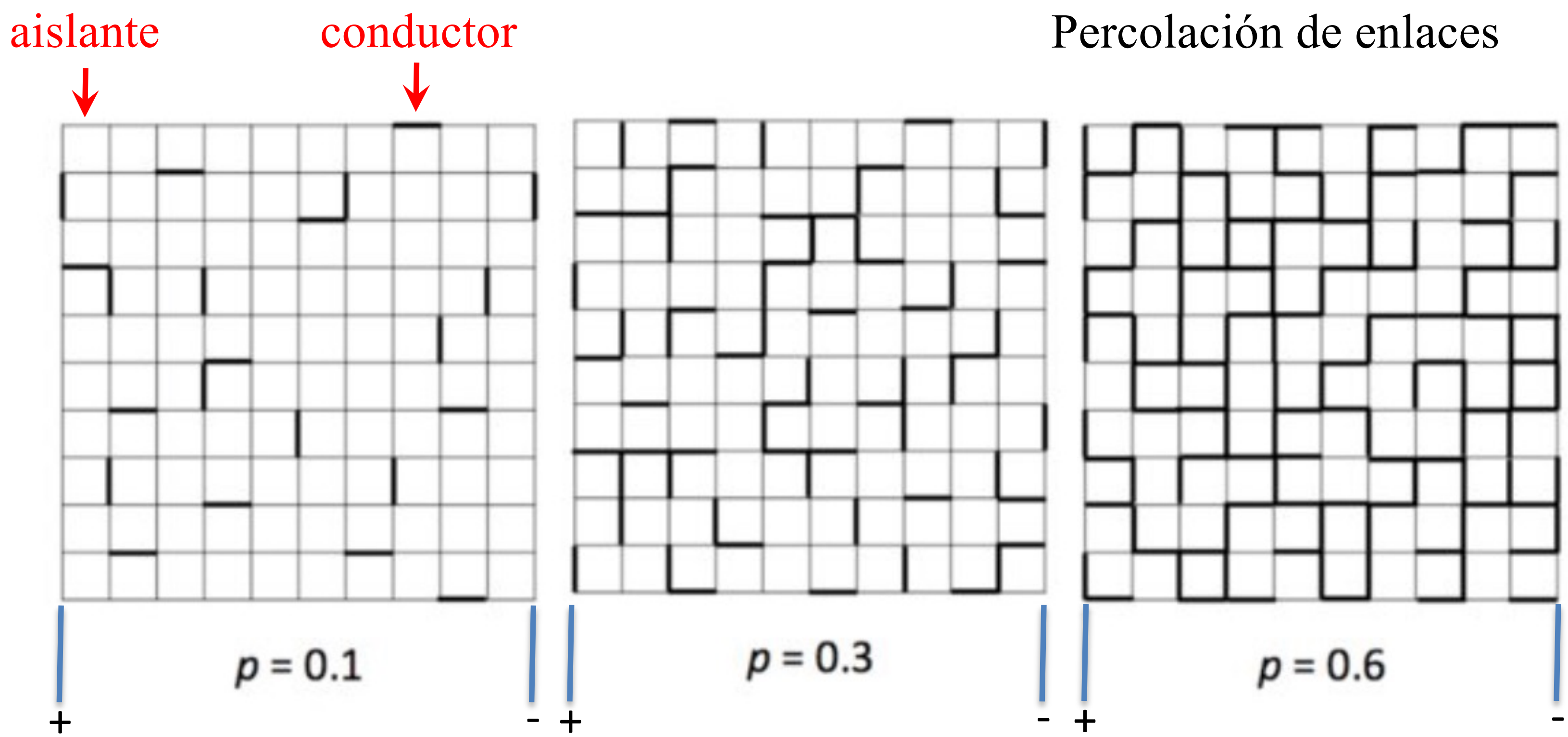
Percolación y Fractales

Introducción

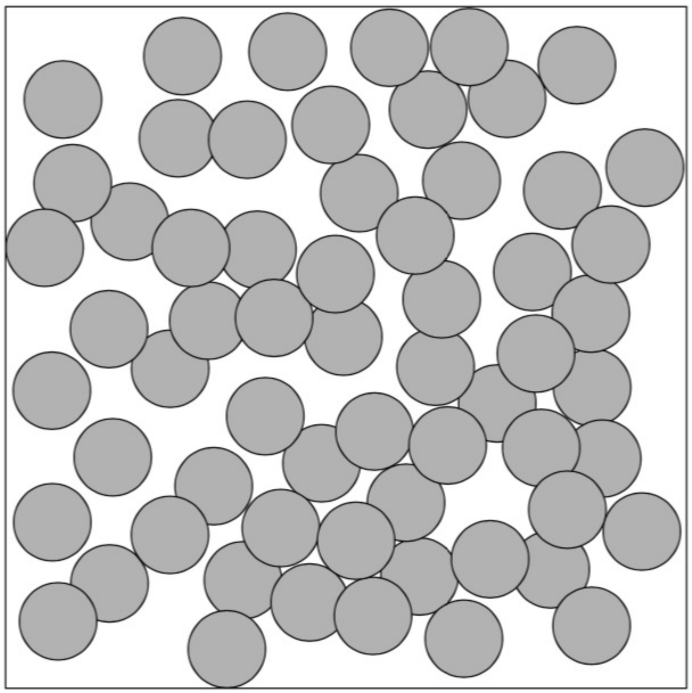
Percolación de enlaces



$$\lim_{L\to\infty} \quad \text{se cumple} \quad \begin{cases} p < p_c & \text{no conduce} \\ p \geq p_c & \text{conduce} \end{cases} \qquad p_c = 0.5$$

Introducción

Percolación fuera de red

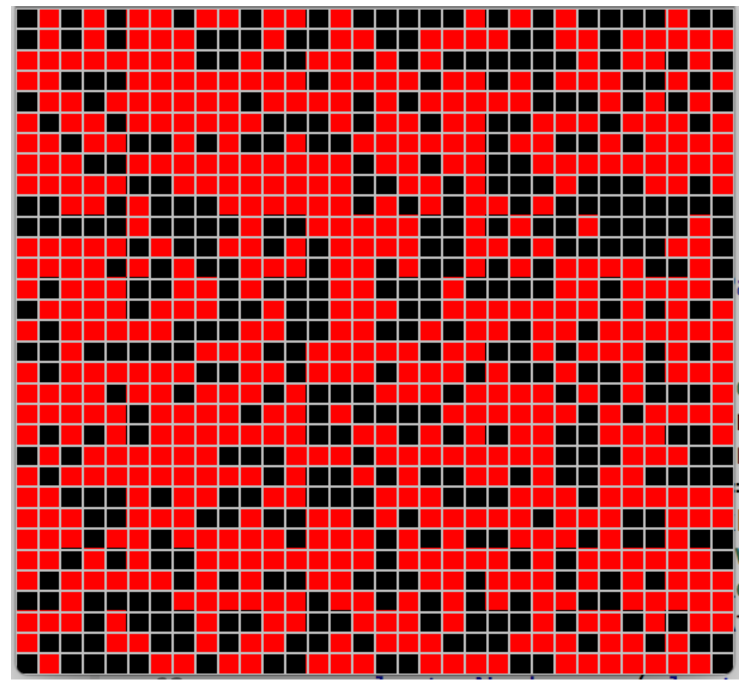


$$\phi_c = 1 - e^{\eta_c} \quad \text{densidad crítica}$$

$$\eta_c = \frac{N\pi R^2}{L^2}$$

$$\eta_c = 1.128 \qquad \phi_c = 0.676$$

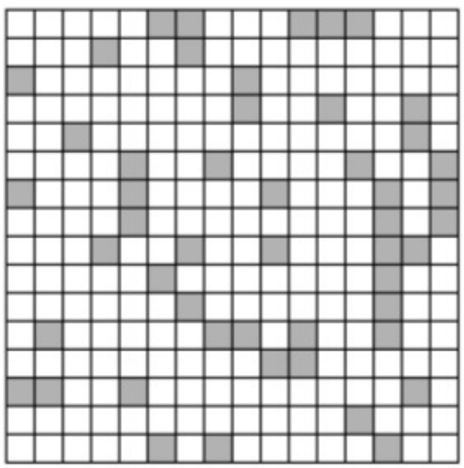
Percolación de sitios



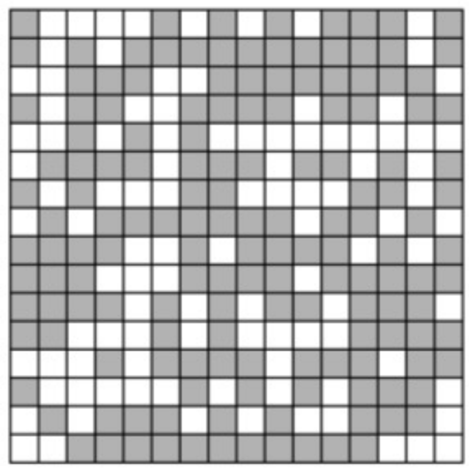
$$p_c = 0.59275\cdots$$

Introducción

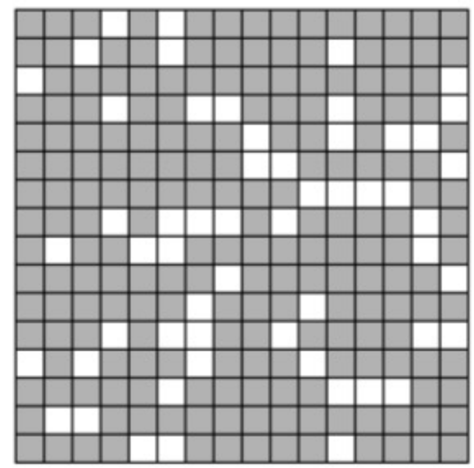
Percolación de sitios



p = 0.2



p = 0.59

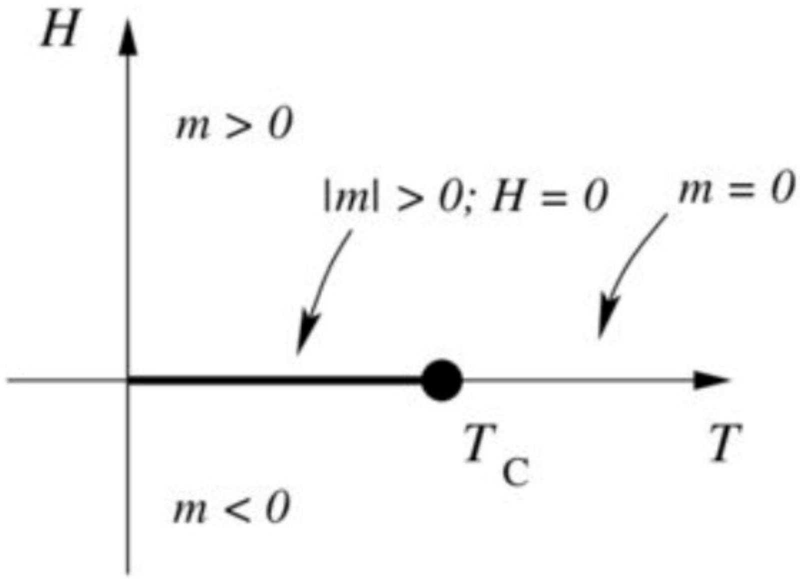


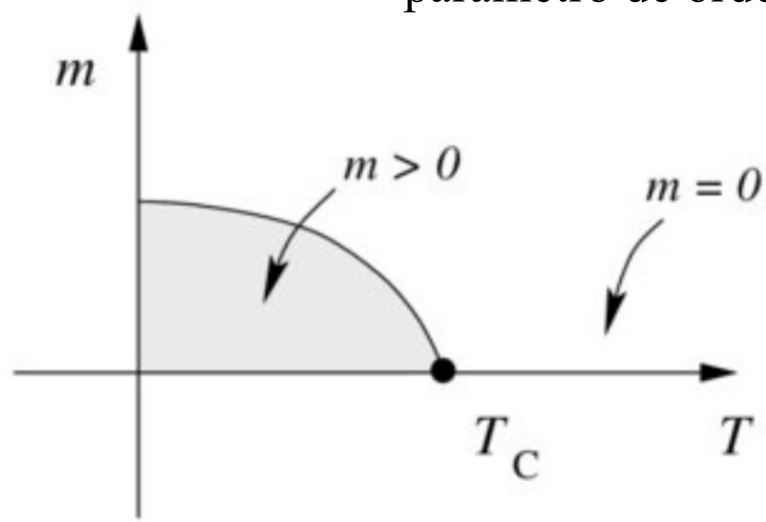
p = 0.8

Introducción

Analogía con fenómenos críticos

Magnetización (m): parámetro de orden





Modelos de Ising:
Transición paramagnética-ferromagnética

Caracterización de los aglomerados

- Probabilidad de que un sitio ocupado de la red pertenezca al *"spanning cluster"*:

$$P_\infty(p) = \frac{\text{Número de sitios en el } \textit{“spanning cluster”}}{\text{Número total de sitios ocupados}}. \tag{1}$$

- Tamaño del aglomerado es el número de sitios, s, del aglomerado.

- Distribución de tamaño de aglomerados:

$$n_s(p) = \frac{\text{Número de aglomerados de tamaño } s}{\text{Número total de sitios en la red}}. \tag{2}$$

- Probabilidad de que un sitio ocupado pertenezca a un cluster de tamaño s.

$$w_s = \frac{s\, n_s}{\sum_s s\, n_s}, \tag{3}$$

  donde $\sum_s s\, n_s$ es el número total de sitios ocupados por sitio de red.

- Tamaño promedio de aglomerado:

$$S(p) = \sum_s s\, w_s = \frac{\sum_s s^2\, n_s}{\sum_s s\, n_s} \tag{4}$$

Para las últimas dos definiciones hay que extraer el spanning cluster

Separar los aglomerados

El algoritmo de Newman y Ziff (2002):

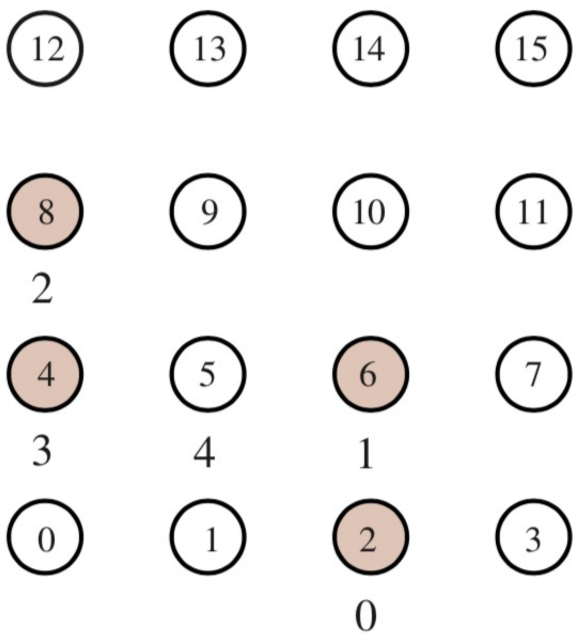
1. Pre-computar el orden de ocupación. El orden de ocupación de almacenará en el array **order[]**. Para ello aplica la función *permutation()*
2. Establecer los vecinos de cada sitio. Generación de **nn[s,j]**. Funciones *vecino()* y *boundaries()*.
3. Añadir sitios de acuerdo al orden predeterminado. Se observan los vecinos del nuevo sitio. Al añadir el sitio por defecto será un cluster de tamaño 1. Dos opciones: todos los vecinos empty (cluster aislado), uno o más vecinos ocupados (muchas opciones)
4. Determinar los clusteres. Los clusteres están organizados en una estructura en forma de árbol, con un sitio de cada clúster designado como raíz. Todos los sitios de un clúster determinado, distintos de la raíz, apuntan a otro sitio del mismo clúster, de modo que se puede llegar a la raíz siguiendo de forma recursiva los punteros. Los "punteros" se almacenan en la matriz principal.

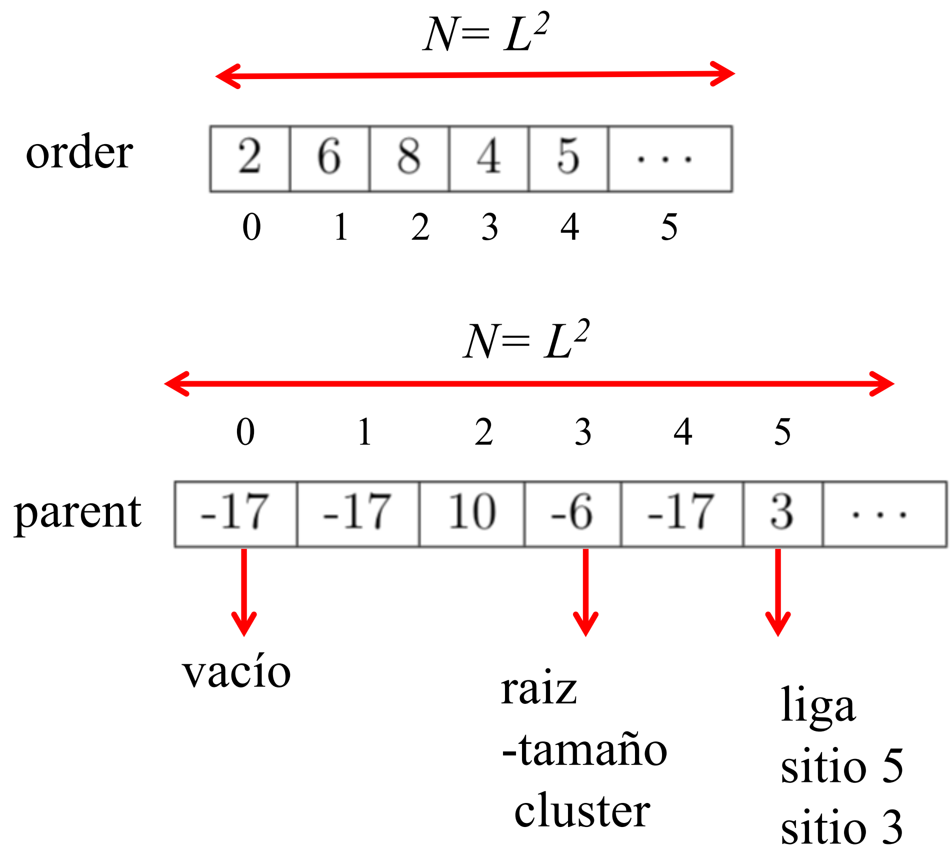
Separar los aglomerados

5. Para realizar esto último se utiliza el arreglo **parent[**s**]** de tamaño N = L^2 donde *s* es un sitio de la red. **parent[**s**] =** –(N+1) significa que el sitio *s* está desocupado; **parent[**s**]** > 0 me indica un sitio que está en el mismo cluster que *s* (enlaza); **parent[**s**]** en (-1,-N) me indica el negativo del tamaño del cluster y *s* es la raíz del cluster. Para llegar a dicha raiz se recorre el arreglo **parent** mediante la función *findroot()*.
6. Para unir dos grupos, agregamos un puntero desde la raíz del grupo más pequeño hasta la raíz del más grande. Esto se hace mediante la función *merge()*.

Separar los aglomerados

El algoritmo de Newman y Ziff (2002):



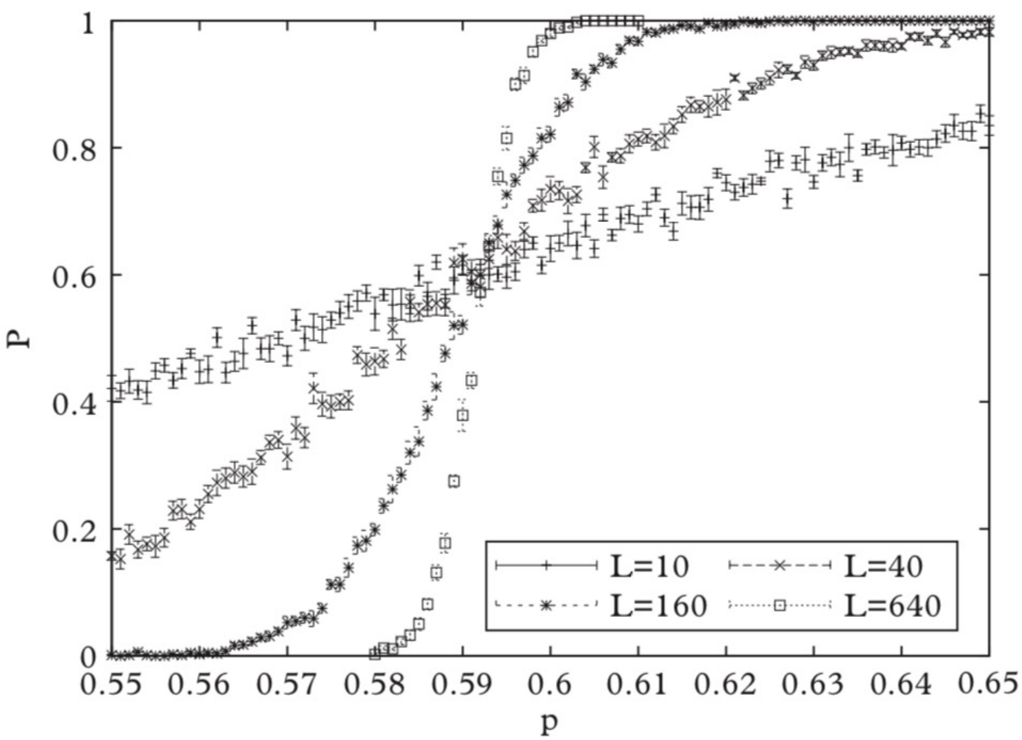


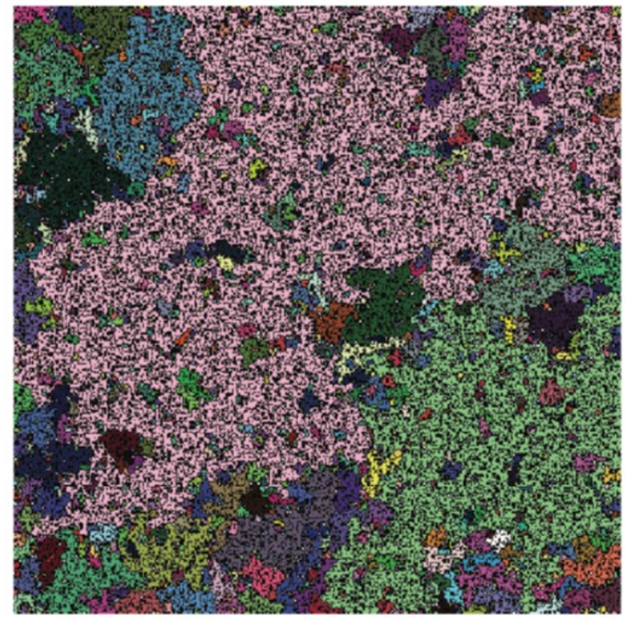
Pasos:

1. Precalcular el orden de ocupación.
2. Añadir sitios de acuerdo a orden predeterminado.
3. Determinar los clusters.

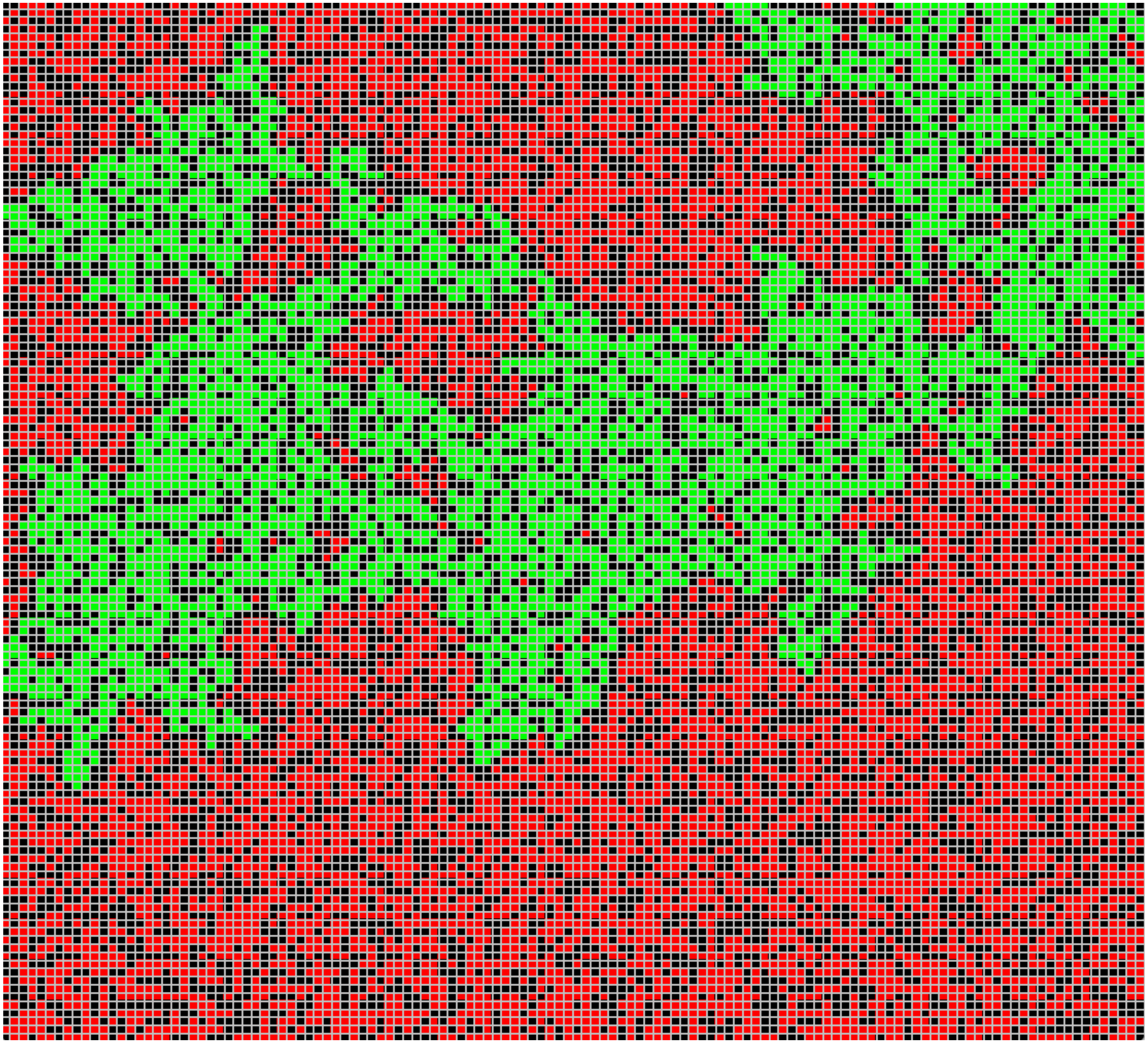
Parámetro de orden

$P_\infty(p)$: Probabilidad de que un sitio de la red pertenezca al *"spanning cluster"*





Parámetro de orden



$$L = 128$$
$$p = 0.59275$$

Radio de Giro y Longitud de Correlación

- Necesitamos una cantidad que no de una idea de la longitud de los aglomerados (longitud de conectividad, $\xi(p)$)
- $g(r)$: función de correlación, es la probabilidad de que sitio a un distancia r de un sitio ocupado se encuentre también ocupado, perteneciendo ambos al mismo aglomerado.
- Por lo tanto podemos definir la longitud de conectividad como:

$$\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)}$$

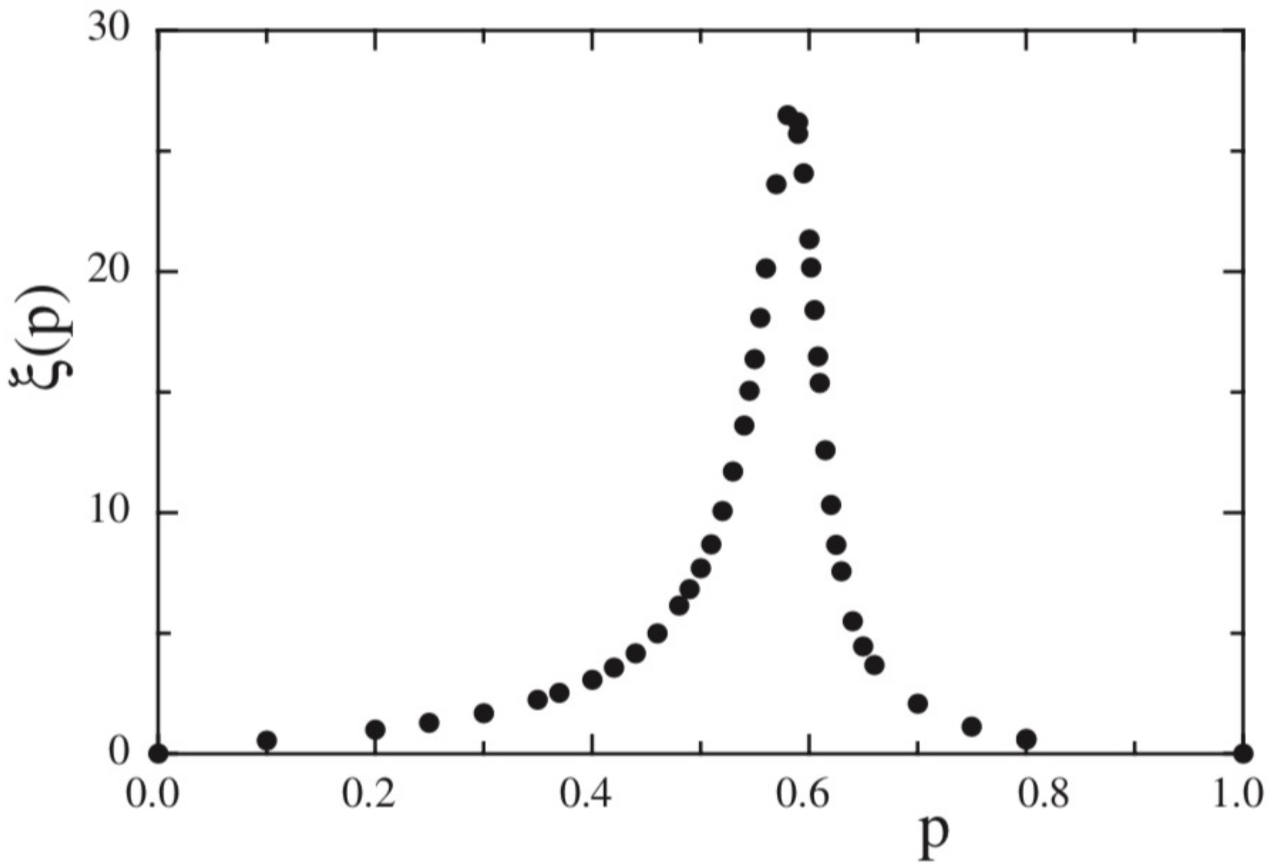
- Otra manera de calcular esta longitud medinate simulaciones es la siguiente. Definamos el radio de giro de un aglomerado

$$R_s^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(\vec{r_i} - \langle\vec{r}\rangle)^2, \quad \text{donde} \quad \langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\vec{r_i}.$$

- "Tomamos un punto al azar. La probabilidad de que caiga en un cluster de tamaño s es w_s. A este punto le corresponde un R_s^2. Como podemos caer s veces el peso de tomar R_s^2 será sw_s"

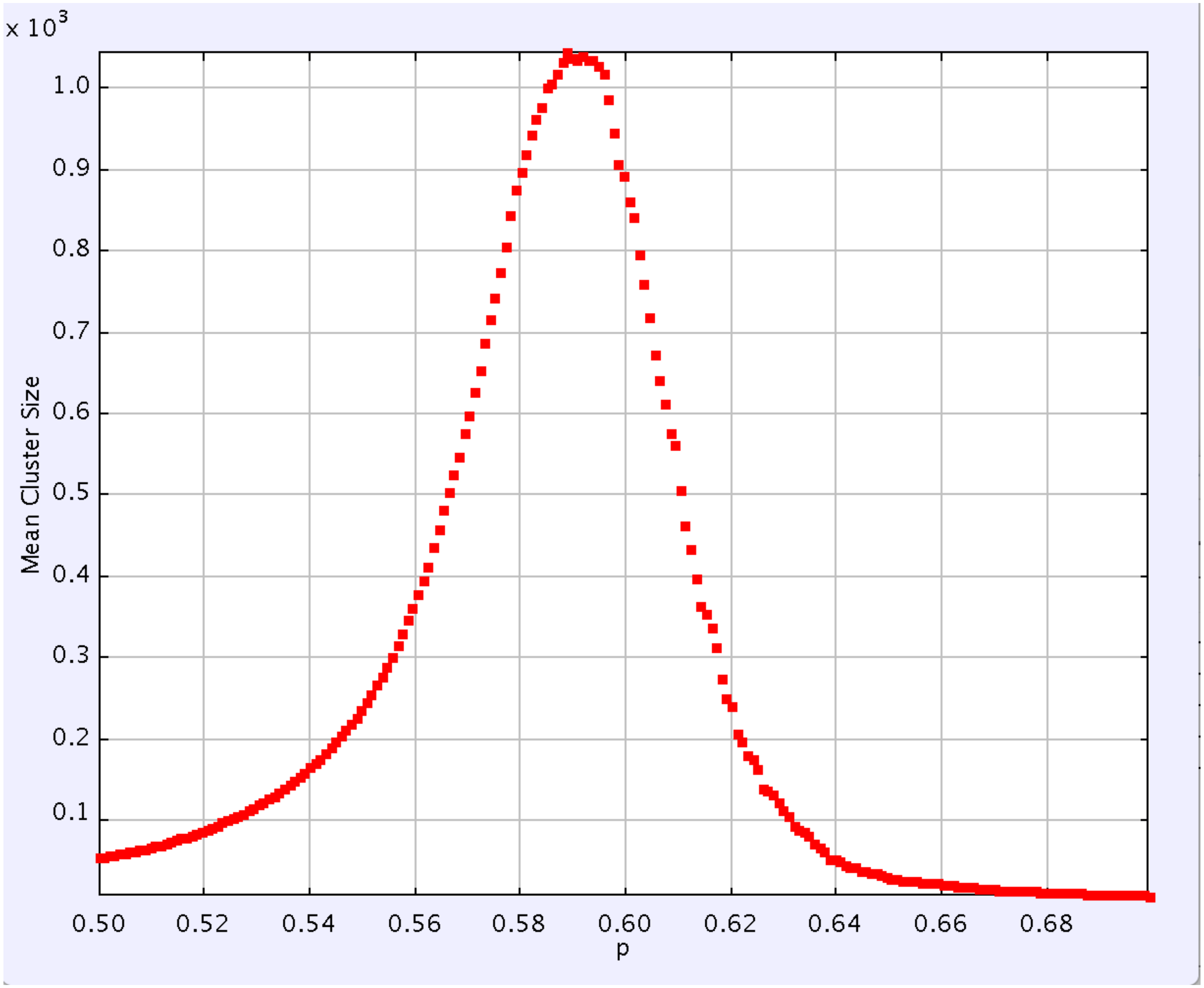
$$\xi^2 = \frac{\sum_s \langle R_s^2\rangle s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s}$$

Radio de Giro y Longitud de Correlación



L = 128, más de 2000 realizaciones para cada *p*

Exponentes críticos y universalidad

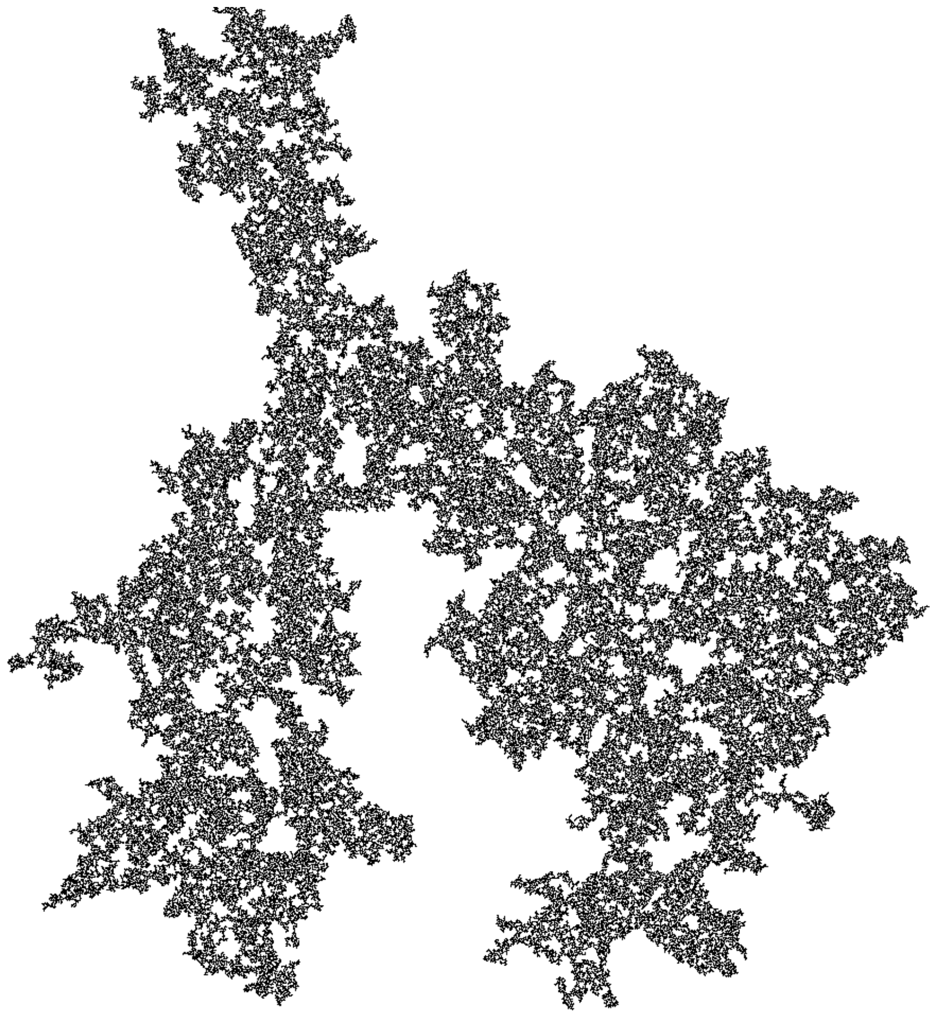


- *L* = 128
- 1000 realizaciones para cada *p*

Exponentes críticos y universalidad

Quantity	Functional form	Exponent	$d = 2$	$d = 3$
Percolation				
order parameter	$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$	β	5/36	0.41
mean size of finite clusters	$S(p) \sim \lvert p - p_c\rvert^{-\gamma}$	γ	43/18	1.80
connectedness length	$\xi(p) \sim \lvert p - p_c\rvert^{-\nu}$	ν	4/3	0.88
cluster numbers	$n_s \sim s^{-\tau}\ (p = p_c)$	τ	187/91	2.19
Ising model				
order parameter	$M(T) \sim (T_c - T)^\beta$	β	1/8	0.32
susceptibility	$\chi(T) \sim \lvert T - T_c\rvert^{-\gamma}$	γ	7/4	1.24
correlation length	$\xi(T) \sim \lvert T - T_c\rvert^{-\nu}$	ν	1	0.63

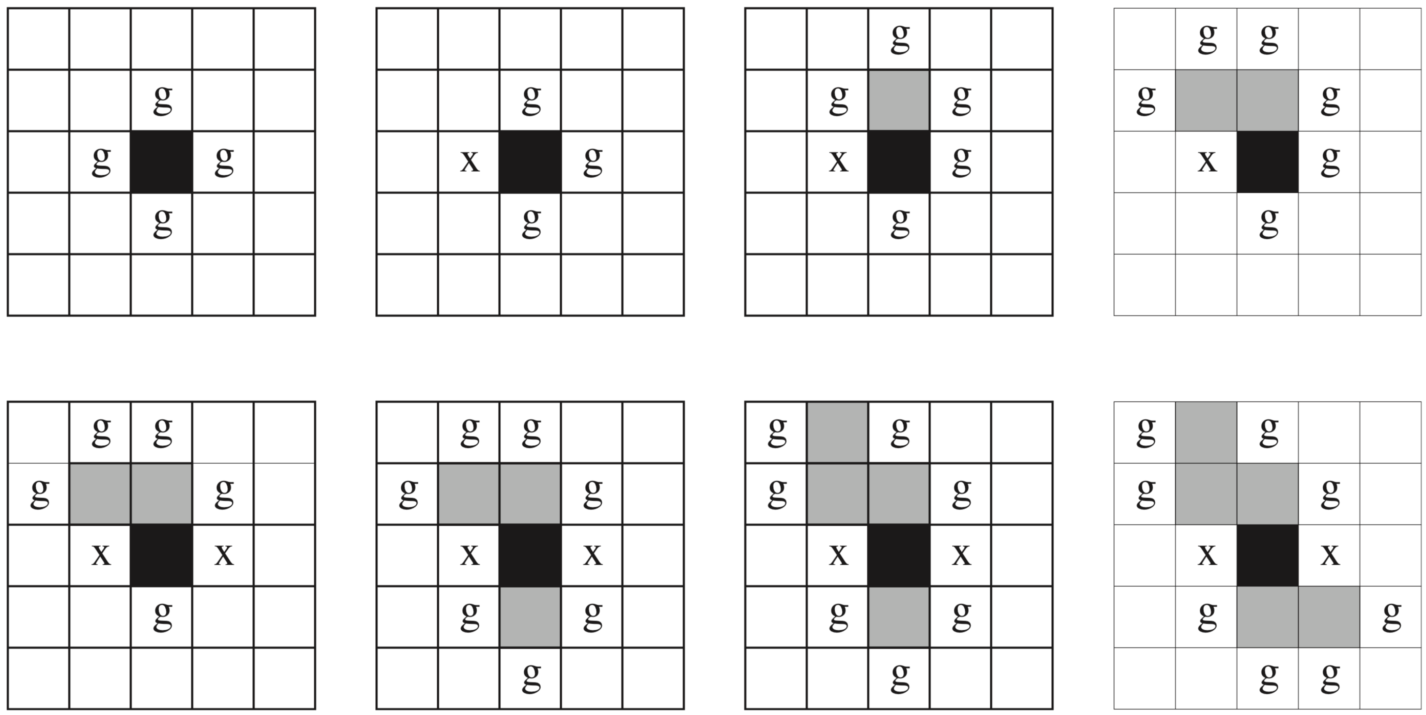
Aglomerado Percolativo



$P = P_C$

Aglomerado Percolativo

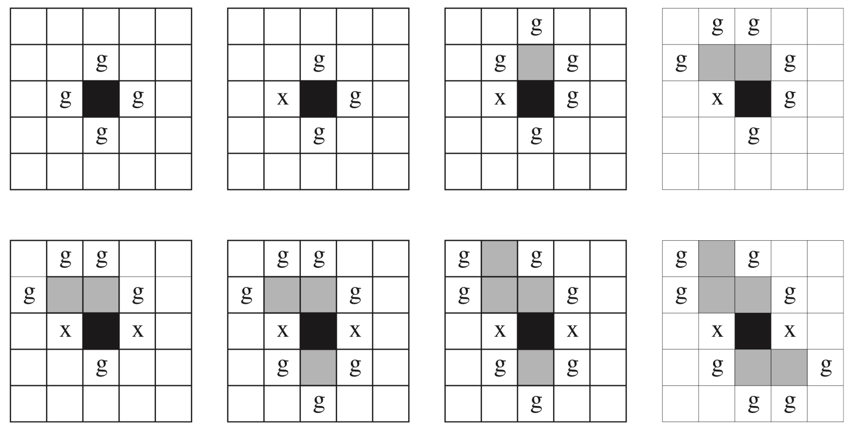
El algoritmo de Hammersley, Leath, Alexandrowicz

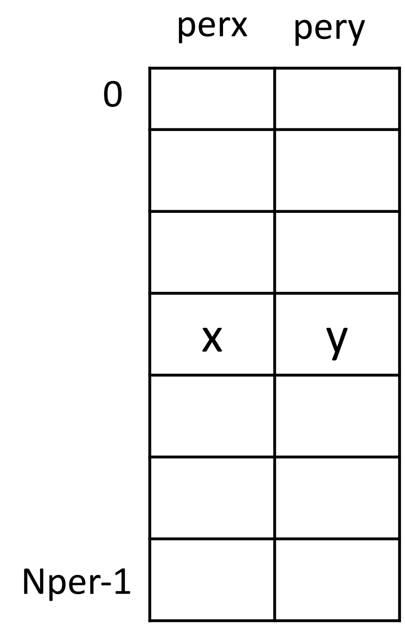


Aglomerado Percolativo

El algoritmo de Hammersley, Leath, Alexandrowicz

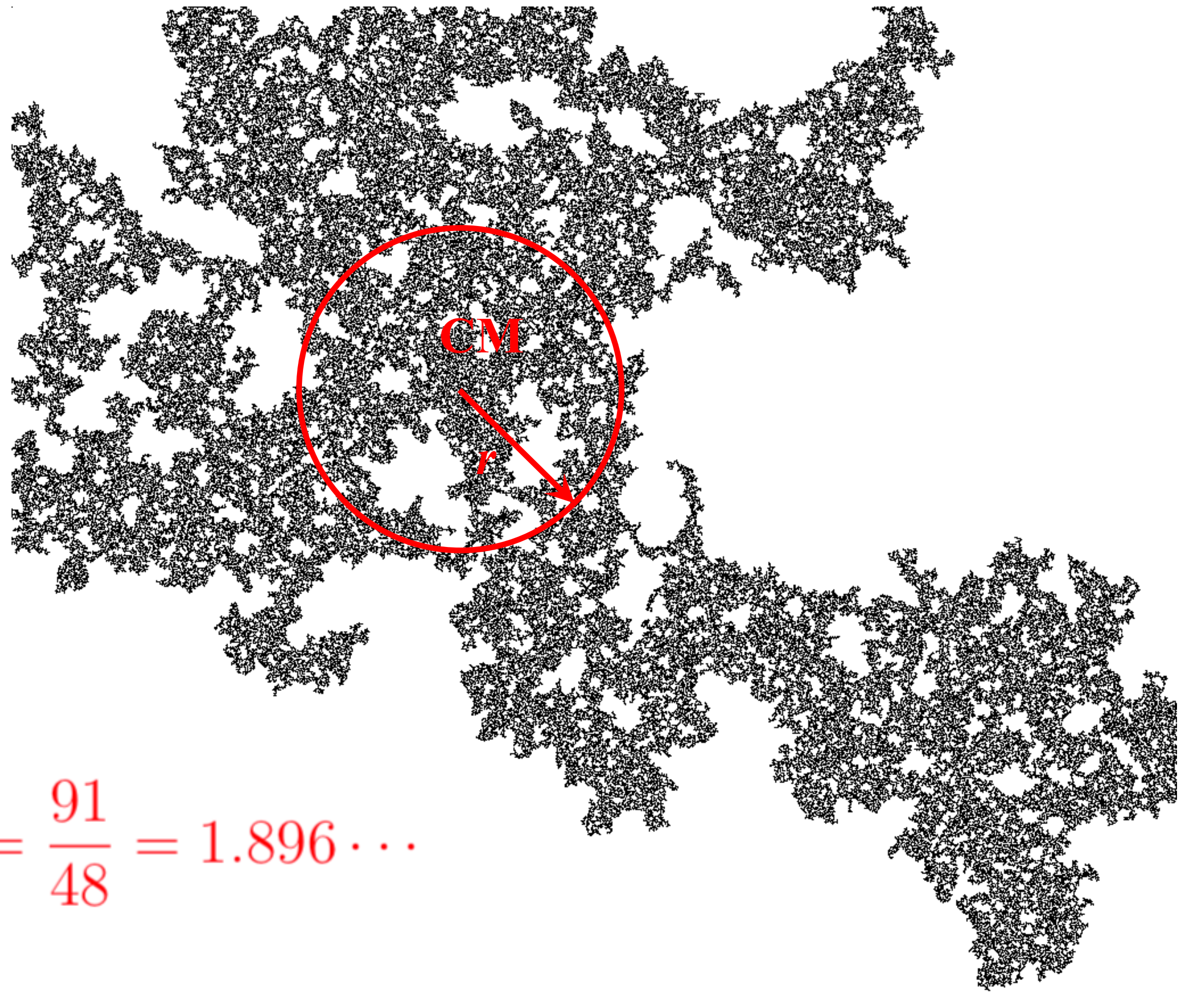
site[x,y] = { -1, 0, 1, 2}
= { x, □, ■, g}





- Se ocupa el sitio semilla en la red. Sus vecinos más cercanos representan los primeros sitios perímetros.
- Entre los sitios perímetros escogemos uno, se genera un número aleatorio uniforme *r* el intervalo [0,1). Si *r* <= *p* el sitio se ocupa y se añade al aglomerado, en caso contrario el sitio no se ocupa (x).
- Por cada sitio ocupado se determinan si hay nuevos sitios perímetros no analizados hasta ahora y se añaden a la lista perímetro.
- Se continúan los puntos 2 y 3 hasta que no existan sitios perímetros por analizar.

Aglomerado Percolativo

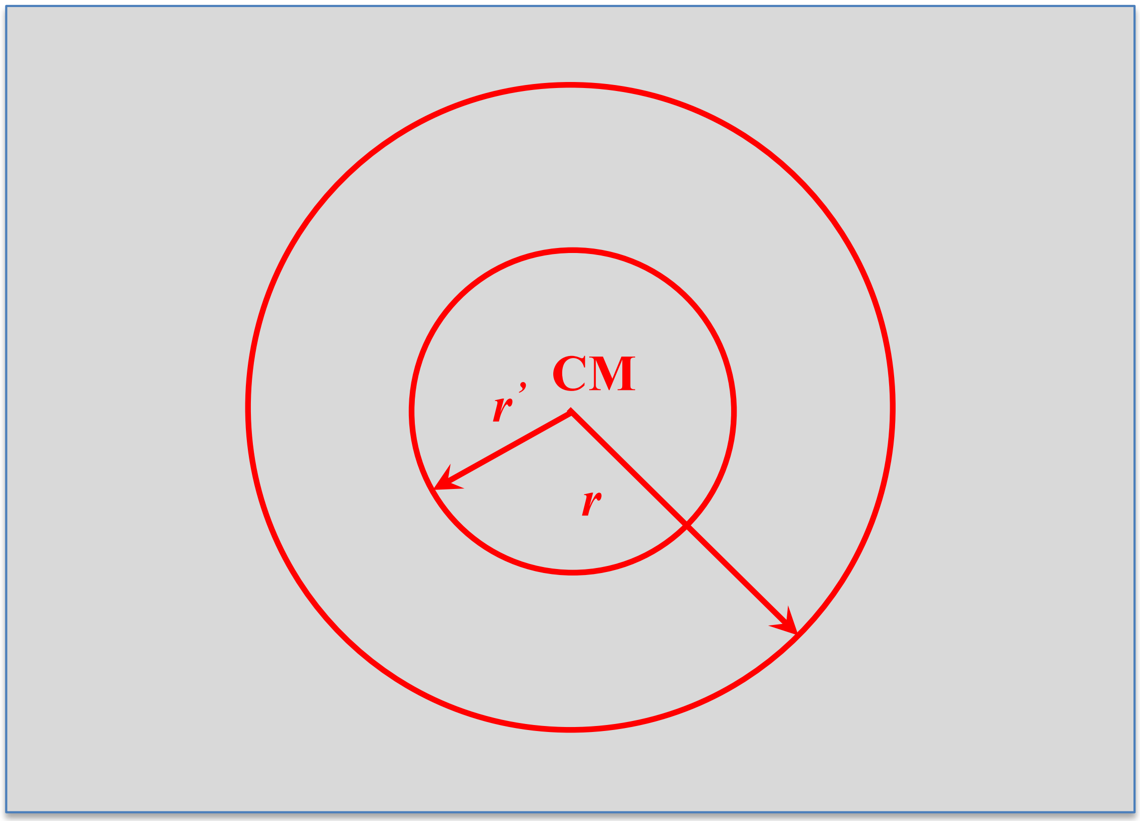


$$M \propto r^D, \qquad D = \frac{91}{48} = 1.896\cdots$$

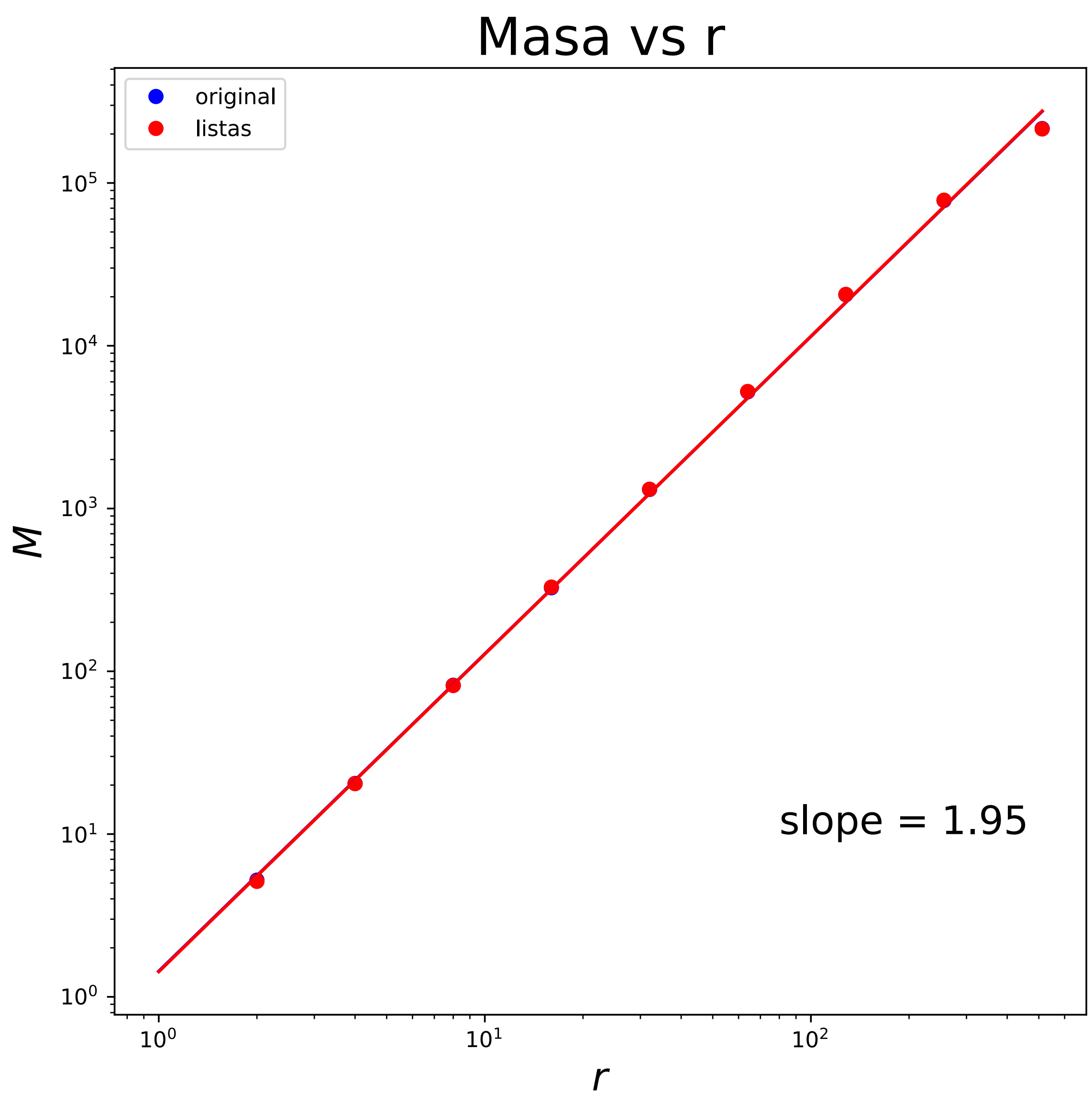
Aglomerado Percolativo

$$M = \rho\,\pi\,r^2, \quad d = 2$$

$$M \propto r^d$$

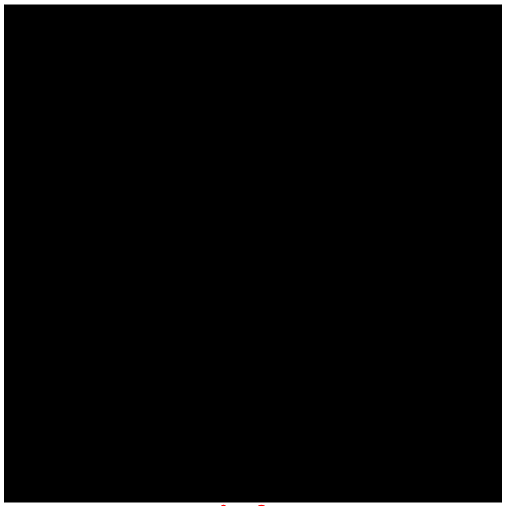


Aglomerado Percolativo

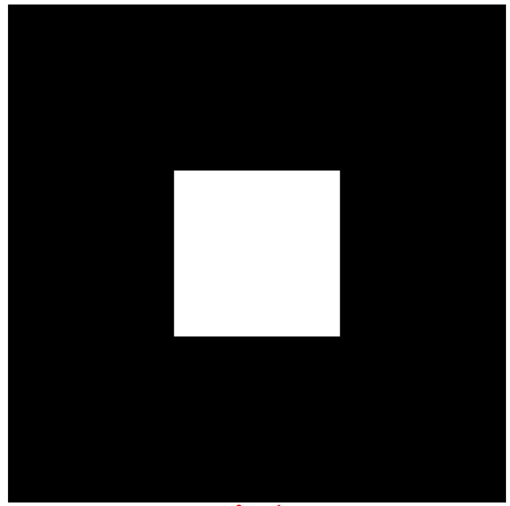


Fractales

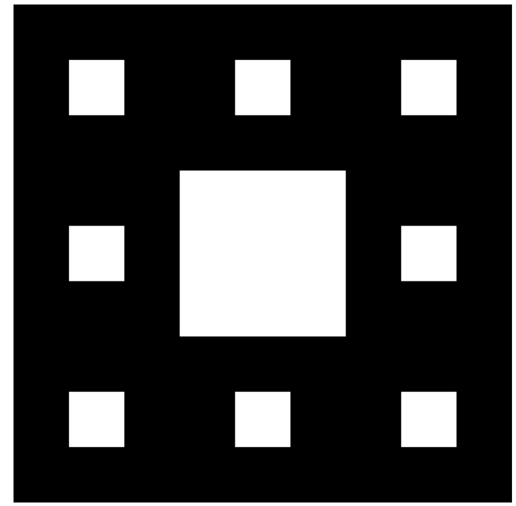
Sierpinski Carpet



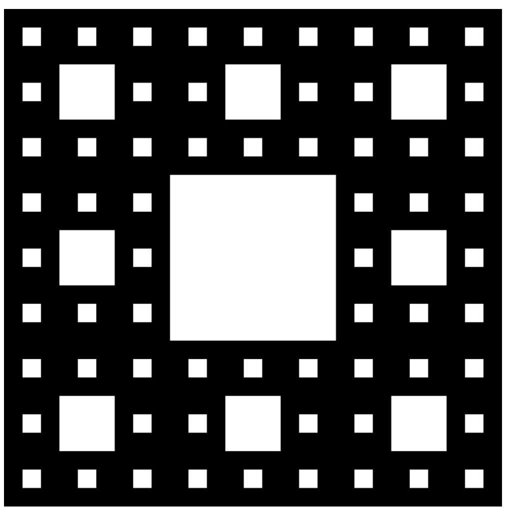
i=0



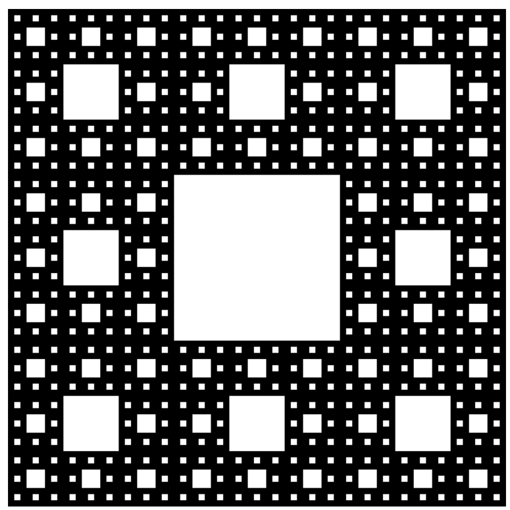
i=1



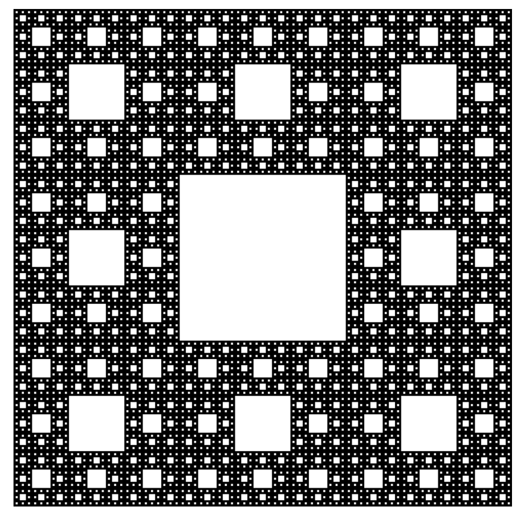
i=2



i=3



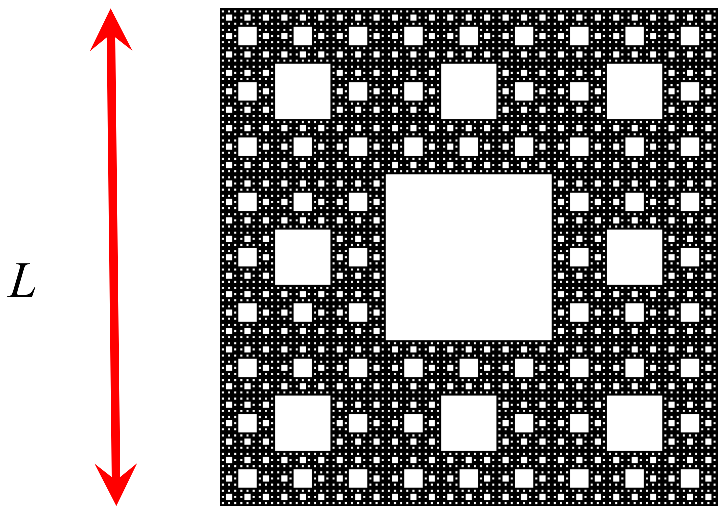
i=4

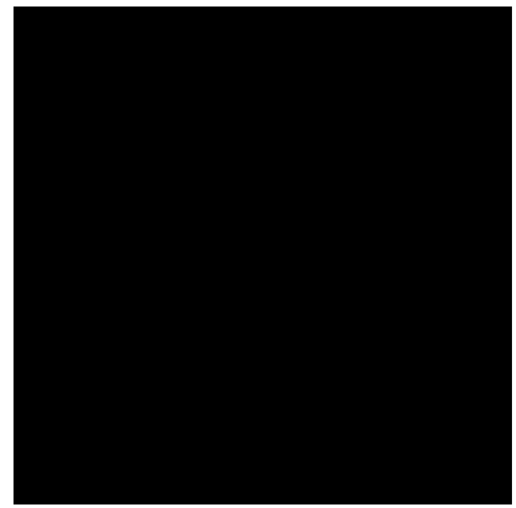


i=5

Fractales

Dimensión de Haussdorf





$$L = 3^i\, l \quad \rightarrow \quad \log \frac{L}{l} = i \log 3$$

$$M = 8^i\, m \quad \rightarrow \quad \log \frac{M}{m} = i \log 8$$

Dividiendo la segunda entre la primera:

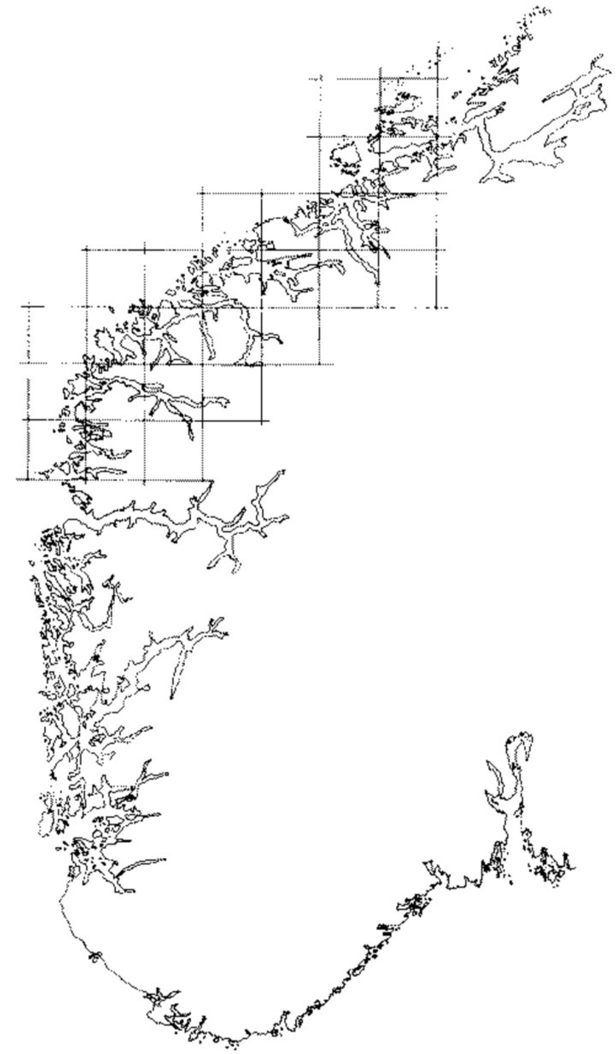
$$\log \frac{M}{m} = \left(\frac{\log 8}{\log 3} \right) \log \frac{L}{l}$$

$$M = m \left(\frac{L}{l} \right)^{D_f} \quad \text{donde} \quad D_f = \frac{\log 8}{\log 3}$$

$$M = 9^i\, m, \; L = 3^i\, l$$

$$M = m \left(\frac{L}{l} \right)^{d} \quad \text{donde} \quad d = 2$$

Fractales



Densidad:

$$\rho = \frac{M/m}{(L/l)^d}$$

$$\rho \propto L^{D_f - d}$$

Nótese: $\rho \to 0,$ cuando $L \to \infty$

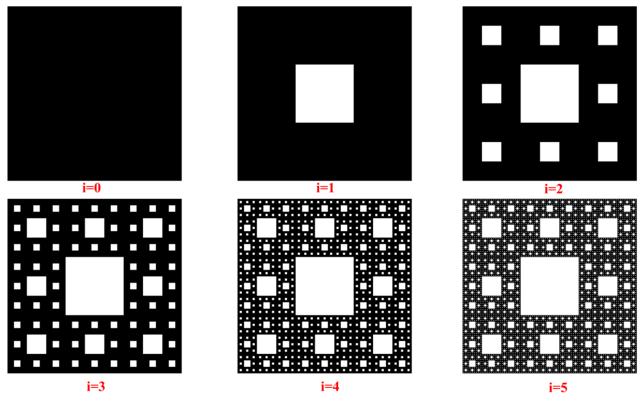
Dimensión de cajitas:

$$D_f = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

Fractales

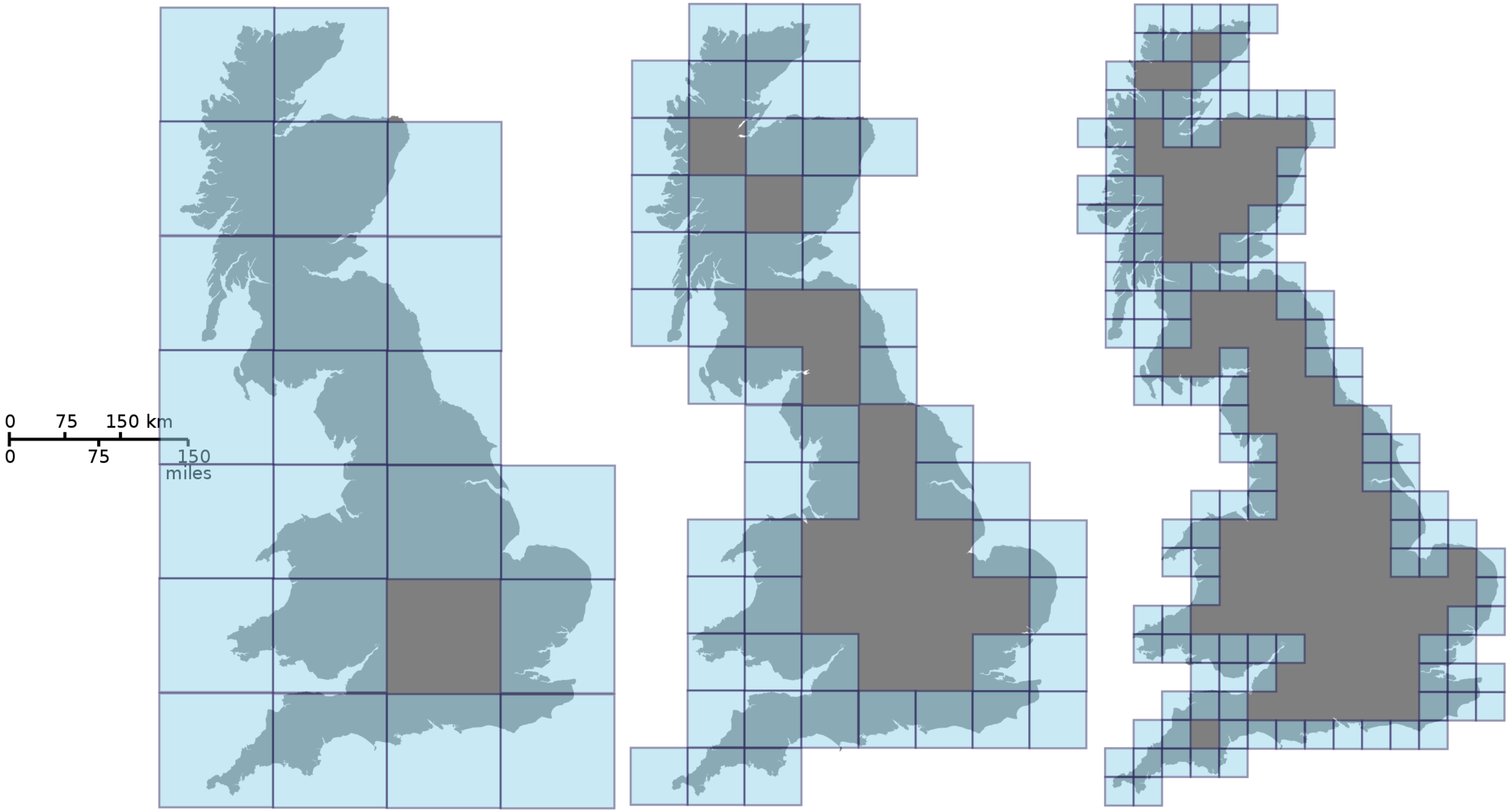
Dimensión de cajitas para el Sierpinski Carpet:

i	l_{cajas}	N_{cajas}
0	1	1
1	$1/3$	8
2	$1/3^2$	8^2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$1/3^n$	8^n



$$D = \frac{\log N_{\text{cajas}}}{\log 1/l_{\text{cajas}}} = \frac{\log 8^n}{\log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3}$$

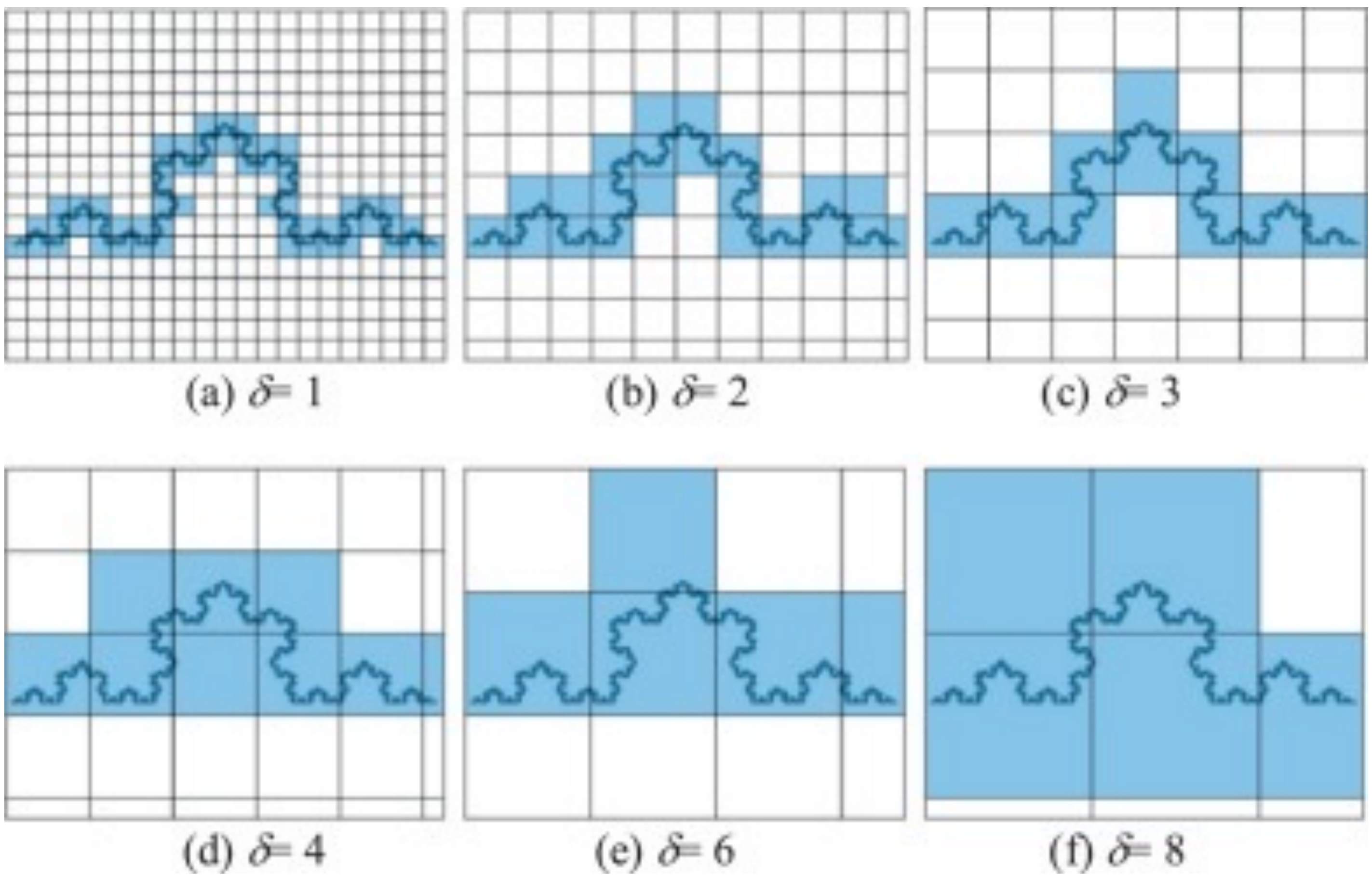
Fractales



Dimensión de cajitas

Fractales

Dimensión de cajitas

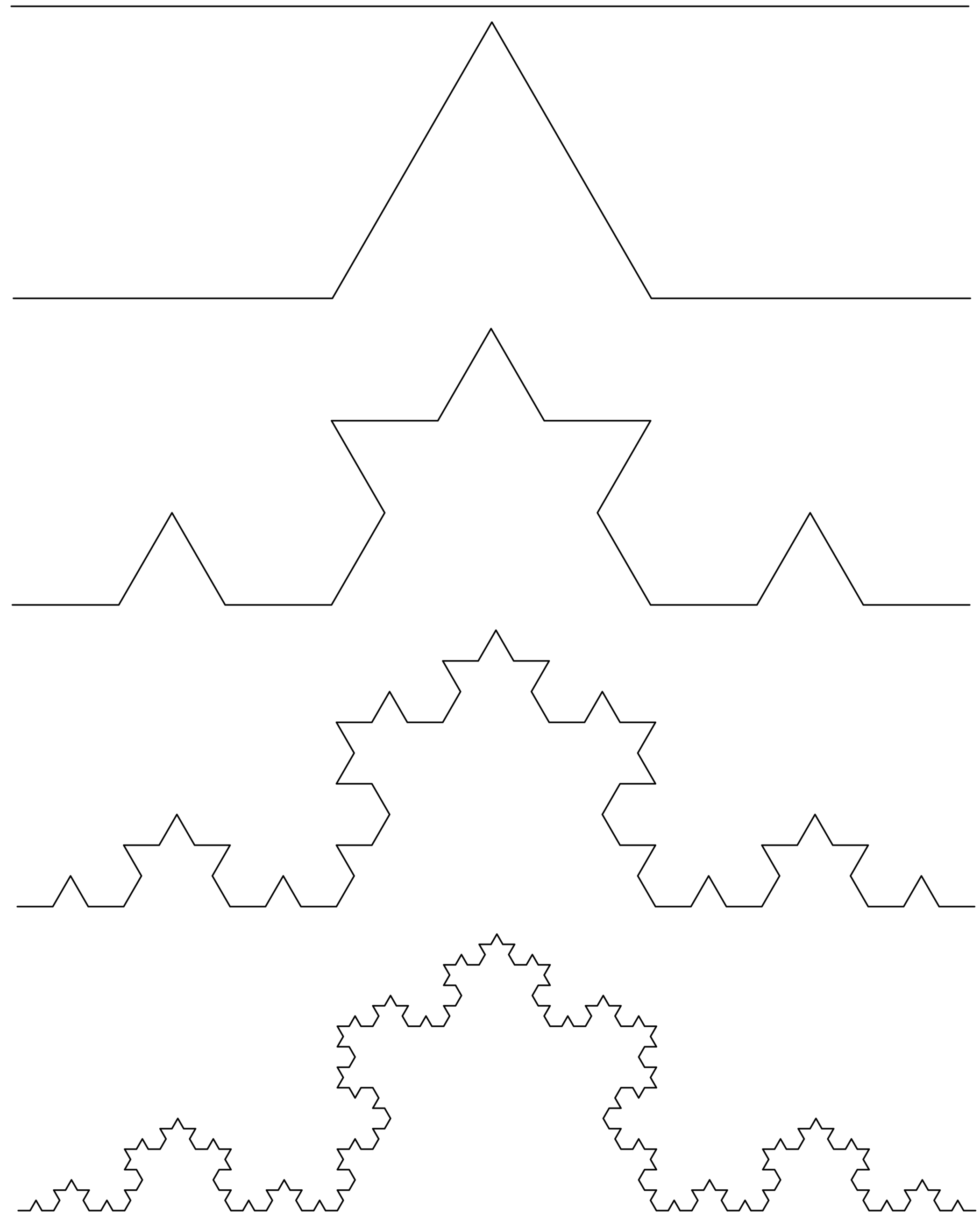


(a) $\delta = 1$ (b) $\delta = 2$ (c) $\delta = 3$

(d) $\delta = 4$ (e) $\delta = 6$ (f) $\delta = 8$

Fractales

Curva de Koch



$$L = 3^i\, l \quad \rightarrow \quad \log \frac{L}{l} = i \log 3$$

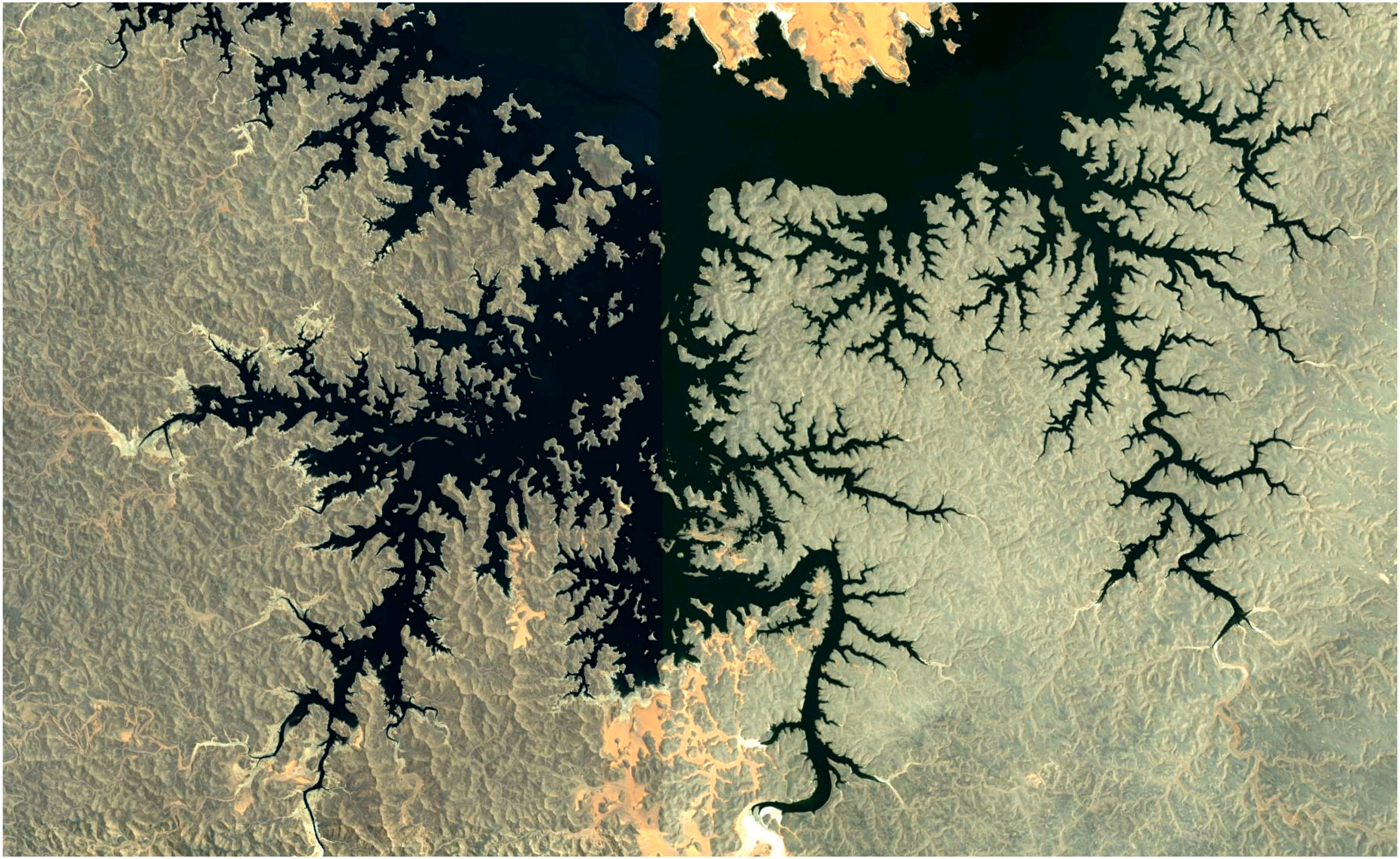
$$L_c = 4^i\, l \quad \rightarrow \quad \log \frac{L_c}{l} = i \log 4$$

Dividiendo la segunda entre la primera:

$$\log \frac{L_c}{l} = \left(\frac{\log 4}{\log 3} \right) \log \frac{L}{l}$$

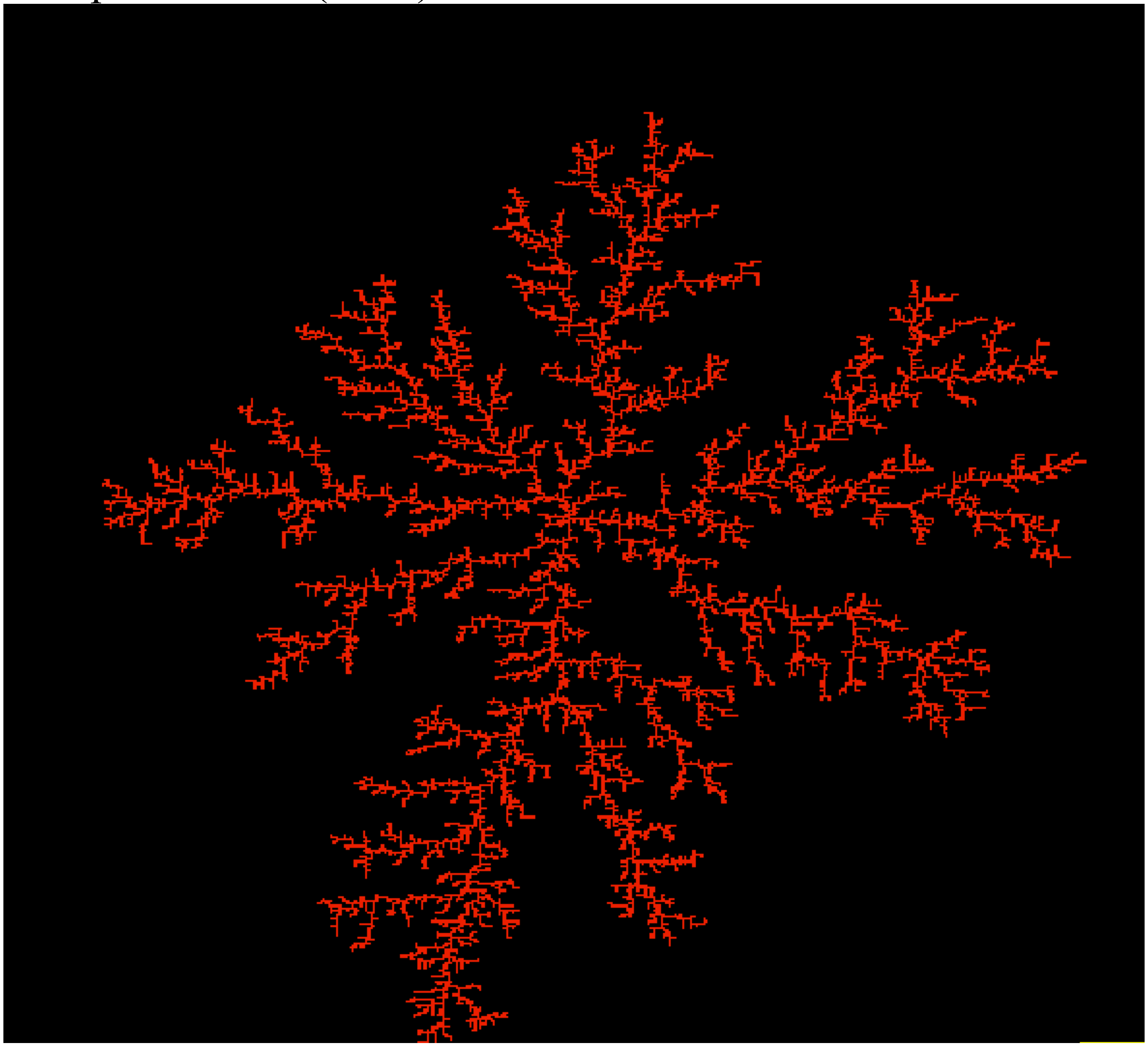
$$L_c = l \left(\frac{L}{l} \right)^{D_f} \quad \text{donde} \quad D_f = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Fractales



Fractales

Agregación limitada por difusión (DLA)



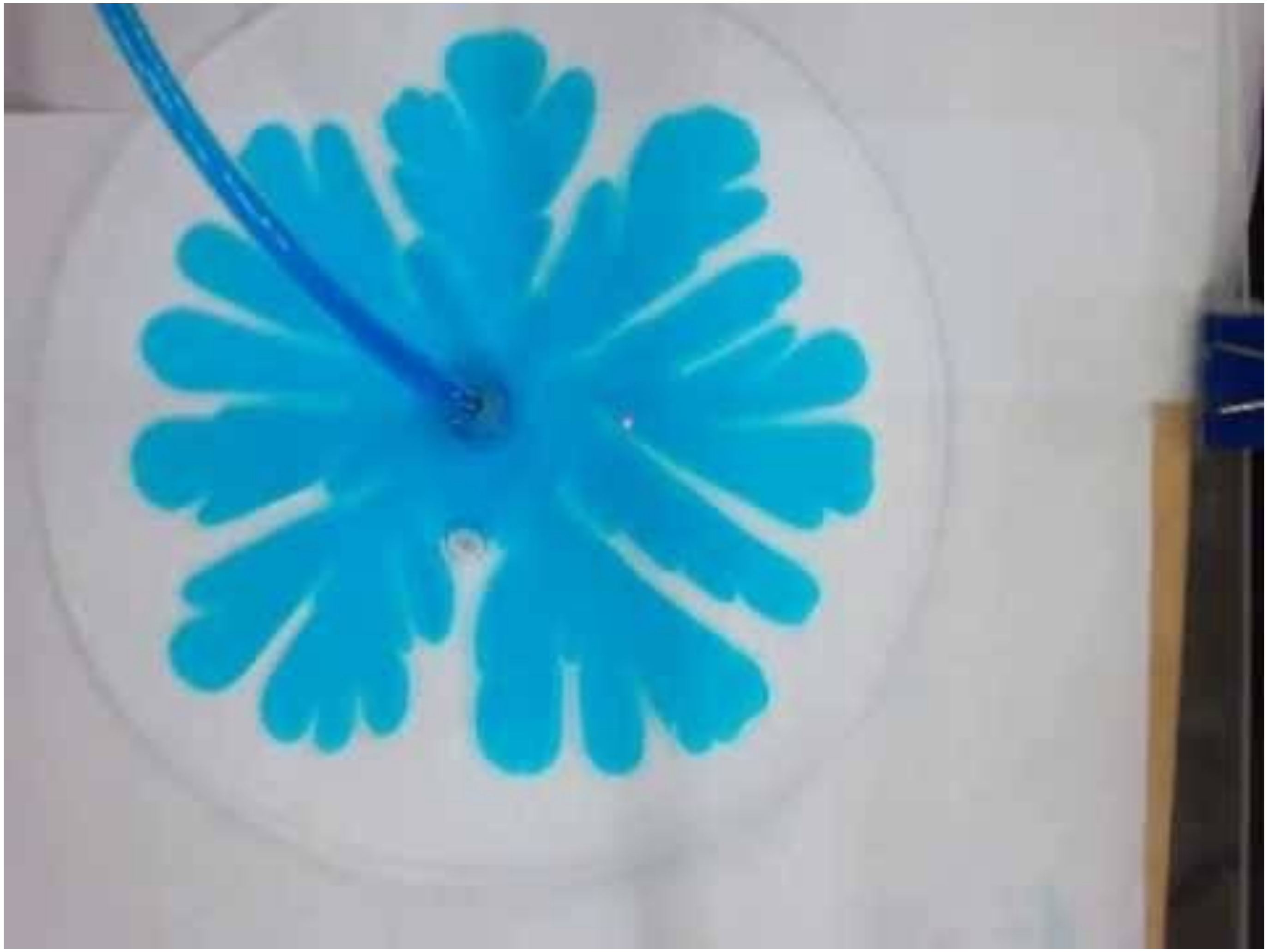
Fractales

Agregación limitada por difusión (DLA)

electrodeposición de cobre de una solución de sulfato de cobre en una célula electrolítica

Fractales

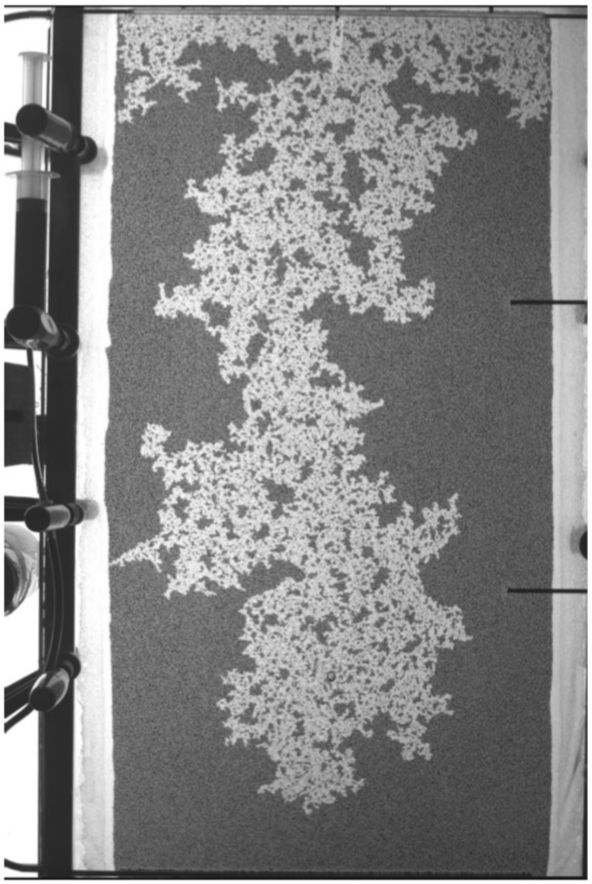
Agregación limitada por difusión (DLA)



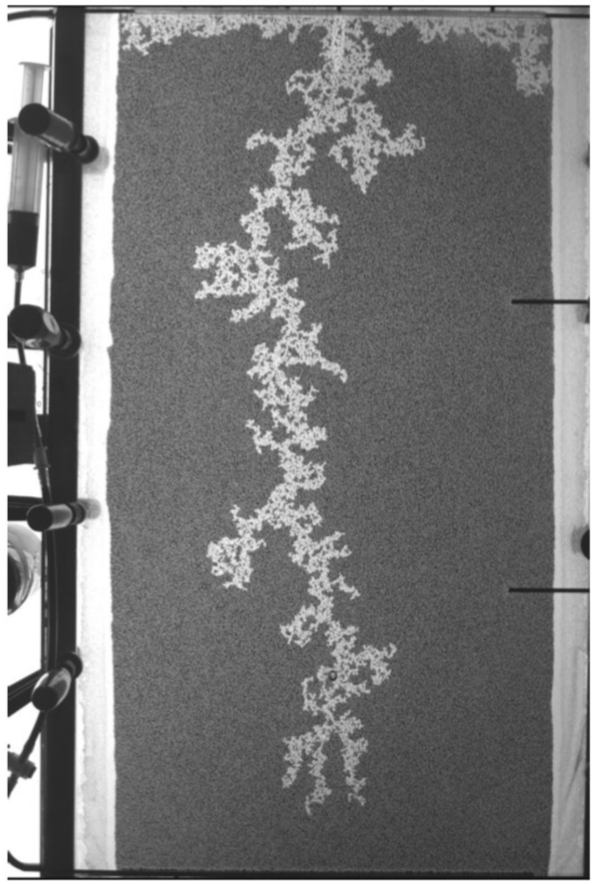
Celda de Hele-Shaw: glicerina y agua

Fractales

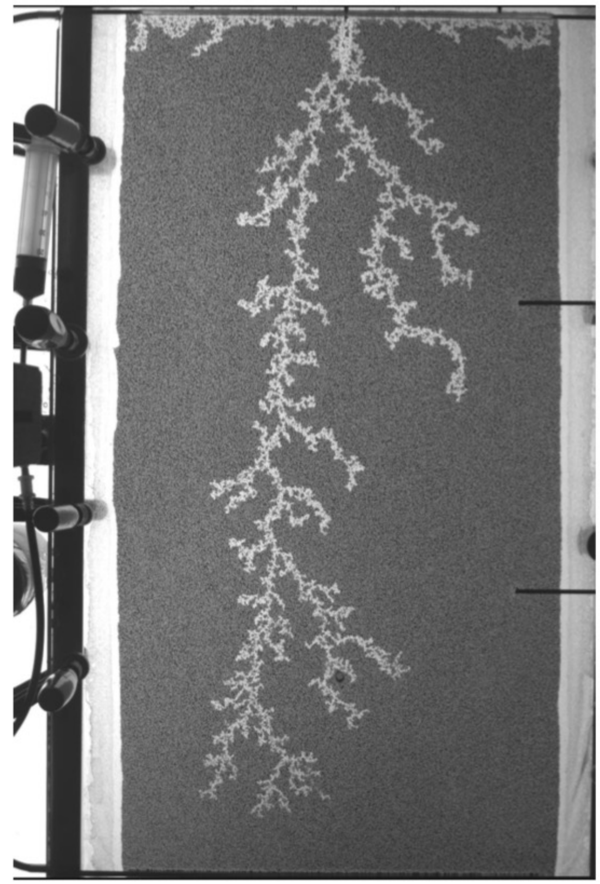
De adedamiento capilar a adedamiento visocoso



$\mathrm{Ca} \simeq 0.015$



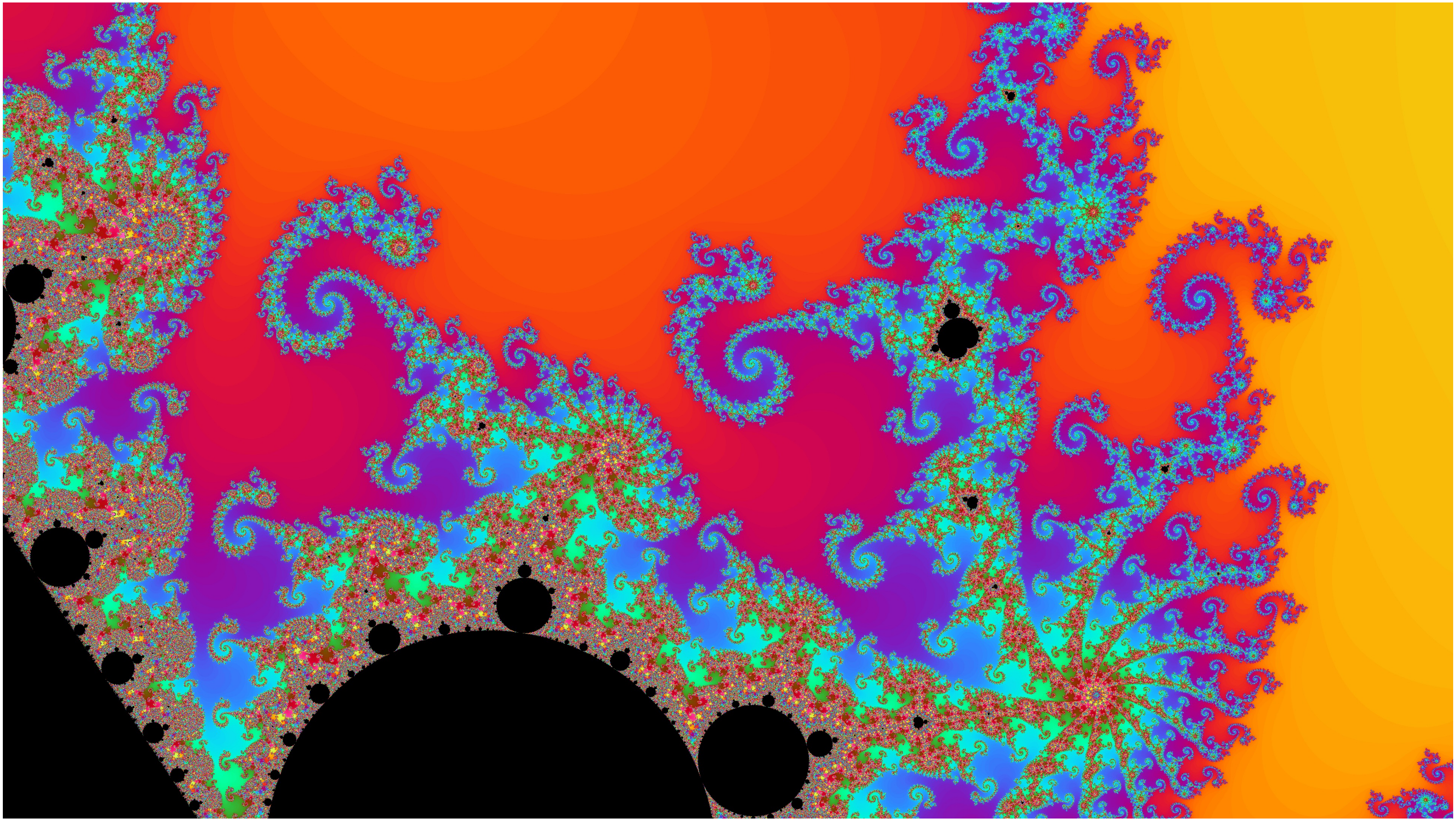
$\mathrm{Ca} \simeq 0.060$



$\mathrm{Ca} \simeq 0.20$

Fractales

El conjunto de Mandelbrot



Radio de Giro y Longitud de Correlación

- Necesitamos una cantidad que no de una idea de la longitud de los aglomerados (longitud de conectividad, $\xi(p)$)

- Definamos el radio de giro de un aglomerado

$$R_s^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(\vec{r_i} - \langle\vec{r}\rangle), \quad \text{donde} \quad \langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\vec{r_i}. \tag{7}$$

- Distancia promedio entre dos sitios de un aglomerado de tamño s

$$2R_s^2 = \frac{1}{s^2}\sum_{i,j}|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2 \tag{8}$$

- $g(r)$: función de correlación, es la probabilidad de que sitio a un distancia r de un sitio ocupado se encuentre también ocupado, perteneciendo ambos al mismo aglomerado.

- Por lo tanto podemos definir la longitud de conectividad como:

$$\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)} \tag{9}$$

Radio de Giro y Longitud de Correlación

- Podemos estimar esta cantidad con R_s^2,

$$\xi^2 = 2\frac{\displaystyle\sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\displaystyle\sum_s s^2 n_s} \tag{10}$$

"Tomamos un punto al azar. La probabilidad de que caiga en un cluster de tamaño s es w_s. A este punto le corresponde un R_s^2. Como podemos caer s veces el peso de tomar R_s^2 será sw_s"

- ξ: Longitud de correlación.

- ¿Qué pasa con ξ cuando nos acercamos al umbral de percolación?

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}, \quad \text{para} \quad |p - p_c| \ll 1 \tag{11}$$

- ν es el exponente crítico de la longitud de correlación.

- Universalidad: $\nu = 4/3$ para $d = 2$.