---

1. Siguiendo el mismo esquema que se utilizó en clases construya la función en Python que implemente el método de Runge Kutta de cuarto orden explicado en clases (LLámela RK4). Pruebe que funciona para el problema del movimiento de un cuerpo, en las cercanías de la superficie terrestre, en una dimensión. Compare este método con los de Euler y Heun implementados en clase. Utilice herramientas de Python para su comparación.

2. Este problema trata sobre un mini sistema solar. Primero resolverá el problema de un planeta alrededor del sol. Después el de dos planetas alrededor del sol. Se asumirá que las dos órbitas se encuentran en el mismo plano. En términos generales, tendrá que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}. \tag{1}$$

Debe hacerlo utilizando la función de Runge Kutta de cuarto orden (RK4) que desarrolló en el porblema anterior. Todos los apartes hay que resolverlos en AU para distancias y año para tiempo. Para el sistema solar $GM = 4\pi^2$ AU^3/año^2. Como condición inicial los planetas siempre saldrán de su posición en el perihelio. Es decir, si a es el valor del semieje mayor y ϵ es la excentricidad de la órbita:

$$x_0 = a * (1-\epsilon), \quad ,y_0 = 0, \quad v_{x0} = 0, \quad v_{y0} = \sqrt{\frac{GM(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)}}. \tag{2}$$

(a) Planeta alrededor del sol. ¿Cuáles son las dimensiones de $\vec{u}$ y $\vec{f}$ en la ecuación (1)? Escriba una función en python para calcular $\vec{f}$.

(b) Consiga numéricamente:

- Órbita de la Tierra: $T = 1$ año, $a = 1$ AU, $\epsilon = 0.0167$
- Órbita de Marte: $T = 1.88$ año, $a = 1.5237$ AU, $\epsilon = 0.0934$
- Órbita de Eros: $T = 1.761$ año, $a = 1.4583$ AU, $\epsilon = 0.2229$
- Órbita de Halley: $T = 76.$ año, $a = 18$ AU, $\epsilon = 0.967$.
  Grafique comparativamente las tres primera órbita y la primera con la última.

(c) Escriba una función en python para que utilizando la salida de RK4 obtenga la energía mecánica por unidad de masa, E_m, del planeta. Grafique la diferencia $\Delta E_m = E_m(t) - E_m(0)$ respecto al tiempo en una escala adecuada. ¿Se conserva la energía?

(d) ¿Podría dar un criterio físico y uno numérico para escoger el Δt adecuado para su método de integración?

(e) Mini Sistema solar. Dos planetas que giran alrededor del sol con órbitas en el mismo plano. Realice el diagraam de cuerpo libre y escriba la segunda ley de Newton para cada uno de los planetas. ¿Cuáles son las dimensiones de $\vec{u}$ y $\vec{f}$ en la ecuación (1)? Escriba una función en python para calcular $\vec{f}$.

(f) Consiga las órbitas para: $m_1/M = 10^{-3}, m_2/M = 4 \times 10^{-3}$ y las condiciones iniciales: $x_1 = 2.52, v_{x1} = 0., y_1 = 0., v_{y1} = 3.958034705745753, x_2 = 5.24, v_{x2} = 0., y_2 = 0., v_{y2} = 2.7448222458179172.$

(g) Escriba una función en python para que utilizando la salida de RK4 obtenga la energía mecánica por unidad de masa, E_M del sol. Grafique la diferencia $\Delta E_M = E_M(t) - E_M(0)$ respecto al tiempo en una escala adecuada. ¿Se conserva la energía?

(h) Realice el análisis de todos los resultados obtenidos.

velocidades en AU/a no, distancias en AU

3. **El problema de los tres cuerpos**

Poincaré mostró que es imposible obtener una solución analítica para el movimiento irrestricto de tres o más objetos que interactúan bajo la influencia de la gravedad. Sin embargo, se conocen soluciones para algunos casos especiales, y es instructivo estudiar las propiedades de estas soluciones.

Soluciones analíticas:

Suponga que las tres masas son iguales. Condiciones iniciales en el siguiente formato:

$$(x_1, v_{x1}, y_1, v_{y1}, x_2, v_{x2}, y_2, v_{y2}, x_3, v_{x3}, y_3, v_{y3})$$

- En 1765, Euler descubrió una solución analítica en la que tres masas comienzan en una línea y giran de modo que la masa central permanece fija. La primera masa se coloca en el centro y las otras dos masas se colocan en lados opuestos con velocidades iguales pero opuestas. Debido a la simetría, las trayectorias son elipses con un foco común en el centro.

$$\begin{aligned}&v = 0.8,\\ &(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, v, -1, 0, 0, -v).\end{aligned}$$

- En 1772, Lagrange encontró una segunda solución analítica para el problema irrestricto de los tres cuerpos. Esta solución comienza con tres masas en las esquinas de un triángulo equilátero. Cada masa se mueve en una elipse de tal manera que el triángulo formado por las masas permanece equilátero.

$$\begin{aligned}&v = 0.8,\\ &sn = \sin \pi/3,\ cn = \cos \pi/3,\\ &(1, 0, 0, v, -cn, -v * sn, sn, -v * cn, -cn, v * sn, -sn, -v * cn).\end{aligned}$$

- Una nueva y espectacular solución que se suma a la escasa lista de soluciones analíticas de tres cuerpos fue descubierta por primera vez numéricamente por Moore y Chenciner y Montgomery demostraron su estabilidad.

$$\begin{aligned}&x1 = 0.97000436,\ v1 = 0.93240737/2,\\ &y1 = 0.24308753,\ v2 = 0.86473146/2,\\ &(x1, v1, -y1, v2, -x1, v1, y1, v2, 0, -2 * v1, 0, -2 * v2).\end{aligned}$$

(a) Haga el diagrama de cuerpo libre de tres cuerpos que interactúan entre si vía gravitación universal. Para las tres soluciones planteadas arriba, los tres cuerpos se mueven en un mismo plano. Esto se puede justificar con facilidad por conservación del momentum angular del sistema.

(b) Para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} \tag{3}$$

¿Cuál es la dimensión de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{f}$? Basado en el diagrama de cuerpo libre determine el vector $\vec{f}$. Costruya la función en python que lo representa. Asuma que los tres cuerpos tienen la misma masa m. Coloque todo en función de Gm.

(c) Consiga las órbitas para las tres soluciones plateadas arriba. Utilice RK4 y $Gm = 1$.

(d) Haga una función que calcule la energía por unidad de masa. Calcule, para las tres soluciones, la energía por unidad de masa y compruebe que se conserva.

(e) Haga una función que calcule el momentum angular por unidad de masa.

$$\frac{\vec{L}}{m} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{4}$$

Compruebe que esta cantidad se conserva para las tres soluciones planteadas arriba.

No olvide discutir los resultados

4. **Péndulo forzado amortiguado,** **este problema es el primer parcial**

Este tema se discute en el capítulo número 4 del libro de Marion (está en el dropbox)

La ecuación de movimiento adimensional de un péndulo con amortiguamiento y forzamiento,está dada por:

$$\ddot{x} = -c\,\dot{x} - \sin x + F\,\cos \omega t', \tag{5}$$

con $c = 0.05$ y $\omega = 0.7$, estudiar la ruta hacia el caos variando F. Simule este sistema modificando los programas desarrollados en clase. Para ello siga el siguiente procedimiento:

(a) Escogencia del $h = \Delta t$ adecuado. Para $F = 0.4$ simule el sistema, utilizando RK4, con condiciones iniciales $x(t = 0) = 0.1$, $\dot{x}(t = 0) = 0$

- Primero para $\Delta t = 0.01\,T$ y un tiempo total de $500\,T$, donde T es el períodos del forzador. Observando la curva $\dot{x}$ versus t estime el tiempo para alcanzar el estado estacionario (¿qué es el estado estacionario?). En principio, el movimiento para este valor de F debería ser oscilatorio en el estado estacionario. Si es así, la velocidad máxima debería de ser igual para cada período del movimiento. Compruébelo mediante una función que usted construya.
- Repita pero ahora para $\Delta t = 0.001\,T$ y un tiempo total de $500\,T$. Compare los resultados. Le recomiendo que compare las gráficas para los últimos $10\,T$ de movimiento.

Tenga cuidado porque de ahora en adelante casi todos los análisis los debe hacer para el sistema en estado estacionario.

(b) Como el péndulo puede realizar rotaciones además de oscilaciones, es conveniente que haga una función en python que lleve x al intervalo $[-\pi, \pi]$. Para notar esto, observe el comportamiento de x vs t para las condiciones del aparte (a).

(c) Decida cuál Δt utilizar de ahora en adelante, explique. Grafique el diagrama de fase para este caso. Discuta. Haga el mismo gráfico para tiempos mayores del tiempo donde se alcanza el estado estacionario. Discuta.

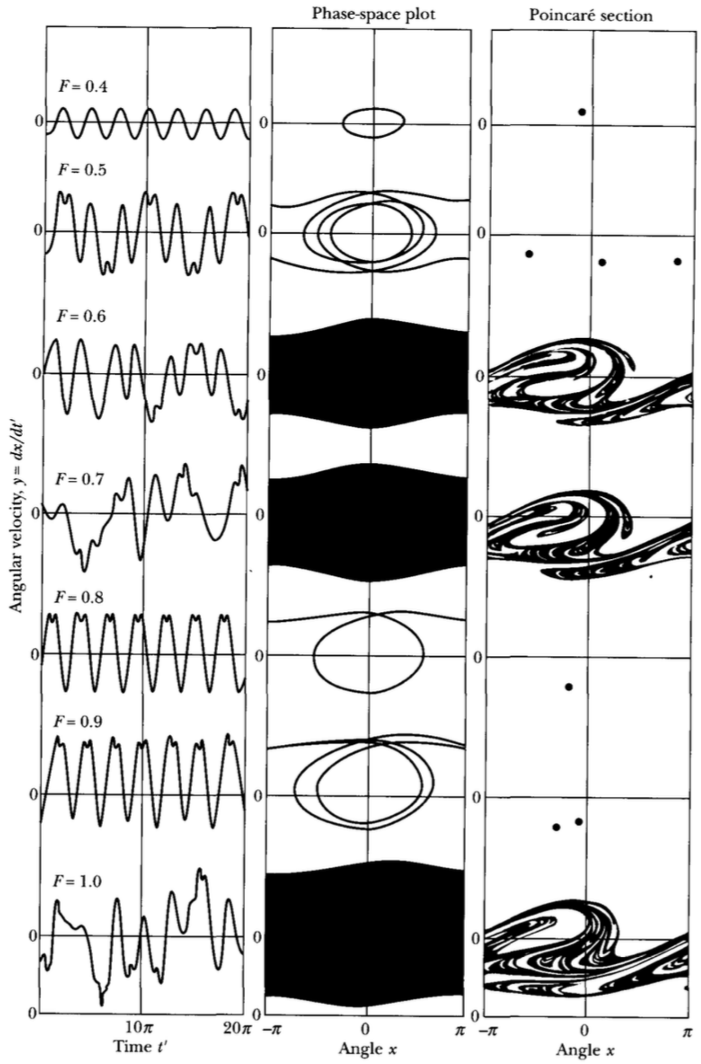
(d) Lea el libro de Marion y entienda lo que es la sección de Poincare. Haga una función en python que la determine. Grafíquela para el caso tratado hasta ahora.

(e) Para el mismo valor de $F = 0.4$ realice simulaciones para diferentes condiciones iniciales, $x(t = 0) = 0.3, 0.6, 0.9$ y 1.2 con $\dot{x}(t = 0) = 0$. Compare las gráficas de $\dot{x}(t)$ y los diagramas de fase y las secciones de Poincare. Discuta.

(f) Observando la figura 1 tenemos que para $F = 0.5$, 0.8 y 0.9 el sistema no es caótico. Utilizando la condición inicial $x(t = 0) = 0.1$, $\dot{x}(t = 0) = 0$ grafique $\dot{x}(t)$ y estime los tiempos para alcanzar los respectivos estados estacionarios. Compárelos entre ellos y con el resultado del aparte (a). Grafique los diagrama de fase y la secciones de Poincare. Compruebe que el sistema no es caótico para los parámetros utilizados. Discuta y explique como es el movimiento en el estado estacionario. ¿Se ven afectadas las respuestas si utiliza la siguientes condiciones iniciales $x(t = 0) = 0.6\,\text{y}\,1.2$, $\dot{x}(t = 0) = 0$?

(g) Utilizando como tiempo para alcanzar el estado estacionario como el máximo obtenido para los casos no caóticos obtenga la gráfica de $\dot{x}(t)$ y los diagramas de fase y secciones de Poincare para $F = 0.6$, 0.7 y 1.0. Utilice las misma condiciones iniciales que en el aparte anterior. Discuta.

Figure 1: Ruta al caos



La discusión que haga en cada problema tiene que tener partes física y numérica.