Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информатики

Лабораторная работа №7
Метод главных компонент

Выполнил: Полевой Александр Вадимович
магистрант кафедры информатики
группа № 858641

Проверил: Стержанов Максим Валерьевич

Минск 2019

1. Загрузите данные ex7data1.mat из файла.

In [3]:

```
import numpy as np
import scipy.io
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import linalg
import random
import math
from sklearn.cluster import KMeans
import ipyvolume as ipv

data1 = scipy.io.loadmat('data/ex7data1.mat')
X1 = data1['X']
X1.shape
```

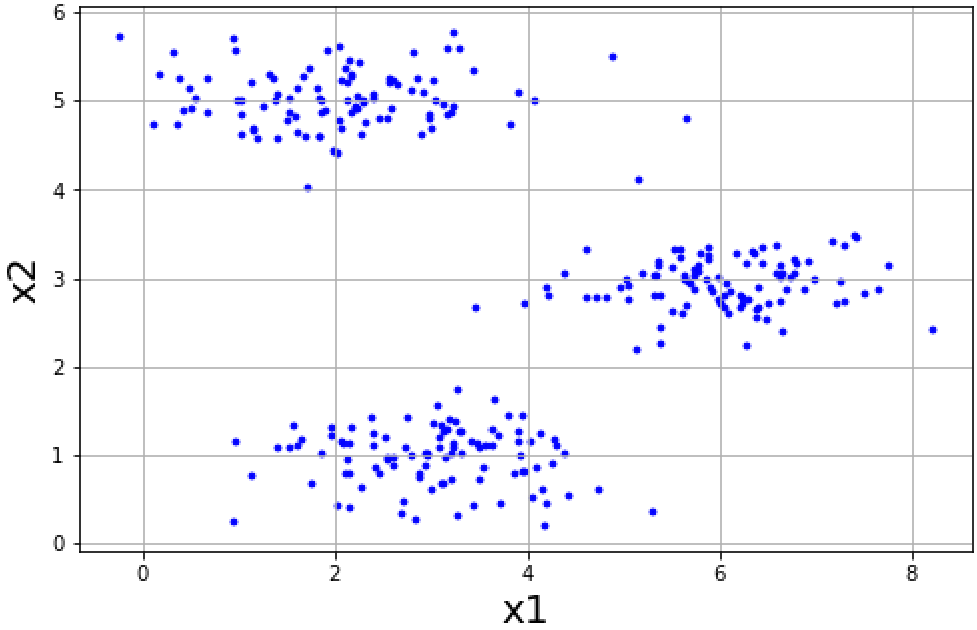
Out[3]:

```
(300, 2)
```

2. Постройте график загруженного набора данных.

In [4]:

```
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.scatter(X1[:,0], X1[:,1], s=8, color='blue')
plt.xlabel('x1',fontsize=20)
plt.ylabel('x2',fontsize=20)
plt.grid(True)
```



3. Реализуйте функцию вычисления матрицы ковариации данных.

In [5]:

```
def normalization(X):
    mean = np.mean(X,axis=0)
    std  = np.std(X,axis=0)

    return ((X - mean) / std), mean, std
```

In [6]:

```
def calc_sigma(X):
    m = len(X)

    return ( 1 / m) * np.dot(X.T, X)
```

In [7]:

```
norm_X1, norm_mean, norm_std = normalization(X1)
Sigma = calc_sigma(norm_X1)

print(f'X.shape = {X1.shape}')
print(f'Sigma.shape = {Sigma.shape}')
```

```
X.shape = (300, 2)
Sigma.shape = (2, 2)
```

4. Вычислите координаты собственных векторов для набора данных с помощью сингулярного разложения матрицы ковариации (разрешается использовать библиотечные реализации матричных разложений).

In [8]:

```
U, S, _ = linalg.svd(Sigma)
```

In [9]:

```
U.shape
```

Out[9]:

```
(2, 2)
```

5. Постройте на графике из пункта 2 собственные векторы матрицы ковариации.

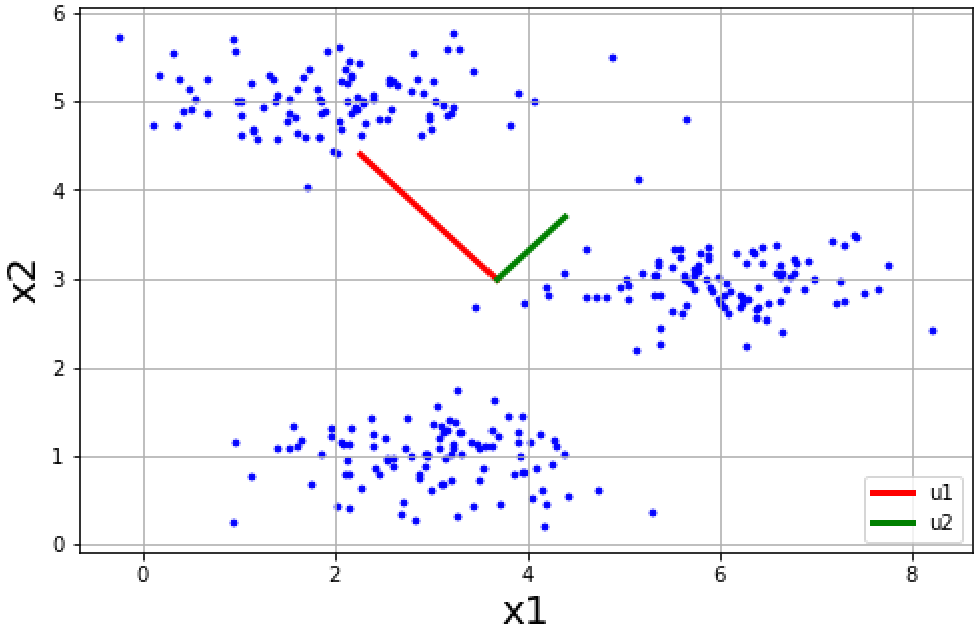
In [10]:

```
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.scatter(X1[:,0], X1[:,1], s=8, color='blue')
plt.xlabel('x1',fontsize=20)
plt.ylabel('x2',fontsize=20)

u1 = U[:, 0]
u2 = U[:, 1]

plt.plot([norm_mean[0], norm_mean[0] + 2 * u1[0]], [norm_mean[1], norm_mean[1] + 2 *
plt.plot([norm_mean[0], norm_mean[0] + u2[0]], [norm_mean[1], norm_mean[1] + u2[1]],

plt.legend(loc='lower right')
plt.grid(True)
```



6. Реализуйте функцию проекции из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности с помощью метода главных компонент.

In [11]:

```
def get_k_vectors(U, k):
    return U[:, 0 : k]
```

In [12]:

```
def run_pca(X_norm, k):
    Sigma = calc_sigma(X_norm)
    U, S, _ = linalg.svd(Sigma)
    U_red = get_k_vectors(U, k)

    return np.dot(X_norm, U_red), U_red, S
```

In [13]:

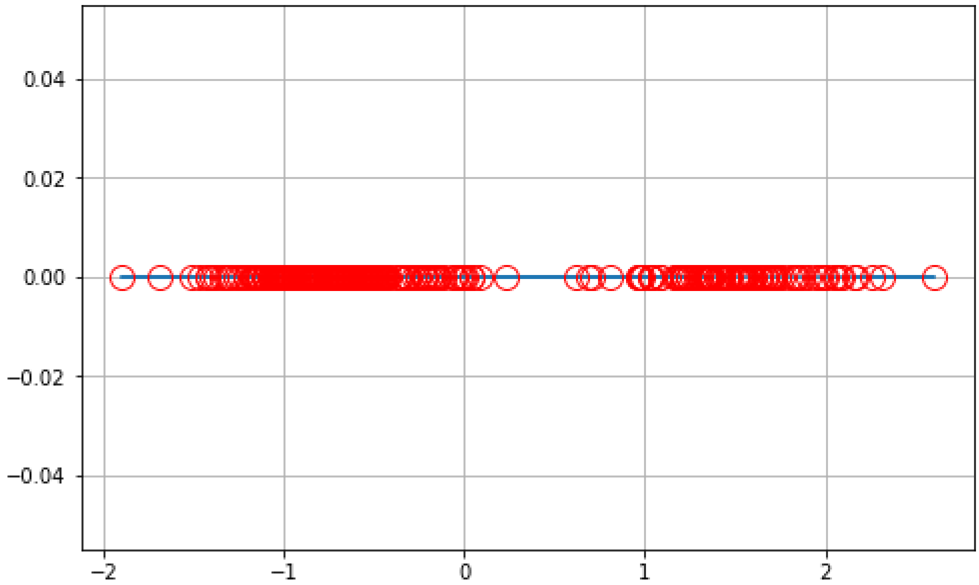
```
def calc_dispersion(S, K):
    return np.sum(S[0: K])/np.sum(S)
```

In [14]:

```
Z, U_red, _ = run_pca(norm_X1, 1)
```

In [15]:

```
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(Z, np.zeros(len(Z)), '-')
plt.plot(Z, np.zeros(len(Z)), 'o', markersize=12, markerfacecolor='none', markeredge
plt.grid(True)
```



7. Реализуйте функцию вычисления обратного преобразования.

In [16]:

```
def pca_revert(Z, U_red):
    return np.dot(Z, U_red.T)
```

8. Постройте график исходных точек и их проекций на пространство меньшей размерности (с линиями проекций).

In [17]:

```
X1_approx_norm = pca_revert(Z, U_red)
X1_approx = (X1_approx_norm * norm_std) + norm_mean
```

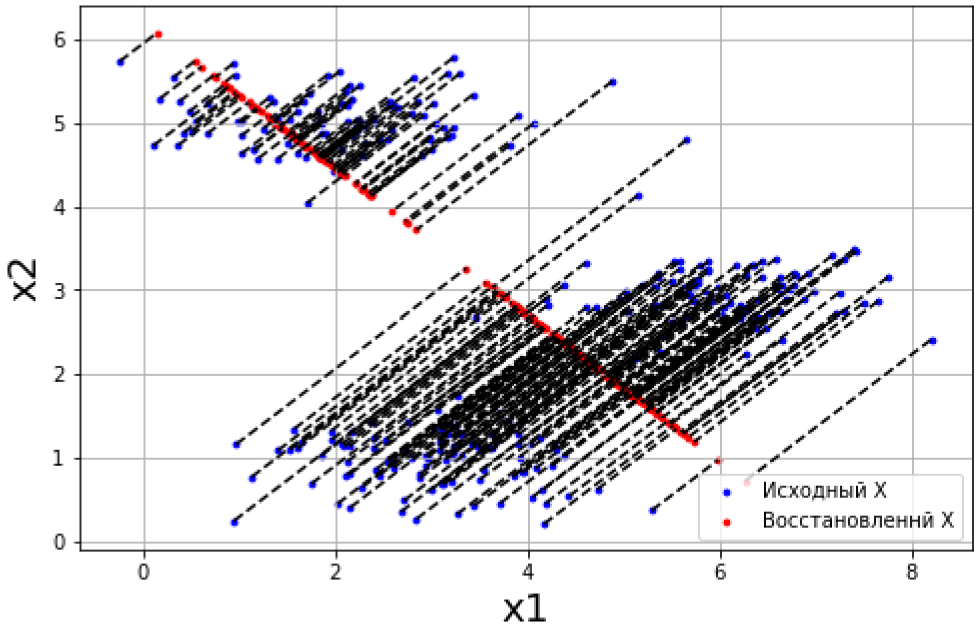
In [18]:

```
plt.figure(figsize=(8,5))
plot = plt.scatter(X1[:,0], X1[:,1], s=8, color='blue', label='Исходный X')
plot = plt.scatter(X1_approx[:,0], X1_approx[:,1], s=8, color='red', label='Восстанов.

plt.xlabel('x1',fontsize=20)
plt.ylabel('x2',fontsize=20)

for i in range(len(X1)):
    plt.plot([X1[i,0], X1_approx[i,0]],[X1[i,1], X1_approx[i,1]],'k--', markersize=1

plt.legend(loc='lower right')
plt.grid(True)
```



Набор данных ex7faces.mat представляет собой файл формата *.mat (т.е. сохраненного из Matlab). Набор содержит 5000 изображений 32x32 в оттенках серого. Каждый пиксель представляет собой значение яркости (вещественное число). Каждое изображение сохранено в виде вектора из 1024 элементов. В результате загрузки набора данных должна быть получена матрица 5000x1024.

9. Загрузите данные ex7faces.mat из файла.

In [19]:

```
faces_data = scipy.io.loadmat('data/ex7faces.mat')
faces_X = faces_data['X']
faces_X.shape
```

Out[19]:

```
(5000, 1024)
```

10. Визуализируйте 100 случайных изображений из набора данных.

In [20]:

```
def show_images(data, count):
    m = len(data)
    n = data.shape[1]

    if count > m: count = m

    indices = random.sample(range(0, m), count)

    img_width = int(math.sqrt(n))
    img_height = img_width

    images_to_show = data[indices]

    cols = 10
    if count < 10:
        cols = count

    rows = math.ceil(count / cols)

    fig, axs = plt.subplots(nrows=rows, ncols=cols, figsize=(cols, rows))
    axs = axs.flatten()

    for i in range(len(axs)):
        ax = axs[i]
        ax.axis('off')
        if (i >= count): continue
        ax.imshow(images_to_show[i].reshape(img_width, img_height).T, cmap='gray')


    plt.show()
```

In [21]:

```
show_images(faces_X, 100)
```

11. С помощью метода главных компонент вычислите собственные векторы.

In [22]:

```
faces_norm_X, faces_norm_mean, faces_norm_std = normalization(faces_X)
```

12. Визуализируйте 36 главных компонент с наибольшей дисперсией.

In [23]:

```
Z_36, U_red_36, S_36 = run_pca(faces_norm_X, 36)
```

In [24]:

```
show_images(U_red_36.T, 36)
```

In [25]:

```
show_images(pca_revert(Z_36, U_red_36), 50)
```

13. Как изменилось качество выбранных изображений?

In [26]:

```
print(f'{(calc_dispersion(S_36, 36) * 100):.2f}% - дисперсии сохраняется')
```

```
83.12% - дисперсии сохраняется
```

Визуально, качество сильно ухудшилось. На картинках еле различимы очертания лиц.

14. Визуализируйте 100 главных компонент с наибольшей дисперсией.

In [27]:

```
Z_100, U_red_100, S_100 = run_pca(faces_norm_X, 100)
```

In [28]:

```
show_images(U_red_100.T, 50)
```

In [29]:

```
show_images(pca_revert(Z_100, U_red_100), 50)
```

15. Как изменилось качество выбранных изображений?

In [30]:

```
print(f'{(calc_dispersion(S_100, 100) * 100):.2f}% - дисперсии сохраняется')
```

```
93.19% - дисперсии сохраняется
```

Визуализация 100 главных компонент имеет более сложные "узоры" чем у 36 главных компонент. Визуально, качество восстановленных изображений возрасло.

16. Используйте изображение, сжатое в лабораторной работе №6 (Кластеризация).

In [31]:

```
bird_data = scipy.io.loadmat('data/bird_small.mat')
Xb = bird_data['A'].reshape(-1, 3)
bird_norm_X, bird_norm_mean, bird_norm_std = normalization(Xb)
bird_norm_X.shape
```

Out[31]:

```
(16384, 3)
```

In [32]:

```
bird_k = 16
cluster = KMeans(n_clusters=bird_k, random_state=0)
cluster.fit(bird_norm_X)
```

Out[32]:

```
KMeans(algorithm='auto', copy_x=True, init='k-means++', max_iter=300,
       n_clusters=16, n_init=10, n_jobs=None, precompute_distances='au
to',
       random_state=0, tol=0.0001, verbose=0)
```

17. С помощью метода главных компонент визуализируйте данное изображение в 3D и 2D.

In [33]:

```
cmap = plt.cm.tab20
clrs = cmap(cluster.labels_)
```

In [34]:

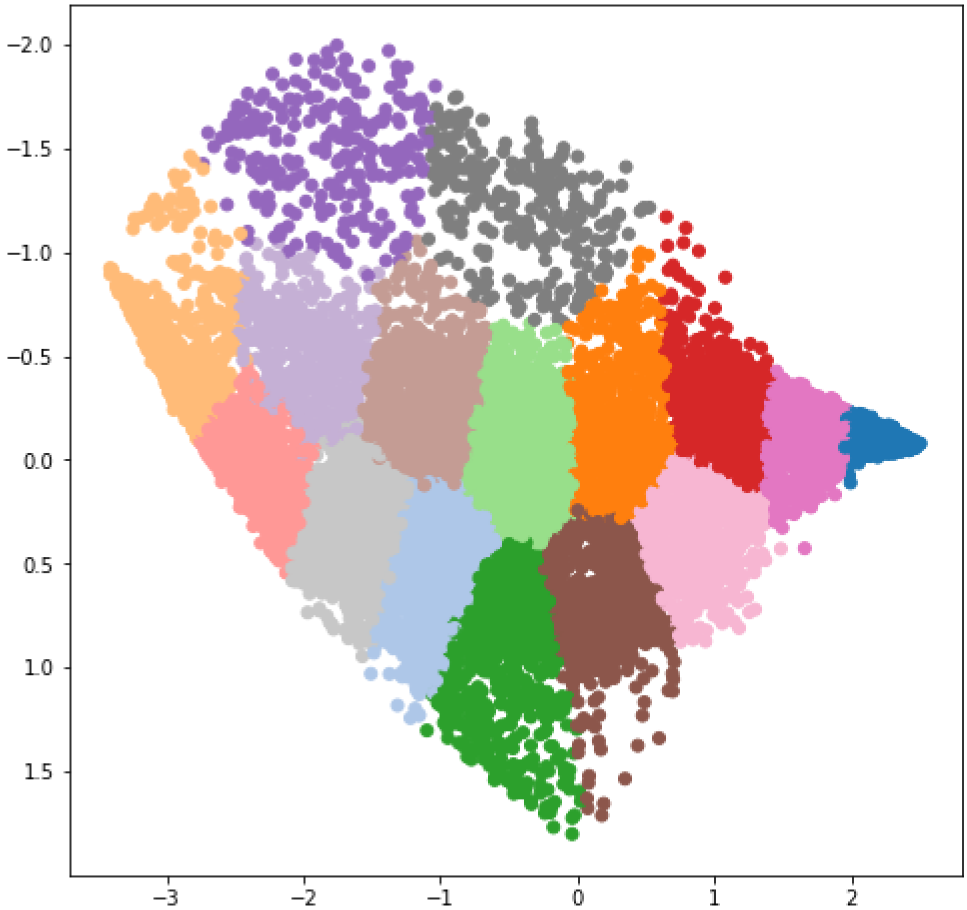
```
sel = np.random.choice(len(bird_norm_X), 16300)
ipv.figure()
s = ipv.scatter(bird_norm_X[sel][:,0], bird_norm_X[sel][:,1], bird_norm_X[sel][:,2],
ipv.show()
```

In [35]:

```
bird_Z_2, bird_U_red_2, bird_S_2 = run_pca(bird_norm_X, 2)
```

In [36]:

```
fig = plt.figure(figsize=(8,8))
sc = plt.scatter(bird_Z_2[:,0],bird_Z_2[:,1], c=clrs)
#plt.gca().invert_xaxis()
plt.gca().invert_yaxis()
```



Вывод

Метод главных компонент — один из основных способов уменьшить размерность данных, потеряв наименьшее количество информации. Изобретён Карлом Пирсоном в 1901 году. Применяется во многих областях, в том числе, в эконометрике, биоинформатике, обработке изображений, для сжатия данных, в общественных науках.

Вычисление главных компонент может быть сведено к вычислению сингулярного разложения матрицы данных или к вычислению собственных векторов и собственных значений ковариационной матрицы исходных данных. Иногда метод главных компонент называют преобразованием Кархунена — Лоэва или преобразованием Хотеллинга (англ. Hotelling transform).