Homework (1.3.7.3.) - Matrix norm equivalences

Prove the following matrix norm equivalences (order slightly different than in the original question) where $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$:

		1	2	3	4
		$\|\|x\|\|_1$	$\|\|x\|\|_F$	$\|\|x\|\|_2$	$\|\|x\|\|_\infty$
1	$\|\|x\|\|_1$	—	$\|\|A\|\|_1 \leq \sqrt{m}\ \|\|A\|\|_F$	$\|\|A\|\|_1 \leq \sqrt{m}\ \|\|A\|\|_2$	$\|\|A\|\|_1 \leq m\ \|\|A\|\|_\infty$
2	$\|\|x\|\|_F$	$\|\|A\|\|_F \leq \sqrt{n}\ \|\|A\|\|_1$	—	$\|\|A\|\|_F \leq \sqrt{n}\ \|\|A\|\|_2$ (*)	$\|\|A\|\|_F \leq \sqrt{m}\ \|\|A\|\|_\infty$
3	$\|\|x\|\|_2$	$\|\|A\|\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|\|A\|\|_1$	$\|\|A\|\|_2 \leq \|\|A\|\|_F$	—	$\|\|A\|\|_2 \leq \sqrt{m}\ \|\|A\|\|_\infty$
4	$\|\|x\|\|_\infty$	$\|\|A\|\|_\infty \leq n\ \|\|A\|\|_1$	$\|\|A\|\|_\infty \leq \sqrt{n}\ \|\|A\|\|_F$	$\|\|A\|\|_\infty \leq \sqrt{n}\ \|\|A\|\|_2$	—

(*) The bound can be conditionally improved. See Question #957909 on math.stackexchange.com.

Solution

(Following left to right, top to bottom order in the table. See the note at the end for $|x^Hy| = |x^Ty|$.)

(#12) $\|A\|_1 \leq \sqrt{m}\, \|A\|_F$: (solution exists in course notes)

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &\leq \sqrt{m}\|A\|_2 && \text{< proven as \#13 >} \\ \|A\|_1 &\leq \sqrt{m}\|A\|_F. && \text{< } \|A\|_2 \leq |A\|_F \text{ (\#32) >} \end{aligned}$$

Alternative solution

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &\leq \sqrt{m}\|A\|_2 && \text{< proven as \#13 >} \\ \|A\|_1 &\leq \sqrt{m} \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 && \text{< matrix 2-norm definiton >} \\ &= \sqrt{m} \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{a}_i^T x|^2} && \text{< slice \& dice >} \\ &= \sqrt{m} \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{a}_i^H x|^2} && \text{< } |x^H y| = |x^T y| \text{ >} \\ &\leq \sqrt{m} \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} |\|\tilde{a}_i\|_2^2 \|x\|_2^2} && \text{< Cauchy-Schwartz inequality >} \\ &= \sqrt{m} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2} && \text{< } \|x\|_2 = 1 \text{ >} \\ \|A\|_1 &\leq \sqrt{m}\|A\|_F. && \text{< Frobenius norm definition >} \end{aligned}$$

Equality is attained for $A = (1 \ldots 1)^T$.

(#13) $\|A\|_1 \leq \sqrt{m}\ \|A\|_2$: (solution exists in course notes)

$$\|Ax\|_1 \leq \sqrt{m}\|Ax\|_2 \qquad \langle\ \|z\|_1 \leq \sqrt{k}\|z\|_2 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k\ \rangle$$

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \sqrt{m}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \qquad \langle\ \|z\|_2 \leq \|z\|_1 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k\ \rangle$$

$$\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{x\neq 0}\sqrt{m}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \qquad \langle \text{ algebra } \rangle$$

$$\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \sqrt{m}\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \qquad \langle \text{ algebra } \rangle$$

$$\|A\|_1 \leq \sqrt{m}\|A\|_2. \qquad \langle \text{ definitions of } \|A\|_1, \|A\|_2\ \rangle$$

Equality attained for $A = (1 \ldots 1)^T$.

(#14) $\|A\|_1 \leq m\ \|A\|_\infty$: (solution exists in course notes)

$$\|A\|_1 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \qquad \langle \text{ matrix 1-norm definition } \rangle$$

$$\leq \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty} \qquad \langle\ \|z\|_\infty \leq \|z\|_1 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k\ \rangle$$

$$\leq \max_{x\neq 0}\frac{m\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \qquad \langle\ \|z\|_1 \leq m\|z\|_\infty \text{ for } z \in \mathbb{C}^k\ \rangle$$

$$= m\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \qquad \langle \text{ algebra } \rangle$$

$$\|A\|_1 \leq m\|A\|_\infty. \qquad \langle \text{ matrix infinity-norm definition } \rangle$$

Equality is attained for $A = (1 \ldots 1)^T$.

(#21) $\|A\|_F \leq \sqrt{n}\, \|A\|_1$: (no solution in course notes)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{i,j}|^2} \qquad \text{< Frobenius norm definition >}$$

$$= \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \|a_j\|_2^2} \qquad \text{< see Homework 1.3.3.1. (dedicated course site) >}$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \|a_j\|_2^2 \qquad \text{< algebra >}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|a_j\|_1^2 \qquad \text{< } \|z\|_2 \leq \|z\|_1 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \|Ae_j\|_1^2 \qquad \text{< matrix-vector multiplication >}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|A\|_1^2 \qquad \text{< by definition } \|A\|_1 \geq \|Ae_j\|_1 \text{ >}$$

$$\|A\|_F^2 \leq n\|A\|_1^2 \qquad \text{< algebra >}$$

$$\|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_1. \qquad \text{< square root an increasing function >}$$

Equality is attained for A = (1 … 1).

(#23) $\|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$: (no solution in course notes)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{i,j}|^2} && < \text{Frobenius norm defintion} > \\
&= \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} \|a_j\|_2^2} && < \text{see Homework 1.3.3.1 (dedicated course site)} > \\
\|A\|_F^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \|a_j\|_2^2 && < \text{algebra} > \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \|Ae_j\|_2^2 && < \text{matrix-vector multiplication} > \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|A\|_2^2 && < \text{ by definition } \|A\|_2 \geq \|Ae_j\|_2 > \\
\|A\|_F^2 &\leq n\|A\|_2^2 && < \text{ algebra} > \\
\|A\|_F &\leq \sqrt{n}\|A\|_2. && < \text{ square root an increasing function} >
\end{aligned}
$$

Equality is attained for $A = (1 \ldots 1)^T$.

(#24) $\|A\|_F \leq \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$: (no solution in course notes)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{i,j}|^2} && \text{< Frobenius norm defintion >}\\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2} && \text{< see Homework 1.3.3.3. >}\\
\|A\|_F^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2 && \text{< algebra >}\\
\|A\|_F^2 &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_1^2 && \text{< } \|z\|_2 \leq \|z\|_1 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >}\\
&\leq \sum_{i=0}^{m-1} \left(\max_{p=0}^{m-1} \|\tilde{a}_p\|_1\right)^2 && \text{< algebra >}\\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\|A\|_\infty\right)^2 && \text{< see Homework 1.3.6.2. >}\\
\|A\|_F^2 &\leq m\|A\|_\infty^2 && \text{< square root an increasing function >}\\
\|A\|_F &\leq \sqrt{m}\|A\|_\infty. && \text{< algebra >}
\end{aligned}
$$

Equality is attained for A = (1 … 1)^T.

(#31) $\|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1$: (solution exists in course notes)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} && \text{< matrix 2-norm definition >}\\
&\leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_2} && \text{< } \|z\|_2 \leq \|z\|_1 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >}\\
&\leq \max_{x\neq 0} \frac{\sqrt{n}\|Ax\|_1}{\|x\|_1} && \text{< } \|z\|_1 \leq \sqrt{k}\|z\|_2 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >}\\
&= \sqrt{n}\max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} && \text{< algebra >}\\
\|A\|_2 &\leq \sqrt{n}\|A\|_1. && \text{< matrix 1-norm definition >}
\end{aligned}
$$

Equality is attained for A = (1 … 1) and x = (1 … 1)^T.

(#32) $||A||_2 \leq ||A||_F$: (solution only through the SVD exists in course notes)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 && \text{< matrix 2-norm definition >} \\
&= \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{a}_i^T x|^2} && \text{< slice\&dice >} \\
&= \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{a}_i^H x|^2} && \text{< } |y^T z| = |y^H z| \text{ >} \\
&\leq \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2 \|x\|_2^2} && \text{< Cauchy-Schwartz inequality >} \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2} && \text{< } \|x\|_2 = 1 \text{ >} \\
\|A\|_2 &\leq \|A\|_F. && \text{< Frobenius norm definition >}
\end{aligned}
$$

Equality is attained for A = (1 … 1)^T.

(#34) $||A||_2 \leq \sqrt{m}\ ||A||_\infty$: (solution exists in course notes)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} && \text{< matrix 2-norm definition >} \\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{m}\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} && \text{< } \|z\|_2 \leq \sqrt{m}\|z\|_\infty \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >} \\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{m}\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} && \text{< } \|z\|_\infty \leq \|z\|_2 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >} \\
&= \sqrt{m} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} && \text{< algebra >} \\
\|A\|_2 &\leq \sqrt{m}\|A\|_\infty. && \text{< matrix infinity-norm definition >}
\end{aligned}
$$

Equality is attained for A = (1 … 1)^T.

(#41) $\|A\|_\infty \leq n\ \|A\|_1$: (no solution in course notes)

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} && \text{< matrix infinity-norm definition >}\\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty} && \text{< } \|z\|_\infty \leq \|z\|_1 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >}\\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{n\|Ax\|_1}{\|x\|_1} && \text{< } \|z\|_1 \leq k\|z\|_\infty \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >}\\
&= n \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} && \text{< algebra >}\\
\|A\|_\infty &\leq n\|A\|_1. && \text{< matrix 1-norm definition >}
\end{aligned}$$

Equality is attained for $A = (1\ \ldots\ 1)$.

(#42) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\ \|A\|_F$: (no solution in course notes)

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &\leq \sqrt{n}\|A\|_2 && \text{< proven as \#43 >}\\
\|A\|_\infty^2 &\leq n\|A\|_2^2 && \text{< algebra >}\\
&= n \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 && \text{< matrix 2-norm definiton >}\\
&= n \max_{\|x\|_2=1} \sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{a}_i^T x|^2 && \text{< slice \& dice >}\\
&= n \max_{\|x\|_2=1} \sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{a}_i^H x|^2 && \text{< } |x^H y| = |x^T y| \text{ >}\\
&\leq n \max_{\|x\|_2=1} \sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2 \|x\|_2^2 && \text{< Cauchy-Schwartz inequality >}\\
\|A\|_\infty^2 &\leq n \sum_{i=0}^{m-1} |\|\tilde{a}_i\|_2^2 && \text{< } \|x\|_2 = 1 \text{ >}\\
\|A\|_\infty &\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \|\tilde{a}_i\|_2^2} && \text{< square root an increasing function >}\\
\|A\|_\infty &\leq \sqrt{n}\|A_F\|. && \text{< Frobenius norm definition >}
\end{aligned}$$

Equality is attained for $A = (1\ \ldots\ 1)$.

(#43) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\, \|A\|_2$: (no solution in course notes)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} && \text{< matrix infinity-norm definiton >} \\
&\leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{n}}{\|x\|_2} \|Ax\|_\infty && \text{< } \|z\|_2 \leq \sqrt{k}\|z\|_\infty \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >} \\
&= \sqrt{n} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} && \text{< algebra >} \\
&\leq \sqrt{n} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} && \text{< } \|z\|_\infty \leq \|z\|_2 \text{ for } z \in \mathbb{C}^k \text{ >} \\
\|A\|_\infty &\leq \sqrt{n}\|A\|_2. && \text{< matrix 2-norm definition >}
\end{aligned}
$$

Equality is attained for A = (1 … 1) and $x = (1 \ldots 1)^T$.

Note

If x, y ∈ $\mathbb{C}^m$, then $|x^Ty| = |x^Hy|$.

(Originally posted in a discussion in Section 1.3.8. for Homework 1.3.8.4.)

Proof

$$
\begin{aligned}
|x^Ty| &= |\bar{x}^Ty| && \text{< statement >} \\
|x^Ty|^2 &= |\bar{x}^Ty|^2 && \text{< algebra >} \\
(x^Ty)^H(x^Ty) &= (\bar{x}^Ty)^H(\bar{x}^Ty) && \text{< } |\alpha| = \|\alpha\|_2 = \sqrt{\alpha^H\alpha} \text{ >} \\
\overline{(x^Ty)}^T(x^Ty) &= \overline{(\bar{x}^Ty)}^T(\bar{x}^Ty) && \text{< definition of Hermitian >} \\
(\bar{y}^T\bar{x})(x^Ty) &= (\bar{y}^Tx)(\bar{x}^Ty) && \text{< } \overline{xy} = \bar{x}\bar{y},\ (AB)^T = B^TA^T \text{ >} \\
\bar{y}^T(\bar{x}x^T)y &= \bar{y}^T(x\bar{x}^T)y && \text{< associativity of matrix multiplication >} \\
\bar{y}^T(\bar{x}x^T)y &= \bar{y}^T(\bar{x}x^T)^Hy && \text{< definition of Hermitian >} \\
y^H(X)y &= y^H(X)^Hy && \text{< } X = \bar{x}x^T; \text{fun fact} : X \text{ is Hermitian, i.e. } X = X^H \text{ >} \\
y^HXy &= y^H\left(X^Hy\right) && \text{< associativity of matrix multiplication >} \\
y^HXy &= y^H\left(y^HX\right)^H && \text{< } (A^H)^H = A, (AB)^H = B^HA^H \text{ >} \\
y^HXy &= (y^HXy)^H. && \text{< equality as a real number confirmed because both sides} \\
&&& \quad \text{are scalar } (1 \times 1) \text{ and their conjugates are equal >}
\end{aligned}
$$