Universidad Iberoamericana. 22 de enero de 2024
Ingeniería Física **Física Computacional**
Laboratorio 1-2. Programación en Python. Análisis numérico Prof. Ricardo Paredes Villegas

---

1. Método de Simpson.

(a) Construya una función en python que implemente el método de Simpson. Utilice esta función para resolver la siguiente integral

$$I = \int_0^2 (x^4 - 2x + 1)\, dx. \tag{1}$$

Aproxime el valor de la integral dividiendo el intervalo en $N = 10$ partes. Compare con la solución obtenida en clases utilizando la regla del trapecio.

(b) Estime la integral ahora con $N = 100, 1000, 10000$. Calcule la relación entre los errores absolutos. Discuta.

---

2. En clase estimamos la velocidad media de una cierta partícula como función del tiempo utilizando operaciones de vectoriales de la librería numpy. Resuelva ese mismo problema utilizando bucles (for).

3. **Constante de desplazamiento de Wien**

La ley de radiación de Plank nos dice que la intensidad de radiación por unidad de área y por longitud de onda λ de un cuerpo negro a temperatura T es

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{2}$$

donde h es la constante de Plank, c la rapidez de la luz y k_B la constante de Boltzmann.

(a) Construya par de funciones en python: búsqueda binaria y Newton Raphson.

(b) Muestre derivando que la longitud de onda λ a la cual la radiación emitida es más fuerte es la solución de la ecuación

$$5\mathrm{e}^{-hc/\lambda k_B T} + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 5 = 0. \tag{3}$$

Haga la sustitución $x = hc/\lambda k_B T$ y de esta forma muestre que la longitud de onda de máxima radiación obedece la ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda = \frac{b}{T}, \tag{4}$$

donde la llamada constante de desplazamiento de Wien es $b = hc/k_B x$ y x es la solución de la ecuación no lineal

$$5\mathrm{e}^{-x} + x - 5 = 0. \tag{5}$$

(c) Escriba un programa que resuelva esta ecuación con una precisión $\epsilon = 10^{-6}$ usando los métodos de búsqueda binaria y de Newton Raphson, y de esta manera encuentre la constante de desplazamiento.

(d) La ley de desplazamiento es la base un método para medir la temperatura de objetos distantes observando el color de la radiación térmica que ellos emiten (pirometría óptica). Este método es comúnmente usado para determinar la temperatura superficial de objetos astronómicos como el Sol. El pico de la radiación emitida por el sol se observa a $\lambda = 502$ nm. De las ecuaciones de arriba y de su valor de la constante de desplazamiento, estime la temperatura superficial del sol.

Para el final de la clase la parte (a). Aplique sus funciones para resolver la ecuación (5)

4. Escriba una función que estime numéricamente la integral

$$A = \int_a^b f(x)dx \tag{6}$$

utilizando la regla del trapecio. La versión más simple de la regla del trapecio, la cual en general da un estimado muy crudo, es

$$A_0 = \frac{1}{2} h_0 \left[f(a) + f(b) \right], \quad h_0 = b - a. \tag{7}$$

Este resultado de la integral puede ser refinado dividiendo el intervalo de a a b por dos y efectuando la regla del trapecio en cada intervalo. Este proceso puede ser repetido tantas veces como sea necesario hasta que se obtenga la precisión deseada, la cual usted puede estimar recurriendo a la diferencia entre estimados sucesivos $|\,(A_i - A_{i-1})/A_i\,| < \epsilon$, donde ϵ es algún número pequeño como 10^{-8}. Para aplicar la regla del trapecio repetidamente se utiliza el siguiente estimado

$$A_n = \frac{1}{2} A_{n-1} + h_n \sum_{i=1,3,\cdots}^{2^n-1} f(a + ih_n), \quad h_n = \frac{1}{2} h_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 1. \tag{8}$$

Escriba una función que implemente la regla del trapecio evaluando primero A_0, luego A_1, $\cdots$ hasta que el error de su estimado sea menor que una tolerancia predeterminada ϵ. Este método, como utiliza en las fórmulas la aproximación anterior, reduce mucho el tiempo de cómputo al reducir evaluaciones de la función.

Pruebe la función desarrollada en las siguientes integrales y muestre que usted obtiene la respuesta dentro la tolerancia especificada.

(a) $\int_2^5 x^2 dx = 39$

(b) $\int_0^\pi \sin x dx = 2$

(c) $\int_0^{3,5} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(3{,}5) \simeq 0{,}8862262668989721$.

---

5. Integración de Romberg

(a) Construya en python una funcin que implemente el método de integración de Romberg. Debe tener como parámetros la función a integrar, los límites de integración, el número de subdivisiones N de la integración de trapecio básica y una cota superior del error que desea. Le recomiendo que siga las sugerencias dadas en clase.

(b) Aplique esta función para resolver la integral

$$I = \int_0^1 \sin^2 \sqrt{100x} dx. \tag{9}$$

Su resultado debe tener un error menor que 10^{-8}.

(c) Compare el tiempo de cómputo con los métodos de Trapecio y Simpson para obtener resultados con el mismo error. El resultado exacto es 0.45583253230908216.

6. Derivada centrada

(a) Construya una función en python que calcule la derivada centrada de una función en un intervalo dado. Los parámetros de la función deben ser los extremos del intervalo, el número de subdivisiones y la función a derivar. La salida debe ser un vector con la derivada en cada punto. Utilice las facilidades de numpy.

(b) Construya una función que devuelva el valor de $1 + \frac{1}{2}\tanh 2x$.

(c) Calcule la derivada exacta de esta función y grafíquela en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

(d) Utilice su función de derivada centrada para estimar la derivada de esta función. Sobre la misma gráfica anterior coloque sus resultados para distintos valores del número de subdivisiones. Compare y discuta.

(e) ¿Como podría usted estimar el error de su método? Estímelo y grafíquelo como función del número de subdivisiones del intervalo. Discuta.