

Оценка вариограммы гауссовского случайного процесса

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство.

Случайным процессом $x(t) = x(\omega, t)$ называется семейство случайных величин, заданных на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}, \mathbb{T}$ — некоторое параметрическое множество.

Функцией распределения случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$, называется функция вида

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{x(t_1) < x_1, \dots, x(t_n) < x_n\},$$

где $x_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{T}, j = \overline{1, n}$.

Математическим ожиданием случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида

$$m(t) = Ex(t) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x; t), t \in \mathbb{T}.$$

Дисперсией случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$V(t) = V(x(t)) = E(x(t) - m(t))^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - m(t))^2 dF(x; t).$$

Корреляционной функцией случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$r(t_1, t_2) = E(x(t_1)x(t_2)) = \iint_{\mathbb{R}^2} x(t_1)x(t_2) dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2)$$

Ковариационной функцией случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$R(t_1, t_2) = E\{(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2)$$

Случайный процесс $X(s), s \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, называется внутренне стационарным, если справедливы следующие равенства:

$$E\{X(s_1) - X(s_2)\} = 0, \quad V\{X(s_1) - X(s_2)\} = 2\gamma(s_1 - s_2),$$

где $2\gamma(s_1 - s_2)$ — вариограмма рассматриваемого процесса, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $X(s), s \in \mathbb{Z}$ — внутренне стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и неизвестной вариограммой.

$$2\gamma(h) = V\{X(s+h) - X(s)\}, \quad s, h \in \mathbb{Z}.$$

В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику вида:

$$2\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (X(s+h) - X(s))^2, \quad h = \overline{0, n-1}. \quad (1)$$

Вычислим математическое ожидание введённой оценки

$$\begin{aligned} E\{2\tilde{\gamma}(h)\} &= \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} E(X(s+h) - X(s))^2 = \\ &= [\text{так как процесс является внутренне стационарным}] = \\ &= \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} 2\gamma(h) = 2\gamma(h). \end{aligned}$$

Таким образом оценка является несмещённой.

Далее, найдём ковариацию:

$$\begin{aligned} cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) &= E((2\tilde{\gamma}(h_1) - E(2\tilde{\gamma}(h_1)))(2\tilde{\gamma}(h_2) - E(2\tilde{\gamma}(h_2)))) = \\ &= E\left(\frac{1}{n-h_1} \sum_{s=1}^{n-h_1} ((x(s+h_1) - x(s))^2 - E((x(s+h_1) - x(s))^2)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{n-h_2} \sum_{t=1}^{n-h_2} ((x(t+h_2) - x(t))^2 - E((x(t+h_2) - x(t))^2))\right) = \\ &= \frac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} cov((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) \end{aligned}$$

По определению, $cov(a, b) = corr(a, b)\sqrt{V(a)V(b)}$, тогда

$$cov((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) = corr((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) \times \sqrt{V((x(s+h_1) - x(s))^2)V((x(t+h_2) - x(t))^2)}$$

Из [ссылка на источник, либо упоминание раньше] $V\{X(s+h) - X(s)\}^2 = 2\{2\gamma(h)\}^2$ и предыдущего соотношения:

$$cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} corr((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2)$$

Далее воспользуемся леммой 1 [Брест2005]:

$$\begin{aligned} & \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} corr((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) = \\ & = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \{corr((x(s+h_1) - x(s)), (x(t+h_2) - x(t)))\}^2 = \\ & = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{cov((x(s+h_1) - x(s)), (x(t+h_2) - x(t)))}{\sqrt{V((x(s+h_1) - x(s)))V((x(t+h_2) - x(t)))}} \right\}^2 \end{aligned}$$

Принимая во внимание лемму 3 [Брест2005], получаем соотношение

$$\begin{aligned} & cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = \\ & = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \left\{ \frac{\gamma(s+h_1-t) + \gamma(s-t-h_2) - \gamma(s+h_1-t-h_2) - \gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}} \right\}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) сделаем следующую замену переменных

$$s = s, \quad m = s - t.$$

Получим

$$\begin{aligned} cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) & = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{s-m=1}^{n-h_2} (\frac{\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}})^2 = \\ & = \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{s-m=1}^{n-h_2} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, в зависимости от h_1 и h_2 , возможны два случая: $h_1 > h_2$ и $h_2 > h_1$.



Здесь должна быть картинка с двумя графиками для каждого случая.

Рассмотрим первый $h_1 > h_2$. Поменяем порядок суммирования в (3).

$$\begin{aligned} cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) & = \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{s-m=1}^{n-h_2} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 = \\ & = \sum_{m=1-n+h_2}^{h_2-h_1} \sum_{s=1}^{m+n-h_2} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 + \\ & + \sum_{m=h_2-h_1+1}^0 \sum_{s=1}^{n-h_1} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 + \\ & + \sum_{m=1}^{n-h_1-1} \sum_{s=m+1}^{n-h_1} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 \end{aligned}$$

Заметим, что выражение под знаком суммы не зависит от s , получим:

$$\begin{aligned} cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) & = \frac{2}{(n-h_1)(n-h_2)} \times \\ & \times ((m+n-h_1) \sum_{m=1-n+h_2}^{h_2-h_1} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 + \\ & + (n-h_1) \sum_{m=h_2-h_1+1}^0 (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 + \\ & + (n-h_1-m) \sum_{m=1}^{n-h_1-1} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2) \end{aligned}$$

Разделим каждое слагаемое на общий член $n - h_1$:

$$\begin{aligned} cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) &= \frac{2}{(n-h_2)} \left(\left(1 + \frac{m}{n-h_1}\right) \sum_{m=1-n+h_2}^{h_2-h_1} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=h_2-h_1+1}^0 (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{m}{n-h_1}\right) \sum_{m=1}^{n-h_1-1} (\gamma(m+h_1) + \gamma(m-h_2) - \gamma(m+h_1-h_2) - \gamma(m))^2 \right) \end{aligned}$$