}\right|_p &= \left|\sum_{0\leq a<p^M} f(x_{a,M})\mu(a+(p^M)) - \sum_{0\leq a<p^M} f(x_{\hat{a},N})\mu(a+(p^M))\right|_p \\ &= \left|\sum_{0\leq a<p^M} (f(x_{a,M}) - f(x_{\hat{a},N}))\mu(a+(p^M))\right|_p \\ &\leq \max\{|f(x_{a,M}) - f(x_{\hat{a},N})|_p \cdot \left|\mu(a+(p^M))\right|_p\} < \varepsilon B.\end{aligned}$$

Per tant $S_{N,\{x_{a,N}\}}$ és de Cauchy i convergeix a $\mathbb{Q}_p$.
Comprovem que la convergència no depèn de la tria de $x_{a,N}$. Prenem-ne un de diferent, $y_{a,N}$. Tenim que

$$\begin{aligned}\left|S_{N,\{x_{a,N}\}} - S_{N,\{y_{a,N}\}}\right|_p &= \left|\sum_{0\leq a<p^N} f(x_{a,N})\mu(a+(p^N)) - \sum_{0\leq a<p^N} f(y_{a,N})\mu(a+(p^N))\right|_p \\ &= \left|\sum_{0\leq a<p^N} (f(x_{a,N}) - f(y_{a,N}))\mu(a+(p^N))\right|_p \\ &\leq \max\{|f(x_{a,N}) - f(y_{a,N})|_p \cdot \left|\mu(a+(p^N))\right|_p\} < \varepsilon B.\end{aligned}$$

□

Com a conseqüència directa d'aquest teorema, la següent definició té sentit:

Definició 2.3.14. *Sigui $X \subset \mathbb{Q}_p$ un compacte-obert. Sigui $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ una funció contínua i μ una mesura sobre X. Definim*

$$\int f\mu := \lim_{N\to\infty} \sum_{0\leq a<p^N} f(x_{a,N})\mu(a+(p^N)).$$

Observem que aquesta definició és una extensió de la definició de $\int f\mu$ que havíem donat abans. Si f és localment constant a X, llavors la nova definició coincideix amb l'anterior.

Proposició 2.3.15. *Donat un compacte-obert $X \subseteq \mathbb{Q}_p$, sigui $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ una funció contínua tal que $|f(x)|_p \leq A$ per tot $x \in X$ i una certa constant $A > 0$. Sigui μ una mesura en X. Suposem que existeix una altra constant $B > 0$ tal que $\mu(U) \leq B$ per tot compacte-obert $U \subseteq X$, aleshores*

$$\left|\int f\mu\right|_p \leq AB.$$

Demostració.
$$\left|\int f\mu\right|_p \leq \max\{|f(x)|_p \left|\mu(a+(p^N))\right|_p : a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \leq AB.$$

□

Corol·lari 2.3.16. *Siguin $f, g : X \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ dues funcions contínues tals que $|f(x) - g(x)|_p \leq \varepsilon$ per tot $x \in X$. Suposem que $\mu(U) \leq B$ per tot compacte-obert $U \subset X$, llavors*
$$\left|\int f\mu - \int g\mu\right|_p \leq \varepsilon B.$$

2.4 Construcció de la funció ζ p-àdica

Donat un compacte-obert $X \subseteq \mathbb{Z}_p$, podem restringir qualsevol mesura μ de $\mathbb{Z}_p$ a X definint una mesura auxiliar μ^* en X imposant $\mu^*(U) = \mu(U)$ per tot compacte-obert $U \subseteq X$. En termes d'integrals:
$$\int f\mu^* = \int f \cdot \mathbb{1}_X \mu$$
on $\mathbb{1}_X$ és la funció característica de X.
A partir d'ara, farem servir la notació $\int f\mu^* := \int_X f\mu$. Volem interpolar p-àdicament $-\frac{B_k}{k}$. Observem que tenim la següent relació:
$$\int_{\mathbb{Z}_p} 1\mu_{B,k} = \mu_{B,k}(\mathbb{Z}_p) = B_k.$$

En efecte, la funció 1 és localment constant, per tant, aplicant la Definició 2.3.5:
$$\int_{\mathbb{Z}_p} 1\mu_{B,k} := \mu_{B,k}(\mathbb{Z}_p) = \mu_{B,k}(0 + p^0\mathbb{Z}_p) = p^{0(k-1)} B_k\left(\frac{0}{p^0}\right) = B_k(0) = B_k.$$

Per tant, tractarem d'interpolar els nombres $-\frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p} 1\mu_{B,k}$.

Proposició 2.4.1. *Fixem k com un enter positiu i $X \subseteq \mathbb{Z}_p$ un compacte-obert. Sigui $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ definida per $f(x) = x^{k-1}$, llavors*
$$\int_X 1\mu_{k,\alpha} = k\int_X f\mu_{1,\alpha}.$$

Demostració. Pel Lema 2.3.11, tenim que
$$\mu_{k,\alpha}(a + (p^N)) \equiv ka^{k-1}\mu_{1,\alpha}(a + (p^N)) \pmod{p^{N-\mathrm{ord}_p(d_k)}}.$$

Triem N prou gran per tal que $X = \bigcup_{a=0}^{p^N-1}\left(a + \left(p^N\right)\right)$. Així
$$\begin{aligned}\int_X 1\mu_{k,\alpha} = \sum_{0\leq a<p^N} \mu_{k,\alpha}(a + (p^N)) &\equiv \sum_{0\leq a<p^N} ka^{k-1}\mu_{1,\alpha}(a + (p^N)) \pmod{p^{N-\mathrm{ord}_p(d_k)}}\\ &= k\sum_{0\leq a<p^N} f(a)\mu_{1,\alpha}(a + (p^N)).\end{aligned}$$

Fem $N \to \infty$, i obtenim
$$\int_X 1\mu_{k,\alpha} = k\int_X x^{k-1}\mu_{1,\alpha}.$$

□

En certa manera, tractarem d'interpolar l'integrand x^{k-1} per un x fixat. Tal i com hem vist a la Subsecció 2.2, podem tenir problemes quan $x \equiv 0 \pmod{p}$. Per tant, per estalviar-nos aquests problemes, prendrem $X = \mathbb{Z}_p^\times$, de manera que podrem interpolar $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}$.
Per la Proposició 2.3.10 tenim que $|\mu_{1,\alpha}(U)|_p \leq 1$ per tot compacte-obert $U \subset \mathbb{Z}_p$. Pel Corol·lari 2.3.16 tenim que si $\left|f(x) - x^{k-1}\right|_p \leq \varepsilon$ per $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, aleshores

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p^\times} f\mu_{1,\alpha} - \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}\right|_p \leq \varepsilon.$$

Donat un enter positiu m tal que $m \equiv k \pmod{p-1}$ i $m \equiv k \pmod{p^N}$ (és a dir, $m \equiv k \pmod{p^N(p-1)}$) , aleshores

$$\left|x^{m-1} - x^{k-1}\right|_p \leq \frac{1}{p^{N+1}} \quad \text{per } x \in \mathbb{Z}_p^\times,$$

i per tant

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{m-1}\mu_{1,\alpha} - \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}\right|_p \leq \frac{1}{p^{N+1}}.$$

En conclusió, fixat $s_0 \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ i $k \in S_{s_0}$ (recordem que, per la Proposició 2.2.3, aquest conjunt és dens als enters p-àdics), podem estendre la funció $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}$ (en la "variable" k) a una funció contínua en els enters p-àdics s:

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s_0+s(p-1)-1}\mu_{1,\alpha}.$$

Tal i com hem vist a la Proposició 2.4.1, tenim que podem interpolar p-àdicament la següent expressió:

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha} = \frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} 1\mu_{k,\alpha},$$

però, el que volíem era interpolar els nombres $-\frac{B_k}{k} = -\frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p} 1\mu_{B,k}$. Amb la següent proposició, relacionarem ambdós conceptes:

Proposició 2.4.2.

$$\mu_{k,\alpha}(\mathbb{Z}_p^\times) = (1-\alpha^{-k})(1-p^{k-1})B_k.$$

Demostració. Abans de tot, provem que $\alpha\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times$ (recordem que $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ i $p \nmid \alpha$) per doble inclusió:
Sigui $x \in \alpha\mathbb{Z}_p^\times$, aleshores, per definició, $\frac{x}{\alpha} \in \mathbb{Z}_p^\times$, és a dir, $\left|\frac{x}{\alpha}\right|_p = 1$. Així, tenim que $|x|_p = |\alpha|_p$ i $|\alpha|_p = 1$ ja que és un enter no divisible per p. Per tant $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ i $\alpha\mathbb{Z}_p^\times \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$. Prenem ara $x \in \mathbb{Z}_p^\times$. Aleshores, $|x|_p = 1$. També, tenim que $|\alpha|_p = 1$, i així, $\left|\frac{x}{\alpha}\right|_p = 1$. Per tant $\frac{x}{\alpha} \in \mathbb{Z}_p^\times$ i $x \in \alpha\mathbb{Z}_p^\times$. Obtenim doncs, $\alpha\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times$. Aplicant la definició:

$$\mu_{k,\alpha}(\mathbb{Z}_p^\times) = \mu_{B,k}(\mathbb{Z}_p^\times) - \alpha^{-k}\mu_{B,k}(\alpha\mathbb{Z}_p^\times) = (1-\alpha^{-k})\mu_{B,k}(\mathbb{Z}_p^\times).$$

Ara veurem que $\mu_{B,k}(\mathbb{Z}_p^\times) = (1-p^{k-1})B_k$ i obtindrem el resultat de la proposició.
Els elements de $\mathbb{Z}_p^\times$ són els enters p-àdics pels quals el terme independent en la seva expansió p-àdica

és diferent de zero. Per tant, podem posar $\mathbb{Z}_p^\times = \biguplus_{a=1}^{p-1} a + p\mathbb{Z}_p$. Així, utilitzant que $\mu_{B,k}$ és una distribució:

$$\begin{aligned}\mu_{B,k}(\mathbb{Z}_p^\times) = \mu_{B,k}\left(\biguplus_{a=1}^{p-1} a + p\mathbb{Z}_p\right) &= \sum_{a=1}^{p-1} \mu_{B,k}(a + p\mathbb{Z}_p) = \sum_{a=1}^{p-1} p^{k-1} B_k\left(\frac{a}{p}\right) \qquad \text{(Prop. 2.1.4)} \\ &= B_k(0) - p^{k-1}B_k(0) = (1 - p^{k-1})B_k.\end{aligned}$$

Per tant, $\mu_{k,\alpha}(\mathbb{Z}_p^\times) = (1 - \alpha^{-k})(1 - p^{k-1})B_k$. □

Observem que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha} = \frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} 1\mu_{k,\alpha} = \frac{1}{k}\mu_{k,\alpha}(\mathbb{Z}_p^\times) = \frac{1}{k}(1 - \alpha^{-k})(1 - p^{k-1})B_k$$

Interpolarem els nombres $(1 - p^{k-1})\left(-\frac{B_k}{k}\right)$:

Definició 2.4.3. *Sigui k un enter positiu, definim*

$$\zeta_p(1-k) := (1 - p^{k-1})\left(-\frac{B_k}{k}\right) = \frac{1}{\alpha^{-k} - 1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}$$

com la funció zeta de Riemann p-àdica.

Aquesta definició no depèn de la tria d'α, ja que si considerem $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \alpha\}$ i $p \nmid \beta$, obtenim

$$\frac{1}{\beta^{-k} - 1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\beta} = (1 - p^{k-1})\left(-\frac{B_k}{k}\right) = \frac{1}{\alpha^{-k} - 1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}.$$

Amb la següent proposició, obtenim que $\zeta_p(1-k) \in \mathbb{Z}_p$ per certs k:

Proposició 2.4.4. *Sigui k un enter positiu tal que $p - 1 \nmid k$, aleshores $\frac{B_k}{k} \in \mathbb{Z}_p$.*

Demostració. Per la hipòtesi, ha de ser $p > 2$. Si $k = 1$, aleshores $\left|\frac{B_1}{1}\right|_p = \left|\frac{-1}{2}\right|_p = 1$. Així, assumim $k > 1$:

$$\left|\frac{B_k}{k}\right|_p = \left|\frac{1}{\alpha^{-k} - 1}\right|_p \left|\frac{1}{1 - p^{k-1}}\right|_p \left|\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}\right|_p \leq \left|\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}\right|_p \leq 1,$$

on l'última desigualtat ve donada per la Proposició 2.3.15, ja que $|x^{k-1}|_p \leq 1$ i $|\mu_{1,\alpha}(U)|_p \leq 1$ ($U \subseteq \mathbb{Z}_p$ compacte-obert) per la Proposició 2.3.10. □

Així, arribem al resultat buscat:

Teorema 2.4.5. *Suposem $p - 1 \nmid k$ i $k \equiv k' \pmod{(p-1)p^{N+1}}$, aleshores*

$$(1 - p^{k-1})\frac{B_k}{k} \equiv (1 - p^{k'-1})\frac{B_{k'}}{k'} \pmod{p^{N+1}}.$$

Escrit d'altra manera:

$$\zeta_p(1-k) \equiv \zeta_p(1-k') \pmod{p^{N+1}}.$$

Demostració. Reescrivim la congruència com

$$\frac{1}{\alpha^{-k}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha^{-k'}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k'-1}\mu_{1,\alpha} \pmod{p^{N+1}}.$$

Posem $a=(\alpha^{-k}-1)^{-1}$, $b=\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}$, $c=(\alpha^{-k'}-1)^{-1}$ i $d=\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k'-1}\mu_{1,\alpha}$. Per la Proposició 2.4.4, es té que $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_p$. Hem de veure que $a\equiv c \pmod{p^{N+1}}$ i $b\equiv d \pmod{p^{N+1}}$, d'aquesta manera, tindrem que $ab\equiv cd \pmod{p^{N+1}}$.
El primer cas, de fet, es redueix a provar que $\alpha^k\equiv\alpha^{k'} \pmod{p^{N+1}}$. Estem en una situació molt similar a quan interpolàvem la funció a^s:
Com que $k\equiv k' \pmod{(p-1)p^{N+1}}$, podem posar $k=k'+(p-1)p^{N+1}$, aleshores

$$\alpha^k=\alpha^{k'+(p-1)p^{N+1}}=\alpha^{k'}\left(\alpha^{p-1}\right)^{p^{N+1}}.$$

Com que α és un enter no divisible per p, tenim que $\alpha^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^{N+1}}$ i llavors $\alpha^k\equiv\alpha^{k'} \pmod{p^{N+1}}$.
Pel segon cas, observem que $|\mu_{1,\alpha}(U)|_p\le 1$ per tot $U\subseteq\mathbb{Z}_p$ compacte-obert i $|x^{k-1}-x^{k'-1}|_p\le\dfrac{1}{p^{N+1}}$ per tot $x\in\mathbb{Z}_p^\times$. Aleshores, pel Corol·lari 2.3.16,

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\mu_{1,\alpha}-\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k'-1}\mu_{1,\alpha}\right|_p\le\frac{1}{p^{N+1}}.$$

Per tant, ens podem reduir a veure que $x^{k-1}\equiv x^{k'-1} \pmod{p^{N+1}}$ per tot $x\in\mathbb{Z}_p^\times$. Però, pel mateix argument d'abans,

$$x^k=x^{k'+(p-1)p^{N+1}}=x^{k'}\left(x^{p-1}\right)^{p^{N+1}},$$

i com que $x\in\mathbb{Z}_p^\times$, en particular x no és divisible per p, per tant $x^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^{N+1}}$ i llavors $x^k\equiv x^{k'} \pmod{p^{N+1}}$. Agrupant-ho tot, obtenim que $ab\equiv cd \pmod{p^{N+1}}$. □

Definició 2.4.6. *Fixem $s_0\in\{0,1,2,\dots,p-2\}$. Donat $s\in\mathbb{Z}_p$ (si $s_0=0$, llavors prenem $s\neq 0$), definim*

$$\zeta_{p,s_0}(s):=\frac{1}{\alpha^{-(s_0+(p-1)s)}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s_0+(p-1)s-1}\mu_{1,\alpha}.$$

Notem que està ben definida. En efecte, si $x\in\mathbb{Z}_p^\times$, llavors $x^{s_0+(p-1)s-1}$ està definit per $s\in\mathbb{Z}_p$ prenent qualsevol successió d'enters positius $(k_i)_{i\ge 1}$ que tendeixi a s p-àdicament i fent $k_i\to s$. Aquesta successió sempre existeix, ja que $\mathbb{Z}^+$ és dens a $\mathbb{Z}_p$. Formalment, també es pot definir com:

$$\zeta_{p,s_0}(s)=-\lim_{k_i\to s}(1-p^{s_0+(p-1)k_i-1})\frac{B_{s_0+(p-1)k_i}}{s_0+(p-1)k_i}.$$

Corol·lari 2.4.7. *Fixem $s_0\in\{0,1,\dots,p-2\}$. Sigui k un enter positiu tal que $k\equiv s_0 \pmod{p-1}$, és a dir, $k=s_0+(p-1)k_0$ per $k_0\in\mathbb{Z}^+$. Aleshores*

$$\zeta_p(1-k)=\zeta_{p,s_0}(k_0).$$

Si fixem un s_0 senar, aleshores $B_{s_0+(p-1)k_i}$ té índex senar, i conseqüentment $B_{s_0+(p-1)k_i}=0$, fet que implica que obtenim la funció 0. El cas dubtós pot ser si $p=2$, però, en aquest cas, hauríem de triar $s_0=0$ (perquè $s_0\in\{0,1,\dots,p-2\}$), que no és imparell. Per tant, realment només estem interessats en s_0 parells.
Observem que si escrivim $k=s_0+(p-1)k_0$, estem excloent el cas corresponent a $\zeta_p(1)$, és a dir, la versió p-àdica de ζ té un "pol" a l'1, igual que la versió habitual de $\zeta(s)$.

Teorema 2.4.8. *Fixem p primer i $s_0 \in \{0,1,2,\ldots,p-2\}$. Aleshores $\zeta_{p,s_0}(s)$ és una funció contínua en s que no depèn de la tria de $\alpha \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$, $p \nmid \alpha$.*

Demostració. La continuïtat en s és clara per l'apartat d'interpolació de $f(s) = a^s$ i el Corol·lari 2.3.16. En efecte, el factor $\frac{1}{\alpha^{-(s_0+(p-1)s)}-1}$ és una funció contínua, ja que, per la definició, $s \neq 0$ si $s_0 = 0$, i $\alpha^{-(s_0+(p-1)s)}$ és una funció contínua perquè en particular $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times \setminus \{1\}$. Aleshores $\zeta_{p,s_0}(s)$ és contínua. Només cal veure que no depèn de la tria de α:
Suposem $\beta \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$, $p \nmid \beta$. Les funcions

$$\frac{1}{\alpha^{-(s_0+(p-1)s)}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s_0+(p-1)s-1}\mu_{1,\alpha} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\beta^{-(s_0+(p-1)s)}-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s_0+(p-1)s-1}\mu_{1,\alpha}$$

ens donen el mateix $((1-p^{k-1})\left(-\frac{B_k}{k}\right))$ sempre que $(s_0+(p-1)s) \in \mathbb{Z}^+$, és a dir, sempre que s sigui un enter no negatiu ($s > 0$ si $s_0 = 0$). Per la Proposició 2.2.1, $\mathbb{Z}^+$ és dens a $\mathbb{Z}_p$, i dues funcions contínues definides en un conjunt dens que ens donen el mateix són iguals a $\mathbb{Z}_p$. Així, la definició no depèn de la tria de α. $\square$

Gràcies a aquest teorema, hem obtingut la interpolació p-àdica del factor $\left(-\dfrac{B_{2k}}{2k}\right)$ que apareix a l'expressió de 2.1.5. Ara bé, volíem trobar una connexió entre ζ i ζ_p. La funció $\zeta(s)$ per $s \in \mathbb{C}$ estén a una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ amb un únic pol a $s = 1$. Un resultat clàssic és que aquesta satisfà una equació funcional que la relaciona el seu valor a s amb $\zeta(1-s)$, que és

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos(\frac{\pi s}{2})\hat{\Gamma}(s)}{(2\pi)^s}\zeta(s),$$

on $\hat{\Gamma}$ denota la funció Gamma, definida per $\hat{\Gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$ si $\mathrm{Re}(s) > 0$ i que es pot estendre de manera meromorfa a tot $\mathbb{C}$ amb pols a $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Aquesta es diu que és la "generalització de l'operador factorial", ja que quan pren un valor enter positiu n, coincideix amb $(n-1)!$.
Prenem $s = 2k$, per $k \in \mathbb{N}$, i obtenim

$$\zeta(1-2k) = \frac{2\cos(\pi k)(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = -\frac{B_{2k}}{2k},$$

on l'última igualtat ve donada pel Teorema 2.1.5. Si $s = 2k+1$, per $k \in \mathbb{N}$, obtenim que $\cos(\frac{\pi s}{2}) = 0$, i per tant $\zeta(1-s) = \zeta(-2k) = 0$. Ara bé, pel Lema 2.1.3, tenim que $B_k = 0$ si $k \geq 3$ és imparell. Per tant, agrupant-ho tot, tenim que si $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, aleshores $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$, i obtenim la relació buscada:

$$\zeta_p(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k).$$

3 Funció-L p-àdica de Dirichlet

Tal i com acabem de veure a la Secció 2, la funció $\zeta_p(1-k)$ és una funció contínua si treballem amb enters positius k tals que $k \equiv 0 \pmod{p-1}$. En aquesta secció veurem que, de fet, és inclús analítica (és a dir, una funció que pot ser expressada localment com una sèrie de potències convergent) per aquest tipus d'enters. Per això, haurem de treballar amb versions més generals, fent servir caràcters de Dirichlet i funcions-L.

3.1 Interpolació p-àdica de la funció-L de Dirichlet

L'objectiu d'aquest apartat és definir i interpolar p-àdicament la funció-L de Dirichlet. Veurem que aquesta versió p-àdica és analítica. Comencem definint el que són els caràcters de Dirichlet:

Definició 3.1.1. *Un caràcter de Dirichlet és una funció $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ que compleix:*

(i) Existeix un enter positiu k tal que $\chi(n) = \chi(n+k)$ per tot n i tal que

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \gcd(n,k) > 1 \\ \neq 0 & \textit{si } \gcd(n,k) = 1. \end{cases}$$

(ii) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ per tot $n, m \in \mathbb{Z}$.

Direm que χ és un caràcter de mòdul k.

Propietats:
1. $\chi(1) = 1$.

Demostració. Per la propietat (ii), tenim que $\chi(1) = \chi(1 \cdot 1) = \chi(1)\chi(1)$. Per la propietat (i), com que sempre es compleix $\gcd(1,k) = 1$, tenim que $\chi(1) \neq 0$. Per tant, podem dividir l'expressió per $\chi(1)$, i obtenim $\chi(1) = 1$. □

2. Si $a \equiv b \pmod{k}$, on k és un enter positiu que compleix la propietat (i), aleshores $\chi(a) = \chi(b)$.

Demostració. És conseqüència directa de la propietat (i). □

3. Sigui k un enter positiu que compleix la propietat (i). Aleshores, per tot a coprimer amb k, $\chi(a)$ és la $\varphi(k)-$èssima arrel complexa de la unitat (φ és la funció φ d'Euler [1]).

Demostració. Si $\gcd(a,k) = 1$, pel teorema d'Euler [2], tenim que $a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$. Per la propietat anterior, $\chi(a^{\varphi(k)}) = \chi(1) = 1$. Per (ii), $1 = \chi(a^{\varphi(k)}) = \chi(a)^{\varphi(k)}$. □

En aquesta secció, treballarem amb la següent extensió:

Definició 3.1.2. *Sigui k un enter positiu. Sigui $\chi : \left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right)^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un homomorfisme de grups tal que χ és primitiu, és a dir, no existeix cap $M \mid k$, $1 \leq M < k$ tal que el valor de χ sobre els elements de $\left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right)^\times$ només depèn del seu valor mòdul M. Per tal que sigui un caràcter de Dirichlet pensat amb la definició anterior, pensem χ com una funció sobre $\mathbb{Z}^+$ i exigim:*

(i) $\chi(n) = \chi(n \pmod{k})$ si n i k són coprimers.

(ii) $\chi(n) = 0$ si $\gcd(n,k) > 1$.

Es diu que χ és un caràcter primitiu de conductor k.
Així, definim, per $s \in \mathbb{R}$

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

com la funció-L de Dirichlet pel caràcter χ.

[1] $\varphi(n) = \#\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$.
[2] Si $\gcd(a,n) = 1$, aleshores $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Si χ pren el valor 1 per tot n tal que $\gcd(n,k)=1$, diem que és el caràcter trivial de mòdul k. Aquest es denota per χ_0. Si $\chi=\chi_0$, notem que $L(s,\chi_0)=C\zeta(s)$ per alguna constant C, i conseqüentment la funció divergeix per $s=1$. Per aquest motiu, descartarem el caràcter trivial en la majoria de resultats, ja que obtenim l'avantatge de tenir propietats com la següent:

Proposició 3.1.3. *Si χ no és el caràcter trivial, la funció-L de Dirichlet convergeix per $s>0$ i és contínua a $s\in(0,+\infty)$.*

Per provar aquesta proposició, necessitem el següent lema.

Lema 3.1.4. *Donada $(a_n)_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{C}$. Suposem que existeix una constant $C\geq 0$ tal que $|A_n|=|\sum_{k=1}^{n}a_k|\leq C$ per tot $n\geq 1$. Aleshores, la sèrie*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

convergeix per tot $s>0$. De fet, per qualsevol $\sigma>0$, la convergència és uniforme a l'interval $[\sigma,+\infty)$, de manera que $f(s)$ és contínua en s.

Demostració. Veure [1]. □

Demostració. (de la proposició).
Si χ no és el caràcter trivial de i és de conductor m. Notem que $\sum_{k\in K}\chi(k)=0$ si K és un conjunt de residus mòdul m. Escrivint $n=qm+r$, per $0\leq r<m$, obtenim que $|A_n|=|\sum_{k=1}^{n}\chi(k)|=|\sum_{k=1}^{r}\chi(k)|\leq r<m$. Apliquem el Lema 3.1.4, i obtenim el resultat. □

Per la resta d'aquesta subsecció, seguirem [4] i [7].

Definició 3.1.5. *Sigui $f:\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\longrightarrow K$. Definim els polinomis de Bernouilli generalitzats $B_{k,f}(x)$ com*

$$\sum_{a=0}^{p^n-1}f(a)\frac{te^{t(x+a)}}{e^{tp^n}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k,f}(x)\frac{t^k}{k!}.$$

Els nombres (en funció de f) $B_{k,f}:=B_{k,f}(0)$ són els nombres de Bernouilli generalitzats.

Observació 3.1.6. *Si interpretem f com una funció localment constant sobre $\mathbb{Z}_p$, aleshores*

$$\frac{B_{k,f}}{k}=\frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p}f\mu_{B,k}.$$

Prenem $\chi:\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$ (aquí, $\overline{\mathbb{Q}}$ denota la clausura algebraica dels racionals) un caràcter de Dirichlet tal que envïi al 0 tots els elements no invertibles, és a dir, $\chi(p\mathbb{Z}_p)=0$. Per l'observació anterior, tenim que

$$\frac{B_{k,\chi}}{k}=\frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi\mu_{B,k}.$$

Totes les proposicions vistes anteriorment es poden generalitzar canviant la funció 1 per χ. A partir d'ara, farem servir aquest fet i referenciarem proposicions de la Secció 2, tot i que no hi aparegui explícitament χ.

Proposició 3.1.7. *Sigui k un enter positiu, aleshores*

$$\frac{B_{k,\chi}}{k}=\frac{1}{(1-\chi(\alpha)^{-1}\alpha^{-k})}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi(x)x^{k-1}\mu_{1,\alpha}.$$

Demostració.

$$\begin{aligned}\frac{B_{k,\chi}}{k} &= \frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi\mu_{B,k} = \frac{1}{k}\left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi\mu_{k,\alpha} + \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\alpha^{-k}\mu_{B,k}(\alpha x)\right) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\chi(x)\mu_{1,\alpha} + \frac{1}{k}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(\alpha)^{-1}\chi(x)\alpha^{-k}\mu_{B,k} = (*)\end{aligned}$$

on a l'última igualtat hem fet servir la Proposició 2.4.1, el canvi $x \mapsto \alpha^{-1}x$ i el fet que χ és multiplicativa. Continuant amb la cadena d'igualtats:

$$\begin{aligned}\frac{B_{k,\chi}}{k} &= (*) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\chi(x)\mu_{1,\alpha} + \alpha^{-k}\chi(\alpha)^{-1}\frac{B_{k,\chi}}{k} \Longleftrightarrow \\ \frac{B_{k,\chi}}{k} &= \frac{1}{(1-\chi(\alpha)^{-1}\alpha^{-k})}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)x^{k-1}\mu_{1,\alpha}.\end{aligned}$$

□

El grup de les arrels $(p-1)$-èssimes a $\mathbb{Z}_p^\times$ jugarà un paper important. Enunciem el Lema de Hensel, que ens servirà per provar un resultat important:

Teorema 3.1.8. ***(Lema de Hensel).*** *Sigui $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ i $a \in \mathbb{Z}_p$ tal que $f(a) \equiv 0 \pmod p$, $f'(a) \not\equiv 0 \pmod p$, on f' denota la derivada habitual de polinomis. Aleshores existeix un únic $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ tal que $f(\alpha) = 0$ a $\mathbb{Z}_p$ i $\alpha \equiv a \pmod p$.*

Demostració. Veure la Secció 2 de [3]. □

Les arrels $(p-1)$-èssimes de la unitat a $\mathbb{Z}_p^\times$ són els elements $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ que satisfan $x^{p-1} = 1$. Pel petit teorema de Fermat[3], tenim que $1, 2, \ldots, p-1$ són tots solucions de $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ i són tots incongruents mòdul p. Aplicant el Lema de Hensel, obtenim $p-1$ arrels que són totes incongruents mòdul p, i en particular, totes diferents. Com que el polinomi és de grau $p-1$, obtenim que no n'hi ha més. Així, tenim que a $\mathbb{Z}_p^\times$ hi ha exactament $p-1$ arrels $(p-1)$-èssimes de la unitat (totes diferents). D'aquesta manera, la següent aplicació està ben definida:

Definició 3.1.9. *El caràcter de Teichmüller és un homomorfisme de grups multiplicatius*

$$\omega : \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow \mu_{p-1} = \{\textit{arrels } (p-1)\textit{-èssimes de la unitat a } \mathbb{Z}_p^\times\}$$

on $\omega(a)$ és l'única arrel $(p-1)$-èssima de la unitat a $\mathbb{Z}_p^\times$ que és congruent a $a \pmod p$. D'aquesta manera, tot $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ es pot escriure com

$$a = \langle a\rangle\omega(a) \quad \textit{on } \langle a\rangle \equiv 1 \pmod p.$$

Definició 3.1.10. *Sigui μ una mesura en $\mathbb{Z}_p$. Definim la seva transformada Gamma p-àdica com la funció en $\mathbb{Z}_p$ donada per la integral*

$$\Gamma_p\mu(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle a\rangle^s\mu(a).$$

Definició 3.1.11. *Sigui μ una mesura en $\mathbb{Z}_p$. Definim la transformada de Mellin sobre μ com la funció de variable p-àdica s definida per*

$$\mathbb{M}_p\mu(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle a\rangle^s a^{-1}\mu(a).$$

[3]Si p és primer i $p \nmid a$, aleshores $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

És clar que $\Gamma_p\mu$ i $\mathbb{M}_p\mu$ són funcions contínues en s (de fet, veurem que són analítiques). Com que són integrals a $\mathbb{Z}_p^\times$, aquestes dues integrals només depenen de la restricció de μ a $\mathbb{Z}_p^\times$.
Gràcies al següent lema, obtenim que la transformada Gamma és una funció analítica en variable p-àdica:

Lema 3.1.12. *Sigui μ una mesura sobre $\mathbb{Z}_p^\times$. Aleshores existeix una successió $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n \to 0$ quan $n \to \infty$ que compleix*

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle a\rangle^s \mu(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n s^n \quad , \quad s \in \mathbb{Z}_p.$$

Demostració. Reescrivim la integral com

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle a\rangle^s \mu(a) = \sum_{b=1}^{p-1} \int_{\omega(b)(1+p\mathbb{Z}_p)} \langle a\rangle^s \mu(a).$$

Fem el canvi de variable $a = \omega(b)x$ per cada integral (d'aquesta manera, la mesura μ queda alterada, denotem per $\hat{\mu}$ la nova mesura). De manera que ens reduïm a provar el lema per integrals de la forma

$$\int_{1+p\mathbb{Z}_p} \langle x\rangle^s \hat{\mu}(x).$$

Observem que podem prendre $\langle x\rangle = x$, ja que $x \in 1 + p\mathbb{Z}_p$. Fem servir l'expansió de Taylor de la funció x^s al voltant de $x = 1$, que és de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n}(x-1)^n$ amb radi de convergència ∞:

$$\begin{aligned}\int_{1+p\mathbb{Z}_p} \langle x\rangle^s \hat{\mu}(x) &= \int_{1+p\mathbb{Z}_p} x^s \hat{\mu}(x) = \int_{1+p\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n}(x-1)^n \hat{\mu}(x) \\ &= \int_{1+p\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} s(s-1)\cdots(s-n+1)\frac{(x-1)^n}{n!}\hat{\mu}(x).\end{aligned}$$

Com que x es mou en $1 + p\mathbb{Z}_p$, aleshores $x \equiv 1 \pmod{p}$. Per tant, $\frac{(x-1)^n}{n!} \in \mathbb{Z}_p$ i tendeix cap a 0 p-àdicament. Per tant, podem intercanviar el sumatori i la integral, i obtenim:

$$\int_{1+p\mathbb{Z}_p} \langle x\rangle^s \hat{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s(s-1)\cdots(s-n+1)\left(\int_{1+p\mathbb{Z}_p} \frac{(x-1)^n}{n!}\hat{\mu}(x)\right).$$

Els coeficients $a_n = \int_{1+p\mathbb{Z}_p} \frac{(x-1)^n}{n!}\hat{\mu}(x)$ tendeixen cap a 0 p-àdicament quan $n \to \infty$. Reordenant els termes, obtenim una sèrie de potències tal i com està escrit a l'enunciat.

□

Corol·lari 3.1.13. *$\mathbb{M}_p\mu(s)$ és una funció analítica a $\mathbb{Z}_p$.*

Demostració. Només cal notar $a^{-1}\mu(a)$, per $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ és el funcional associat a una mesura, i per tant apliquem el Lema 3.1.12. En altres paraules, la transformada de Mellin és un cas especial de la transformada Gamma. □

Ara ja estem en condicions de definir la funció-L p-àdica de Dirichlet.

Definició 3.1.14. *Fixem un $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$, $p \nmid \alpha$. Definim la funció-L p-àdica $L_p(1-s,\chi)$ per $s \in \mathbb{Z}_p$ com*

$$L_p(1-s,\chi) = \frac{1}{\chi(\alpha)^{-1}\langle\alpha\rangle^{-s} - 1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^s \chi(x) x^{-1}\mu_{1,\alpha}(x).$$

Aquesta estarà ben definida sempre que $\chi(\alpha)^{-1}\langle\alpha\rangle^{-s} \neq 1$.

Teorema 3.1.15. *Si $\chi \neq \chi_0$, aleshores $L_p(1-s,\chi)$ és una funció analítica en la variable p-àdica s.*

Demostració. La integral de la definició és una funció analítica en la variable p-àdica s. Pel Corol·lari 3.1.13, notem que és justament $\mathbb{M}_p(\chi\mu_{1,\alpha})$ i $\chi\mu_{1,\alpha}$ és una mesura. A més, com que $\chi \neq \chi_0$, sempre podem trobar un α tal que $\chi(\alpha)^{-1}\langle\alpha\rangle^{-s} \neq 1$ per tot s, per tant el terme que multiplica la integral també és analític. En conclusió, $L_p(1-s,\chi)$ és analítica. □

Si $\chi = \chi_0$, aleshores el denominador de la Definició 3.1.14 sempre s'anul·la per $s = 0$, i per tant tindrem un pol a $L_p(1,\chi_0)$. Aquest fet no és gaire sorprenent, ja que prenent un cert caràcter trivial (més endavant veurem quin), obtenim la funció $\zeta_p(1-k)$ per $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \equiv 0 \pmod{p-1}$, i aquesta també tenia un pol a $\zeta_p(1)$. Si triem un χ diferent del caràcter trivial, la funció és analítica a $s = 0$. Aquest cas és d'especial interès, i el tractarem més endavant. Abans, veiem alguns resultats més relacionats amb la funció L_p, amb els quals notarem una certa similitud amb els de la Secció 2.

Teorema 3.1.16. *Si $k \in \mathbb{N}$, aleshores*

$$L_p(1-k,\chi) = -\frac{B_{k,\chi\omega^{-k}}}{k}.$$

Demostració. Sigui k un enter positiu. Posem $s = k$ i operem amb la integral de la Definició 3.1.14:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^k \chi(x)x^{-1}\mu_{1,\alpha}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^{k-1}\chi(x)\omega(x)^{-1}\mu_{1,\alpha}(x) \\
&= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \langle x\rangle^{k-1}\omega(x)^{k-1}\chi(x)\omega(x)^{-(k-1)}\omega(x)^{-1}\mu_{1,\alpha}(x) \\
&= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1}\chi(x)\omega(x)^{-k}\mu_{1,\alpha}(x) = (1-\chi(\alpha)^{-1}\omega^{-k}(\alpha)\alpha^{-k})\frac{B_{k,\chi w^{-k}}}{k} \qquad \text{(Proposició 3.1.7)} \\
&= \left(1-\chi(\alpha)^{-1}\langle\alpha\rangle^{-k}\right)\frac{B_{k,\chi w^{-k}}}{k}.
\end{aligned}$$

Així, multiplicant per -1 aquesta igualtat i passant a dividir el terme $\left(1-\chi(\alpha)^{-1}\langle\alpha\rangle^{-k}\right)$, obtenim el resultat de l'enunciat. □

Corol·lari 3.1.17. *Si p és un primer senar i $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \equiv 0 \pmod{p-1}$, aleshores*

$$L_p(1-k,\chi) = -\frac{B_{k,\chi}}{k}.$$

Demostració. Si $k \equiv 0 \pmod{p-1}$, aleshores vol dir que k és de la forma $k = (p-1)m$ per $m \in \mathbb{Z}^+$. Per definició, $\omega(a)$ és una arrel $(p-1)$-èssima de la unitat a $\mathbb{Z}_p^\times$. Per tant, $\omega^{-k} = \left(\omega^{(p-1)}\right)^{-m} = 1$, i aplicant el Teorema 3.1.16, obtenim el resultat. □

Enunciem un resultat que ens servirà per connectar les funcions $L(1-k,\chi)$ i $L_p(1-k,\chi)$. Només l'enunciarem, ja que el contingut de la prova fa servir molts resultats que no hem vist en aquest treball. Tot i això, si es vol consultar els detalls, veure les pàgines $11-13$ de [5].

Teorema 3.1.18. *Sigui $k \in \mathbb{N}$, aleshores*

$$L(1-k,\chi) = -\frac{B_{k,\chi}}{k}.$$

Fixem-nos que, combinant els Teoremes 3.1.16 i 3.1.18, obtenim que, per $k \in \mathbb{N}$:

$$L_p(1-k, \chi) = L(1-k, \chi\omega^{-k}).$$

Si prenem $\chi = \chi_0$ com el caràcter trivial de mòdul $p > 2$ i $k \equiv 0 \pmod{p-1}$, veiem que

$$L(1-k, \chi) = L_p(1-k, \chi) = (1 - p^{k-1})\zeta(1-k) = \zeta_p(1-k),$$

on la penúltima igualtat és justament la Definició 2.4.3. Aquesta funció interpoladora, tot i que tingui un pol, segueix essent meromorfa amb un únic pol a $s = 0$, que és fora del rang d'interpolació, ja que aquest ve donat per enters positius k tal que $k \equiv 0 \pmod{p-1}$. Per tant, hem trobat que la funció interpoladora $\zeta_p(1-k)$ no només és contínua, sinó que a més es descriu com a sèrie de potències, és a dir, és analítica.

3.2 Càlcul de $L(1, \chi)$

Durant aquesta subsecció, no farem servir els nombres p-àdics. Calcularem el valor de la funció-L de Dirichlet a $s = 1$ per un caràcter primitiu, seguint l'esquema de [1]. Aquest el compararem posteriorment amb el valor de la funció-L p-àdica també a l'1.
Prenem χ un caràcter de mòdul m diferent del caràcter trivial. Fent servir que alguns sumands són zero i d'altres que compleixen $\chi(n_1) = \chi(n_2)$ si $n_1 \equiv n_2 \pmod{m}$, per $s > 1$, tenim que

$$L(s, \chi) = \sum_{\gcd(x,m)=1} \chi(x) \sum_{n \equiv x \pmod{m}} \frac{1}{n^s}.$$

Podem reescriure la suma interior com $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{n^s}$ on

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv x \pmod{m} \\ 0 & \text{si } n \not\equiv x \pmod{m}. \end{cases}$$

Escrivim els coeficients c_n d'una manera més adient. Sigui $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ una arrel primitiva m-èssima de 1, tenim la següent fórmula:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{rk} = \begin{cases} m & \text{si } r \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 & \text{si } r \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

de manera que $c_n = \dfrac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{(x-n)k}$. Per tant,

$$L(s, \chi) = \sum_{\gcd(x,m)=1} \chi(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{(x-n)k} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{\gcd(x,m)=1} \chi(x)\zeta^{xk} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-nk}}{n^s}.$$

El sumatori entre parèntesi és el que es coneix com una suma Gaussiana.

Definició 3.2.1. *Fixem ζ com una arrel primitiva m-èssima de la unitat. Sigui χ un caràcter de Dirichlet de mòdul m. Definim la suma Gaussiana corresponent al caràcter χ i $a \in \mathbb{Z}$ com l'expressió*

$$\tau_a(\chi) = \sum_{x \pmod{m}} \chi(x)\zeta^{ax}.$$

És clar que aquesta definició depèn de la tria de ζ. Per aquesta subsecció, farem servir sempre $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Per alleugerar la notació, posem $\tau_1(\chi) = \tau(\chi)$.
Si χ no és el caràcter trivial de mòdul m, aleshores $\tau_0(\chi) = \sum_{\gcd(x,m)=1} \chi(x) = 0$. Per tant, podem escriure $L(s,\chi)$ de la següent manera:

$$L(s,\chi) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-nk}}{n^s}.$$

Podem aplicar el Lema 3.1.4 en la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-nk}}{n^s}$, (ja que $\zeta^{-k} \neq 1$ si $k \neq 0$, i per tant $\sum_{n=1}^{mr} \zeta^{-nk} = 0$). Per tant, $L(s,\chi)$ convergeix per $s \in (0, +\infty)$ i és una funció contínua en s. En particular, convergeix per $s = 1$. Substituint, obtenim

$$L(1,\chi) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-nk}}{n}.$$

Podem trobar el valor exacte de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-nk}}{n}$. Posem $z = \zeta^{-k}$, i estudiem la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Pel teorema de Cauchy-Hadamard[4], aquesta convergeix per $|z| < 1$. Derivant, obtenim una sèrie geomètrica, que podem sumar. Integrant, recuperem el valor original del sumatori, que és $-\log(1-z)$. Aquesta també convergeix per $z = \zeta^{-k}$, que té mòdul 1. Pel teorema d'Abel, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-nk}}{n} = -\log(1-\zeta^{-k})$, i així,

$$L(1,\chi) = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(\chi) \log(1-\zeta^{-k}).$$

Ara bé, ens interessa calcular el valor de $L(1,\chi)$ per un χ primitiu. Per tant, seguim calculant. Enunciem i demostrem un parell de resultats, que ens donaran una simplificació per a l'expressió de $\tau_k(\chi)$:

Proposició 3.2.2. *Si χ és un caràcter de Dirichlet primitiu, no trivial, de conductor m i $\gcd(a,m) = r > 1$, aleshores*

$$\tau_a(\chi) = 0.$$

Demostració. Posem $m = rd$. Per la tria de ζ, és clar que ζ és una arrel primitiva d-èssima de 1, i per tant $\zeta^{az} = \zeta^a$ per $\zeta \equiv 1 \pmod d$. Prenem z tal que $\gcd(z,m) = 1$ i $z \equiv 1 \pmod d$ tal que $\chi(z) \neq 1$. Com que x es mou en un conjunt de residus mòdul m, també ho fa zx, i per tant

$$\tau_a(\chi) = \sum_{x \pmod m} \chi(zx)\zeta^{azx} = \chi(z) \sum_{x \pmod m} \chi(x)\zeta^{ax} = \chi(z)\tau_a(\chi).$$

Com que $\chi(z) \neq 1$, tenim que $\tau_a(\chi) = 0$. $\square$

[4]Sigui (a_n) una successió de nombres complexos, $z_0 \in \mathbb{C}$ i z la variable complexa. Considerem la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$. Sigui $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,+\infty)$. Llavors, es compleix que

1) $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ convergeix puntualment per $|z-z_0| < R$ i divergeix per $|z-z_0| > R$.
2) Per a tot $r < R$, $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ convergeix uniformement per $|z-z_0| < r$.
3) Si $|z-z_0| < R$, llavors $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ és contínua, holomorfa i $f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n(z-z_0)^{n-1}$. A més, $f'(z)$ convergeix puntualment si $|z-z_0| < R$.

Proposició 3.2.3. *Si* $\gcd(a, m) = 1$, *aleshores* $\tau_a(\chi) = \chi(a)^{-1}\tau(\chi)$.

Demostració. Com que x es mou en un conjunt de residus mòdul m, també ho fa ax, i per tant

$$\chi(a)\tau_a(\chi) = \sum_{x \pmod m} \chi(ax)\zeta^{ax} = \tau_1(\chi) = \tau(\chi).$$

□

Notació: Posem $\overline{\chi}$ com el caràcter conjugat de χ, que té el mateix conductor m que χ i compleix $\overline{\chi}(a) = \chi(a)^{-1}$ si $\gcd(a, m) = 1$ i $\overline{\chi}(a) = 0$ si $\gcd(a, m) \neq 1$.
En conclusió, si χ és primitiu de conductor m, podem escriure $L(1, \chi)$ de la forma

$$L(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{m} \sum_{\gcd(k,m)=1} \overline{\chi}(k) \log(1 - \zeta^{-k}).$$

3.3 Càlcul de $L_p(1, \chi)$

L'objectiu d'aquesta subsecció és calcular el valor de la funció $L_p(1, \chi)$ per així poder comparar-lo amb el de la Subsecció 3.2. Farem servir diversos lemes tècnics, que no demostrarem. Per consultar les demostracions, veure [5].
$(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ és un espai mètric complet, però no és algebraicament tancat, en general. Per veure-ho, considerem el polinomi $f(x) = x^2 - n$, per $p > 2$ i $0 < n < p$ no quadrat a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Aquest és un polinomi amb coeficients a $\mathbb{Q}_p$, i les seves arrels són les arrels quadrades de n. Però cap d'aquestes és a $\mathbb{Q}_p$, ja que en cas contrari, tindríem que $x^2 = (p^m u)^2 = n$, fet que implica que $m = 0$ i per tant

$$x^2 = u^2 = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots)^2 \in a_0^2 + p\mathbb{Z}_p$$

on $a_0 \neq 0$. Però, $n \not\equiv a_0^2 \pmod p$ per la hipòtesi, per tant $x^2 \neq n$.
Per tal de poder treballar a un cos algebraicament tancat, prenem $\Omega_p = \overline{\mathbb{Q}_p}$, la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$. El problema al fer això, és que $(\Omega_p, |\cdot|_p)$ deixa de ser un espai mètric complet. Hom pot consultar la prova d'aquest fet a la pàgina 130 de [9]. Aquest fet motiva la següent definició:

Definició 3.3.1. *Definim el conjunt* $\mathbb{C}_p$ *com la compleció de* $\Omega_p = \overline{\mathbb{Q}_p}$ *respecte la norma p-àdica* $|\cdot|_p$.

Per tant, $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ és un cos algebraicament tancat i un espai mètric complet, al qual Ω_p hi és dens. Per la resta de la subsecció, prenem χ un caràcter de Dirichlet primitiu de conductor $f > 1$ no trivial. En aquest apartat, considerarem funcions definides en dominis a Ω_p i que prenguin valors a Ω_p. Prenem K com una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$ continguda a Ω_p. Definim

$$C_K = \{g : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K : g \text{ contínua } \},$$

que és un espai de Banach[5] sobre K amb la norma $\|f\| = \max_{s \in \mathbb{Z}_p} |f(s)|_p$. Definim la següent aplicació:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ (x, s) &\longmapsto \phi(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}_p^\times \\ \langle x \rangle^s & \text{si } x \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ i } p > 2 \\ x^s & \text{si } x \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ i } p = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

[5]Un espai de Banach és un espai vectorial normat i complet.

Proposició 3.3.2. *ϕ és continua.*

Demostració. Si $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, llavors $x, \langle x \rangle \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, aleshores podem escriure, igual que a la demostració del Lema 3.1.12:

$$\langle x \rangle^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} (\langle x \rangle - 1)^n \quad , \quad x^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} (x-1)^n.$$

Com que $\langle x \rangle \equiv 1 \pmod p$, és a dir, $\langle x \rangle = 1 + p(\dots)$, llavors és clar que

$$\left| \binom{s}{n} (\langle x \rangle - 1)^n \right|_p \leq |\langle x \rangle - 1|_p^n \leq |p|_p^n,$$

i també és clar que

$$\left| \binom{s}{n} (x-1)^n \right|_p \leq |x-1|_p^n \leq |2|_p^n.$$

Per tant, ambdues sèries convergeixen uniformement $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p$, que és un obert de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ i ϕ és contínua. □

Definició 3.3.3. *Per cada enter $n \geq 0$ i $s \in \mathbb{Z}_p$, definim*

$$\gamma_n(s) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \phi(i, s),$$

que és clarament una funció de C_K, ja que és una combinació lineal finita de funcions contínues en $\mathbb{Z}_p$.

Lema 3.3.4.

$$\|\gamma_n\| = \max_{s \in \mathbb{Z}_p} |\gamma_n(s)|_p \leq |n!|_p.$$

Lema 3.3.5. *Per cada $(x, s) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$,*

$$\phi(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(s) \binom{x}{n}.$$

Definim $\mathbb{Q}_K$ com el conjunt de sèries formals $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on $a_n \in K$ són tals que $|a_n n!|_p \to 0$ quan $n \to \infty$, que és un espai de Banach sobre K amb la norma $\|A\| = \sup_n |a_n n!|_p$. La motivació de definir aquest espai ve donada per a poder introduir el logaritme p-àdic:
La sèrie de potències $\log(1+x)$ a $\mathbb{Q}_p[[x]]$ ve donada per

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Aquesta convergeix a $\mathbb{C}_p$ per $|x|_p < 1$. Observem que $\log(1+x) \in \mathbb{Q}_K$, ja que $\left| \frac{(-1)^{n-1} n!}{n} \right|_p = |(n-1)!|_p \to 0$ quan $n \to \infty$. Aquesta defineix la funció logaritme p-àdic

$$\log_p : \{ s \in \mathbb{C}_p : |s-1|_p < 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

que satisfà la propietat elemental $\log_p(zw) = \log_p(z) + \log_p(w)$.
Aquesta funció també es pot estendre a $\mathbb{C}_p^\times$ imposant que segueixi complint aquesta última propietat i a més $\log_p(p) = 0$. Enunciem dues propietats importants:

i) Si $s = p^r\zeta$, on $r \in \mathbb{Q}$ i r és una arrel de la unitat, aleshores $\log_p(s) = 0$. El recíproc també és cert.

ii) $\log_p(e^t) = t$ si $t \in \mathbb{C}$.

Remarca: Aquestes propietats es poden generalitzar més, però enunciem només les que ens interessen per aquesta subsecció.
Passem a treballar amb l'operador Γ, que serà el que acabarem manipulant per calcular el valor de $L_p(1,\chi)$.

Teorema 3.3.6. *Existeix un únic operador lineal acotat $\Gamma : \mathbb{Q}_K \longrightarrow C_K$ tal que $\Gamma(x^n) = \gamma_n$ per tot $n \geq 0$, i a més, compleix:*

i) $\|\Gamma(A)\| \leq \|A\|$ *per tot* $A \in \mathbb{Q}_K$.

ii) $\Gamma\left((1+x)^n\right)(s) = \phi(n,s)$ *per tot* $n \geq 0$.

Demostració. Definim l'operador

$$\begin{aligned} \Gamma : K[x] &\longrightarrow C_K \\ A(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n &\longmapsto \sum_{n=0}^{m} a_n \gamma_n \end{aligned}$$

que és clarament lineal. A més, es dóna $\Gamma(x^n) = \gamma_n$ per construcció. Pel Lema 3.3.4, provem i):

$$\begin{aligned} \|\Gamma(A)\| = \max_{s\in\mathbb{Z}_p} \left| \sum_{n=0}^{m} a_n \gamma_n(s) \right|_p &\leq \max_{s\in\mathbb{Z}_p} \max_n \{|a_n\gamma_n(s)|_p : n = 0,\dots,m\} \\ &\leq \max_n \{|a_n n!|_p : n = 0,\dots,m\} = \|A\|. \end{aligned}$$

Ara bé, $K[x]$ és dens a $\mathbb{Q}_K$, per tant l'operador es pot estendre a un operador lineal $\Gamma : \mathbb{Q}_K \longrightarrow C_K$ amb $\|\Gamma(A)\| \leq \|A\|$ per tot $A \in \mathbb{Q}_K$. Utilitzant el Lema 3.3.5, provem ii):

$$\Gamma\left((1+x)^n\right)(s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Gamma(x^i)(s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \gamma_i(s) = \phi(n,s).$$

La unicitat és evident, ja que si Γ, Γ' compleixen les hipòtesis, aleshores

$$\Gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) - \Gamma'\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n = 0,$$

i per tant $\Gamma \equiv \Gamma'$. □

$\Gamma(A)(s)$ és una funció contínua en $s \in \mathbb{Z}_p$ que pren valors a K. Per alleugerar notació, denotem $\Gamma(A)(s) = \Gamma_A(s)$.

Posem $(e^t - 1)^n = \sum_{k=n}^{\infty} d_k^{(n)} \dfrac{t^k}{k!}$, on

$$d_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k.$$

Substituint en una sèrie formal $A(x)$ de $K[[x]]$, tenim que

$$A(e^t - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^t-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=n}^{\infty} d_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i d_n^{(i)} \right) \frac{t^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(A) \frac{t^n}{n!}.$$

Lema 3.3.7. *L'enter $d_k^{(n)}$ és divisible per $n!$ per tot $k, n \geq 0$ i a més, si $n \geq 1$:*

$$|d_k^{(n)}|_p \leq |n!|_p \leq np|p|_p^{\frac{n}{p-1}}.$$

Corol·lari 3.3.8. *Per cada enter $n \geq 0$, l'aplicació*

$$\delta_n : \mathbb{Q}_K \longrightarrow K$$
$$A \longmapsto \delta_n(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i d_n^{(i)}$$

és lineal i compleix $|\delta_n(A)|_p \leq \|A\|$.

Demostració. La linealitat és òbvia. Comprovem la cota:

$$|\delta_n(A)|_p \leq \max_i \{\left|a_i d_n^{(i)}\right|_p : i = 0, \ldots, n\} \leq \max_i \{|i! a_i|_p : i = 0, \ldots, n\} = \|A\|.$$

□

Lema 3.3.9. *Si $A \in \mathbb{Q}_K$, $s \in \mathbb{Z}_p$, aleshores*

$$\Gamma_A(s) = \lim_{i \to \infty} \delta_{n_i}(A),$$

on $(n_i)_{i \geq 0}$ és una successió d'enters positius tals que $p-1 \mid n_i$ per tot i, $n_i \to \infty$, i a més $|s - n_i|_p \to 0$ quan $i \to \infty$.

Aquesta successió que demana el lema sempre existeix, ja que per la Proposició 2.2.3, el conjunt $S_0 = \{s : \mathbb{Z}^+ : s \equiv 0 \pmod{p-1}\}$ és dens a $\mathbb{Z}_p$.
Donat $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$, definim la seva derivada formal $A'(x)$ com

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

També, definim el següent operador:

$$DA(x) = (1 + x) \log_p(1 + x) A'(x).$$

Ambdós són operadors lineals a $K[[x]]$.

Observació 3.3.10. *Si $A \in \mathbb{Q}_K$, aleshores $A', DA \in \mathbb{Q}_K$ i*

$$\|A'\| \leq \|A\| \quad , \quad \|DA\| \leq \|(1 + x) \log_p(1 + x)\| \|A\|.$$

Enunciem un parell de lemes informatius que farem servir posteriorment:

Lema 3.3.11. *Si $A \in \mathbb{Q}_K$ i $s \in \mathbb{Z}_p$, aleshores*

$$\Gamma_{DA}(s) = s\Gamma_A(s).$$

Lema 3.3.12. *Si $A \in \mathbb{Q}_K$, aleshores*

$$\Gamma_A(0) = A(0) - \frac{1}{p} \sum_{\xi} A(\xi - 1).$$

on ξ es mou al conjunt d'arrels p-èssimes de la unitat a Ω_p (i.e. $\xi^p = 1$).

Ara que ja tenim tots els lemes enunciats, anem a demostrar el que volíem:
Recordem que χ és un caràcter de Dirichlet primitiu no trivial de conductor $f > 1$. Fixem un enter $N \geq 1$ tal que $\gcd(N, fp) = 1$ i $\chi(N) \neq 1$. Tal i com hem vist a la Subsecció 3.1, la funció $L_p(s, \chi)$ és una funció analítica, i en particular ho és al domini $\{s \in \mathbb{Q}_p : s \in \Omega_p, |s-1|_p < r\}$. Fixem notació:

$$\begin{aligned}
\{\lambda\} &= \{\text{arrels N-èssimes de la unitat a } \Omega_p\}, \\
\zeta &= e^{\frac{2\pi i}{f}} \in \Omega_p, \\
\tau(\chi) &= \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\zeta^a && \text{(suma Gaussiana)}, \\
\overline{\chi} &= \text{ caràcter conjugat de } \chi, \text{ de confuctor } f \text{ i tal que} \\
\overline{\chi}(a) &= \begin{cases} \chi(a)^{-1} & \text{si } \gcd(a, f) = 1 \\ 0 & \text{si } \gcd(a, f) \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

També, suposem que l'extensió K conté tots els λ i tots els valors $\chi(a)$ quan $a \in \mathbb{Z}$.

Definició 3.3.13. *Definim la següent funció racional a $K(z)$:*

$$G(z) = \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)z^{a-1}}{z^f - 1}$$

Aquesta definició ve motivada per la següent propietat:

$$te^tG(e^t) = \sum_{a=0}^{f} \frac{\chi(a)e^{ta}t}{e^{tf} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!}. \tag{5}$$

Operant, podem escriure $G(z)$ com $G(z) = \dfrac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \dfrac{\overline{\chi}(a)}{z - \zeta^a}$.

Lema 3.3.14.

$$\frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda \neq 1} \frac{\overline{\chi}(a)}{z - \lambda\zeta^a} = N\chi(N)z^{N-1}G(z^N) - G(z).$$

Demostració. Fent servir la següent identitat $z^N - \zeta^{aN} = \prod_\lambda (z - \lambda\zeta^a)$, obtenim

$$\frac{Nz^{N-1}}{z^N - \zeta^{aN}} = \sum_\lambda \frac{1}{z - \lambda\zeta^a}.$$

Apliquem la fórmula anterior de $G(z)$ i obtenim

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda} \frac{\overline{\chi}(a)}{z - \lambda\zeta^a} &= \frac{\tau(\chi)}{f} Nz^{N-1} \sum_{a=1}^{f} \frac{\overline{\chi}(a)}{z^N - \zeta^{aN}} \\
&= Nz^{N-1}\chi(N)\frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \frac{\overline{\chi}(a)}{z^N - \zeta^a} = N\chi(N)z^{N-1}G(z^N).
\end{aligned}$$

Restant a ambdues bandes per l'expressió amb $\lambda = 1$, que coincideix justament amb $G(z)$, obtenim el resultat de l'enunciat. $\square$

A partir d'ara, farem servir una sèrie formal $A(x)$ molt concreta:

Definició 3.3.15. *Definim a $K[[x]]$ (l'anell de sèries formals) la sèrie de potències $A(x)$ com*

$$A(x) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda \neq 1} \overline{\chi}(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{(1-\lambda\zeta^a)^n}.$$

Sigui m l'ordre de $\lambda\zeta^a$, m_1 l'ordre de λ i m_2 l'ordre de ζ^a. Com que $\lambda \neq 1$, aleshores $m_1 > 1$. A més, $m_1 \mid N$, $m_1 \mid f$ i $\gcd(N, fp) = 1$, llavors $m = m_1 m_2$ i $p \nmid m_1$. Per tant $\lambda\zeta^a$ és una arrel de la unitat tal que el seu ordre no és una potència de p.
Per cada arrel de la unitat a Ω_p, tenim que $|1 - \lambda\zeta^a|_p = 1$, per tant,

$$\left| \frac{(-1)^{n-1} n!}{n(1-\lambda\zeta^a)^n} \right|_p = \left| \frac{n!}{n} \right|_p = |(n-1)!|_p$$

i per tant $A(x) \in \mathbb{Q}_K$, ja que $|(n-1)! n!|_p \to 0$ quan $n \to \infty$. D'aquí obtenim un resultat important.

Proposició 3.3.16.

$$\delta_n(DA) = (\chi(N)N^n - 1)B_{n,\chi}.$$

Demostració. Per definició,

$$DA(x) = (1+x)\log_p(1+x) \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda \neq 1} \overline{\chi}(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{(1-\lambda\zeta^a)^n}.$$

Substituïm $x = e^t - 1$, i notem que apareix una sèrie geomètrica que podem calcular

$$DA(e^t - 1) = e^t t \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda \neq 1} \overline{\chi}(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^t)^{n-1}}{(1-\lambda\zeta^a)^n} = e^t t \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda \neq 1} \frac{\overline{\chi}(a)}{e^t - \lambda\zeta^a}.$$

Apliquem el Lema 3.3.14 amb $z = e^t$, i obtenim

$$e^t t \left(N\chi(N) e^{t(N-1)} G(e^{Nt}) - G(e^t) \right) = N\chi(N) e^{Nt} t G(e^{Nt}) - e^t t G(e^t)$$
$$= \chi(N) \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{(Nt)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi(N)N^n - 1) B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!}.$$

on la penúltima igualtat ve donada per (5). Per tant $\delta_n(DA) = (\chi(N)N^n - 1) B_{n,\chi}$. □

Corol·lari 3.3.17. *Si $s \in \mathbb{Z}_p$, llavors*

$$s\Gamma_A(s) = \Gamma_{DA}(s) = \lim_n (\chi(N)N^n - 1) B_{n,\chi},$$

on el límit es pren en una seqüència d'enters n_i tal que $n_i \geq 0$, $p - 1 \mid n_i$, i que, quan $i \to \infty$, es compleix $n_i \to \infty$ i $|s - n_i|_p \to 0$.

Demostració. La primera igualtat és el Lema 3.3.11, i la segona és conseqüència directa del Lema 3.3.9 i la Proposició 3.3.16. □

Ja estem en condicions d'enunciar el primer teorema important.

Teorema 3.3.18. *Si* $s \in \mathbb{Z}_p$

$$\Gamma_A(s) = \begin{cases} (1-\chi(N)\langle N\rangle^s)\, L_p(1-s,\chi) & si\ p>2 \\ (1-\chi(N)N^s)\, L_p(1-s,\chi) & si\ p=2. \end{cases}$$

Demostració. Sigui p un primer senar. Si $p-1 \mid n_i$, per una seqüencia d'enters n_i com els del corol·lari anterior, és a dir, $(n_i)_{i\geq 1} \subseteq S_0$, aleshores $N^{n_i} = \langle N\rangle^{n_i}$, de manera que

$$\lim_{n_i} N^{n_i} = \lim_{n_i} \langle N\rangle^{n_i} = \langle N\rangle^s.$$

Tal i com hem vist al final de la Subsecció 3.1, per aquest tipus d'enters, tenim la igualtat

$$L_p(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}.$$

com que $L_p(s,\chi)$ és contínua per $s \in \mathbb{Z}_p$, fem el límit per aquesta seqüència, i obtenim:

$$\lim_n B_{n,\chi} = -sL_p(1-s,\chi).$$

Així, com que aquest tipus d'enters són densos a $\mathbb{Z}_p$, obtenim la següent igualtat vàlida per tot $s \in \mathbb{Z}_p$ i $p>2$:

$$s\Gamma_A(s) = (1-\chi(N)\langle N\rangle^s)\, sL_p(1-s,\chi).$$

En particular, si $s \neq 0$, aleshores

$$\Gamma_A(s) = (1-\chi(N)\langle N\rangle^s)\, L_p(1-s,\chi).$$

Ara bé, aquesta igualtat també és vàlida per $s=0$, ja que ambdues parts de la igualtat són funcions contínues a $\mathbb{Z}_p$. Si $p=2$, la fórmula és la mateixa però intercanviant $\langle N\rangle^s$ per N^s. □

Recordem que ens interessava el valor per $s=0$, que és $\Gamma_A(0) = (1-\chi(N))\, L_p(1,\chi)$. Hem de trobar el valor de $\Gamma_A(0)$ i haurem acabat. Aquest és:

Proposició 3.3.19.

$$\Gamma_A(0) = -\frac{\tau(\chi)}{pf} S,$$

on

$$S = \sum_{a=1}^{f} \overline{\chi}(a) \log_p \left(\prod_{\xi} \prod_{\lambda\neq 1} \frac{\xi-\lambda\zeta^a}{1-\lambda\zeta^a} \right).$$

Demostració. Pel Lema 3.3.12, tenim que

$$\Gamma_A(0) = A(0) - \frac{1}{p}\sum_{\xi} A(\xi-1),$$

on ξ són les arrels p-èssimes de la unitat a Ω_p. Per la tria que hem fet de $A(x)$, és clar que $A(0)=0$, per tant el que realment només hem d'estudiar és el sumatori. Per definició,

$$A(\xi-1) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \sum_{\lambda\neq 1} \overline{\chi}(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{\xi-1}{1-\lambda\zeta^a}\right)^n. \tag{6}$$

Però, observem que $\left|\dfrac{\xi - 1}{1-\lambda\zeta^a}\right|_p = |\xi - 1|_p < 1$. Per tant, la sèrie de (6) és realment el logaritme p-àdic, és a dir,

$$A(\xi-1) = \frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{a=1}^{f}\sum_{\lambda\neq 1}\overline{\chi}(a)\log_p\left(1+\frac{\xi-1}{1-\lambda\zeta^a}\right).$$

Així,

$$\begin{aligned}\Gamma_A(0) &= -\frac{1}{p}\sum_{\xi}\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{a=1}^{f}\sum_{\lambda\neq 1}\overline{\chi}(a)\log_p\left(1+\frac{\xi-1}{1-\lambda\zeta^a}\right)\\ &= -\frac{\tau(\chi)}{pf}\sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(a)\log_p\left(\prod_{\xi}\prod_{\lambda\neq 1}\frac{\xi-\lambda\zeta^a}{1-\lambda\zeta^a}\right) = -\frac{\tau(\chi)}{pf}S.\end{aligned}$$

□

Observació 3.3.20. *Tenim que, com que $p \nmid N$,*

$$\prod_{\lambda\neq 1}\prod_{\xi}\frac{\xi-\lambda\zeta^a}{1-\lambda\zeta^a} = \prod_{\lambda\neq 1}\frac{1-\lambda^p\zeta^{ap}}{(1-\lambda\zeta^a)^p} = \prod_{\lambda\neq 1}\frac{1-\lambda\zeta^{ap}}{(1-\lambda\zeta^a)^p},$$

Per tant, si definim

$$S_1 = \sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(a)\log_p\left(\prod_{\lambda\neq 1}(1-\lambda\zeta^a)\right) \quad , \quad S_2 = \sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(a)\log_p\left(\prod_{\lambda\neq 1}(1-\lambda\zeta^{ap})\right),$$

obtenim $S = S_2 - pS_1$.

Tenim la següent relació:

Proposició 3.3.21. *$S_2 = \chi(p)S_1$.*

Demostració. Suposem primer que $p \nmid f$. Aleshores, $\overline{\chi}(p) = \chi(p)^{-1}$, i així,

$$S_2 = \chi(p)\chi(p)^{-1}S_2 = \chi(p)\overline{\chi}(p)S_2 = \chi(p)\sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(ap)\log_p\left(\prod_{\lambda\neq 1}(1-\lambda\zeta^{ap})\right) = \chi(p)S_1.$$

Suposem ara que $p \mid f$. Aleshores, $\chi(p) = 0$. Com que $\overline{\chi}$ és de conductor f, existeix un enter b coprimer amb f tal que $\frac{f}{p} \mid b-1$ i $\overline{\chi}(b) \neq 1$. Tenim doncs, que $abp \equiv ap \pmod f$ per $a \in \{1, \cdots, f\}$, i per tant

$$S_2 = \sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(ab)\log_p\left(\prod_{\lambda\neq 1}(1-\lambda\zeta^{abp})\right) = \overline{\chi}(b)\sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(a)\log_p\left(\prod_{\lambda\neq 1}(1-\lambda\zeta^{ap})\right) = \overline{\chi}(b)S_2,$$

fet que implica que $S_2 = 0$. Així, $S_2 = 0 = \chi(p)S_1$. □

Gràcies a aquesta proposició i el fet que $S = S_2 - pS_1$, obtenim que

$$S = (\chi(p) - p)\sum_{a=1}^{f}\overline{\chi}(a)\log_p\left(\prod_{\lambda\neq 1}(1-\lambda\zeta^a)\right).$$

Ara, si $\gcd(a, f) = 1$, aleshores ζ^a és també una arrel primitiva f-èssima de la unitat. Aleshores,

$$\prod_{\lambda \neq 1} (1 - \lambda \zeta^a) = \prod_{\lambda \neq 1} \frac{\lambda(1 - \lambda\zeta^a)}{1 - \zeta^a} = \frac{1 - \zeta^{Na}}{1 - \zeta^a}.$$

També, el fet que $\gcd(f, N) = 1$ implica que $\overline{\chi}(a) = \chi(N)\overline{\chi}(aN)$, i S ens queda com

$$\begin{aligned} S &= (\chi(p) - p) \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,f)=1}}^{f} \chi(N)\overline{\chi}(aN) \left(\log_p \left(1 - \zeta^{Na}\right) - \log_p \left(1 - \zeta^a\right)\right) \\ &= (\chi(p) - p) \left(\chi(N) - 1\right) \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,f)=1}}^{f} \overline{\chi}(a) \log_p(1 - \zeta^a). \end{aligned}$$

Ara, per obtenir un resultat més similar (estèticament) al de la Subsecció 3.2, fem servir la següent igualtat:

$$\log_p \left(1 - \zeta^a\right) = \log_p \left(-\zeta^a \left(1 - \zeta^{-a}\right)\right) = \log_p \left(1 - \zeta^{-a}\right) + \log_p \left(-\zeta^a\right) = \log_p \left(1 - \zeta^{-a}\right).$$

on a l'última igualtat hem fet servir que ζ és una arrel de la unitat, i per tant també $-\zeta^a$. Així,

$$S = (\chi(p) - p) \left(\chi(N) - 1\right) \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,f)=1}}^{f} \overline{\chi}(a) \log_p(1 - \zeta^{-a}).$$

Finalment, obtenim el resultat buscat.

Teorema 3.3.22. *Si χ és un caràcter de Dirichlet primitiu, no trivial i de conductor f, aleshores*

$$L_p(1, \chi) = -\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,f)=1}}^{f} \overline{\chi}(a) \log_p \left(1 - \zeta^{-a}\right).$$

Demostració. Recordem que hem fixat un enter N, tal que $\chi(N) \neq 1$. apliquem la Proposició 3.3.19, i els càlculs que hem vist per determinar S:

$$\begin{aligned} L_p(1, \chi) = \Gamma_A(0) \left(1 - \chi(N)\right)^{-1} &= -\left(1 - \chi(N)\right)^{-1} \frac{\tau(\chi)}{pf} S = \\ &= -\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{\substack{a=1 \\ \gcd(a,f)=1}}^{f} \overline{\chi}(a) \log_p(1 - \zeta^{-a}). \end{aligned}$$

□

Referències

[1] A. I. Borevich i I. R. Shafarevich. *Number theory.* Translated from the Russian by Newcomb Greenleaf. Pure and Applied Mathematics, Vol. 20. Academic Press, New York-London, 1966, pàg. 328 - 336.

[2] Yuchen Chen. *p-adics, Hensel's lemma and Strassman's theorem.* University of Chicago, 2018, pàg. 4 - 5. URL: `http://math.uchicago.edu/~may/REU2018/REUPapers/Chen,Yuchen.pdf`.

[3] Keith Conrad. "Hensel's Lemma". A: *No publicada* (2015). URL: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/hensel.pdf`.

[4] Xevi Guitart. "Mazur's Construction of the Kubota-Leopoldt p-adic L-function." A: *Notes for Euler Systems Seminar. Essen.* 2013. URL: `http://www.maia.ub.es/~guitart/notes_files/KubotaLeopoldt.pdf`.

[5] Kenkichi Iwasawa. *Lectures on p-adic L-functions.* Annals of Mathematics Studies, No. 74. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972, pàg. 43 - 61.

[6] Neal Koblitz. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions.* Second. Vol. 58. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1984, pàg. 1 - 51. ISBN: 0-387-96017-1. DOI: `10.1007/978-1-4612-1112-9`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1112-9`.

[7] Serge Lang. *Cyclotomic fields I and II.* second. Vol. 121. Graduate Texts in Mathematics. With an appendix by Karl Rubin. Springer-Verlag, New York, 1990, pàg. 105 - 111. ISBN: 0-387-96671-4. DOI: `10.1007/978-1-4612-0987-4`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0987-4`.

[8] José Villa Morales. "Math Bite: $\mathbb{Q}$ Is Not Complete". A: *Mathematics Magazine* 82.4 (2009), pàg. 293 - 294. DOI: `10.4169/193009809X468751`.

[9] Alain M. Robert. *A course in p-adic analysis.* Vol. 198. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000, pàg. xvi+437. ISBN: 0-387-98669-3. DOI: `10.1007/978-1-4757-3254-2`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3254-2`.

[10] Scott Zinzer. *Euclidean Models of the p-adic Integers.* Arizona State University, 2012, pàg. 6 - 7. URL: `https://math.la.asu.edu/~paupert/Zinzerproject.pdf`.