Universidad Iberoamericana.
Ingeniería Física
Hacia el segundo parcial

28 de febrero 2024
Física Computacional
Prof. Ricardo Paredes Villegas

Para el Segundo Parcial del semestre de primavera de 2024 debe saber hacer hasta el problema 8

---

1. Resolver utilizando Monte Carlo la integral:

$$\int_1^5 dx \int_{-5}^5 dy \, \frac{y^2 e^{-y^2} + x^4 e^{-x^2}}{x e^{-x^2}}$$

Compare con el resultado tomado de Mathematica: $I_M = 1.33199 \times 10^9$. Para hacer la integral genere 10^n puntos con $n = 5, 6, \cdots$. Analice qué pasa con el error relativo al incrementar n.

---

2. Libro de Pines. Capítulo 8. Problemas: 4 (para las incertidumbres revise el capítulo del Pines y modifique su programa de LineFit para que incluya incertidumbres de los resultados y χ_r), 5, 6(a,b) Utilice como valores iniciales: $A_0 = 24, B_0 = 1/3, C_0 = 10, \tau_0 = 27.3$. Sugiera usted un valor inicial para ω_0)

---

3. Libro Newman. Capítulo 10. Problema 2.

4. **Caminantes aleatorios con paso de longitud variable**

Considere un caminante aleatorio en una dimensión con pasos de longitud variable. La probabilidad de que la longitud de un paso individual se encuentre entre a y $a + da$ es $p(a)da$, donde $p(a)$ es la densidad de probabilidad.

(a) Suponga primero que $p(a)$ está dada por $C\mathrm{e}^{-a}$ para $a > 0$, donde C es la constante de normalización.

- Cambie el programa dado en clase para el caminante aleatorio en una dimensión pero con paso variable con esta densidad de probabilidad.
- Realice simulaciones para $N = 100$ y 10000 pruebas. Grafique $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ y $\langle (\Delta X)^2 \rangle = R^2$ como función de N. Después de realizar los ajustes correspondientes diga si se cumple $R^2 = A\,N$. ¿Cuánto vale la constate A para este caso?
- Similar que para el caso hecho en clase compruebe que la función de distribución de la coordenada x respecto al origen en N pasos sigue siendo Gaussiana

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \tag{1}$$

- Compare sus gráficas para corridas diferentes. ¿Qué podría hacer para mejorar sus resultados?

(b) Suponga ahora que $p(a)$ es una distribución uniforme entre 0.5 y 1.5. Responda lo mismo que en la parte (a)

(c) Asuma ahora que la densidad de probabilidad del tamaño del paso es $p(a) = C/a^2$ para $a \geq 1$, Determine la constante de normalización C.

- Realice simulaciones para $N = 100$ y 10000 pruebas. Grafique $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ y $\langle (\Delta X)^2 \rangle = R^2$ como función de N. ¿Se cumple $R^2 = A\,N$? Grafique R^2 como función de N, con los dos ejes en escala logarítmica. Describa lo que observa.
  Explique a que se deben las diferencias con el caso anterior y con el realizado en clases (+1 punto).
- Grafique la función de distribución de la coordenada x respecto al origen en N pasos. ¿En qué cambia respecto a la del punto anterior?
  ¿Cómo podría mejorar usted esta gráfica?
- Compare sus gráficas para corridas diferentes. ¿Qué podría hacer para mejorar sus resultados?

5. **A partir de parent[]**

En el archivo *parent.txt* hay un arreglo parent[] para un sistema de longitud $L = 1024$ a una fracción de ocupación p claramente menor que p_c. A partir de parent[] obtenga la distribución de tamaño de aglomerados n_s (grafíquela como función del tamaño de aglomerado s en escala loglog). n_s es el número de aglomerados de tamaño s por sitio de red. ¿Cuánto vale la fracción de ocupación p?

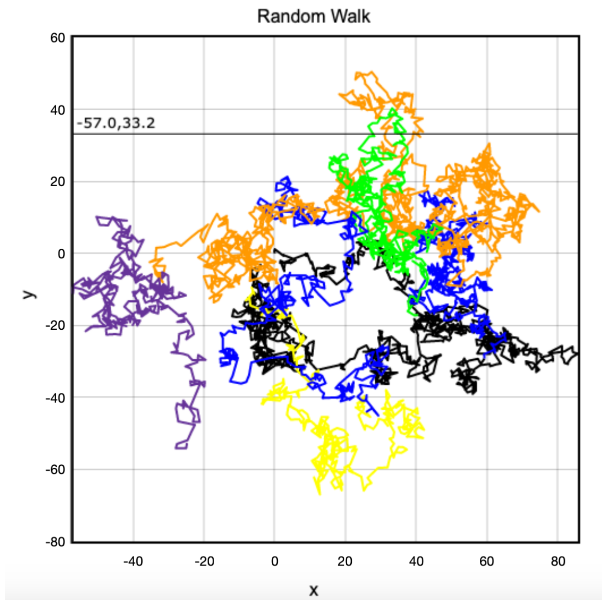

Figure 1: Distribución exponencial

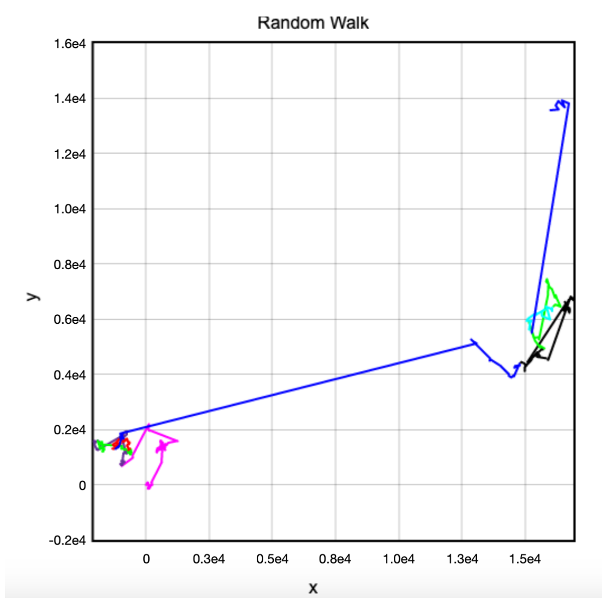

Figure 2: Distribución del tipo LevyFlight

---

6. **Percolación en una red triangular**

(a) Modifique su algoritmo de Newmann y Ziff para tratar la percolación en una red triangular. Garantice que su programa tenga como salida el tamaño promedio de aglomerado, S, y la probabilidad de que un sitio ocupado pertenezca al aglomerado expandido, P_∞, como función de la probabilidad de ocupación p, para varios L y promediado para varias realizaciones.

(b) Para al menos 100 realizaciones corra su programa para $L = 16, 32, 64, 128$. Construya las gráficas de S y P_∞ versus p para los L simulados.

(c) Observando estas gráficas, ¿cuál cree usted que es el umbral de percolación, p_c, de la red triangular? Explique. ¿Debería dar mayor o menor que el de la red cuadrada? Justifique.

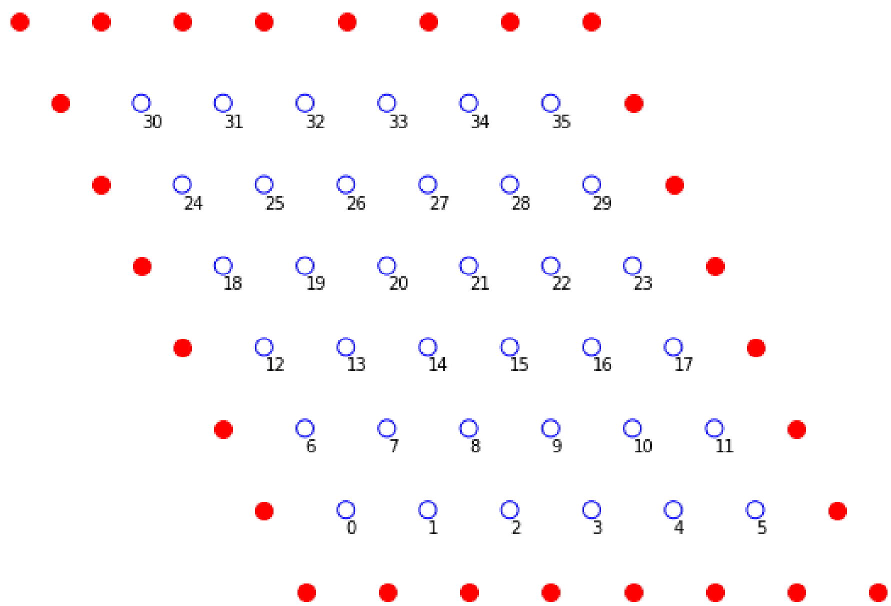

Figure 3: Red riangular

(d) De su corrida anterior, extraiga el máximo de S para cada L. Este máximo debería escalar con L como una ley de potencia, $S_{max} = AL^{\gamma/\nu}$, donde γ y ν son los exponentes críticos de S y la longitud de correlación, ξ, respectivamente. Consiga γ/ν.

(e) Haciendo simulaciones intensivas para una red cuadrada se obtiene que $\gamma/\nu \approx 1.79$. Compare el valor obtenido en la parte (a) con este valor. Su resultado debería dar mayor, menor o igual que el resultado de la red cuadrada. Explique.

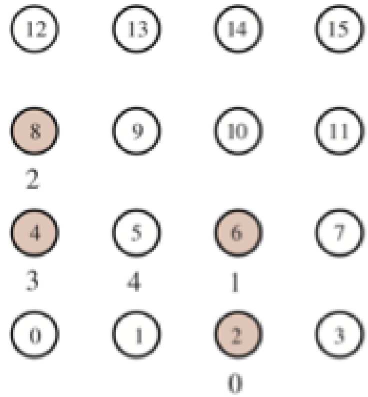

Figure 4: Red cuadrada

---

7. **Condiciones de borde periódicas**

Modifique las funciones *boundaries* y *vecino* para percolación en una red cuadrada de sitios con condiciones de borde periódicas. Esto significa que los sitios del primer renglón son vecinos de los sitios correspondientes en el último renglón (Ejemplo: 2 tiene como vecino por abajo a 14) y que los sitios de la primera columna son vecinos a los sitios correspondientes en la última columna (Ejemplo: 7 tiene como vecino por la derecha a 4). Corra sus nuevas rutinas para una red de tamaño $L = 5$ y muestre la matriz *nn*.

---

8. **Escalamiento de tamaño finito**

De las corridas que usted hizo en la pregunta 3 del Laboratorio 3 usted obtuvo como resultado el tamaño promedio de aglomerado $S(p)$ para varias longitudes y realizaciones. Obtenga el máximo de S para cada longitud y grafíquelo de manera conveniente para observar la ley de potencias $S_{max} = AL^{\gamma/\nu}$, donde γ y ν son los exponentes críticos de S y la longitud de correlación, ξ, respectivamente. Obtenga el valor γ/ν y compárelo con los valores mostrados en la presentación de percolación.

---

9. **Determinación de la dimensión fractal**

Estimar ahora la dimensión fractal del aglomerado percolativo pero utilizando "box counting". Haga la función que efectúa el conteo de cajas. Determine la dimensión fractal de un aglomerado proveniente del algoritmo HLA. ¿Por qué cree que obtener la dimensión fractal por conteo de cajas es mucho mejor que por el método de los anillos concéntricos?

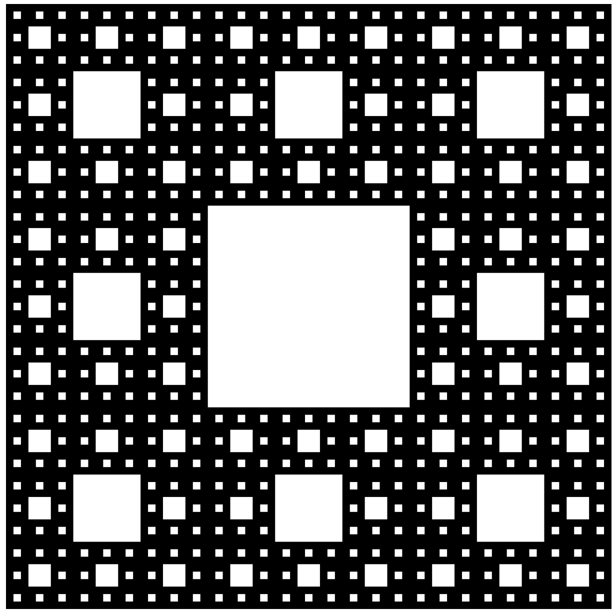

Figure 5: Sierpinski Carpet

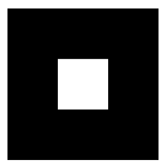

Figure 6: Generador Sierpinski Carpet

---

10. **Fractales regulares** (4 puntos)

(a) Implemente en python un algoritmo que construya al Sierpinski Carpet. Su programa debe usar funciones recursivas y debe tener como salida la imagen del fractal.

(b) Calcule la dimensión fractal del Sierpinski Carpet.

(c) Genere ahora una alfombra de Sierpinski pero donde el cuadro blanco del iniciador se encuentre en una posición al azar, cada vez que lo genere.

(d) Estime la dimensión fractal utilizando la función de Box Counting proporcionada. Compárela con el caso de la Alfombra de Sierpinski generada arriba. Explique.

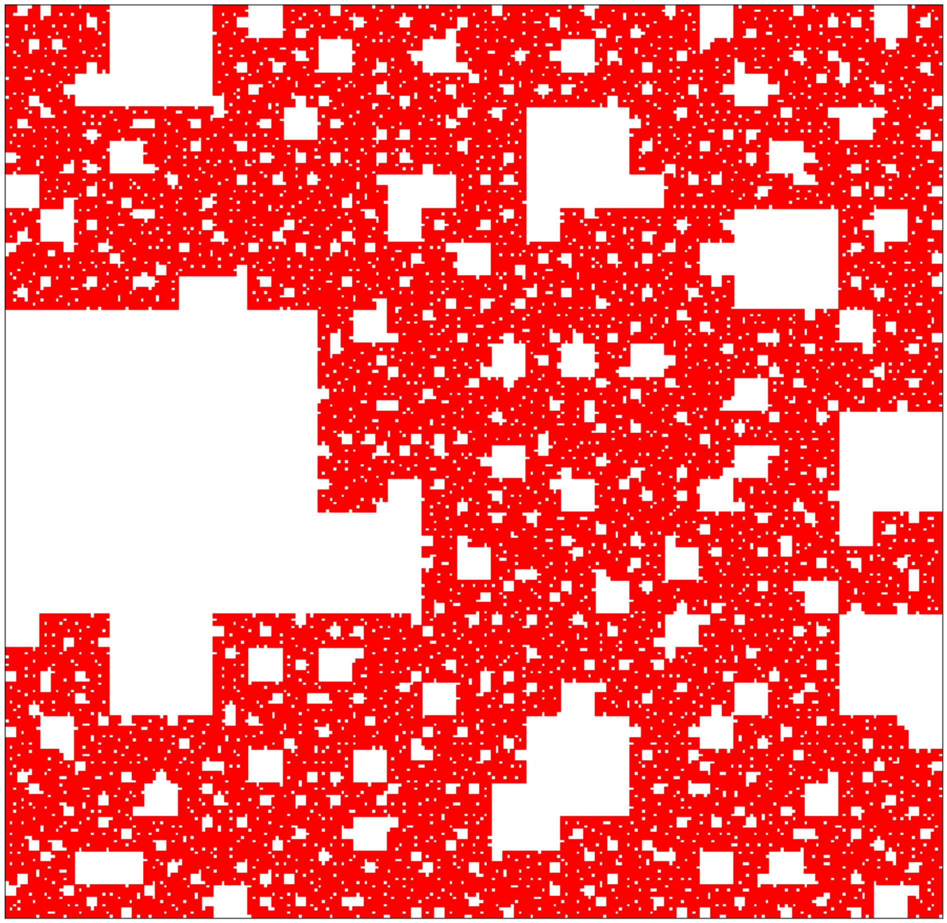

Figure 7: Sierpinski Carpet aleatorio