

## Todo list

■ Проверить, какие ещё озёра входят в Нарочанскую группу . . . . .	2
■ Добавить ссылки . . . . .	3
■ Вставить ссылку . . . . .	6
■ Ссылка на литературу . . . . .	7
■ Ссылка на литературу . . . . .	8
■ Ссылка на литературу . . . . .	8
■ Разобраться с нумерацией ссылки . . . . .	8
■ Ссылки на литературу . . . . .	9
■ Если вводить определение для теоретических частот $n'_i$ , то понадобится много дополнительных понятий. Нужно либо вводить в теории ранее, либо как-либо видоизменять критерий. . . . .	9
■ Ссылка . . . . .	10
■ Ссылки на литературу . . . . .	11
■ Дисперсия: $\frac{1}{n}$ или $\frac{1}{n-1}$ , из методички должно быть $\frac{1}{n}$ и как следствие возникает путаница. Может тогда лучше сразу определять не улучшенные формулы для дисперсии? . . . . .	11
■ Ссылка . . . . .	13
■ т.е. знать, что внутри . . . . .	13
■ Sturges . . . . .	15
■ не очень хорошее объяснение . . . . .	16
■ Добавить в теорию тест Шапиро-Уилка . . . . .	18

## Введение

Данная работа посвящена статистическому анализу, обработке и исследованию реальных временных рядов. В настоящее время, выбор такой направленности соответствует необходимости в проведении анализа различных длительных наблюдений с математической и, в частности, статистической точек зрения. Поскольку наличие даже большого количества информации, полученной в процессе каких-либо наблюдений, не всегда способно раскрыть те или иные причины и следствия, представленные в конкретном случае. Наличие информации, без последующего всестороннего анализа, также не может раскрыть все скрытые проблемы и свойства. В свою очередь, математический аппарат и его конкретные прикладные части могут позволить не только проанализировать сложившуюся ситуацию, но и постараться дать некоторый прогноз по состоянию в будущем.

В качестве исследуемого материала в данной работе используются база данных с реальными наблюдениями, зафиксированными на озёрах, входящих в Нарочанский национальный парк, за период с 1955 по 2012 годы, полученная от учебно-научного центра «Нарочанская биологическая станция им. Г.Г.Винберга». В представленной базе данных присутствовали наблюдения за следующими озёрами:

- Баторино
- Нарочь
- Мястро

Из представленных озёр для исследования было выбрано озеро Баторино. Данное озеро является уникальным природным объектом, изучение которого позволяет решать проблемы экологии не только в региональном, но и глобальном масштабе. Оно располагается у самой границы города Мядель и входит в состав Нарочанской озёрной группы. Кроме представленных ранее озёр, в эту группу также входят озеро Белое и другие менее крупные озера.

В данной работе исследуемым показателем для озера Баторино был избран показатель температуры воды. Температура воды принадлежит к числу наиболее важных и фундаментальных характеристик любого водоёма. Её изменение во времени является одним из важнейших факторов, отражающих изменения в окружающей среде. Также нужно отметить, что исследование температуры воды является актуальным, вследствие зависимостей свойств воды от температуры. Так как данная характеристика оказывает сильное влияние на плотности воды, растворимость в ней газов, минеральных и органических веществ, в том числе одни из важнейших характеристик для обитания в ней живых организмов: растворимость и насыщенность воды кислородом. В частности от температуры воды в значительной мере зависит жизнедеятельность рыб: их распределение в водоёме, питание, размножение. К тому же температура тела рыб, как правило, не превышает температуры окружающей их воды. В то же время, любой водоём как экосистема является средой обитания различных, отличных от рыб, организмов. И поэтому отслеживание всех изменений и влияние этих изменений на их жизнь является крайне важным не только в экологическом смысле, но и в биологическом. Как следствие вышесказанного, изменения

Проверить, какие ещё озёра входят в Нарочанскую группу

температуры с течением времени следует считать одним из важнейших индикаторов изменений, происходящих в экосистеме озера. А исследование данного показателя, в свою очередь, является важнейшим в исследовании различных проблем, связанных с водоёмами. В подтверждение актуальности исследования представленной темы можно привести работы.

В настоящее время, в условиях глобального потепления и крайне нестабильной климатической ситуации, наблюдения за состоянием озёрных экосистем представляют особую ценность как с научной, так и с практической стороны, поскольку только на основе таких наблюдений возможно выделить последствия антропогенного воздействия на фоне изменения природных факторов. А также получить некоторые заключения по экологической обстановке в определенной области.

Изначально, для решения этой задачи был выбран пакет **STATISTICA**. Данный программный пакет — это универсальная интегрированная система, предназначенная для статистического анализа и визуализации данных, управления базами данных и разработки пользовательских приложений, содержащая широкий набор процедур анализа для применения в научных исследованиях, технике, бизнесе, а также специальные методы добычи данных. В системе **STATISTICA** реализовано множество мощных языков программирования, которые снабжены специальными средствами поддержки. С их помощью легко создаются законченные пользовательские решения и встраиваются в различные другие приложения или вычислительные среды. В пакете представлены несколько сотен типов графиков 2D, 3D и 4D, матрицы и пиктограммы; предоставляется возможность разработки собственного дизайна графика. Средства управления графиками позволяют работать одновременно с несколькими графиками, изменять размеры сложных объектов, добавлять художественную перспективу и ряд специальных эффектов, разбивку страниц и быструю перерисовку. Например, 3D-графики можно вращать, накладывать друг на друга, сжимать или увеличивать.

Прежде всего следует отметить преимущества этого пакета перед программой **Excel**. Во-первых, **STATISTICA** является специализированным пакетом по обработке статистических данных, вследствие чего этот процесс намного быстрее аналогичного в **Excel**. Во-вторых, в выбранном пакете присутствуют все необходимые для анализа данных инструменты и формулы, многое из которого нет в **Excel**. Также пакет обладает широкими графическими возможностями, позволяет выводить информацию в виде различных типов графиков (включая научные, деловые, трёхмерные и двухмерные графики в различных системах координат, специализированные статистические графики — гистограммы, матричные, категоризированные графики и прочие).

Но пакет **STATISTICA**, являясь по сути узкоспециализированным пакетом статистического анализа, наравне с преимуществами имеет и свои недостатки. Главным из которых, на мой взгляд, является то, что **STATISTICA** — коммерческий продукт. И как следствие имеет закрытую платформу, закрытый исходный код и при этом является достаточно дорогим. Также, к недостаткам я бы отнёс довольно громоздкий интерфейс, и взаимодействие с программой только на уровне кнопок и таблиц. Недостаток в гибкости и открытости в некоторых ситуациях ограничивает возможности анализа. С другой стороны, такой подход позволяет быстро получать различные результаты без длительного изучения самого продукта. Но, объективно оценив все преимущества и недостатки, следует отметить, что пакет **STATISTICA** не является оптимальным, во всестороннем смысле, выбором.

Существует множество различных программных пакетов, с помощью которых можно осуществлять статистический анализ. Приведём основные из них:

- Excel

- STATISTICA
- SAS
- JMP
- SPSS
- SPlus
- R
- Mathematica
- Matlab

Каждый из представленных программных пакетов имеет свои преимущества и недостатки. Следует сразу отметить, что такие пакеты как **Mathematica** и **Matlab**, которые являются по сути общематематическими, хоть и имеют статистические модули, но все же не являются специализированным решением. Первые два из списка — **Excel** и **STATISTICA** — были рассмотрены ранее. Если вкратце подвести итог, то **Excel** следует рассматривать скорее как инструмент работы с таблицами, а **STATISTICA** является платным и довольно громоздким пакетом, сходным по представлению данных (в таблицах) с **Excel**. Каждый из оставшихся в списке пакетов заслуживает отдельного рассмотрения. Но если рассмотреть весь этот список целиком, то у каждого пакета, за исключением одного — пакета **R** — можно выделить одну общую черту: все они являются проприетарными и являются платными. И каждая новая версия продукта, при необходимости в оной, нуждается в приобретении. На самом деле, данную черту можно трактовать и как недостаток, и как преимущество. Следует отметить, что крупные коммерческие компании, заинтересованные в статистическом анализе, предпочитают такие пакеты как **SAS**, **JMP**, **SPSS**, **SPlus**. Поскольку покупая тот или иной продукт, компания получает гарантию в точности полученных с помощью пакета результатов, а также наличие оплаченной технической поддержке. Тогда как *open-source* продукты предоставляются в комплекте "как есть". Но в совокупности с открытостью исходного кода и наличием огромных сообществ, отсутствие гарантии является слабым недостатком, так как у пользователя всегда есть возможность получить последнюю версию продукта, техническую помощь, или вовсе предложить свою помощь в разработке. Поэтому отдельные исследователи всё чаще и чаще выбирают пакет **R**.

Именно согласно этим соображениям, в качестве инструмента исследования в данной работе был выбран пакет **R**. Рассмотрим его подробнее. **R** является функциональным интерпретируемым языком программирования с динамической типизацией данных для статистической обработки данных и работы с графикой, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта *GNU*. Язык создавался как аналогичный языку **S**, разработанному в *Bell Labs* и является его альтернативной реализацией, хотя между языками есть существенные отличия, но в большинстве своём код на языке **S** работает в среде **R**.

**R** широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ. Доступен для широкого числа операционных систем: *Unix/Linux*, *Microsoft Windows*, *Mac OS X*.

**R** поддерживает широкий спектр статистических и численных методов и обладает хорошей расширяемостью с помощью пакетов. Пакеты представляют собой библиотеки для работы специфических функций или специальных областей применения. В базовую поставку **R** включен основной набор пакетов, а всего по состоянию на момент написания данной работы доступно более 5000 пакетов, которые распространяются через

*CRAN* (акроним *Comprehensive R Archive Network*). С помощью них можно значительно расширить возможности для статистического анализа. Причем многие из них написаны самими пользователями. Как следствие этого, при отсутствии какого-либо функционала, всегда можно реализовать его посредством создания своего пакета или просто функции. Следует также отметить возможность использования напрямую функций, написанных на языках программирования *C*, *C++*, *Java*.

Ещё одной особенностью **R** являются графические возможности, заключающиеся в возможности создания для публикаций качественной графики, которая может включать в себя математические символы. Динамические и интерактивные графики также доступны в качестве дополнительных пакетов.

**R** имеет свой собственный L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-подобный формат документации, который может быть использован для всестороннего документирования, как в режиме онлайн, в различных вариантах, так и в бумажном носителе.

Следует также отметить, что уже упомянутые ранее программные пакеты статистического анализа, на данный момент почти все имеют поддержку кода, написанного на **R**. Это о многом говорит, и уже не стоит удивляться, если известный коммерческий продукт в очередном выпуске добавит аналогичную поддержку.

Два-три раза в год выходит свободно-распространяемый информационный журнал *R Journal*. Он содержит информацию по статистической обработке данных и разработке, что может быть интересно как пользователям, так и разработчикам **R**.

Одна из самых популярных конференций, посвящённых языку — *useR!* (*The R User Conference*), проходит ежегодно, начиная с 2004 года, собирает специалистов в различных областях.

Начиная с 2009 года каждой весной в Чикаго проводится конференция, посвящённая применению **R** в финансах (*R/Finance: Applied Finance with R*). В 2013 году прошла первая конференция, посвящённая применению **R** в страховании (*R in Insurance*).

# 1 Определения и вспомогательные результаты

Вставить  
ссылку

В данном параграфе приведём основные теоретические понятия из [1], которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть дана некоторая выборка объёма  $n$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Введём некоторые основные *описательные статистики*.

## Характеристики положения

*Среднее арифметическое значение* является показателем центрального положения, вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

*Квантилем*  $Q_p$  порядка  $p$ ,  $0 < p < 1$ , называется такое значение признака в упорядоченной совокупности, которое делит её в отношении  $p : (1 - p)$ . К числу наиболее часто применяемых квантилей относятся:

1. *медиана* ( $p = \frac{1}{2}$ );
2. *квартиль* ( $p = \frac{1}{4}$ ).

Пусть выборка упорядочена по возрастанию:  $x_1^*, \dots, x_n^*$ . Тогда *медиана* вычисляется по формуле:

$$Me = \begin{cases} x_{l+1}^* & , \quad n = 2l + 1 \\ \frac{x_l^* + x_{l+1}^*}{2} & , \quad n = 2l \end{cases}$$

## Характеристики рассеяния

Наиболее распространёнными мерами рассеяния являются *размах*, *дисперсия* и *среднеквадратическое отклонение*.

*Размах* определяется по формуле:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

*Квартильный размах* — интервал, содержащий медиану, в который попадает 50% выборки, вычисляется по формуле:

$$R_Q = Q_3 - Q_1,$$

где  $Q_3$ ,  $Q_1$  — соответственно, верхний и нижний квартили.

Для вычисления *выборочной дисперсии* используется несмещённая оценка, которая вычисляется по формуле:

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Оценка *стандартного отклонения* вычисляется по формуле:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Значение стандартного отклонения можно представить, как среднее расстояние, на котором находятся элементы от среднего элемента выборки, и оно показывает, насколько хорошо среднее значение описывает всю выборку.

В качестве меры относительного разброса данных используют *коэффициент вариации*:

$$V = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Данная мера показывает, какую долю среднего значения этой величины составляет её средний разброс. На основе значения коэффициента вариации, можно сделать вывод об однородности выборки:

- Если  $V < 33\%$  — принято считать, что выборка однородна;
- Если  $V > 33\%$  — не однородна.

*Стандартная ошибка* среднего значения вычисляется как:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{n}.$$

Данная величина оценивает выборочную изменчивость среднего значения, приближённо показывая, насколько выборочное среднее отличается от среднего генеральной совокупности.

## Характеристики формы распределения

Характеристики формы распределения применяются для выражения особенностей формы распределения.

*Выборочный коэффициент асимметрии* определяется следующим образом:

$$A_S = \frac{n \sum (x_i - \bar{x})^3}{(n - 1)(n - 2)s_x^3}. \quad (1.1)$$

Данный коэффициент характеризует степень смещения вариационного ряда относительно среднего значения по величине и направлению. В симметричном распределении коэффициент асимметрии равен нулю.

- Если  $|A_S| > 1$ , то распределение является в значительной степени асимметричным.
- Если  $\frac{1}{2} < |A_S| \leq 1$ , то распределение незначительно асимметрично.
- Если  $|A_S| \leq \frac{1}{2}$ , то распределение является близким к симметричному.

*Стандартная ошибка выборочного коэффициента асимметрии* (1.1) вычисляется по формуле:

$$SES = \sqrt{\frac{6n(n - 1)}{(n - 2)(n + 1)(n + 3)}},$$

где  $n$  — объём выборки.

Ссылка на литературу

Для того, чтобы сделать в дальнейшем какие-либо выводы по значению коэффициента асимметрии введём *тестовую статистику*:

$$Z_{A_S} = \frac{A_S}{SES}.$$

Решающим значением для *тестовой статистики*  $Z_{A_S}$  является число, приблизительно равное 2.

- Если  $|Z_{A_S}| \geq 2$ , то асимметрия существенная и распределение признака в генеральной совокупности несимметрично;
- Если  $|Z_{A_S}| < 2$ , то асимметрия несущественна.

Данная тестовая статистика показывает: насколько существенным является коэффициент асимметрии данной выборки по отношению к генеральной совокупности.

*Выборочный коэффициент эксцесса* вычисляется по формуле:

$$K = \frac{n(n+1) \sum (x_i - \bar{x})^4 - 3(\sum (x_i - \bar{x})^2)^2 (n-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)s_x^4}.$$

В случае нормального распределения *коэффициент эксцесса* равен нулю. Положительный *коэффициент эксцесса* характеризует крутость (островершинность) кривой распределения относительно нормального распределения. Отрицательный, в свою очередь, пологость.

*Стандартная ошибка коэффициента эксцесса* может быть вычислена по формуле:

$$SEK = 2(SES) \sqrt{\frac{(n^2 - 1)}{(n-3)(n+5)}},$$

где  $n$  — объём выборки.

По аналогии с коэффициентом асимметрии, введём также *тестовую статистику*  $Z_K$  для коэффициента эксцесса.

$$Z_K = \frac{K}{SEK}.$$

Решающим значением для *тестовой статистики*  $Z_K$  является 2.

- Если  $|Z_K| > 2$ , то коэффициент эксцесса является значимым;
- Если  $|Z_K| \leq 2$ , то коэффициент эксцесса не является значимым и нельзя делать никаких заключений о коэффициенте эксцесса генеральной совокупности.

## Выборочный коэффициент корреляции

Для оценки тесноты линейной связи между признаками используется парный линейный *коэффициент корреляции Пирсона*, который определяется формулой:

$$r_{xt} = \frac{s_{xt}}{s_x s_t}, \quad (1.2)$$

где  $s_{xt} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})(t_i - \bar{t})}$ ,  $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $s_t = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (t_i - \bar{t})^2}$ .

Коэффициент корреляции характеризуется силой связи и направлением. Если  $-1 \leq r_{xt} < 0$ , то наблюдается отрицательная корреляция, если  $r_{xt} = 0$  — признаки независимы, и если  $0 < r_{xt} \leq 1$ , то наблюдается положительная корреляция.

Для описания величины *коэффициента корреляции* используются градации, обозначенные в [таблице 1](#), где в качестве значения коэффициента корреляции указано  $|r_{xt}|$ .



Таблица 1.1 — Значения коэффициента корреляции

Значение	Интерпретация
0—0.2	Очень слабая корреляция
0.2—0.5	Слабая корреляция
0.5—0.7	Средняя корреляция
0.7—0.9	Высокая корреляция
0.9—1	Очень высокая корреляция

## Критерий значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть нулевая гипотеза состоит в том, что коэффициент корреляции генеральной совокупности равен нулю, то есть  $H_0 : r_{xy} = 0$ , при конкурирующей гипотезе  $H_1 : r_{xy} \neq 0$ .

Для того чтобы при заданном уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0$ , надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k = n - 2$ , где  $n$  — число пар значений выборки, найти критическую точку  $t_{\text{кр}}(\alpha, k)$  для двусторонней критической области.

- Если  $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
- Если  $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$  — нулевую гипотезу отвергают.

Величина  $T_{\text{набл}}$  при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с  $k = n - 2$  степенями свободы. Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а исследуемые переменные коррелированы.

Приведём некоторые критерии, которые понадобятся в нашем исследовании. Для этого воспользуемся литературой.

Ссылки на литературу

## Критерий $\chi^2$

Если вводить определение для теоретических частот  $n'_i$ , то понадобится много дополнительных понятий. Нужно либо вводить в теории ранее, либо как-либо видоизменять критерий.

Пусть нулевая гипотеза  $H_0$  состоит в том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу  $H_0$ : генеральная совокупность распределена нормально, необходимо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

и по таблице критических точек распределения  $\chi^2$ , по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k = s - 3$  найти критическую точку  $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$ , где  $n_i$  — эмпирические частоты, а  $n'_i$  — теоретические,  $s$  — число групп (частичных интервалов) выборки.

- Если  $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$  — нет оснований отвергать нулевую гипотезу.
- Если  $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$  — нулевую гипотезу отвергают.

## Критерий Колмогорова—Смирнова

Пусть нулевая гипотеза  $H_0$  состоит в том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Критерий заключается в том, что можно сравнивать эмпирическую функцию распределения  $F^*(x)$  с гипотетической  $F(x)$  и, если мера расхождения между ними мала, то считать справедливой гипотезу  $H_0$ .

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу  $H_0$ : генеральная совокупность распределена нормально, необходимо вычислить статистику Колмогорова-Смирнова

$$\lambda = \sqrt{n} \max_x |F^*(x) - F(x)|$$

и по таблице критических точек, по заданному уровню значимости  $\alpha$  найти критическую точку  $\lambda_{\text{кр}}(\alpha)$ .

- Если  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}(\alpha)$  — нулевую гипотезу принимают.
- Если  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}(\alpha)$  — нулевую гипотезу отвергают.

## Критерий Граббса

Критерий Граббса основан на предположении о нормальности исходных данных. То есть, перед применением данного критерия необходимо убедиться, что данные могут быть в разумных пределах аппроксимированы нормальным распределением.

Критерий Граббса обнаруживает один выброс за одну процедуру проверки. Найденный выброс исключается из выборки и процедура проверки критерия проверяется пока не будут исключены все выбросы. Не рекомендуется использовать данный критерий для выборок объёмом ниже 7.

Данный критерий заключается в проверке нулевой гипотезы  $H_0$ : в выборке нет выбросов, при конкурирующей гипотезе  $H_1$ : в выборке есть по крайней мере 1 выброс.

Статистика критерия Граббса определяется следующим образом:

$$G = \frac{\max |y_i - \bar{y}|}{s_y},$$

где  $\bar{y}$  — выборочное среднее,  $s_y$  — выборочное стандартное отклонение.

Гипотеза  $H_0$  отклоняется (значение  $y_i$  является выбросом) при заданном уровне значимости  $\alpha$ , если

$$G > \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t^2_{(\frac{\alpha}{2n}, n-2)}}{n-2 + t^2_{(\frac{\alpha}{2n}, n-2)}}},$$

где  $n$  — объём выборки,  $t_{(\frac{\alpha}{2n}, n-2)}$  является критическим значением t-распределения с  $n-2$  степенями свободы и уровнем значимости  $\frac{\alpha}{2n}$ .

# Характеристики линейной регрессии

Ссылки на литературу

Для введения следующих понятий воспользуемся.

Предположим, что уравнение регрессии имеет вид:  $x^*(t) = at + b$ . Тогда *объяснённая уравнением регрессии дисперсия*, характеризующая изменчивость линии регрессии относительно среднего значения, вычисляется по формуле:

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x^*(t_j) - \bar{x})^2, \quad (1.3)$$

где  $x$  — выборка,  $\bar{x}$  — выборочное среднее.

*Остаточная дисперсия*  $\overline{D}$ , характеризующая отклонение уравнения регрессии от результатов наблюдений  $x$  вычисляется по формуле:

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - x^*(t_j))^2. \quad (1.4)$$

Тогда, *общая дисперсия* введённой ранее выборки  $x$  будет равна сумме 1.3 и 1.4:

$$s_x^2 = \overline{D} + \overline{\sigma^2}.$$

*Дисперсия отклонения* вычисляется по формуле:

$$\sigma_\varepsilon = s_x^2(1 - r_{xx}^2),$$

где  $r_{xx^*}$  — коэффициент корреляции рядов  $x$  и  $x_*$

*Стандартные случайные погрешности* параметров  $a$  и  $b$ :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_\varepsilon}{s_x \sqrt{n-2}}, \quad \sigma_b = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2}},$$

Дисперсия:  $\frac{1}{n}$  или  $\frac{1}{n-1}$ , из методички должно быть  $\frac{1}{n}$  и как следствие возникает путаница. Может тогда лучше сразу определять не улучшенные формулы для дисперсии?

где  $s_x$ ,  $s_x^2$  — стандартное отклонение и дисперсия соответственно.

*Коэффициент детерминации* показывает долю дисперсии исходного ряда, которая описывается моделью регрессии, вычисляется по формуле:

$$\eta_{x(t)}^2 = \frac{\overline{\sigma^2}}{s_x^2}.$$

Применяя неравенство  $\eta_{y(x)}^2 - r_{xy}^2 \leq 0.1$ , можно сделать вывод об отклонении от линейности.

## Критерий значимости коэффициентов регрессии

Пусть нулевая гипотеза заключается в равенстве нулю коэффициентов линейной регрессии  $H_0 : a = 0, b = 0$ .

Для проверки нулевой гипотезы  $H_0 : a = 0, b = 0$  необходимо рассчитать критерии Стьюдента  $T$ :

$$T_a = \frac{a}{\sigma_a}, \quad T_b = \frac{b}{\sigma_b},$$

по статистической таблице определить  $t_{кр}(k, \alpha)$  — критическую точку  $t$ -распределения Стьюдента при заданном уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $k = n - 2$ .

- Если  $|T_a| > t_{кр}(k, \alpha)$ , то нулевая гипотеза отвергается и отклонение  $a$  от нуля носит неслучайный характер, и, следовательно, величина  $a$  значима;
- Если  $|T_b| > t_{кр}(k, \alpha)$ , то нулевая гипотеза отвергается, отклонение  $b$  от нуля носит неслучайный характер, и, следовательно, величина  $b$  значима.

## Критерий Фишера

Данный критерий используется для оценки адекватности регрессионной модели. Пусть выдвинута нулевая гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 : \overline{\sigma^2} = \frac{\overline{D}}{n-2}.$$

Для проверки данной гипотезы используется F-критерий Фишера. Необходимо вычислить дисперсионное отношение

$$F_{\text{крит}} = \frac{(n-2)\overline{\sigma^2}}{\overline{D}},$$

которое сравнивается с  $F_{\text{табл}}(v_1, v_2, \alpha)$  при заданном уровне значимости  $\alpha$ , и степенях свободы  $v_1 = 1, v_2 = n - 2$ .

Если  $F_{\text{крит}} > F_{\text{табл}}$ , то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, что означает в рассматриваемом случае адекватность регрессионной модели.

## 2 Обработка реального временного ряда с помощью R

### 2.1 Вычисление основных описательных статистик

В качестве исходных данных примем выборку из полученной от учебно-научного центра базы данных, путём отбора наблюдений в июле месяце за период с 1975 по 2012 год. Выборка представлена в приложении А в таблице А.1. Графически исходные данные представлены на рисунке 2.1.

Ссылка

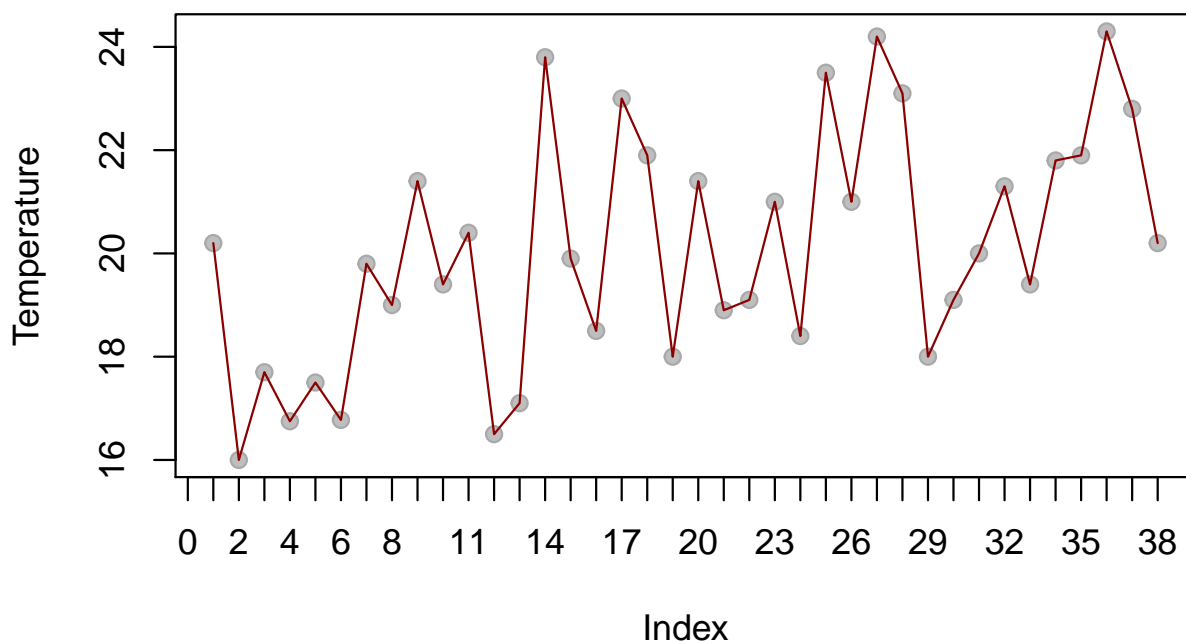


Рисунок 2.1 — График исходных данных.

Начнём исследование временного ряда с вычисления описательных статистик. R предоставляет в пакете *base* такие функции как: *var* — дисперсия, *mean* — среднее, *sd* — стандартное отклонение, *median* — медиана, *quantile* — квантили, *range* — размах, *min*, *max*. Также, в различных пакетах можно найти другие интересующие функции, как статистические, так и математические. Но в целях удобства, компактности и контроля за функциональностью был написан модуль *dstats*. Данный модуль позволяет вычислять все необходимые в данной работе описательные статистики.

т.е. знать,  
что внутри

Для получения всех описательных статистик воспользуемся функцией *dstats.describe*, в качестве параметра передадим вектор, содержащий наблюдаемые температуры воды. Полученные результаты представлены в таблице 2.1.

```
> xtable(dstats, caption="Описательные статистики для наблюдаемых темпера-  
тур label="table:dstats")
```

	Значение
Среднее	20.08
Медиана	19.95
Нижний квартиль	18.42
Верхний квартиль	21.70
Минимум	16.00
Максимум	24.30
Размах	8.30
Квартильный размах	3.28
Дисперсия	5.24
Стандартное отклонение	2.29
Коэффициент вариации	26.10
Стандартная ошибка	0.37
Асимметрия	0.14
Ошибка асимметрии	0.38
Эксцесс	-0.85
Ошибка эксцесса	0.75

Таблица 2.1 — Описательные статистики для наблюдаемых температур

```
> sink()
```

Рассмотрим подробнее некоторые полученные статистики.

Как видно из таблицы, *средняя* температура в июле месяце за период с 1975 по 2012 составляет приблизительно 20°C. При этом *размах* температур равен 8.3°C. *Дисперсия* в данном случае равна 5.24.

*Стандартное отклонение*, вычисляется функцией `dstats.std.dev` оказалось равным приблизительно 2.3. Полученное значение не велико, а значит можно сказать, что среднее значение хорошо описывает выборку. И что в среднем, температура воды озера Баторино отличается от полученной ранее *средней* температуры на 2.3°C.

*Коэффициент вариации*, вычисляется функцией `dstats.coef.var` в нашем случае равен 26.1%. Из этого следует, что выборку можно считать однородной, так как полученное значение является меньшим 33%.

*Стандартная ошибка среднего значения*, вычисляется функцией `dstats.std.error`, равна 0.37.

*Коэффициент асимметрии* — мера симметричности распределения, вычисляется функцией `dstats.skew`. Полученное значение: 0.14. Данное значение говорит о незначительном коэффициенте асимметрии выборки. То есть о том, что выборочное распределение можно считать близким к симметричному.

*Стандартная ошибка коэффициента асимметрии*, вычисляется функцией `dstats.std.error.skew`, равна 0.38.

*Коэффициент эксцесса*, вычисляется функцией `dstats.kurtosis`, в рассматриваемом случае равен -0.85. Так как коэффициент эксцесса нормального распределения равен 0, то в данном случае можно говорить о пологости пика распределения выборки по отношению к нормальному распределению.

*Стандартная ошибка коэффициента эксцесса*, вычисляется с помощью функции `dstats.std.error.kurtosis`, равна 0.75.

По данному ранее определению тестовых статистик для коэффициента асимметрии и эксцесса, проверим значимость полученных значений для генеральной совокупности. Для

этого в модуле *dstats* реализованы функции *dstats.test.skew* и *dstats.test.kurtosis*:

Полученная тестовая статистика для коэффициента асимметрии:

$$Z_{As} = \frac{A_S}{SES} = 0.3630143.$$

Данное значение попадает под случай  $|Z_{As}| \leq 2$ , а значит, выборочный коэффициент асимметрии не является значимым. Из чего, в свою очередь, следует, что по нему нельзя судить о коэффициенте асимметрии генеральной совокупности.

Полученная тестовая статистика для коэффициента эксцесса:

$$Z_K = \frac{K}{SEK} = -1.135476.$$

Данное значение попадает под случай  $|Z_K| \leq 2$ , а значит, в данном случае выборочный коэффициент эксцесса не является значимым и нельзя ничего сказать о коэффициенте эксцесса генеральной совокупности.

## 2.2 Исследование статистических данных

В **R** можно найти различные пакеты, позволяющие строить разнообразные гистограммы, диаграммы рассеяния, вероятностные графики, линейные графики, диаграммы диапазонов, размахов, круговые диаграммы, столбчатые диаграммы, последовательные графики и т.д., позволяющие увидеть специфику данных.

В пакет *base* для визуализации входят такие функции как:

- *plot*: общая функция для построения графиков  $y(x)$ ;
- *barplot*: столбцовые диаграммы;
- *boxplot*: график “ящик-с-усами”;
- *hist*: гистограммы;
- *pie*: круговые диаграммы;
- *dotchart*: точечные графики;
- *image*, *heatmap*, *contour*, *persp*: функции для генерации трёхмерных графиков;
- *qqnorm*, *qqline*, *qqplot*: графики квантилей;
- *pairs*, *coplot*: отображают на графиках несколько выборок.

С помощью функции *hist* построим гистограмму для отображения вариационного ряда исходных данных. Гистограммы позволяют увидеть, как распределены значения переменных по интервалам группировки, то есть как часто переменные принимают значения из различных интервалов. А также, что бывает более важным, позволяет сделать предположение о разновидности распределения. Полученная гистограмма отражена на рисунке 2.2.

Представленная гистограмма построена с автоматически рассчитанным количеством интервалов разбиения. Воспользуемся *формулой Стерджеса* для вычисления этого количества. Из [1] количество интервалов разбиения рассчитывается по формуле:

$$k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil = \lceil \log_2 38 + 1 \rceil = 7. \quad (2.1)$$

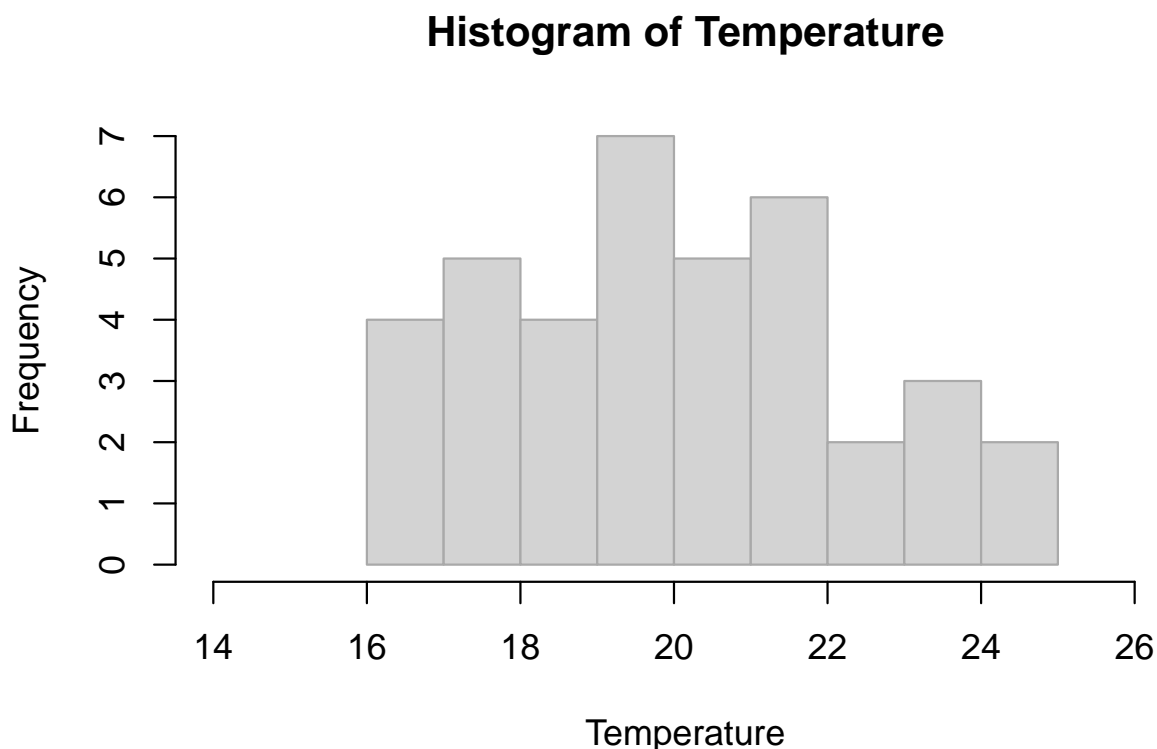


Рисунок 2.2 — Гистограмма наблюдаемых температур.

Следует отметить, что в построенной гистограмме, на рисунке 2.2, получилось 9 интервалов. Данный результат обосновывается особенностями реализации функции *hist*. Указанная особенность заключается в том, что эта функция вычисляет количество интервалов по формуле Стерджеса 2.1 и при построении интервалов пользуется принципом “красивого” разбиения.

не очень  
хорошее  
объяснение

По полученной гистограмме можно визуальнo предположить близость выборочного распределения к нормальному распределению. Исследуем подробнее данное наблюдение.

Для этого построим гистограмму с кривой плотности нормального распределения. Построенная гистограмма отображена на рисунке 2.3. На основании этой диаграммы уже можно сказать больше. Во-первых, здесь нагляднее представлена близость выборочного распределения к нормальному. Во-вторых, по этой гистограмме можно подтвердить или опровергнуть результаты, полученные на этапе вычисления описательных статистик в параграфе 2.1.

Следует отметить согласованность полученных описательных статистик с полученной гистограммой. Во-первых, по коэффициенту асимметрии мы предположили о близости распределения к симметричному. Это подтверждается гистограммой: на ней можно заметить небольшую скошенность вправо, что также согласовывается со знаком коэффициента. Во-вторых, коэффициент эксцесса указывал на пологость пика распределения. Данное заключение подтверждается кривой плотности — она имеет чуть более растянутую колоколообразную форму.

Другим очень часто используемым графическим способом проверки характера распределения данных является построение т.н. *графиков квантилей* (*Q-Q plots*, *Quantile-Quantile plots*). На таких графиках изображаются квантили двух распределений — эмпирического (т.е. построенного по анализируемым данным) и теоретически ожидаемого стандартного нормального распределения. При нормальном распределении проверяемой



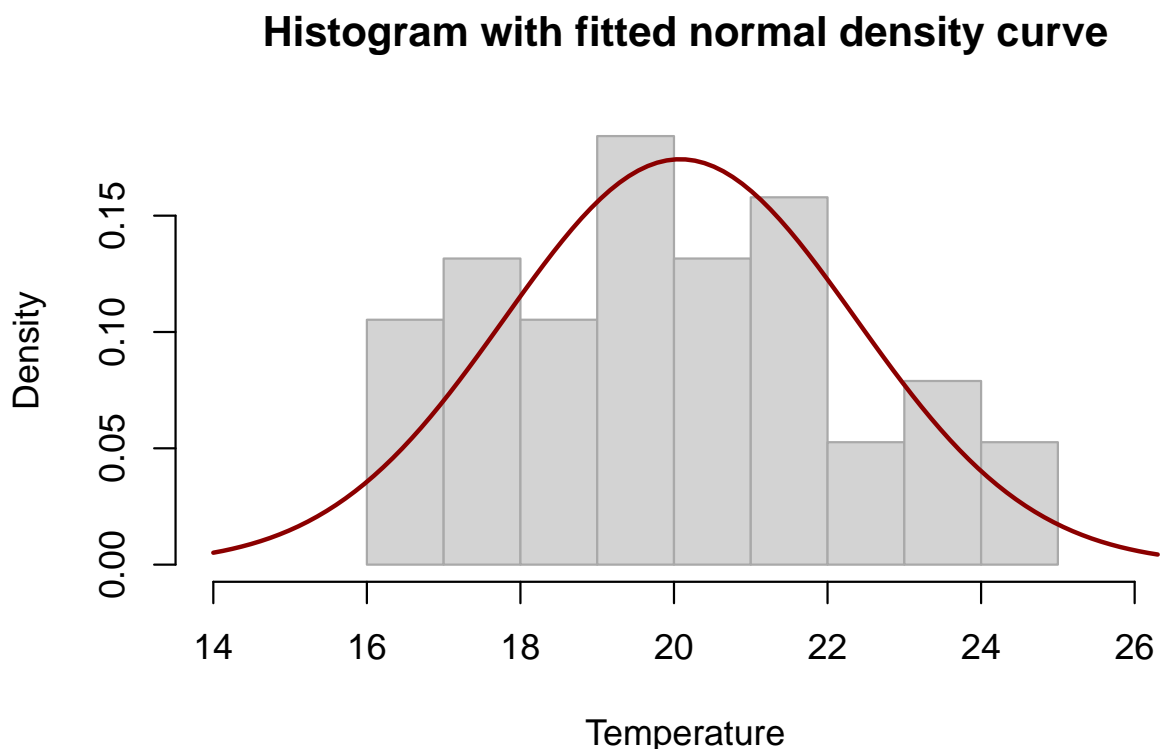


Рисунок 2.3 — Гистограмма наблюдаемых температур с кривой плотности нормального распределения.

переменной точки на графике квантилей должны выстраиваться в прямую линию, исходящую под углом 45 градусов из левого нижнего угла графика. Графики квантилей особенно полезны при работе с небольшими по размеру совокупностями, для которых невозможно построить гистограммы, принимающие какую-либо выраженную форму.

В **R** для построения графиков квантилей можно использовать базовую функцию *qqnorm()*, которая в качестве основного аргумента принимает вектор со значениями анализируемой переменной (Рисунок 2.4). На этом графике можно визуальнo обнаружить аномальное положение наблюдаемых значений по отношению к нормальному распределению. В данном случае отклонения можно наблюдать на концах рассматриваемого промежутка. Остальные значения образуют отчетливую прямую. А значит, подтверждается предположение о нормальности выборочного распределения.

Далее следует проверить полученные результаты с помощью некоторых формальных тестов. Существует целый ряд статистических тестов, специально разработанных для проверки нормальности выборочного распределения. В общем виде проверяемую при помощи этих тестов нулевую гипотезу можно сформулировать следующим образом: “Анализируемая выборка происходит из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение”. Если получаемая при помощи того или иного теста вероятность ошибки оказывается меньше некоторого заранее принятого уровня значимости (например, 0.05), нулевая гипотеза отклоняется.

В **R** реализованы практически все имеющиеся тесты на нормальность — либо в виде стандартных функций, либо в виде функций, входящих в состав отдельных пакетов. Примером базовой функции является *shapiro.test()*, при помощи которой можно выполнить

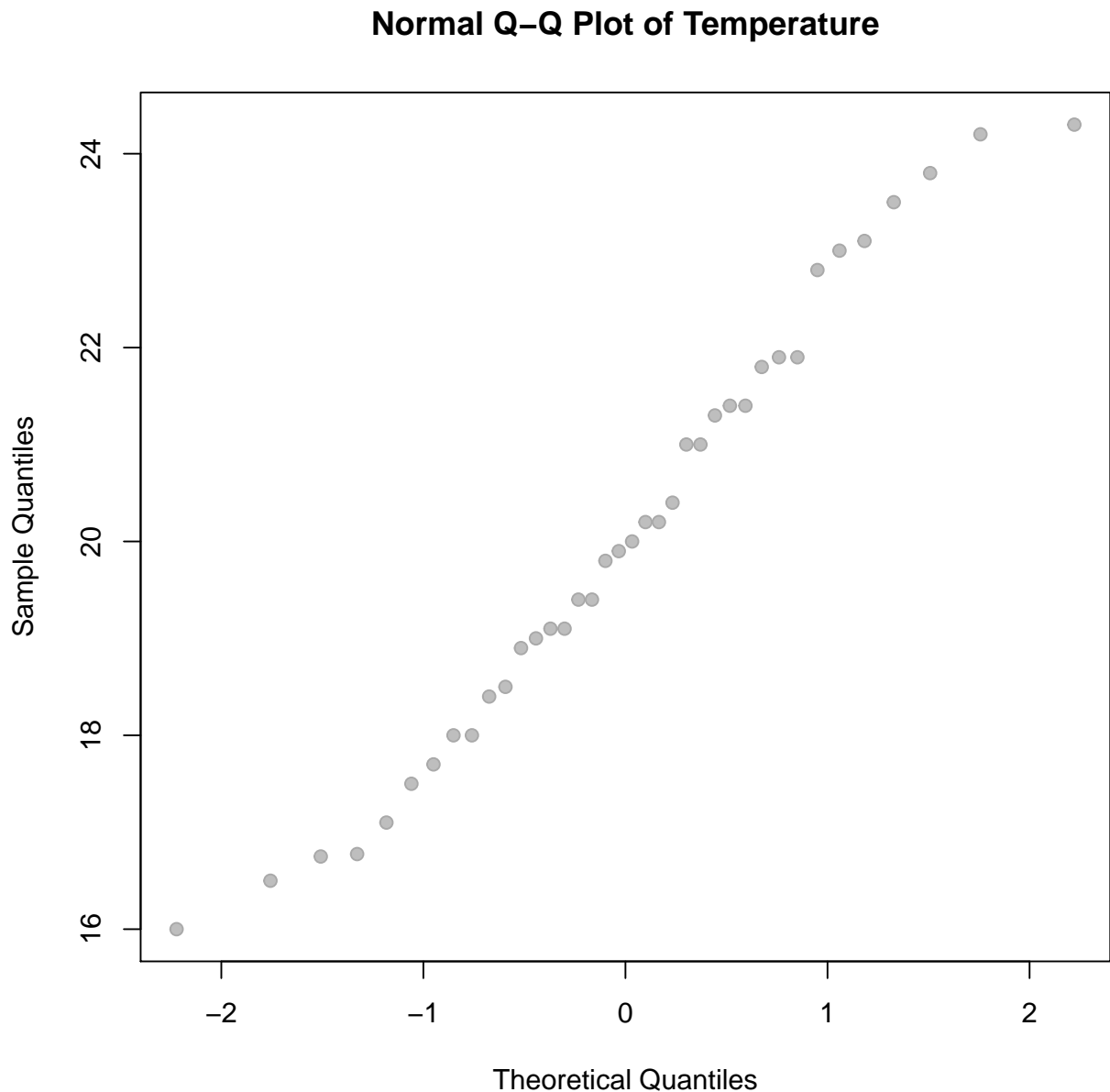


Рисунок 2.4 — График квантилей для наблюдаемых температур.

Добавить в  
теорию тест  
Шапиро-  
Уилка

широко используемый *тест Шапиро-Уилка*:

Shapiro-Wilk normality test

```
data: data$Temperature
W = 0.9727, p-value = 0.4706
```

В полученных результатах  $W$  — статистика Шапиро-Уилка. Вероятность ошибки  $P = 0.4706 > 0.05$ , а значит нулевая гипотеза не отвергается. Следовательно опровергнуть предположение на основе данного теста нельзя.

Попробуем опровергнуть наше предположение на основе проверки критерия  $\chi^2$  Пирсона. Для этого воспользуемся пакетом *nortest* и функцией *pearson.test*:

Pearson chi-square normality test

```
data: data$Temperature  
P = 1.7895, p-value = 0.938
```

В полученных результатах  $P$  — статистика  $\chi^2$  Пирсона. Вероятность ошибки  $P = 0.938 > 0.05$ , а значит нулевая гипотеза не отвергается. Следовательно опровергнуть предположение о нормальности на основе данного теста также нельзя. Проверим критерий: примем уровень значимости  $\alpha = 0,05$ , тогда из таблицы распределения  $\chi^2$  найдём критическое значение критерия  $\chi^2(\alpha, k) = 7,8$ . Отсюда следует, что

$$\chi^2 < \chi^2,$$

где  $\chi^2 = P = 1.7895$ .

А значит, нулевую гипотезу при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  не отвергаем и подтверждаем сделанный вывод на основании вычисленной вероятности ошибки.