

Маргарет Армстронг

# **Основы линейной геостатистики**

Перевод Р.М. Фомкина

## Предисловие

У Центра Геостатистики в Фонтенбло (CFSG) большая история обучения геостатистике, начавшаяся с летнего семестра в далеких семидесятых. В течение более чем двадцати лет на курсах повышения квалификации CFSG свыше 150 инженеров и геологов получили квалификацию горного геостатистика. Цель этих 9 месячных курсов, которые частично финансируются французским правительством через CESMAT, готовить профессиональных геостатистиков – специалистов, которые будут работать в горной промышленности. В начале работы CFSG было создано много учебников и на английском, и на французском языках. Легендарная пятая редакция (*Fascicule 5*), Матероновских (Matheron) лекций для летнего семестра 1970 г. заложила теоретические основы геостатистики. Классические книги Андре Джорнела (Andre Journel) и Чарльза Хьюгбрегтса (Charles Huigbregts), Мишеля Давида (Michael David) и Изабел Кларк (Isobel Clark), которые были разрекламированы прессой, дали мало для практического применения теории в горной промышленности. Эти книги сейчас немного устарели. Сейчас, мне кажется, наступило время для издания новой книги по основам линейной геостатистики, потому что при неизменной теории появилось много нового опыта использования ее на практике.

Эта книга показывает мою точку зрения на то, как надо применять линейную геостатистику (вариограммы и кригинг), особенно в горном подтексте. Использование геостатистики на практике требует некоторых теоретических знаний и практического опыта. Одной теории недостаточно, иначе люди делают глупые ошибки при выборе в качестве модели вариограммы функции, которая не определена положительно, что приводит к появлению отрицательных значений дисперсии. Также не достаточно только практического опыта, потому что в этом случае люди не могут правильно интерпретировать экспериментальные вариограммы. Я надеюсь, что эта книга содержит требуемую пропорцию теории и практики, которая позволит инженерам и геологам, особенно живущим в отдаленных регионах, применять геостатистику для решения их собственных задач.

Первая глава этой книги иллюстрирует две ключевые концепции геостатистики: эффект основания (the support effect) и эффект информации (the information effect). Глава 2 представляет различные гипотезы стационарности данных. Следующие три главы сконцентрированы на вариограммах. Глава 6 снова поднимает тему основания, но с точки зрения регуляризации. Следующие три главы посвящены кригингу, методу интерполяции, используемому для различных стратегий геостатистического оценивания. Последняя глава обращается к теме оценки общих запасов месторождений. Некоторые напоминания основ математики и статистики включены в Приложение 1. В заключении дается набор правил (в возрастающем порядке) для применения полученных знаний на практике. Ключ к этим правилам предусматривает регулярные записи для каждого геостатистического исследования. Эти правила описываются в Приложении 2.

Эта книга – результат нескольких лет обучения студентов в CFSG. Их комментарии и предложения были очень полезны. Особая благодарность - Малькольму Турстону (Malcolm Thurston) и Майку Харлей (Mike Harley), которые позволили опубликовать часть их лекций в этой книге. Кроме того, я

хотела бы поблагодарить Михеля Шмитта (Michael Schmitt), Криса Роса (Chris Roth) и Жана Боку (Jane Vosquel) за их неоценимую помощь в подготовке издания.

*Маргарет Армстронг*  
*Фонтанебло, Май 1998*

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>1</b>	<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>9</b>
1.1	Содержание .....	9
1.2	Введение .....	9
1.3	Применение геостатистики в горном деле .....	9
1.3.1	Оценивание общих запасов месторождений .....	9
1.3.2	Ошибки оценок .....	10
1.3.3	Оптимальное размещение проб (или скважин) на участке .....	10
1.3.4	Поблочное оценивание запасов руды .....	10
1.3.5	Построение регулярной сети и контурной карты .....	10
1.3.6	Условное моделирование месторождения для оценивания проектных стратегий добычи руды .....	11
1.3.7	Оценка извлекаемых запасов руды .....	11
1.4	Основной вопрос: работает ли геостатистика? .....	11
1.5	Начальное упражнение.....	12
1.5.1	Селективная добыча .....	14
1.5.2	Оптимальное извлечение.....	15
1.5.3	Информационный эффект .....	15
1.5.4	Эффект основания .....	18
1.6	Работает ли геостатистика в реальном мире .....	19
1.6.1	Классический пример угольного месторождения.....	19
1.6.2	Исследование золотого месторождения.....	20
1.6.3	Более новые примеры .....	21
1.7	Упражнения .....	22
<b>2</b>	<b>ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ .....</b>	<b>23</b>
2.1	Содержание .....	23
2.2	Моделирование пространственных переменных .....	23
2.3	Случайные функции.....	24
2.4	Гипотезы стационарности и внутренняя (intrinsic) гипотеза.....	25
2.5	Как определить, стационарна ли переменная .....	27
2.6	Функция пространственной ковариации.....	28
2.7	Упражнения .....	31
<b>3.</b>	<b>ВАРИОГРАММА.....</b>	<b>33</b>
3.1	Содержание .....	33
3.2	Определение вариограммы.....	33

<b>3.3</b>	<b>Непрерывность и зона влияния .....</b>	<b>34</b>
<b>3.4</b>	<b>Поведение около начала.....</b>	<b>34</b>
<b>3.5</b>	<b>Анизотропия .....</b>	<b>36</b>
3.5.1	Геометрическая анизотропия .....	36
3.5.2	Зональная (или стратифицированная) анизотропия .....	38
<b>3.6</b>	<b>Присутствие тренда .....</b>	<b>38</b>
<b>3.7</b>	<b>Вложенные структуры.....</b>	<b>39</b>
<b>3.8</b>	<b>Пропорциональный эффект.....</b>	<b>40</b>
<b>3.9</b>	<b>Модели вариограмм.....</b>	<b>40</b>
3.9.1	Дисперсия допустимой линейной комбинации .....	41
<b>3.11</b>	<b>Допустимые модели.....</b>	<b>43</b>
<b>3.12</b>	<b>Основные модели вариограмм .....</b>	<b>45</b>
3.12.1	Эффект самородка.....	45
3.12.3	Экспоненциальная модель .....	45
3.12.4	Степенные модели.....	46
3.12.5	Модель Гаусса .....	46
3.12.6	Кубическая модель .....	47
3.12.7	Двухмерная модель скважинного эффекта.....	47
3.12.8	Основная синусоидальная модель .....	47
3.12.9	Призматическая магнитная модель.....	47
3.12.10	Призматическая гравиметрическая модель .....	48
<b>3.13</b>	<b>Моделирование образов, полученных с использованием различных вариограмм .....</b>	<b>48</b>
<b>3.14</b>	<b>Упражнения.....</b>	<b>49</b>

## **4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВАРИОГРАММЫ ....55**

<b>4.1</b>	<b>Содержание .....</b>	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Как рассчитывать экспериментальные вариограммы: .....</b>	<b>55</b>
<b>4.3</b>	<b>На плоскости.....</b>	<b>55</b>
<b>4.4</b>	<b>В трехмерном случае.....</b>	<b>56</b>
<b>4.5</b>	<b>Пример 1: регулярные одномерные данные .....</b>	<b>56</b>
<b>4.6</b>	<b>Пример 2: вычисление экспериментальной вариограммы в двух измерениях .....</b>	<b>57</b>
<b>4.7</b>	<b>Вариограммное облако .....</b>	<b>60</b>
<b>4.8</b>	<b>Подбор модели вариограммы .....</b>	<b>61</b>
<b>4.9</b>	<b>Трудные вариограммы.....</b>	<b>62</b>
4.9.1	Выбросы.....	62
4.9.2	Псевдо-периодические hiccups.....	63
4.9.3	Артефакты .....	63

4.10	Упражнения .....	64
<b>5.</b>	<b>СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ .....</b>	<b>66</b>
5.1	Содержание .....	66
5.2	Последовательность изучения .....	66
5.2.1	Шаг 1: сбор и проверка данных .....	66
5.2.2	Решения, которые должны быть сделаны .....	67
5.2.3	Стандартные статистические показатели .....	70
5.3	Примеры .....	70
5.4	Месторождение железной руды .....	71
5.4.1	Вариограмма в вертикальном направлении .....	71
5.4.2	Вариограммное облако .....	72
5.4.3	Подбор модели для вертикальной вариограммы .....	72
5.4.4	Горизонтальные вариограммы .....	73
5.4.5	Трехмерная модель вариограммы .....	73
5.5	Второй пример - архейское месторождение золота (M. Harley) .....	74
5.6	Третий пример: месторождение золота Витватерсренд (M. Thurston) .....	76
<b>6.</b>	<b>ИЗМЕНЧИВОСТЬ КАК ФУНКЦИЯ ОТ РАЗМЕРА БЛОКА .....</b>	<b>78</b>
6.1	Содержание .....	78
6.2	Основание пространственной переменной .....	78
6.2.1	Связь изменчивости с размером блока .....	78
6.3	Дисперсия точечной пробы внутри объема .....	81
6.4	Дисперсия блоков $v$ внутри блока $V$ .....	81
6.5	Упражнение: Склад для усреднения угля .....	83
6.5.1	Решение .....	83
6.6	Изменение основания: регуляризация .....	84
6.7	Упражнение: вычисление регуляризованных вариограмм .....	85
6.7.1	Решение .....	85
6.9	Упражнения .....	85
<b>7.</b>	<b>ТЕОРИЯ КРИГИНГА .....</b>	<b>88</b>
7.1	Содержание .....	88
7.2	Цель кригинга .....	88
7.3	Происхождение уравнений кригинга .....	89
7.4	Различные кригинговые оценщики .....	89

7.5	Обычный кригинг.....	91
7.6	Уравнения ОК для внутренних пространственных переменных.....	94
7.7	Упражнение: Обычный кригинг блока.....	95
7.7.1	Решение .....	95
7.8	Кригинг значения среднего.....	97
7.9	Простой кригинг .....	97
7.10	Теорема аддитивности.....	99
7.11	Наклон линейной регрессии .....	100
7.12	Кригинг – точный интерполятор .....	102
7.13	Геометрическое упражнение, демонстрирующее процедуру минимизации....	103
7.13.1	Квадратичная форма для минимизации .....	103
7.14	Упражнения .....	105

## **8 ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КРИГИНГА ..... 108**

8.1	Содержание.....	108
8.2	Введение .....	108
8.3	Отрицательные веса .....	109
8.4	Как выбор модели вариограммы воздействует на кригинг.....	111
8.4.1	Похожие вариограммы .....	111
8.4.2	Влияние выбора эффекта самородка.....	112
8.5	Экранный эффект .....	114
8.6	Симметрия в уравнениях .....	116
8.7	Проверка качества конфигурации кригинга.....	118
8.7.1	Дополнительные пробы улучшают качество оценки.....	119
8.8	Перекрестная проверка.....	119

## **9 ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КРИГИНГА ... 122**

9.1	Содержание .....	122
9.2	Месторождение железной руды.....	122
9.2.1	Размеры сети для кригинга.....	122
9.3	Точечный кригинг с большим количеством соседей.....	123
9.4	Блочный кригинг с большим количеством соседей.....	123
9.5	Точечный кригинг с меньшим количеством соседей .....	125
9.5.1	Что является причиной большой концентрации линий? .....	126
9.5.2	Как устранить эти концентрации изолиний? .....	127

<b>9.6 Кригинг маленьких блоков по редкой сети .....</b>	<b>129</b>
9.6.1 Какой размер блоков можно использовать для кригинга?.....	130

## **10. ОЦЕНИВАНИЕ ОБЩИХ ЗАПАСОВ..... 132**

<b>10.1 Содержание .....</b>	<b>132</b>
<b>10.2 Можно ли использовать кригинг для оценивания общих запасов?.....</b>	<b>132</b>
<b>10.3 Дисперсия распространения .....</b>	<b>133</b>
<b>10.4 Связь с дисперсией изменчивости.....</b>	<b>134</b>
<b>10.5 Область минерализации.....</b>	<b>135</b>
10.5.1 Прямая композиция выражений.....	135
10.5.2 Композиция линии и разделенных на части выражений .....	137
<b>10.6 Когда границы рудного тела не известны.....</b>	<b>140</b>
<b>10.7 Оптимальная сеть опробования.....</b>	<b>141</b>
10.7.1 Для 1км сетки .....	142
10.7.2 Для 500м сетки .....	142
<b>10.8 Упражнения .....</b>	<b>143</b>

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 1: ОБЗОР ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНЦЕПЦИЙ ..... 145**

<b>A1 Какие математические знания требуются в линейной геостатистике?.....</b>	<b>145</b>
A 1.1 Среднее и дисперсия .....	145

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СОВЕТЫ ..... 148**

A 2.1 Строгий контроль за оцениванием руды .....	148
A 2.2 Демонстрация качества работы.....	148
A 2.3 Рабочие журналы.....	148



# 1 Введение

## 1.1 Содержание

В этом разделе после описания типовых задач горного дела, которые могут быть решены при помощи геостатистики, представлена основная практическая задача. Она иллюстрирует необходимость получения хороших оценок качества руды, особенно когда используется селективная добыча. Подчеркивается экономическая природа величины основания при оценке запасов руды и наличия необходимой информации на этой стадии. В заключении рассматриваются сравнения геостатистики с другими методами оценки запасов полезных ископаемых.

## 1.2 Введение

За период более чем 30 лет геостатистика доказала свое превосходство, как метод для оценки запасов большинства типов полезных ископаемых (драгоценные металлы, железная руда, цветные металлы и др.). Ее применение в нефтяной промышленности началось, но не смотря на это, она продемонстрировала свою полезность, особенно для оконтуривания и моделирования (имитации) внутренних характеристик резервуаров. Ее использование было распространено на другие области, такие как наука об окружающей среде, гидрогеология, сельское хозяйство и даже рыболовство, где временная переменная также важна, как и пространственные переменные.

Основной инструмент геостатистики, вариограмма, используется для определения пространственной корреляции между произвольно размещенными реальными данными наблюдений. Как только экспериментальная вариограмма будет описана математической функцией, эта модель может быть с успехом использована для оценки неизвестных значений исследуемого параметра в любой точке данного пространства. Эта процедура оценивания называется кригингом по имени южно-африканского инженера, Дани Криге (Danie Krige), который вместе с с Хербертом Сичелом (Herbert Sichel) впервые применил геостатистику на золоторудном руднике Витватерсранд (Witwatersrand) в ЮАР. После прочтения первых статей Криге в шестидесятых - семидесятых годах, французский математик, Джордж Матерон (Georges Matheron), разглядел большие перспективы этих выводов и начал разрабатывать новую теорию. До появления учения о вариограммах и различных видах кригинга основным предметом использованием геостатистики в горном деле было оконтуривание.

## 1.3 Применение геостатистики в горном деле

### 1.3.1 Оценивание общих запасов месторождений

Первым важным шагом в технико-экономическом обосновании горного проекта является определение геологических запасов полезных ископаемых месторождения. Геоestatистика может помочь горному инженеру точнее оценить общий тоннаж руды на участке, среднее содержание металлов и качество руды по имеющейся информации, и таким образом поможет ему решить будет ли выгодно освоение данного проекта.

### *1.3.2 Ошибки оценок*

Ни один из методов оценивания не может дать точного реального значения искомой величины, а делает это с какой-то неизбежной погрешностью. Поэтому важно понимать, как серьезна эта обязательная ошибка. Например, специалисту, принимающему решение, необходимо знать, с какой точностью оценено содержание металла в залежи:  $\pm 0.1\%$  или  $\pm 1\%$ . Наряду с великолепными оценками, геоestatистика позволяет измерять точность этих оценок в виде дисперсии кригинга. Это одно из главных преимуществ геоestatистики перед традиционными методами оценивания запасов.

### *1.3.3 Оптимальное размещение проб (или скважин) на участке*

Дисперсия оценивания (вычисленная при помощи геоestatистики) зависит от выбранной модели вариограммы для данного месторождения и от расположения проб в его массиве, но не от результатов их испытания. Таким образом, для определенного месторождения или района сначала выбирается вариограмма, затем по ней рассчитывается дисперсия оценивания. Если выполнить эти расчеты для нескольких возможных вариантов моделей опробования (без действительного выполнения бурения), то можно найти наиболее экономичную сеть, которая дает необходимую точность оценки запасов

### *1.3.4 Поблочное оценивание запасов руды*

Как только решение о разработке месторождения принято, необходимо произвести поблочную оценку тоннажа и среднего содержания металлов. Блоки в данном случае представляют собой некоторые (отчетные) объемы руды, на которые разбиваются извлекаемые запасы в процессе добычи, например: сменную, суточную, месячную ..... отработку карьера, рудника или экскаватора и т.д. Кроме стандартного оценивания тоннажа руды и содержания в ней металла геоestatистика обеспечивает оценку всех сопутствующих показателей качества. Для угля она, например, включает оценку содержания золы, серы, F.S.I. и теплотворной способности. Для железной руды - содержание кварца и фосфора (иногда марганца), потери при прокаливании.

### *1.3.5 Построение регулярной сети и контурной карты*

Хотя большинство добывающих компаний обычно предпочитают поблочную оценку качества руды составлению контурных карт горизонтов, геоestatистика может быть использована для оценки параметров качества

руды в узлах моделируемой регулярной сети. После этого может быть использован любой стандартный пакет построения изолиний для составления погоризонтных планов качества. Точность таких вычислений существенно больше, чем у других методов создания и оценки регулярной сети. Уже более 25 лет нефтяная промышленность использует для этой цели кригинг. С недавних пор ученые, занимающиеся охраной окружающей среды, также стали использовать геостатистику.

### *1.3.6 Условное моделирование месторождения для оценивания проектных стратегий добычи руды*

Кригинг разработан для выполнения линейной оценки с наименьшей дисперсией, поэтому он обладает эффектом «сглаживания», т.е. изменчивость полученных с его помощью оценок будет меньше, чем у других «несмещенных» методов и тем более меньше, чем изменчивость реальных величин. Это значит, что если проверку горных проектов выполнять на модели, созданной кригингом, то мы получим рудопотоки с существенно меньшей изменчивостью качества руды, чем в действительности. Для этих задач используется геостатистическое условное моделирование месторождений. В главе 9 дается описание ситуаций, когда следует использовать условное моделирование вместо кригинга.

### *1.3.7 Оценка извлекаемых запасов руды*

Во многих случаях горные инженеры должны предсказать извлечение и содержание металлов в концентрате, когда при добыче извлекаются (выемочные) блоки руды установленного размера с содержанием металла выше бортового. Когда сеть опробования имеет размеры, сопоставимые с размером выемочных блоков, то их качество можно оценить индивидуально с необходимой точностью. Но если блоки имеют размеры намного меньшие, чем размер сети, то такое оценивание будет заблуждением и приведет к серьезным ошибкам. Самое большое, что можно сделать в этой ситуации, это предсказать долю извлекаемых выемочных блоков и их среднее содержание. Это приводит нас в нелинейную геостатистику.

Похожие проблемы возникают в задачах о рекультивации почвы, где ученые должны предсказать общее количество загрязненного материала, содержащего нежелательный уровень вредных веществ.

В последующих главах мы увидим, как вариограмма и кригинг используются для оценки параметров качества руды и получения дисперсии такой оценки. Эта работа посвящена только линейной геостатистике, поэтому во всех разделах, включая условное моделирование и оценку извлекаемых запасов, нелинейные методы не будут использоваться.

## **1.4 Основной вопрос: работает ли геостатистика?**

Рассматривая возможные применения геостатистики в горной промышленности, ключевым обычно является вопрос: “Работает ли геостатистика?” или “Работает ли она лучше, чем альтернативные методы оценки запасов?”. Сначала представим простой пример, показывающий экономические последствия плохой блочной оценки. Затем будет представлено несколько случаев использования различных технологий оценивания руды.

### 1.5 Начальное упражнение

Одна из самых обычных задач геостатистики (в горной промышленности) – это оценивание кригингом средних содержаний в добываемых блоках – например, для контроля ежедневной добычи. Многих людей удивляет, что кригинг действительно дает лучшие результаты, чем другие методы. Это упражнение предназначено для того, чтобы увидеть экономические последствия ошибок оценки. Сначала давайте посмотрим на данные. Участок разделен на 64 блока, размером 1 на 1 (рис.1.1.). Каждый из 16-ти блоков размером 2 на 2 в свою очередь имеет только 1 пробу, размещенную в левом верхнем углу блока. Остальные 48 проб будут приведены позже с целью сравнения разных методов.

735		45		125		167	
450		337		95		245	
124		430		230		460	
75		20		32		20	

**Рис 1.1.** Шестнадцать проб размера 1 на 1 будут использованы для оценки добываемых блоков размера 2 на 2

Эти 16 значений будут использованы, как “пробы” для оценки значений добываемых блоков размера 2 на 2 (т.е. в четыре раза больше, чем пробы). Простейший путь оценить величины каждого из 16 блоков – это записать значение пробы в оценку каждого блока. Это называется полигональным (polygonal) методом. Рисунок 1.2.а показывает эту оценку.

Теперь попробуйте вы оценить каждое из 16 величин. Вы можете выбрать любой метод, который вам нравится; например, посмотреть на значения и предсказать, как они изменяются, или угадать, или взять

среднее от соседних значений и т.п.. Напишите ваши оценки в пустых клетках на Рис. 1.2.**b**.

735	45	125	167
450	337	95	245
124	430	230	460
75	20	32	20

**a)**


**b)**

**Рис 1.2. (a)** Оценки значений блоков методом полигонов; **(b)** пространство для оценки блоков читателем

442	190	142	204
354	276	212	279
189	226	216	271

99	81	88	125
----	----	----	-----

**Рис 1.3.** Оценка блоков кригингом

Третья оценка вычислена с помощью кригинга блоков (Рис. 1.3.). Кригинг это только особая разновидность оценки взвешенного скользящего среднего. От Вас не требуется сейчас понимать, как эти оценки были получены. В данном случае – они просто другой возможный вариант блочной оценки.

#### 1.5.1 Селективная добыча

В большинстве случаев при добыче блоки с высоким содержанием извлекаются, в то время как другие либо остаются на месте, либо вывозятся в отвал, как пустая порода. Предполагается, что в данном случае экономически обоснованный борт равен 300. Поэтому добыча блока с показателем 301 приносит прибыль, равную 1, а добыча блока со значением 299 приносит убыток - 1. В настоящее время мы собираемся игнорировать любые геометрические горные ограничения и будем считать, что все экономически выгодные блоки извлекаются.

Первый шаг состоит в вычислении прибыли, которую можно предсказать в каждом из трех методов оценки. Мы будем работать с полигональным методом, а Вы можете повторить все с другими двумя. Во-первых, заштрихуем все балансовые блоки с параметром больше 300 (или равным этому значению). Их всего пять штук. См. Рис. 1.4.а.

Тогда рассчитанная прибыль:  $735 + 450 + 337 + 430 + 460 - 5 \times 300 = 912$

Теперь мы вычислим действительную прибыль, которую мы получим, когда добудем балансовые блоки. Реальные параметры блоков размером 2 на 2 приведены на Рис. 1.4.б. Для полигонального метода пять блоков намечены для разработки. Их действительные значения: 505, 270, 328, 220 и 263 серьезно отличаются от выполненных оценок: 735, 450, 337, 430 и 460.

Поэтому действительная прибыль:  $505 + 270 + 328 + 220 + 263 - 1500 = 86$

Вместо спрогнозированной прибыли 912 единиц, рудник даст только 86 единиц. Компания может при этом обанкротиться из-за серьезных финансовых проблем. Повторите эти вычисления для кригинга. Из рисунка видно, что только два блока можно наметить для добычи; действительная прибыль от этих блоков составит 175, что близко к оцененной прибыли, равной 196. И наконец, повторите вычисления для вашей собственной оценки и сравните результаты с уже полученными.

735	45	125	167
450	337	95	245
124	430	230	460
75	20	32	20

a)

505	143	88	207
270	328	171	411
102	220	154	263
101	54	44	155

b)

**Рис 1.4.** (а) Значения полигональной оценки и (b) действительные параметры блоков. Заштрихованные (красный шрифт) блоки со значениями более 300 намечаются для добычи. Обратите внимание на разницу между реальными значениями и оценочными.

### 1.5.2 Оптимальное извлечение

До сравнения этих результатов, мы должны рассчитать оптимальное извлечение (т.е. что мы можем извлечь, зная действительные показатели до добычи). Понятно, что должны быть выбраны только три блока (505, 328 и 411), а прибыль составит 344. Сравнивая с этим результатом прибыль, предсказанную по данным полигональной оценки (912), мы поймем, что это иллюзия. Кригинг дает намного более реалистичное предсказание - 196 в сравнении с 175 (реальная прибыль). Это только 10% разницы, но это все же неверно по сравнению с реальной прибылью - 344.

Теперь было бы интересно проанализировать, почему результат кригинга оказался лучше, чем другие методы оценки. Мы увидим, что проблемы, встречаемые при оценке блоков, связаны с 2-мя эффектами: информационным эффектом и эффектом основания.

### 1.5.3 Информационный эффект

Информационный эффект обуславливается неполнотой геологической информации, доступной во время оценки. Мы имеем только оценки значений блоков вместо истинных значений. Чтобы наглядно представить себе это, мы нарисуем диаграмму рассеивания истинных значений (ось Y) против оценок (ось X) для различных методов оценивания. В идеале оценочные значения должны быть эквивалентны настоящим, поэтому точки должны лежать на линии, проходящей через центр координат под углом 45 градусов. К сожалению, это не так. Они образуют облако точек, которое может быть представлено эллипсом.



**Рис. 1.5.** Диаграмма разброса истинных значений против оценочных. Облако точек ограничено эллипсом. Блоки с оцененным значением больше 300 намечены для добычи, в то время как могут быть добыты только блоки с действительным содержанием больше 300.

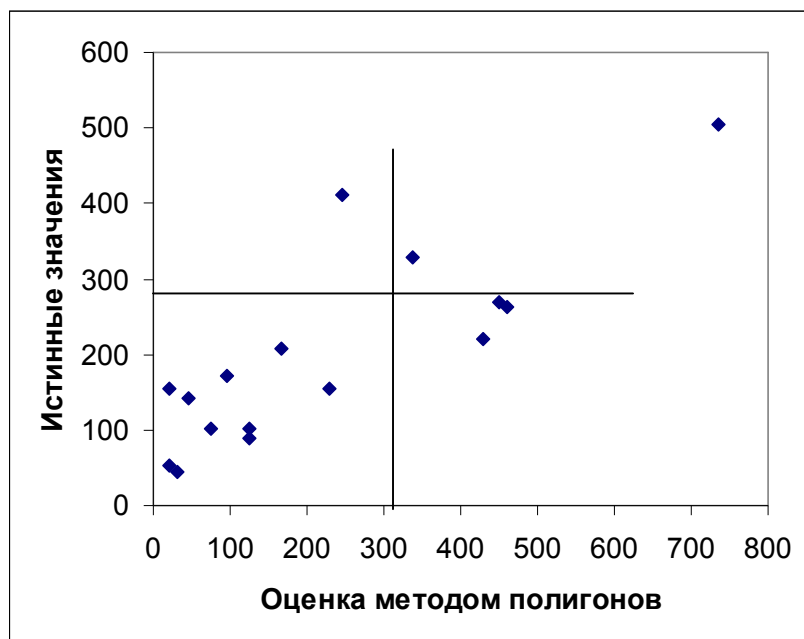
Когда блоки выбираются для добычи, то все блоки, оцениваемые значения которых выше борта, считаются рудосодержащими. Это показано графически с помощью вертикальной линии с координатой  $X=300$ . Блоки правее этой линии выбраны для добычи. В действительности же мы хотим добыть блоки, истинные значения содержания которых больше 300. Горизонтальная линия с координатой  $Y=300$  показывает это. Блоки выше этой линии должны быть добыты. Эти 2 линии делят всю область на четыре зоны:

1. Истинные значения  $> 300$ ; значение оценки  $> 300$ . Эти блоки правильно оценены, как рудосодержащие. Они соответствуют правой верхней части диаграммы.

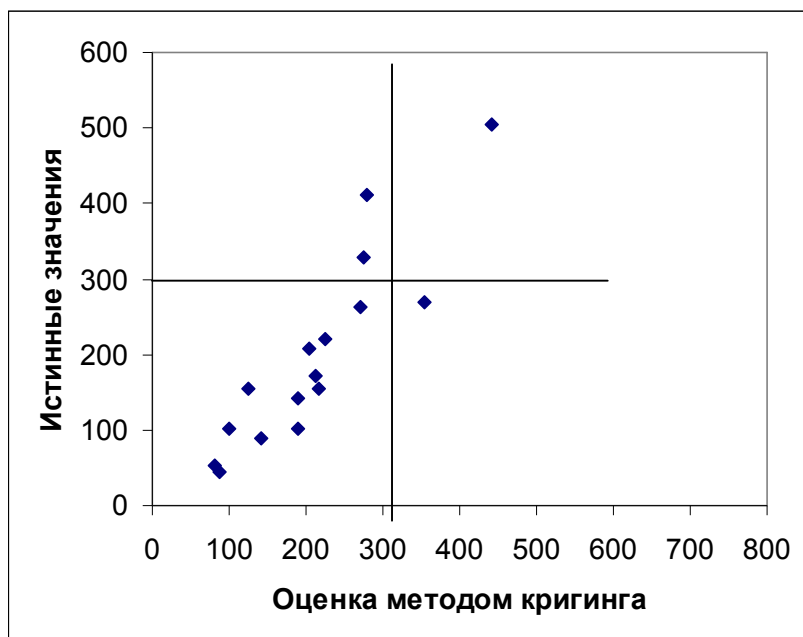


2. Настоящее значение  $< 300$ ; значение оценки  $< 300$ . Эти блоки пустой породы корректно оценены как пустая порода. Они лежат в левой нижней части диаграммы.
3. Настоящее значение  $> 300$ ; значение оценки  $< 300$ . Эти истинные рудосодержащие блоки были ошибочно отнесены к пустой породе; эта ошибка оценивания может иметь важное значение для рудника. Эти блоки лежат в левой верхней части диаграммы.
4. Настоящее значение  $< 300$ ; значение оценки  $> 300$ . Эти блоки пустой породы были отнесены к рудосодержащим. Этот второй тип ошибки оценки не отменяет предшествующую ошибку и может иметь негативные экономические последствия для рудника. Такие блоки расположены в правой нижней части диаграммы.

Вернемся к примеру, Рис. 1.6. показывает диаграмму рассеяния, соответствующую полигональному методу оценки и кригингу. Для кригинга наклон кривой регрессии стремится к 1.0 (т.е. - 45 градусов), тогда как он становится меньше 1.0 для полигонального метода. Теперь посмотрим на “форму” двух облаков. Кригинг дает более “тонкое” облако. Читатель может увидеть неверную интерпретацию блоков для каждого метода оценки (см. блоки в левой верхней и правой нижней четвертях). Сравнение подтверждает, что кригинг работает лучше. В Главе 8 мы покажем, что при выборе метода оценки учитывают наклон линии регрессии истинных и оцененных значений.



а)



b)

**Рис 1.6.** Диаграмма рассеяния истинных значений в сравнении с оценками; (а) для полигональной оценки и (б) для кригинга. В идеале, точки должны лежать на диагонали (настоящие значения = значениям оценки)

#### 1.5.4 Эффект основания

Геостатистический термин “основания” относится к размерам и объему пробы или блока. В данном случае пробы имеют основание 1 на 1 м, тогда как блоки: 2 на 2 м. В общем случае, основание проб меньше, чем блоков. Истинные значения шестнадцати блоков 2 на 2 м и 64-х блоков (проб) 1 на 1 м показаны на Рис. 1.4. и 1.7. Хотя средние значения для обоих вариантов практически одинаковы, дисперсия проб (блоков - 1 на 1 м) больше, чем дисперсия блоков.

735	325	45	140	125	175	167	485
540	420	260	128	20	30	105	70
450	200	337	190	95	260	245	279
180	250	380	405	250	80	515	605
124	120	430	175	230	120	460	260
40	135	240	35	130	135	160	170
75	95	20	35	32	95	20	450
200	35	100	53	2	45	58	90

**Рис 1.7.** Истинные значения 64-х блоков (проб) размерами 1 на 1 м

Распределения блоков показывают, что меньшие по размерам блоки более рассеяны, чем большие. При бортовом содержании 300, больше руды будет добыто для блоков с размером 1м на 1м, чем для блоков - 2м на 2м. Так как полигональный метод приравнивает содержания в пробах (т.е. малое основание) содержаниям в блоках, то гистограмма блоков заменяется гистограммой проб, хотя они довольно разные. Это подтверждает, что хорошая оценка должна принимать во внимание разницу между основаниями проб и блоков при оценивании. Этот эффект называется эффектом основания.

Итак мы увидели, что эффект основания и эффект информации могут являться двумя важными причинами для неверного предсказания запасов. Теперь мы знаем некоторые свойства, которыми должна обладать хорошая оценка. Мы можем увидеть, что способ, которым мы объединяем данные в окрестности оцениваемого блока, очень важен.

Первая часть данного курса будет посвящена вариограммам; это статистический инструмент для оценивания функции зависимости содержания в близ расположенных пробах от расстояния между этими пробами. Во второй части книги вариограммы будут использоваться для вычисления весов, которые будут использованы при оценивании блоков в процессе кригинга.

## **1.6 Работает ли геостатистика в реальном мире**

Для ответа на этот вопрос мы рассмотрим некоторые примеры, где геостатистический прогноз сравнивается с реальными данными производства. Сначала мы рассмотрим два примера угольных месторождений, которые легче оценивать, затем - два примера золотых месторождений (включая логнормальный кригинг) и затем сделаем обзор некоторых других случаев.

### **1.6.1 Классический пример угольного месторождения**

Рассматриваемые данные исследований угольных месторождений проведены Сабурином (Sabourin) (1975) и Вудом (Wood) (1976). Результаты кригинга в обоих исследованиях производят благоприятное впечатление. Сабурин оценивал содержания серы в блоках, используя бороздовое опробование. Затем он сравнил полученные оценки с действительными результатами добычи. Средняя относительная ошибка между оценками и действительным значением была равна 9.8 %, что он расценил, как удовлетворительный результат. Важно отметить, что это месторождение имело тренд, который делает необходимым использование универсального кригинга. Хотя этот метод гораздо сложнее, чем обыкновенный кригинг, малая величина ошибки является внушительным подтверждением правомерности использования геостатистики.

Вуд в своих исследованиях южно-африканского месторождения не рассматривал проблемы тренда. Поэтому он мог использовать обыкновенный кригинг. Цель его исследования заключалась в

предсказании ширины пласта на расстоянии 18м (один целик) при продвижении работ на пласте №2 на шахте Витбанк (Witbank Mine). Было использовано четыре метода оценивания:

1. среднее всех измерений в последних трех целиках,
2. среднее всех измерений в последнем целике,
3. ближайшее одиночное измерение, и
4. кригинг.

Испытания были выполнены на двух участках шахты (первый с 133 наборами значений данных, другой - со 101). Разница между значениями оценки и действительными показателями производства была вычислена для всех четырех методов (Таблица 1.1.). Оказалось, что оценка кригингом значительно ближе к действительным значениям, чем другие оценки.

**Таблица 1.1.** Средний квадрат нормированных ошибок оценивания, представленный Вудом (1976) в отчете №2 южно-африканского общества горной промышленности (South African Chamber of Mines).

Метод оценивания	Участок А	Участок В	Оба участка
Без оценивания	133	101	234
Среднее 3-х целиков	7,5	2,69	5,42
Среднее последнего целика	7,38	1,84	4,99
Ближайшее измерение	5,79	3,17	4,66
Кригинг	4,89	1,38	3,38

### 1.6.2 Исследование золотого месторождения

Сейчас мы посмотрим на результаты нескольких исследований золотых месторождений, которые гораздо труднее оценивать вследствие особенностей распределений. Двумя из них, наиболее интересными, занимались Ренду (Rendu) (1979), а также Криг и Магри (Krige and Magri) (1982), которые работали на южно-африканских месторождениях.

Ренду проверил, подтверждаются ли геостатистические предсказания на практике. У него было около 5000 значений содержаний золота из одной части рудника Хартбистфонтейн (Hartebeestfontein Mine). Анализируемые данные были расположены по тесной сети (25 футов), а блоки с размером 125 футов на 125 футов содержали по 25 проб, и усреднение их давало достаточно точное представление об истинных содержаниях каждого блока. Затем Ренду взял из 25 проб каждого блока только центральную пробу и оценил содержания блоков кригингом по этим пробам. Перемещая центр сети “проб”, он выполнил эту процедуру на 4808 блоках.

Поскольку данные имели логнормальное распределение, то он использовал логнормальный кригинг вместо обычного, а также для сравнения два классических метода (метод ближайшей пробы (полигональный) и метод обратных расстояний). Обработывая свои

результаты, он вычислил регрессию между истинными значениями и оценочными (на би-логарифмической шкале) для всех изложенных методов оценки. В идеале эта линия регрессии должна иметь наклон 45 градусов. Логнормальный кригинг с известным средним оказался расположен ближе к ней, чем остальные методы. Если линия регрессии расположена не под этим углом, то оценки называются условно смещенными. Когда это случается, тангенс угла наклона обычно меньше 1.0 и поэтому содержания блоков с богатым содержанием обычно переоценено, тогда как блоки с бедным содержанием недооценены. Это конечно относилось прежде всего к методу ближайшей пробы (многоугольников). Как мы могли видеть ранее, экономические последствия этого могут быть очень серьезными, когда такие оценки используются для выбора кондиционных блоков для добычи и для предсказания запасов, которые будут добыты в будущем.

Второе сравнительное исследование было сделано Кригом и Магри на содержаниях золота для очень неравномерного золоторудного пласта рудника Лорраен (Lorraine), а также для содержаний цинка на медно-цинковом месторождении. Их результаты были подтверждены исследованиями Ренду.

### *1.6.3 Более новые примеры*

Несколько больше сравнительных исследований было представлено в докладах на симпозиуме по оцениванию запасов руды (the Ore Reserve Estimation Symposium), проходившем в Монреале в мае 1986. Особенно интересны два из них, сделанные Раймондом и Армстронгом (Raymond and Armstrong) (1986), которые работали на месторождении меди, и Блеквеллом и Джонстоном (Blackwell and Johnston), которые исследовали месторождение с низкими содержаниями медного молибдена. Раймонд и Армстронг нашли, что содержания в измельченной руде за 17 месячный период очень близки. Они использовали логнормальный кригинг (который является специальной формой кригинга разработанный для асимметричных данных с логнормальным распределением). В другой статье авторы описывают, как они использовали данные кернового бурения и взрывных скважин для блочного кригинга. В заключении они привели три основных преимущества использования методов геостатистики:

1. Результаты подсчета запасов полезных ископаемых легче повторить разными специалистами горного дела, т.к. после выбора модели вариограммы остается мало возможностей для какой-либо дополнительной субъективной интерпретации.
2. Геостатистика действительно улучшает оцениваемые значения, даже когда используются данные опробования разных размеров и надежности.
3. Улучшенные значения подсчета запасов полезных ископаемых позволяют повысить качество всех видов планирования и дают оператору возможность маневра, когда он имеет дело с простоями, авариями, неустойчивостью бортовых содержаний и цен на металлы.

Поскольку эти сравнительные исследования подтверждают превосходство кригинга над обычно используемыми методами оценки от угольных до золотых месторождений, то кажется привлекательным более

внимательно посмотреть на технику кригинга. Мы начнем рассмотрение этих проблем с того, как использовать геостатистику для моделирования всех этих типов переменных.

## 1.7 Упражнения

**Упражнение 1.1** Четыре таблицы, приведенные ниже, показывают значения оценок, вычисленных с использованием трех различных методов, а также действительные значения, полученные после добычи.

Вычислите среднее для содержаний 16 блоков для каждого метода и для истинных значений. Какая из оценок несмещенная?

Постройте диаграммы рассеяния для истинных (вертикальная ось) и оцененных содержаний. Посмотрите на наклон линий регрессии (истинное содержание против оцененного) и отметьте, какая из них расположена под углом 45 градусов (т.е. тангенс угла наклона равен 1.0).

a)					b)			
30	30	20	45		10	30	10	55
20	50	50	35		5	20	50	35
40	25	35	25		40	15	40	30
15	40	20	20		5	35	10	10
15	35	20	35		20	25	15	40
15	20	45	25		15	25	45	30
40	10	30	30		35	15	35	25
15	35	20	10		10	35	20	10
c)					d)			

**Таблица 1.2.** Содержания, оцененные тремя различными методами, (a, b и c) и действительные значения (d)

## 2 Пространственные переменные

### 2.1 Содержание

В этой главе представлены основные определения геостатистики, включающие концепции *случайной функции* и *пространственной переменной*. Введены основные гипотезы (второй порядок стационарности и внутренняя гипотеза неустойчивости (the weaker intrinsic hypothesis). Определены функции *вариограммы* и *пространственной ковариации*. Обсуждается проблема стационарности исходных данных. В этой главе представлены некоторые основные свойства пространственной ковариации, так как они помогают в определении признаков стационарности. Устанавливается связь между вариограммой и пространственной ковариацией. Многие другие свойства вариограммы рассмотрены в следующей главе.

### 2.2 Моделирование пространственных переменных

Поскольку доступная информация об исследуемой переменной, как правило, отрывочна, то нам потребуется модель, с помощью которой можно извлечь информацию о точках пространства, которые не были опробованы. Существует много путей определения моделей. Некоторые из них будут обсуждены ниже.

**Генетические модели (Genetic models).** Один из наиболее привлекательных путей развития математической модели — это моделирование процесса происхождения явления. Так как осадочные процессы являются одними из легко описываемых, Якодом и Йоасоном (Jacod and Joathon) в начале семидесятых (1970 a, b) была сделана попытка смоделировать их. К сожалению, геологические факторы, контролирующие даже простые осадочные процессы, крайне сложны и требуют многих параметров для их описания. Это еще раз доказывает трудность получения значимых оценок из-за ограниченности данных опробования. Данные проблемы заставили исследователей отказаться от этого подхода в моделировании. Новая работа, сделанная Ху, Джозеф и Дубруле (Hu, Joseph & Dubrule) (1994), по моделированию процесса восстановления размытых впадин нефтяного резервуара была более удачна, но сама идея математического моделирования процессов формирования месторождений была заброшена. Геология развития резервуаров и месторождений очень сложна и еще недостаточно изучена для такого моделирования, по крайней мере в настоящее время.

**Поверхности тренда (Trend surfaces).** В конце шестидесятых компьютеры стали намного более доступны, и появилась возможность выполнять сложные вычисления, включающие геостатистические методы, такие как поверхности тренда. В то время как Якод и Йоасон работали над теорией происхождения резервуара, два американца применили анализ поверхностей тренда для предсказания свойств угольных пластов.

Основное предположение, лежащее в основе этих регрессионных методов, заключается в том, что исследуемые поверхности могут быть представлены, по крайней мере локально, довольно простыми детерминированными функциями, например, полиномами с добавлением компонента случайной ошибки. Здесь “случайность” означает, что ошибка некоррелирована по отношению к разным местам поверхности и не зависит от вида функции. Сложность этого подхода демонстрирует уравнение для расчета пропорции серы в угле, выведенное Гомезом и Хазеном (Gomez and Hazen) (1970). Это уравнение содержит полином с несколькими десятками членов, а также значительное количество тригонометрических функций и экспонент. Проблема заключается в том, что геологические переменные отображают значительное количество мало масштабных процессов, которые накладываются на крупномасштабные, сравнительно достоверно описываемые уравнениями тренда. Утверждение о существовании некоррелированной ошибки означает, что функция имеет много колебаний и поворотов, что объясняет присутствие экспонент и тригонометрических выражений в выведенном уравнении. Это наводит на мысль, что возможно лучше сконцентрировать внимание на корреляции между значениями переменной в точках, расположенных на определенных расстояниях друг от друга. Это основная идея геостатистики.

**Геостатистика.** Термин *пространственная переменная* был введен Матероном (Matheron) (1963, 1965), чтобы подчеркнуть два очевидных противоречия этих типов переменных: аспект случайности, который отвечает за локальную (мелкомасштабную) нерегулярность, и структурный аспект, который отражает крупномасштабные тенденции. Общие статистические модели, включающие поверхности тренда, закладывают случайность в компонент ошибки, а все структуры - в детерминированные выражения. К сожалению, это невозможно для геологического феномена. Лучший путь представления реальности – это введение случайной компоненты в выражение флуктуации вокруг установленной поверхности, названной Матероном “дрифтом” (drift), чтобы избежать любого конфликта с термином “тренд”. Флуктуации не являются “ошибками” в чистом виде, а скорее - полностью обособленным компонентом со своей собственной структурой. Первая задача геостатистического исследования – это определение данных структур, называемое “структурным анализом”. Далее геостатистик может продолжить оценивать и моделировать переменные.

### 2.3 Случайные функции

Наблюдаемая величина в каждой точке данных  $x$  считается одним результатом  $z(x)$  случайной переменной  $Z(x)$ . Ее среднее называется дрифтом,  $m(x)$ . В точках, где измерения не были сделаны, величины  $z(x)$  тоже определены несмотря на то, что они неизвестны. Они также могут считаться результатами соответствующей случайной переменной  $Z(x)$ .

В математических терминах совокупность всех этих случайных переменных называется случайной функцией. (Синонимы: случайный процесс, случайное поле). Случайная функция имеет такую же связь с одной из ее реализаций, как и случайная переменная - с одним из ее



результатов, исключая то, что реализация случайной функции является функцией, тогда как результатом случайной величины является число. Случайная функция характеризуется конечными пространственными распределениями, т.е. объединенными распределениями любых наборов переменных  $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_k)$ , для всех  $k$ , и для всех точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Невозможно сделать что-либо с этой моделью, если мы не сделаем некоторых предварительных предположений о характеристиках этих распределений. Следующий подраздел описывает наиболее общие гипотезы. До рассмотрения деталей читателю может быть интересно узнать, какие типы переменных могут быть смоделированы как случайные функции. В Рамке № 1 приведены некоторые наиболее общие из них.

**Рамка № 1 : Переменные, которые могут быть смоделированы случайными функциями.**

- Содержания полезных компонентов для месторождений драгоценных и цветных металлов, урана, угля, алмазов, песков и нерудного сырья.
- Показатели качества полезных ископаемых, например для железной руды - содержание кварца, алюминия, потери при прокаливании и, иногда, присутствие марганца; для золота - содержание мышьяка; для угля – теплотворной способности, содержания золы и серы; для цемента - содержания железа, оксида марганца, влажности.
- Геометрические переменные, такие как толщина пласта, мощность вскрыши, глубина геологического горизонта, отметка уровня подземных вод,
- Индикаторы типов руд и пород, например для обозначения песчаника и сланца на нефтяном месторождении, или различных пород - в общем случае,
- Пористость и проницаемость, для нефтяных резервуаров и водоносных слоев, гидростатического напора и коэффициента проницаемости пород в гидрогеологии,
- Концентрация элементов геохимического анализа в пробах почвы и отложениях.
- Концентрация загрязнений в почве, воде и атмосфере,
- В почвоведении - концентрация элементов (например, Cu и Co), результат подсчета нематод (nematode) в почве,
- В науке о рыболовстве - количество рыб и икры, температура воды, соленость; плотность устриц на единицу площади,
- В гидрологии - подсчет осадков и дренирования.
- Плотность деревьев в тропических лесах.

## **2.4 Гипотезы стационарности и внутренней (intrinsic) гипотеза**

В статистике обычно предполагается, что переменная стационарна, если ее распределение инвариантно к смещению. Другими словами стационарная, случайная функция является однородной и повторяемой в

пространстве. При любом приращении  $h$  распределение  $Z(x_1)$ ,  $Z(x_2)$ , ...,  $Z(x_k)$  остается тем же самым  $Z(x_1+h)$ ,  $Z(x_2+h)$ , ...,  $Z(x_k+h)$ . Это делает статистический вывод законным даже на одиночной реализации функции. В самом строгом значении стационарность требует, чтобы все моменты были инвариантны к смещению, но поскольку это не может быть проверено из-за ограниченности экспериментальных данных, то обычно достаточно, чтобы только первые два момента (среднее и дисперсия) были константами. Это называется “неполной стационарностью” или стационарностью второго порядка. Другими словами, математическое ожидание (или среднее)  $Z(x)$  должно быть константой для всех точек  $x$ . Следовательно,

$$E(Z(x))=m(x)=m \quad [2.1]$$

Во-вторых, ковариационная функция между двумя точками  $x$  и  $x+h$  зависит от вектора  $h$ , но не от точки  $x$ . То есть,

$$E[Z(x) Z(x+h)]-m^2=C(h) \quad [2.2]$$

Нет смысла делать предположение о дисперсии, потому что это эквивалентно равенству ковариации для нулевого интервала,  $C(0)$ .

На практике часты ситуации, когда это предположение не выполняется. Понятно, что когда существует тренд, то значение среднего не может считаться константой. “Нестационарными” пространственными переменными занимается другой раздел геостатистики, который выходит за рамки этой книги. Заинтересованные читатели могут обратиться к Матерону (1973) или Делфинеру (Delfiner) (1976).

В данной работе мы будем касаться случаев, где среднее является константой. Однако, даже если это соответствует действительности, ковариация не обязательно должна существовать. Первый практический пример этого был описан Кригом (1978) для содержаний золота в Южной Африке. В теоретической и практической разделах геостатистики принято несколько смягчать условия гипотезы стационарности. Поэтому Матерон (1963, 1965) разработал “внутреннюю (intrinsic) гипотезу”. Она допускает, что приращение функции является слабо стационарным. Это означает, что среднее и дисперсия приращения  $Z(x+h)-Z(x)$  существуют и не зависят от расположения точки  $x$ .

$$E[Z(x+h)-Z(x)]=0 \quad [2.3]$$

$$\text{Var}[Z(x+h)-Z(x)]=2\gamma(h) \quad [2.4]$$

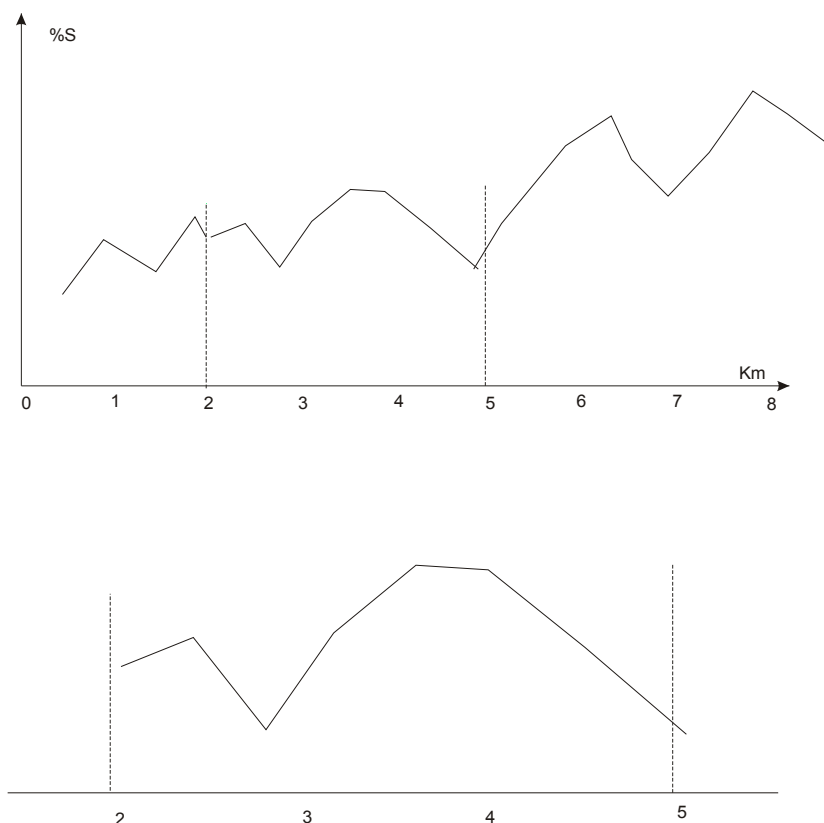
Функция  $\gamma(h)$  называется полувариограммой (вариограммой - для краткости). Это основной инструмент для структурной интерпретации явления, а также – для оценивания.

Стационарные пространственные переменные всегда удовлетворяют внутренней гипотезе, но обратное - не обязательно верно. Позже в этой главе мы увидим, что, если пространственная переменная стационарна, то ее вариограмма  $\gamma(h)$  и ее ковариация  $C(h)$  эквивалентны.

Большинство оценок, используемых в науках о Земле, являются линейными комбинациями (т.е. взвешенными движущимися средними) данных. Это верно для метода обратных расстояний и для кригинга (как это будет показано дальше) и даже для полигонального метода, где все веса, исключая единицу, равны нулю. Поэтому важно уметь вычислять дисперсию линейных комбинаций с помощью вариограммы и/или ковариационной функции. В противоположность стационарному случаю, при работе с внутренними переменными все операции выполняются только для приращений. Позже мы покажем, что дисперсия линейных комбинаций может быть вычислена только если сумма весов равна 0. Используя внутренние пространственные переменные вместо стационарных, мы должны работать с приращениями, но зона влияния полученных моделей вариограмм при этом значительно увеличивается.

## **2.5 Как определить, стационарна ли переменная**

Перед тем как мы более подробно рассмотрим вариограммы, важно увидеть, как определить стационарна исследуемая переменная или нет. На практике вариограммы используются только для ограниченных расстояний. Это ограничение может быть связано с протяженностью однородной зоны внутри месторождения или диаметра окрестности, используемой в кригинге (т.е. при оценивании). Следовательно, явление должно быть стационарным для данного расстояния. Проблема заключается в определении, можем ли мы найти ряд подвижных окрестностей, для которых математическое ожидание и вариограмма могут быть приняты постоянными и где имеется достаточно данных для получения значащих оценок. Это предположение квази-стационарности является реальным компромиссом между масштабом однородности феномена и чувствительностью опробования. Рассмотрим пример.



**Рис 2.1.** Диаграмма изменения содержания серы в центральном сечении. На 8 км длине, содержание серы является нестационарным, из-за растущего тренда. Но внутри интервала 2-5 км оно может быть определено, как локально стационарное, потому что флуктуации преобладают над трендом.

Определим содержание серы в угле вдоль центрального поперечного сечения. На всем интервале видно явное возрастание величины слева направо. Однако если посмотреть на центральную часть сечения, то там флуктуации маскируют тренд. Это означает, что в данном масштабе содержание серы может быть определено, как локально стационарное или, по крайней мере, переменная является внутренней, тогда как она явно нестационарна на более длинной дистанции. На практике, блоки угля для оценки имеют размер для подземного рудника 100м на 100м, а для добычи лавами – 200м на 60м. Пробы берутся в среднем по сетке 500м на 500м для первоначальных скважин и по сети 100м на 100м впоследствии. Кроме этих проб нет других точек данных на несколько километров в сторону. Они достаточно близко расположены к друг другу.

## 2.6 Функция пространственной ковариации

До подробного рассмотрения свойств вариограммы, мы представим некоторые основные свойства пространственной ковариации и определим связь между ней и вариограммой для стационарных случайных функций. (Отметьте: не существует ковариации для случайной внутренней функции, которая не стационарна). Три важных свойства ее перечислены ниже. Доказательство приведено в Рамке № 2.

$$C(0)=\sigma^2 \quad [2.5]$$

$$C(h)=C(-h) \quad [2.6]$$

$$|C(h)| \leq C(0) \quad [2.7]$$

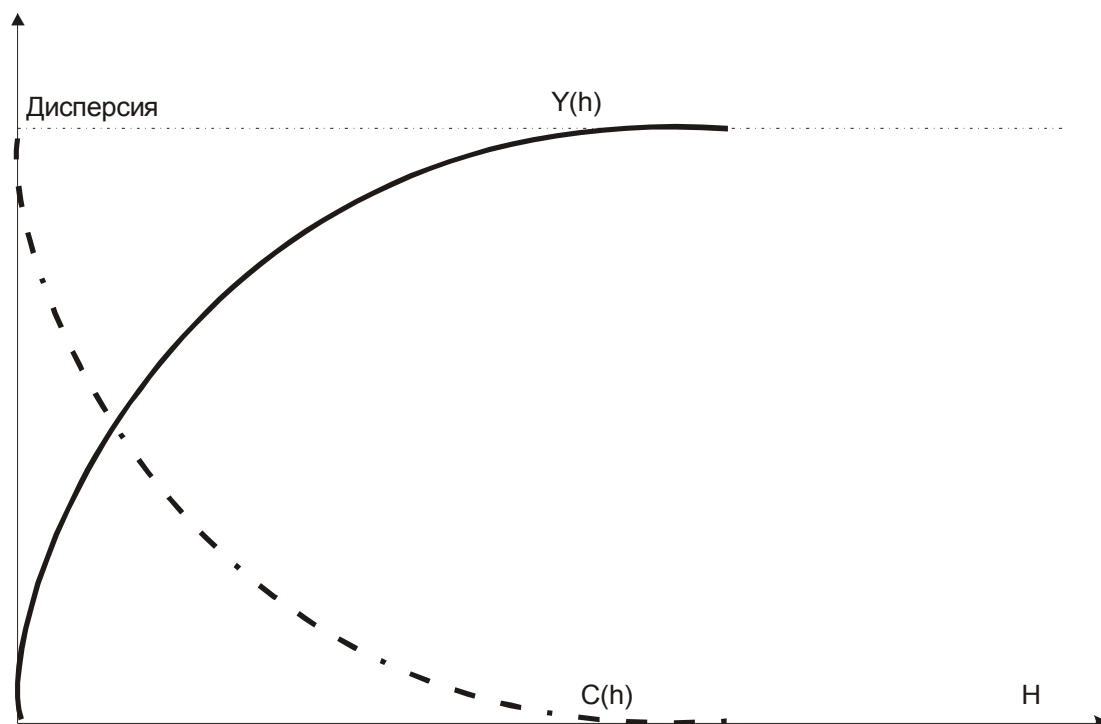
Отметьте, что в некоторых выражениях появляются абсолютные значения, потому что ковариация может иметь отрицательные значения. Наше следующее задача - установить связь между вариограммой и соответствующей ковариационной функцией:

$$\boxed{\gamma(h)=C(0)-C(h)} \quad [2.8]$$

**Доказательство.** Доказательство начнем с определения вариограммы:

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= E\left[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2\right] \\ &= E\left[(Z(x+h)-m)^2 + (Z(x)-m)^2 - 2(Z(x+h)-m)(Z(x)-m)\right] \\ &= 2C(0) - 2C(h) \end{aligned} \quad [2.9]$$

Отсюда результат. Он показывает, что соответствующая ковариация получается “перевертыванием вариограммы сверху вниз”. Рисунок 2.2. иллюстрирует эту идею.



**Рис 2.2.** Вариограмма начинается с нуля и возрастает до значения порога (дисперсии), а пространственная ковариационная функция начинается от дисперсии и уменьшается до нуля.

**Рамка № 2 : Доказательства свойств ковариации.**

**Первое свойство.** Для стационарных переменных среднее  $m$  существует. Ковариация равна, по определению:

$$C(h) = E[(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)] \quad [2.10]$$

Подстановка  $h=0$  дает

$$C(0) = E[(Z(x+0) - m)(Z(x) - m)] = \sigma^2 \quad [2.11]$$

**Второе свойство.** По определению

$$C(-h) = E[(Z(x-h) - m)(Z(x) - m)] \quad [2.12]$$

Подставляя  $t=x-h$ , получаем

$$C(-h) = E[(Z(t) - m)(Z(t+h) - m)] = C(h) \quad [2.13]$$

**Третье свойство.** Для доказательства третьего свойства мы должны показать, что

$$C(h) \leq C(0) \text{ и } C(h) \geq -C(0) \quad [2.14]$$

Мы начнем с неравенства

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} \\ &= E[(Z(x+h) - m)^2 + (Z(x) - m)^2 - 2(Z(x+h) - m)(Z(x) - m)] \\ &= 2C(0) - 2C(h) \end{aligned} \quad [2.15]$$

$$\text{Отсюда } C(h) \leq C(0) \quad [2.16]$$

Аналогично можно получить другое неравенство, если начать с выражения

$$0 \leq E\{[Z(x+h) + Z(x)]^2\}$$

$$\text{Отсюда } C(h) \geq -C(0) \quad [2.17]$$

В результате мы получили

$$|C(h)| \leq C(0) \quad [2.18]$$

Это называется неравенством Шварца (Schwartz's inequality).

Понятно, что это становится возможным только тогда, когда вариограмма ограничена сверху порогом. Можно математически доказать, что ограниченные сверху вариограммы получаются только для стационарных пространственных переменных. Правильнее будет сказать, что только стационарные пространственные переменные имеют вариограммы с порогом. Следовательно, беспороговые вариограммы получаются из внутренних или нестационарных пространственных переменных.

Наконец можно доказать, что для стационарных и внутренних переменных

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{h^2} = 0 \quad [2.19]$$

Этот результат нелегко доказать. Интересующиеся читатели могут обратиться к Матерону (1972). Уравнение означает, что, если вариограмма возрастает быстрее, чем квадрат  $h$ , то переменная нестационарная.

## 2.7 Упражнения

**Выражение дисперсий в терминах ковариаций.** Одним из ключевых элементов геостатистики является выражение дисперсии линейной комбинации (взвешенного среднего) в понятиях весов и ковариационной функции, и позже - вариограммы. Первое упражнение выводит основную формулу; во втором – она применяется к частному случаю.

**Упр 2.1.** Пусть  $Z(x)$  стационарная случайная функция. Ее пространственная ковариация обозначена  $C(h)$ . Пусть  $Z^*$  взвешенное среднее значений в двух точках:

$$Z^* = \lambda_1 Z(x_1) + \lambda_2 Z(x_2) \quad [2.20]$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – два весовых коэффициента и  $x_1$  и  $x_2$  – две точки. Какое будет ожидаемое значение  $Z^*$ ? Выразите ее дисперсию в терминах весовых факторов и ее ковариации  $C(h)$ .

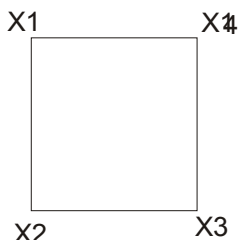
Теперь обобщите это для произвольной комбинации  $Z^{**}$

$$Z^{**} = \sum_i \lambda_i Z(x_i) \quad [2.21]$$

Какое ожидаемое значение  $Z^{**}$ ? Покажите, что ее дисперсия может быть записана другим образом:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z^{**}) &= \sum_i \lambda_i^2 \text{Var}\left(Z(x_i) + 2 \sum_{j>i} \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j)\right) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) \end{aligned} \quad [2.22]$$

**Упр 2.2.** Пусть  $Z(x)$  - стационарная случайная функция, и пусть  $Z^*$  взвешенное среднее значений величин в четырех углах квадрата со сторонами 100м на 100м:



$$Z^* = 0.5 Z(x_1) + 0.5 Z(x_2) + 0.2 Z(x_3) + 0.1 Z(x_4) \quad [2.23]$$

Оценить дисперсию  $Z^*$ , если пространственная ковариация  $Z(x)$  экспоненциальная:

$$C(h) = 2.5 \exp(-|h|/200) \quad [2.24]$$

(В следующей главе мы увидим, что это приемлемая модель для ковариации).



### 3. Вариограмма

#### Содержание

Эта и следующая глава посвящены вариограмме. В первой главе после определения вариограммы обсуждаются ее теоретические свойства (например, зона влияния, поведение около начала, анизотропия, присутствие тренда и т.д.). Представлены основные модели вариограмм. Чтобы проиллюстрировать разницу между моделями, приведены примеры вариограмм для некоторых видов переменных. Доказывается формула для вычисления дисперсии линейной комбинации пространственных переменных в терминах вариограммы. Подчеркивается причина, почему только положительно определенные функции могут быть использованы в качестве моделей для вариограмм.

#### Определение вариограммы

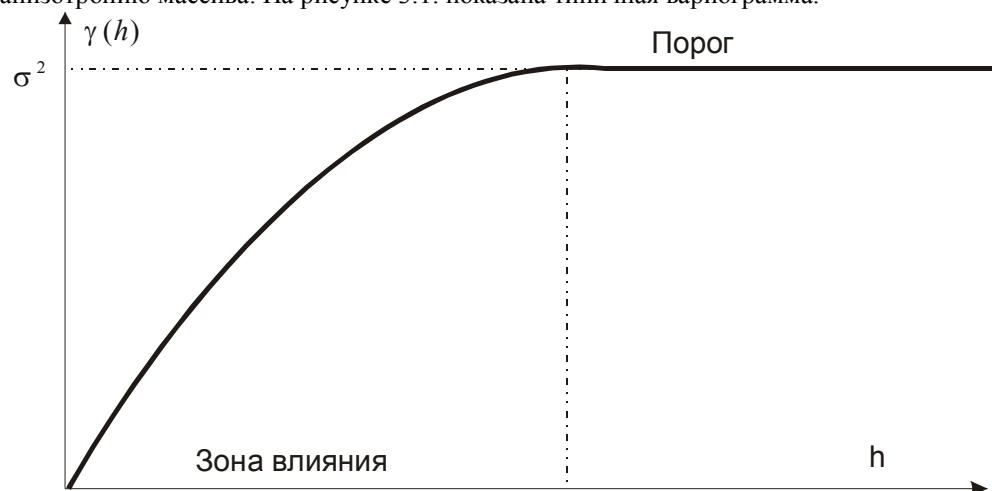
В главе 2 вариограмма внутренней случайной функции определена как:

$$\gamma(h) = 0.5 \text{Var}[Z(x+h) - Z(x)] \quad [3.1]$$

Для стационарных и внутренних переменных среднее  $Z(x+h) - Z(x)$  – нуль, и поэтому  $\gamma(h)$  – только среднее квадрата разности. Следовательно,

$$\gamma(h) = 0.5 E[Z(x+h) - Z(x)]^2 \quad [3.2]$$

Здесь  $x$  и  $x+h$  относятся к точкам в  $n$ -мерном пространстве, где  $n$  может быть 1, 2 или 3. Например, когда  $n=2$  (т.е. на плоскости),  $x$  обозначает точку  $(x_1, x_2)$  и  $h$  – вектор. Следовательно, вариограмма – это функция от двух компонент  $h_1$  и  $h_2$ , или альтернативно, от модуля вектора  $h$  и его ориентации. Для зафиксированного направления вариограмма показывает, как изменяются значения исследуемой величины при увеличении расстояния между точками. Когда направление изменяется, с помощью вариограммы можно определить анизотропию массива. На рисунке 3.1. показана типичная вариограмма.



**Рис 3.1.** Типичная вариограмма, которая достигает предела, называемого порогом (sill), на расстоянии, называемом зоной влияния (range)

Вариограмма имеет следующие особенности:

- Она всегда начинается с нуля (для  $h=0$ ,  $Z(x+h)=Z(x)$ ). Она может прерываться только после начала.
- Она обычно возрастает с увеличением  $h$ ,
- Она возрастает до некоторого уровня, называемого порогом, и затем становится плоской. Иногда она может возрастать и дальше.

Свойства вариограммы сейчас будут рассмотрены в деталях.

### **Непрерывность и зона влияния**

Степень возрастания вариограммы с расстоянием показывает, как быстро уменьшается влияние пробы. После того как вариограмма достигает ее ограничивающего значения (ее порога), корреляции между пробами больше нет. Это критическое расстояние, называется зоной влияния. Для стационарных переменных  $\gamma(h)$  эквивалентно дисперсии на расстоянии больше зоны влияния. Это означает, что:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= 0.5 \text{Var}[Z(x+h) - Z(x)] \\ &= 0.5 [\text{Var}(Z(x+h)) + \text{Var}(Z(x))] = \sigma^2\end{aligned}\quad [3.3]$$

Не все вариограммы достигают порога. Некоторые вариограммы (см. рис. 3.2.) продолжают возрастать с увеличением расстояния. Это свойство является одним из фундаментальных отличий вариограммы от ковариационной функции. Последняя существует только для стационарных переменных и ограничена.

Зона влияния необязательно одинакова во всех направлениях. Поэтому она отражает феномен анизотропии. К тому же, даже для одних и тех же направлений может быть более одной зоны влияния. Это случается когда существует несколько вложенных структур, действующих в разных направлениях по-разному. Примеры анизотропии и вложенных структур будут представлены позже.

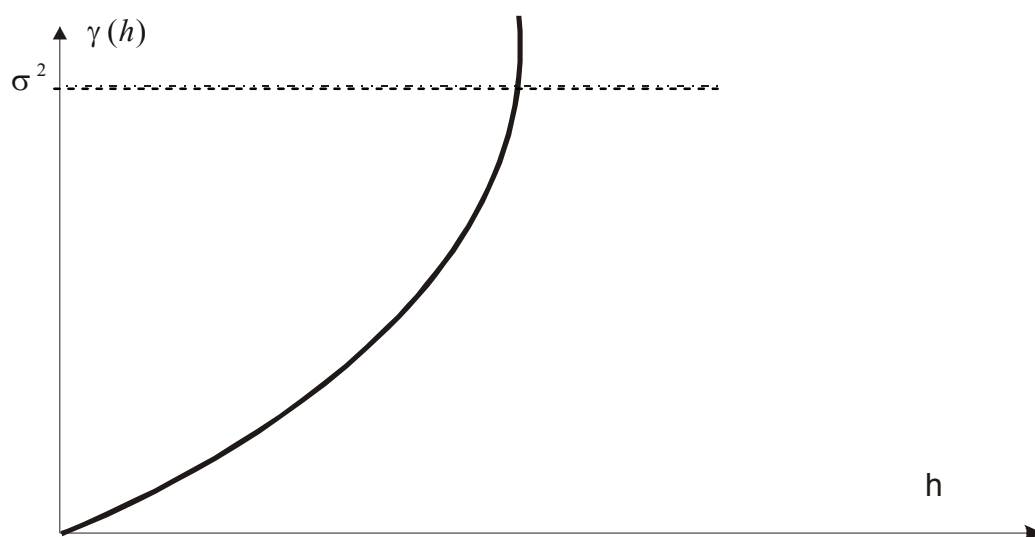


Рис 3.2. Беспороговая вариограмма

### **Поведение около начала**

Мы исследовали поведение вариограммы только на сравнительно больших расстояниях. Но более важно изучить ее поведение для малых значений  $h$ , потому что это связано с непрерывностью и пространственной регулярностью исследуемой переменной. На рис. 3.3. изображены четыре типа поведения вариограммы около начала.

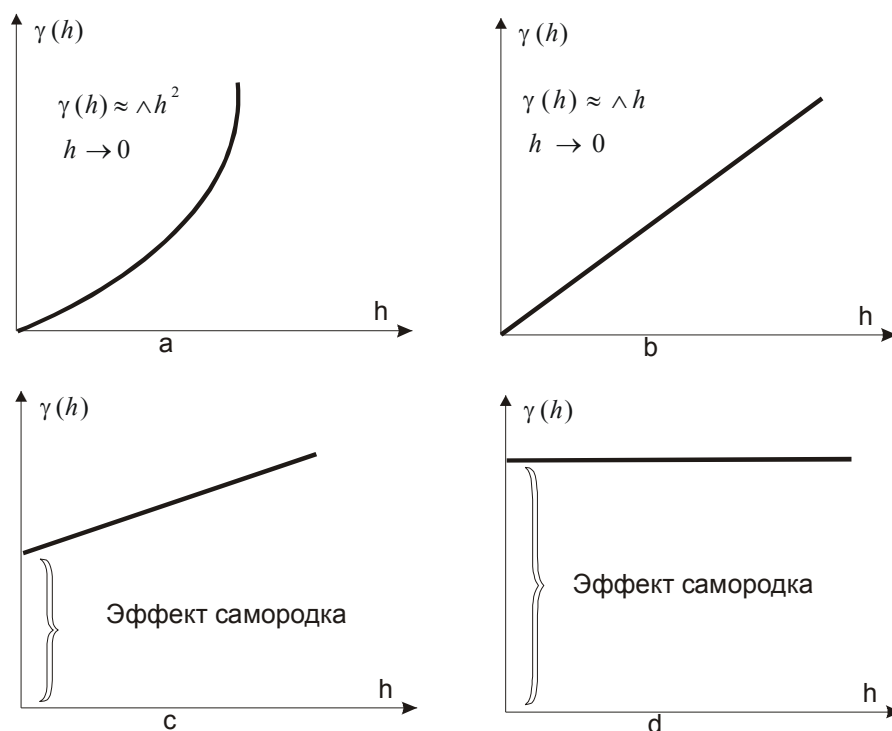
1. **Квадратичный.** Этот тип показывает, что пространственная переменная имеет высокую непрерывность. Фактически это говорит о дифференцируемости. Квадратичная форма может также ассоциироваться с присутствием тренда.

2. **Линейный.** пространственная переменная непрерывна, но не дифференцируема, и, таким образом, менее регулярна, чем предыдущая.

3. **С разрывом в начале** т.е.  $\gamma(h)$  не стремится к нулю, при  $h$  близких к 0. Это означает, что переменная в высокой степени нерегулярна на малых расстояниях.

4. **Плоский.** Чисто случайная функция или «белый шум». Пространственные переменные  $Z(x+h)$  и  $Z(x)$  некоррелированы для всех значений  $h$ , и расстояние между ними не имеет значения. Это предельный случай полного отсутствия структуры. Это, кстати, модель, используемая в анализе поверхности тренда.

Вариограммы большинства геологических переменных, включая содержания металлов, как правило имеют разрыв в начале. Это явление называется эффектом самородка, потому что было впервые отмечено на золотом месторождении в Южной Африке, где его связывали с присутствием в руде самородков золота. Содержание резко изменяется от нуля (снаружи самородка) до высокого значения внутри него. Золото это не единственный минерал, который содержит самородки. Крупницы пирита, случайно расположенные в угле, приводят к неустойчивому изменению в содержании серы. Термин “эффект самородка” также применяется для характеристики непостоянства исследуемой переменной на малых расстояниях даже в том случае, когда известно, что на высокую изменчивость влияет другой фактор, такой как микроструктура руды, ошибка измерения переменной или ошибки в определении местоположения пробы.



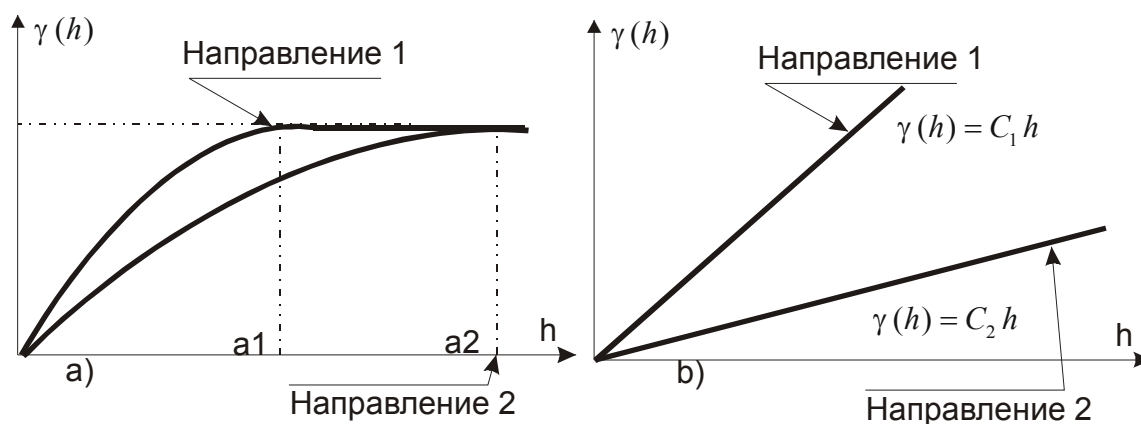
**Рис 3.3.** Поведение вариограммы около начала. Квадратичная форма (а) показывает высокую степень непрерывности переменной; линейное поведение (б) демонстрирует умеренную непрерывность. Разрыв в начале (с, d) показывает неустойчивое поведение на малых расстояниях, которое называется эффектом самородка.

### **Анизотропия**

Когда вариограмма вычисляется в различных направлениях, то иногда поведение ее бывает различным для некоторых из этих направлений (т.е. наблюдается анизотропия). Если этого не происходит, то вариограмма зависит только от величины расстояния между двумя точками и называется изотропной. Можно выделить два различных типа анизотропии: геометрическую анизотропию и зональную анизотропию.

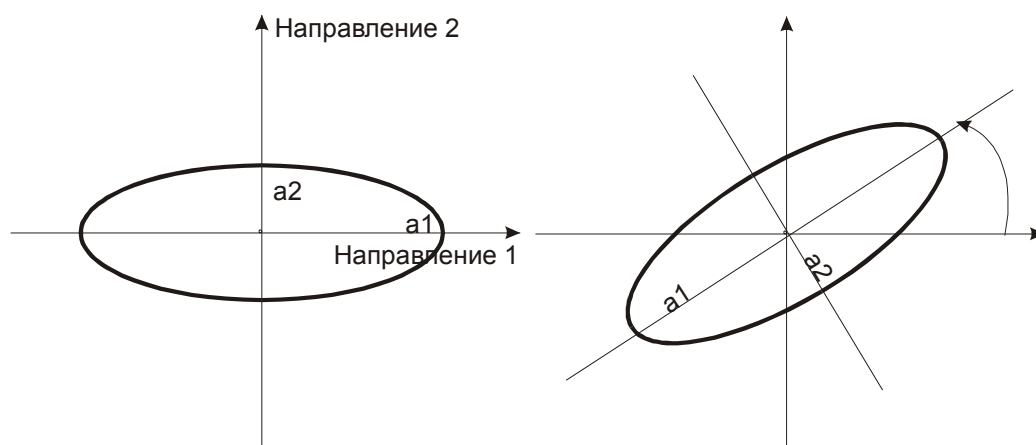
#### *Геометрическая анизотропия*

На рисунке 3.4. изображены примеры геометрической анизотропии. На левом рисунке вариограммы имеют одинаковый порог в обоих направлениях, но зоны влияния различны, в то время, как на правом рисунке обе функции линейны, но имеют разные углы наклона.



**Рис 3.4.** Эллиптическая или геометрическая анизотропия

Мы можем нарисовать диаграмму, показывающую зависимость зоны влияния или угла наклона в зависимости от направления. (Рис. 3.5.). Если кривая является эллипсом (в 2-х мерном пространстве), то анизотропия называется геометрической (или эллиптической). В этих случаях простейшими изменениями координат эллипс преобразуется в окружность, и анизотропия устраняется.



**Рис 3.5.** Эллипсы, показывающие главные оси эллипса в случае геометрической анизотропии

Это преобразование особенно просто, когда главная ось эллипса совпадает с координатными осями, как показано на Рис. 3.5. (а). Затем если уравнение вариограммы в направлении 1 есть  $\gamma_1(h)$ , то общая вариограмма после исправления анизотропии имеет следующий вид:

$$\gamma(h) = \gamma_1\left(\sqrt{h_1^2 + k^2 h_2^2}\right) \quad [3.4]$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – два компонента  $h$ , и  $k$  – отношение анизотропии, определенное, как:

$$k = \frac{\text{range } 1}{\text{range } 2} \text{ или } k = \frac{\text{slope } 1}{\text{slope } 2} \quad (\text{range – зона влияния, slope – угол наклона}) \quad [3.5]$$

При первом вычислении вариограммы, важно исследовать по крайней мере четыре направления. Если вариограмма вычисляется только в двух перпендикулярных направлениях, то анизотропию возможно потерять полностью. Это случается, например, когда главные оси эллипса анизотропии повернуты относительно направлений, в которых рассчитываются вариограммы, на 45 градусов, как показано на Рис. 3.5.b.

#### *Зональная (или стратифицированная) анизотропия*

Существуют более сложные виды анизотропии. Например, вертикальное направление в слоистом массиве часто играет особую роль, потому что между слоями существует больше различий, чем вдоль них. В этих случаях пороги вариограммы не одинаковы для разных направлений. Существует обычная практика разделять вариограмму на две компоненты, изотропная компонента плюс еще одна, которая действует только в вертикальном направлении:

Изотропная компонента

Вертикальная компонента:

$$\gamma_0(\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}) \quad \gamma_1(h_3) \quad [3.6]$$

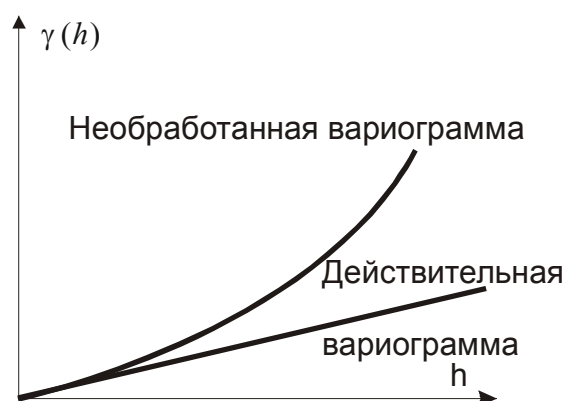
Полная вариограмма  $\gamma(h)$  –

$$\gamma(h) = \gamma_0(h) + \gamma_1(h) \quad [3.7]$$

#### **Присутствие тренда**

Как упоминалось в конце Главы 2, теория показывает, что для внутренних и стационарных переменных, вариограмма возрастает медленнее, чем квадрат для больших расстояний. Для большей определенности, можно записать:

$$\frac{\gamma(h)}{h^2} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow \infty \quad [3.8]$$



**Рис 3.6.** Вид вариограммы, свидетельствующий о наличии тренда

Однако, на практике часто случается, что вариограммы возрастают быстрее, чем  $h^2$ . Это указывает на наличие тренда (Рис. 3.6.). Экспериментальная вариограмма обеспечивает оценку  $0.5 E(Z(x+h)-Z(x))^2$ , которая называется необработанной вариограммой, в отличие от верной (или основной) вариограммы. Эти две вариограммы совпадают, только если приращение имеет нулевое среднее. Иначе говоря:

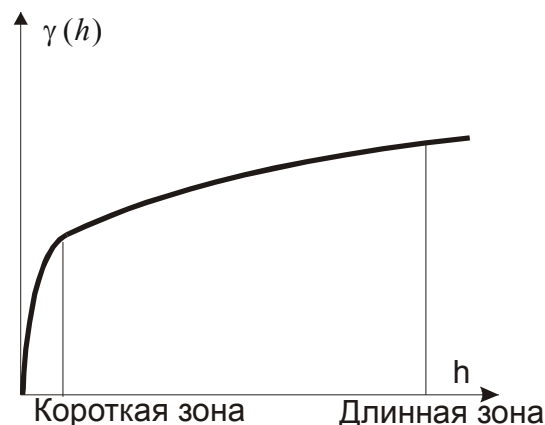
$$E[Z(x+h)-Z(x)]^2 \quad [3.9] \quad = \text{Var}[Z(x+h)-Z(x)] + (E[Z(x+h)-Z(x)])^2$$

необработанная вариограмма = основная вариограмма + (параметр смещения)<sup>2</sup>

Если присутствует тренд, то эмпирическая вариограмма переоценивает основную вариограмму.

### **Вложенные структуры**

Глядя на экспериментальные вариограммы, иногда можно увидеть вложенные структуры. На Рис. 3.7. более длинная зона влияния очевидно является вложенной структурой, потому что вариограмма достигает порога на этом расстоянии. Более короткую зону влияния можно распознать по характерному изменению кривизны функции. Это хорошо заметно, когда две зоны влияния достаточно различны. Если нет, то изменение кривизны линии часто не является очевидным.



**Рис 3.7.** Вложенная структура, составленная из структур с короткой и длинной зонами влияния.

Вложенные структуры указывают на присутствие процессов, оперирующих в различных масштабах. Например, это может быть ошибкой измерения на уровне пробы, т.е. для  $h=0$ . На петрографической шкале (т.е.  $h < 1$  см) это может быть изменчивость, обусловленная переходом от одного минералогического агрегата к другому. На уровне пласта или минерализованной залежи (т.е. для  $h < 100$  м) появляется третий тип изменчивости в точке перехода от руды к пустой породе или от одного типа породы к другому.

### **Пропорциональный эффект**

Считается, что вариограмма имеет пропорциональный эффект, когда ее значение (особенно ее порог) пропорционально квадрату локального среднего содержания. Это часто встречается у логнормально распределенных данных. Вариограммы для различных зон имеют одинаковую форму, но порог в богатых зонах намного больше, чем в бедных. Так же как порог часто оказывается пропорциональным квадрату локального среднего содержания, основная вариограммная модель может быть найдена делением значений каждой локальной вариограммы на квадрат локального среднего содержания и затем усреднение полученных величин в процессе подгонки вариограммной модели.

### **Скважинный эффект и периодичность**

Между началом и бесконечностью поведение вариограммы отражает разные варианты поведения, такие как присутствие вложенных структур, иногда, скважинный эффект или даже периодичность. В некоторых случаях экспериментальная вариограмма поднимается до значения порога, а затем падает вниз. Так как этот “бугор” в вариограмме соответствует провалу в ковариационной функции, то этот эффект называется скважинным эффектом. Иногда эту особенность можно объяснить геологически. Одним из подобных примеров является вариограмма, вычисленная Серрой (Serra) (1968) по сечениям железорудной залежи в провинции Лоран (Lorraine) во Франции. Кристаллы кальцита имеют свойство быть разделенными интервалами примерно пропорциональными их размеру, потому что процесс кристаллизации располагает зародыши кристаллов случайным образом. Обычно большинство периодических структур основаны на скважинном эффекте. Но более общая причина этого эффекта обусловлена естественными флуктуациями вариограммы или статистическими флуктуациями, из-за использования слишком малого количества пар точек в вычислении экспериментальной вариограммы.

Вариограммы, так же как и ковариационные функции могут иметь периодическое поведение. Хотя для временных рядов это свойство является обычным, его достаточно трудно объяснить с позиций геологии. Складчатые напластования однако могут показать периодичность. Но обычно считают, что периодичность искусственно обусловлена скорее человеческой активностью, чем матерью - природой. Например, значения содержаний, полученных в течение ночной смены может статистически отличаться от дневной смены. Каждый раз важно проверять, что эффект настоящий, а не создан искусственно. Один из природных случаев, когда может встретиться периодичность, это когда руда лежит на склонах хребта или ущелья, как это иногда происходит в осадочных месторождениях золота. Вариограммы, вычисляемые в направлениях, перпендикулярных к хребту или ущелья, могут показать периодичность, но в направлениях вдоль складок – нет. Пример этого представлен в Главе 5.

### **Модели вариограмм**



Для использования вариограммы в процессе оценивания к ней должна быть подобрана математическая модель. Причина этого заключается в том, что функции вариограмм должны удовлетворять определенным условиям. Другая причина связана с тем, что всегда существует риск получить отрицательную дисперсию, которая приведет к неприемлемым результатам.

### *Дисперсия допустимой линейной комбинации*

Хотя обыкновенные оценки являются линейными комбинациями данных (т.е. взвешенные средние), мы должны уметь вычислять их дисперсии. Во-первых, мы предполагаем стационарную переменную  $Z(x)$  с ковариационной функцией  $C(h)$ . Пусть линейной комбинацией будет  $Z^*$

$$Z^* = \sum_i \lambda_i Z(x_i) \quad , \quad [3.10]$$

где  $\lambda_i$  – веса и  $x_i$  – местоположения проб. По определению, их дисперсия –

$$\text{Var}(Z^*) = E(Z^* - E(Z^*))^2 \quad [3.11]$$

Не трудно показать, что если  $m$  – среднее  $Z(x)$ , то  $E(Z^*) = m \sum_i \lambda_i$ .

Следовательно

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z^*) &= E \left( \sum_i \lambda_i (Z(x_i) - m) \right)^2 = \\ &= \lambda_1^2 C(x_1 - x_1) + \lambda_2^2 C(x_2 - x_2) + \dots + \lambda_n^2 C(x_n - x_n) + 2\lambda_1 \lambda_2 C(x_1 - x_2) + \dots + 2\lambda_{n-1} \lambda_n C(x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

В результате

$$\text{Var}(Z^*) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) \quad [3.12]$$

Эта величина не должна быть отрицательной независимо от точек и весов. Для удовлетворения условию функция  $C(h)$  должна быть положительно определена.

Ситуация немного отличается, когда переменные внутренние, но нестационарные. В этом случае дисперсия произвольной линейной комбинации может не существовать. Мы можем быть уверены только в том, что она существует для линейной комбинации приращений. Комбинации являются “допустимыми”, если сумма весов равна нулю.

$$\sum_i \lambda_i = 0 \quad [3.13]$$

Ясно, что любая линейная комбинация приращений удовлетворяет этому условию, поскольку любое одиночное приращение включает веса  $+1$  и  $-1$ . И наоборот, любая комбинация, удовлетворяющая этому условию, может быть записана в виде линейной комбинации приращений. Рамка № 3 предъявляет доказательство и формулу для дисперсии в понятиях весов и моделей вариограмм. Так как ковариация может не существовать для внутренних случайных функций, то формула должна быть записана через выражение вариограммы.

$$\text{Var}\left(\sum \lambda_i Z(x_i)\right) = -\sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \quad [3.14]$$

Так как эта дисперсия должна быть неотрицательной, то модели вариограмм должны удовлетворять определенным условиям. Для любых точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , и любых весов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , таких что  $\sum \lambda_i = 0$ , мы требуем чтобы

**Рамка № 3: Вычисление дисперсии допустимых линейных комбинаций.**

Во-первых, мы хотим показать, что любая линейная комбинация, сумма весов которой равна 0, может быть выражена как комбинация приращений. Выбрав произвольную точку, как начальную, мы имеем:

$$\sum \lambda_i Z(x_i) = \sum \lambda_i [Z(x_i) - Z(0)] \quad [3.15]$$

Поэтому дисперсия существует и имеет вид:

$$\text{Var}\left[\sum \lambda_i Z(x_i)\right] = \sum \sum \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[Z(x_i) - Z(0), Z(x_j) - Z(0)] \quad [3.16]$$

Для вычисления ковариации приращений мы используем тождество:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z(x_i) - Z(0), Z(x_j) - Z(0)] &= \text{Var}[Z(x_i) - Z(0) + Z(0) - Z(x_j)] = \\ &= \text{Var}[Z(x_i) - Z(0)] + \text{Var}[Z(x_j) - Z(0)] - 2\text{Cov}[Z(x_i) - Z(0), Z(x_j) - Z(0)] \end{aligned} \quad [3.17]$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2\text{Cov}[Z(x_i) - Z(0), Z(x_j) - Z(0)] &= \\ &= \text{Var}[Z(x_i) - Z(0)] + \text{Var}[Z(x_j) - Z(0)] - \text{Var}[Z(x_i) - Z(x_j)] = \\ &= 2\gamma(x_i) + 2\gamma(x_j) - 2\gamma(x_i - x_j) \end{aligned} \quad [3.18]$$

Подставляя это в формулу [3.16], получаем:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\sum \lambda_i Z(x_i)\right] &= \sum \sum \lambda_i \lambda_j [2\gamma(x_i) + 2\gamma(x_j) - 2\gamma(x_i - x_j)] = \\ &= \sum \lambda_j \sum \lambda_i \gamma(x_i) + \sum \lambda_i \sum \lambda_j \gamma(x_j) - \sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Первые два слагаемых исчезают, т.к.  $\sum \lambda_i = \sum \lambda_j = 0$ , убираем:

$$\text{Var}\left(\sum \lambda_i Z(x_i)\right) = -\sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \quad [3.19]$$

Отсюда, очень важный результат – дисперсия любой линейной комбинации, сумма весов которых равна 0, существует и может быть вычислена заменой ковариаций в Уравнении [3.12] на  $-\gamma$ .

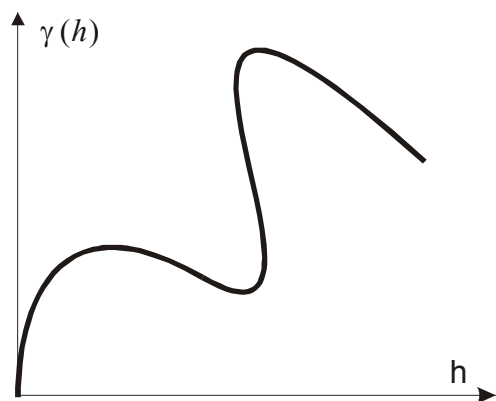
$$-\sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \geq 0 \quad [3.20]$$

Поэтому  $-\gamma$  называется условно положительно определенной. Это условие слабее, чем предшествующее для ковариационной функции, которое должно быть действительным для всех возможных весов, поэтому последнее утверждение справедливо только для весов, сумма которых равна 0. Следовательно, класс допустимых моделей вариограмм богаче, чем для ковариационных функций. Он включает пороговые вариограммы, ассоциирующиеся с ковариациями, а также – беспороговые, которые не имеют аналогов ковариационных функций. Поэтому здесь налицо компромисс между двумя гипотезами. Внутренняя гипотеза позволяет нам использовать широкий ранг вариограмм, но сумма весов должна стремиться к 0. Зона влияния допустимых моделей вариограмм более ограничена для стационарных гипотез, но любой весовой фактор может быть при этом использован.

### 3.11 Допустимые модели

Если мы хотим гарантировать, чтобы дисперсия любой линейной комбинации никогда не стала отрицательной, мы можем использовать в качестве моделей для вариограмм или ковариаций только определенные функции. Ковариации должны быть положительно определенными функциями; вариограммы должны быть условно отрицательно определенными.

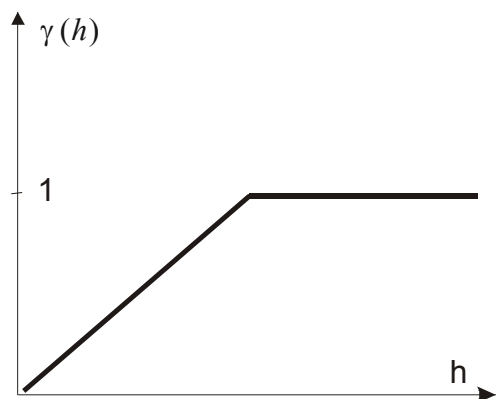
Так как нелегко найти функции, которые обладают этим свойством или произвести соответствующую проверку функций, то лучше выбрать модель вариограммы из списка подходящих функций, чем создавать новую функцию. Перечень общих моделей дан в следующем разделе. Они могут быть добавлены для получения других допустимых моделей, потому что это будет эквивалентно сложению независимых случайных функций, но вычитание невозможно. Нельзя также объединять их частями. Здесь мы имеем в виду, что вы не можете выбрать одну модель для одного интервала, и затем - другую – для следующего, как показано на Рис. 3.8.



**Рис 3.8.** Пример функции, которую нельзя использовать в качестве модели вариограммы

Чтобы надлежащим образом установить, является или не является функция положительно определенной, необходимо выполнить преобразование Фурье. Это не всегда просто даже для одномерного случая, но становится намного труднее в пространстве с более высоким измерением. Для большей информации о способах проверки функций на положительную определенность, смотрите Армстронг и Даймонд (Armstrong and Diamond) (1984).

Сделать это действительно сложно, но возможно для функций, которые положительно определены в одномерном пространстве. Например, кусочно определенная линейная функция, изображенная на Рис. 3.9., является допустимой вариограммной моделью в одномерном случае, но не в двух или трехмерном. Упражнение 3.11 показывает, как строить такие модели в одномерном пространстве, а упражнение 3.10 приводит пример для двухмерного пространства с отрицательной дисперсией.



**Рис 3.9.** Кусочно определенная линейная модель, которая допустима в одномерном пространстве и не допустима в двухмерном или в пространстве большей размерности

После предупреждения об опасности попыток создания своей собственной модели вариограммы, читатель может быть удивлен, узнав, как появились используемые сейчас модели вариограмм. Они были получены математическим моделированием случайной функции и теоретическим вычислением ее вариограммы. Полученная модель должна быть по построению положительно определенной или, по крайней мере,

условно отрицательно определенной в пространстве, в котором она была построена. Несколько упражнений в конце главы иллюстрируют эту процедуру. Например, упражнение 3.13 описывает метод построения сферических шаров, включающих случайное количество точек Пуассона, приводящих к так называемой сферической модели вариограммы.

### 3.12 Основные модели вариограмм

Нижеперечисленные модели вариограмм являются допустимыми с учетом описанных выше условий. Модели с порогом соответствуют стационарным пространственным переменным, в то время как беспороговые модели ассоциируются только с внутренними переменными. Этот список не является исчерпывающим.

#### 3.12.1 Эффект самородка

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ C, & |h| > 0 \end{cases} \quad [3.21]$$

Это модель соответствует чисто случайному явлению (белый шум) между некоррелированными значениями, независимо от расстояния между ними.

#### 3.12.2 Сферическая модель

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left( \frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{|h|^3}{a^3} \right) \right), & |h| < a \\ C, & |h| \geq a \end{cases} \quad [3.22]$$

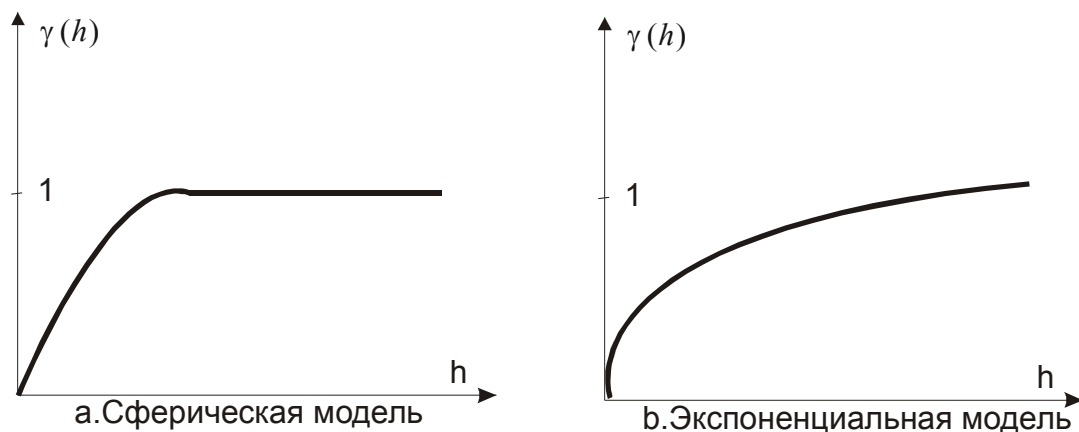
Сферическая модель, возможно, наиболее часто используемая модель. Она имеет очень простой вид, и ее форма соответствует часто встречаемым в природе явлениям: функция почти линейно возрастает до определенного расстояния и затем стабилизируется. Касательная, проведенная к началу функции, пересекает порог в точке с абсциссой  $\frac{2}{\sqrt{3}}a$ . Это очень удобно при подгонке параметров модели.

#### 3.12.3 Экспоненциальная модель

$$\gamma(h) = C \left( 1 - \exp \left( -\frac{|h|}{a} \right) \right) \quad [3.23]$$

Практическая зона влияния этой модели –  $3a$ . На этом расстоянии достигается 95% ее порога. Касательная к началу функции пересекает порог в точке с абсциссой  $a$ . Так же как сферическая функция, экспоненциальная модель линейна на малых расстояниях, что помогает их сравнивать. На рисунке 3.10 изображены обе модели с одинаковым

порогом и 0 с практической зоной экспоненциальной модели эквивалентной реальной зоне сферической. Разница довольно очевидна. Экспоненциальная модель возрастает круче в начале, но имеет только тенденцию приближаться к своему порогу скорее, чем достигает его в действительности.

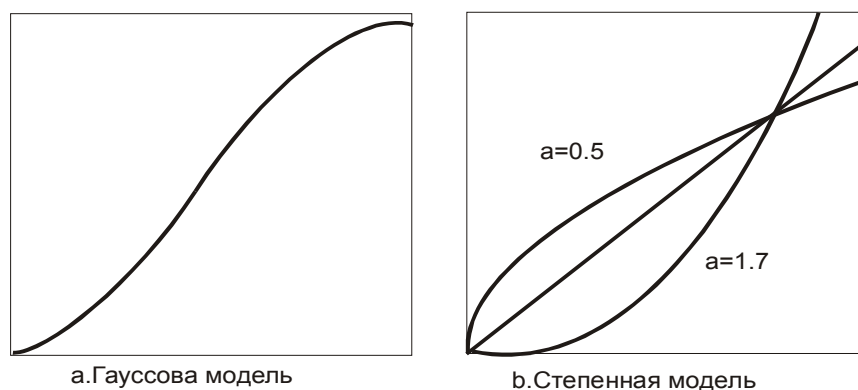


**Рис 3.10.** (а) Сферическая модель вариограммы с порогом – 1.0 и зоной – 1.0 и (б) экспоненциальная модель с потолком 1.0 и масштабным коэффициентом – 0.33 (т.е. ее практическая зона равна 1.0)

#### 3.12.4 Степенные модели

$$\gamma(h) = C|h|^\alpha \quad \text{с } 0 < \alpha \leq 2 \quad [3.24]$$

Линейная модель,  $\gamma(h) = |h|$ , является частным случаем.



**Рис 3.11.** (а) Модель вариограммы Гаусса и (б) три модели степенных функций со степенями  $\alpha=0.5$ , 1.0 и 1.7

#### 3.12.5 Модель Гаусса

$$\gamma(h) = C \left( 1 - \exp \left( -\frac{|h|^2}{a^2} \right) \right) \quad [3.25]$$

Практическая зона влияния – 1.73а. Модель Гаусса представляет предел непрерывности явления. Опыт показывает, что здесь часто встречается числовая нестабильность в случае, когда эффект самородка отсутствует.

### 3.12.6 Кубическая модель

Эта модель характеризуется параболическим поведением в начале и, в общем, близка к модели Гаусса, исключая то, что она не является бесконечно дифференцируемой. Ее уравнение –

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(7r^2 - 8.75r^3 + 3.5r^5 - 0.75r^7), & \text{если } r < 1 \\ C, & \text{иначе} \end{cases} \quad [3.26]$$

где  $r=h/a$ .

### 3.12.7 Двухмерная модель скважинного эффекта

$$\gamma(h) = C(1 - \exp(-|r|)J_0(2\pi r_2)) \quad [3.27]$$

где  $r = h/a$ ,  $r_2 = h/\lambda$  и  $J_0$  – функция Бесселя. Величина  $\lambda$  контролирует значительность эффекта.

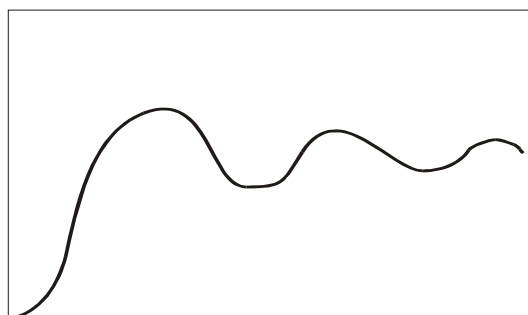
### 3.12.8 Основная синусоидальная модель

Эта модель одна из редких моделей со скважинным эффектом в трехмерном пространстве. Она соответствует очень непрерывным структурам. Ее уравнение –

$$\gamma(h) = C \left( 1 - \frac{\sin r}{|r|} \right) \quad [3.28]$$

где  $r=h/a$ .

При вычислении на карманном калькуляторе, помните, что параметр “ $r$ ” должен быть в радианах, а не в градусах. При работе с градусами  $[\sin(r)]/r$  колеблется около величины  $\pi/180=0.0174532$ .



**Рис 3.12.** Основная синусоидальная модель

### 3.12.9 Призматическая магнитная модель

$$\gamma(h) = C \left( 1 - \frac{1}{(1 + r^2)^{1.5}} \right) \quad [3.29]$$

, где  $r=h/a$ .

### 3.12.10 Призматическая гравиметрическая модель

$$\gamma(h) = C \left( 1 - \frac{1}{(1 + r^2)^{0.5}} \right) \quad [3.20]$$

где  $r=h/a$ .

Последние две модели представляют модели различных типов гравиметрических и магнитных аномалий.

### **3.13 Моделирование образов, полученных с использованием различных вариограмм**

Модели вариограмм, представленные в предыдущем разделе, имеют различные области распространения. Наиболее часто применяются экспоненциальная и сферическая модели, достаточно редко - модель скважинного эффекта. Когда большинство людей смотрят на уравнения моделей, они не могут представить себе, как могут вести себя пространственные переменные, имеющие эти вариограммы. Насколько разные свойства они имеют? Чтобы проследить различия между вариограммами, мы создадим по одной реализации (одному возможному образу) для каждой из четырех вариограмм: экспоненциальной, сферической, Гаусса и синусоидальной. (Рис. 3.13. – 3.16.) Везде используется нулевой эффект самородка. Все эти вариограммы имеют порог, поэтому они соответствуют стационарным переменным.

Полученные изображения имеют размеры 200 точек на 200 точек. Зона влияния в направлении Восток-Запад (практическая зона) была от этого. Темные и светлые участки на рисунках растягиваются и сжимаются в соответствии с принятой анизотропией. Для тех, кому интересны технические детали, моделирование было сделано с использованием 400 turning bands и результирующее распределение –  $N(0,1)$ . Методы эмуляции не охватываются линейной геостатистикой. Детали можно найти в Джорнел (Journel) и Хьюбрегтс (Huijbregts) (1978) или Лантье (Lantuejoul) (1994).

Сравнивая четыре рисунка, становится ясно, что экспоненциальная и сферическая вариограммы приводят к более “нечетким” образам, чем модель Гаусса или синусоидальная. Эта существенная разница объясняется фактом, что сферическая и экспоненциальная модели линейны в начале, в то время как остальные две имеют в начале параболическую форму. Вариограммы, которые в начале описываются квадратичной функцией, связаны с явно непрерывными переменными. Для и Экспоненциальная модель в отличие от сферической с одинаковым порогом и зоной быстрее возрастает в начале. Этим объясняется, почему картинка, построенная с использованием экспоненциальной модели, имеет менее выраженную структуру, чем для соответствующей сферической.



Если для создания аналогичного рисунка использовать чистый эффект самородка, то полученный образ полностью не будет иметь структуры, а точки с высокими и низкими значениями будут расположены случайно. Это приведет к очень “пятнистой” картинке серого цвета с неотчетливыми участками с высокими и низкими значениями переменной.

Очень важно для подгонки моделей к экспериментальным вариограммам и затем для кригинга сохранить в голове связь между моделью вариограммы и ее реализациями. Если недоступны данные, очень близко расположенные друг к другу, то форму вариограммы около начала легче выбрать с помощью геостатистики чем подобрать ее к экспериментальным функциям. Поэтому очень важно понимать критерии для такого выбора, руководствуясь или непрерывностью переменных, или их поведением.

### 3.14 Упражнения

**Свойства вариограмм.** Перед подбором моделей к экспериментальным вариограммам очень важно познакомиться ближе с их свойствами.

**Упр 3.1 Сферическая модель.** Напишите уравнение сферической модели с зоной – 300 м и порог – 2. Нарисуйте ее форму для расстояния от  $h = -500$  м до  $h = +500$  м, помня что  $\gamma(-h) = \gamma(h)$ . Обратите внимание на отражение образа функции вокруг оси  $u$ .

Кривая непрерывна в начале, но что можно сказать о ее производной? Когда мы познакомимся с кригингом, мы увидим, что оценки кригинга “наследуют” прерывистость переменной из функции вариограммы и ее производной.

**Рис 3.13.** Модулирование переменных, имеющих экспоненциальную вариограмму

**Рис 3.14.** Модулирование переменных, имеющих сферическую вариограмму

**Рис 3.15.** Модулирование переменных, имеющих гауссову вариограмму

**Рис 3.16.** Модулирование переменных, имеющих синусоидальную вариограмму

**Упр 3.2 Экспоненциальная модель.** Напишите уравнение экспоненциальной модели с масштабным параметром – 100 м и порогом – 2. Чему равна практическая зона влияния? Нарисуйте форму вариограммы для расстояния 500 м. Сравните эту модель со сферической моделью из первого упражнения.

**Упр 3.3 Касательные к в началу.** Найдите углы наклона сферической и экспоненциальной моделей, описанных в упражнениях 3.1 и 3.2,

дифференцируя их уравнения по  $h$ . Найдите расстояние, на котором касательные к началу пересекают порог.

**Упр 3.4 Модель Гаусса.** Напишите уравнение модели Гаусса с масштабным параметром – 100м и порогом – 2. Какая практическая зона влияния? Нарисуйте ее форму для расстояний от  $h = -500\text{м}$  до  $h = +500\text{м}$ . Как и раньше, левая сторона является отражением правой стороны. Какой наклон касательной в начале? Кривая непрерывна, но что можно сказать о производной? Что можно сказать о более высоких порядках производных?

**Упр 3.5 Факторные ковариации.** Напишите уравнение гауссовой модели ковариации с масштабным параметром – 1 и единичным порогом, но помните что

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Используя утверждение, что в двухмерном пространстве  $h^2$  эквивалентен  $x^2 + y^2$ , разложите  $C(h)$  на составляющие из двух оснований:  $\exp(-x^2)$  и  $\exp(-y^2)$ . Можно ли это распространить на трехмерное пространство? Когда мы дойдем до главы о кригинге, мы увидим, что факторные ковариации, как и эта, приводит к странному “перпендикулярному” экранному эффекту.

**Упр 3.6 Вариограммы, которые линейны около начала.** Сферическая и линейная модели обе линейны в начале. Напишите их углы наклона в начале в терминах порога,  $C$ , и параметра зоны,  $a$ .

Предположим, что экспериментальная вариограмма линейна с наклоном 0.5 для расстояний до 10м. Найдём подходящие значения  $a$  и  $C$  для сферической вариограммы и для экспоненциальной, которые имеют такой же наклон. Покажем, что выбор  $C=50$  и  $a=15$  даёт наклон 5 в начале для сферической модели. Нарисовав соответствующую вариограмму определим, линейна ли она до 10м. Для этого необходимы большие значения  $a$  и  $C$ . Зная углы наклона в начале можно позже использовать их для подгонки экспериментальных вариограмм.

**Вычисление дисперсии линейных комбинаций.** Большинство оценок, используемых в науках о Земле, можно записать в виде линейных комбинаций. Они включают оценки, основанные на полигонах или на методе обратных расстояний (в т.ч. - обратных квадратичных расстояний). Следующие упражнения дадут читателю практику вычислений этих дисперсий.

**Упр 3.7.** Предположим, что две пробы,  $x_1$  и  $x_2$ , разделены 100 метрами. Вычислим дисперсию линейной комбинации:  $Z^* = Z(x_1) + Z(x_2)$ , где  $Z(x)$  стационарная переменная со сферической вариограммой, зоной 250м и порогом 3.

Какая будет дисперсия, если взять зону 25м вместо 250м?

Какая будет дисперсия, если вариограммой будет чистый эффект самородка 3.0? Почему значение ее будет такое же, как и при зоне 25м?

**Упр 3.8.** Предположим линейную комбинацию:

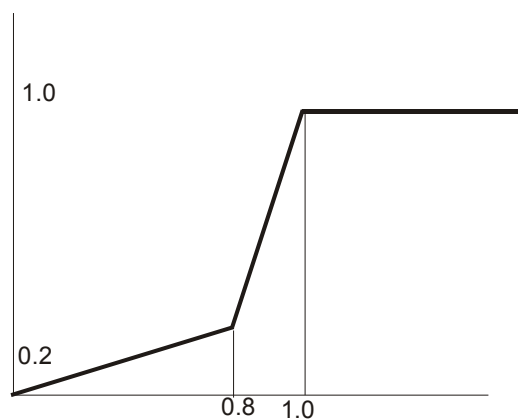
$$Z^* = \lambda_1 Z(x_1) + \lambda_2 Z(x_2) + \lambda_3 Z(x_3) + \lambda_4 Z(x_4)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  – константы, а  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  – вершины прямоугольника со сторонами 30м и 40м. Вариограмма  $Z(x)$  – сферическая с зоной 100м, порогом 4.0 и эффектом самородка 1.0. Вычислите дисперсию  $Z^*$  для случая, когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$  и  $\lambda_3 = \lambda_4 = -1.0$ .

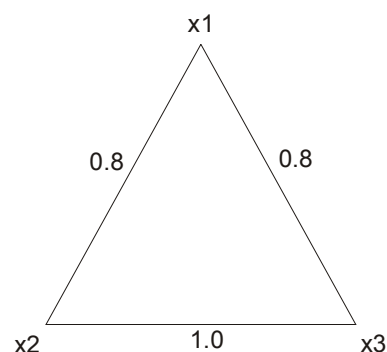
Возможно ли оценить дисперсию линейной комбинации, если вариограмма линейна? Объясните почему. Будет ли все это правдой, если все веса будут равны 0.25?

**Упр 3.9.** Обоснуйте необходимость использования только допустимых моделей вариограмм на примере случая, когда использовалась нестандартная модель. Модель и расположение данных показаны ниже. Три точки образуют равнобедренный треугольник со сторонами 0.8, 0.8 и 1.0. После расчета суммы весов, равной 0, вычислим дисперсию линейной комбинации:

$$Z^* = Z(x_1) - 0.5 Z(x_2) - 0.5 Z(x_3)$$



Нестандартная вариограмма

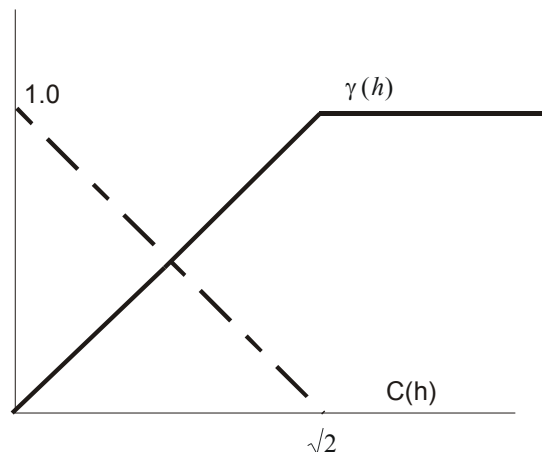


Размещение точек

Дисперсия этой комбинации отрицательна, потому что функция, используемая в качестве модели вариограммы, положительно не определена или определена условно отрицательно (даже, если ее форма примерно подходит под гауссовскую модель вариограммы).

**Упр 3.10** Кусочная линейная модель в двухмерном пространстве. Это упражнение предназначено для выделения другой еще заметной особенности положительно определенных функций. Они могут быть положительно определены в одномерном пространстве и не определены в двухмерном, а также – в пространствах с более высокими размерностями. Мы используем кусочную линейную модель для иллюстрации этого

явления. Упражнение 3.11 представит конструкцию для построения этой вариограммы в одномерном случае.

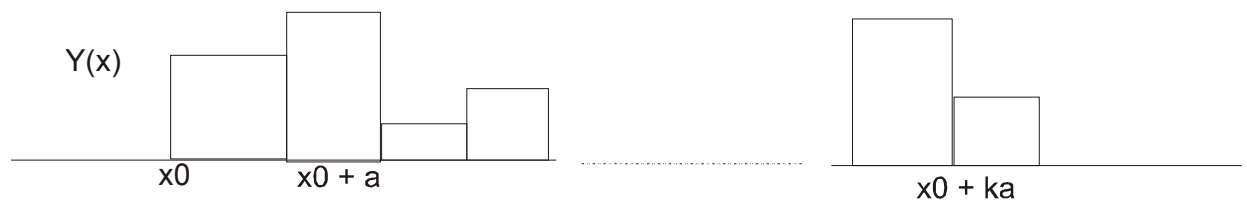


Возьмите регулярную сетку 1м на 1м, содержащую 8 на 6 ячеек (48 ячеек). Будем использовать веса  $+1$  и  $-1$  так, чтобы соседние точки всегда имели веса с противоположными знаками. Проверьте, что сумма весов равна нулю. Вариограмма и пространственная ковариация для кусочной линейной модели с единичным порогом и зоной  $\sqrt{2}$  показаны выше. Вычислите дисперсию этой линейной комбинации. Подсказка: вычислять проще, если сначала работать с ковариациями, потому что они все будут нулевыми для расстояний равных или более  $\sqrt{2}$ .

Истина заключается в том, что по крайней мере одна линейная комбинация с отрицательной дисперсией доказывает, что эта модель неприменима в одномерном пространстве. Здесь нет путей “доказательств”, что модель положительно определена, с помощью проверки дисперсий особенных комбинаций, потому что невозможно проверить каждую из них. Требуется гораздо более общий метод.

**Построение случайной функции для получения новых моделей вариограмм.** Так как очень трудно проверить функцию на положительную определенность, то большинство новых моделей вариограмм строятся с помощью подходящих конструкций. Эти упражнения представляют некоторые из них, начиная с кусочной линейной модели в одномерном пространстве.

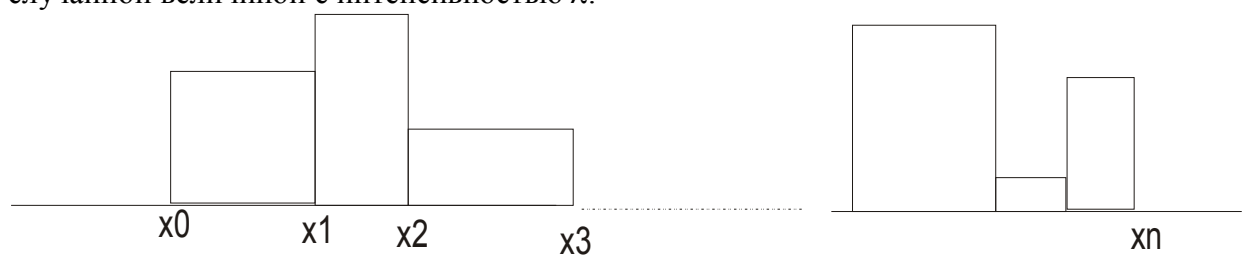
**Упр 3.11 Кусочная линейная модель в одномерном пространстве.** Цель этого упражнения показать, что кусочная линейная модель является допустимой вариограммой в одномерном пространстве. После построения начала,  $x_0$ , на случайном интервале  $[0, \alpha]$ , разделите линию на сегменты длиной  $\alpha$ . Случайная функция,  $Y(x)$ , строится присваиванием значения каждому сегменту из распределения со средним  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Значения разных сегментов независимы.



Вероятность того, что две точки,  $x$  и  $x+h$ , выбранные случайно, принадлежат одному интервалу, зависит от расстояния между ними. Покажите, что вероятность равна 0, если  $|h| > \alpha$  или же это эквивалентно:  $1 - |h|/\alpha$ .

Покажите, что  $E[Y(x+h) - Y(x)]^2 = \sigma^2$ , если  $|h| > \alpha$ , поскольку иначе это нуль. Следовательно, покажите, что вариограмма  $Y(x)$  является кусочной линейной моделью с порогом  $\sigma^2/\alpha$  и протяженностью  $\alpha$ .

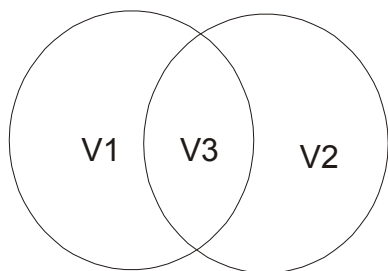
**Упр 3.12 Экспоненциальная модель в одномерном пространстве.** Это упражнение является простым расширением предыдущего. Мы построим случайную функцию, имеющую экспоненциальную вариограмму. Как и раньше, начало  $x_0$  взято случайно на интервале  $[0, \alpha]$ , но в то же время мы делим линию на сегменты, длина которых является пуассоновской случайной величиной с интенсивностью  $\lambda$ .



Как и раньше, случайная функция  $Y(x)$  строится присваиванием каждому сегменту величины с распределением, имеющим среднее  $m$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Величины независимы для каждого сегмента. Покажите, что вариограмма экспоненциальна с порогом  $\sigma^2$  и масштабным параметром  $\lambda$ .

**Упр 3.13 Сферическая модель в трехмерном пространстве.** В этом упражнении мы построим в трехмерном пространстве случайную функцию, имеющую сферическую вариограмму. Пусть пространство заполнено пуассоновскими точками с интенсивностью  $\lambda$ . Поэтому количество точек, попавших в объем  $V$ , является пуассоновской случайной величиной с параметром  $\lambda V$ . Ее среднее и дисперсия равны  $\lambda V$ . Более того, количество точек в двух объемах  $V$  и  $V'$  независимы, если объемы не пересекаются. Пусть  $Y(x)$  будет количеством пуассоновских точек, попавших в сферу радиусом  $D$  и центром в точке  $x$ . Покажите, что такая вариограмма является сферической моделью.

Подсказка: Когда точки  $x$  и  $x+h$  удалены более чем на  $D$ , сферы не пересекаются и, поэтому  $Y(x)$  и  $Y(x+h)$  независимы. Когда точки ближе друг к другу, то лучше разделить две сферы на три непересекающиеся части, как показано ниже:



Затем, если  $N(V)$  обозначает количество пуассоновских точек в  $V$ , то

$$E(Y(x+h) - Y(x))^2 = E[(N(V_1) + N(V_2)) - (N(V_2) + N(V_3))]^2$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно вычислить объем  $V_2$ , как геометрическое тело поворота.

$$\text{Объем } V_2 = \frac{\pi}{6} D^3 \left[ 1 - \frac{3h}{2D} + \frac{h^3}{2D^3} \right]$$

**Упр 3.14 Линейная модель в одномерном пространстве.** Это упражнение образует случайную величину, имеющую линейную вариограмму. Пусть  $W_i$  - заданные независимые случайные величины, которые имеют значения  $+1$  и  $-1$  с одинаковой вероятностью. Пространственная переменная  $Y(n)$  строится для положительных целых значений  $n$  суммированием  $W_i$  до  $n$ .

$$Y(n) = \sum_{i=0}^n W_i$$

Покажите, что  $Y(n)$  не является стационарной функцией второго порядка, потому что ее дисперсия зависит от величины  $n$ , но что она удовлетворяет внутренней гипотезе. Покажите, что ее вариограмма линейна.

## 4. Экспериментальные вариограммы

### **Содержание**

Эта глава, как и предыдущая, посвящена вариограммам. Читатель узнает, как рассчитать экспериментальную вариограмму в одномерном, двухмерном и трехмерном пространствах, а также - как подобрать к ней модель. В конце приводятся несколько примеров. Обсуждаются практические проблемы, встречающиеся в трудных случаях построения экспериментальными вариограммам. Они включают выбросы (outliers), почти регулярно распределенные данные, и так далее.

### **Как рассчитывать экспериментальные вариограммы:**

Экспериментальную вариограмму можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\gamma^* = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad [4.1]$$

где  $x_i$  – местоположение проб,  $Z(x_i)$  – их значения и  $N(h)$  – количество пар  $(x_i, x_i + h)$ , разделенных расстоянием  $h$ , которые действительно используются в расчете. Эту формулу очень легко использовать, когда пробы регулярно расположены в одномерном пространстве, например вниз по скважине, вдоль подземной выработки или сейсмического профиля. Пример 1 иллюстрирует эту процедуру.

Если пробы не расположены по регулярной сети, то нельзя отсутствующие значения рассчитывать по соседним пробам или приравнивать нулю, потому что истинная изменчивость будет искажаться. Квадрат разности вычисляется для всех имеющихся пар проб.

Если данные не регулярны, то вариограммы вычисляются для классов расстояний с каким-либо связанным допуском, обычно 50%, потому что он перекрывает все возможные расстояния. Когда данные нерегулярно расположены в двухмерном пространстве, вариограммы рассчитываются как для классов расстояний, так и для углов (азимутов), характеризующих различные направления.

### **На плоскости**

Когда данные двухмерные, вариограммы должны вычисляться по крайней мере в четырех направлениях для проверки анизотропии. Первый шаг – это выбор лага (lag) вариограммы и его допуск, затем – выбор основных углов и угловой допуск.

Процедура расчета реализуется следующим образом. На первом шаге для каждой точки программа подбирает все возможные пары с остальными точками и классифицирует их по установленным классам расстояний и направлений. Затем для каждой пары вычисляется квадрат

разницы  $(Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$ , и результат добавляется к сумме соответствующего класса. Количество пар в классе также увеличивается на 1. Когда все возможные пары будут обработаны для точки  $x_i$ , программа перейдет к следующей точке. В конце процесса итоговые суммы делятся на 2 и на количество пар, которые были выбраны для данного класса. Блок-схема этого расчета приведена на Рис. 4.2.

### **В трехмерном случае**

Процедура, приведенная выше, теоретически может быть обобщена и для трехмерного случая, применительно к классам пространственных углов. На практике трехмерный случай играет особенную роль. Очень часто вертикальное направление более изменчиво, чем горизонтальные, вследствие стратификации (пластообразного залегания) многих природных явлений.

Следовательно, вычисление вариограмм в плоскости пласта, используя описанные выше методы, имеет особенно большое значение. Вариограмма в направлении перпендикулярном плоскости залегания рассчитывается во вторую очередь. Обычно вертикальные вариограммы вычисляются по результатам опробования крутопадающих скважин. Горизонтальные вариограммы рассчитываются в нескольких горизонтальных направлениях. Если рудное тело смещено тектоническими процессами, то вариограммы вычисляются в плоскости залежи и перпендикулярно к ней.

### **Пример 1: регулярные одномерные данные**

Используя формулу [4.1], вычислим вариограмму для первых трех классов расстояний представленных ниже данных. Пробы расположены регулярно через каждые 5м в одномерном пространстве.

8	6	4	3	6	5	7	2	8	9	5	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**Рис 4.1.** Данные опробования, расположенные через каждые 5м вдоль линии разреза.

Для первого класса (5м) получается двенадцать квадратов разностей:

$$\gamma^* = \frac{1}{2 \times 12} [2^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2 + 6^2 + 1^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2] = 4.625$$

[4.2]

Покажем, что значениями  $\gamma^*(10)$  и  $\gamma^*(15)$  являются соответственно 4.82 и 6.00. Нарисовав их, как функцию расстояния, получаем экспериментальную вариограмму (Рис 4.3.). Сплошная линия использовалась, чтобы соединить известные полученные значения; пунктирная – для экстраполяции линии в начало. Эффект самородка не может быть выше 4.0, но может быть меньше, если есть микроструктуры с расстояниями меньше, чем 5м.



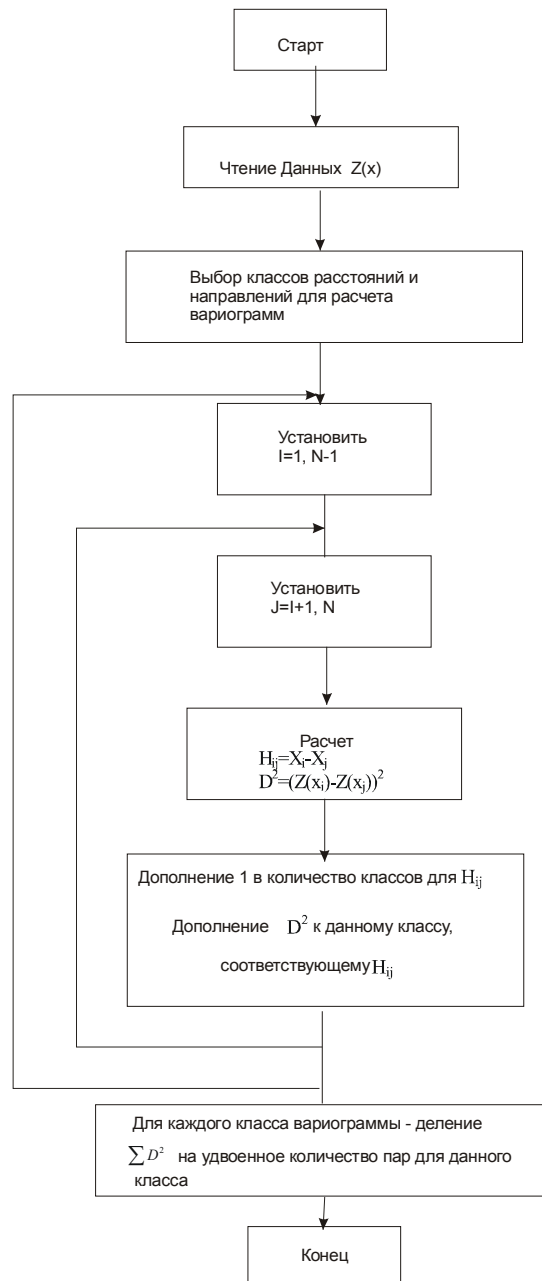
Когда значения проб имеют асимметричное распределение (с длинным хвостом в одну сторону) или когда есть выбросы в данных (т.е. необычно высокие или низкие значения), присутствие только нескольких экстремальных значений могут быть причиной серьезных проблем. Представьте, что произойдет в Примере 1, если вместо значения 7 подставить 17 или даже 70. В первом классе расстояний квадрат разности  $(5-7)^2$  станет  $(5-17)^2$  и  $(17-2)^2$ , или еще хуже  $(5-70)^2$  и  $(70-2)^2$ . Эти два слагаемых будут полностью доминировать в экспериментальной вариограмме, затрудняя ее интерпретацию и подбор к ней модели. Такие явления рассматриваются в конце этой главы.

### **Пример 2: вычисление экспериментальное вариограммы в двух измерениях**

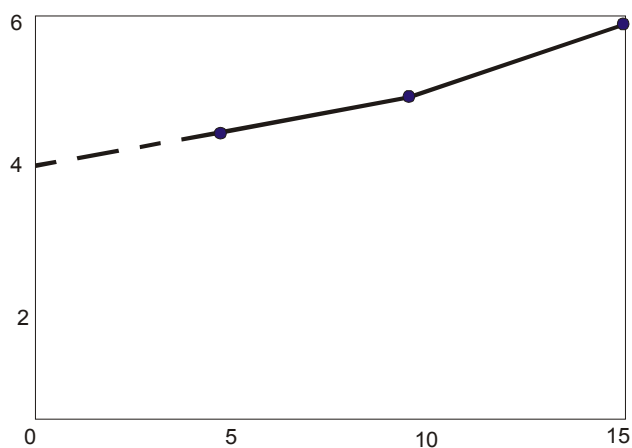
В таблице 4.1 приведены 56 содержаний, расположенных по квадратной сетке. Будем использовать их для вычисления экспериментальных вариограмм в четырех основных направлениях на расстояниях до 4 лагов. Обратите внимание на количество пар точек в каждом классе расстояния. Должны использоваться все пары точек, попадающие в данный интервал расстояний, а не только те, которые расположены в строках и колонках. Помните, что расстояние по диагонали умножается на  $\sqrt{2}$ .

**Таблица 4.1.** Регулярные двухмерные данные для расчета экспериментальных вариограмм

26	22	19	14	16	19	16	14
23	20	17	20	14	23	21	17
22	17	18	19	18	25	20	19
21	15	20	18	20	20	18	13
19	18	15	15	18	23	22	20
18	16	10	16	14	18	20	18
17	14	10	13	13	15	14	17
15	13	11	10	17	16	15	11



**Рис 4.2.** Блок-схема, показывающая как вычислять экспериментальные вариограммы

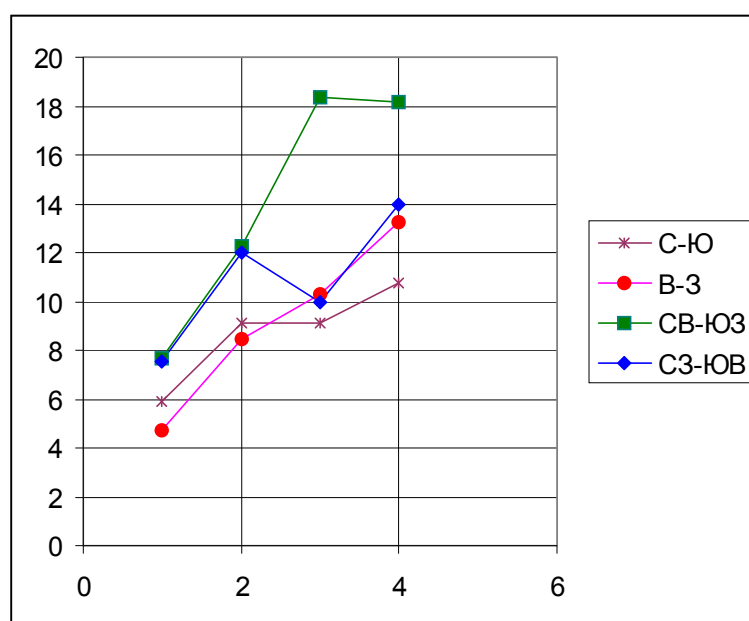


**Рис 4.3.** Экспериментальная вариограмма для проб расположенных на расстоянии 5м. Сплошная линия соединяет экспериментальные значения; пунктирная линия экстраполирует функцию в начало.

**Таблица 4.2.** Значения экспериментальных вариограмм  $\gamma(h)$  в четырех основных направлениях для представленных выше данных, а также - количеством пар точек (N)

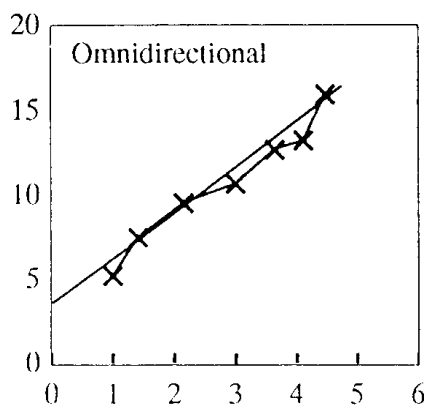
	$\gamma(1)$	N(1)	$\gamma(2)$	N(2)	$\gamma(3)$	N(3)	$\gamma(4)$	N(4)
Восток-Запад	4.74	56	8.49	48	10.28	40	13.27	32
Север-Юг	5.88	56	9.11	48	9.13	40	10.77	32
СВ - ЮЗ	7.69	49	12.24	36	18.36	25	18.16	16
СЗ - ЮВ	7.55	49	12.02	36	10.00	25	14.00	16

В таблице 4.2. представлены значения экспериментальных вариограмм в четырех основных направлениях, а также количество пар точек, используемых в их вычислениях. Вариограммы не являются точными для расстояний, превосходящих половину длины поля. Поэтому они были рассчитаны только для четырех лагов. Полученные вариограммы изображены на рисунке 4.4.



**Рис 4.4.** Экспериментальные вариограммы в четырех направлениях

Так как между ними существует небольшая разница, то можно предположить, что они изотропные. Поэтому была вычислена усредненная экспериментальная вариограмма для всех направлений (Рис. 4.5.). Она хорошо подгоняется линейной моделью с наклоном около 3 и эффектом самородка около 3. Этот пример показывает, как следует вычислять вариограмму. На практике вариограммы обычно более сложные, чем эта.



**Рис 4.5.** Изотропная вариограмма для всех направлений, вычисленная по регулярным двумерным данным, и подогнанная к ней линейная модель с эффектом самородка 3 и наклоном 3

### **Вариограммное облако**

Существует два способа отображения вариограмм: стандартный способ, показанный выше, где изображается величина **среднего** квадрата разности относительно расстояния, или другой – в виде облака всех точек квадратов разностей относительно расстояний. Чаувет (Chauvet) (1982) назвал этот способ отображения «вариограммным облаком». Преимущество стандартного изображения функции заключается в синтезе всей информации в одну точку для каждого класса расстояния, но в этом случае теряются детали. А эти детали могут помочь специалисту лучше понять поведение вариограмм.

Чтобы проиллюстрировать эту концепцию, будет вычислено вариограммное облако для данных Примера 1. Для первого класса расстояний было 12 пар точек (квадратов разностей): 4, 4, 1, 9, 1, 4, 25, 36, 1, 16, 1 и 9. Для следующих двух классов расстояний – 11 и 10 пар соответственно. Для получения «облака» все эти значения были поделены на 2. На Рисунке 4.6.а показано полученное вариограммное облако. Экспериментальные точки находятся в трех вертикальных колонках, потому что данные расположены регулярно через каждые 5м. Очевидно, что только шесть крестиков входят в первый класс расстояний, потому что там получено только 6 отличающихся значений. Большинство из значений квадратов разностей малы, но несколько имеют довольно большой размер. Поэтому их гистограммы для каждого класса расстояний асимметричны.

Чтобы проиллюстрировать результат включения выбросов, пересчитаем вариограммное облако для случая, рассмотренного ранее, когда вместо значения 7% было подставлено - 17% (Рис. 4.6.б). Сравнивая первоначальное облако с вновь полученным, мы увидим, что вертикальная шкала на новом графике в четыре раза больше. Для каждого класса расстояний наибольшие два значения квадрата разностей (т.е. два самых высоко расположенных крестика) соответствуют парам, содержащим выброс.

**Рис 4.6.** Вариограммные облака вычисленные, используя регулярные данные (а) Примера 1 и (б) - те же данные, в которых значение 7 было заменено на выброс 17. Обратите внимание на изменение вертикальной

шкалы между двумя рисунками. В обоих случаях некоторые крестики представляют собой несколько значений (например 1.0 для лага 5м)

### ***Подбор модели вариограммы***

Лучше всего показать это на практическом примере. Опыт подсказывает, что аналитическая форма модели не так важна, как ее главные свойства. Расположим их в порядке уменьшения важности:

эффект самородка,  
наклон линии в начале,  
зона влияния,  
порог,  
анизотропия.

Поведение в начале (эффект самородка и наклон) играет критическую роль в подборе модели вариограммы, оно также имеет огромное значение для результатов кригинга и стабильности системы кригинга. Наклон можно оценить по первым трем - четырем значениям вариограммы; эффект самородка можно оценить экстраполяцией кривой в начало системы координат. Первое значение вариограммы для надежности вычисляется по возможно большему количеству пар точек. Бурение дополнительных скважин на небольших расстояниях может помочь получить лучшее значение эффекта самородка.

Зону влияния обычно можно оценить визуально. Порог характеризуется значением, где вариограмма стабилизируется (становится горизонтальной). Для стационарных переменных порог совпадает с общей дисперсией проб, но иногда это не верно, так как в исходных данных присутствуют тренды большой протяженности. Если присутствует более одной зоны влияния (несколько структур), то вспомогательные зоны можно различить визуально в местах, где вариограмма меняет кривизну. Моделирование анизотропии требует большего опыта. В общем, хорошую модель можно получить как сумму двух или трех единичных моделей. Использование большего числа моделей для суммирования повышает стоимость последующих вычислений, поэтому необходимо избегать этого. Подгонка обычно делается интерактивно с использованием какого-нибудь графического терминала.

Специалисты часто спрашивают, почему мы не используем метод наименьших квадратов или другие автоматические регрессионные методы для подгонки модели вариограммы. Существует три причины для этого. Во-первых, модель должна быть положительно определенной (иначе говоря, дисперсия не должна становиться отрицательной). Многочлены, получаемые с помощью метода наименьших квадратов, редко удовлетворяют этим условиям. Во-вторых, метод наименьших квадратов предполагает, что точки проб являются независимыми наблюдениями, что не справедливо для экспериментальной вариограммы. В-третьих, поведение вариограммы около начала (т.е. для расстояния меньшего, чем первый лаг) обычно неизвестно, и естественно, что метод наименьших квадратов не может его предсказать. Требуется опыт и рассудительность. Первую

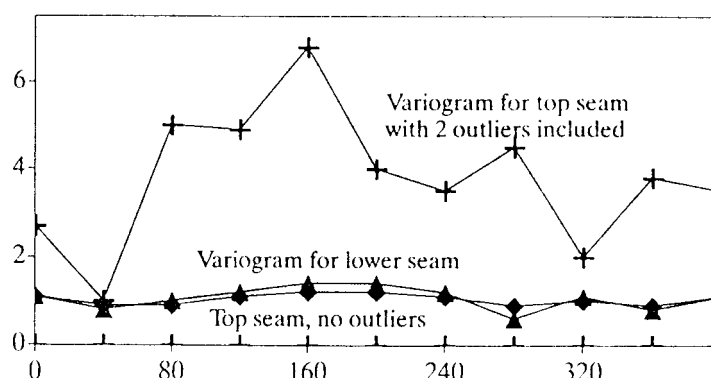
проблему можно решить подбором только положительно определенной модели, но это не разрешает остальные две проблемы.

### ***Трудные вариограммы***

На практике, экспериментальные вариограммы часто имеют намного более эрратическую форму, чем примеры, представленные в книгах и журнальных статьях. Так как причины возможных проблем чрезвычайно многочисленны и разнообразны, то невозможно представить здесь их все. Армстронг (Armstrong) (1984) рассмотрела в своей работе некоторые из основных. Ниже приведены несколько примеров.

#### ***Выбросы***

Как было видно в упражнениях по расчету экспериментальных вариограмм, присутствие даже одного выброса может привести к высоко эрратической вариограмме. В исследовании угля двух пластов в Bowen Basin в Австралии (Армстронг, 1980) были построены вариограммы для трех переменных (толщина пластов, содержание золы и FSI). Все эти вариограммы оказались очень схожими для обоих пластов, но функции для серы были совершенно другие. (Рис. 4.7.). Это был сюрприз. Более глубокая проверка обнаружила, что данные из верхнего пласта (207 значений) содержали два очень больших содержания серы. Они должны были быть очень хорошо видны на гистограмме. На первом этапе попросили геологов проверить оставшиеся половинки керновых проб. Оказалось, что пробы действительно были из области с высоким содержанием серы (пирита). После того как эти два ненормальных значения удалили, вариограмма стала выглядеть также, как и вариограмма для серы другого пласта. Дальнейшее удаление проб не приводит к существенному изменению характера вариограммы.



**Рис 4.7.** Три вариограммы содержания серы в двух пластах угля. Верхняя вариограмма, полученная из верхнего пласта содержит 2 выброса, другие две получены из нижнего пласта и верхнего пласта после исключения выбросов

В этом случае было принято довольно простое решение: устранение выбросов. Это было возможным по двум причинам: во-первых, потому что выбросы находились в географически обособленной области, которая

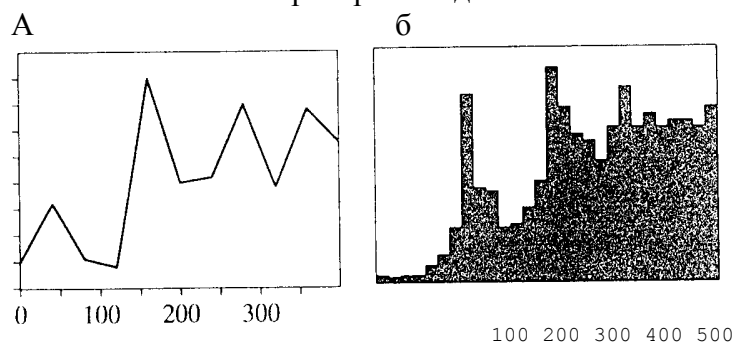
может быть проанализирована отдельно от остальных, и во-вторых, потому что уголь с высоким содержанием серы менее ценен, чем уголь с низким содержанием.

Однако, в других случаях (например, при сильно асимметричном распределении содержаний золота или урана) нелегко найти хороший способ оценивания вариограммы. Пробы с высоким содержанием обычно встречаются совместно с низко содержащими пробами и не размещаются в отдельных зонах. Более важным является то, что по богатым пробам принимается решение о разработке месторождения. В этом случае удаление выбросов или уменьшение их содержаний до произвольно установленных величин не является хорошим решением.

Геостатистики предлагают несколько "надежных" методов для расчета трудных вариограмм (Криси (Cressie) и Хоукинс (Hawkins), 1980; Армстронг и Делфинер (Delfiner), 1980). Этот предмет был одной из главных тем обсуждения на геостатистическом семинаре НАТО, прошедшем в Lake Tahoe в сентябре 1983 (см Verlyб 1984).

#### *Псевдо-периодические hiccup*

Вариограмма содержания золы, вычисленная для лага 40м для угля из Bowen Basin в Австралии, иллюстрирует проблему "псевдо-периодичные гикапы" (Рис. 4.8.а). Во-первых, два странных пика в  $h=150$ м и  $h=280$ м могут показаться признаком некоторой периодичности в угле, но это не соответствует физической природе угля. Хотя это и не заметно в начале, пробы лежат на почти регулярной сетке. Построение гистограммы расстояний между парами точек для каждого класса расстояний показывает, что это очевидный случай (Рис. 4.8.б). В этом случае решение будет достаточно простое. Все, что нам нужно, это лишь изменить длину лага. Вычисление вариограммы для лага 100м сглаживает эти особенности.

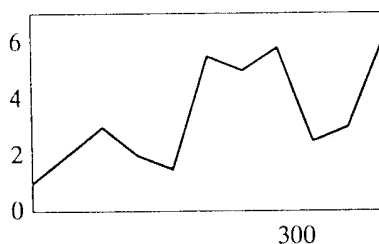


**Рис 4.8.** (а) Эрратическая экспериментальная вариограмма для содержания золы в угле, (б) гистограмма, показывающая количество пар точек для каждого лага вариограммы. Заметьте пики гистограммы (160м и 320м)

#### *Артефакты*

Следующие два примера подтверждают точку зрения, что много проблем с вариограммами обуславливаются скорее "ошибкой оператора", чем статистическими проблемами в данных. Рисунок 4.9 показывает замечательную вариограмму "зубья пилы". Изучаемые переменные были высоко асимметричны, как содержание золота или урана. Существенному количеству данных, значения которые были ниже установленного предела

точности, присваивалось значение нуль. Так как распределение данных похоже на логнормальное, то оказывается разумным использовать логарифмирование. Чтобы избежать проблемы с нулями, им было произвольно присвоено значение 0.00001 и поэтому после логарифмического преобразования появилась величина  $-0.5$ . Так как все другие логарифмы лежат в промежутки от  $-0.3$  до  $+0.3$ , то  $-0.5$  – экстремальные значения, и их местоположение полностью определяют форму вариограммы. В этом случае решение простое: установить нижнее значение борта 0.001 вместо 0.00001, в этом случае логарифм минимальной величины равен ( $-0.3$ ).



**Рис 4.9.** Эрратическая вариограмма "зубья пилы"

Вторая проблема - того же типа. В этом случае причиной проблемы было присутствие в исходных данных нулевых значений для мощности пласта. Они могут показать, что мощность в этом регионе уменьшается, но так как это неправдоподобно, то данные были перепроверены. Обнаружено, что нулевая мощность пласта получилась из-за отсутствия значений для кровли и подошвы пласта. Когда всем отсутствующим значениям присваивается  $-1$ , и когда студент в ходе исследования забывает провести тест на отсутствие данных перед вычислением мощности пласта, то вычитание  $-1$  из  $-1$  даст большое количество нулей, которые и будут определять форму вариограммы.

Эти ошибки скорее глупые. Читая это, каждый наверное уверен, что он не будет делать таких ошибок, но опыт показывает, что такого типа ошибки более распространены, чем большинство из нас допускает. Поэтому единственный путь их устранения – это аккуратное исследование данных. Будет абсолютно бесполезно применять методы расчета "надежных" вариограмм для данных, имеющих ошибки и неточности. К счастью, компьютерные технологии теперь позволяют нам работать со связанными окнами. Поэтому возможно одновременно отображать несколько графиков (таких как базовая карта размещения данных, гистограмма и вариограмма), чтобы легче найти причину эрратического поведения.

### **Упражнения**

**Упр 4.1 Отсутствующие данные.** На Рисунке 4.10 изображено 13 проб, расположенных через 5м. Значения содержаний имеются для 12 точек из 13, одна проба потеряна. Покажите, что для первого лага есть только 10 пар точек, и что значение  $\gamma^*(5)=4.7$ . Вычислите экспериментальную вариограмму для следующих двух лагов и нарисуйте ее. Иногда люди,



ошибаясь, присваивают отсутствующему значению нуль. Вычислите первые три лага экспериментальной вариограммы и сравните с предыдущим.

8	6	4	3	6	5	7	2	8		5	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---

**Рис 4.10.** Регулярные одномерные данные с одним отсутствующим значением

**Упр. 4.2 Выбросы.** На рисунке ниже изображено 13 проб, расположенных через 5м, с одним значением (90), значительно превосходящим остальные. Вычислите экспериментальную вариограмму для первых трех лагов и постройте ее. Посмотрите на проявление выброса, сравните эту вариограмму с одной из рассчитанных ранее (Рис 4.3.)

8	6	4	3	6	5	7	2	8	90	5	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---

**Рис 4.11.** Регулярные одномерные данные, содержащие выброс

**Упр. 4.3 Вариограммы в двумерном измерении.** В таблице ниже представлены 35 значений содержаний в пробах, расположенных по регулярной 100м на 100м сетке. Будет ли эта вариограмма изотропная?

**Таблица 4.3.** Тридцать пять значений содержаний в регулярной 100м на 100м сетке

3.6	2.8	4.1	4.6	5.3	3.8	4.2
3.6	3.5	5.2	4.5	6.1	4.4	4.0
5.1	3.8	4.9	3.3	5.7	6.2	6.3
4.2	4.0	5.6	4.2	4.9	5.3	4.4

## 5. Структурный анализ

### **Содержание**

В этой главе представлено несколько случаев, показывающих, как проводить структурный анализ. Во-первых, рассматриваются принципиальные решения, которые должны быть сделаны геостатистиками. Стационарны ли данные? Изотропны ли данные? Должно ли изучение быть проведено в двухмерном или трехмерном измерении?

Первый пример – это относительно простое месторождение железной руды. Горизонтальная и вертикальная вариограммы были легко построены, что обеспечивает очень понятную иллюстрацию прямого вариограммного анализа. Второй пример касается архейского золоторудного месторождения, которое разрабатывается открытым способом. Поэтому здесь кроме редкой разведочной информации были доступны значения содержаний в близко расположенных взрывных скважинах. Третье представленное ниже месторождение – это осадочная золоторудная залежь с периодической вариограммой в одном направлении, потому что золото было отложено древним потоком вдоль русла. В противоположность предыдущим двум примерам, это месторождение имеет мощность только 1 м и поэтому его изучение проводится в двухмерном пространстве, а не трехмерном.

### **Последовательность изучения**

Первая фаза любого геостатистического изучения это структурный анализ; т.е. изучение главных характеристик пространственной анизотропии массива месторождения. Три главных шага в этом направлении – это, во-первых, предварительная проверка данных и способность почувствовать проблему, во-вторых, вычисление экспериментальной вариограммы и, в-третьих, подгонка математической модели к экспериментальной вариограмме. Со вторым и третьим шагами мы имели дело в предыдущих главах, а сейчас мы сконцентрируемся на первом шаге. Рамка 4 характеризует три главных этапа в структурном анализе и показывает из место в общем процессе исследования.

#### *Шаг 1: сбор и проверка данных*

После того, как данные собраны и введены в компьютер, они должны быть тщательно проверены, чтобы убедиться, что они корректны и представляют собой то, что требовалось. Это означает, что любые числовые ошибки в данных или в координатах должны быть исправлены, и для имеющихся данных вычислены основные статистические показатели. Но что более важно, геостатистики должны детально ознакомиться с имеющейся исходной информацией и проблемой, которая будет решаться. Наиболее серьезные ошибки геостатистических исследований появляются потому, что эксперт не до конца понимает суть проблемы или не обратил внимания на некоторые из существенных ее свойств. На первом этапе

исследования важно найти геолога или инженера, которые принимали участие в программе опробования, и узнать:

1. какие виды опробования использовались,
2. какое количество проб было отобрано, какие типы анализа проводились и в каких лабораториях,
3. были ли изменения в процедурах опробования во время изучения месторождения. Например, не привлекались ли в разные периоды другие буровые компании? Не изменялся ли тип каротажного (геофизического) оборудования?
4. является ли исследуемая область геологически однородной, или содержит крупные тектонические нарушения,
5. были ли предпочтительно (с большей частотой) опробованы области с высокими содержаниями.

Если любой из этих факторов не был выяснен в начале изучения, то скорее всего работу понадобится повторить, когда это откроется. Вышеперечисленные проверки всегда очень важны в начале любой оценки запасов руды, но они еще более важны настоящее время, потому что во многих странах мира люди, проводящие эти исследования, лично отвечают за любые ошибки и оплошности в своей работе. Геостатистики, работающие в компаниях, или как независимые консультанты, должны быть очень точными в своих выводах, т.к. их работа может внести серьезные корректировки в оценку запасов руды и экономическое положение горного предприятия. Краткая дискуссия на эту тему дана в Приложении 2.

#### *Решения, которые должны быть сделаны*

Прежде всего должна быть сделана серия решений, которые позволяют в целом правильно начать исследование. Во-первых, должны быть определены переменные и геологические зоны для изучения. Затем геостатистики решают:

- стационарны ли исследуемые переменные,
- что является основанием данных,
- являются ли они аддитивными,
- работать с самими переменными или их производными значениями, и
- проводить ли изучение в двухмерном пространстве или трехмерном.

**Стационарность.** В главе 2 обсуждалось, может ли пространственная переменная быть стационарной или нет. Поэтому мы не будем снова рассматривать этот вопрос здесь.

#### **Рамка № 4: Шаги в процессе изучения.**

Шаг 1: Сбор и проверка данных.

Если вы не были включены в проект с самого начала, то найдите тех, кто работал в то время, и расспросите их об:

-использованных типах опробования, выполняемых анализах и изменениях в этих процедурах в течение разведки,  
 -различных геологических зонах, основной тектонике и т.д.,  
 -предпочтительном виде опробовании и т.д.

Далее должны быть приняты основные решения:  
 Работать ли со значениями содержаний в трехмерном пространстве или с их аккумуляцией - в двухмерном.  
 Границы изучаемого района, размер основания переменных и являются ли они стационарными.  
 Вычисляются основные статистики (средние, дисперсии, корреляции, гистограммы и диаграммы рассеивания (scatter diagrams)). Обращают внимание на:  
 выбросы (ураганные пробы) или ненормальные значения величин  
 неоднородные данные (смесь различных популяций данных)

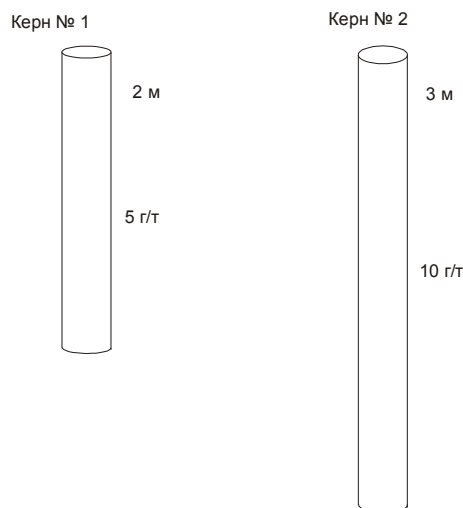
Шаг 2: Расчет экспериментальных вариограмм.  
 Шаг 3: Подбор модели вариограммы.  
 Шаг 4: Кригинг или моделирование исследуемой зоны

**Основание.** Геостатистический термин "основание" относится к размеру и форме объема, который характеризуется единичной пробой. Скважины кернового бурения и добываемые при отработке блоки имеют довольно разный вес и объем (килограммы в сравнении с сотнями тонн руды). Поэтому, хотя средние содержания могут быть одинаковы, их дисперсии всегда будут разными. Скважины кернового и ударного бурения могут иметь одинаковый диаметр, но их статистические характеристики могут существенно отличаться.

**Аддитивность и аккумуляции.** Почти во всех применениях геостатистики изучаемые переменные должны стремиться к аддитивности (Одно из редких исключений, когда объекты изучения ограничены получением контуров на картах). Другими словами, переменные должны быть аддитивными; это значит что, среднее для всей исследуемой зоны должно быть равно среднему арифметическому всех значений содержаний внутри нее. Это лучше всего рассмотреть на примере.

Предположим мы хотим найти среднюю мощность пласта и содержание золота по двум керновым пробам, одна длиной 2 м с содержанием 5 г/тонну, другая длиной 3м с содержанием 10 г/тонну. Ясно, что средняя толщина будет 2.5м, но среднее содержания золота не является среднеарифметическим

$$\frac{5 + 10}{2} = 7.5 \text{ g/t} \quad [5.1]$$



**Рис 5.1.** Два керна с разными длинами

Скорее это средневзвешенное:

$$\frac{2 \times 5 + 3 \times 10}{2 + 3} = 8 \text{ g/t} \quad [5.2]$$

Среднеарифметическое содержания золота (7.5 г/тонна) дает совершенно ложную оценку содержания руды, которая может быть добыта в этом районе. Следовательно, чтобы рассчитать содержание, необходимо использовать значение мощности пласта, т.е. определить «линейный запас». Это преобразование называется аккумуляцией.

Геостатистики обычно проводят изучение по аккумуляции («линейному запасу») и мощности, а затем делают обратное преобразование кригинговых оценок путем деления «линейного запаса» на оценку мощности. С другой стороны, отметьте, что, если плотность руды на участке неодинакова, то будет благоразумно использовать в исследованиях результаты аккумуляции: содержание\*мощность\*плотность и мощность\*плотность.

**Работа в двухмерном или трехмерном пространстве.** Все месторождения можно разделить на две категории в зависимости от их геометрии и метода добычи. Первая категория включает относительно тонкие залежи, такие как угольные пласты или золоторудные жилы, а вторая - более мощные, массивные залежи, которые разбиваются для добычи на выемочные блоки постоянной высоты. В первом случае при добыче извлекается вся минерализованная мощность пласта (жилы), поэтому здесь нет разделения по вертикали. Следовательно, изучение здесь производится в двухмерном измерении с использованием аккумуляции, а не значений содержаний. Во втором случае, горные блоки имеют постоянную высоту, содержание в них является аддитивным и, поэтому геостатистическое изучение проводится в трехмерном пространстве по величинам содержания, с использованием информации вышележащего и нижележащего горизонтов. Хороший пример этому – открытая разработка месторождений. Между двумя этими крайностями существует множество встречающихся на практике промежуточных вариантов, например – пласты с разделением добычи по

вертикали или подземные рудники, где выемочные блоки имеют неправильные формы. Здесь мы ограничимся только простыми примерами. Более сложные случаи можно найти в журнальных статьях.

### *Стандартные статистические показатели*

Так как геостатистика предполагает, что данные получены из однородной популяции, то важно применить несколько довольно простых статистических расчетов до вычисления экспериментальной вариограммы. Должны быть вычислены средние, дисперсии и корреляции. Нужно тщательно исследовать гистограммы переменных для проверки на выбросы и наличие более одной популяции исходных данных. Если распределение содержит несколько пиков, то данные должны быть перепроверены, т.к. они могут содержать несколько популяций. После этого нужно вычертить диаграммы рассеяния для проверки на неоднородные регионы или локальные высокие и низкие значения. Иногда на них можно увидеть пики ненормальных значений даже, если их не было видно на гистограмме. Хотя эти проверки - трата времени, тем не менее, они полезны. Лучше потратить немного больше времени вначале, чем потом заново начинать исследование.

### **Примеры**

Будут обсуждены три примера: один - для железной руды и два – для драгоценных металлов. Месторождение железной руды разведано почти 40 вертикальными скважинами. Пробы длиной 15м анализировались по нескольким показателям качества (содержание кварца, алюминия, потерь на прокаливание и (иногда) марганца) и в т.ч. - содержание железа. Так как эта книга имеет дело с геостатистикой одной переменной, то изучение будет сфокусировано на главную переменную, т.е. - содержание железа. Те, кто интересуется оцениванием по многим переменным, могут обратиться к книге Вакернагеля (Wackernagel) (1995). Данное исследование проводилось в трехмерном пространстве по двум причинам: из-за того, что месторождение скорее массивное, чем пластообразное, и во-вторых, потому, что месторождение будет разрабатываться открытым способом с использованием уступов высотой 15м.

Второе исследование проводилось Харлеем (M. Harley), как его CFSG проект<sup>1</sup>. Оно связано с архейским месторождением золота, которое разрабатывается открытым способом. Если первое месторождение сравнительно легко оценить, второе месторождение сложнее по геометрии, а распределение содержаний золота довольно асимметрично. Кроме того, во втором примере в исследовании участвовали как керновые пробы, так и результаты опробования скважин БВР. Третье исследование проводилось Турстоном (M. Thurston), тоже как его CFSG проект. Это было также месторождение золота. В отличие от первых двух примеров, это изучение сделано в двухмерном пространстве. Так как золото в залежи

---

<sup>1</sup> CFSG (Cycle de Formation Specialisee en Geostatistique) – это 9 месячные курсы повышения квалификации, где геологи и инженеры становятся специалистами в горной и нефтяной геостатистике

Витватерсранде (Witwatersrand) отлагалось по трассе движения потока, то вариограммы в параллельном и перпендикулярном направлении к течению оказались разные. Последняя вариограмма демонстрировала периодичность.

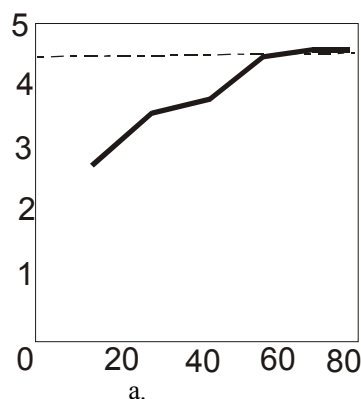
### **Месторождение железной руды**

Исследуемое месторождение находилось на стадии ТЭО; предполагалась его отработка открытым способом с уступами высотой 15м. Интересующая нас область содержит 40 вертикальных скважин; они расположены, как показано на Рис. 5.2.а. Было проанализировано всего 485 секций керна с длиной 15м по нескольким качественным параметрам, таким как содержание кварца и содержание алюминия, а также - содержание железной руды. Здесь мы будем обсуждать только показатель содержания железа.

**Рис 5.2. (а)** План расположения скважин; **(b)** гистограмма 485 значений содержаний железа в 15м секциях керна. Гистограмма содержаний имеет обычную для железной руды отрицательную асимметрию.

#### *Вариограмма в вертикальном направлении*

Вертикальные вариограммы можно рассчитать вниз по скважинам, используя лаг 15м для расстояний до 135м. В Таблице 5.1 приводятся значения вариограммы и количество пар точек для каждого класса расстояний. Как и ожидалось, с увеличением расстояния количество пар уменьшается, и, во-вторых, вариограмма хорошо структурирована (Рис 5.3.а).



**Рис 5.3. (а)** Вертикальная вариограмма и **(b)** соответствующее вариограммное облако. Заметьте изменение шкалы по вертикальной оси

**Таблица 5.1.** Экспериментальные значения вертикальной вариограммы

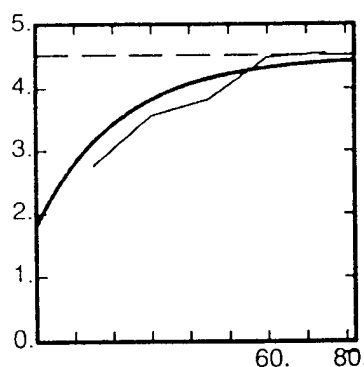
Lag	15m	30m	45m	60m	75m	90m	105m	120m	135m
Pairs	38S	329	284	247	209	187	169	153	139
Y	2.75	3.57	3.82	4.49	4.56	4.97	4.77	4.80	5.13

### Вариограммное облако

Перед подгонкой модели было вычислено вариограммное облако (Рис 5.3.б). Пунктирная линия обозначает дисперсию проб (4.5); непрерывная линия – классическая вариограмма, изображенная слева. Точки квадратов разностей (половин) расположены от нуля до 80 (т.е. имеют значения в 20 раз больше дисперсии). Хотя подавляющее большинство пар встречается на расстояниях кратных 15м, некоторые из них находятся на промежуточных расстояниях. Это происходит, когда одна из проб, составляющих пару, короче чем 15м; на самом деле они находятся в верхней части скважины, где сосредоточены породы с низкими содержаниями железа.

### Подбор модели для вертикальной вариограммы

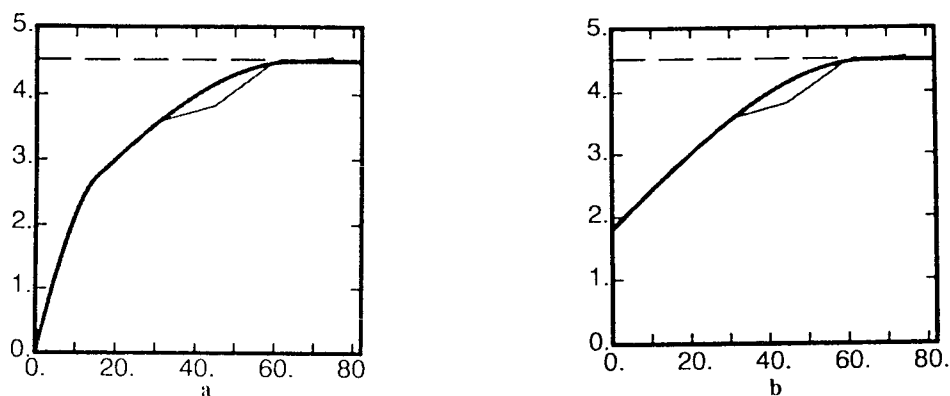
Теперь подгоним модель к полученной вертикальной вариограмме. Рисунок 5.3.а показывает, что она стабилизируется на высоте около 4.5 на расстоянии 65-70м, что дает нам значения порога и зоны влияния. Экстраполяция линии к началу дает эффект самородка около 2. Поэтому можно попробовать использовать эффект самородка 2.0 и либо сферическую модель с порогом 4.5 и зоной 65м, либо эквивалентную экспоненциальную модель. На Рисунке 5.4.а показано, что хорошей аппроксимацией является эффект самородка 1.8 и сферическая модель с зоной 65м и порогом 4.5, а наиболее близкая экспоненциальная модель подгоняется к экспериментальной функции значительно хуже (Рис. 5.4.а, б).



**Рис 5.4.** Две попытки подбора вертикальной вариограммы; **б** - сферическая модель с эффектом самородка 1.8, зоной 65м и порогом 4.5, и **а** - эквивалентная экспоненциальная модель.

Эта комбинация сферической модели и эффекта самородка не единственная, которая возможна в данном случае. Эффект самородка в принципе можно заменить любой структурой, у которой такой же порог и зона менее 15м. Проиллюстрируем это на Рис. 5.5, где сравнивается модель, состоящая из двух сферических с зонами 10м и 65м и порогами (составляющими порога) 1.8 и 2.7, с ранее подобранной сферической моделью. Конечно, возможно в первой структуре использовать другую величину эффекта самородка вместо нулевой.





**Рис 5.5.:** Две модели, которые подгоняются к экспериментальной вариограмме; **(а)** две сферических структуры с зонами 10м и 65м, порогами 1.8 и 2.7 соответственно; **(б)** одна сферическая структура с эффектом самородка 1.8, зоной 65м и порогом 2.7

#### *Горизонтальные вариограммы*

Следующий шаг – выбор параметров для вычисления горизонтальных вариограмм. Основная карта (Рис 5.2.) показывает, что среднее расстояние между скважинами примерно равно 80м. Чтобы не потерять анизотропии, вычисляются четыре вариограммы по направлениям, В-З, С-Ю, СВ-ЮЗ и СЗ-ЮВ, с угловым допуском 22.5 градуса, чтобы получить полный охват пространства. Должен быть выбран также параметр, ограничивающий максимальную мощность слоя по вертикали. Значение его, равное 15м гарантирует, что в расчет включаются только горизонтальные пары проб. На Рисунке 5.6.**а** показано, что вариограммы для всех четырех направлений изотропны и могут быть сгруппированы в одиночную вариограмму (Рис 5.6.**б**). Неудивительно, что итоговая вариограмма имеет более выраженную структуру.

#### *Трехмерная модель вариограммы*

Когда модель вариограммы будет использоваться в кригинге, нам потребуются ее значения для всего сферического пространства, а не только для горизонтального и вертикального направлений. Следовательно, нам нужна общая трехмерная модель вариограммы, не разделенная на горизонтальную и вертикальную составляющие.

**Рис 5.6. (а)** Вариограммы в четырех направлениях в горизонтальной плоскости. Так как анизотропия отсутствует, то была рассчитана изотропная функция в горизонтальной плоскости **(б)**.

Поскольку пороги вариограмм приблизительно одинаковы (Рис. 5.7), то можно использовать модель с геометрической анизотропией. Эффект самородка 1.8 соответствует как горизонтальной, так и вертикальной вариограммам, поэтому в качестве вертикальной функции используется модель состоящая из этого эффекта самородка и одной сферической

структуры с порогом 2.7 и зоной 65м, как предлагалось на начальном этапе. Было сделано несколько попыток подогнать одноструктурную модель к горизонтальной вариограмме, однако хорошая аппроксимация получается при использовании двухструктурной сферической модели. В Таблице 5.2 показаны параметры подогнанной модели, которая будет использована в оценке запасов с помощью точечного и блочного кригинга в Главе 9.

**Рис 5.7.** Экспериментальные вариограммы в горизонтальном и вертикальном направлениях и подобранная трехмерная модель

**Таблица 5.2.** Параметры модели подгонки вариограммы, которая является изотропной в горизонтальном направлении, но не в вертикальном

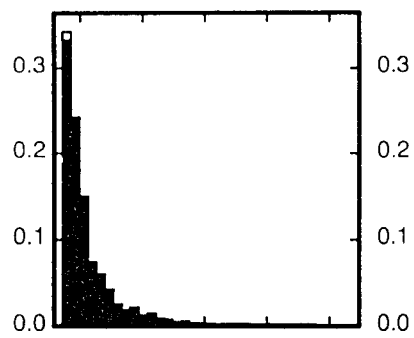
	Порог	Зона влияния по горизонтали	Зона влияния по вертикали
Первая структура	1.2	80м	65м (40м?)
Вторая структура	1.5	400м	65м

### ***Второй пример - архейское месторождение золота (M. Harley)***

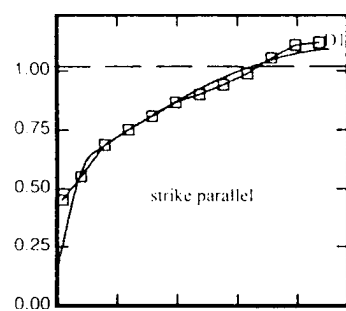
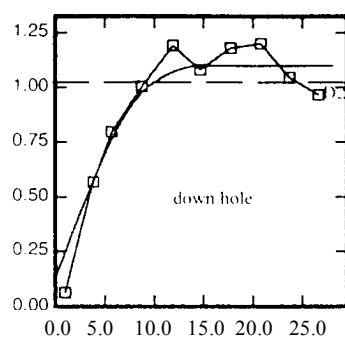
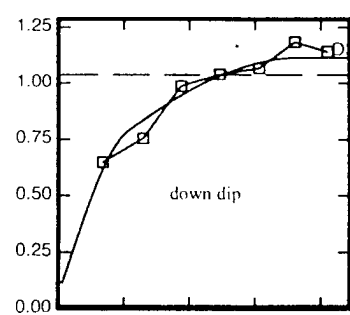
Архейские золоторудные тела являются обычными во многих регионах: западная Австралия, центральная и западная Африка, южная Индия и Гвiana. Как и многие подобные месторождения, это месторождение разрабатывалось открытым способом. Рудное тело простирается с севера на юг, углубляясь в восточном направлении под углом 70 градусов. Его мощность изменяется от 10м до 60м.

Во время исследования было пробурено около 170 скважин, и были взяты пробы длиной 1м. Так как высота добычных уступов равна 5м, то пробы были композированы по этой высоте. Даже после композирования гистограмма содержания золота была довольно асимметрична с максимальным значением, превосходящим среднее в 20 раз. Поэтому можно было ожидать трудностей с интерпретацией и моделированием вариограмм. Экспериментальные вариограммы, вычисленные в основных направлениях (вниз по скважинам, по падению и по простиранию рудного тела) (см. Рис. 5.9.d, e, f), подтверждают это.

Так как рудник продолжал работать, то были доступны пробы скважин БВР, которые бурились по сетке 3м на 5м. Их длина также равна 5м. На Рисунке 5.8. показана гистограмма содержаний для почти 7000 скважин БВР. Коэффициент вариации для них равен 1.13. Вариограммы для скважин БВР были также вычислены в трех основных направлениях. Если вариограммы для керновых проб были сильно эрратические, то для скважин БВР они имеют хорошо выраженную структуру (Рис. 5.9.a, b, c). Это происходит потому, что они расположены очень близко друг к другу и характеризуют структуры массива с малой протяженностью.



**Рис 5.8.** Гистограмма содержаний скважин БВР



**Рис 5.9.** Экспериментальные вариограммы для архейского месторождения золота: для близко расположенных скважин БВР (a, b и c) и для скважин кернового бурения (d, e и f)

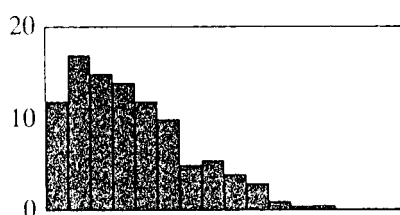
**Таблица 5.3.** Короткие и длинные радиусы влияния модели вариограммы скважин ударного бурения в трех основных направлениях

Направление	Вниз по скважинам	По падению	По простиранию
Зона 1-й структуры	5м	10м	30м
Зона 2-й структуры	18м	15м	120м

Зоны влияния вариограмм в разных направлениях различны, поэтому была подобрана модель с геометрической анизотропией. Она состоит из 10% эффекта самородка, 40% сферической структуры с короткой протяженностью (1-й) и 50% сферической структуры с длинной протяженностью (2-й).

### **Третий пример: месторождение золота Витватерсренд (M. Thurston)**

Данные для этого исследования взяты из осадочного месторождения золота. Они являются аккумуляциями (метропроцентами) золота в смг/т, соответствующими блокам 15м на 15м; это значит, что первичные содержания бороздовых проб были усреднены для каждого блока. Это позволило значительно сгладить и уменьшить количество исходных данных и иметь дело не с несколькими тысячами значений, а с несколькими сотнями. Как обычно для месторождений драгоценных металлов, распределение содержаний и в этом случае было асимметричным (Рис. 5.10).



**Рис 5.10.** Гистограмма аккумуляций золота

Экспериментальные вариограммы аккумуляций золота были рассчитаны в четырех направлениях. Основные два (параллельное к течению потока и перпендикулярное к нему) показаны на Рис. 5.11. Вариограмма в направлении СВ-ЮЗ имеет более протяженную зону влияния (около 220м), и поэтому показывает для месторождения направление с наибольшей непрерывностью. Другая функция имеет зону около 75м) и понижается в интервалах с 150 до 160м и с 300 до 320м. Так как золото в этом месторождении откладывалось по движению потока, то

по вариограммам можно установить направление потока с СВ на ЮЗ. Это подтверждает факт, уже известный геологам.

Другая интересная особенность вариограмм – периодичность в направлении СЗ-ЮВ (с короткой зоной). Вариограмма достигает максимума на расстоянии около 75м, падает до минимума 150м, снова возрастает и падает до второго минимума на расстоянии около 300м. Это обусловлено наличием в потоке параллельных каналов, в которых откладывалось золото. Направление СЗ-ЮВ пересекает эти каналы, которые параллельны и встречаются через каждые 150м. Геологи знают направление течения потока, но они не представляют себе, что имеются каналы, разделенные в среднем расстоянием в 150м. Поэтому интерпретация вариограммы дополняет знания геологов о месторождении.

**Рис 5.11.** Вариограммы аккумуляций золота по направлениям; (а) параллельно к направлению течения потока и (b) перпендикулярно к нему

Следующий вопрос – следует ли выбрать модель вариограммы, которая включает периодичность. Для кригинга мы используем данные, расположенные не далее 100м от оцениваемого блока. Поэтому подбирается модель вариограммы только до этого расстояния. Подходят модели с геометрической анизотропией с зоной 80м в направлении СЗ-ЮВ и зоной 200м в направлении СВ-ЮЗ. Хорошо выглядит сферическая модель с этими зонами и эффектом самородка, эквивалентным 35% общего порога. Поэтому, если кригинг использует для интерполяции сравнительно небольшие эллипсоиды поиска, то нет причины вовлекать в модель вариограммы сложные структуры, характерные для больших расстояний, например – периодичность.

В итоге, так как данные имеют приближенно трехпараметрическое логнормальное распределение, то для сравнения с только что рассмотренными вариограммами были вычислены вариограммы логарифмов содержаний (Рис. 5.12). Основные пропорции их в основном схожи с обычными вариограммами, но колебания имеют меньшую амплитуду. Вариограмма логарифмов выглядит более устойчивой, и демонстрирует зоны влияния и порог более четко.

**Рис 5.12.** Вариограмма логарифмов аккумуляций золота

## 6. Изменчивость как функция от размера блока

### **Содержание**

Эта глава связана с эффектом основания пространственной переменной (т.е. с его формой и объемом), который анализируется с помощью гистограммы и вариограммы. Во вступительном примере гистограммы и основные статистики вычислялись для двух размеров основания: блоки 1м на 1м и 2м на 2м. Хотя средние двух распределений одинаковы, дисперсия для большего основания намного меньше, а ее гистограмма имеет почти симметричную форму, в то время как другая гистограмма асимметрична.

Затем приводятся формулы для расчета дисперсии точки внутри блока и маленьких блоков  $v$  внутри большого блока  $V$ . Доказываются аддитивное отношение Крига. Затем мы увидим, как регуляризованная вариограмма связана с вариограммой на точечном основании. И наконец, приведенное упражнение проиллюстрирует воздействие регуляризации на вариограммы.

### **Основание пространственной переменной**

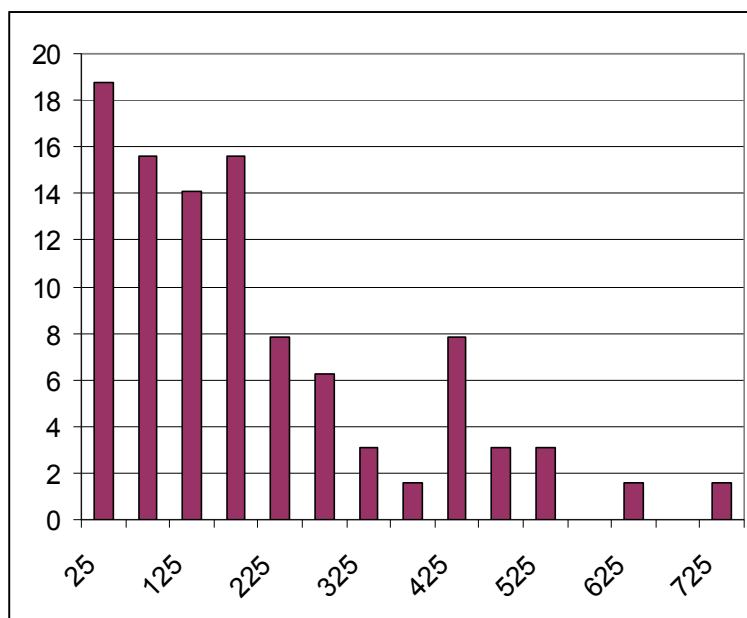
Во многих практических ситуациях пространственные переменные рассчитываются, как средние определенного объема или поверхности, а не относятся к точке. Базовый объем, к которому относится пространственная переменная, называется ее основанием. Изменение основания приводит к появлению новой пространственной переменной, которая связана с предшествующей, но имеет другие структурные характеристики. Например, значения содержаний для 2-х дюймового керна (т.е. с диаметром 50мм) имеют большую изменчивость, чем значения содержаний для керна с большим диаметром, или блоков и валовых проб. Проблема заключается в том, чтобы определить, как связаны эти переменные между собой. Другими словами, что мы можем сказать о содержаниях в блоках, зная содержания по керновым пробам? Ответ будет дан в два этапа. На первом этапе, мы определим изменчивость как функцию основания. Затем, мы увидим, как связаны между собой их вариограммы для разных оснований.

#### *Связь изменчивости с размером блока*

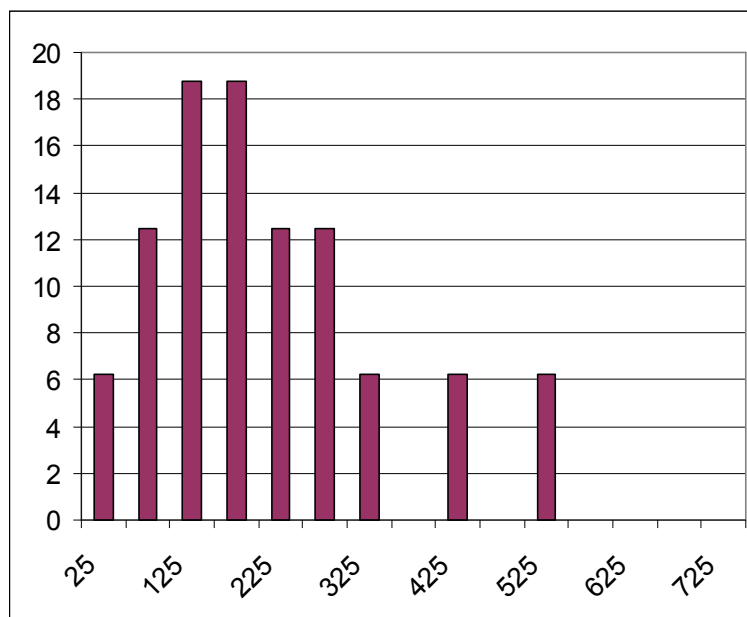
Чтобы проиллюстрировать эффект основания, мы вернемся к данным примера, рассмотренного в Главе 1. В Таблице 6.1 приведены содержания 64 блоков 1\*1м, а также содержания для шестнадцати блоков 2\*2м, каждое из которых представляет собой среднее содержание для 4-х смежных блоков размером 1\*1м. Эти величины получены из 1000 анализов, изученных Sandjiv (1980). Как и ожидалось, средние обеих множеств практически одинаковы (201). Небольшая разница обусловлена округлениями содержаний до целых чисел. Но дисперсии множеств не одинаковы. Дисперсия для блоков 2\*2м равна 16,641, что значительно меньше, чем для блоков 1\*1м (27,592). Если данные статистически независимы, то дисперсия для большего основания будет составлять 25%

от меньшего. Поскольку в данном случае множества коррелируют между собой, то разница получается меньше.

Рис. 6.1 и 6.2 показывают, что формы гистограмм тоже изменяются. Вторая гистограмма менее асимметрична. Выводы этого исследования очень важны для горного дела. При селективной добыче выгодно добывать только те блоки, содержание в которых выше бортового. Поэтому очень важно как можно точнее предсказать количество балансовой руды в отрабатываемом месторождении. Как было показано в Главе 1, где для оценивания запасов использовался полигональный метод (метод многоугольника), содержание пробы, попавшей внутрь многоугольника, распространяется на весь объем многоугольника. Это приводит к приравниванию гистограммы содержаний в керновых пробах к гистограмме содержаний в блоках, и, следовательно, к серьезным ошибкам в оценивании извлекаемых запасов, потому что эти гистограммы существенно отличаются, как можно увидеть из Рис. 6.1 и 6.2.



**Рис 6.1.** Гистограмма содержания 64-х блоков 1м на 1м



**Рис 6.2.** Гистограмма содержания 16-ти блоков 2м на 2м

**Таблица 6.1.** Содержание в (а) шестидесяти четырех блоках 1м на 1м и (b) - в шестнадцати блоках 2м на 2м

а

735	325	45	140	125	175	167	485
540	420	260	128	20	30	105	70
450	200	337	190	95	260	245	278
180	250	380	405	250	80	515	605
124	120	430	175	230	120	460	260
40	135	240	35	190	135	160	170
75	95	20	35	32	95	20	450
200	35	100	59	2	45	58	90

б

505	143	88	207
270	328	171	411
102	220	154	263



101	54	44	155
-----	----	----	-----

### ***Дисперсия точечной пробы внутри объема***

Сейчас рассмотрим, как оценить дисперсию блоков по вариограмме проб. Обозначим основания с разными объемами, как  $v$  (меньшее) и  $V$  (большее). Если данные двухмерные, то это будут области, а не объемы. В нашей модели изучаемые переменные предполагаются, как реализации  $z(x)$  случайной функции  $Z(x)$ . Если все значения величины внутри объема  $V$  доступны, то можно найти среднее содержание и дисперсию внутри этого объема. Среднее равно

$$m_v = \frac{1}{V} \int_v z(x) dx \quad [6.1]$$

а дисперсия содержаний внутри объема  $V$

$$s^2(0|V) = \frac{1}{V} \int_v (z(x) - m_v)^2 dx \quad [6.2]$$

Здесь  $0$  означает точку с практически нулевым объемом. Если мы рассмотрим разнообразие реализаций, то дисперсию  $z(x)$  внутри  $V$  можно получить, как математическое ожидание  $s^2(0|V)$  для всех возможных реализаций:

$$\sigma^2(0|V) = E[s^2(0|V)] \quad 6.3]$$

Можно показать, что эта дисперсия связана с вариограммой формулой:

$$\sigma^2(0|V) = \frac{1}{V^2} \iint \gamma(x - y) dx dy \quad [6.4]$$

Этот интеграл есть среднее, вычисленное изменением  $x$  и  $y$  независимо по всему объему  $V$ . Поэтому введем обозначение  $\bar{\gamma}(V, V)$ . Получим

$$\sigma^2(0|V) = \bar{\gamma}(V, V) \quad [6.5]$$

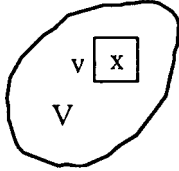
На практике  $\bar{\gamma}(V, V)$  вычисляется дискретизацией блока  $V$ . Упражнение 6.1 в конце главы покажет читателю, как производятся такие вычисления.

### ***Дисперсия блоков $v$ внутри блока $V$***

Теперь мы обсудим новую случайную функцию, определенную, как пространственное среднее объема  $v$ :

$$Z_v(x) = \frac{1}{v} \int_v Z(x+t) dt \quad [6.6]$$

Цель – найти изменчивость этой новой переменной  $Z_v(x)$  внутри большого объема  $V$ . Обычно  $v$  представляет собой керновую пробу, а  $V$  может представлять горный выемочный блок, или  $v$  – суточная добыча, а  $V$  – все месторождение.



**Рис 6.3.** Маленький блок  $v$  с центром в точке  $x$  внутри объема  $V$

Дисперсия  $v$  внутри  $V$  обозначается  $\sigma^2(v|V)$  и рассчитывается следующим образом:

$$\sigma^2(v|V) = E \left( \frac{1}{V} \int_v (Z_v(x) - m_v)^2 dx \right) \quad [6.7]$$

Раскрывая это выражение, получаем:

$$\sigma^2(v|V) = \frac{1}{V^2} \iint_v \gamma(x-y) dx dy - \frac{1}{v^2} \iint_v \gamma(x-y) dx dy = \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) \quad [6.8]$$

Аддитивное отношение Крига

Объединение результатов [6.5] и [6.8] дает уравнение, называемое аддитивным отношением Крига.

$$\sigma^2(v|V) = \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) = \sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v) \quad [6.9]$$

Это выражение можно написать для трех объемов  $v$ ,  $V$  и  $V'$ , где  $v \subset V \subset V'$ :

$$\sigma^2(v|V') = \sigma^2(v|V) + \sigma^2(V|V') \quad [6.10]$$

Например,  $v$  может быть секцией керна,  $V$  – блоком, а  $V'$  – большим участком или всем месторождением. В этом случае формулу можно интерпретировать, как "дисперсия керна внутри месторождения равна дисперсии керна внутри блока плюс дисперсия блока внутри месторождения". Сейчас мы проверим это утверждение для данных, рассмотренных ранее (см. Табл. 6.1). Здесь  $v$  соответствует блоку 1м на 1м, а  $V$  – блоку 2м на 2м.

Ранее мы получили:

$$\sigma^2(v|V) = \sigma_{1 \times 1}^2 = 27,592 \quad [6.11]$$

$$\sigma^2(V|V) = \sigma_{2 \times 2}^2 = 16,641.1 \quad [6.12]$$

Значение  $\sigma^2(v|V)$  можно вычислить, как дисперсию четырех малых блоков внутри одного большого. Получаем 10,951. Легко проверить, что это значение эквивалентно 27,592-16,641 и, следовательно, удовлетворяет аддитивному отношению. На самом деле это справедливо для всех случаев, где малые блоки  $v$  полностью заполняют больший по размеру блок, здесь –  $V$ .

### **Упражнение: Склад для усреднения угля**

Очень часто качество добываемого угля, поступающего на углеобогадательную фабрику или электростанцию, сильно изменяется во времени. Проблема заключается в том, чтобы решить, будет ли экономично создать специальный усреднительный склад для повышения однородности угля. Линейная геостатистика может быть использована для расчета дисперсии средних содержаний блоков руды определенного размера. При этом предполагается идеальное перемешивание материала.

Предположим, что содержание золы в угле имеет сферическую вариограмму с зоной 300м и порогом 5.0. Каждый день компания добывает блок руды 60м на 100м (обозначим через  $v$ ); каждую неделю выбирается полоса из шести смежных блоков. Ширина полосы определяется длиной стрелы драглайна и равна 60м. Поэтому  $V$  имеет размеры 60м на 600м. Определим  $\gamma(v, v)$  и  $\gamma(V, V)$  и, следовательно, изменчивость качества угля однодневной добычи в течение недели.

#### *Решение*

Первый шаг – вычислить  $\gamma(v, v)$  и  $\gamma(V, V)$ . Есть два пути для этого, либо написать небольшую компьютерную программу, либо воспользоваться стандартными таблицами и номограммами. Упражнения 6.1 и 6.2 показывают, как использовать эти методы. Результаты расчета:

$$\gamma(v, v) = 1.05 \text{ и } \gamma(V, V) = 3.40 \quad [6.13]$$

Теперь легко вычислить дисперсию  $\sigma^2(v|V)$ .

$$\sigma^2(v|V) = \gamma(V, V) - \gamma(v, v) = 2.35 \quad [6.14]$$

Соответствующее СКО (среднеквадратичное отклонение) равно 1.53. Используя  $m \pm 2\sigma$ , как приближенный доверительный интервал, ежедневное среднее будет отклоняться на  $\pm 3$  (т.е.  $2 \cdot 1.53$ ) от

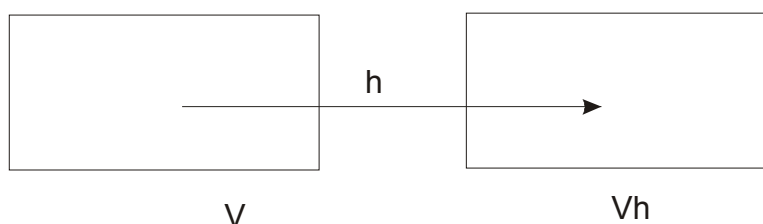
еженедельного среднего. Более точный ответ можно получить геостатистическим условным моделированием месторождения и проведением имитации процесса добычи на полученной модели. Смотрите пример Chica-Olmo и Laille (1984) и Deraisme и de Fouquent (1984). Но такие задачи находятся за пределами этой книги.

### **Изменение основания: регуляризация**

Обозначим за  $Z(x)$  случайную функцию, определенную на точечном основании. Ее среднее для объемов  $V$  определяет новую случайную функцию  $Z_v(x)$  с основанием  $V$ . Можно показать, что вариограмма этой новой регуляризованной переменной:

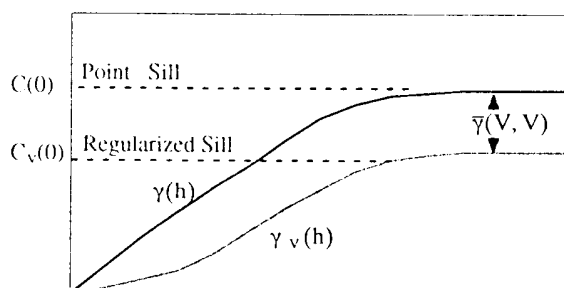
$$\gamma_v(h) = \bar{\gamma}(V, V_h) - \bar{\gamma}(V, V) \quad [6.15]$$

где  $V_h$  обозначает основание  $V$ , перемещенное на расстояние  $h$  (преобразованное вектором  $h$ ), а  $\bar{\gamma}(V, V_h)$  представляет собой среднее значение вариограммы между произвольной точкой в  $V_h$  и другой точкой в  $V$ .



**Рис 6.4.** Объем  $V$ , перемещенный вектором  $h$  в объем  $V_h$

Когда расстояние  $h$  мало по сравнению с размером  $V$ , то расстояние от произвольной точки в  $V$  до произвольной точки в  $V_h$  может значительно меняться. Например, если  $V$  – прямоугольник с длиной  $l$ , то горизонтальные расстояния меняются от  $h-l$  до  $h+l$ . Однако, когда длина  $h$  значительно больше размера  $V$ , то все расстояния довольно близки к  $h$ . Следовательно, среднее значение вариограммы  $\bar{\gamma}(V, V_h)$  приблизительно равно  $\gamma(h)$ . Поэтому мы определим зависимость:



$$\gamma_v(h) = \gamma(h) - \bar{\gamma}(V, V)$$

{6.16}

**Рис 6.5.** Вариограмма с точечным основанием и регуляризованная вариограмма

**Упражнение: вычисление регуляризованных вариограмм**

Данные, используемые для оценки запасов, не всегда имеют одинаковый размер основания. Например, одни скважины могут иметь диаметр 8 дюймов, а другие - 2 дюйма. Важно иметь возможность вычислить вариограммы, соответствующие этим двум основаниям. Мы рассчитаем модели вариограмм для блоков 2м на 2м и 3м на 3м и получим, что  $\bar{\gamma}(V, V) = 11,150$  для блоков 2м на 2м и  $\bar{\gamma}(V, V) = 13,900$  для блоков 3м на 3м.

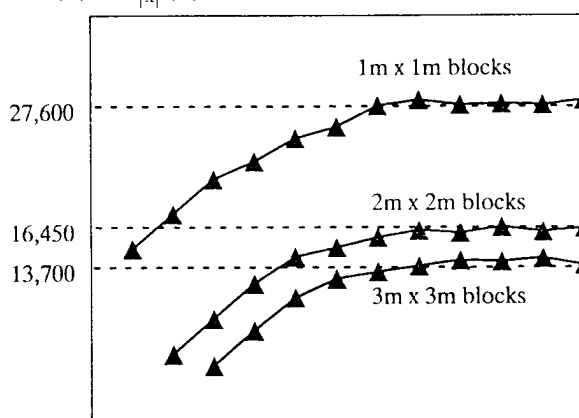
*Решение*

Для блоков 2м на 2м

$$\gamma_R(h) = \gamma_{|x|}(h) - 11,150 \quad [6.17]$$

Для блоков 3м на 3м

$$\gamma_R(h) = \gamma_{|x|}(h) - 13,900 \quad [6.18]$$



В результате теоретические пороги регуляризованных вариограмм равны 16,450 и 13,700 соответственно. На Рис. 6.6 изображены эти три экспериментальные вариограммы. Их пороги близки к вычисленным теоретически.

**Рис 6.6.** Экспериментальные вариограммы для трех размеров оснований

## 6.9 Упражнения

Чтобы выполнить эти упражнения, сначала нужно вычислить значения  $\bar{\gamma}(V, V)$ . Для этого существует два пути: написание небольшой вычислительной программы для дискретизации  $V$  или использование стандартных таблиц и номограмм, таких которые приведены в работе Journel и Huijbregts (1978) на стр. 125-147. Первый пример использует

компьютерное вычисление, а второй показывает, как пользоваться таблицами.

**Упр 6.1 Вычисление  $\bar{\gamma}(V, V)$  с помощью дискретизации блока.** Это упражнение предполагает вычисление среднего значения вариограммы через дискретизацию блока  $V$ . Во-первых, нужно выбрать количество ячеек сетки для каждой оси, потому что оно определяет координаты точек дискретизации.

Процедура состоит из цикла, который берет каждую пару точек, вычисляет вектор расстояния между ними, оценивает соответствующее значение вариограммы и складывает полученные значения. В заключении сумма делится на квадрат количества ячеек сетки дискретизации для получения среднего значения вариограммы.

Выбор количества ячеек сетки очень важен. Если ячеек слишком мало, то среднее будет неточным; если наоборот, то время вычислений будет слишком велико. Например, если квадрат разделить на 100 на 100 точек; получаем  $10^4$  точек и  $10^8$  слагаемых вариограммы. Обычно достаточно от 25 до 100 точек в двухмерном пространстве и 200-300 точек в трехмерном пространстве.

Напишите компьютерную программу для вычисления  $\bar{\gamma}(V, V)$  и  $\bar{\gamma}(v, v)$ , где  $V$  – блок 100м на 100м и  $v$  – блок 10м на 10м и где вариограмма:  
сферическая с зоной 100м и порогом 3.0,  
экспоненциальная с практической зоной 50м и порогом 3.0,  
чистый эффект самородка с порогом 3.0.

Начните вычисления, используя дискретизацию 2 на 2, и продолжите их до значения 10 на 10, обращая внимание на стабилизацию величины  $\bar{\gamma}(V, V)$  и увеличение времени вычислений.

**Упр 6.2 Вычисление  $\bar{\gamma}(V, V)$  с помощью таблиц.** Это упражнение иллюстрирует использование стандартных таблиц, которые можно найти в текстах опубликованных работ, например Journel и Huijbregts (1978). Главы 4 и 5 (стр 128-9) приводят стандартные значения  $\bar{\gamma}(V, V)$  для сферической вариограммы с единичной зоной и единичным порогом для двухмерных и трехмерных блоков соответственно. Ключом к использованию этих таблиц является преобразование размера блока в долю зоны (или масштабного коэффициента "а" для экспоненциальной вариограммы) и, затем прочтение требуемых значений из таблицы.

Например, если блок имеет размер 100м на 100м, вариограмма сферическая с зоной 200м и порогом 3.0, то блок эквивалентен размеру 0.5 на 0.5 зоны. Таблица дает значение 0.375. Подставляя порог, получаем

$$\bar{\gamma}(V, V) = 3.0 \times 0.375 = 1.125$$

Используем таблицы для вычисления  $\bar{\gamma}(V, V)$  и  $\bar{\gamma}(v, v)$ , где  $V$  – блок 100м на 100м и  $v$  – блок 10м на 10м, где вариограмма :

сферическая с зоной 100м и порогом 3.0,  
экспоненциальная с практической зоной 50м и порогом 3.0,  
эффект самородка с порогом 3.0 (зона = 0).

Сравните ваши результаты с итогами, полученными в предыдущем упражнении.

**Упр 6.3 Вычисление  $\bar{\gamma}(V, V)$  теоретически.** В некоторых простых случаях  $\bar{\gamma}(V, V)$  можно вычислить через интеграцию, используя уравнение [6.4]. Пусть  $V$  будет секцией керна длиной  $d$  (одномерный случай).

Если вариограмма линейна с наклоном  $C$ , то покажите, что  $\bar{\gamma}(d, d) = C d / 3$ . Помните, что  $\gamma(h) = C|h|$ .

Вычислите  $\bar{\gamma}(d, d)$  для случая, когда вариограмма экспоненциальная с порогом  $C$  и практической зоной 3.

Вычислите  $\bar{\gamma}(d, d)$  для случая, где вариограмма является эффектом самородка с порогом  $C$ .

**Упр 6.4 Дисперсия изменчивости.** Используйте значения  $\bar{\gamma}(V, V)$  и  $\bar{\gamma}(v, v)$ , найденные выше, для вычисления дисперсии изменчивости блоков 10м на 10м внутри области размером 100м на 100м для случаев, где вариограмма :

сферическая с зоной 100м и порогом 3.0,  
экспоненциальная с практической зоной 50м и порогом 3.0,  
эффект самородка с порогом 3.0 (зона = 0).

**Упр 6.5 Дисперсия изменчивости.** Небольшая добывающая компания добывает в карьере каждый день 4 блока размером 10м на 10м на 5м. Менеджер по добычи может выбрать вариант добычи 4-х смежных блоков (т.е. 40м на 10м на 5м) или блоков из разных частей карьера, которые расположены на большом расстоянии друг от друга, чтобы считать их некоррелированными. Задание заключается в прогнозе ежедневного разброса среднего содержания для обоих вариантов. Добываемая руда имеет сферическую вариограмму с зоной 100м и порогом 3.0.

**Упр 6.6 Регуляризованные вариограммы.** Содержание меди в секциях керна длиной 5м имеет сферическую вариограмму с вертикальной зоной 50м, порогом 1.0 и эффектом самородка 0.05. Если высота уступа во время добычи будет равна 15м, то данные будут композированы по этой высоте. Мы хотим вычислить вертикальную вариограмму для этой новой композированной переменной. Во-первых, вычислите  $\bar{\gamma}(d, d)$ , где  $d$  – секция керна длиной 15м, затем рассчитайте и постройте вариограммы для секций 5м и 15м на одном графике.

## 7. Теория кригинга

### 7.1 Содержание

Эта глава представляет теорию кригинга. Кригинг – это метод оценивания, который дает наилучшую несмещенную линейную оценку значений точек или средних содержаний блоков. Здесь "наилучшая" означает минимальную дисперсию. Обсуждается три типа кригинга: обыкновенный кригинг (ordinary kriging, OK), используемый, когда среднее содержание неизвестно, кригинг неизвестного среднего и простой кригинг (simple kriging, SK), используемый, когда среднее содержание известно.

Уравнения этих трех оценок выведены для стационарного случая и обобщаются для случая внутренних переменных для OK. Доказывается теорема аддитивности, которая позволяет установить связь между OK и SK. Для обыкновенного кригинга дается формула наклона графика линейной регрессии действительных значений и их оценок, а также обсуждается ее важность в связи с условной несмещенностью. В заключении кригинг представляется, как точный интерполятор.

### 7.2 Цель кригинга

Опробование обеспечивает точную информацию в точках взятия проб. Однако оно не информирует нас, что происходит между этими точками. Поэтому нам нужен точный способ оценивания значений в промежуточных точках или средних по блокам. Точность оценивания зависит от нескольких факторов:

- количество проб и качество данных в каждой точке.
- расположение проб по месторождению. Равномерно расположенные пробы дают больше информации о месторождении, чем неравномерно сгруппированные данные.
- расстояние между пробами и точкой или оцениваемым блоком. Действительно, чем дальше расположена проба, тем труднее ей доверять. Поэтому мы ожидаем, что точность выше для близких проб, и уменьшается с увеличением расстояния. Здесь не нужно объяснять опасность экстраполяции за пределы зоны опробования.
- пространственная непрерывность рассматриваемой переменной. Легче оценить величину регулярной переменной, чем той, которая меняется произвольно. Например, для данного расположения проб, оценки содержания меди более точны, чем оценки золота.

"Кригинг" – метод оценивания, который учитывает все эти факторы. Он назван в честь доктора Д. Г. Крига (Dr D.G. Krige), южноафриканского горного инженера, который первым разработал метод движущего среднего для оценки содержания золота, чтобы убрать эффект регрессии. Профессор Дж. Матерон (Prof. G. Matheron) улучшил эту методику, и новый метод был назван кригингом. По существу, это способ нахождения лучшей несмещенной линейной оценки (в смысле наименьшей дисперсии). Это значит, что мы выбираем взвешенное среднее величин проб, которые имеют минимальную дисперсию.



### 7.3 Происхождение уравнений кригинга

Задача состоит в следующем: мы имеем  $N$  значений данных  $z(x_1), \dots, z(x_N)$  в нашем районе, и мы хотим оценить линейную функцию переменной  $Z(x)$ . Например, мы можем захотеть оценить ее значение в конкретной точке  $Z(x_0)$ , или ее среднее по определенному региону. (Некоторые другие линейные функционалы, такие как градиент, также могут быть оценены с помощью кригинга.) Чтобы избежать необходимости описания всех случаев раздельно, мы обозначим оцениваемое множество через:

$$z_v = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx \quad [7.1]$$

Объем  $V$  может быть всем месторождением, или добываемым блоком, или он может быть таким маленьким, как одна точка, в случае точечной оценки. Он может быть даже неправильной формы. Для большей информации по кригингу объемов неправильной формы смотрите Рамку 5. Чтобы оценить  $Z(V)$ , мы запишем взвешенное среднее данных:

$$z_v^* = \sum \lambda_i z(x_i) \quad [7.2]$$

где  $\lambda_i$  – факторы взвешивания. По договоренности звездочка будет использоваться для обозначения оценки значения, как противопоставление действительному, но неизвестному значению. Проблема заключается в определении лучшего способа выбора факторов взвешивания. Т.е. найти область, где мы можем использовать геостатистическую модель. Мы предполагаем пространственную переменную:

$$Z_v^* = \sum \lambda_i Z(x_i) \quad [7.3]$$

Веса выбираются такие, чтобы оценка была:

несмещенной:  $E[Z_v^* - Z_v] = 0$

с минимальной дисперсией:  $\text{Var}[Z_v^* - Z_v]$  - минимально.

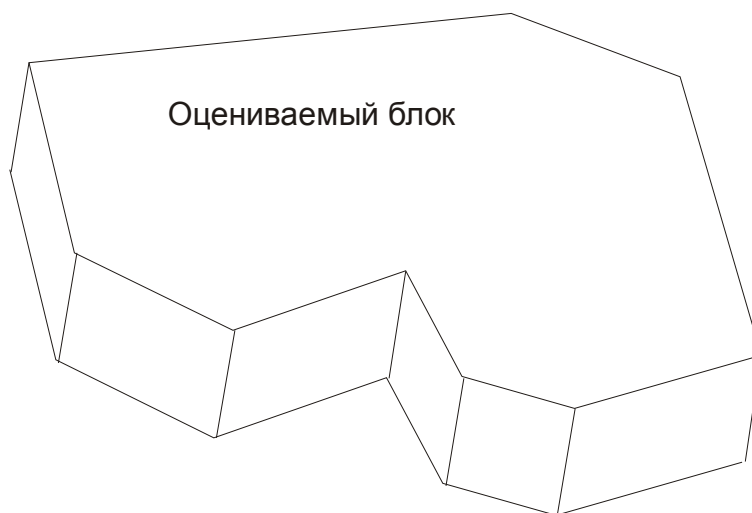
Эту дисперсию мы будем называть дисперсией кригинга.

### 7.4 Различные кригинговые оценщики

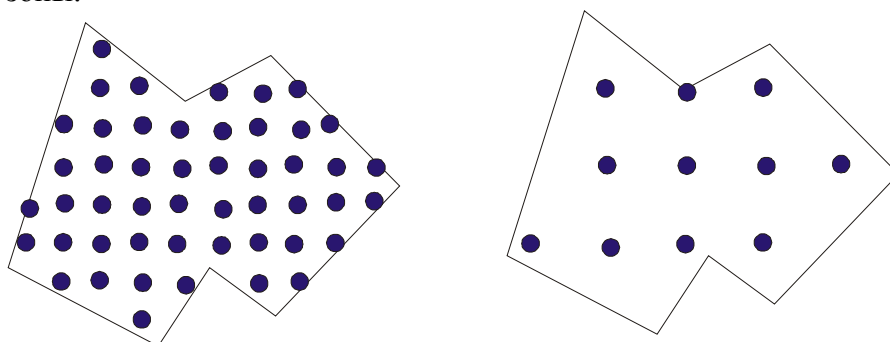
На первом этапе мы предполагаем, что пространственная переменная  $Z(x)$  стационарна и, что ее среднее  $m$  неизвестно. Кригинг с неизвестным средним называется обычным кригингом (ОК). Сначала мы определим систему уравнений для обычного кригинга (для стационарного случая) в терминах вариограммы, а затем ковариацию, после чего покажем, как обобщить эти результаты на случай внутренних переменных.

Рамка № 5: Могут ли неправильной формы блоки быть оценены кригингом?

Некоторые люди думают, что только регулярные блоки могут быть оценены кригингом. Но это не верно. Уравнения кригинга имеют довольно общий характер. Целевой объем "V" может быть малым, как точка, или большим, как все месторождение. Чаще это блоки регулярной формы, но они могут иметь и неправильную форму, такую как блок, намеченный для взрыва.



Проблемы возникают только, когда надлежащим образом дискретизируется V для вычисления  $\bar{\gamma}(V, V)$  и  $\bar{\gamma}(x, V)$ . Для правильной формы блока легче выбрать размер сетки, который гарантирует достаточное количество точек дискретизации внутри зоны оценивания. Как можно увидеть из двух рисунков ниже, небольшое изменение интервалов сетки приводит к существенному уменьшению количества узлов сети внутри зоны.



Следующий этап заключается в том, чтобы понять, как оценивать неизвестное среднее  $m$ . После этого мы увидим, что происходит с кригинговой оценкой, если среднее  $m$  известно. Этот метод называется простым кригингом и обозначается SK. Во всех этих случаях линейные уравнения, называемые системой кригинга, должны решаться для вычисления весов кригинга и дисперсии кригинга.

### 7.5 Обычный кригинг

**Несмещенность.** Переменная  $Z(x)$  полагается стационарной со средним  $m$ . Ее среднее каждой точки равно  $m$  и, поэтому является средним любого блока. Это значит

$$E[Z(x)] = m = E[Z_v] \quad [7.4]$$

Большинство оценок являются взвешенным движущимся средним величин пространственных данных, что означает, что они - линейные комбинации этих данных:

$$Z_v^* = \sum \lambda_i Z(x_i) \quad [7.5]$$

Среднее ошибки оценивания  $[Z_v^* - Z_v]$  – это:

$$E[\sum \lambda_i Z(x_i) - Z_v] = \sum \lambda_i m - m = m[\sum \lambda_i - 1] \quad [7.6]$$

Чтобы быть несмещенной, математическое ожидание ошибки должна быть равно нулю, поэтому либо  $m=0$ , либо сумма весов кригинга равна 1. В первом случае среднее известно (Это приводит к простому кригингу). Если  $m$  неизвестно, то сумма весов должна равняться 1.<sup>2</sup>

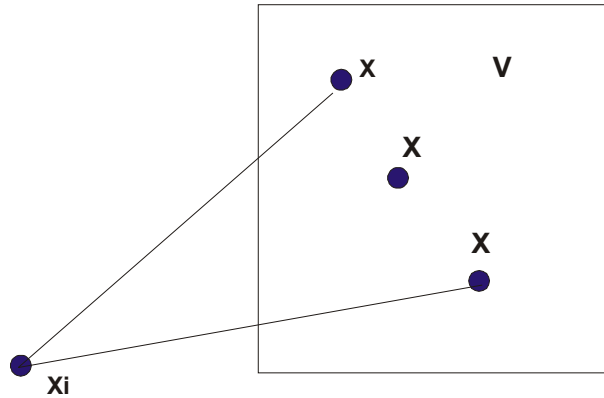
**Минимальная дисперсия.** Дисперсию ошибки  $[Z_v^* - Z_v]$  можно выразить в терминах либо ковариации, либо вариограммы:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum \sum \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) + \overline{C}(V, V) - 2 \sum \lambda_i \overline{C}(x_i, V) = \\ &= 2 \sum \lambda_i \overline{\gamma}(x_i, V) - \sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \overline{\gamma}(V, V) \end{aligned} \quad [7.7]$$

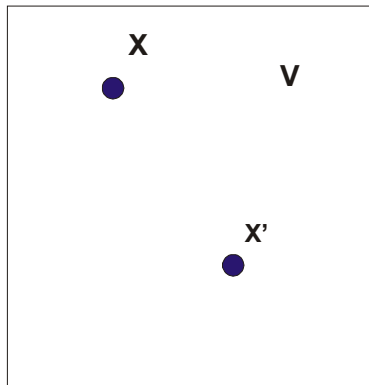
где  $\overline{\gamma}(x_i, V)$  - среднее вариограммы между  $x_i$  и объемом  $V$ , т.е.

$$\overline{\gamma}(x_i, V) = \frac{1}{V} \int_V \gamma(x_i - x) dx$$

<sup>2</sup> Утверждение, что сумма весов кригинга должна равняться 1, а не 0, иногда приводит к сюрпризам. Сумма всех весов равна 0, потому что в выражении для ошибки оценивания есть вес  $-1$  перед  $Z(V)$ .



Как показано в Главе 6,  $\bar{\gamma}(V, V)$  является средним вариограммы между любыми двумя точками  $x$  и  $x'$ , независимо распределенных по всему объему  $V$ .



$$\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{V^2} \iint \gamma(x - x') dx dx'$$

Аналогично  $\bar{C}(x_i, V)$  и  $\bar{C}(V, V)$  являются средними для ковариаций. Чтобы минимизировать дисперсию оценивания при условии, что сумма весов кригинга равна 1, мы вводим коэффициент Лагранжа  $\mu$  в выражение для минимизации. Поскольку сумма весов должна быть равна 1.0, то добавление слагаемого  $\mu$  не изменит значения выражения.

$$\phi = \text{Var}(Z_v^* - Z_v) - 2\mu(\sum \lambda_i - 1) \quad [7.8]$$

Частная производная затем приравнивается нулю. Это приводит к системе с  $N+1$  линейными уравнениями, называемой системой кригинга. В Рамке 6 показан вывод этой системы. Система кригинга в терминах вариограммной модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu &= \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

[7.9]

Минимум дисперсии, называемый дисперсией кригинга вычисляется:

$$\sigma_k^2 = \sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu \quad [7.10]$$

Понятно, что уравнения можно решать и в терминах ковариации, используя минимизацию первой формы [7.7]. Вид системы кригинга в этом случае:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j C(x_i, x_j) + \mu' &= \bar{C}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_i \lambda_i &= 1 \end{aligned} \quad [7.11]$$

#### Рамка № 6: Вывод уравнений обычного кригинга

Важным шагом в выводе уравнений кригинга является минимизация выражения для дисперсии оценивания:

$$\phi = 2 \sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \sum \sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \bar{\gamma}(V, V) + 2\mu(1 - \sum \lambda_i)$$

Эта формула получена дифференцированием в отношении каждого неизвестного и присваиванием частной производной нуля. Здесь мы видим это в деталях для случая, когда имеется три пробы. Процедура такая же, как и в общем случае для N проб. Если мы установим  $\gamma_0 = \gamma(x_i, x_j)$  и  $\gamma_{iV} = \bar{\gamma}(x_i, V)$ , тогда

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda_1 \gamma_{1V} + 2\lambda_2 \gamma_{2V} + 2\lambda_3 \gamma_{3V} - \\ &- (\lambda_1^2 \gamma_{11} + \lambda_2^2 \gamma_{22} + \lambda_3^2 \gamma_{33} + 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma_{12} + 2\lambda_1 \lambda_3 \gamma_{13} + 2\lambda_2 \lambda_3 \gamma_{23}) - \\ &- \bar{\gamma}(V, V) + 2\mu(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

Дифференцируем по  $\lambda_1$  и получаем

$$\frac{d\phi}{d\lambda_1} = 2\gamma_{1V} - [2\lambda_1 \gamma_{11} + 2\lambda_2 \gamma_{12} + 2\lambda_3 \gamma_{13} + 2\mu] = 0$$

Отсюда

$$\lambda_1 \gamma_{11} + \lambda_2 \gamma_{12} + \lambda_3 \gamma_{13} + \mu = \gamma_{1V}$$

Аналогично дифференцируем по  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  и получаем

$$\lambda_1 \gamma_{12} + \lambda_2 \gamma_{22} + \lambda_3 \gamma_{23} + \mu = \gamma_{2V}$$

$$\lambda_1 \gamma_{13} + \lambda_2 \gamma_{23} + \lambda_3 \gamma_{33} + \mu = \gamma_{3V}$$

Последнее дифференцирование по  $\mu$  дает

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

В результате - система кригинга имеет вид:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

В общем случае она должна дифференцироваться по каждому из N неизвестных весов, сумма их в системе кригинга должна быть от 1 до N, а не от 1 до 3. В противном случае принципы остаются теми же.

Два коэффициента Лагранжа связаны между собой равенством  $\mu' = -\mu$ . Получаем соответствующую дисперсию кригинга:

$$\sigma_k^2 = \bar{C}(V, V) - \mu' - \sum \lambda_i \bar{C}(x_i, V) \quad [7.12]$$

Чтобы решить систему, запишем ее в матричном виде:  $AX=B$ .

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(x_N, V) \\ 1 \end{bmatrix} \quad [7.13]$$

Если  $\gamma$  - допустимая модель, и если нет повторяющихся точек, то матрица A в любом случае - не вырожденная. Существует ее обратная матрица  $A^{-1}$ . Поэтому решение существует, и можно доказать, что оно единственно. Единственность важна, потому что она используется для связи различных типов кригинга. Дисперсию кригинга можно записать:

$$\sigma_k^2 = X^T B - \bar{\gamma}(V, V) \quad (X^T = X \text{ транспонированное}) \quad [7.14]$$

Обратная матрица A не является положительно определенной.

### **7.6 Уравнения ОК для внутренних пространственных переменных**

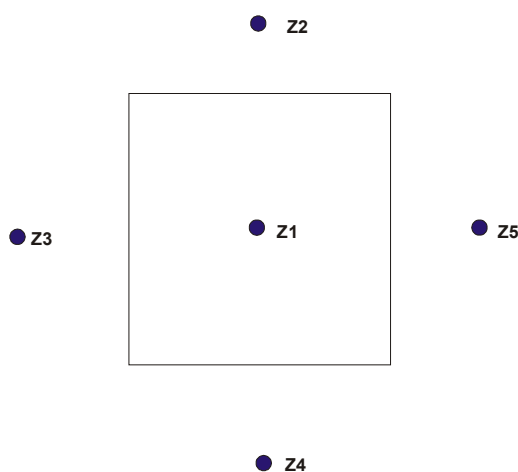
В предыдущем параграфе уравнения ОК получены для случая стационарных пространственных переменных. Что произойдет, если пространственная переменная  $Z(x)$  внутренняя, но не стационарная. В определении внутренней переменной мы сказали, что здесь действия производятся с приращениями, а не с самими переменными. В частности были выдвинуты две гипотезы:

$$E[Z(x+h) - Z(x)] = 0 \quad [7.15]$$

$$\text{Var}[Z(x+h) - Z(x)] = 2\gamma(h) \quad [7.16]$$

где  $\gamma(h)$  зависит от  $h$ , но не от  $x$ . Поэтому по этой гипотезе ошибка оценивания  $[Z_v^* - Z_v]$  является приращением, обеспечивающим сумму весов равную 1.0, и, следовательно, ее математическое ожидание и дисперсия существуют и могут быть вычислены. С этой точки процедура остается такой же как и для стационарного случая. Вычисляется и минимизируется дисперсия ошибки оценивания. Это приводит к такой же системе кригинга в терминах вариограммы, как и раньше. Это - одна из причин того, почему используется внутренняя гипотеза, а не просто – гипотеза стационарности.

### 7.7 Упражнение: Обычный кригинг блока



**Рис 7.1.** Конфигурация данных с оцениваемым блоком

Оценим кригингом выделенный блок (200м на 200м), используя 5 проб из регулярной 200м сетки. Предположим, что пространственная переменная стационарна с изотропной сферической вариограммой с порогом 2.0 и зоной 250м. Чтобы сделать возможными вычисления на карманном калькуляторе, ниже даны значения  $\bar{\gamma}(V, V)$  и  $\bar{\gamma}(V, x)$ .

$$\bar{\gamma}(x_1, V) = 0.88 \quad \bar{\gamma}(x_2, V) = 1.86 \quad \bar{\gamma}(V, V) = 1.13 \quad [7.17]$$

#### 7.7.1 Решение

Первый шаг – это написать систему кригинга. Так как проб 5, то система имеет размерность 6 на 6.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & 1 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} & 1 \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \bar{\gamma}(x_3, V) \\ \bar{\gamma}(x_4, V) \\ \bar{\gamma}(x_5, V) \\ 1 \end{bmatrix} \quad [7.18]$$

В матричном виде находим расстояния между точками и, затем оцениваем соответствующие значения вариограмм. Например, для  $\gamma(x_2, x_3)$  расстояние между точками равно  $200\sqrt{2}$ . Так как эта величина больше зоны, то значение вариограммы равно порогу. В результате система принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.89 & 1.89 & 1.89 & 1.89 & 1 \\ 1.89 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88 \\ 1.86 \\ 1.86 \\ 1.86 \\ 1.86 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [7.19]$$

Отсюда легко получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.60 \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0.10 \end{aligned} \quad [7.20]$$

$$\mu = 0.12$$

Поэтому оценка среднего значения в квадрате:

$$Z^* = 0.60Z_1 + 0.10(Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5) \quad [7.21]$$

Дисперсия оценки:

$$\sigma_K^2 = \sum \lambda_i \bar{\gamma}(V, x_i) + \mu - \bar{\gamma}(V, V) = 0.26 \quad [7.22]$$

Эффект самородка привносит элемент сложности при создании матрицы кригинга. Если, как в предыдущем случае, при сферической вариограмме эффект самородка был равен 1.5, то все недиагональные элементы матрицы увеличиваются на 1.5, а диагональные элементы остаются равными 0. Наоборот, если система записывается в элементах ковариации, то диагональные элементы будут равны суммарному порогу, включая компонент эффекта самородка; недиагональные элементы при этом остаются прежними.



### 7.8 Кригинг значения среднего

В обычном кригинге целью является оценивание линейной функции пространственной переменной, например - содержания в точке или среднее содержание по блоку. Здесь целью оценивания является значение неизвестного среднего  $m$ . Если мы будем использовать индекс  $m$  для того, чтобы отличать веса в этой оценке от предыдущей, то основное уравнение можно записать так

$$m^* = \sum_{i=1}^N \lambda_{mi} Z(x_i) \quad [7.23]$$

Как и раньше эта оценка должна быть несмещенной, и дисперсия ее должна быть минимальной. Чтобы быть несмещенной, ошибка оценивания должна иметь математическое ожидание  $= 0$ . Т.е.

$$E[m^* - m] = E\left[\sum_{i=1}^N \lambda_{mi} Z(x_i) - m\right] = 0$$

Так как среднее  $Z(x)$  есть  $m$ , то это условие можно записать, как

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{mi} = 1 \quad [7.24]$$

Дисперсия ошибки оценивания –

$$\text{Var}[m^* - m] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N \lambda_{mi} Z(x_i) - m\right] = \sum_j \sum_i \lambda_{mi} \lambda_{mj} C(x_i, x_j) \quad [7.25]$$

Как и в обычном кригинге, эта дисперсия минимизируется с использованием коэффициентов Лагранжа. Следовательно, оценки кригинга –

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_{mj} C(x_i, x_j) &= \mu_m \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_{mi} &= 1 \end{aligned}} \quad [7.26]$$

Можно вычислить соответствующую дисперсию кригинга. Интересно, что в этом случае она равна коэффициенту Лагранжа.

$$\boxed{\sigma_K^2 = \text{Var}(m^*) = \mu_m} \quad [7.27]$$

### 7.9 Простой кригинг

Теперь мы построим систему кригинга, когда среднее  $m$  пространственной переменной известно. Во-первых, мы предполагаем, что пространственная переменная  $Y(x)$  имеет нулевое среднее. Понятно, что начальная пространственная переменная вычисляется из условия  $Z(x)=Y(x)+m$ . Получаем нашу оценку  $Y(x)$ :

$$Y_v^* = \sum_{i=1}^N \lambda'_i Y(x_i)$$

[7.28]

Мы будем использовать простые числа, чтобы отличать веса простого кригинга от весов обычного кригинга и от весов для кригинга среднего. Как и раньше эта оценка должна быть несмещенной, и дисперсия должна быть минимальной. Чтобы быть несмещенной, ошибка оценивания должна иметь математическое ожидание равное 0. Т.е.

$$E[Y_v^* - Y_v] = E\left[\sum_{i=1}^N \lambda'_i Y(x_i) - Y_v\right] = 0$$

[7.29]

Так как среднее  $Y(x)$  равно 0, то эта оценка автоматически становится несмещенной. Поэтому ограничение на сумму весов отсутствует. Дисперсия ошибки оценивания –

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_v^* - Y_v] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N \lambda'_i Y(x_i) - Y_v\right]^2 = \\ &= \sum_j \sum_i \lambda'_i \lambda'_j C(x_i, x_j) = \bar{C}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

[7.30]

Так как нет условия по сумме весов, то нет необходимости и в коэффициенте Лагранжа. Поэтому система кригинга имеет следующий вид

$$\boxed{\sum_{j=1}^N \lambda'_j C(x_i, x_j) = \bar{C}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N}$$

[7.31]

Соответствующая дисперсия кригинга:

$$\boxed{\sigma_{SK}^2 = \bar{C}(V, V) - \sum_{i=1}^N \lambda'_i \bar{C}(x_i, V)}$$

[7.32]

Решение системы кригинга [7.32] дает веса кригинга и, отсюда, оценку  $Y_v$ . Оценка  $Z_v$  можно вывести заменой  $Y(x)$  на  $Z(x)-m$ . Это дает:

$$\begin{aligned} Z_v^* &= Y_v^* + m = \sum \lambda'_i [Z(x) - m] + m = \\ &= \sum \lambda'_i Z(x_i) + m[1 - \sum \lambda'_i] = \sum \lambda'_i Z(x) + m\lambda_m \end{aligned}$$

[7.33]

Элемент  $\lambda_m$  называется весом среднего в простом кригинге.

Простой кригинг редко используется в наши дни для практического применения, потому что среднее редко бывает известно. Он иногда используется на больших рудниках, например, в Южной Африке, где среднее каждой части залежи известно, потому что она разрабатывается уже много лет. Он также используется при кригинге преобразованных данных (например, после преобразования Гаусса), когда среднее устанавливается директивно, обычно – в виде нуля. Пример – дизъюнктивный кригинг. Но более важной причиной для изучения простого кригинга является то, что вес среднего – это один из лучших критериев для проверки качества кригинга. Больше информации об этом критерии качества дано в Главе 8.

Глядя на оценку [7.33], становится понятно, что форма оценщика изменилась. Сравнивая его с обычным кригингом и кригингом среднего, становится понятным, что это не больше, чем обычная линейная комбинация данных. Добавилось одно слагаемое – константа. Иногда кригинг рассматривается в терминах проекций (Journel, 1977).

### 7.10 Теорема аддитивности

В предыдущем параграфе мы увидели, как оценивать переменные, когда среднее известно (простой кригинг) и, когда оно неизвестно (обычный кригинг). Мы также увидели, как оценить значение среднего во втором случае. Интересно проследить, как эти три оценки связаны между собой. Оказывается, что замена кригинговой оценки для среднего  $m$  на выражение оценки SK дает оценку ОК. Доказательство представлено в Рамке 7. В процессе доказательства получаются два интересных результата. Это:

$$\lambda_M \mu_m = \mu$$

[7.34]

$$\sigma_{OK}^2 = \sigma_{SK}^2 + (\lambda_M)^2 \text{Var}(m^*)$$

[7.35]

Первое из уравнений обеспечивает интерпретацию коэффициента Лагранжа для ОК в терминах веса среднего в SK и коэффициента Лагранжа для кригинга среднего. Второе уравнение показывает, что дисперсию обычного кригинга можно представить в виде двух частей: первая – это дисперсия простого кригинга, где среднее известно, вторая – это дисперсия оценки среднего, умноженная на квадрат фактора взвешивания среднего в простом кригинге. Второе слагаемое вводит элемент потери точности из-за незнания действительного среднего.

#### Рамка № 7: Доказательство теоремы аддитивности

Начнем с SK оценки

$$Z_v^* = \sum \lambda_i' Z(x_i) + m \lambda_M$$

Далее подставим вместо  $m$  ее кригинговую оценку  $m^*$ . Если обозначить вес среднего в простом кригинге  $\lambda_M$ , то

$$Z_v^* = \sum Z(x_i) [\lambda'_i + \lambda_M \lambda_{mi}]$$

[7.36]

В начале это не похоже на ОК оценку. Но так как ОК оценка единственна, и если она удовлетворяет уравнению ОК, то для нее должно существовать другое выражение. Покажем, что [7.36] удовлетворяет этим уравнениям. Во-первых, мы проверим, что сумма весов равна 1.0. Их сумма дает

$$\sum [\lambda'_i + \lambda_M \lambda_{mi}] = \sum \lambda'_i + \lambda_M = 1$$

[7.37]

так как  $\sum \lambda_{mi} = 1$ . Теперь покажем, что уравнение [7.11]

$$\sum_{i=1} \lambda_i C(x_i, x_j) = \bar{C}(x_j, V) - \mu' \quad j = 1, 2, \dots, N$$

[7.38] также удовлетворяется

После замены  $\lambda_i$  на  $\lambda'_i + \lambda_M \lambda_{mi}$  первое слагаемое становится:

$$\sum_{i=1} (\lambda'_i + \lambda_M \lambda_{mi}) C(x_i, x_j) = \sum \lambda'_i C(x_i, x_j) + \sum \lambda_M \lambda_{mi} C(x_i, x_j)$$

[7.39]

В системе SK первое слагаемое –  $\bar{C}(x_j, V)$ . Аналогично в

системе кригинга для среднего [7.26] другое слагаемое –  $\lambda_M \mu_m$ .

Отсюда

$$\sum_{i=1} (\lambda'_i + \lambda_M \lambda_{mi}) C(x_i, x_j) = \bar{C}(x_j, V) + \lambda_M \mu_m$$

[7.40]

Поэтому, установив  $\lambda_M \mu_m = -\mu' = \mu$ , становится понятно, что их факторы взвешивания удовлетворяют уравнениям. Поэтому выражение [7.36] удовлетворяет всем уравнениям ОК. В заключении, подставив  $\lambda_i = \lambda'_i + \lambda_M \lambda_{mi}$  в выражение для дисперсии кригинга, вычисляем новое выражение для дисперсии ОК:

$$\sigma_{OK}^2 = \sigma_{SK}^2 + (\lambda_M)^2 \text{Var}(\mu^*)$$

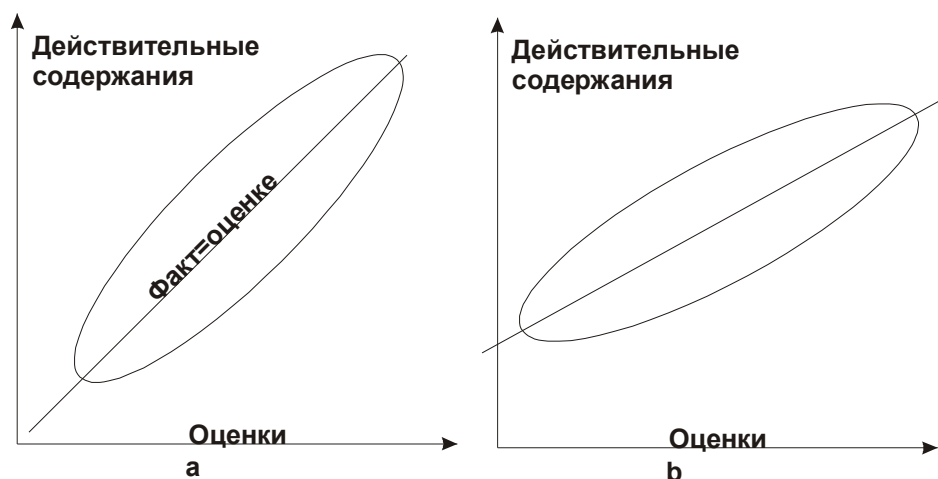
[7.41]

## 7.11 Наклон линейной регрессии

Во вступительном упражнении в начале книги действительные значения содержаний блоков изображались на одном графике вместе со значениями оценок для различных методов оценивания, включая полигональный метод и кригинг. В идеальном случае  $Z_v^*$  всегда равна  $Z_v$ , но это невозможно на практике. Очень хорошие результаты получаются, когда оценщик является условно несмещенным; т.е.

$$E[Z_v | Z_v^*] = Z_v^* \tag{7.42}$$

Это означает, что регрессия между  $Z_v$  и  $Z_v^*$  должна быть линейна с наклоном 1.0.



**Рис 7.2.** Регрессия действительных значений и оценок, (а) условно несмещенная и (b) условно смещенная

Важно отметить, что, хотя кригинг по определению - глобально несмещенный оценщик, так как  $E[Z_V^* - Z_V] = 0$ , но он не является обязательно условно несмещенным. В этом параграфе мы увидим, что, если предположить линейную регрессию, то простой кригинг будет условно несмещенный, а обычный кригинг нет.

Далее мы вычислим угол линейной регрессии  $Z_V$  и  $Z_V^*$  для оценки ОК. На практике распределения  $Z_V$  и  $Z_V^*$  редко известны; поэтому настоящая форма кривой  $E[Z_V | Z_V^*]$ , предполагаемой, как функции от  $Z_V^*$ , неизвестна. Несмотря на это, наклон линейной регрессии можно использовать, чтобы увидеть, как далеко находится ОК оценка от условно несмещенной. Хорошо известно, что наклон,  $p$ , линейной регрессии получается из

$$p = \text{Cov}[Z_V, Z_V^*] / \text{Var}[Z_V^*] \quad [7.43]$$

Для простого кригинга,

$$Z_V^* = \sum \lambda_i' Z(x_i) + m[1 - \sum \lambda_i'] \quad [7.44]$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z_V, Z_V^*] &= \sum \lambda_j' \overline{C}(x_i, V) \\ \text{Var}[Z_V^*] &= \sum \sum \lambda_i' \lambda_j' \overline{C}(x_i, x_j) \end{aligned} \quad [7.45]$$

Из уравнений СК эти два слагаемых равны. Поэтому наклон равен 1.0.<sup>3</sup> Аналогично – для обычного кригинга:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z_V, Z_V^*] &= \sum \lambda_j \bar{C}(x_i, V) \\ \text{Var}[Z_V^*] &= \sum \sum \lambda_i \lambda_j \bar{C}(x_i, x_j) \\ \text{Но т.к. } \sum \lambda_j \bar{C}(x_i, V) &= \sum \sum \lambda_i \lambda_j \bar{C}(x_i, x_j) + \mu \\ \text{то } \text{Cov}[Z_V, Z_V^*] + \mu &= \text{Var}[Z_V^*], \end{aligned} \quad [7.47]$$

и, следовательно, наклон  $p$  линейной регрессии  $Z_V$  и  $Z_V^*$

$$p = \frac{\text{Cov}[Z_V, Z_V^*]}{(\text{Cov}[Z_V, Z_V^*] - \mu)} \quad [7.48]$$

Здесь значение параметра Лагранжа вычисляется из системы кригинга, записанной в виде ковариаций. Если используется вариограммная форма записи уравнений, то знак меняется на обратный. В общем случае наклон меньше 1.0. Этот результат, касающийся наклона линейной регрессии действительного и оценки, будет использоваться в следующей главе для выбора величины окрестности кригинга.

## 7.12 Кригинг – точный интерполятор

Когда для оценивания значения пространственной переменной в данной точке используются некоторые методы (например, трендовые поверхности), не обязательно, чтобы результат оценивания был точно равен характеристике пробы в этой точке. Методы, которые всегда дают оценку в точке опробования, равную значению пробы, называются точными оценщиками. Следующий пример показывает, что кригинг является точным интерполятором.

Продолжим пример, в котором 5 точек данных использовалось для ОК кригинга блока размером 200м на 200м. Теперь мы постараемся оценить содержание в одной из точек опробования (скажем центральной) по всем данным, включая и эту точку. Легко увидеть, что левая часть матрицы точно такая же, как и раньше. Изменился только вектор в правой части. Новая система имеет вид

---

<sup>3</sup> Это также показывает, что ошибка кригинга  $Z_V^* - Z_V$  ортогональна оценке  $Z_V^*$ . Этот результат будет необходим дальше для условного моделирования. Во-вторых, это важно, когда кригинг рассматривается в терминах проекций.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.89 & 1.89 & 1.89 & 1.89 & 1 \\ 1.89 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1.89 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.89 \\ 1.89 \\ 1.89 \\ 1.89 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [7.49]$$

Ее можно легко рассчитать, и в результате получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.0 \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \\ \mu &= 0 \end{aligned} \quad [7.50]$$

Соответствующая дисперсия кригинга равна нулю. Этот результат не является сюрпризом. Интуитивно понятно, что оценка, которая минимизирует дисперсию оценивания, является действительной величиной пробы. Этот результат определяется тем, что элементы первой колонки и первой строки равны соответствующим элементам вектора правой части.

Если ко всем слагаемым в матрице и в векторе добавить константу (т.е. эффект самородка, представляющий ошибку измерений), то это можно учесть, используя ряд единиц в последнем ряду матрицы.

Иногда люди ошибочно путают это свойство кригинговой оценки с процедурой перекрестной проверки модели вариограммы (variogram crossvalidation procedure). Пожалуйста обратите внимание на то, что в описываемом здесь случае, точка для оценивания включена в начальные данные, тогда как точка данных, используемая для процедуры кроссвалидейшн, исключена из начальных данных в тот период, пока оценивается ее значение. Техника кроссвалидейшн обсуждается в деталях в следующей главе.

### **7.13 Геометрическое упражнение, демонстрирующее процедуру минимизации**

Цель данного упражнения – геометрически проиллюстрировать связь между обычным и простым кригингом. Чтобы сохранить простоту изложения, мы будем предполагать, что только две пробы доступны для кригинга содержания по блоку V. Причина выбора только двух проб заключается в том, что функцию двух переменных легко изображать. Для простоты пространственная переменная, представляющая собой содержание, предполагается стационарной, и ее ковариация  $C(h)$  имеет единичный порог.

#### *7.13.1 Квадратичная форма для минимизации*

Веса для любого типа кригинга вычисляются минимизацией дисперсии оценивания с соответствующими условиями. Так как дисперсии оценивания являются квадратичными функциями весов, то они называются

квадратичными формами. Общий вид минимизируемой дисперсии оценивания для двух проб

$$\sigma_{\text{EST}}^2 = \lambda_1^2 C(1,1) + \lambda_2^2 C(2,2) + 2\lambda_1 \lambda_2 C(1,2) + \bar{C}(V, V) - 2\lambda_1 \bar{C}(1, V) - 2\lambda_2 \bar{C}(2, V) \quad [7.51]$$

где  $C(1,1)=C(2,2)=1$ . Это можно записать, как

$$\sigma_{\text{EST}}^2 = (\lambda_1 - a)^2 + (\lambda_2 - b)^2 + 2c(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - b) + d \quad [7.52]$$

где

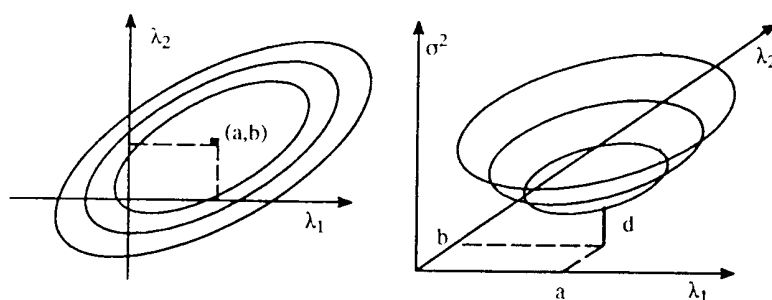
$$a = \frac{\bar{C}(1, V) - C(1,2)\bar{C}(2, V)}{1 - \bar{C}(1,2)^2} \quad [7.53]$$

$$b = \frac{\bar{C}(2, V) - C(1,2)\bar{C}(1, V)}{1 - \bar{C}(1,2)^2} \quad [7.54]$$

$$c = C(1,2) \quad [7.55]$$

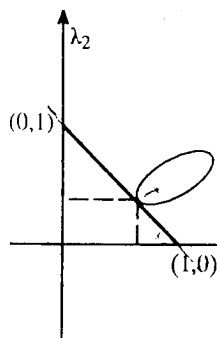
и, где  $d$  - подходящее выбранное значение.

На Рис. 7.3 представлено два способа изображения дисперсии оценивания, как функции от весов. Трехмерный график показывает, что это поверхность, имеющая форму раковины. Из уравнения очевидно, что минимум встречается, когда веса принимают значения  $a$  и  $b$  соответственно, и значение равно  $d$ . Читатели могут сами решить SK системы и проверить, что  $a$  и  $b$  являются весами SK и, что  $d$  является дисперсией SK. Изометрические контуры (слева) являются проекцией "раковины".



**Рис 7.3.** Справа трехмерное представление дисперсии оценивания, как функции от весов; слева соответствующие проекции





**Рис 7.4.** Линия, представляющая условие ОК:  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , представлена isovariance контурной линией. Координаты точки, где она касается одного из эллипсов, являются весами ОК.

Продемонстрировав минимизацию для простого кригинга, мы теперь обратимся к обычному кригингу. Из-за условий несмещенности сумма весов должна быть равна 1, т.е.  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . На Рис 7.4 изображена линия  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ , соединяющая точки (0,1) и (1,0), которая представляет это условие. Минимум встречается в точке, где эта линия касается одного из эллипсов. Соответствующие значения весов – это ОК веса, а высота в этой точке – это дисперсия ОК. Так как это обычно не является низом раковины, то высота в этой точке больше, чем дно. Другими словами, дисперсия ОК больше или равна дисперсии SK. Это также можно увидеть с помощью уравнения. Подстановка  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$  в квадратичную форму дает

$$2\lambda_1^2(1-c) - 2\lambda_1(a-b+1-c) + d - 2 \quad [7.56]$$

Это можно переписать, как

$$\varphi = 2(1-c) \left[ \lambda_1 - \left( \frac{a-b}{2(1-c)} + 0.5 \right) \right]^2 + K \quad [7.57]$$

Отсюда становится понятно, что минимум дисперсии оценивания достигается тогда, когда первый вес равен:

$$\lambda_1 = \left( \frac{a-b}{2(1-c)} + 0.5 \right) \quad [7.58]$$

Читатель может проверить, что это просто другая форма записи первого веса ОК.

## 7.14 Упражнения

**Упр 7.1 Чистый эффект самородка.** Пусть мы имеем пробы в двух точках (1,0) и (2,0) и хотим оценить величину пространственной

переменной в произвольной точке  $(x, y)$ . Вариограммой является чистый эффект самородка с порогом 1.0. Вычислите веса обычного кригинга и дисперсию кригинга. Рассчитайте, какие веса будут для  $N$  проб.

Все веса будут равны. Поэтому кригинговая оценка будет среднее арифметическим значений проб. Кригинг не может дать больше деталей, потому что даже соседние точки некоррелированы. Поэтому данные используются здесь только для оценивания общего среднего пространственной переменной.

Что произойдет в этом случае, если значение среднего известно и используется простой кригинг?

**Упр 7.2 Сферическая вариограмма.** Как и раньше, у нас две пробы в точках  $(1,0)$  и  $(2,0)$ , и мы хотим оценить значение в произвольной точке  $(x, y)$ . Но в данном случае вариограмма сферическая с порогом 2.0 и зоной 0.75. Докажите, что веса обычного кригинга определяются следующим образом

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\gamma_{20} - \gamma_{10}}{2\gamma_{12}} \text{ и } \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\gamma_{10} - \gamma_{20}}{2\gamma_{12}}$$

[7.59]

где  $\gamma_{20}$  и  $\gamma_{10}$  обозначают значения вариограммы между одной из точек проб и произвольной точкой, а  $\gamma_{12}$  обозначает значение вариограммы между точками проб.

Нарисуйте круг с радиусом 0.75 (т.е. на величину зоны) вокруг каждой пробы. Снаружи этой зоны нет корреляции между интересующей нас точкой и пробами, и оба веса равны 0.5. Результаты такие же, как и для чистого эффекта самородка. Все, что можно оценить в этом случае, является общим средним.

**Упр 7.3 Экспоненциальная вариограмма.** Как и раньше у нас две пробы в точках  $(1,0)$  и  $(2,0)$ , и мы хотим оценить величину произвольной точки  $(x, y)$ . В этот раз вариограмма экспоненциальная с порогом 2.0 и масштабным параметром - 1. Вычислите веса обычного кригинга и дисперсию кригинга. Повторите вычисления для случая, когда порог равен 4, оставляя параметр масштаба таким же. Хотя удвоение порога увеличивает дисперсию кригинга в два раза, веса кригинга остаются такими же.

**Упр 7.4 Линейная вариограмма – нехватка памяти Марковина.** Как и раньше, есть две пробы в точках  $(1,0)$  и  $(2,0)$ , но вариограмма - линейная с произвольным наклоном. Объектом оценивания является пространственная переменная в точке  $(x,0)$ , лежащая на оси  $x$ . Покажите, что, если целевая точка левее первой точки,  $(1,0)$ , то ее вес обычного кригинга равен 1.0, а другой - равен нулю, и сделайте то же для точки, лежащей правее второй точки.

Этот пример можно распространить на случай, когда на линии есть несколько проб. Если целевая точка лежит слева от первой точки, то вес первой точки равен 1, а остальных - равен нулю. Аналогично, если целевая точка лежит правее последней точки. Только концевые точки имеют ненулевые веса. Это происходит так, как будто другие пробы были "забыты". Вся доступная информация сосредоточена в концевых пробах. Рассмотрите для себя, что произойдет, если целевая точка лежит между пробами. Обратите внимание: этот эффект происходит только в одномерном пространстве.

Это свойство называется свойством Марковина (Markovian property). Оно хорошо известно в теории временных рядов, особенно в науке о финансах. Например, предполагается, что последняя котировка цены акции отражает всю предыдущую информацию. Такой же эффект используется при выборе цены в модели Блека и Шульза (the Black & Scholes model).

**Упр 7.5 Факторизованные вариограммы – перпендикулярный экранирующий эффект.** Как и раньше, есть две пробы в точках (1,0) и (2,0). Но в этот раз вариограмма - гауссова с единичным порогом и единичным параметром масштаба. Объектом оценивания является величина пространственной переменной в точке (1,y), лежащей ниже или выше пробы по вертикали. Покажите, что вес простого кригинга второй точки равен нулю. Только точка, находящаяся непосредственно ниже/выше целевой, получает какой-нибудь вес. Этот результат зависит от того факта, что гауссову структуру можно факторизовать по двум компонентам.

$$C(h) = \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right] \times \exp\left[-\frac{y^2}{a^2}\right] \text{ где } h^2 = x^2 + y^2 \quad [7.60]$$

Покажите, что результат также верен для факторизованной экспоненциальной ковариации:

$$C(h) = \exp\left[-\frac{|x|}{a}\right] \times \exp\left[-\frac{|y|}{a}\right] \quad \text{где } h^2 = x^2 + y^2 \quad [7.61]$$

## 8 Практические аспекты кригинга

### 8.1 Содержание

Эта глава дает обзор практических аспектов кригинга: отрицательные веса кригинга, влияние выбранной модели вариограммы на веса кригинга, перекрестная проверка, экранный эффект и некоторые критерии для проверки качества кригинга.

#### **Введение**

Эта глава рассматривает практические аспекты кригинга. Представлены некоторые теоретические результаты (например, идея об отрицательных весах кригинга), но глава имеет скорее практический характер. Большинство приводимых концепций рассматриваются на конкретных примерах.

Первый параграф посвящен отрицательным весам кригинга, которые могут привести к отрицательным кригинговым оценкам. Двумя обычными ситуациями появления отрицательных весов могут быть случаи, когда точки сгруппированы (кластеризованы) или, когда используется высоко структурированная модель вариограммы (например, гауссовская модель без эффекта самородков или степенная модель с порядком больше чем 1.0). Для обоих случаев представлены примеры.

Во второй части параграфа обсуждается влияние модели вариограммы на кригинг. Показана форма вариограммы около начала, которая является критической. Вариограммы с различными пропорциями эффекта самородка (т.е. - процента от величины порога) или с различными формами графика в начале (линейная или квадратичная) приводят к весьма разным весам кригинга и дисперсии кригинга, и, следовательно, к различным сортовым планам, построенным на основе кригинговых расчетов. Утверждая это, важно обратить внимание на то, что совмещаемые модели порождают (фактически) одинаковые кригинг системы и, следовательно, подобные веса кригинга и дисперсии кригинга. Поэтому в данном случае кригинг достаточно устойчив относительно незначительных различий в моделях вариограмм.

Третий параграф имеет дело с экраным эффектом. Когда модель вариограммы имеет хорошую структуру (большую зону, малый эффект самородка), информация около целевой точки эффективно экранирует влияние более отдаленных данных. Веса кригинга удаленных точек - нулевые или незначительны. Однако для моделей с плохой структурой экраный эффект - "рассеивается", и тогда требуется больший размер окрестности кригинга. Увеличение размера окрестности ведет к снижению дисперсии кригинга и к существенному улучшению оценки.

Четвертый параграф посвящен симметрии в конфигурации кригинга. На практике данные часто расположены по регулярной сетке. Если используется симметричное расположение данных относительно целевой точки, то некоторые из весов будут равными. Обнаружение этого позволяет геостатистикам перегруппировать множества весов кригинга и, таким

образом, сократить размер кригинг системы, а следовательно - требуемое время работы компьютера.

Пятый параграф представляет некоторые критерии для проверки качества конфигурации кригинга. Наиболее очевидный критерий - дисперсия кригинга часто оказывается относительно нечувствительным. Два других параметра: вес среднего в простом кригинге и наклон линейной регрессии являются более полезными, особенно при выборе размера окрестности кригинга.

Последний параграф посвящен обращается вопросу перекрестной проверки моделей вариограмм. Точки одна за другой удаляются из начальных данных. Отсутствующая точка оценивается кригингом. Если модель вариограммы хорошо согласуется с данными, то кригинг оценки должны быть близки к истинным значениям. Обсуждается несколько статистик для количественного определения близости оценок и реальных значений

### **Отрицательные веса**

Важно понять, что дисперсия кригинга не может быть отрицательной, а веса кригинга могут быть. (Отрицательная дисперсия кригинга может быть результатом использования модели вариограммы, которая не определена положительно, или результатом ошибки программы, например, при дискретизации блоков). Следующий пример продемонстрирует два простых случая, когда возникают отрицательные веса. Первый - рассматривает две вариограммы с очень хорошей структурой (гауссова и степенная модели с показателем степени 1.5), а второй посвящен кластеризации точек.

**Пример 1.** Предполагается, что пробы были взяты в четырех точках  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ , которые расположены регулярно на расстоянии 1м вдоль линии. Оценивается значение срединной точки  $P_0$ . Расположение точек показано на Рис. 8.1.

$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_3$	$P_4$
*	*	*	*	*

**Рис 8.1.** Расположение четырех проб  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  и целевой точки  $P_0$

Для сравнительных целей для кригинга точки использовалось четыре модели вариограмм. Это:

- модель степенной функции с показателем степени 1.5 (т.е.  $\gamma(h) = |h|^{1.5}$ ),
- гауссова структура с параметром расстояния  $a=0.8$  и порогом 1.0 без эффекта самородка,
- гауссова структура с параметром расстояния  $a=0.8$ , порогом 0.75 и эффектом самородка 0.25 (т.е. полный порог равен 1.0) и
- сферическая модель с зоной 1.38 без эффекта самородка.

Практическая зона гауссовой структуры равна  $\sqrt{3}$  ее реальной зоны; здесь - 1.38. Сферическая модель имеет такую же зону, но она линейна в начале, а не квадратичная. В Таблице 8.1 приведены веса кригинга, соответствующие этим вариограммам. В силу симметричности веса для  $P_2$  и  $P_3$  одинаковы ( $\lambda_2$ ), также как и для  $P_1$  и  $P_4$  ( $\lambda_1$ ).

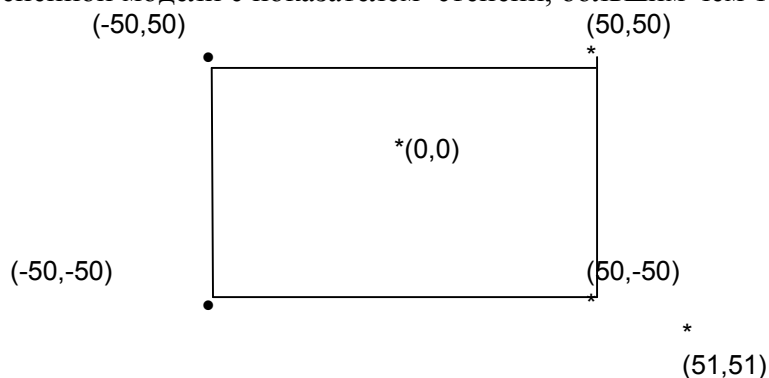
**Таблица 8.1.** Веса кригинга, соответствующие четырем моделям вариограмм. Нумерация весов такая же, как на Рис. 8.1.

Веса кригинга	Степенная модель 1.5	Гауссова + эф. самород.	Гауссова без эф. самород.	Сферическая без эф. Самород.
$\lambda_1$	-0.047	-0.083	0.008	0.010
$\lambda_2$	0.547	0.583	0.492	0.490
Дисперсия кригинга	0.201	0.227	0.563	0.590

Для первых двух моделей веса внешних точек отрицательны (степенная модель со степенью 1.5 и гауссова без эффекта самородка), потому что они являются моделями с высокой структурой. В отличие от них последние две модели (гауссова с эффектом самородка 25 % и сферическая) имеют менее хорошую структуру и, следовательно, не дают отрицательных весов. При выборе модели вариограммы важно понять, что модель, которая является квадратичной в начале (особенно без эффекта самородка) соответствует более структурированному явлению, чем модель, которая является линейной в начале. Следовательно, более вероятно, что она вызовет отрицательные веса и, следовательно, отрицательные значения кригинга (которые не желательны в горной промышленности).

**Пример 2.** В этом примере мы обсуждаем влияние кластеризации точек. Близко расположенные точки могут помочь в оценивании поведения вариограммы около начала, но они могут стать причиной численной неустойчивости при обращении матрицы кригинга.

Предполагается, что мы хотим оценить квадрат 100м на 100м по 5 пробами, по одной в каждом углу блока и одна в центре блока. Пусть вариограмма будет сферической с зоной 200м и порогом 2.0. Обратите внимание, что эта модель линейна в начале и, поэтому менее вероятно появление отрицательных весов кригинга, чем для гауссовой, кубической или степенной модели с показателем степени, большим чем 1.0.



**Рис 8.2.** Расположение точек проб относительно оцениваемого блока

В Таблице 8.2 даны кригинг веса для конфигурации данных из 5 и 6 точек. Так как отсутствует эффект самородка, веса кригинга для 4 точек изменяются очень слабо от конфигурации из 5 точек к конфигурации из 6 точек. Сумма весов для пятой и шестой точек (грубо) равна пятому весу в конфигурации из 5 точек. Шестая точка получает отрицательный вес. Дисперсия кригинга в этом случае также мало отличается для конфигураций из 5 и из 6 точек. Поэтому мы видим, что для структур без эффекта самородка результаты для 6 точек очень близки к результатам, полученным перегруппировкой последних двух точек. Преимущество перегруппировки точек заключается в том, что она позволяет избежать дополнительного ряда и колонки в матрице, которые иногда могут приводить к числовой нестабильности.

**Таблица 8.2.** Веса кригинга и дисперсия кригинга для сферической модели и конфигураций из 5 и 6 точек проб

Веса кригинга	5 точек	6 точек
(0,0)	0.43()	0.436
(-5(),-50)	0.141	0.141
(-50,50)	0.141	0.141
(50,-50)	0.141	0.141
(50,50)	0.141	0.152
(51,51)	-	-0.011
Дисперсия кригинга	0.085	0.085

Результаты были бы другими, если бы присутствовал значительный эффект самородка. Веса были бы распространены более равномерно по всем доступным точкам данных. Добавление дополнительной точки также привело бы к заметному снижению дисперсии кригинга.

Эти простые примеры показывают два случая, когда возникают отрицательные веса: когда модель высоко структурирована (например, квадратичная в начале) и, когда присутствует сгущение (кластеризация) точек. Мы видим, что, если выбрана менее структурированная модель, типа сферической, или, когда присутствует эффект самородка, отрицательные веса имеют тенденцию исчезать или, по крайней мере, уменьшаться. Кто хочет найти больше информации об этом, может обратиться к Barnes (1984) и Chauvet (1988).

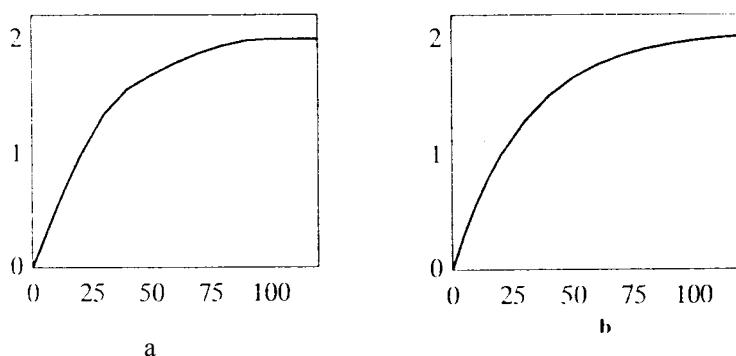
### ***Как выбор модели вариограммы воздействует на кригинг***

#### ***Похожие вариограммы***

В параграфе, посвященном подгонке вариограмм, была подчеркнута важность точного определения эффекта самородка и формы вариограммы в начале. Не было предложено никаких сложных статистических методов для подгонки моделей, потому что к экспериментальной вариограмме легко

визуально подобрать несколько похожих моделей, которые дают одинаково хорошую ее аппроксимацию. Если при этом все модели имеют одинаковое поведение около начала, то получаемые в результате кригинг оценки и дисперсии кригинга будут очень схожи. Это происходит потому, что ряды и колонки в системе кригинга фактически одинаковы.

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим две похожие модели вариограмм: первая – экспоненциальная с порогом 2.06 и параметром расстояния  $a=30\text{м}$  (практическая зона равна около 100м) и вторая – сумма двух сферических моделей с порогом 1.0 и зонами 40м и 100м соответственно. Предположим, что кригинг оценивает квадратный блок 100м на 100м по 5 точкам данных (четыре по углам и одна в центре). В Таблице 8.3 показано, как схожи веса кригинга и дисперсии кригинга для двух моделей.



**Рис 8.3.** Две похожие модели; **(а)** сумма двух сферических моделей с зонами 40м и 100м и порогом 1.0, **(б)** одиночная экспоненциальная модель с параметром расстояния 30м и порогом 2.06

**Таблица 8.3.** Веса кригинга и дисперсия кригинга для двух похожих моделей, когда оценивается блок 100м на 100м

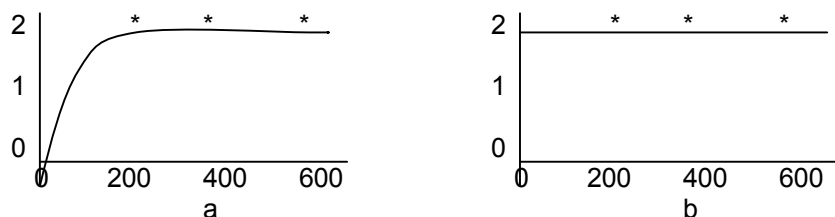
Веса Кригинга	Экспоненциальная	2 структурная сферическая
Центральная точка	0.338	0.339
Угловые точки	0.165	0.165
Дисперсия кригинга	0.285	0.299

#### *Влияние выбора эффекта самородка*

Выбор величины эффекта самородка крайне важен, так как он оказывает влияние на веса и дисперсию кригинга. Проблема при выборе эффекта самородка состоит в том, что часто нет никакой возможности узнать характер поведения вариограммы в начале, или, по крайней мере, для расстояний меньших, чем расстояние до первой точки на экспериментальной вариограмме. Если бурение дополнительных, близко расположенных скважин не доступно, то геостатистик должен спрогнозировать форму вариограммы около начала. Здесь важно понять, что выбор модели имеет большое влияние на результаты кригинга. Этот

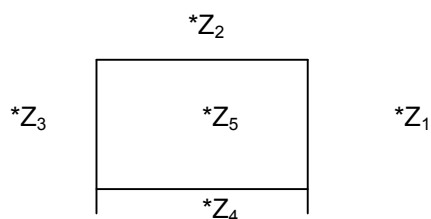


пример предназначен для иллюстрации влияния модели на веса кригинга и его дисперсию.



**Рис 8.4.** Две возможные модели вариограммы с разным поведением в начале; (а) сферическая с зоной 200м, порогом 2.0 и (б) чистый эффект самородка 2.0

На Рис 8.4 показаны две возможные модели, подобранные к экспериментальной вариограмме, которая уже достигла порога в первой точке. Используя крайние случаи, ее можно смоделировать (1) сферической вариограммой с порогом 2.0 и зоной 200м (нулевой эффект самородка) или (2) чистым эффектом самородка с порогом 2.0. Если у нас нет каких-либо предшествующих знаний о переменной этого типа, то мы не можем обосновать, какую модель использовать: чистого эффекта самородка, модель с более сложной структурой или что-нибудь между ними.



**Рис 8.5.** Блок 200м на 200м для оценки кригингом с помощью 5 проб

Предположим, что мы хотим оценить блок 200м на 200м, используя пробу в центре и 4 соседних пробы, расположенные по регулярной сетке 200м на 200м. (Примечание. Упражнение по кригингу из предыдущей главы имело такую же конфигурацию данных, но зона вариограммы была 250м, а не 200м).

**Таблица 8.4.** Веса и дисперсии кригинга для конфигурации из 5 точек

Веса кригинга	Чистый эффект самородка	Сферическая
Центральная точка	0.20	0.540
Каждая внешняя точка	0.20	0.115
Дисперсия кригинга	0.40	0.290

Веса и дисперсии кригинга показаны в Таблице 8.4. Разница между двумя дисперсиями кригинга очень значительная. Для чистого эффекта самородка она намного больше, чем для второй модели. Влияние типа модели на веса кригинга более тонкое. Модель эффекта самородка дает равный вес всем точкам и, следовательно, меньше центральной пробе и больше периферийным пробам, тогда как структурированная модель приписывает относительно высокий вес центральной пробе. Так как модель с низким эффектом самородка дает меньший вес центральной пробе, то это ведет к более существенному сглаживанию кригинговых оценок. Этот эффект будет проиллюстрирован в Главе 9.

Используемая здесь конфигурация из 5 точек нереалистично мала. На практике обычно выбирается гораздо большие окрестности с большим количеством проб. Интересно посмотреть, что произойдет, если увеличить количество проб. Следующий пример увеличит число точек до 9, расположенных также по регулярной сетке 200м на 200м. В Таблице 8.5 показаны веса кригинга и его дисперсии для этой новой конфигурации.

**Таблица 8.5.** Веса кригинга и дисперсия кригинга для конфигурации из 9 точек

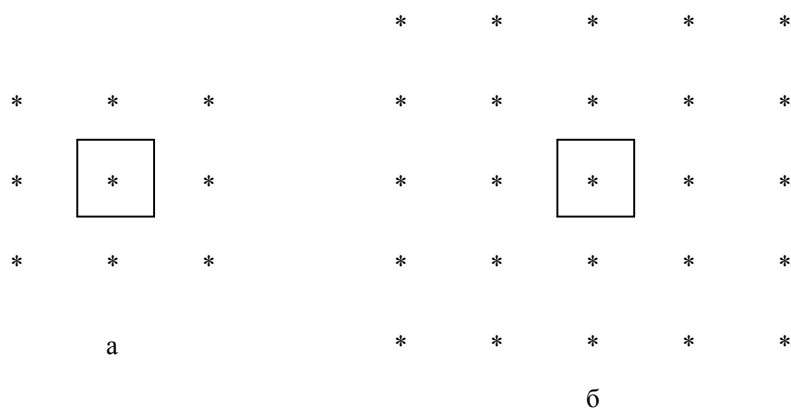
Веса кригинга	Чистый эффект самородка	Сферическая
Центральная точка	0.11	0.51
Внутренние точки	0.11	0,08
Внешние точки	0.11	0.04
Дисперсия кригинга	0.22	0.26

Сравнивая результат с примером из 5 точек, мы видим, что увеличение окрестности приводит к изменению в весах и дисперсии кригинга для чистого эффекта самородка, но не для сферической модели. Как будет показано в следующем параграфе, пробы, близко расположенные к оцениваемой точке, эффективно экранируют влияние более отдаленных точек в случае, если вариограмма хорошо структурирована. Это утверждение не справедливо для плохо структурированных моделей с большим эффектом самородка или с короткой зоной влияния.

### **Экранный эффект**

Программы опробования часто производят сотни или тысячи значений исходных данных. С вычислительной точки зрения имело бы здравый смысл препятствовать использованию всех их для оценивания каждого блока. Интуиция подсказывает, что оценки будут очень близки к реальным, если принимать в расчет только соседние данные. Проблема заключается в том, чтобы знать, сколько точек включить в расчет. Общее правило - брать только несколько первых ареалов (то есть колец) вокруг целевой точки, если вариограмма хорошо структурирована, то есть, если влияние эффекта самородка относительно маленькое. Причина в том, что

несколько первых ареалов полностью экранируют влияние более отдаленных проб. Это можно лучше всего продемонстрировать на примере.



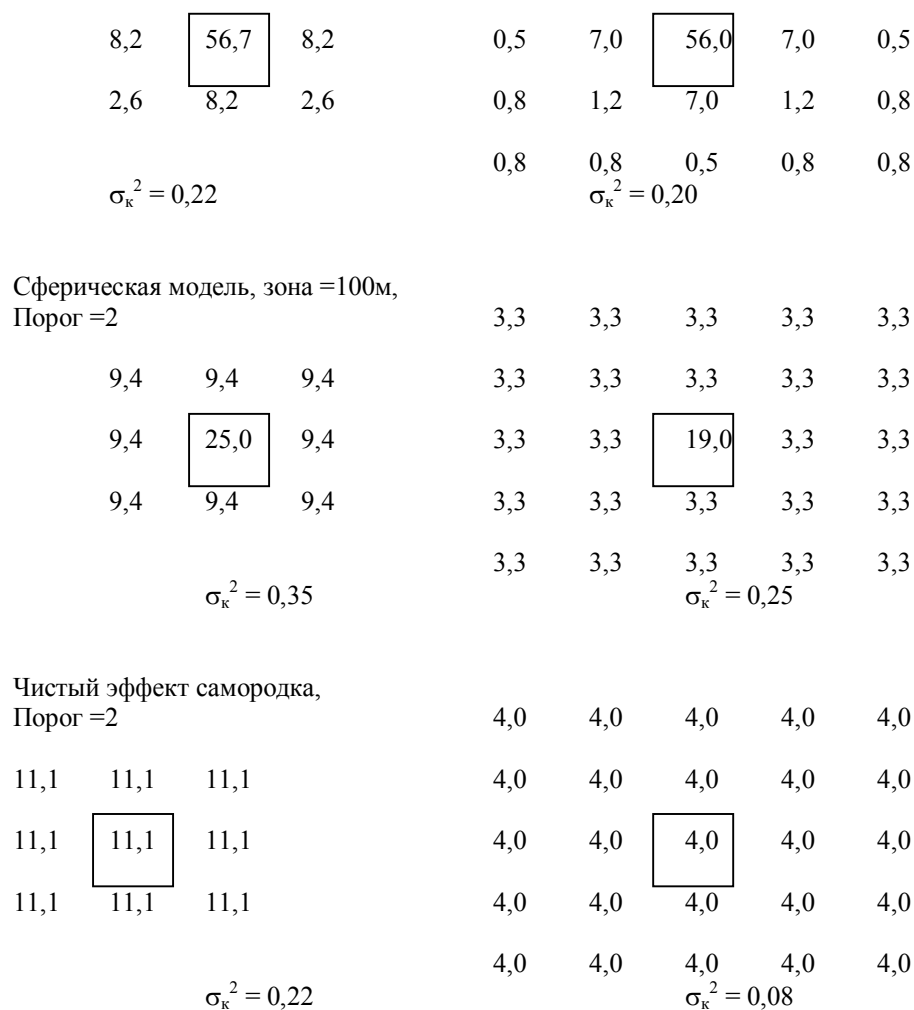
**Рис 8.6.** Блок с 1-м ареалом данных (а), и с 2-мя ареалами данных (б)

Предположим, что мы хотим оценить блок 200м на 200м с пробой в центре, используя данные, расположенные по сети 200м на 200м. Количество проб можно увеличивать с 1 (центральная проба), до 9 (1 ареал) и, затем до 25 (2 ареала). Когда модель вариограммы известна, веса и дисперсию кригинга можно вычислить для каждой конфигурации данных. Ясно, что каждое увеличение количества участвующих в оценке проб уменьшает дисперсию кригинга (или дисперсия остается той же самой). Чтобы проиллюстрировать, как работает экраный эффект, рассмотрим три случая: сферические вариограммы с порогом 2.0 и зонами 250м и 100 м соответственно, и чистый эффект самородка 2.0 (который можно представить как сферическую вариограмму с нулевой зоной). На Рисунке 8.7 изображены веса кригинга для конфигураций 9 и 25 точек для этих моделей вариограмм.

Для хорошо структурированной сферической модели (зона 250м, сверху рисунка) наибольшие веса сконцентрированы в центральной точке и четырех самых близких точках. Следовательно, увеличение количества точек больше 25, не ведет к какому-то существенному улучшению дисперсии кригинга. При этом величина оценки также не будет существенно изменяться, как и веса. Поэтому нам представляется, что в данном случае нет необходимости использовать больше данных, чем несколько ближайших точек. Когда вариограмма плохо структурирована (чистый эффект самородка или сферическая функция с короткой зоной), дисперсия кригинга с ростом проб продолжает понижаться, а веса для внешних точек не стремятся быстро к нулю. Поэтому в этой ситуации требуется большая окрестность кригинга. Пожалуйста, обратите внимание на то, что точки даже за пределами зоны вариограммы могут иметь отличные от нуля веса при использовании ОК. Они не обязательно равны нулю.

Сферическая модель, зона =250м,  
Порог =2

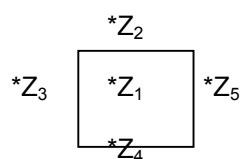
			0,8	0,8	0,5	0,8	0,8
2,6	8,2	2,6	0,8	1,2	7,0	1,2	0,8



**Рис 8.7.** Веса и дисперсия кригинга для конфигураций данных с одним или 2-мя ареалами для трех моделей вариограмм

### **Симметрия в уравнениях**

Когда кригинг начинал развиваться, компьютерное оборудование было бедным. Обращение больших матриц для решения больших наборов линейных уравнений требовало очень много времени. Это стимулировало геостатистиков искать пути сокращения размера систем кригинга. Один из них - принимать во внимание симметрию системы. Например, данное в предыдущей главе упражнение рассматривало обычный кригинг блока, используя 5 точек данных, четыре из которых размещались симметрично вне блока. Для этих точек факторы взвешивания явно идентичны.



**Рис 8.8.** Конфигурация с симметричными данными

Эти четыре пробы можно перегруппировать и рассматривать, как одну S с единственным фактором взвешивания. Каждая из исходных индивидуальных проб будет ее одной четвертью. Если первый вес связан с центральной точкой  $Z_1$ , а второй вес с группой S, то систему кригинга можно переписать, как:

$$\begin{bmatrix} \gamma(Z_1, Z_1) & \gamma(Z_1, S) & 1 \\ \gamma(Z_1, S) & \gamma(S, S) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(Z_1, V) \\ \gamma(S, V) \\ 1 \end{bmatrix} \quad [8.1]$$

Поскольку не является очевидным, как вычислять различные вариограммные величины, то это будет представлено в подробностях.

$$\bar{\gamma}(Z_1, Z_1) = 0, \quad \bar{\gamma}(Z_1, V) = 0.88 \quad [8.2]$$

$$\bar{\gamma}(Z_1, S) = \frac{1}{4} [\gamma(Z_1, Z_2) + \dots + \gamma(Z_1, Z_5)] = 1.89 \quad [8.3]$$

$$\bar{\gamma}(S, S) = \frac{1}{16} [\gamma(Z_2, Z_2) + \dots + \gamma(Z_5, Z_5)] = \frac{1}{4} [\gamma(0) + 2\gamma(100\sqrt{2}) + \gamma(200)] = 1.5 \quad [8.4]$$

$$\bar{\gamma}(S, V) = \frac{1}{4} [\bar{\gamma}(Z_2, V) + \dots + \bar{\gamma}(Z_5, V)] = \bar{\gamma}(Z_2, V) = 1.86 \quad [8.5]$$

Это приводит к решению системы 3 на 3 вместо 6 на 6:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.89 & 1 \\ 1.89 & 1.50 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_S \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88 \\ 1.86 \\ 1.00 \end{bmatrix} \quad [8.6]$$

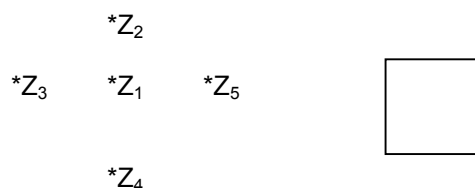
Решением является  $\lambda_1=0.60$ ,  $\lambda_S=0.40$  и  $\mu=0.12$  и поэтому:

$$z^* = 0.60z_1 + 0.40(z_2 + z_3 + z_4 + z_5)/4 \quad [8.7]$$

Конечно  $\sigma_k^2$  будет такая же, как и раньше. Здесь мы преуспели в сокращении системы от 6 на 6 до 3 на 3 без какой-либо потери точности. Так как время, необходимое для обращения матрицы, грубо пропорционально кубу размера системы, то уменьшая в два раза размер системы, мы эффективно уменьшаем время и, следовательно, стоимость вычислений на величину примерно равную одной восьмой от их первоначальных значений. Это конечно представляет значительную экономию.

Понимая, что размер системы кригинга может быть значительно уменьшен (в некоторых случаях без потери точности), важно уметь отличать симметричную конфигурацию проб от тех случаев, которые только кажутся симметричными на первый взгляд. Чтобы иметь идентичные веса точки данных должны быть симметричными относительно друг друга и относительно оцениваемых точки или блока. В

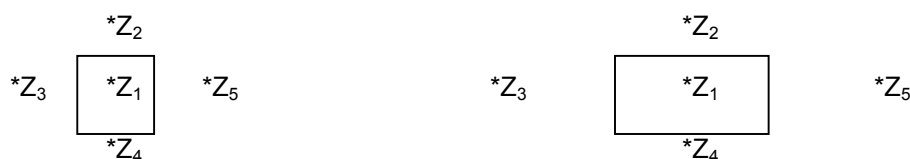
приведенной ниже конфигурации точки данных симметричны относительно друг друга, но не относительно блока.



**Рис 8.9.** Конфигурация симметричных данных с удаленным блоком

Другой случай, который часто ведет к ошибкам, связан с ситуацией, когда данные и блок симметричны относительно друг друга, но модель вариограммы анизотропная.

Предположим, что конфигурация данных такая же, как на Рис. 8.10, но модель вариограммы имеет зону 500м в СЮ направлении и - 250м в ВЗ направлении. После соответствующей корректировки измерения в ВЗ направлении становятся в два раза больше измерений в СЮ направлении. В итоге веса для Z3 и Z5 идентичны, как и для Z2 и Z4, но они не равны как раньше. Это обстоятельство должно быть учтено при перегруппировке точек данных.



**Рис 8.10.** Конфигурация проб до и после принятия во внимание анизотропии

### **Проверка качества конфигурации кригинга**

Наблюдая, как веса и дисперсия кригинга изменяются при увеличении числа точек, мы получаем некоторое понимание о том, что размер окрестности кригинга может быть оптимальным. Опыт показал, что дисперсия кригинга является довольно нечувствительным параметром для проверки качества конфигурации кригинга. Вес среднего в простом кригинге и наклон линейной регрессии истинного значения и оценки оказываются гораздо более чувствительными параметрами контроля качества и, следовательно, более полезными. Теорема аддитивности в Главе 7 доказала, что оценку ОК можно записать как

$$Z_v^* = \sum \lambda_i' Z(x_i) + m^* \lambda_m$$

[8.8]

где  $m^*$  - кригинговая оценка среднего, и что дисперсия ОК может быть представлена суммой дисперсии SK и выражением, зависящим от веса среднего в SK и дисперсии кригинга оценки среднего:

$$\sigma_{OK}^2 = \sigma_{SK}^2 + (\lambda_M)^2 \text{Var}(m^*)$$

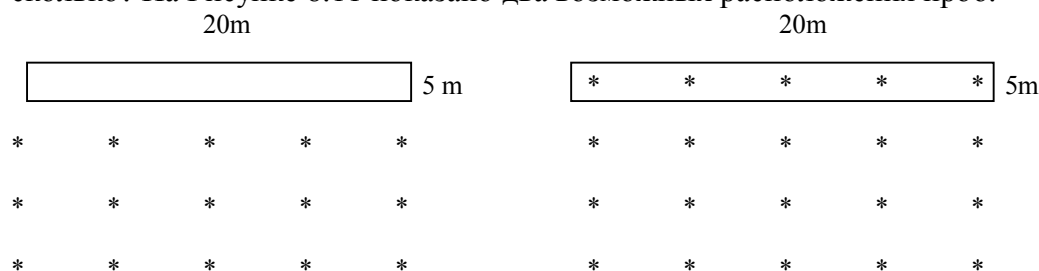
[8.9]

Первое уравнение показывает, что там, где вес среднего в простом кригинге  $\lambda_M$  мал (около 0), оценка в основном будет зависеть от локальных значений  $Z(x)$ , т.е. от данных из конфигурации кригинга, а не от оценки  $m$ . Поэтому степень требуемой стационарности становится меньше. К тому же ОК оценка и SK оценка являются близкими друг к другу.

Второе уравнение показывает, что когда вес среднего в SK мал, то дисперсия ОК близка к SK дисперсии. При этом слегка теряется точность при оценивании среднего. Наоборот, когда вес среднего в SK большой, то дисперсия ОК становится больше чем дисперсия SK. Rivoirard (1984, 1987) показал, что уменьшение информации, доступной в окрестности кригинга, увеличивает важность среднего. Поэтому этот параметр показывает, как разброс данных связан с моделью вариограммы и также – какой уровень стационарности данных будет достаточным.

#### *Дополнительные пробы улучшают качество оценки*

На южно-африканском золотом руднике оценивались блоки 20м на 5м по бороздовым пробам по сети приблизительно 5м на 5м. В общем, обычно использовались ближайшие три линии проб. Иногда была доступна дополнительная линия проб по границе блока. Понятно, что использование этих дополнительных проб будет улучшать качество оценки, но на сколько? На Рисунке 8.11 показано два возможных расположения проб.



**Рис 8.11.** Два варианта расположения проб

Предположим, что вариограмма - сферическая с порогом 1.0 и зоной 20м. Дисперсия кригинга для первого варианта равна 0.368, а для второго - 0.114. Наклон линейной регрессии возрастает с 0.531 до 0.863, в то время как вес среднего в SK падает с 0.623 (достаточно высокий) до 0.255. Все три параметра качества показывают, что включение дополнительной строки проб приводит к значительному улучшению качества оценки.

#### ***Перекрестная проверка***

Так как к экспериментальной вариограмме могут быть подогнаны несколько различных моделей вариограмм, то хорошо было бы знать, какая из них "лучшая". Часто для этого используется перекрестная проверка (кроссвалидейшн). Процедура состоит во временном удалении одной точки данных из исходного набора и оценки ее кригингом, используя оставшиеся пробы. Если эту операцию повторить для всех точек (или для созданного подмножества их) и для всех подобранных моделей вариограмм, то мы получим серию ошибок оценивания для каждой точки данных и для каждой модели вариограммы. Когда вариограмма подходит к данным, то среднее ошибок оценивания и среднее стандартизованных ошибок оценивания должны быть равны нулю, а дисперсия стандартизованных ошибок оценивания должна равняться 1.0.

Пусть  $Z_{ij}^*$  обозначает кригинговую оценку  $i$ -ой точки, вычисленной с использованием  $j$ -ой модели вариограммы, и пусть  $\sigma_{ij}^*$  - дисперсия кригинга. Если действительное значение в точке -  $Z_i$ , то соответствующая ошибка оценивания будет -  $Z_{ij}^* - Z_i$ . Поэтому мы можем записать:

$$E(Z_{ij}^* - Z_i) = 0 \quad [8.10]$$

$$E\left(\frac{Z_{ij}^* - Z_i}{\sigma_{ij}}\right) = 0$$

[8.11]

$$\text{Var}\left(\frac{Z_{ij}^* - Z_i}{\sigma_{ij}}\right) = 1$$

[8.12]

Это приводит нас к вычислению следующих статистик:

$$\sum (Z_{ij}^* - Z_i)$$

[8.13]

$$\sum \frac{(Z_{ij}^* - Z_i)}{\sigma_{ij}}$$

[8.14]

$$\sum \frac{(Z_{ij}^* - Z_i)^2}{\sigma_{ij}^2}$$

[8.15]

Так как любые крайние значения (т.е. выбросы) сильно действуют на все эти статистики, то было бы предпочтительно использовать их надежные (робастные) формы. Но не важно используются ли надежные или ординарные статистики, потому, что все три статистики никогда не покажут одну и ту же модель, как "лучшую". Поэтому должен быть сделан выбор.

Существуют практические проблемы в использовании этой методологии с данными бурения, потому что, когда выбирается и оценивается проба, то результат кригинговой оценки зависит в основном от ближайших проб (т.е. тех, которые выше и ниже по вертикали). Поэтому данная перекрестная проверка проверяет только, насколько хорошо



подогнан вертикальный компонент вариограммной модели, а не вся оставшаяся модель.

## 9 Примеры использования кригинга

### Содержание

Пример в Главе 5 был посвящен структурному анализу месторождения железной руды. Здесь мы покажем, как использовать подогнанную трехмерную модель вариограммы для кригинга значений точек, а затем - содержаний блоков. Так как модель имеет большой эффект самородка, то требуется большая окрестность кригинга. Четвертый параграф покажет, что произойдет, если использовать малую окрестность. Последний параграф проиллюстрирует, почему неэффективно оценивать кригингом маленькие блоки по данным разбросанных проб, а также рассчитывать извлекаемые запасы.

### 9.2 Месторождение железной руды

Данные, доступные для оценки этого месторождения, состоят из 500 проб длиной по 15м из 40 вертикальных скважин. Модель вариограммы состоит из эффекта самородка 1.8 и двух анизотропных сферических структур. Их пороги и зоны в горизонтальном и вертикальном направлениях представлены в Таблице 9.1.

В добывающей промышленности блочное оценивание является более распространенным, чем точечное оценивание, которое иногда используется в качестве исходной информации для оконтуривания. В этой главе мы проиллюстрируем использование обоих кригингов, точечного и блочного. При сравнении результатов, напомним о влиянии эффекта основания. Первый шаг в кригинге – это выбор размеров сетки.

**Таблица 9.1.** Параметры модели вариограммы, которая изотропна в горизонтальном направлении, но не в вертикальном

	Порог	Зона влияния по горизонтали	Зона влияния по вертикали
Эффект самородка	1.8	-	-
1-я структура	1.2	80 м	65 м
2-я структура	1.5	400 м	65 м

#### 7.14.1 Размеры сети для кригинга

Так как расстояние между скважинами около 80м, то в горизонтальной плоскости сетка для кригинга будет иметь размеры 100м на 100м. Высота ячейки сетки будет 15м, потому что это длина секции керна. В итоге сетка состоит из 19 ячеек в направлении В – З, 12 ячеек в направлении С – Ю и из 36 вертикальных уровней. Не рекомендуется использовать кригинг для очень маленьких блоков (скажем 10м на 10м по горизонтали) или блоков, которые короче, чем длина секций керна (15м). Причины этого рассматриваются позже в этой главе.

### 9.3 Точечный кригинг с большим количеством соседей

После определения размеров и ориентации сетки кригинга, необходимо выбрать размер окрестности кригинга (количество проб, участвующих в оценке каждой точки (блока)). Так модель имеет 40% эффект самородка, то она имеет плохую структуру и, поэтому требуется большая окрестность со многими исходными пробами. После нескольких проверок было решено использовать для оценки минимум 8 проб и оптимально 80 проб. Эллипс поиска был ограничен по горизонтали радиусом 500м и по вертикали радиусом 300м. В параграфе 9.5 мы покажем, что произойдет, когда для такого кригинга использовать в оценке мало проб.

На Рисунке 9.1 изображены изолинии для одного горизонта (номер 14), который находится около центра месторождения. Внешние блоки, которые заштрихованы, совсем не оцениваются кригингом, потому что для них недостаточно данных (менее 8 проб). На Рисунке 9.2 показана карта средне квадратичного отклонения (СКО) кригинга. Изолинии не имеют значений из-за небольших размеров рисунка, но тем не менее понятно, что СКО кригинга выше на краях оцениваемой области и ниже там, где пробы расположены более густо. В Таблице 9.2 представлены базовые статистики оценки кригинга и соответствующие СКО кригинга.

### 9.4 Блочный кригинг с большим количеством соседей

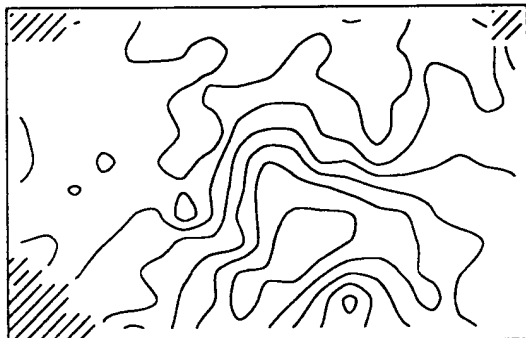
Такой же размер соседей, как и для точечного кригинга, используется для кригинга блоков размером 100м на 100м. Единственная разница между кригингом точек и блоков заключается в том, что блоки должны быть дискретизированы для вычисления выражений типа  $\gamma(V, x)$  и  $\gamma(V, V)$ . Здесь используется дискретизация 6 на 6 на 1. Так как длина керн равна высоте блока, то вертикальная дискретизация должна быть 1.

На Рисунках 9.3 и 9.4 показаны оценки кригинга и соответствующие СКО, а в Таблице 9.3 представлены базовые статистики. Общая форма контурных линий такая же, как и для точечного кригинга. Сравнивая статистики оценок блочного и точечного кригинга, мы видим, что средние содержания для всего района равны, но минимальные значения для точек меньше минимума для блоков. И наоборот, максимум для точек больше максимума для блоков. Это связано с тем, что гистограмма содержаний блоков более узкая, чем гистограмма для точек.

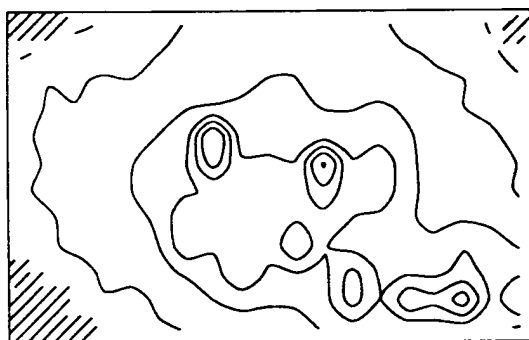
**Таблица 9.2.** Основные статистики точечного кригинга и соответствующих СКО

	Число точек	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
Оценки для точек	7501	52.91	59.12	56.84	0.704

СКО	7501	1.655	2.380	2.127	0.103
-----	------	-------	-------	-------	-------



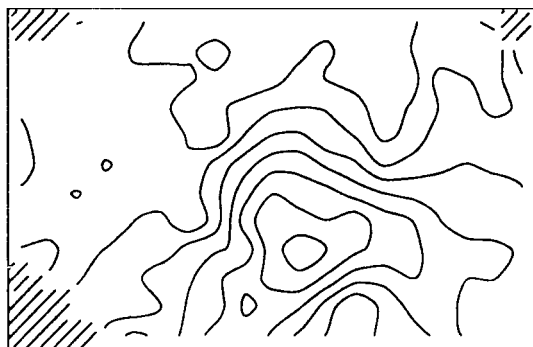
**Рис 9.1.** Изолинии для горизонта 14, полученные для точечного кригинга с использованием 8 угловых секторов, с оптимумом - 80 проб и минимумом - 8 проб



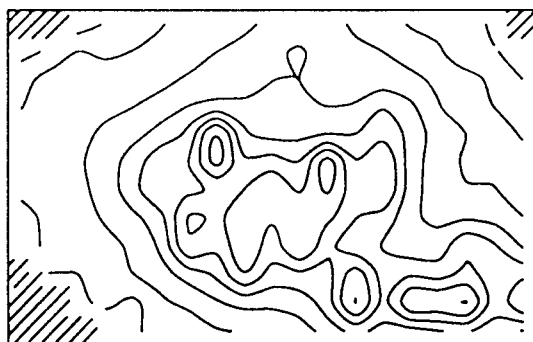
**Рис 9.2.** Изолинии СКО оценок точечного кригинга для горизонта 14.

**Таблица 9.3.** Основные статистики блочного кригинга и соответствующих СКО

	Число точек	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
Оценки для точек	7501	53.27	58.97	56.84	0.605
СКО	7501	0.720	1.636	1.238	0.166



**Рис 9.3.** Изолинии для горизонта 14, полученные для блочного кригинга с использованием 8 угловых секторов, с оптимумом - 80 проб и минимумом - 8 проб



**Рис 9.4.** Изолинии СКО оценок точечного кригинга для горизонта 14.

Разница между СКО для точек и блоков довольно значительная. Лучшая оценка для точек имеет СКО 1.655, в то время как наихудшая для блоков – 1.636. Это из-за того, что намного легче оценивать среднее значение больших объемов, чем малых.

### **9.5 Точечный кригинг с меньшим количеством соседей**

В параграфе 9.3 для точечного кригинга использовалась большая окрестность, содержащая много проб. Будет интересно увидеть, что произойдет, если использовать маленькую, содержащую только несколько проб. На Рисунке 9.5 изображены изолинии, полученные с использованием только ближайших трех проб. Понятно, что здесь что-то не так, но что именно? До рассмотрения деталей, отметим, что в углах стало меньше заштрихованных блоков. В данном случае кригингом будет оценено

больше блоков, потому что для оценки ячейки сетки требуется меньше проб в окрестности кригинга.



**Рис 9.5.** Изолинии, полученные для точечного кригинга с использованием только трех ближайших проб

#### 9.5.1 Что является причиной большой концентрации линий?

Чтобы понять, что здесь неправильно, обратим внимание на четыре соседних ячейки сетки в области, где отмечена большая концентрация изолиний. Рассмотрим строки с 2 до 5 в колонке 12 на горизонте 14. В Таблице 9.4 представлены координаты трех проб, используемых для кригинга каждой ячейки, вместе с их содержаниями и весовыми факторами. В трех случаях из четырех все 3 пробы получены из одной скважины. В таблице также представлены оценка кригинга и соответствующая СКО для каждой ячейки. Обратите внимание на разбросанность оценок кригинга.

**Таблица 9.4.** Координаты, веса кригинга и содержания проб, эффективно используемых для кригинга четырех выбранных ячеек сетки

**Блок (12,5,14): Оценка кригинга = 54.83, СКО = 2.14**

	Коорд. X	Коорд. Y	Коорд. Z	Вес	Содержание
1я Проба	-1450	-995	17.25	35.1%	56.6
2я Проба	-1450	-995	18.75	32.4%	56.9
3я Проба	-1450	-995	15.75	32.4%	51.05

**Блок (12,4,14): Оценка кригинга = 53.68, СКО = 2.27**

	Коорд. X	Коорд. Y	Коорд. Z	Вес	Содержание
1я Проба	-1475	-1092	17.25	32.3%	55.0
2я Проба	-1475	-1092	15.75	33.8%	54.25
3я Проба	-1475	-1092	18.75	33.8%	51.85

**Блок (12,3,14): Оценка кригинга = 55.05, СКО = 2.27**

	Коорд. X	Коорд. Y	Коорд. Z	Вес	Содержание
--	----------	----------	----------	-----	------------

1я Проба	-1494	-1195	20.25	35.3%	51.6
2я Проба	-1295	-1236	17.25	36.6%	57.0
3я Проба	-1295	-1236	18.75	28.1%	56.1

**Блок (12,2,14): Оценка кригинга = 58.75, СКО = 2.33**

	Коорд. X	Коорд. Y	Коорд. Z	Вес	Содержание
1я Проба	-1319	-1330	17.25	44.1%	58,9
2я Проба	-1319	-1330	18.75	27.9%	58,6
3я Проба	-1319	-1330	20.25	28.0%	58.65

В Таблице 9.5 приведены оценки кригинга для ячеек горизонта 14 (ряды: от 2 до 5, столбцы: от 10 до 14). Четыре целевых ячейки находятся в центральном столбце. Глядя на эти значения, легко понять, почему такая большая концентрация изолиний в этой области. Так как целевая ячейка сетки перемещается, скважина эффективно используется, как источник данных для оценок кригинга. Эти прыжки приводят к резким изменениям в оценке кригинга, и следовательно - к неприглядной концентрации изолиний. Проблемы этого типа были впервые отмечены Ренардом (Renard) и Янцеем (Yancey) (1984), когда они делали кригинг нефтяного месторождения, используя сейсмические данные, лежащие на прямолинейных профилях. Они решили, что эрратические прыжки выходных оценок встречаются из-за "шума" проб, включаемых в окрестность кригинга и исключаемых из нее при перемещении оцениваемой зоны.

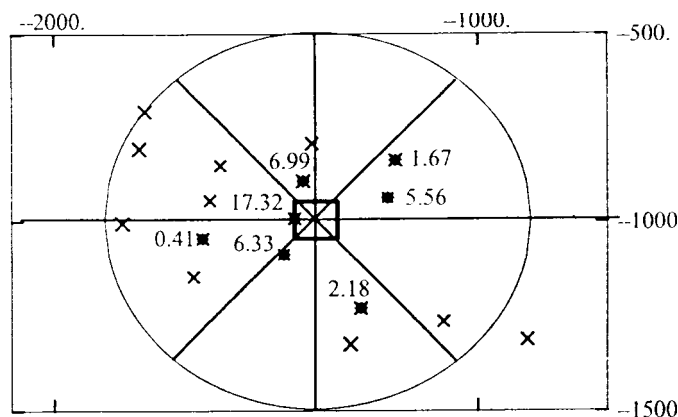
**Таблица 9.5.** Кригинговые оценки ячеек (ряды: с 2 до 5, столбцы: с 10 до 14) на горизонте 14. Использовались только 3 ближайшие пробы

55.38	54.83	54.83	53.95	54.03
55.66	53.82	53.68	55.47	55.29
57.41	53.34	55.05	56.61	56.57
53.72	55.03	58.75	58.76	55.70

### 9.5.2 Как устранить эти концентрации изолиний?

Чтобы исключить эти эффекты в изолиниях, нужно включить больше точек проб в систему кригинга. Но одно только увеличение общего

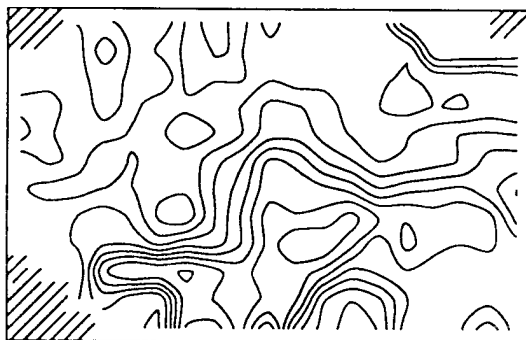
количества проб в окрестности не достаточно. Например, если количество их увеличивается с 5 до 9, то ближайшие точки все еще будут находиться на одной скважине, и проблема не будет решена. Мы должны гарантировать, что в систему кригинга войдут пробы из нескольких скважин. Один из простых и удобных путей сделать это – использовать угловые сектора. На Рисунке 9.6 изображено восемь угловых секторов, центр которых находится в оцениваемой ячейке сетки (12, 4, 14).



**Рис 9.6.** Целевая ячейка (12, 4, 14) с окрестностью вокруг нее, разделенной на 8 угловых секторов

Так как максимальный радиус поиска был ранее установлен равным 500м, то пробы за пределами него не участвуют в вычислениях. Размеры окружности показывают, насколько большая окрестность кригинга. Крестиками на рисунке отмечено положение проб на одном горизонте. Числа обозначают выраженные в процентах веса кригинга для тех проб, которые были эффективно использованы в вычислениях. В расчете также участвовали пробы других уровней (горизонтов).

После задания количества секторов, процесс располагает шаблон кригинга относительно оцениваемой ячейки и использует для расчета ближайшую пробу или пробы отдельно в каждом секторе. Пользователь обычно может оценить, как много секторов требуется использовать. Следующий пример кригинга ячеек выполнен с применением 4-х угловых секторов, каждый из которых содержит, по крайней мере, 3 пробы (Рис. 9.7).





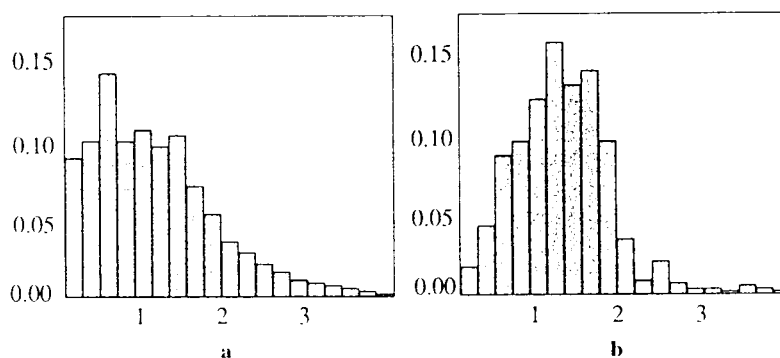
**Рис 9.7.** Изолинии, полученные для точечного кригинга с использованием 4-х угловых секторов, содержащих, по крайней мере, по 3 пробы каждый.

Полученный результат оказывается несколько лучшим по сравнению с предыдущим вычислением, использующим только три ближайшие пробы, но еще не достаточно приемлемым. Осталось еще несколько концентраций изолиний. Карта, представленная в начале (Рис 9.1) , вычислена с использованием 8 угловых секторов, что является лучшим выбором, а результат - намного удовлетворительнее. Этот пример показывает, как важно включить достаточное количество проб в систему кригинга.

### **9.6 Кригинг маленьких блоков по редкой сети**

Одним из главных применений геостатистики в горной промышленности является оценивание содержания блоков во время стадий технико-экономической оценки месторождений. Обычно на этой стадии доступны пробы, расположенные по очень редкой сети. Чтобы качественно спроектировать рудник, инженеры часто делают кригинг очень маленьких блоков. Затем для оценки извлекаемых запасов руды подсчитывается количество блоков, содержание в которых выше бортового. Цель этого параграфа – показать, как может быть опасна оценка маленьких блоков на этой стадии и как ее результаты могут ввести в заблуждение.

Проблема кригинга малых блоков хорошо известна уже много лет. Много авторов, включая Journel и Huijbregts (1978), Давид (David) (1977, 1988), Роял (Royle) (1979) и Кларк (Clark) (1982), отмечали, что оценки кригинга в значительной степени сглажены, чем действительные содержания маленьких блоков. Равенскрофт (Ravenscroft) и Армстронг (1990) проиллюстрировали это для месторождения золота типа Витватерсранд. Был сделан кригинг блоков размером 2м на 2м, используя данные сетки 10м на 10м. По причинам секретности значения содержаний смасштабированы, чтобы их среднее было равно 1. На рисунках 9.8 **a** и **b** изображены гистограммы действительных содержаний и соответствующих оценок кригинга, взятые из этой статьи.



**Рис 9.8.** Гистограммы (а) действительных содержаний и (б) оценок кригинга, полученные по данным редко расположенных проб (Равенскрофт и Армстронг (1990))

Хотя у обеих гистограмм одинаковое среднее (1.0), но они имеют разные формы и разные дисперсии. Как и ожидалось, дисперсия оценок кригинга меньше, чем действительных содержаний блоков. Поэтому кривая «содержание – тоннаж», рассчитанная по оценкам кригинга блоков, отличается от действительной. Это доказывает, что кригинг не должен использоваться для оценивания содержаний малых блоков по редко расположенным данным. И действительно, линейные оценки не должны использоваться для этой цели. Это утверждение распространяется и на методы обратных расстояний.

Для оценивания извлекаемых запасов требуются более сложные методы. Их можно разделить на две большие категории:

условное моделирование и  
нелинейные оценки, такие как индикаторный кригинг и дизъюнктивный кригинг.

Так как эта книга охватывает только линейную геостатистику, то мы не будем здесь рассматривать эти методы. Читатели, которые интересуются нелинейными методами, такими как дизъюнктивный кригинг, могут обратиться к Матерону (1976), Маречалу (Marechal) (1975) или Ривойрарду (Rivoirard) (1994). Те, кто интересуется индикаторным кригингом, могут обратиться к Исааку (Isaaks) и Сриваставе (Srivastava) (1989) или Джорнелу (Journel) (1983).

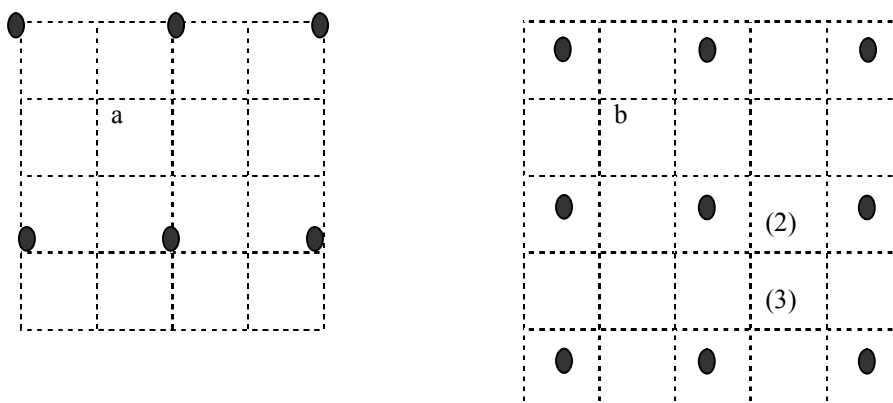
В геостатистическом сообществе в течение последних 15 лет использовались самые разные методы моделирования. В трудах прошедших недавно конференций можно найти итоги применения моделирования во многих различных областях. Например, посмотрите труды под редакцией Баафи (Baafi) и Шофилда (Schofield) (1997), Армстронга и Доуда (Dowd) (1994), Dimitrakopoulos (1994) и Soares (1993).

#### *9.6.1 Какой размер блоков можно использовать для кригинга?*

Понимая, что делать кригинг малых блоков по редко расположенным данным не рекомендуется, хочется знать, насколько малы могут быть эти блоки. Опыт показывает, что лучше брать блоки с таким же размером, как и среднее расстояние между пробами. В самом крайнем случае, блоки в горизонтальной плоскости могут иметь размер, равный половине расстояния между пробами. Например, для железной руды минимальные размеры блоков – 40м на 40м на 15м или 50м на 50м на 15м. Это означает, что блоков для кригинга получается в четыре раза больше чем исходных данных.

Другой момент, на который надо обратить внимание на расположение полученных таким образом блоков относительно проб. На Рисунке 9.9.а изображен план проб, расположенных по регулярной сети 100м на 100м, совместно с блоками, имеющими размер, равный половине расстояния между пробами. В углу каждого блока находится проба.

Поэтому, если использовать для всех блоков одинаковую окрестность кригинга, то у всех блоков будет одинаковая дисперсия кригинга. Это неверно для расположения блоков, изображенного на Рисунке 9.9.б. Блоки, содержащие пробы в центре, будут иметь пониженную дисперсию кригинга; те, которые помечены цифрой (2), будут иметь большую дисперсию, а помеченные цифрой (3), - очень большую дисперсию, потому что они значительно удалены от проб. Человеку, смотрящему на карту оценок кригинга, полученную с использованием второго расположения, не следует верить, что некоторые оценки лучше, чем другие. Поэтому важно правильно оценивать не только размер блоков, но и их расположение.



**Рис 9.9.** Два возможных расположения блоков размером 50м на 50м относительно проб, размещенных по сети 100м на 100м. В (а) все блоки имеют одинаковую дисперсию кригинга, в то время как в (б) блоки, помеченные (2) и (3), имеют большую дисперсию, чем блоки, содержащие пробы в центре. Поэтому расположение (а) предпочтительнее

## 10. Оценивание общих запасов

### **Содержание**

Как только перспективная площадь определена, разведочная компания устанавливает границы минерализации (если они еще этого не знают), общего тоннажа руды и среднего содержания полезных компонентов. На этой стадии очень важно знать, как точно оценены общие запасы. Имея не так много проб, можно использовать для оценивания запасов кригинг; в этом случае дисперсия кригинга может оценить точность измерений. Однако, когда в систему кригинга входит много уравнений (точек), то для решения задачи могут потребоваться разные подходы.

В этой главе представлено несколько способов оценивания дисперсии, связанной с общими запасами в тех случаях, когда нельзя использовать кригинг. Дисперсия зависит от того, известны ли границы рудного тела или нет. После представления концепции дисперсии распространения, в первой части главы рассматриваются различные способы оценивания общей дисперсии оценки, а во второй части обсуждается "оптимальная" сетка бурения.

### **Можно ли использовать кригинг для оценивания общих запасов?**

Выше мы увидели, как можно использовать кригинг для получения локальной оценки точки или содержания в блоке. Закономерно появляется вопрос, можно ли использовать кригинг для оценивания общих запасов; т.е. запасов, содержащиеся во всем месторождении или большей его части. Выражение "глобальная оценка" в общем относится к оцениванию запасов на стадии ТЭО, когда доступно только сравнительно небольшое количество проб. Для качественной разработки месторождения требуется значительно больше проб, например, из скважин БВР или бороздовых.

Необходимо различать две ситуации: (1) когда имеется сравнительно немного разведочных данных, и (2), когда мы имеем большое количество информации (скажем, не менее чем несколько сотен точек опробования). В первом случае кригинг можно использовать, но во втором – будет мешать проблема обращения матрицы.

Один из способ решения этой проблемы (во втором случае) – разделение региона на зоны, включающие, скажем, из более чем 100-200 точек каждая, и кригинговые расчеты для каждой зоны отдельно. Это даст нам наиболее точную оценку среднего содержания. Однако проблема вычисления общей дисперсии без решения систем уравнений все еще остается. Было бы привлекательным просуммировать (или взять среднее) индивидуальные дисперсии кригинга, но это приведет к неправильному ответу. Давид (1973) теоретически описал способ рекомбинирования дисперсий, но он оказался очень сложным. На стадии ТЭО требуется более простой метод. Если пробы расположены равномерно, то общие запасы

можно оценить, используя среднеарифметическое значение всех содержаний.

В этой главе представлено несколько методов для оценивания сопутствующих дисперсий оценивания. Будет обсуждаться две аппроксимации (прямая композиция, а также использование линий и сечений). Проблема оценивания запасов внутри области минерализации будет рассмотрена до обсуждения примеров, где геометрия месторождения не известна. Но сначала мы покажем, как вычислить дисперсию распространения проб, так как это понятие будет использоваться в дальнейшем.

### ***Дисперсия распространения***

Предположим, что мы хотим оценить среднее содержание внутри региона  $V$ ; т.е. мы хотим вычислить интеграл:

$$Z(V) = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx$$

[10.1]

Предположим также, что доступной информацией является лишь среднее содержание в маленьком блоке  $v$ . Обычно  $V$  является извлекаемым блоком или участком, а  $v$  – скважиной или пробой другого типа. Поэтому мы должны оценить  $Z(V)$  из  $Z(v)$ , где:

$$Z(v) = \frac{1}{v} \int_v Z(x) dx$$

[10.2]

Считается нормальным использовать содержание  $Z(v)$ , как оценку для  $Z(V)$ . Какая в этом ошибка? Во-первых, если  $Z(x)$  удовлетворяет стационарной или внутренней гипотезе, то  $Z(v)$  - несмещенная оценка  $Z(V)$ . Нам нужно вычислить дисперсию распространения содержания  $v$  в  $V$ . Иногда это обозначается  $\sigma_E^2(v, V)$  или, для краткости, -  $\sigma_E^2$ .

Концептуально - это просто дисперсия оценивания  $Z(V)$  через  $Z(v)$ . В геостатистике выражение "дисперсия распространения" обычно используется для случая, когда блок оценивается по содержанию пробы в его центре. В общем случае выражение "дисперсия распространения" используется для более сложных ситуаций, где в вычислениях участвует несколько проб. Теоретически значение дисперсии распространения получается из:

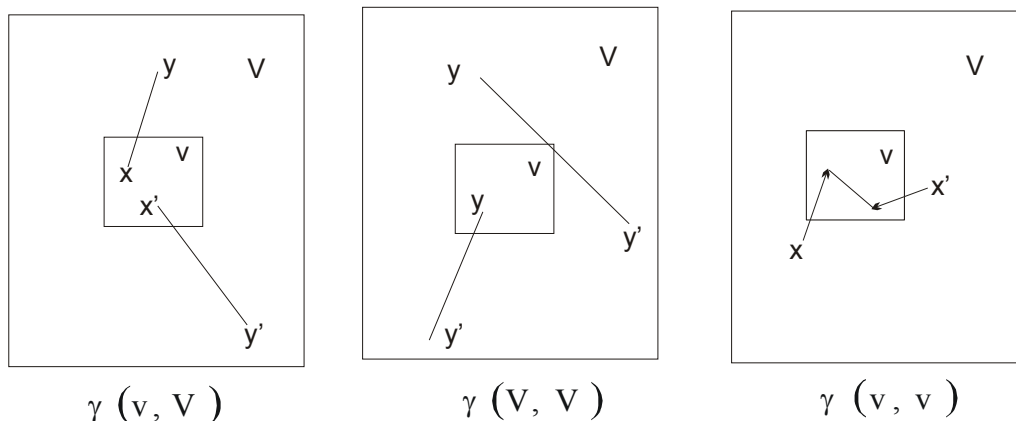
$$\sigma_E^2(v, V) = \frac{2}{vV} \iint_V \gamma(x-y) dx dy - \frac{1}{v^2} \iint_v \gamma(x-x') dx dx' - \frac{1}{V^2} \iint_V \gamma(x-y) dy dy'$$

[10.3]

Поэтому

$$\sigma_E^2(v, V) = 2\bar{\gamma}(v, V) - \bar{\gamma}(v, v) - \bar{\gamma}(V, V) \quad [10.4]$$

где  $\bar{\gamma}(v, V)$ ,  $\bar{\gamma}(v, v)$  и  $\bar{\gamma}(V, V)$  - средние значения вариограмм, когда конечные точки вектора  $h$  независимо движутся внутри  $V$  и  $v$  соответственно.



**Рис 10.1.** Смысл среднего в терминах вариограммы

Формула [10.4] подходит для любых форм  $v$  и  $V$ . В особенности, когда  $v$  не размещается внутри  $V$ . Факторы, действующие на дисперсию распространения:

- регулярность переменной (через  $\gamma$ ),
- геометрия  $V$ ,
- геометрия  $v$ ,
- расположение  $v$  относительно  $V$ .

Эту формулу можно переписать в виде:

$$\sigma_E^2(v, V) = [\bar{\gamma}(v, V) - \bar{\gamma}(V, V)] + [\bar{\gamma}(v, V) - \bar{\gamma}(v, v)] \quad [10.5]$$

Это преобразование делает понятным, что дисперсия уменьшается, когда:

проба  $v$  лучше представляет оцениваемый регион  $V$ . В предельном случае  $v=V$ ,  $\sigma_E^2(v, V) = 0$ .

вариограмма более регулярна, т.е. переменная более непрерывна.

Другое понятное и не менее важное свойство дисперсии распространения – она использует вариограмму и геометрию оцениваемой области, но не действительные значения проб. Это свойство также характерно для дисперсии и весов кригинга.

### **Связь с дисперсией изменчивости**

Люди склонны путать дисперсию изменчивости  $\sigma_E^2[v|V]$  с дисперсией распространения  $\sigma_E^2(v, V)$ . Дисперсия изменчивости имеет физический смысл; она измеряет дисперсию проб данного объема  $v$  внутри

другого объема  $V$ . В противоположность этому дисперсия распространения является действующей концепцией, характеризующей ошибку, связанную с различными шаблонами сети опробования. Теоретически эти две дисперсии связаны следующим способом: дисперсия изменчивости является средним дисперсии распространения, когда пробы  $v$  занимают все возможные позиции внутри  $V$ .

Теперь мы можем вычислить общие запасы (и среднее содержание) для большого региона, известного как минерализованного.

### **Область минерализации**

Предполагается, что область минерализации известна, и месторождение - двумерное (например, угольный пласт или золотая жила). Для простоты зона представлена прямоугольником, но эту же процедуру можно применить и для региона любой другой формы.

#### *Прямая композиция выражений*

В первом случае мы предполагаем, что пробы расположены по регулярной или почти по регулярной сетке. Чтобы оценить общий тоннаж руды, надо умножить площадь региона на среднюю мощность пласта или жилы (здесь среднее обозначает среднеарифметическое). Расчеты, включая кригинг, использующие большое количество проб, расположенных по регулярной сетке, показали, что весовые факторы проб очень близки к  $1/N$ , где  $N$  – количество проб. Поэтому наша оценка равна:

$$Z^*(V) = \sum \frac{1}{N} Z_i$$

[10.6]

Соответствующая дисперсия оценивания –

$$\frac{2}{NV} \sum_i \int \gamma(x_i - y) dy - \frac{1}{V^2} \iint \gamma(y - y') dy dy' - \frac{1}{N^2} \sum \sum \gamma(x_i - x_j)$$

[10.7]

Если  $N$  большое, то эта формула становится очень громоздкой. Поэтому мы аппроксимируем ее, предполагая, что сумма ковариаций между ошибками распространения равна нулю. На Рис. 10.2 изображены  $N$  квадратов с пробами в центрах. Пусть  $Z(v_i)$  будет действительным, но неизвестным средним  $i$ -го квадрата.

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

**Рис 10.2.** Регулярная сеть опробования

Так как среднее всей области является просто средним маленьких квадратов, то ошибка, полученная при использовании среднего проб, как оценки области, равна:

$$\sum \frac{1}{N} [Z(v_i) - Z_i]$$

[10.8]

Таким образом, это будет среднее частичных ошибок. Чтобы упростить вычисления, предположим, что сумма ковариаций между ними равна нулю. Проверка, сделанная Давидом (1973, 1977, стр. 201), показала, что это достаточно хорошая аппроксимация. Отсюда получаем дисперсия оценивания

$$\sigma_{\text{EST}}^2 = \text{Var} \left( \frac{\sum (Z_i - Z(v_i))}{N} \right) = \frac{1}{N^2} \sum \text{Var}(Z_i - Z(v_i))$$

[10.9]

Теперь  $\text{Var}(Z_i - Z(v_i))$  является дисперсией распространения центрального значения пробы до всего квадрата  $v_i$ . Так как все квадраты имеют одинаковый размер, то

$$\sigma_{\text{EST}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_E^2(0, v)$$

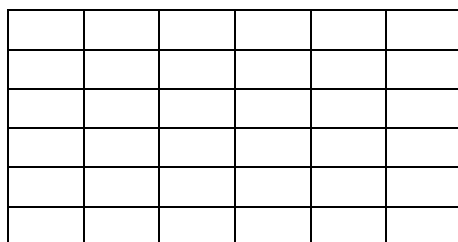
[10.10]

Вышеописанное представляет собой простой способ оценки общих запасов и дисперсии оценивания в терминах вариограммной функции. (Обратите внимание: этот же метод можно применить, когда не все блоки  $v_i$  одинакового размера. Смотрите для деталей Journel и Huijbregts (1978) стр 415-417).

Этот метод основан на прямой композиции. Он верен только в том случае, когда блоки примерно квадраты. Если отношение длины блока к ширине больше 3:1, то нужно использовать композицию линией и сечением, которые описываются в следующем параграфе. Когда решается вопрос, какой принцип аппроксимации использовать, нужно учитывать анизотропию вариограммной модели. Отношение длины блока к его ширине следует вычислять в единицах зоны влияния вариограммы, а не в единицах расстояния. Например, если пробы расположены по действительно квадратной сети (Рис. 10.2), но вариограмма имеет



отношение анизотропии 2:1, то конфигурация проб после учета анизотропии растянется как показано на Рис. 10.3.



**Рис 10.3.** Сеть опробования после учета анизотропии

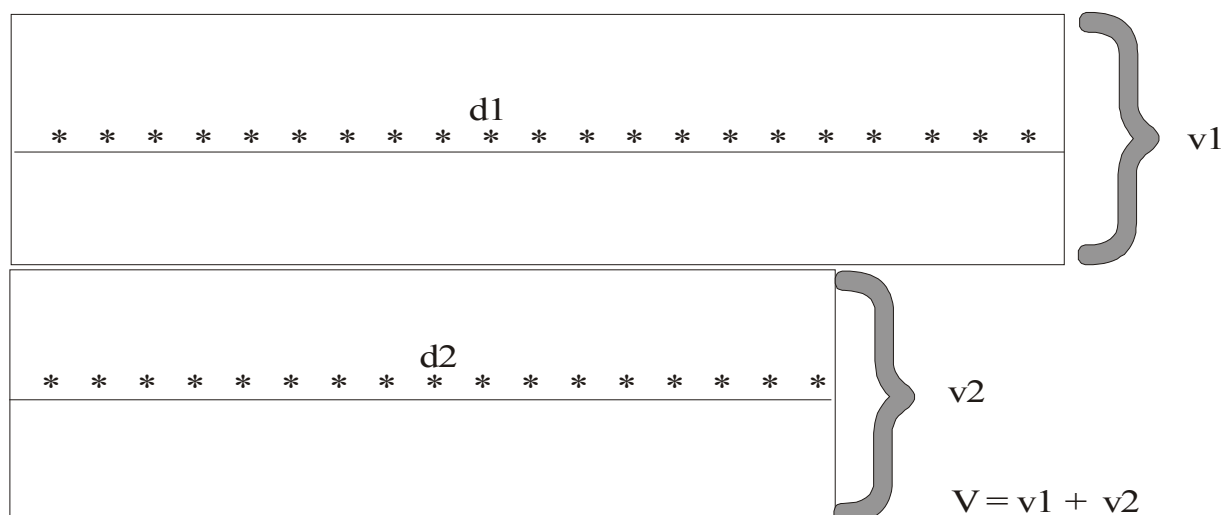
*Композиция линии и разделенных на части выражений*

Представленный выше метод используется, когда пробы равномерно распространены в пространстве. Он не используется, если данные в одном направлении намного гуще, чем в другом, как, например, происходит в сейсмической разведке, гидролокационном обнаружении скоплений рыб или (иногда) в подземном опробовании месторождений. Когда данные близко расположены вдоль линий с большим расстоянием между ними, для вычисления дисперсии оценивания должен использоваться другой метод аппроксимации. Он включает в себя объединение ошибок, сделанных при экстраполяции содержаний проб вдоль линий, и, затем экстраполяцию линейных содержаний на пространство между линиями.

На Рис. 10.4 проиллюстрирован случай с двумя профилями. Область опробована вдоль двух профилей  $d_1$  и  $d_2$ . Если расстояние между пробами вдоль линий профилей равно  $s$ , то на первой линии размещается  $n_1 = d_1/s$  проб. Если имеется больше двух профилей, то расстояние между ними принимается постоянным. Сечения такой ширины изображаются с центром на линии профиля. В данном случае они обозначены  $v_1$  и  $v_2$ . Поэтому вся область  $V$  представляет собой сумму отдельных сечений.

Пусть  $Z(V)$  будет действительным, но неизвестным содержанием всего объема  $V$ . Примем также, что  $Z(v_i)$  и  $Z(d_i)$  - действительные значения сечения  $v_i$  и линии  $d_i$ . Для начала мы предположим, что линии сечений проанализированы точно, поэтому мы точно знаем  $Z(d_i)$ . Чтобы оценить  $Z(V)$ , мы должны взвесить каждое  $Z(d_i)$  по его сечению  $v_i$ . Так как расстояние между профилями постоянно, то  $v_1/d_1 = v_2/d_2$  и мы имеем

$$Z^*(V) = \frac{\sum_i v_i Z(d_i)}{\sum_i v_i} = \frac{\sum_i d_i Z(d_i)}{\sum_i d_i} \quad [10.11]$$



**Рис 10.4.** Два профиля (разделения) длины  $d_1$  и  $d_2$

Аналогично действительное, но неизвестное значение  $Z(V)$  –

$$Z(V) = \frac{\sum_i v_i Z(v_i)}{\sum_i v_i} = \frac{\sum_i d_i Z(v_i)}{\sum_i d_i}$$

[10.12]

Поэтому ошибка оценивания – взвешенное среднее элементарных ошибок оценивания, что значит -  $Z(d_i) - Z(v_i)$ :

$$Z^*(V) - Z(V) = \frac{\sum_i d_i [Z(d_i) - Z(v_i)]}{\sum_i d_i}$$

[10.13]

По принципу аппроксимации дисперсия оценивания –

$$\sigma_E^2 = \text{Var}[Z^*(V) - Z(V)] = \frac{\sum_i d_i^2 \sigma_{Ei}^2}{\left(\sum_i d_i\right)^2}$$

[10.14]

где  $\sigma_{Ei}^2$  – элементарная дисперсия распространения центральной линии сечения на ее область влияния. Обратите внимание на то, что они взвешены с помощью квадратов длин  $d_i$ .

Более правдоподобно сечения линий вычисляются расчетом среднего содержания проб вдоль линии сечения. Так как пробы расположены на одинаковом расстоянии, то для оценивания  $Z^*(d_i)$  используется среднее  $n_i$  проб:

$$Z^*(d_i) = \sum_k Z(s_k) / n_i \quad [10.15]$$

Общая ошибка оценивания  $Z^*(V) - Z(V)$  может быть разделена на два слагаемых.

$$\frac{\sum_i d_i [Z(d_i) - Z(v_i)]}{\sum_i d_i} + \frac{\sum_i d_i [Z^*(d_i) - Z(d_i)]}{\sum_i d_i} \quad [10.16]$$

Левое слагаемое соответствует распространению линии сечения на окружающее пространство, в то время как правое слагаемое соответствует распространению проб на линию сечения. Если мы положим, что  $Z(s_{ik})$  и  $Z^*(s_{ik})$  являются действительными и оцененными содержаниями  $k$ -ой пробы в  $i$ -ой секции, то второе слагаемое можно переписать, как

$$\frac{\sum_i d_i / n_i \sum_k [Z^*(s_{ik}) - Z(s_{ik})]}{\sum_i d_i} \quad [10.17]$$

Как обычно, сумму ковариаций полагаем равной нулю, поэтому мы можем просуммировать дисперсии. В итоге получаем:

$$\sigma_E^2 = \frac{\sum_i d_i^2 \sigma_{Ei}^2}{\left(\sum_i d_i\right)^2} + \frac{\sum_i d_i^2 \sigma^2(O, s) / n_i}{\left(\sum_i d_i\right)^2} \quad [10.18]$$

Если  $N$  обозначает общее количество проб ( $N = \sum n_i$ ) то

$$\sigma_E^2 = \frac{\sum_i d_i^2 \sigma_{Ei}^2}{\left(\sum_i d_i\right)^2} + \frac{\sigma^2(O, s)}{N} \quad [10.19]$$

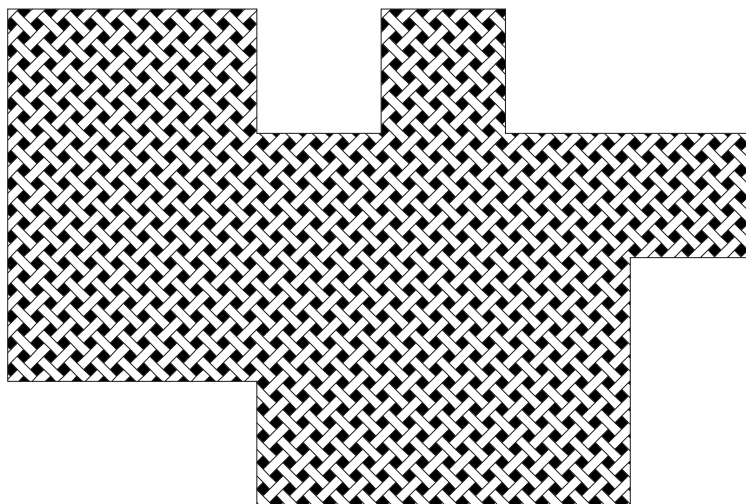
Поэтому общая дисперсия оценивания является композицией сечения, которая отвечает за распространение линии сечения на ее область, и композицией линии,

$$\frac{\sigma^2(O, s)}{N} \quad [10.20]$$

которая отвечает за ошибки, сделанные, когда пробы распространялись до линии сечения. Теперь мы опишем, как вычислять дисперсию оценивания, когда зона минерализации в целом не известна.

### **Когда границы рудного тела не известны**

В некоторых случаях границы рудного тела заранее не известны. Поэтому они должны быть определены из доступной информации, например - данных опробования скважин. Эта неопределенность знаний о геометрии рудного тела приводит ко второму источнику ошибки, называемой геометрической ошибкой, которая должна быть добавлена к ошибке, описанной ранее.



**Рис 10.5.** Расположение минерализованных и породных блоков на участке. Скважины расположены в центрах соответствующих блоков.

На Рис. 10.5 изображен регион, содержащий 48 скважин. Семнадцать из них попадают в рудное тело (соответствующие блоки заштрихованы), остальные нет. Простейший путь определить размеры рудного тела – это объединить все квадраты сетки с положительными результатами.

Матерон (1971 а и б) получил формулу для отношения геометрической ошибки к квадрату минерализованной области А:

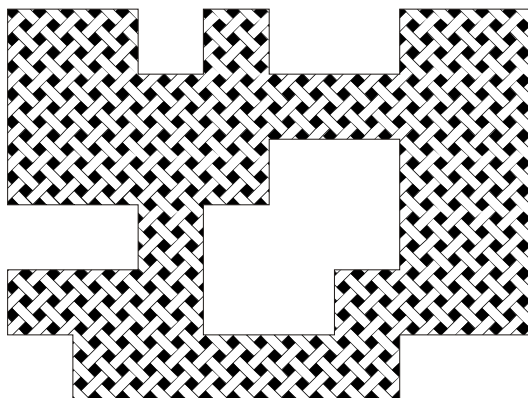
$$\frac{\sigma_A^2}{A^2} = \frac{1}{N^2} \left[ \frac{N_2}{6} + 0.061 \frac{(N_1)^2}{N_2} \right] \quad [10.21]$$

где N – количество положительных (минерализованных) проб (здесь 17). Параметры  $N_1$  и  $N_2$  находятся подсчетом количества сторон квадратов сетки по вертикали и горизонтали. Чтобы быть более точным,  $N_1$  и  $N_2$  вычислены делением общего количества квадратов сетки в каждом направлении на 2. Обратите внимание, что  $N_1$  должно быть больше или равно  $N_2$ . В примере – 12 горизонтальных сторон и 10 вертикальных сторон. Поэтому при  $N_1=6$  и  $N_2=5$ , получаем

$$\frac{\sigma_A^2}{A^2} = \frac{1}{17^2} \left[ \frac{5}{6} + 0.06 \frac{(6)^2}{5} \right] \quad [10.22]$$

Результат равен  $(6.6\%)^2$ , что не является очень большим.

Обратите внимание, что при вычислении  $N_1$  и  $N_2$  все выступы и впадины на границах зоны должны быть подсчитаны, включая периметр внутренних скважин (блоков). Это проиллюстрировано на Рис. 10.6. В итоге геометрическая ошибка должна быть введена в дисперсию оценивания. При выполнении этого требуется некоторая осторожность. Для большей информации смотрите примеры, приведенные Journel и Huijbregts (1978) на стр. 428-438. Похожая формула существует и для трехмерного случая.



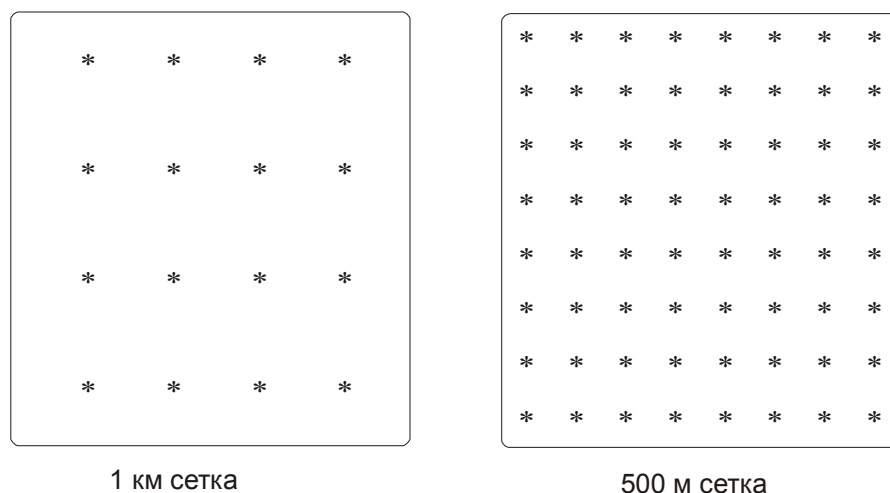
**Рис 10.6.** Расположение минерализованных и породных блоков (скважин)

На Рис. 10.6 изображена конфигурация с пустой зоной в центре рудного тела. Это обстоятельство затрудняет вычисление  $N_1$  и  $N_2$ . Сначала рассмотрим вертикальное направление, общее количество сторон квадратов сетки по внешней границе 16, а внутри 6 сторон квадратов, что дает в итоге 22. Аналогично - в горизонтальном направлении, общий периметр равен 26 (20+6). Это означает, что  $N_1$  равно 13 и  $N_2$  равно 11. Остальные вычисления производятся так же как и раньше.

### **Оптимальная сеть опробования**

Раз мы знаем, как вычислить дисперсию оценивания, мы можем найти оптимальную сеть бурения для оценивания той или иной переменной. Здесь термин "оптимальная" означает сетку, которая дает требуемую дисперсию оценивания при наименьшем количестве скважин (проб), и поэтому имеет наименьшую стоимость. Для изотропного месторождения должна использоваться регулярная квадратная сетка. Когда присутствует анизотропия, отношения расстояний между пробами вдоль основных осей должно быть пропорционально отношению анизотропии.

Предположим, что мы хотим оценить среднюю мощность пласта и среднее содержание (здесь мы имеем в виду содержание серы в угле) на участке 4км на 4км. Для упрощения мы принимаем, что пласт простирается по всему участку и является изотропным. На участке возможно пробурить 16 скважин по 1км сетке или 64 скважины по сети 500 м, как показано на Рис. 10.7.



**Рис 10.7.** Две возможных сетки бурения

Предположим, что вариограмма мощности сферическая с зоной 1500м и порогом 1.0 , а вариограмма содержания серы также сферическая с зоной 200м и порогом 0.4.

*Для 1км сетки*

Дисперсию распространения можно найти, используя таблицы или небольшую компьютерную программу. В данном случае рассчитанные значения будут следующими:

$$\sigma_E^2(0|v) = 0.27 \quad \text{для мощности и} \\ = 0.38 \quad \text{для содержания серы}$$

Поэтому дисперсия оценивания:

$$\sigma_E^2 = 0.27/16 = 0.0169 \quad \text{для мощности и} \\ = 0.38/16 = 0.0238 \quad \text{для содержания серы}$$

*Для 500м сетки*

Эти вычисления были повторены для 500м сетки:

$$\sigma_E^2 = 0.0020 \quad \text{для мощности и} \\ = 0.0055 \quad \text{для содержания серы}$$

Чтобы сравнение между дисперсиями оценивания для двух переменных имело смысл, были вычислены коэффициенты вариации (т.е. СКО, разделенное на среднее, выраженное в процентах). Часто бывает полезным вычерчивание коэффициента вариации на одном графике (с билогарифмической шкалой) с количеством скважин.

Чтобы получить грубую оценку точности, можно взять интервал, равный среднему  $\pm$  удвоенное СКО, что соответствует 95% доверительному интервалу. Для 1000м сетки значения мощности имеют точность  $\pm 6.6\%$ , тогда как содержания серы – только  $\pm 61.2\%$ . Эти цифры отражают зоны влияния двух моделей вариограмм (1500м в сравнении с 300м). В результате, если даже эта сетка опробования оптимальна для мощности, то она не будет достаточно точной для содержания серы.

**Табл. 10.6.** Относительная точность для содержания серы и мощности пласта для двух возможных сеток бурения

	Сетка 1000 м	Сетка 500 м
Мощность	0,033	0,011
Содержание серы	0,309	0,148

Оптимальный эталон бурения зависит также от размера и (для маленьких размеров) от формы оцениваемого региона. Доминантным фактором, определяющим дисперсию оценивания, является общее количество скважин (проб), а не расстояние между ними. Поэтому, хотя 1000м сетка может быть оптимальной для одной переменной и определенной области, но она не будет достаточно плотной для района меньшего размера и будет излишне дорогой для большей области.

Когда границы рудного тела в начале разведки неизвестны, то лучше на этом этапе бурить скважины по достаточно широкой сетке и, затем, когда границы станут известными, заполнять их. В этом случае нельзя вначале определять дисперсию оценивания и оптимальное расположение, так как геометрическая ошибка зависит от размера и формы зоны минерализации.

### **Упражнения**

**Упр 10.1.** Пятьдесят вертикальных скважин пробурено по регулярной сетке 200м на 200м с целью оценивания общих запасов угольного пласта в минерализованной зоне размерами 1000м на 2000м. Вариограмма для мощности пласта сферическая с зоной 500м и порогом 3.25. Какой принцип аппроксимации нужно использовать для вычисления общей дисперсии оценивания? Вычислите ее значение.

Вариограмма для содержания золы состоит из сферической структуры с зоной 250м и порогом 4.65 и эффектом самородка 1.35. Вычислите общую дисперсию оценивания для содержания золы.

Так как пробурено только 50 скважин, то, возможно, использовать кригинг. Вы можете пересчитать дисперсию оценивания для этого способа и сравнить со значениями, полученными принципами аппроксимации.

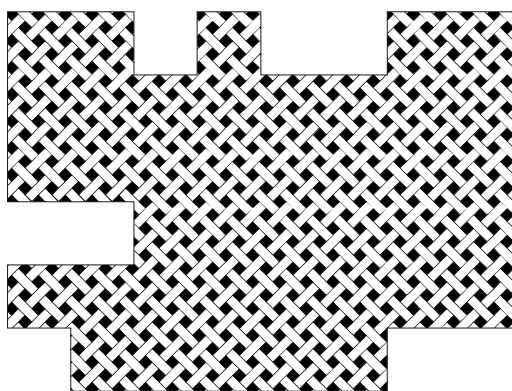
**Упр 10.2.** Восемьдесят скважин пробурено по регулярной сетке 200м на 200м для оценивания общих запасов месторождения рассыпного золота в минерализованной зоне с размерами 1600м на 2000м. Вариограмма для содержания золота – анизотропная сферическая модель с порогом 5. Анизотропия геометрическая с наибольшей зоной 500м в СЮ направлении и с наименьшей зоной 100м в ВЗ направлении. Какой принцип аппроксимации нужно использовать для вычисления общей дисперсии оценивания? Вычислите ее значение.

**Упр 10.3.** При сейсмической разведке квадратной области 4км на 4км интересующая нас переменная измерялась каждые 10м вдоль 4 профилей. Вычислите общую дисперсию оценивания, зная, что вариограмма является

экспоненциальной моделью с зоной 500м и порогом 10.1 и эффектом самородка 3.9.

**Упр 10.4.** Горная компания проводит разведку для определения границ минерализации россыпного месторождения. Было пройдено 80 шурфов по регулярной сетке 50м на 50м (Рис. 10.8). Заштрихованная область обозначает блоки (шурфы) минерализованной зоны. Геологи в процессе разведки хотят вычислить дисперсию геометрической ошибки. Найдите значения  $N$ ,  $N_1$  и  $N_2$ , и затем вычислите дисперсию.

Обратите внимание, что этот рисунок почти такой же, как и Рисунок 10.6, за исключением отсутствия центральной пустой зоны. Сравните величину, вычисленную здесь для геометрической дисперсии, с величиной, вычисленной ранее.



**Рис 10.8.** Расположение разведочных шурфов (блоков минерализованной зоны).



## Приложение 1: Обзор основных математических концепций

### ***A1 Какие математические знания требуются в линейной геостатистике?***

Для грамотного и осмысленного применения линейной геостатистики необходимо уметь делать четыре основные математические операции:

уметь вычислять среднее и дисперсию случайных величин (и позже - пространственных переменных),

уметь использовать элементы теории множеств, т.е. записывать операции одинарного и двойного суммирования, а не длинные списки переменных,

уметь дифференцировать для нахождения минимума функции, и

быть знакомым с матричной записью для записи систем линейных уравнений.

Так как третья и четвертая темы привычны для математики, то читатель не будет иметь проблемы с поиском соответствующей литературы. Поэтому мы сделаем обзор только первых двух тем.

#### *A 1.1 Среднее и дисперсия*

В геостатистике мы используем линейные комбинации (т.е. взвешенное движущееся среднее) данных для оценивания величин переменных в точках или средних значений блоков. Например, типичная линейная комбинация –

$$Z_0^* = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \dots + \lambda_{10} Z_{10}$$

Кригинг оптимизирует выбор весов минимизации дисперсии оценивания. Поэтому нам нужно уметь выражать дисперсию через функцию от весов,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$ , и позже - через модели вариограмм. Для начала необходимо знать среднее и дисперсию линейной комбинации:

$$\begin{aligned} E[Z_0^*] &= \lambda_1 E[Z_1] + \lambda_2 E[Z_2] + \dots + \lambda_{10} E[Z_{10}] \\ \text{Var}[Z_0^*] &= \lambda_1^2 \text{Var}[Z_1] + \lambda_2^2 \text{Var}[Z_2] + \dots + \lambda_{10}^2 \text{Var}[Z_{10}] + \\ &+ 2\lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}[Z_1, Z_2] + \dots + 2\lambda_9 \lambda_{10} \text{Cov}[Z_9, Z_{10}] \end{aligned}$$

Этот результат хорошо известен в математике. Доказательство можно найти в литературе по статистике. Отсюда мы можем перейти к вычислению среднего и дисперсии ошибки оценивания. Если нашей целью является использование приведенной выше линейной комбинации для оценивания значения переменной в точке  $x_0$ , то ошибка оценивания :

$$Z_0^* - Z_0 = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \dots + \lambda_{10} Z_{10} - Z_0$$

Это выражение - предыдущая линейная комбинация с дополнительным слагаемым (с весом равным -1). Поэтому ее среднее и дисперсия:

$$\begin{aligned} E[Z_0^* - Z_0] &= \lambda_1 E[Z_1] + \lambda_2 E[Z_2] + \dots + \lambda_{10} E[Z_{10}] - E[Z_0] \\ \text{Var}[Z_0^*] &= \lambda_1^2 \text{Var}[Z_1] + \lambda_2^2 \text{Var}[Z_2] + \dots + \lambda_{10}^2 \text{Var}[Z_{10}] + 1^2 \text{Var}[Z_0] \\ &+ 2\lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}[Z_1, Z_2] + \dots + 2\lambda_9 \lambda_{10} \text{Cov}[Z_9, Z_{10}] - \\ &- 2\lambda_0 \lambda_1 \text{Cov}[Z_0, Z_1] - \dots - 2\lambda_0 \lambda_{10} \text{Cov}[Z_0, Z_{10}] \end{aligned}$$

В Главах 2 и 3 показано, как оценивать эти дисперсии для пространственных переменных (но не сами случайные переменные), используя вариограммы или пространственные ковариации для учета их расположения в пространстве. Далее в Главе 7 показано, как минимизировать их дисперсии.

### А 1.2 Одинарное и двойное суммирование

Уравнения для вычисления математического ожидания (среднего) и дисперсии длинные и громоздкие. Будет разумнее использовать короткую запись без выписывания всех слагаемых. Операция суммирования предназначена как раз для этого. Для обозначения этой операции используется греческая буква  $\Sigma$  (произносится сигма). Используя это обозначение, можно записать формулу математического ожидания, как одинарное суммирование:

$$E[Z_0^*] = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i E[Z_i] = \lambda_1 E[Z_1] + \lambda_2 E[Z_2] + \dots + \lambda_{10} E[Z_{10}]$$

Аналогично можно записать выражение для дисперсии

$$\sum_{i=1}^{10} \lambda_i^2 \text{Var}[Z_i] = \lambda_1^2 \text{Var}[Z_1] + \lambda_2^2 \text{Var}[Z_2] + \dots + \lambda_{10}^2 \text{Var}[Z_{10}]$$

В заключении нам необходима формула дисперсии в терминах ковариаций. Так как каждое слагаемое содержит два индекса, то требуется двойное суммирование по двум переменным:

$$2 \sum_{i=1}^9 \sum_{j>i}^{10} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) = 2(\lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}[Z_1, Z_2] + \dots + \lambda_9 \lambda_{10} \text{Cov}[Z_9, Z_{10}])$$

С двойным суммированием требуется больше осторожности. Несколько упражнений на одинарное и двойное суммирование позволят вам свободнее использовать их.

### А 1.3 Упражнения на использование суммирования

Упр 1. Раскройте приведенные ниже формулы суммирования:

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i Z_i, \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \text{Var}[Z_i], 1/N \sum_{i=1}^N Z_i, \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \right]^2, \sum_{n=1}^4 \phi^n H_n(y)$$

Упр 2. Раскройте следующие формулы двойного суммирования:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}, \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \right] \left[ \sum_{j=1}^N \lambda_j \right], \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j$$

Упр 3. Покажите, что:

$$\left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i \right]^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N \lambda_i \lambda_j$$

Упр 4. Покажите, что:

$$\text{Var} \left[ \sum_{i=1}^N \lambda_i Z_i \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j]$$

## Приложение 2: Заключительные советы

### *А 2.1 Строгий контроль за оценением руды*

За последние несколько лет рухнуло много горных проектов, а инвесторы и акционеры потеряли свои деньги. Поэтому были ужесточены требования со стороны фондовых бирж, а в некоторых странах - корпоративные законы. Одной из частых причин провала проекта является неаккуратное оценивание запасов и (обычно) слишком оптимистичная их оценка. В некоторых случаях те, кто потерял свои деньги, судятся с горными компаниями, чтобы получить обратно свои деньги. В этой ситуации к ответственности может быть привлечен эксперт, который делал оценивание запасов руды. Как можно увидеть из статьи Williamson-Noble и Lawtence (1994), в Австралии ошибки или неправильное представление экспертом сведений о запасах руды в публичных отчетах позволяют подвергнуть его наказанию: штрафу до 20,000\$ и 5 лет тюрьмы. Поэтому единственной защитой эксперта в этой ситуации остается очень аккуратное и точное выполнение работы.

### *А 2.2 Демонстрация качества работы*

При выполнении геостатистического исследования эксперты должны уметь показать, что они аккуратно проверяют входные данные, а также надлежащим образом полностью используют имеющуюся информацию (различные геологические интерпретации и т.п.) в соответствии с принципами контроля качества. Но что это означает для геостатистиков?

Перед изложением некоторых рекомендаций мы хотим напомнить каждому, что когда проваливаются горные проекты, контроль за деятельностью компании переходит от директоров до официально назначенных судебных исполнителей, которые являются наблюдателями за процессом расследования причин катастрофы. Неспособность обеспечить их понятной информацией о всех деталях выполненной оценки запасов месторождения может привести к мнению, что эксперт сделал свою работу некачественно. Вот почему мы настаиваем, чтобы студенты в Центре Геостатистики (Фонтенбло) постоянно вели записи в рабочих журналах при выполнении практических работ.

### *А 2.3 Рабочие журналы*

(1) Рабочие журналы должны представлять собой тетрадь с ограниченным количеством жестко сброшюрованных страниц. Желательно их пронумеровать и делать записи в них черными чернилами.

(2) Никогда не вырывайте страницы из Вашего журнала. Если Вы сделали ошибку, перечеркните раздел красным карандашом, впишите дату и причину исправления.

(3) Каждый день в начале работы впишите в журнал дату, включая год. Затем опишите каждую операцию, которую Вы выполнили. Например, при расчете экспериментальных вариограмм запишите точную характеристику используемых данных и все используемые параметры процесса расчета вариограммы. Теперь Вы сможете в точности повторить

этот расчет в любое время, даже спустя 5 лет. Обычно горные компании не требуют от Центра дубликатов баз данных, рабочих записей или отчетов, которые они сами потеряли. До настоящего времени мы следуем этим традициям.

(4)В конце исследования у Вас скапливается много информации о месторождении (планы размещения скважин, геологические разрезы, пояснительные записки и т.д. и т.п.). Скрупулезно опишите в Вашем журнале и в начале Отчета, какую информацию вы подготовили (число листов карт, даты и т.д). Геологические представления о месторождении со временем изменяются, поэтому у Вас должны быть ссылки, к какому времени относится приведенное Вами описание.

(5)Иногда в процессе работы вносятся изменения или дополнения в состав базы данных. Отметьте это в Вашем журнале и пошлите клиенту факс с подтверждением проделанной Вами работы с новыми данными. Телефонные сообщения легко забыть или потерять. Требуйте подтверждения в письменном виде. Вклейте копию факса в Ваш журнал. Оригинал (или копия) должен быть сохранен в исходящих документах.

(6)В ходе работы у Вас будет скапливаться много отпечатанных материалов, некоторые неиспользуемые, другие очень важные. Часть из них (например – результаты статобработки данных) должна быть вклеена в журнал, т.к. это поможет Вам в будущем, когда эти данные уже будут использованы. Другие важные материалы должны быть бережно сохранены (с указанием дат и заметками на углах) в папке. Убедитесь, что они имеют хороший вид, т.к. Вам может потребоваться их копия в окончательный отчет.

Здесь приведены только некоторые рекомендации по ведению рабочего журнала. Если Вы сможете дополнить их, я буду рада услышать об этом.