Оценка вариограммы гауссовского случайного процесса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Случайным процессом $x(t) = x(\omega, t)$ называется семейство случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\omega \in \Omega, t \in T$, T — некоторое параметрическое множество.

Математическим ожиданием случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида

$$m(t) = Ex(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\, dF(x;t), t \in T. \tag{1}$$

Дисперсией случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида:

$$V(t) = V(x(t)) = E(x(t) - m(t))^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - m(t))^2\, dF(x;t). \tag{2}$$

Корреляционной функцией случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида:

$$r(t_1, t_2) = E(x(t_1)x(t_2)) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x(t_1)x(t_2)\, dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) \tag{3}$$

Ковариационной функцией случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида:

$$R(t_1, t_2) = E\{(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\, dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) \tag{4}$$

Случайный процесс $X(s), s \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, называется внутренне стационарным, если справедливы следующие равенства:

$$E\{X(s_1) - X(s_2)\} = 0, \quad V\{X(s_1) - X(s_2)\} = 2\gamma(s_1 - s_2), \tag{5}$$

где $2\gamma(s_1 - s_2)$ — вариограмма рассматриваемого процесса, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $X(s), s \in \mathbb{Z}$ — внутренне стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и неизвестной вариограммой.

$$2\gamma(h) = V\{X(s+h) - X(s)\},\ s, h \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику вида:

$$2\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (X(s+h) - X(s))^2, \quad h = \overline{0, n-1}. \tag{7}$$

Вычислим математическое ожидание введённой оценки

Таким образом оценка является несмещённой.

Далее, найдём второй момент:

$$cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = E((2\tilde{\gamma}(h_1) - E(2\tilde{\gamma}(h_1)))(2\tilde{\gamma}(h_2) - E(2\tilde{\gamma}(h_2)))) = \tag{8}$$

$$= E(\tfrac{1}{n-h_1} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1} ((x(s+h_1) - x(s))^2 - E((x(s+h_1) - x(s))^2)) \times \tag{9}$$

$$\times \tfrac{1}{n-h_2} \textstyle\sum_{t=1}^{n-h_2} ((x(t+h_2) - x(t))^2 - E((x(t+h_2) - x(t))^2))) = \tag{10}$$

$$= \tfrac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} cov((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) = \tag{11}$$

$$= [\text{по определению } cov(a,b) = corr(a,b)\sqrt{V(a)V(b)}] = \tag{12}$$

$$= \tfrac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} corr((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) \times \tag{13}$$

$$\times \sqrt{(V((x(s+h_1) - x(s))^2) V((x(t+h_2) - x(t))^2))} = \tag{14}$$

$$= [\text{используем равенство (a) со страницы 2, TODO: добавить ссылку на источник}] = \tag{15}$$

$$= \tfrac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} corr((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) \tag{16}$$