

Оценка вариограммы гауссовского случайного процесса

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство.

Случайным процессом $x(t) = x(\omega, t)$ называется семейство случайных величин, заданных на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\omega \in \Omega, t \in T, T$ — некоторое параметрическое множество.

Математическим ожиданием случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида

$$m(t) = Ex(t) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x; t), t \in T.$$

Дисперсией случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида:

$$V(t) = V(x(t)) = E(x(t) - m(t))^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - m(t))^2 dF(x; t).$$

Корреляционной функцией случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида:

$$r(t_1, t_2) = E(x(t_1)x(t_2)) = \iint_{\mathbb{R}^2} x(t_1)x(t_2) dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2)$$

Ковариационной функцией случайного процесса $x(t), t \in T$ называется функция вида:

$$R(t_1, t_2) = E\{(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2)$$

Случайный процесс $X(s), s \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, называется внутренне стационарным, если справедливы следующие равенства:

$$E\{X(s_1) - X(s_2)\} = 0, \quad V\{X(s_1) - X(s_2)\} = 2\gamma(s_1 - s_2),$$

где $2\gamma(s_1 - s_2)$ — вариограмма рассматриваемого процесса, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $X(s), s \in \mathbb{Z}$ — внутренне стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и неизвестной вариограммой.

$$2\gamma(h) = V\{X(s+h) - X(s)\}, \quad s, h \in \mathbb{Z}.$$

В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику вида:

$$2\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (X(s+h) - X(s))^2, \quad h = \overline{0, n-1}. \quad (1)$$

Вычислим математическое ожидание введённой оценки

$$\begin{aligned} E\{2\tilde{\gamma}(h)\} &= \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} E(X(s+h) - X(s))^2 = \\ &= [\text{так как процесс является внутренне стационарным}] = \\ &= \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} 2\gamma(h) = 2\gamma(h). \end{aligned}$$

Таким образом оценка является несмещённой.

Далее, найдём второй момент:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) &= E((2\tilde{\gamma}(h_1) - E(2\tilde{\gamma}(h_1)))(2\tilde{\gamma}(h_2) - E(2\tilde{\gamma}(h_2)))) = \\
&= E\left(\frac{1}{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_1} ((x(s+h_1) - x(s))^2 - E((x(s+h_1) - x(s))^2)) \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{1}{n-h_2} \sum_{t=1}^{n-h_2} ((x(t+h_2) - x(t))^2 - E((x(t+h_2) - x(t))^2))\right) = \\
&= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \text{cov}((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) = \\
&= [\text{по определению } \text{cov}(a, b) = \text{corr}(a, b)\sqrt{V(a)V(b)}] = \\
&= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \text{corr}((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) \times \\
&\quad \times \sqrt{(V((x(s+h_1) - x(s))^2)V((x(t+h_2) - x(t))^2))} = \\
&= [\text{используем равенство (а) со страницы 2, TODO: добавить ссылку на источник}] = \\
&= \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \text{corr}((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) = \\
&= [\text{по лемме 1 [\#Брест2005]}] = \\
&= \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \{\text{corr}((x(s+h_1) - x(s)), (x(t+h_2) - x(t)))\}^2 = \\
&= \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{\text{cov}((x(s+h_1) - x(s)), (x(t+h_2) - x(t)))}{\sqrt{(V((x(s+h_1) - x(s)))V((x(t+h_2) - x(t)))}} \right\}^2 = \\
&= [\text{по лемме 3 [\#Брест2005]}] = \\
&= \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{\gamma(s+h_1-t) + \gamma(s-t-h_2) - \gamma(s+h_1-t-h_2) - \gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}} \right\}^2
\end{aligned}$$

Таким образом получены соотношения математического ожидания и ковариации для статистики (1) $2\tilde{\gamma}(h)$:

$$E\{2\tilde{\gamma}(h)\} = 2\gamma(h), \quad (2)$$

$$\text{cov}(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{\gamma(s+h_1-t) + \gamma(s-t-h_2) - \gamma(s+h_1-t-h_2) - \gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}} \right\}^2. \quad (3)$$

Тогда, из (3) нетрудно получить соотношение для дисперсии оценки вариограммы $2\tilde{\gamma}(h)$, если положить $h_1 = h_2 = h$:

$$\begin{aligned}
V\{2\tilde{\gamma}(h)\} &= \frac{2(2\gamma(h))^2}{(n-h)^2} \sum_{s=1}^{n-h} \sum_{t=1}^{n-h} \left\{ \frac{\gamma(s+h-t) + \gamma(s-t-h) - \gamma(s+h-t-h) - \gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h)}\sqrt{2\gamma(h)}} \right\}^2 = \\
&= \frac{2}{(n-h)^2} \sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s+h-t) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t)\}^2.
\end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для оценки $2\tilde{\gamma}(h)$, представленной равенством (1), имеют место следующие соотношения:

$$E\{2\tilde{\gamma}(h)\} = 2\gamma(h),$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) &= \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{\gamma(s+h_1-t) + \gamma(s-t-h_2) - \gamma(s+h_1-t-h_2) - \gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}} \right\}^2, \\
V\{2\tilde{\gamma}(h)\} &= \frac{2}{(n-h)^2} \sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s+h-t) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t)\}^2,
\end{aligned}$$

где $\gamma(h), h \in \mathbb{R}$, — семивариограмма процесса $X(s), s \in \mathbb{R}$, $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.