Jeux déterminés et théorème de Gale-Stewart

PARESY Alexandre

5 juin 2024

Table des matières

1 Introduction

La théorie des jeux est un domaine mathématique et informatique en pleine effervescence de nos jours pouvant se définir comme l'étude des stratégies d'agents défendant leur propre intérêt dans le cadre de jeux divers et variés. Nous allons nous intéresser en particulier aux jeux à deux joueurs à information parfaite. Nous allons d'abord définir les divers objets mathématiques que nous allons utiliser, puis nous allons effectuer une étude des jeux finis, et enfin nous allons nous intéresser au théorème de Gale-Stewart, qui effectue un raccordement très intéressant entre théorie des jeux et topologie.

2 Notations et définitions

2.1 Notations

Soit X un ensemble quelconque. Pour $x \in X^{\mathbb{N}}$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $a|m$ la restriction $(x_0, ..., x_{m-1})$ aux m premiers termes de la suite.
On note $< x_0, x_1, ..., x_n >$ l'ensemble des suites $x \in X^{\mathbb{N}}$ telles que $(x_0, ..., x_n) = x|n+1$, c'est-à-dire qui commencent par $(x_0, x_1, ..., x_n)$

2.2 Définitions

Nous nous intéressons dans ce TIPE aux jeux infinis à deux joueurs, I à II dits de Gale-Stewart, c'est-à-dire qu'ils vérifient les axiomes suivants :
• Chaque joueur dispose à tout instant des coups joués par l'adversaire et lui-même.
• Chaque joueur joue à tour de rôle, sans passer son tour.
• Le jeu ne contient aucune forme d'aléatoire (lancé de dé, etc...).

Remarque 1. *Au vu de la multitude de formalisations proposées dans différents ouvrages et revues, nous avons choisi une formalisation un peu différente de celle proposé dans le premier papier de Gale et Stewart en 1953.*

Définition 2.1. *Soit X un ensemble non vide et $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$.*
Une ***partie*** *est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, x_{2n} correspond au $n+1$-ème coup du joueur I et x_{2n+1} au n-iéme coup du joueur II.*
Une partie (x_n) est gagnée par le joueur I si et seulement si $(x_n) \in A$.
On note $G(X, A)$ un tel jeu.

Remarque 2. *Il est important de noter que dans cette définition, il ne peut pas y avoir d'égalité à la fin de la partie.*

Nous pouvons représenter les parties d'un jeu à deux joueur à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & x_0 \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dr] & & \cdots & x_{2n} \arrow[dr] & & x_{2n+2} & \cdots \\
\mathrm{II} : & & x_1 \arrow[ur] & & x_3 & & & x_{2n+1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1 – Partie $(x_0, x_1, ...)$

Le point essentiel de notre étude est de savoir si, oui ou non, l'un des deux joueurs dispose d'une stratégie qui va lui permettre de lui assurer la victoire peu importe les coups que l'adversaire joue.

Définition 2.2. *Une* ***stratégie*** *pour le joueur I est une application $\sigma : (X^2)^{<\mathbb{N}} \to X$ qui à toute suite finie de longueur paire $(x_0, ..., x_{2n-1})$ (qui correspond à un certain instant de la partie) associe le coup à jouer $\sigma((x_0, ..., x_{2n-1}))$.*
On définit de même une stratégie pour le joueur II : $\sigma : (X^2)^{<\mathbb{N}} \times X \to X$.

Si σ est une stratégie pour le joueur I et τ est une stratégie pour le joueur II, on note $\sigma * \tau$ la partie suivante où chaque joueur suit sa stratégie :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & \sigma(\emptyset) \arrow[dr] & & \sigma(\tau(\sigma(\emptyset))) \arrow[dr] & & \cdots \\
\mathrm{II} : & & \tau(\sigma(\emptyset)) \arrow[ur] & & \tau(\sigma(\tau(\sigma(\emptyset)))) &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2 – Partie où I et II jouent les stratégies σ et τ respectivement

Définition 2.3. *Soit $G(X, A)$ un jeu de Gale-Stewart. Une stratégie σ pour le joueur I est dite* ***gagnante*** *si pour toute stratégie τ, $\sigma * \tau \in A$. On définit de même la notion de stratégie gagnante pour le joueur II. Si l'un des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante, le jeu est dit* ***déterminé***.

Corollaire 2.3.1. *Soit $G(X, A)$ un jeu de Gale-Stewart. Alors I et II ne peuvent pas disposer tous les deux d'une stratégie gagnante.*

Démonstration. Si par l'absurde ils disposent respectivement de σ et τ gagnantes, alors $\sigma * \tau \in A$ et $\sigma * \tau \notin A$. Absurde. $\square$

2.3 Topologie produit

Notre but n'étant pas de faire un exposé sur la topologie produit, nous allons essayer de la présenter le plus succinctement possible.

Définition 2.4. *Soit X un ensemble quelconque. on dit que $(X, \mathcal{O})$ où $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ est un* ***espace topologique*** *lorsque :*
(i) : $X \in \mathcal{O}$ et $\varnothing \in \mathcal{O}$
(ii) : $\mathcal{O}$ est stable par union quelconque
(iii) : $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie
Les éléments de $\mathcal{O}$ sont alors appelés les ***ouverts*** *de X.*

Proposition 2.5. *Soit X un espace topologique. L'espace $X^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie $\mathcal{O}_\omega$ tel que :*

$$O \in \mathcal{O}_\omega \text{ ssi } O = \Pi_{j\in J} O_j \times \Pi_{j \notin J} X \text{ avec } J \text{ fini}$$

où $O_j \in \mathcal{O}$, munit bien $X^{\mathbb{N}}$ d'une topologie que l'on appelle topologie produit.

Par la suite, X va être muni de la topologie discrète donc la topologie produit engendrée va être l'ensemble des ouverts $O_{(a_0, a_1, ..., a_n)}$ tel que $a \in O_{(a_0, a_1, ..., a_n)}$ ssi $a|(n+1) = (a_0, a_1, ..., a_n)$, c'est-à-dire $O_{(a_0, a_1, ..., a_n)} =< a_0, a_1, ..., a_n >$

3 Jeux finis

3.1 Présentation

Une grande partie de la théorie des jeux est fondée sur l'étude de jeux finis ; nous allons voir que les jeux de Gale-Stewart permettent de modéliser une grande partie d'entre eux, y compris les échecs ou le jeu de Nim.

Définition 3.1. *Un jeu de Gale-Stewart $G(X, A)$ est dit* ***fini*** *d'ordre n si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in X^{\mathbb{N}}, a \in A \iff \forall a' \in < a|n >, a' \in A$*

Ainsi, les n premiers coups déterminent l'issue de la partie

Exemple 1. *Avec ces définitions, on peut voir le jeu d'échecs comme un jeu de Gale-Stewart fini. En effet, avec la règle "des 50 coups", une partie d'échecs ne peut avoir qu'au plus environ 7000 coups. En posant X l'ensemble des positions possibles du plateau (que l'on peut coder avec des entiers), et avec A l'ensemble des parties constituées uniquement de coups légaux jusqu'à ce que I fasse échec et mat puis d'éléments quelconques (la partie nulle est une défaite pour I), on a bien qu'après 7000 coups joués, on sait déjà si $(x_n) \in A$ ou pas.*

3.2 Détermination des jeux finis

Theorème 3.2. *Soit $G(X, A)$ un jeu de Gale-Stewart fini. Alors $G(X, A)$ est déterminé.*

Démonstration. Par récurrence sur n l'ordre du jeu.
• Initialisation : Pour le jeu trivial qui se termine à la position initiale, soit toutes les parties sont gagnantes pour I, auquel cas toutes les stratégies sont gagnantes pour I, soit toutes les parties sont gagnantes pour II.
• Hérédité : Supposons la propriété vraie pour tous les jeux finis d'ordre $n-1$. Soit $G(X,A)$ d'ordre n. Alors $\forall a \in X$, le jeu défini par $G_a(X,A_a)$ où $(u_n) \in A_a \iff (a,u_0,u_1,...) \in A$ est d'ordre $n-1$:

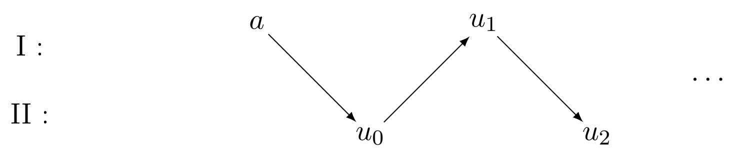

FIGURE 3 – Partie u_n où le coup a a été joué au préalable

(Intuitivement, c'est le même jeu sauf que le coup a a déjà été joué, donc il y a interversion entre I et II par rapport à $G(X,A)$).
Il est donc déterminé par hypothèse de récurrence.
• Si il existe a tel que II dispose une stratégie gagnante pour $G_a(X,A_a)$, alors la stratégie de $G(X,A)$ pour I qui consiste à jouer a puis à suivre la sus mentionnée stratégie (car les rôles sont inversés) est gagnante, donc le jeu est déterminé.
• Sinon, cela signifie que $\forall a \in X$, $G_a(X,A_a)$ est gagnant pour I, donc le $G(X,A)$ est gagnant pour II : il suffit, peu importe le coup a joué par I, de suivre la stratégie gagnante de I dans $G_a(X,A_a)$. G(X,A) est alors bien déterminé.

□

Ce théorème implique que tout jeu vérifiant les hypothèses est "résoluble", au sens où il est possible avec un ordinateur de savoir à partir de n'importe quelle position s'il est possible ou non de gagner. Il est cependant important de noter que l'algorithme naïf de parcours des états du jeu est en complexité exponentielle généralement, ce qui le rend peu pertinent dans la plupart des cas.

3.3 Détermination des jeux dénombrables

On s'intéresse à un autre cas particulier de détermination où cette fois A est dénombrable (et non pas le nombre de coups joués pour finir la partie comme auparavant), que l'on va pouvoir démontrer à l'aide d'un argument diagonal.

Theorème 3.3. *Soit $G(X,A)$ un jeu de Gale-Stewart où A est dénombrable. Alors $G(X,A)$ est déterminé.*

Démonstration. L'idée est similaire à l'argument diagonal de Cantor. On note A $= \{a^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ et on construit τ une stratégie gagnante pour II qui ne va pas dépendre des coups que joue I. Pour cela, on pose $\forall (x_0,...,x_{2n-1}) \in X^{<\text{inf}}, \tau((x_0,...,x_{2n-1})) = a_{2n}^{(n)} + 1$.
On est alors sûrs que la partie (x_n) ne peut pas appartienir dans A, donc c'est bien une stratégie gagnante pour II □

Remarquons que le cas A codénombrable est également déterminé en inversant les rôles. Ainsi, un jeu indéterminé doit non seulement être assez loin des jeux dans la vraie vie (on ne peut pas savoir qui gagne après un nombre fini de coups), mais l'ensemble A doit également être suffisamment "complexe".

4 Théorème de Gale-Stewart

4.1 Existence de jeux indéterminés

Il se trouve que pour un jeu infini, il est possible qu'il ne soit pas déterminé, donc qu'il soit impossible de prédire un vainqueur à l'avance. Ceci est la remarque fondamentale donnant de l'importance à la partie suivante.

Theorème 4.1. *Il existe un jeu $G(X, A)$ non déterminé.*

Démonstration. Soit S_I l'ensemble des stratégies de I. On admet pouvoir indexer S_I par J bien ordonné. On définit de même S_{II} dont on admet qu'il peut aussi être indexé par J (intuitivement, il y a à peu près autant de stratégies pour I que pour II).
Ainsi, on a $S_I = \{\sigma_\alpha, \alpha \in J\}$ et $S_{II} = \{\tau_\alpha, \alpha \in J\}$
Soit $(\sigma, \tau) \in S_I \times S_{II}$. On note : $P_I(\sigma) = \{\sigma * y, y \in X^{\mathbb{N}}\}$ et $P_{II}(\tau) = \{y * \tau, y \in X^{\mathbb{N}}\}$

On construit par induction un ensemble A indéterminable.
Soit 0 le plus petit élément de J. On choisit a_0 un élément quelconque de $P_{II}(\tau_0)$ et $b_0 \neq a_0$ un élément de $P_I(\sigma_0)$.
Soit $\beta \in J$. On suppose que $\forall \alpha < \beta$, a_α et b_α ont été choisis. Choisissons a_β et b_β.
On a une bijection (provenant de l'indexation) entre $\{b_\alpha, \alpha < \beta\}$ et $\{\alpha \in J, \alpha < \beta\}$.
Ainsi, par définition de J, $|\{b_\alpha, \alpha < \beta\}| < |J| = |S_I|$. L'ensemble $P_{II}(\tau_\beta) \backslash \{b_\alpha, \alpha < \beta\}$ est non vide. On choisit a_β dans cet ensemble.
De la même manière, $P_I(\sigma_\beta) \backslash \{a_\alpha, \alpha < \beta\}$ est non vide. On choisit b_β dans cet ensemble.
On note $A = \{a_\alpha, \alpha \in J\}$ et $B = \{b_\alpha, \alpha \in J\}$.
On peut commencer par remarquer que $A \cap B = \varnothing$ par définition des ensembles.
Montrons par l'absurde que $G(X, A)$ n'est pas déterminé.
Supposons que σ soit une stratégie gagnante pour I, soit $P_I(\sigma) \subset A$. Il existe donc $\alpha \in J$ tel que $\sigma = \sigma_\alpha$. Par définition de b_α, $b_\alpha \in P_I(\sigma_\alpha)$, donc $b_\alpha \in A$, absurde. De la même manière, il ne peut pas exister de stratégie gagnante pour II.
On a donc bien prouvé que A n'était pas déterminé.

□

4.2 Gale-Stewart

Nous munissons désormais X de la topologie discrète et $X^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit

Theorème 4.2 (Gale-Stewart)**.** *Supposons que A soit un ouvert. Alors $G(X, a)$ est déterminé*

Démonstration. On suppose que I n'a pas de stratégie gagnante.
Dans ce cas, il se trouve que peu importe la position $(x_0, x_1, ..., x_{2n})$ où c'est au tour de II de jouer, II peut "rester hors de danger" en restant dans une position où I ne peut pas gagner. Soit σ une stratégie du joueur I. On montre par récurrence sur n qu'il existe τ une stratégie pour II que I ne dispose pas de stratégie gagnante après son n-ième coup :
-Initialisation : Après que I ait joué le coup (x_0), le fait que I ne possède pas de stratégie gagnante implique qu'il existe un coup pour II tel qu'il n'existe pas de stratégie gagnante pour I après coup. On pose $\tau(x_0)$ un tel coup
-Hérédité de même
On montre maintenant que τ est une stratégie gagnante.
On pose $A =< a_0, ..., a_n >$ par définition de la topologie produit sur X Si $\sigma * \tau \in A$, alors par définition des ouverts de la topologie produit, on dispose d'un rang n à partir duquel $< x_0, ..., x_n > \subset A$, ce qui signifie que II a déjà perdu au moment où le n-ième coup a été joué, ce qui est absurde. Ainsi$\sigma * \tau \notin A$

□

On procède de même dans le cas où A est fermé en inversant les rôles de I et II.

5 Bibliographie

Références

[1] Serge GRIGORIEFF, Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés, Séminaire N. Bourbaki, 1977

[2] David GALE, F.M. Stewart, Infinite games with perfect information, Annals of mathematics Number 28, 1953

[3] Antoine DEQUAY, Théorie des jeux : Détermination des boréliens, 2019

[4] Lian B. Smythe, It's all fun and games..., 2012