Оценка вариограммы гауссовского случайного процесса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Случайным процессом $x(t) = x(\omega, t)$ называется семейство случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ — некоторое параметрическое множество.

Функцией распределения случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$, называется функция вида

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{x(t_1) < x_1, \dots, x(t_n) < x_n\},$$

где $x_j \in \mathbb{R}, t_j \in \mathbb{T}, j = \overline{1, n}$.

Математическим ожиданием случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида

$$m(t) = Ex(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\, dF(x; t), t \in \mathbb{T}.$$

Дисперсией случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$V(t) = V(x(t)) = E(x(t) - m(t))^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - m(t))^2\, dF(x; t).$$

Корреляционной функцией случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$r(t_1, t_2) = E(x(t_1)x(t_2)) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x(t_1)x(t_2)\, dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2)$$

Ковариационной функцией случайного процесса $x(t), t \in \mathbb{T}$ называется функция вида:

$$R(t_1, t_2) = E\{(x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2))\, dF(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2)$$

Случайный процесс $X(s), s \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, называется внутренне стационарным, если справедливы следующие равенства:

$$E\{X(s_1) - X(s_2)\} = 0, \quad V\{X(s_1) - X(s_2)\} = 2\gamma(s_1 - s_2),$$

где $2\gamma(s_1 - s_2)$ — вариограмма рассматриваемого процесса, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $X(s), s \in \mathbb{Z}$ — внутренне стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и неизвестной вариограммой.

$$2\gamma(h) = V\{X(s+h) - X(s)\},\ s, h \in \mathbb{Z}.$$

В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику вида:

$$2\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} (X(s+h) - X(s))^2, \quad h = \overline{0, n-1}. \tag{1}$$

Вычислим математическое ожидание введённой оценки

$$\begin{gathered} E\{2\tilde{\gamma}(h)\} = \tfrac{1}{n-h} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h} E(X(s+h) - X(s))^2 = \\ = [\text{так как процесс является внутренне стационарным}] = \\ = \tfrac{1}{n-h} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h} 2\gamma(h) = 2\gamma(h). \end{gathered}$$

Таким образом оценка является несмещённой.

Далее, найдём ковариацию:

$$\begin{gathered} cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = E((2\tilde{\gamma}(h_1) - E(2\tilde{\gamma}(h_1)))(2\tilde{\gamma}(h_2) - E(2\tilde{\gamma}(h_2)))) = \\ = E(\tfrac{1}{n-h_1} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1} ((x(s+h_1) - x(s))^2 - E((x(s+h_1) - x(s))^2)) \times \\ \times \tfrac{1}{n-h_2} \textstyle\sum_{t=1}^{n-h_2} ((x(t+h_2) - x(t))^2 - E((x(t+h_2) - x(t))^2))) = \\ = \tfrac{1}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} cov((x(s+h_1) - x(s))^2, (x(t+h_2) - x(t))^2) \end{gathered}$$

По определению, $cov(a,b) = corr(a,b)\sqrt{V(a)V(b)}$, тогда

$cov((x(s+h_1)-x(s))^2, (x(t+h_2)-x(t))^2) = corr((x(s+h_1)-x(s))^2, (x(t+h_2)-x(t))^2)\sqrt{(V((x(s+h_1)-x(s))^2)V((x(t-$

Из [ссылка на источник, либо упоминание раньше] $V\{X(s+h)-X(s)\}^2 = 2\{2\gamma(h)\}^2$ и предыдущего соотношения:

$$cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} corr((x(s+h_1)-x(s))^2, (x(t+h_2)-x(t))^2)$$

Далее воспользуемся леммой 1 [#Брест2005]:

$$\begin{aligned} &\tfrac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2} corr((x(s+h_1)-x(s))^2, (x(t+h_2)-x(t))^2) = \\ &= \tfrac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2} \{corr((x(s+h_1)-x(s)), (x(t+h_2)-x(t)))\}^2 = \\ &= \tfrac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2} \{\tfrac{cov((x(s+h_1)-x(s)),(x(t+h_2)-x(t)))}{\sqrt{(V((x(s+h_1)-x(s)))V((x(t+h_2)-x(t))))}}\}^2 \end{aligned}$$

Принимая во внимание лемму 3 [#Брест2005], получаем соотношение

$$cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \{\frac{\gamma(s+h_1-t)+\gamma(s-t-h_2)-\gamma(s+h_1-t-h_2)-\gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}}\}^2$$

Отсюда нетрудно получить соотношение для дисперсии оценки вариограммы $2\tilde{\gamma}(h)$, если положить $h_1 = h_2 = h$:

$$\begin{aligned} V\{2\tilde{\gamma}(h)\} &= \tfrac{2(2\gamma(h))^2}{(n-h)^2} \textstyle\sum_{s=1}^{n-h}\sum_{t=1}^{n-h} \{\tfrac{\gamma(s+h-t)+\gamma(s-t-h)-\gamma(s+h-t-h)-\gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h)}\sqrt{2\gamma(h)}}\}^2 = \\ &= \tfrac{2}{(n-h)^2} \textstyle\sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s+h-t)+\gamma(s-t-h)-2\gamma(s-t)\}^2. \end{aligned}$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для оценки $2\tilde{\gamma}(h)$, представленной равенством (1), имеют место следующие соотношения:*

$$E\{2\tilde{\gamma}(h)\} = 2\gamma(h), \tag{2}$$

$$cov(2\tilde{\gamma}(h_1), 2\tilde{\gamma}(h_2)) = \frac{2(2\gamma(h_1))(2\gamma(h_2))}{(n-h_1)(n-h_2)} \sum_{s=1}^{n-h_1} \sum_{t=1}^{n-h_2} \{\frac{\gamma(s+h_1-t)+\gamma(s-t-h_2)-\gamma(s+h_1-t-h_2)-\gamma(s-t)}{\sqrt{2\gamma(h_1)}\sqrt{2\gamma(h_2)}}\}^2, \tag{3}$$

$$V\{2\tilde{\gamma}(h)\} = \frac{2}{(n-h)^2} \sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s+h-t)+\gamma(s-t-h)-2\gamma(s-t)\}^2, \tag{4}$$

где $\gamma(h), h \in \mathbb{R},$ — семивариограмма процесса $X(s), s \in \mathbb{R},$ $h, h_1, h_2 = \overline{0, n-1}$.