Universidad Iberoamericana.
Ingeniería Física
Laboratorio 3. Ecuaciones de Newton.

4 de septiembre de 2023
Física Computacional
Prof. Ricardo Paredes Villegas

---

1. Siguiendo el mismo esquema que se utilizó en clases construya la función en Python que implemente el método de Runge Kutta de cuarto orden explicado en clases (LLámela RK4). Pruebe que funciona para el problema del movimiento de un cuerpo, en las cercanías de la superficie terrestre, en una dimensión. Compare este método con los de Euler y Heun implementados en clase. Utilice herramientas de Python para su comparación.

2. Este problema trata sobre un mini sistema solar. Primero resolverá el problema de un planeta alrededor del sol. Después el de dos planetas alrededor del sol. Se asumirá que las dos órbitas se encuentran en el mismo plano. En términos generales, tendrá que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}. \tag{1}$$

Debe hacerlo utilizando la función de Runge Kutta de cuarto orden (RK4) que desarrolló en el porblema anterior. Todos los apartes hay que resolverlos en AU para distancias y año para tiempo. Para el sistema solar $GM = 4\pi^2$ AU^3/año^2. Como condición inicial los planetas siempre saldrán de su posición en el perihelio. Es decir, si a es el valor del semieje mayor y ϵ es la excentricidad de la órbita:

$$x_0 = a * (1-\epsilon), \quad , y_0 = 0, \quad v_{x0} = 0, \quad v_{y0} = \sqrt{\frac{GM(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)}}. \tag{2}$$

(a) Planeta alrededor del sol. ¿Cuáles son las dimensiones de $\vec{u}$ y $\vec{f}$ en la ecuación (1)? Escriba una función en python para calcular $\vec{f}$.

(b) Consiga numéricamente:

- Órbita de la Tierra: $T = 1$ año, $a = 1$ AU, $\epsilon = 0.0167$
- Órbita de Marte: $T = 1.88$ año, $a = 1.5237$ AU, $\epsilon = 0.0934$
- Órbita de Eros: $T = 1.761$ año, $a = 1.4583$ AU, $\epsilon = 0.2229$
- Órbita de Halley: $T = 76.$ año, $a = 18$ AU, $\epsilon = 0.967$.
  Grafique comparativamente las tres primera órbita y la primera con la última.

(c) Escriba una función en python para que utilizando la salida de RK4 obtenga la energía mecánica por unidad de masa, E_m, del planeta en función del tiempo. Grafique la diferencia $\Delta E_m = E_m(t) - E_m(0)$ respecto al tiempo en una escala adecuada. ¿Se conserva la energía?

(d) ¿Podría dar un criterio físico y uno numérico para escoger el Δt adecuado para su método de integración?

(e) Mini Sistema solar. Dos planetas que giran alrededor del sol con órbitas en el mismo plano. Realice el diagraam de cuerpo libre y escriba la segunda ley de Newton para cada uno de los planetas. ¿Cuáles son las dimensiones de $\vec{u}$ y $\vec{f}$ en la ecuación (1)? Escriba una función en python para calcular $\vec{f}$.

(f) Consiga las órbitas para: $m_1/M = 10^{-3}, m_2/M = 4 \times 10^{-2}$ y las condiciones iniciales: $x_1 = 2.52, v_{x1} = 0., y_1 = 0., v_{y1} = 3.958034705745753, x_2 = 5.24, v_{x2} = 0., y_2 = 0., v_{y2} = 2.7448222458179172$.

(g) Escriba una función en python para que utilizando la salida de RK4 obtenga la energía mecánica por unidad de masa, E_M del sol en función del tiempo. Grafique la diferencia $\Delta E_M = E_M(t) - E_M(0)$ respecto al tiempo en una escala adecuada. ¿Se conserva la energía?

(h) Realice el análisis de todos los resultados obtenidos.

velocidades en AU/a no, distancias en AU

3. **El problema de los tres cuerpos**

Poincaré mostró que es imposible obtener una solución analítica para el movimiento irrestricto de tres o más objetos que interactúan bajo la influencia de la gravedad. Sin embargo, se conocen soluciones para algunos casos especiales, y es instructivo estudiar las propiedades de estas soluciones.

Soluciones analíticas:

Suponga que las tres masas son iguales. Condiciones iniciales en el siguiente formato:

$$(x_1, v_{x1}, y_1, v_{y1}, x_2, v_{x2}, y_2, v_{y2}, x_3, v_{x3}, y_3, v_{y3})$$

- En 1765, Euler descubrió una solución analítica en la que tres masas comienzan en una línea y giran de modo que la masa central permanece fija. La primera masa se coloca en el centro y las otras dos masas se colocan en lados opuestos con velocidades iguales pero opuestas. Debido a la simetría, las trayectorias son elipses con un foco común en el centro.

$$v = 0.8,$$
$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, v, -1, 0, 0, -v).$$

- En 1772, Lagrange encontró una segunda solución analítica para el problema irrestricto de los tres cuerpos. Esta solución comienza con tres masas en las esquinas de un triángulo equilátero. Cada masa se mueve en una elipse de tal manera que el triángulo formado por las masas permanece equilátero.

$$v = 0.8,$$
$$sn = \sin \pi/3,\; cn = \cos \pi/3,$$
$$(1, 0, 0, v, -cn, -v * sn, sn, -v * cn, -cn, v * sn, -sn, -v * cn).$$

- Una nueva y espectacular solución que se suma a la escasa lista de soluciones analíticas de tres cuerpos fue descubierta por primera vez numéricamente por Moore y Chenciner y Montgomery demostraron su estabilidad.

$$x1 = 0.97000436,\; v1 = 0.93240737/2,$$
$$y1 = 0.24308753,\; v2 = 0.86473146/2,$$
$$(x1, v1, -y1, v2, -x1, v1, y1, v2, 0, -2 * v1, 0, -2 * v2).$$

(a) Haga el diagrama de cuerpo libre de tres cuerpos que interactúan entre si vía gravitación universal y establezca la segunda ley de Newton para cada uno de ellos. Para las tres soluciones planteadas arriba, los tres cuerpos se mueven en un mismo plano. Esto se puede justificar con facilidad por conservación del momentum angular del sistema.

(b) Para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} \tag{3}$$

¿Cuál es la dimensión de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{f}$? Basado en el diagrama de cuerpo libre determine el vector $\vec{f}$. Costruya la función en python que lo representa. Asuma que los tres cuerpos tienen la misma masa m. Coloque todo en función de Gm.

(c) Consiga las órbitas para las tres soluciones plateadas arriba. Utilice RK4 y $Gm = 1$.

(d) Haga una función que calcule la energía por unidad de masa. Calcule, para las tres soluciones, la energía por unidad de masa y compruebe que se conserva.

(e) Haga una función que calcule el momentum angular por unidad de masa.

$$\frac{\vec{L}}{m} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{4}$$

Compruebe que esta cantidad se conserva para las tres soluciones planteadas arriba.

No olvide discutir los resultados

---

4. Dos partículas, de igual masa m, se encuentran sujetas mediante un resorte de constante κ y longitud natural l. Ambas se mueven sobre una superficie horizontal sin fricción.

(a) Haga el diagrama de cuerpo libre y calcule el vector fuerza que actúa sobre cada una de las partículas.

(b) ¿Cuántas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden hay que resolver? Es decir, ¿cuál es la dimensión de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{f}$ definidos en clases?

(c) ¿Cuáles son los argumentos (*args) del problema?

(d) Escriba una función que calcule el vector $\vec{f}$ para cada configuración. (Similar a la CaídaLibre vista en clases)

(e) Resuelva numéricamente el problema utilizando Runge Kutta de cuarto orden. Por supuesto la solución de su problema depende la las condiciones iniciales que usted escoja. Supongamos que inicialmente las dos partículas se encuentran sobre el eje y, con el centro de masas en $(0, 0)$, el resorte algo estirado y con velocidades iniciales contrarias, de igual magnitud, en dirección del eje x. Como punto de partida, para que todos trabajen con los mismos datos utilice los siguientes parámetros y condiciones inicales: $\omega = \sqrt{\kappa/m} = 1$, $l_0 = 1$ (longitud natural del resorte), $y_1(0) = 0.7$, $y_2(0) = -0.7$, $v_{1x}(0) = 0.1$, $v_{2x}(0) = -0.1$ y todas las demás condiciones iniciales como 0

(f) Haga una función que estime la energía mecánica del sistema. Estudie la conservación de la energía como función del Δt utilizado.

(g) Haga una función que estime la velocidad del centro de masas del sistema. Estudie su comportamiento como función del tiempo. Discuta lo que ocurre.

(h) Haga una función que estime el momentum angular del sistema respecto al centro de masas. Estudie la conservación del momentum angular como función del Δt utilizado.

En coordenadas polares:

(i) Estudie la distancia relativa como función del tiempo. ¿Podría extraer el período de oscilación? Discuta.

(j) Estudie el ángulo como función del tiempo. ¿Podría extraer el período de rotación? Discuta.

(k) Dejando los mismos parámetro iniciales, cambie las condiciones iniciales y observe lo que ocurre. No realice cambios muy fuertes para que pueda realizar un mejor análisis. Discuta.

Realice un análisis físico de los resultados. La calificación de este problema será comparativa entre todos los grupos.

La discusión que haga en cada problema tiene que tener partes física y numérica.