Введение

Эволюция озерных экосистем и трансформация их биологических компонентов определяется совокупностью различных факторов, к основным из которых следует отнести климатические условия, а также структуру водосборной территории и антропогенное влияние на нее. В связи с увеличением сферы воздействия человека на окружающую среду, в том числе и на климатические процессы, увеличивается влияние на экосистемы озер, для которых одним из ключевых параметров является температурный режим. Температура воды принадлежит к числу наиболее важных и фундаментальных характеристик любого водоёма. Её изменение во времени является одним из главных факторов, отражающих изменения в окружающей среде. Данная характеристика оказывает сильное влияние на плотность воды, растворимость в ней газов, минеральных и органических веществ, в том числе кислорода. Растворимость кислорода и насыщенность воды этим газом — одни из важнейших характеристик для условий обитания в воде живых организмов. В то же время, любой водоём как экосистема является средой обитания различных организмов. И поэтому отслеживание всех изменений и влияние этих изменений на их жизнь является крайне важным не только в экологическом смысле, но и в биологическом. Как следствие вышесказанного, изменение температуры с течением времени следует считать одним из важнейших индикаторов изменений, происходящих в экосистеме озера. А исследование данного показателя, в свою очередь, является важнейшим в исследовании различных проблем, возникающих в экосистемах водоёмов.

В современных условиях выбор этой направленности соответствует необходимости в проведении анализа наблюдений, полученных в течение длительного времени, с математической и, в частности, статистической точки зрения. Часто наличие даже большого количества информации, собранной в процессе каких-либо наблюдений, не всегда позволяет раскрыть те или иные причины и следствия, имеющие место в конкретном случае. Для выявления всех скрытых закономерностей и свойств объекта, за которым проводилось наблюдение, необходимо выполнить всесторонний анализ полученной информации. В свою очередь, математический аппарат и его конкретные прикладные части могут позволить не только проанализировать сложившуюся ситуацию, но и постараться дать некоторый прогноз по состоянию объекта в будущем.

В качестве материала для исследования в данной работе используется база данных с реальными наблюдениями, зафиксированными на озёрах, входящих в Нарочанский национальный парк, за период с 1955 по 2012 годы, полученная от учебно-научного центра «Нарочанская биологическая станция им. Г.Г.Винберга». В представленной базе присутствуют данные, полученные в ходе наблюдений за озёрами Баторино, Нарочь и Мястро. Из них для исследования было выбрано озеро Баторино. Данное озеро является уникальным природным объектом, изучение которого позволит решать экологические проблемы не только в региональном, но и глобальном масштабе. Оно располагается у самой границы города Мядель и, вместе с вышеназванными Нарочью и Мястро, а также озерами Белое и Бледное, входит в состав Нарочанской озёрной группы. Основным инструментом анализа данных в работе является пакет **R**.

В подтверждение актуальности исследования данной темы можно привести научные работы [1–6], имеющие аналогичное направление.

Среди представленных следует отметить работу [1], где проанализированы данные о температурном режиме трех Нарочанских озер и температуре воздуха в Нарочанском регионе за последние пятьдесят лет и показано наличие слабых тенденций к многолетнему увеличению температуры. При этом сделан вывод, что данное явление с большой долей вероятности вызвано факторами, напрямую не связанными с глобальными климатическими изменениями.

В работе [2] в качестве объекта исследования рассматривается крупнейшее в мире озеро — Байкал, подробно изучается изменение климата в контексте данного озера в период с 1950 по 2012 гг.

В статье [3] исследуется температура воды Великих озёр в Северной Америке, а также влияние, оказываемое изменением температуры на рыб, обитающих в этих озёрах.

В [4] проводится анализ влияния гидрологических, метеорологических и топологических параметров на изменение температуры воды в озере Цибунту (Индонезия) на основе данных с 2008 по 2009 год.

В [5] анализируется временной ряд температуры поверхности воды и потоки тепла водоема Итумбиара (Бразилия) в целях улучшения понимания изменений как следствие находящейся там гидроэлектростанции.

В последней упомянутой статье [6] автор проводит исследование на предмет выявления антропогенного влияния на качество воды в крупнейшем озере в Гондурасе — Йоджоа.

В настоящее время, в условиях глобального потепления и крайне нестабильной климатической ситуации, наблюдения за состоянием озёрных экосистем представляют особую ценность как с научной, так и с практической стороны, поскольку только на основе таких наблюдений возможно выделить последствия антропогенного воздействия на фоне изменения природных факторов. А также получить некоторые заключения по экологической обстановке в определенной области.

Глава 1
Определения и вспомогательные результаты

1.1 Случайный процесс и его основные характеристики

Для введения следующих понятий воспользуемся [7, 8].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, где Ω является произвольным множеством элементарных событий, $\mathcal{F}$ — сигма-алгеброй подмножеств Ω, и P — вероятностной мерой.

Определение 1.1. *Действительным случайным процессом* $X(t) = X(\omega, t)$ называется семейство действительных случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — некоторое параметрическое множество.

При $\omega = \omega_0$, $t \in \mathbb{T}$, $X(\omega_0, t)$ является неслучайной функцией временного аргумента и называется *траекторией случайного процесса.*

При $t = t_0$, $\omega \in \Omega$, $X(\omega, t_0)$ является случайной величиной и называется *отсчетом случайного процесса.*

Определение 1.2. Если $\mathbb{T} = \{1, 2, \dots\}, (-\infty, \infty), [0, \infty), \dots$, то $X(t), t \in \mathbb{T}$ называют *случайным процессом с непрерывным временем.*

Определение 1.3. Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, или $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$, то говорят, что $X(t), t \in \mathbb{T}$, — *случайный процесс с дискретным временем.*

Определение 1.4. *n-мерной функцией распределения случайного процесса* $X(t), t \in \mathbb{T}$, называется функция вида

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\},$$

где $x_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{T}, j = \overline{1, n}$.

Определение 1.5. *Математическим ожиданием* случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$, называется функция вида

$$m(t) = E\{X(t)\} = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_1(x; t), t \in \mathbb{T}.$$

Определение 1.6. *Дисперсией* случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$V(t) = V\{X(t)\} = E\{X(t) - m(t)\}^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - m(t))^2\, dF_1(x; t).$$

Определение 1.7. *Ковариационной функцией* случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$R(t_1, t_2) = cov\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{(X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))\} = \\ = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2))\, dF_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

Определение 1.8. *Корреляционной функцией* случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$, называется функция вида:

$$r(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2\, dF_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

Определение 1.9. *Нормированной ковариационной функцией* называется функция вида

$$corr\{X(t_1), X(t_2)\} = \frac{cov\{X(t_1), X(t_2)\}}{\sqrt{V\{X(t_1)\}V\{X(t_2)\}}},$$

где $X(t), t \in \mathbb{T}$, — случайный процесс.

Определение 1.10. *Вариограммой* случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$, называется функция вида

$$2\gamma(h) = V\{X(t+h) - X(t)\},\ t, h \in \mathbb{T}. \tag{1.1}$$

При этом функция $\gamma(h), h \in \mathbb{T}$, называется *семивариограммой.*

Определение 1.11. Случайный процесс $X(t), t \in \mathbb{T}$, называется *стационарным в узком смысле*, если $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $\forall \tau, t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau \in \mathbb{T}$ выполняется соотношение:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau).$$

Определение 1.12. Случайный процесс $X(t), t \in \mathbb{T}$, называется *стационарным в широком смысле*, если $\exists E\{X^2(t)\} < \infty, t \in \mathbb{T}$, и

1. $m(t) = E\{X(t)\} = m = const, t \in \mathbb{T}$;

2. $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Замечание 1.1. Если случайный процесс $X(t), t \in \mathbb{T}$, является стационарным в узком смысле и $\exists E\{X^2(t)\} < \infty, t \in \mathbb{T}$, то он будет стационарным и в широком смысле, но не наоборот.

1.2 Виды стационарности

Определение 1.13. Случайный процесс $X(t),\ t \in \mathbb{T}$, называется *внутренне стационарным*, если справедливы следующие равенства:

$$E\{X(t_1) - X(t_2)\} = 0, \tag{1.2}$$

$$V\{X(t_1) - X(t_2)\} = 2\gamma(t_1 - t_2), \tag{1.3}$$

где $2\gamma(t_1 - t_2)$ — вариограмма рассматриваемого процесса, $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Теорема 1.1. *Произвольная функция $\gamma(t), t \in \mathbb{T}$, является семивариограммой некоторого внутренне стационарного случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда $\forall a > 0$, функция $e^{-a\gamma(t)}, t \in \mathbb{T}$, является неотрицательно определённой.*

Доказательство. Докажем необходиость. Пусть $\gamma(t), t \in \mathbb{T}$, — семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $X(t), t \in \mathbb{T}$. Нужно показать, что для $\forall a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}, t \in \mathbb{T}$, является неотрицательно определённой.

Заметим, что по свойствам семивариограммы, функция $e^{-a\gamma(t)}$ является непрерывной, чётной и выпуклой книзу функцией, при этом истинны соотношения:

1. $e^{-a\gamma(t)} \geq 0$;
2. $e^{-a\gamma(0)} = 1$;
3. $e^{-a\gamma(t)} \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким образом, функция $e^{-a\gamma(t)}$ в полной мере удовлетворяет условиям теоремы Пойа [9, с. 303] и, следовательно, является характеристической функцией.

Тогда согласно теореме Бохнера-Хинчина [9, с. 303] $\forall a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$ является неотрицательно определённой.

Обратно, пусть $\forall a > 0, e^{-a\gamma(t)}, t \in \mathbb{T}$, — неотрицательно определённая функция. Нужно доказать, что функция $\gamma(t)$ является семивариограммой внутренне стационарного случайного процесса.

Согласно теореме Бохнера-Хинчина [9, с. 303], неотрицательно определённая функция $e^{-a\gamma(t)}$ является характеристической функцией.

Тогда, по теореме Пойа [9, с. 303] $e^{-a\gamma(t)}, \forall a > 0$, является непрерывной, чётной и выпуклой книзу, причем выполняются:

1. $e^{-a\gamma(t)} \geq 0$;
2. $e^{-a\gamma(0)} = 1$;
3. $e^{-a\gamma(t)} \to 0$ при $t \to \infty$.

...

Нужно перейти к семивариограмме.

...

□

Замечание 1.2. Если $X(t), t \in \mathbb{T}$, стационарный в широком смысле случайный процесс с ковариационной функцией $R(t), t \in \mathbb{T}$, и семивариограммой $\gamma(t), t \in \mathbb{T}$, то

$$\gamma(t) = R(0) - R(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Теорема 1.2. *Пусть случайный процесс* $X(t), t \in \mathbb{T}$, *является стационарным в широком смысле, тогда он будет и внутренне стационарным.*

Доказательство. По определению стационарного в широком смысле процесса (1.12)

$$E\{X(t_1)\} = m = const, \quad E\{X(t_2)\} = m = const,$$

тогда, в силу линейности математического ожидания, выполняется свойство внутренне стационарного процесса:

$$E\{X(t_1)\} = E\{X(t_2)\} \implies E\{X(t_1) - X(t_2)\} = 0$$

По определению дисперсии, $D\{\xi\} = cov\{\xi, \xi\}$, тогда

$$\begin{gathered} D\{X(t_1) - X(t_2)\} = cov\{X(t_1) - X(t_2), X(t_1) - X(t_2)\} = \\ = cov\{X(t_1), X(t_1)\} - 2cov\{X(t_1), X(t_2)\} + cov\{X(t_2), X(t_2)\}. \end{gathered}$$

Не нарушая общности считаем, что $t_2 \leq t_1$. Используя свойство 2 стационарного в широком смысле процесса, получаем

$$\begin{gathered} D\{X(t_1) - X(t_2)\} = cov\{X(t_1 - t_2), X(t_1 - t_2)\} - \\ -2cov\{X(t_1 - t_2), X(0)\} + cov\{X(0), X(0)\} = \\ = cov\{X(t_1 - t_2) - X(0), X(t_1 - t_2) - X(0)\} = D\{X(t_1 - t_2) - X(0)\}. \end{gathered}$$

Таким образом получена функция, зависящая только от $t_1 - t_2$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1.3. Обратное утверждение неверно. Пример процесса, который является внутренне стационарным, но не является стационарным в широком смысле — винеровский процесс.

Доказательство. Пусть $X(t), t \in \mathbb{T}$ — винеровский процесс, тогда по определению:

1. $E\{X(t)\} = 0$;
2. $D\{X(t_1) - X(t_2)\} = \sigma^2(t_1 - t_2)$.

Следовательно процесс является внутренне стационарным.

Однако по свойству винеровского процесса, $cov\{X(t_1 + r), X(t_1)\} = \min(t_1 + r, t_1)$. Не нарушая общности, считаем $r > 0$. Тогда $cov\{X(t_1 + r), X(t_1)\} = t_1$ и $cov\{X(t_2 + r), X(t_2)\} = t_2$. Так как в общем случае $t_2 \neq t_1$, то $cov\{X(t_1+r), X(t_1)\} \neq cov\{X(t_2+r), X(t_2)\}$, а значит процесс не является стационарным в широком смысле. $\square$

В дальнейшем в данной работе будем рассматривать случайные процессы с дискретным временем.

Список использованных источников

1. Температурный режим Нарочанских озер на фоне многолетних климатических изменений / Т.В. Жукова, Н.П. Радчикова, Б.В. Адамович и др. // Вестник БГУ. Химия. Биология. География. — 2014. — Т. 2. — С. 26–35.

2. Influence of Long-Distance Climate Teleconnection on Seasonality of Water Temperature in the World's Largest Lake - Lake Baikal, Siberia // PLoS ONE. — 2011. — 02. — Vol. 6, no. 2. — P. e14688.

3. Influence of water temperature on rainbow smelt spawning and earlylife history dynamics in St. Martin Bay, Lake Huron / T.P. O'Brien, W.W. Taylor, A.S. Briggs, E.F. Roseman // Journal of Great Lakes Research. — 2012. — dec. — Vol. 38, no. 4. — P. 776–785.

4. Subehi L., Fakhrudin M. Preliminary study of the changes in water temperature at pond Cibuntu // Journal of Ecology and the Natural Environment. — 2011. — March. — Vol. 3(3). — P. 72–77.

5. Time series analysis of water surface temperature and heat flux components in the Itumbiara Reservoir (GO), Brazil / Enner Herenio de Alcântara, José Luiz Stech, João Antônio Lorenzzetti, Evlyn Márcia Leão de Moraes Novo // Acta Limnologica Brasiliensia. — 2011. — 09. — Vol. 23. — P. 245 – 259.

6. Mira Chokshi. Temperature analysis for lake Yojoa, Honduras. — 2006.

7. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. — Мир, 1980.

8. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. — Белгосуниверситет, 1999.

9. Ширяев А.Н. Вероятность. — Наука, 1980.