

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ПАВЛОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

Анализ и статистическая обработка временных рядов в пакете R

Курсовой проект
студента 4 курса 7 группы

”Допустить к защите”
Руководитель проекта

“ ____ ” _____ 2013 г

Научный руководитель
Цеховая Татьяна Вячеславовна
доцент кафедры ТВиМС
канд. физ.-мат. наук

МИНСК 2013

Содержание

Введение	2
1 Определения и вспомогательные результаты	6
2 Обработка реального временного ряда с помощью R	14
2.1 Вычисление основных описательных статистик	14
2.2 Исследование статистических данных	16
2.3 Корреляционный анализ	23
2.4 Регрессионный анализ	25
2.5 Вариограммный анализ. Кригинг.	30
Заключение	42
Литература	43
ПРИЛОЖЕНИЕ А Исходные данные	43
ПРИЛОЖЕНИЕ В Результаты вычислений	44
ПРИЛОЖЕНИЕ С Код программ	45

Введение

Данная работа посвящена статистическому анализу, обработке и исследованию реальных временных рядов. В настоящее время, выбор такой направленности соответствует необходимости в проведении анализа различных длительных наблюдений с математической и, в частности, статистической точек зрения. Поскольку наличие даже большого количества информации, полученной в процессе каких-либо наблюдений, не всегда способно раскрыть те или иные причины и следствия, представленные в конкретном случае. Наличие информации, без последующего всестороннего анализа, также не может раскрыть все скрытые проблемы и свойства. В свою очередь, математический аппарат и его конкретные прикладные части могут позволить не только проанализировать сложившуюся ситуацию, но и постараться дать некоторый прогноз по состоянию в будущем.

В качестве исследуемого материала в данной работе используются база данных с реальными наблюдениями, зафиксированными на озёрах, входящих в Нарочанский национальный парк, за период с 1955 по 2012 годы, полученная от учебно-научного центра «Нарочанская биологическая станция им. Г.Г.Винберга». В представленной базе данных присутствовали наблюдения за следующими озёрами:

- Баторино
- Нарочь
- Мястро

Из представленных озёр для исследования было выбрано озеро Баторино. Данное озеро является уникальным природным объектом, изучение которого позволяет решать проблемы экологии не только в региональном, но и глобальном масштабе. Оно располагается у самой границы города Мядель и входит в состав Нарочанской озёрной группы. Кроме представленных ранее озер, в эту группу также входят озеро Белое и озеро Бледное.

В данной работе исследуемым показателем для озера Баторино был избран показатель температуры воды. Температура воды принадлежит к числу наиболее важных и фундаментальных характеристик любого водоёма. Её изменение во времени является одним из важнейших факторов, отражающих изменения в окружающей среде. Также нужно отметить, что исследование температуры воды является актуальным, вследствие зависимостей свойств воды от температуры. Так как данная характеристика оказывает сильное влияние на плотности воды, растворимость в ней газов, минеральных и органических веществ, в том числе одни из важнейших характеристик для обитания в ней живых организмов: растворимость и насыщенность воды кислородом. В частности от температуры воды в значительной мере зависит жизнедеятельность рыб: их распределение в водоёме, питание, размножение. К тому же температура тела рыб, как правило, не превышает температуры окружающей их воды. В то же время, любой водоём как экосистема является средой обитания различных, отличных от рыб, организмов. И поэтому отслеживание всех изменений и влияние этих изменений на их жизнь является крайне важным не только в экологическом смысле, но и в биологическом. Как следствие вышесказанного, изменения

температуры с течением времени следует считать одним из важнейших индикаторов изменений, происходящих в экосистеме озера. А исследование данного показателя, в свою очередь, является важнейшим в исследовании различных проблем, связанных с водоёмами. В подтверждение актуальности исследования представленной темы можно привести научные работы [?, ?, ?] аналогичных выбранной теме направлений.

Среди представленных следует отметить научную работу [?]. Представленная статья рассматривает в качестве объекта исследования крупнейшее в мире озеро — Байкал. В ней подробно изучается изменение климата в контексте данного озера в период с 1950 по 2012.

В работе [?] исследуется температура воды Великих озёр в Северной Америке. А также исследуется влияние, оказываемое изменением температуры на рыб, обитающих в этих озёрах.

Следует отметить, что указанные работы опубликованы в 2011-2012, что также подтверждает актуальность темы исследований.

В настоящее время, в условиях глобального потепления и крайне нестабильной климатической ситуации, наблюдения за состоянием озёрных экосистем представляют особую ценность как с научной, так и с практической стороны, поскольку только на основе таких наблюдений возможно выделить последствия антропогенного воздействия на фоне изменения природных факторов. А также получить некоторые заключения по экологической обстановке в определенной области.

Изначально, для решения этой задачи был выбран пакет **STATISTICA**. Данный программный пакет — это универсальная интегрированная система, предназначенная для статистического анализа и визуализации данных, управления базами данных и разработки пользовательских приложений, содержащая широкий набор процедур анализа для применения в научных исследованиях, технике, бизнесе, а также специальные методы добычи данных. В системе **STATISTICA** реализовано множество мощных языков программирования, которые снабжены специальными средствами поддержки. С их помощью легко создаются законченные пользовательские решения и встраиваются в различные другие приложения или вычислительные среды. В пакете представлены несколько сотен типов графиков 2D, 3D и 4D, матрицы и пиктограммы; предоставляется возможность разработки собственного дизайна графика. Средства управления графиками позволяют работать одновременно с несколькими графиками, изменять размеры сложных объектов, добавлять художественную перспективу и ряд специальных эффектов, разбивку страниц и быструю перерисовку. Например, 3D-графики можно вращать, накладывать друг на друга, сжимать или увеличивать.

Но пакет **STATISTICA**, являясь по сути узкоспециализированным пакетом статистического анализа, наравне с преимуществами имеет и свои недостатки. Главным из которых, на мой взгляд, является то, что **STATISTICA** — коммерческий продукт. И как следствие имеет закрытую платформу, закрытый исходный код и при этом является достаточно дорогим. Также, к недостаткам я бы отнёс довольно громоздкий интерфейс, и взаимодействие с программой только на уровне кнопок и таблиц. Недостаток в гибкости и открытости в некоторых ситуациях ограничивает возможности анализа. С другой стороны, такой подход позволяет быстро получать различные результаты без длительного изучения самого продукта. Но, объективно оценив все преимущества и недостатки, следует отметить, что пакет **STATISTICA** не является оптимальным, во всестороннем смысле, выбором.

Существует множество различных программных пакетов, с помощью которых можно осуществлять статистический анализ. Приведём основные из них:

- Excel

- STATISTICA
- SAS
- JMP
- SPSS
- SPlus
- R
- Mathematica
- Matlab

Каждый из представленных программных пакетов имеет свои преимущества и недостатки. Следует сразу отметить, что такие пакеты как **Mathematica** и **Matlab**, которые являются по сути общематематическими, хоть и имеют статистические модули, но все же не являются специализированным решением. Прежде всего, я хотел бы отметить преимущества пакета **STATISTICA** перед программой **Excel**. Во-первых, **STATISTICA** является специализированным пакетом по обработке статистических данных, вследствие чего этот процесс намного быстрее аналогичного в **Excel**. Во-вторых, в выбранном пакете присутствуют все необходимые для анализа данных инструменты и формулы, многое из которого нет в **Excel**. Если вкратце подвести итог, то **Excel** следует рассматривать скорее как инструмент работы с таблицами, а **STATISTICA** является платным и довольно громоздким пакетом, сходным по представлению данных (в таблицах) с **Excel**. Каждый из оставшихся в списке пакетов заслуживает отдельного ознакомления. Но если рассмотреть весь этот список в совокупности, то у каждого пакета, за исключением одного — пакета **R** — можно выделить одну общую черту: все они являются проприетарными и являются платными. И каждая новая версия продукта, при необходимости в оной, нуждается в приобретении. На самом деле, данную черту можно трактовать и как недостаток, и как преимущество. Следует отметить, что крупные коммерческие компании, заинтересованные в статистическом анализе, предпочитают такие пакеты как **SAS**, **JMP**, **SPSS**, **SPlus**. Поскольку покупая тот или иной продукт, компания получает гарантию в точности полученных с помощью пакета результатов, а также наличие оплаченной технической поддержке. Тогда как *open-source* продукты предоставляются в комплекте "как есть". Но в совокупности с открытостью исходного кода и наличием огромных сообществ, отсутствие гарантии является слабым недостатком, так как у пользователя всегда есть возможность получить последнюю версию продукта, техническую помощь, или вовсе предложить свою помощь в разработке. Поэтому отдельные исследователи всё чаще и чаще выбирают пакет **R**.

Именно согласно этим соображениям, в качестве инструмента исследования в данной работе был выбран пакет **R**. Рассмотрим его подробнее. **R** является функциональным интерпретируемым языком программирования с динамической типизацией данных для статистической обработки данных и работы с графикой, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта *GNU*. Язык создавался как аналогичный языку **S**, разработанному в *Bell Labs* и является его альтернативной реализацией, хотя между языками есть существенные отличия, но в большинстве своём код на языке **S** работает в среде **R**.

R широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ. Доступен для широкого числа операционных систем: *Unix/Linux*, *Microsoft Windows*, *Mac OS X*.

R поддерживает широкий спектр статистических и численных методов и обладает хорошей расширяемостью с помощью пакетов. Пакеты представляют собой библиотеки для работы специфических функций или специальных областей применения. В базовую поставку **R** включен основной набор пакетов, а всего по состоянию на момент написания данной работы доступно более 5000 пакетов, которые распространяются через *CRAN* (акроним *Comprehensive R Archive Network*). С помощью них можно значительно расширить возможности для статистического анализа. Причем многие из них написаны самими пользователями. Как следствие этого, при отсутствии какого-либо функционала, всегда можно реализовать его посредством создания своего пакета или просто функции. Следует также отметить возможность использования напрямую функций, написанных на языках программирования *C*, *C++*, *Java*.

Ещё одной особенностью **R** являются графические возможности, заключающиеся в возможности создания для публикаций качественной графики, которая может включать в себя математические символы. Динамические и интерактивные графики также доступны в качестве дополнительных пакетов.

R имеет свой собственный L^AT_EX-подобный формат документации, который может быть использован для всестороннего документирования, как в режиме онлайн, в различных вариантах, так и в бумажном носителе.

Следует также отметить, что уже упомянутые ранее программные пакеты статистического анализа, на данный момент почти все имеют поддержку кода, написанного на **R**. Это о многом говорит, и уже не стоит удивляться, если известный коммерческий продукт в очередном выпуске добавит аналогичную поддержку.

Два-три раза в год выходит свободно-распространяемый информационный журнал *R Journal*. Он содержит информацию по статистической обработке данных и разработке, что может быть интересно как пользователям, так и разработчикам **R**.

Одна из самых популярных конференций, посвящённых языку — *useR!* (*The R User Conference*), проходит ежегодно, начиная с 2004 года, собирает специалистов в различных областях.

Начиная с 2009 года каждой весной в Чикаго проводится конференция, посвящённая применению **R** в финансах (*R/Finance: Applied Finance with R*). В 2013 году прошла первая конференция, посвящённая применению **R** в страховании (*R in Insurance*).

1 Определения и вспомогательные результаты

Приведём основные теоретические понятия из [?], которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть имеется некоторый одномерный признак X . Из него извлечена выборка объёма n : x_1, x_2, \dots, x_n .

Введём некоторые основные *описательные статистики*.

Характеристики положения

Среднее арифметическое значение является показателем центрального положения, вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Квантилем Q_p порядка p , $0 < p < 1$, называется такое значение признака в упорядоченной совокупности, которое делит её в отношении $p : (1 - p)$. К числу наиболее часто применяемых квантилей относятся:

1. *медиана* ($p = \frac{1}{2}$);
2. *квартиль* ($p = \frac{1}{4}$).

Пусть выборка упорядочена по возрастанию: x_1^*, \dots, x_n^* . Тогда *медиана* вычисляется по формуле:

$$Me = \begin{cases} x_{l+1}^* & , \quad n = 2l + 1, \\ \frac{x_l^* + x_{l+1}^*}{2} & , \quad n = 2l. \end{cases}$$

Характеристики рассеяния

Наиболее распространёнными мерами рассеяния являются *размах*, *дисперсия* и *среднеквадратическое отклонение*.

Размах определяется по формуле:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Квартильный размах — интервал, содержащий медиану, в который попадает 50% выборки, вычисляется по формуле:

$$R_Q = q_3 - q_1,$$

где q_3 , q_1 — соответственно, верхний и нижний квартили.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле:

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Также, для вычисления *выборочной дисперсии* используется несмещённая оценка, которая вычисляется по формуле:

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Оценка *стандартного отклонения* вычисляется по формуле:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Значение стандартного отклонения можно представить, как среднее расстояние, на котором находятся элементы от среднего элемента выборки, и оно показывает, насколько хорошо среднее значение описывает всю выборку.

В качестве меры относительного разброса данных используют *коэффициент вариации*:

$$V = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Данная мера показывает, какую долю среднего значения этой величины составляет её средний разброс. На основе значения коэффициента вариации, можно сделать вывод об однородности выборки:

- Если $V < 33\%$ — принято считать, что выборка однородна;
- Если $V > 33\%$ — не однородна.

Стандартная ошибка среднего значения вычисляется как:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}.$$

Данная величина оценивает выборочную изменчивость среднего значения, приближённо показывая, насколько выборочное среднее отличается от среднего генеральной совокупности.

Характеристики формы распределения

Характеристики формы распределения применяются для выражения особенностей формы распределения.

Выборочный коэффициент асимметрии определяется следующим образом:

$$A_S = \frac{n \sum (x_i - \bar{x})^3}{(n - 1)(n - 2)s_x^3}. \quad (1.1)$$

Данный коэффициент характеризует степень смещения вариационного ряда относительно среднего значения по величине и направлению. В симметричном распределении коэффициент асимметрии равен нулю.

- Если $|A_S| > 1$, то распределение является в значительной степени асимметричным.
- Если $\frac{1}{2} < |A_S| \leq 1$, то распределение незначительно асимметрично.
- Если $|A_S| \leq \frac{1}{2}$, то распределение является близким к симметричному [?].

Стандартная ошибка выборочного коэффициента асимметрии (1.1) вычисляется по формуле:

$$SES = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}},$$

где n — объём выборки.

Для того, чтобы сделать в дальнейшем какие-либо выводы по значению коэффициента асимметрии введём *тестовую статистику*:

$$Z_{As} = \frac{A_s}{SES}.$$

- Если $|Z_{As}| \geq 2$, то асимметрия существенная и распределение признака в генеральной совокупности несимметрично;
- Если $|Z_{As}| < 2$, то асимметрия несущественна.

Данная тестовая статистика показывает: насколько существенным является коэффициент асимметрии данной выборки по отношению к генеральной совокупности [?, с.85].

Выборочный коэффициент эксцесса вычисляется по формуле:

$$K = \frac{n(n+1) \sum (x_i - \bar{x})^4 - 3(\sum (x_i - \bar{x})^2)^2(n-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)s_x^4}.$$

В случае нормального распределения *коэффициент эксцесса* равен нулю. Положительный *коэффициент эксцесса* характеризует крутость(островершинность) кривой распределения относительно нормального распределения. Отрицательный, в свою очередь, пологость.

Стандартная ошибка коэффициента эксцесса может быть вычислена по формуле:

$$SEK = 2(SES) \sqrt{\frac{(n^2 - 1)}{(n-3)(n+5)}},$$

где n — объём выборки.

По аналогии с коэффициентом асимметрии, введём также *тестовую статистику* Z_K для коэффициента эксцесса.

$$Z_K = \frac{K}{SEK}.$$

- Если $|Z_K| > 2$, то коэффициент эксцесса является значимым;
- Если $|Z_K| \leq 2$, то коэффициент эксцесса не является значимым и нельзя сделать никаких заключений о коэффициенте эксцесса генеральной совокупности [?, с.89].

Выборочный коэффициент корреляции

Для оценки тесноты линейной связи между признаками используется парный линейный *коэффициент корреляции Пирсона*, который определяется формулой:

$$r_{xt} = \frac{S_{xt}}{S_x S_t}, \quad (1.2)$$

где $S_{xt} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(t_i - \bar{t})$, $S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$, $S_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (t_i - \bar{t})^2}$.

Коэффициент корреляции характеризует силу связи и направление. Если $-1 \leq r_{xt} < 0$, то наблюдается отрицательная корреляция, если $0 < r_{xt} \leq 1$, то наблюдается положительная корреляция.

Для описания силы связи *коэффициента корреляции* используются градации, обозначенные в таблице 1, где в качестве значения коэффициента корреляции указано абсолютное значение $|r_{xt}|$.

Таблица 1.1 — Абсолютные значения коэффициента корреляции

Абсолютное значение	Интерпретация
0—0.2	Очень слабая зависимость
0.2—0.5	Слабая зависимость
0.5—0.7	Средняя зависимость
0.7—0.9	Высокая зависимость
0.9—1	Очень высокая зависимость

Критерий значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, t) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объёма n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_{xt} \neq 0$.

Требуется проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности $r = 0$, при конкурирующей гипотезе $H_1 : r \neq 0$.

Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 , надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = \frac{r_{xt} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xt}^2}},$$

где r_{xt} — выборочный коэффициент корреляции, и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$, где n — число пар значений выборки, найти критическую точку $t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ для двусторонней критической области.

- Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
- Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Величина $T_{\text{набл}}$ при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы, если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а исследуемые переменные коррелированы [?].

Приведём некоторые критерии, которые понадобятся в нашем исследовании. Для этого воспользуемся литературой [?, ?].

Критерий Шапиро–Уилка

Критерий Шапиро–Уилка используется для проверки гипотезы H_0 : «генеральная совокупность распределена нормально» и является одним из наиболее эффективных критериев проверки нормальности [?].

Пусть имеется вариационный ряд $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, построенный по извлечённой из генеральной совокупности выборки x_1, x_2, \dots, x_n .

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 необходимо вычислить статистику:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^k a_{(n-i+1)}(x_{(n-i+1)} - x_{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

где коэффициенты $a_{(n-i+1)}$ — известные константы, представленные в таблицах из [?], индекс k вычисляется следующим образом:

$$k = \begin{cases} (n-1)/2 & , \quad n = 2l+1, \\ n/2 & , \quad n = 2l. \end{cases}$$

И по заданному уровню значимости α из таблицы критических значений статистики $W(\alpha)$ [?] найти критическую точку $W_{кр}(\alpha)$.

- Если $W < W_{кр}(\alpha)$ — нулевую гипотезу отклоняют.
- Если $W > W_{кр}(\alpha)$ — нет оснований отклонять нулевую гипотезу [?].

Критерий χ^2

Пусть нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 : генеральная совокупность распределена нормально, необходимо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$\chi_{набл}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

и по таблице критических точек распределения χ^2 , по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 3$ найти критическую точку $\chi_{кр}^2(\alpha, k)$, где n_i — эмпирические частоты, а n'_i — теоретические, s — число групп (частичных интервалов) выборки [?].

- Если $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2(\alpha, k)$ — нет оснований отвергать нулевую гипотезу.
- Если $\chi_{набл}^2 > \chi_{кр}^2(\alpha, k)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Критерий Колмогорова—Смирнова

Пусть нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Критерий заключается в том, что можно сравнивать эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ с гипотетической $F(x)$ и, если мера расхождения между ними мала, то считать справедливой гипотезу H_0 .

Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0 : генеральная совокупность распределена нормально, необходимо вычислить статистику Колмогорова-Смирнова

$$D = \sqrt{n} \max_x |F^*(x) - F(x)|$$

и по таблице критических значений статистики Колмогорова-Смирнова, по заданному уровню значимости α найти критическую точку $D_{кр}(\alpha)$.

- Если $D < D_{кр}(\alpha)$ — нет оснований отвергать нулевую гипотезу.
- Если $D > D_{кр}(\alpha)$ — нулевую гипотезу отвергают.

Критерий Граббса

Критерий Граббса основан на предположении о нормальности исходных данных. То есть, перед применением данного критерия необходимо убедиться, что данные могут быть в разумных пределах аппроксимированы нормальным распределением [?].

Критерий Граббса обнаруживает один выброс за одну процедуру проверки. Найденный выброс исключается из выборки и процедура проверки критерия проверяется пока не будут исключены все выбросы. Не рекомендуется использовать данный критерий для выборок объёмом ниже 7.

Данный критерий заключается в проверке нулевой гипотезы H_0 : в выборке нет выбросов, при конкурирующей гипотезе H_1 : в выборке есть по крайней мере 1 выброс.

Статистика критерия Граббса определяется следующим образом:

$$G = \frac{\max |x_i - \bar{x}|}{s_x},$$

где \bar{x} — выборочное среднее, s_x — выборочное стандартное отклонение.

Гипотеза H_0 отклоняется (значение x_i является выбросом) при заданном уровне значимости α , если

$$G > \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t_{(\frac{\alpha}{2n}, n-2)}^2}{n-2 + t_{(\frac{\alpha}{2n}, n-2)}^2}},$$

где n — объём выборки, $t_{(\frac{\alpha}{2n}, n-2)}$ является критическим значением t-распределения с $n-2$ степенями свободы и уровнем значимости $\frac{\alpha}{2n}$.

Характеристики линейной регрессии

Для введения следующих понятий воспользуемся [?].

Предположим, что уравнение регрессии имеет вид: $x^*(t) = at + b$. Тогда *объяснённая уравнением регрессии дисперсия*, характеризующая изменчивость линии регрессии относительно среднего значения, вычисляется по формуле:

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x^*(t_j) - \bar{x})^2, \quad (1.3)$$

где \bar{x} — выборочное среднее.

Остаточная дисперсия \overline{D} , характеризующая отклонение уравнения регрессии от результатов наблюдений x_j вычисляется по формуле:

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - x^*(t_j))^2. \quad (1.4)$$

Тогда, *общая дисперсия* введённой ранее выборки будет равна сумме (1.3) и (1.4):

$$S_x^2 = \overline{D} + \sigma^2.$$

Дисперсия отклонения вычисляется по формуле:

$$\sigma_\varepsilon^2 = S_x^2(1 - r_{xt}^2),$$

где r_{xt} — выборочный коэффициент корреляции.

Стандартные случайные погрешности параметров a и b :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_\varepsilon}{S_x \sqrt{n-2}}, \quad \sigma_b = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \frac{\overline{x}^2}{S_x^2}},$$

где S_x , S_x^2 — стандартное отклонение и дисперсия соответственно.

Коэффициент детерминации показывает долю дисперсии исходного ряда, которая описывается моделью регрессии, вычисляется по формуле:

$$\eta_{x(t)}^2 = \frac{\overline{\sigma^2}}{S_x^2}.$$

Применяя неравенство $\eta_{x(t)}^2 - r_{xt}^2 \leq 0.1$, можно сделать вывод об отклонении от линейности: в случае верности неравенства можно говорить о незначительном отклонении.

Критерий значимости коэффициентов регрессии

Пусть нулевая гипотеза заключается в равенстве нулю коэффициентов линейной регрессии $H_0 : a = 0, b = 0$.

Для проверки нулевой гипотезы $H_0 : a = 0, b = 0$ необходимо рассчитать:

$$T_a = \frac{a}{\sigma_a}, \quad T_b = \frac{b}{\sigma_b},$$

по статистической таблице определить $t_{кр}(k, \alpha)$ — критическую точку t-распределения Стьюдента при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n - 2$.

- Если $|T_a| > t_{кр}(k, \alpha)$, то нулевая гипотеза отвергается и отклонение a от нуля носит неслучайный характер, и, следовательно, величина a значима;
- Если $|T_b| > t_{кр}(k, \alpha)$, то нулевая гипотеза отвергается, отклонение b от нуля носит неслучайный характер, и, следовательно, величина b значима.

Критерий Фишера

Данный критерий используется для оценки адекватности регрессионной модели. Пусть выдвинута нулевая гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 : \overline{\sigma^2} = \frac{\overline{D}}{n-2}.$$

Для проверки данной гипотезы используется F-критерий Фишера. Необходимо вычислить дисперсионное отношение

$$F_{\text{крит}} = \frac{(n-2)\overline{\sigma^2}}{\overline{D}},$$

которое сравнивается с $F_{\text{табл}}(v_1, v_2, \alpha)$ при заданном уровне значимости α , и степенях свободы $v_1 = 1, v_2 = n - 2$.

Если $F_{\text{крит}} > F_{\text{табл}}$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, что означает в рассматриваемом случае адекватность регрессионной модели.

2 Обработка реального временного ряда с помощью R

2.1 Вычисление основных описательных статистик

В качестве исходных данных примем выборку из полученной от учебно-научного центра базы данных, путём отбора наблюдений в июле месяце за период с 1975 по 2012 год. Выборка представлена в приложении А в таблице А.1. Графически исходные данные представлены на рисунке 2.1.

Начнём исследование временного ряда с вычисления описательных статистик. R предоставляет в пакете *base* такие функции как: *var* — дисперсия, *mean* — среднее, *sd* — стандартное отклонение, *median* — медиана, *quantile* — квантили, *range* — размах, *min*, *max*. Также, в различных пакетах можно найти другие интересующие функции, как статистические, так и математические. Но в целях удобства, компактности и контроля за функциональностью мной был написан модуль *dstats*. Данный модуль позволяет вычислять все необходимые в данной работе описательные статистики.

Для получения всех описательных статистик воспользуемся представленным в приложении С листинге С.1 модулем. Полученные результаты отображены в таблице 2.1.

	Значение
Среднее	19.88
Медиана	19.80
Нижний квартиль	18.20
Верхний квартиль	21.40
Минимум	16.00
Максимум	24.20
Размах	8.20
Квартильный размах	3.20
Дисперсия	4.92
Стандартное отклонение	2.22
Коэффициент вариации	24.75
Стандартная ошибка	0.37
Асимметрия	0.18
Ошибка асимметрии	0.40
Экссесс	-0.79
Ошибка эксцесса	0.78

Таблица 2.1 — Описательные статистики для наблюдаемых температур.

Рассмотрим подробнее некоторые полученные статистики.

Как видно из таблицы, *средняя* температура в июле месяце за период с 1975 по 2012 составляет приблизительно 20°C. При этом *размах* температур равен 8.3°C. *Дисперсия* в данном случае равна 5.24.

Стандартное отклонение оказалось равным приблизительно 2.3. Полученное значение не велико, а значит можно сказать, что среднее значение хорошо описывает выборку.

../figures/temperature-ts-first-overview.pdf

Рисунок 2.1 — График исходных данных.

И что в среднем, температура воды озера Баторино отличается от полученной ранее *средней* температуры на 2.3°C .

Коэффициент вариации в нашем случае равен 26.1%. Из этого следует, что выборку можно считать однородной, так как полученное значение является меньшим 33%.

Стандартная ошибка среднего значения равна 0.37.

Коэффициент асимметрии — мера симметричности распределения. Полученное значение: 0.14. Данное значение говорит о незначительной правосторонней асимметрии распределения. То есть о том, что выборочное распределение можно считать близким к симметричному.

Стандартная ошибка асимметрии равна 0.38.

Коэффициент эксцесса в рассматриваемом случае равен -0.85 . Так как коэффициент эксцесса нормального распределения равен 0, то в данном случае можно говорить о пологости пика распределения выборки по отношению к нормальному распределению.

Стандартная ошибка коэффициента эксцесса равна 0.75.

По данному ранее определению тестовых статистик для коэффициента асимметрии и эксцесса, проверим значимость полученных значений для генеральной совокупности. Для этого в модуле *dstats* мной реализованы функции *dstats.test.skew* и *dstats.test.kurtosis*:

Полученная тестовая статистика для коэффициента асимметрии:

$$Z_{A_s} = \frac{A_s}{SES} = 0.3630143.$$

Данное значение попадает под случай $|Z_{A_s}| \leq 2$, а значит, выборочный коэффициент асимметрии не является значимым. Из чего, в свою очередь, следует, что по нему нельзя судить о коэффициенте асимметрии генеральной совокупности.

Полученная тестовая статистика для коэффициента эксцесса:

$$Z_K = \frac{K}{SEK} = -1.135476.$$

Данное значение попадает под случай $|Z_K| \leq 2$, а значит, в данном случае выборочный коэффициент эксцесса не является значимым и нельзя ничего сказать о коэффициенте эксцесса генеральной совокупности.

Из полученных результатов следует отметить, что коэффициенты асимметрии и эксцесса, указывают на близость выборочного распределения к нормальному закону. Но при этом, из-за недостаточного объёма выборки, по этим коэффициентам нельзя судить о соответствующих коэффициентах генеральной совокупности.

2.2 Исследование статистических данных

В **R** можно найти различные пакеты, позволяющие строить разнообразные гистограммы, диаграммы рассеяния, вероятностные графики, линейные графики, диаграммы диапазонов, размахов, круговые диаграммы, столбчатые диаграммы, последовательные графики и т.д., позволяющие увидеть специфику данных.

В пакет *base* для визуализации входят такие функции как:

- *plot*: общая функция для построения графиков $y(x)$;
- *barplot*: столбцовые диаграммы;
- *boxplot*: график “ящик-с-усами”;
- *hist*: гистограммы;
- *pie*: круговые диаграммы;
- *dotchart*: точечные графики;
- *image*, *heatmap*, *contour*, *persp*: функции для генерации трёхмерных графиков;
- *qqnorm*, *qqline*, *qqplot*: графики квантилей;
- *pairs*, *coplot*: отображают на графиках несколько выборок.

С помощью функции *hist* построим гистограмму для отображения вариационного ряда исходных данных. Гистограммы позволяют увидеть, как распределены значения переменных по интервалам группировки, то есть как часто переменные принимают значения из

../figures/temperature-histogram.pdf

Рисунок 2.2 — Гистограмма наблюдаемых температур

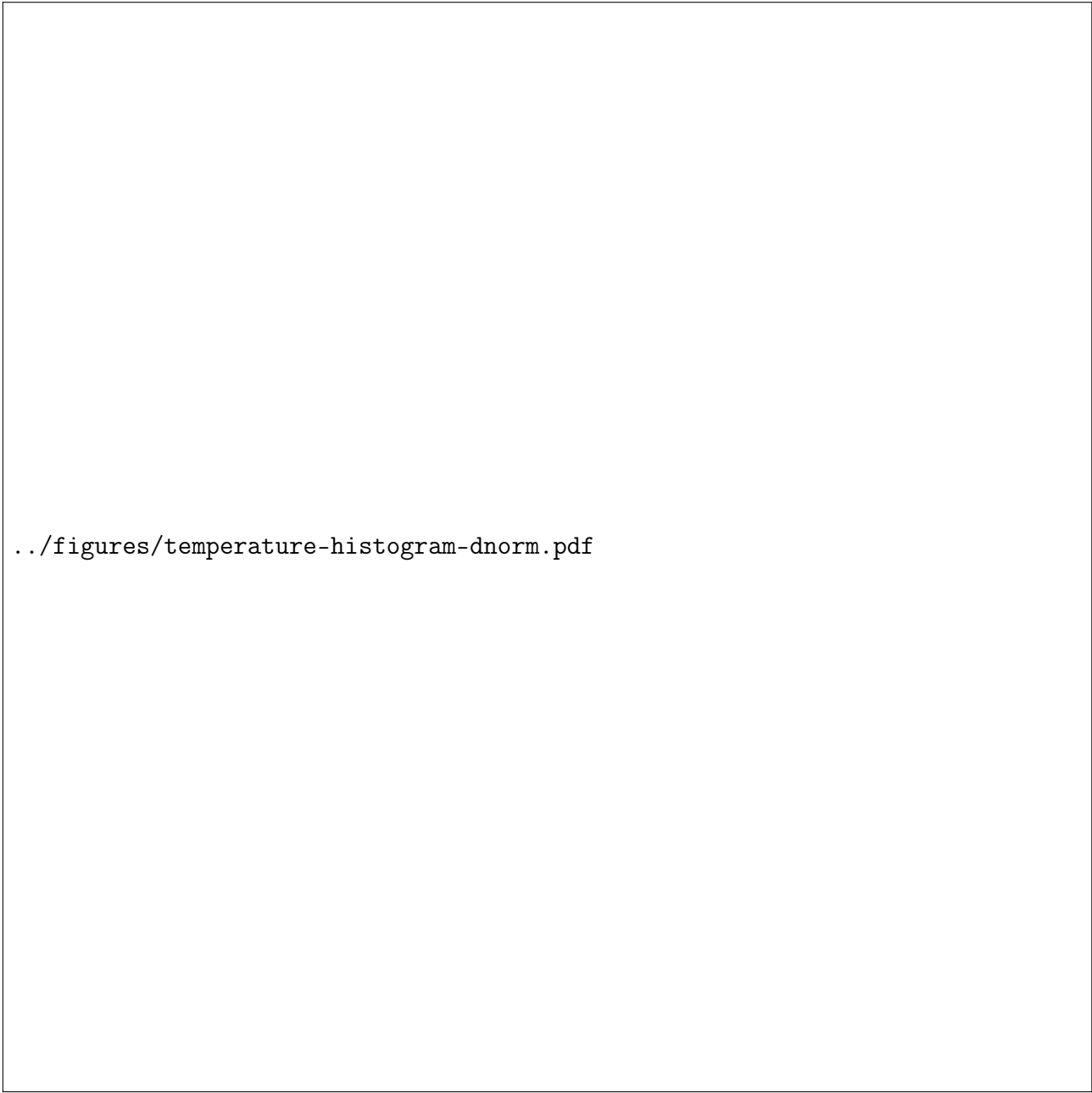
различных интервалов. А также, что бывает более важным, позволяет сделать предположение о разновидности распределения. Полученная гистограмма отражена на рисунке 2.2.

Представленная гистограмма построена с автоматически рассчитанным количеством интервалов разбиения. Воспользуемся *формулой Стерджеса* для вычисления этого количества. Из [?] количество интервалов разбиения рассчитывается по формуле: Следует отметить, что в построенной гистограмме, на рисунке 2.2, получилось 9 интервалов. Данный результат обосновывается особенностями реализации функции *hist*. Указанная особенность заключается в том, что эта функция вычисляет количество интервалов по формуле Стерджеса (2.1) и при построении интервалов пользуется принципом “красивого” разбиения.

$$k = \lceil \log_2 n \rceil + 1 = \lceil \log_2 38 \rceil + 1 = 7. \quad (2.1)$$

По полученной гистограмме можно визуально предположить близость выборочного распределения к нормальному распределению.

Далее построим гистограмму с кривой плотности нормального распределения. Построенная гистограмма отображена на рисунке 2.3. На основании этой диаграммы уже можно



../figures/temperature-histogram-dnorm.pdf

Рисунок 2.3 — Гистограмма наблюдаемых температур с кривой плотности нормального распределения

сказать больше. Во-первых, на ней нагляднее представлена близость выборочного распределения к нормальному с параметрами $\mathcal{N}(20.08, 5.24)$. Во-вторых, по этой гистограмме можно подтвердить или опровергнуть результаты, полученные на этапе вычисления описательных статистик в параграфе 2.1.

Следует отметить согласованность полученных описательных статистик с полученной гистограммой. Во-первых, по коэффициенту асимметрии мы предположили о близости распределения к симметричному. Это подтверждается гистограммой: на ней можно заме-

тить небольшую скошенность вправо, что также согласовывается со знаком коэффициента. Во-вторых, коэффициент эксцесса указывал на пологость пика распределения. Данное заключение подтверждается кривой плотности — она имеет чуть более растянутую колоколообразную форму.

Другим часто используемым графическим способом проверки характера распределения данных является построение т.н. *графиков квантилей* (*Q-Q plots, Quantile-Quantile plots*). На таких графиках изображаются квантили двух распределений — эмпирического (т.е. построенного по анализируемым данным) и теоретически ожидаемого стандартного нормального распределения. При нормальном распределении проверяемой переменной точки на графике квантилей должны выстраиваться в прямую линию, исходящую под углом 45 градусов из левого нижнего угла графика. Графики квантилей особенно полезны при работе с небольшими по размеру совокупностями, для которых невозможно построить гистограммы, принимающие какую-либо выраженную форму.

В **R** для построения графиков квантилей можно использовать базовую функцию *qqnorm* (рисунок 2.4). На этом графике можно визуальнo обнаружить аномальное положение наблюдаемых значений по отношению к нормальному распределению. В данном случае отклонения можно наблюдать на концах рассматриваемого промежутка. Остальные значения образуют отчетливую прямую. А значит, подтверждается предположение о нормальности выборочного распределения.

Далее следует проверить полученные результаты с помощью некоторых формальных тестов. Существует целый ряд статистических тестов, специально разработанных для проверки нормальности выборочного распределения. В общем виде проверяемую при помощи этих тестов нулевую гипотезу можно сформулировать следующим образом: “Анализируемая выборка происходит из генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение”. Если получаемая при помощи того или иного теста вероятность ошибки P оказывается меньше некоторого заранее принятого уровня значимости (например, 0.05), нулевая гипотеза отклоняется.

В **R** реализованы практически все имеющиеся тесты на нормальность — либо в виде стандартных функций, либо в виде функций, входящих в состав отдельных пакетов. Примером базовой функции является *shapiro.test()*, при помощи которой можно выполнить широко используемый *тест Шапиро-Уилка*:

Shapiro-Wilk normality test

```
data: Temperature
W = 0.9742, p-value = 0.5685
```

В полученных результатах W — статистика Шапиро-Уилка. Вероятность ошибки $p = 0.4706 > 0.05$, а значит нулевая гипотеза не отвергается. Следовательно опровергнуть предположение на основе данного теста нельзя.

Попробуем опровергнуть наше предположение на основе проверки критерия χ^2 Пирсона. Для этого воспользуемся пакетом *nortest* и функцией *pearson.test*:

Pearson chi-square normality test

```
data: Temperature
P = 2.8, p-value = 0.8335
```

../figures/temperature-qqnorm.pdf

Рисунок 2.4 — График квантилей для наблюдаемых температур

В полученных результатах P — статистика χ^2 Пирсона. Вероятность ошибки $p = 0.938 > 0.05$, а значит нулевая гипотеза не отвергается. Следовательно опровергнуть предположение о нормальности на основе данного теста также нельзя. Проверим критерий: примем уровень значимости $\alpha = 0.05$, тогда из таблицы распределения χ^2 найдём критическое значение критерия $P_{\text{кр}}(\alpha, k) = 43.8$. Отсюда следует, что

$$P < P_{\text{кр}}.$$

А значит, нулевую гипотезу при уровне значимости $\alpha = 0.05$ не отвергаем и подтверждаем сделанный вывод на основании вычисленной вероятности ошибки.

Воспользуемся для тех же целей критерием Колмогорова–Смирнова. Как в предыдущем случае воспользуемся представленной в пакете *nortest* функцией *ks.test*:

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: Temperature and test.nsample
D = 0.074, p-value = 0.991
alternative hypothesis: two-sided
```

Вероятность ошибки $p > 0.05$, а значит нулевую гипотезу отвергнуть нельзя. Следовательно опровергнуть предположение о нормальности, как и предыдущих случаях, также нельзя. Проверим критерий: примем так же уровень значимости $\alpha = 0.05$, тогда критическое значение $D_{кр}(\alpha) = 1.358$. Следовательно,

$$D < D_{кр}(\alpha),$$

и подтверждаем сделанные ранее заключения: нельзя отвергнуть нулевую гипотезу о нормальности выборочного распределения.

Воспользуемся ещё одним из графических инструментов анализа данных — Bag Plot (диаграмма концентрации). Диаграмма концентрации является двумерным обобщением широко известного графика «ящик-с-усами». Данный инструмент применяется для поиска нетипичных наблюдений по сочетанию пары количественных признаков (в нашем случае это дата и температура). Основными компонентами данной диаграммы являются «мешок», который содержит 50% значений выборки, граница, которая отделяет внутренние точки от выбросов, и контур, показывающий точки снаружи «мешка», но внутри границы. Аналогично диаграмме размаха, диаграмма концентрации визуализирует некоторые характеристики выборочных данных: положение выборки (расположением медианы), пространство (размер «мешка»), корреляция (ориентация «мешка»), асимметрия (форма «мешка» и контура), хвосты (точки на границе контура и выбросы) [?].

Результат построения диаграммы проиллюстрирован на рисунке 2.5. В центре полученной диаграммы находится медиана, «мешок» обозначен темным оттенком, контур светлым, выбросы обозначены перекрестием. Следовательно, выбросы не обнаружены, но следует отметить, что несколько точек находятся на самой границе контура — будем считать их подозрительными на выброс. По диаграмме также можно сказать о корреляции рассматриваемых переменных: «мешок» ориентирован вверх, что говорит о положительной корреляции. Также можно сделать заключения по асимметрии и проверить результаты, полученные на этапе вычисления описательных статистик. На диаграмме можно видеть, полученная фигура очень похожа на эллипс с центром, обозначенным медианой. Как следствие этого, можно судить о близости выборочного распределения с симметричным распределением, что подтверждает полученные ранее в анализе описательных статистик, представленных в таблице 2.1, результаты.

На данном этапе по результатам полученных на основе графиков 2.4 и 2.5 возникли подозрения о выбросах в исходной выборке. Выявление таких аномальных значений важно, так как их наличие, как правило, сильно влияет на всю выборку, в частности, на коэффициент корреляции. Проверим наличие выбросов с помощью статистических критериев. Для этих целей воспользуемся критерием Граббса. Воспользуемся им для определения наличия выбросов в исходной выборке.

Полученные результаты проверки критерия Граббса:

```
Grubbs test for one outlier
```

```
data: Temperature
G = 1.9487, U = 0.8850, p-value = 0.8103
alternative hypothesis: highest value 24.2 is an outlier
```

../figures/bagplot.pdf

Рисунок 2.5 — Диаграмма концентрации

Данный результат ($p\text{-value} = 1$) однозначно говорит нам о том, что следует отклонить альтернативную гипотезу H_1 и принять гипотезу H_0 . Другими словами, это говорит о том, что в исходной выборке нету выбросов. А значит выборка однородна. Значит, наши предположения о выбросах на основе графического представления выборки не подтвердились проверкой критерия [?].

В соответствии с результатами проверки критериев и на основе построенных гистограммы и графика квантилей, можно сделать заключение о том, что распределение температуры воды озера Баторино в июле 1975–2012 годов является близким к нормальному закону распределения с параметрами $\mathcal{N}(20.08, 5.24)$. Что подтверждается коэффициентами асимметрии и эксцесса из таблицы 2.1, а также результатами, полученными мной при исследовании в пакете **STATISTICA**.

2.3 Корреляционный анализ

Исследуем теперь зависимость температуры воды от времени, построив диаграмму рассеяния и вычислив коэффициент корреляции соответствующих переменных.

Диаграммы рассеяния используются для визуального исследования зависимости между двумя переменными. Если переменные сильно связаны, то множество точек данных принимает определённую форму. С помощью таких диаграмм можно наглядно изучить знак коэффициента корреляции. Если точки на диаграмме расположены хаотически, то это говорит о независимости рассматриваемых переменных. Если с ростом переменной t возрастает переменная x то имеет место положительная корреляция. Если же с ростом переменной t переменная x убывает, то это указывает на отрицательную корреляцию.

../figures/scatterplot.pdf

Рисунок 2.6 — Диаграмма рассеяния

Из рисунка 2.6 видно, что точки образуют своеобразное «облако», ориентированное по диагонали вверх, то есть присутствует некая зависимость между рассматриваемыми переменными. Также, данная диаграмма наглядно показывает силу этой зависимости: так как

точки не образуют чёткой формы, а разбросаны относительно диагонали, то можно говорить о наличии умеренной корреляции. То есть, нельзя сказать, что зависимость сильная, но и нельзя сказать, что связь между переменными отсутствует.

Проверим полученные результаты подробнее. Для начала построим корреляционную матрицу. Как видно из таблицы 2.2, коэффициент корреляции $r_{xt} = 0.52$. Этим подтвер-

	Temperature	Date
Temperature	1.00	0.47
Date	0.47	1.00

Таблица 2.2 — Корреляционная матрица.

ждаются наши выводы из диаграмм рассеяния и концентрации о положительной корреляции, поскольку полученный коэффициент корреляции является положительным и из таблицы 1, присутствует средняя(умеренная) зависимость: $0.5 < r_{xt} < 0.7$.

Оценим значимость полученного выборочного коэффициента корреляции с помощью возможностей пакета **R** и описанного ранее в параграфе критерия значимости. Вычислим:

$$T_{\text{набл}} = \frac{r_{xt}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xt}^2}} \approx 3.98095.$$

Рассмотрим уровень значимости $\alpha = 0.05$. Число степеней свободы $k = n - 2 = 36$. Тогда из таблицы критических точек распределения Стьюдента $t_{\text{кр}}(\alpha, k) \approx 2.03$. Следовательно,

$$T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}}(\alpha, k).$$

Значит нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности следует отклонить.

Пакет **R** предоставляет с помощью функции *cor.test* различные методы для проверки значимости выборочного коэффициента корреляции. Воспользуемся проверкой теста методом Пирсона:

Pearson's product-moment correlation

```
data: Temperature and time
t = 3.0471, df = 33, p-value = 0.004523
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.1603947 0.6935396
sample estimates:
cor
0.4685944
```

Как видно из полученных результатов $p\text{-value} < 0.05$, следовательно это говорит, о том, что необходимо отвергнуть гипотезу $H_0 : r = 0$.

Значит, нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности отвергаем и подтверждаем правильность полученных с помощью **R** результатов. Другими словами, выборочный коэффициент значимо отличается от нуля, т.е. температура воды и время при уровне значимости $\alpha = 0.05$ имеют зависимость.

Следует также отметить, что аналогичный анализ, проведённый в пакете STATISTICA, аналогичным образом выявил зависимость между температурой воды и временем.

Следовательно, в рассматриваемом случае можно говорить о присутствии значимой зависимости между температурой воды в озере Баторино и временем.

2.4 Регрессионный анализ

Для введения последующих понятий анализа временных рядов воспользуемся [?].

В отличие от анализа случайных выборок, анализ временных рядов основывается на предположении, что последовательные значения в файле данных наблюдаются через равные промежутки времени.

Большинство методов исследования временных рядов включает различные способы фильтрации шума, выделения сезонной и циклической составляющих, позволяющие увидеть регулярную составляющую более отчётливо.

Во временных рядах выделяют три составляющие:

1. *Тренд (тенденция развития) (T)* — эволюционная составляющая, которая характеризует общее направление развития изучаемого явления и связана с действием долговременных факторов развития.
2. *Циклические (K), сезонные (S) колебания* — это составляющие, которые проявляются как отклонения от основной тенденции развития изучаемого явления, и связаны с действием краткосрочных, систематических факторов развития. Циклические колебания состоят в том, что значения признака в течение какого-то времени возрастают, достигают определённого максимума, затем убывают, достигают определённого минимума, вновь возрастают до прежних значений и т.д. Эту составляющую можно выявить только по данным за длительные промежутки времени, например, в 10, 15 или 20 лет. Сезонные колебания — это колебания, периодически повторяющиеся в некоторое определённое время каждого года, месяца, недели, дня. Эти изменения отчётливо наблюдаются на графиках рядов динамики, содержащих данные за период не менее одного года.
3. *Нерегулярная случайная составляющая (ошибка) (E)*, являющаяся результатом действия второстепенных факторов развития.

Первые два типа компонент представляют собой детерминированные составляющие. Случайная составляющая образована в результате суперпозиции некоторого числа внешних факторов.

По типу взаимосвязи вышеперечисленных составляющих ряда динамики можно построить следующие модели временных рядов (X):

- Аддитивная модель: $X = T + K + S + E$;
- Мультипликативная модель: $X = T \times K \times S \times E$.

Аддитивной модели свойственно то, что характер циклических и сезонных колебаний остаётся постоянным.

В мультипликативной модели характер циклических и сезонных колебаний остаётся постоянным только по отношению к тренду (т.е. значения этих составляющих увеличиваются с возрастанием значений тренда).

По причине того, что в данном случае мы рассматриваем один месяц в году на протяжении длительного периода, будем считать, что в нашем временном ряде циклическая и сезонная составляющие отсутствуют. Построим график временного ряда.

На полученном графике можно заметить явно выраженный линейный рост значений со временем — он проиллюстрирован на графике прямой. Эта составляющая нашего временного ряда — тренд. Из этого следует, что уравнение тренда имеет вид:

$$x = at + b.$$

../figures/temperature-ts-regression.pdf

Рисунок 2.7 — График временного ряда с линией регрессии

Продолжая рассуждение, как наблюдение из графика, можно отметить, что не происходит увеличения амплитуды колебаний с течением времени. А значит, данная модель является аддитивной. Из всего вышесказанного можно заключить, что модель исходного временного ряда имеет вид:

$$X = T + E.$$

В **R** реализованы функции, позволяющие подгонять линейные модели к исследуемым данным [?]. Одной из таких функций является *lm(Fitting Linear Model)*. Она позволяет получить коэффициенты линии регрессии(тренд), остатки после удаления тренда. Коэффициенты, полученные с помощью данной функции представлены в (2.2).

$$a = 0.1077, \quad b = 17.9793. \quad (2.2)$$

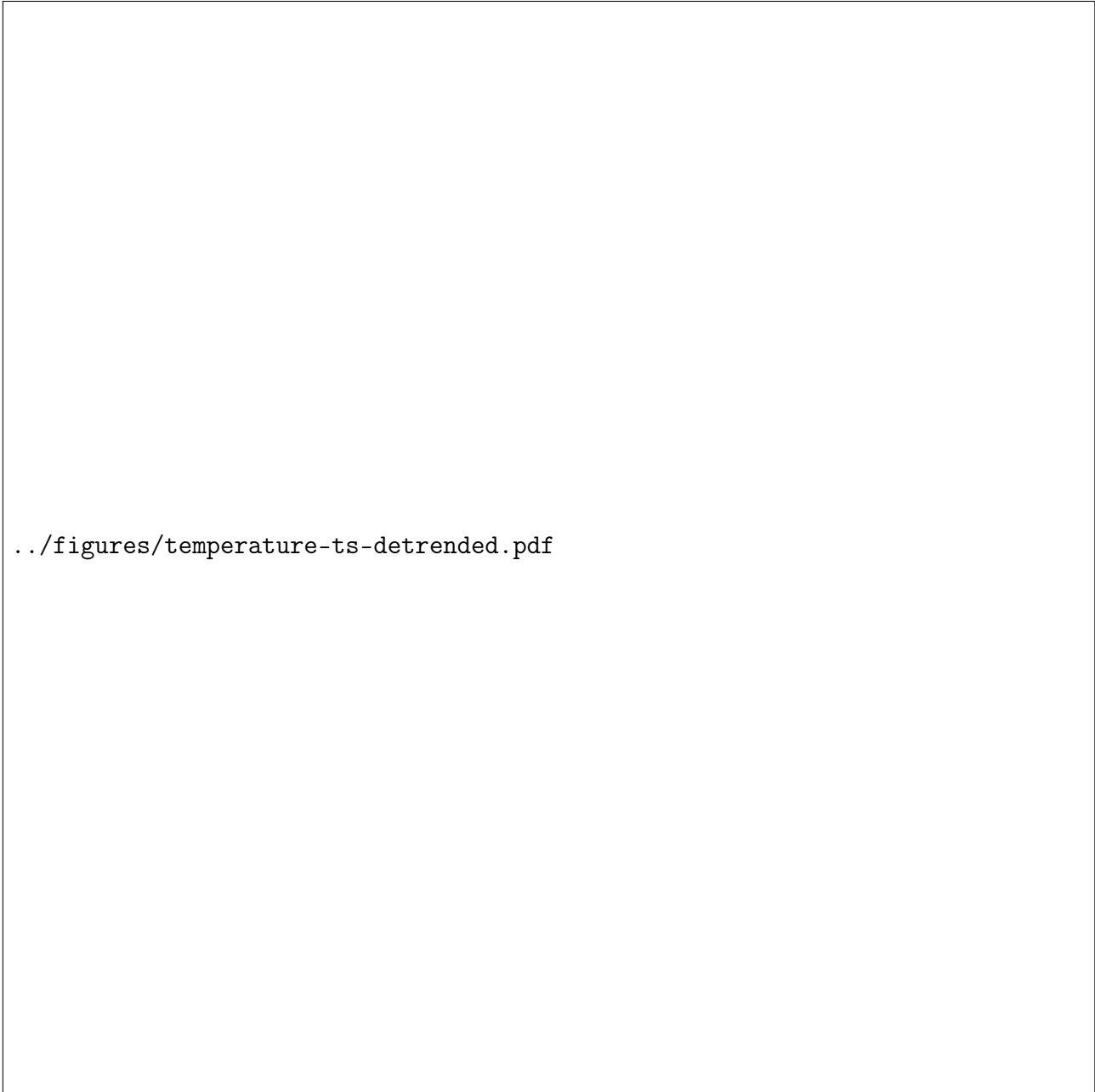
Следует отметить, что в пакете **STATISTICA** похожая процедура была проведена с помощью инструмента *Trend Subtract*, результатом было уравнение: $y = 17,98 + 0,108t$. Что

согласуется с полученными в **R** коэффициентами. Отметим также, что эти результаты подтверждаются вычислениями в **Excel**.

Таким образом получена линейная модель, описывающая тенденцию развития:

$$x = at + b = 0.1077t + 17.9793 \quad (2.3)$$

На основе полученной линейной модели (2.3), построим ряд остатков(приложение В, таблица В.1), удалив тренд из исходного ряда. Полученный ряд представлен на рисунке 2.8.



../figures/temperature-ts-detrended.pdf

Рисунок 2.8 — График ряда остатков

Проведём анализ полученной регрессионной модели. Для этого проверим значимость полученных коэффициентов регрессии и оценим адекватность регрессионной модели.

Рассчитаем вспомогательные величины, воспользовавшись введёнными ранее в параграфе 1 материалами. Дисперсия отклонения

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \approx 3.823,$$

стандартные случайные погрешности параметров a, b :

$$\sigma_a \approx 0.029, \quad \sigma_b \approx 0.356.$$

Воспользуемся приведённым ранее критерием значимости коэффициентов линейной регрессии. Примем уровень значимости $\alpha = 0.05$, тогда

$$T_a = 38.2, \quad T_b = 50.5.$$

Число степеней свободы $k = 36$, $t_{кр}(k, \alpha) = 2.028$.

- $|T_a| > t_{кр} \Rightarrow$ коэффициент a значим.
- $|T_b| > t_{кр} \Rightarrow$ коэффициент b значим.

Следовательно, при уровне значимости $\alpha = 0.05$, коэффициенты линейной регрессии являются значимыми.

Оценим адекватность полученной регрессионной модели. Дисперсия модели:

$$\overline{\sigma^2} \approx 1.44.$$

Остаточная дисперсия:

$$\overline{D} \approx 3.7.$$

Воспользуемся F-критерием Фишера. Пусть уровень значимости $\alpha = 0.05$,

$$F_{\text{крит}} \approx 14.01,$$

при степенях свободы $v_1 = 1, v_2 = 36$, $F_{\text{табл}}(v_1, v_2, \alpha) = 4.11$.

$$F_{\text{крит}} > F_{\text{табл}}.$$

Следовательно, при уровне значимости $\alpha = 0.05$, регрессионная модель является адекватной.

Рассчитаем коэффициент детерминации:

$$\eta_{x(t)}^2 \approx 0.275.$$

Проверим отклонение от линейности: $\eta_{x(t)}^2 - r_{xt}^2 \approx 0.0044 \leq 0.1$. Следовательно отклонение от линейности незначительно. Но при этом коэффициент детерминации оказался не достаточно высоким (< 0.7), это говорит о том, что построенная регрессионная модель не описывает в достаточной мере поведение временного ряда. Это, в свою очередь, может значить, что изменение температуры зависит не только от времени, но ещё и от каких-то других, неучтённых, факторов.

Проанализируем временной ряд остатков. Для этого проверим свойства, которым должна удовлетворять нерегулярная составляющая ε :

1. $E(\varepsilon) = 0$.
2. Дисперсия ε постоянна для всех значений.
3. Остатки независимы и нормально распределены.

	Значение
Среднее	-0.00
Медиана	0.14
Нижний квартиль	-1.80
Верхний квартиль	1.28
Минимум	-2.99
Максимум	4.33
Размах	7.32
Квартильный размах	3.07
Дисперсия	3.84
Стандартное отклонение	1.96
Коэффициент вариации	0.00
Стандартная ошибка	0.33
Асимметрия	0.42
Ошибка асимметрии	0.40
Эксцесс	-0.77
Ошибка эксцесса	0.78

Таблица 2.3 — Описательные статистики для остатков.

Вычислим описательные статистики для остатков. Полученные результаты проследим по таблице 2.3.

Как видно из таблицы 2.3, среднее значение равно нулю. При этом коэффициенты асимметрии ($A_S \approx 0.37$) и эксцесса ($K \approx -0.87$) указывают на отклонение распределения остатков от нормального закона.

Построим гистограмму и график квантилей для проверки последних заключений. Гистограмма наглядно демонстрирует полученные в таблице 2.3 коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Для проверки нормальности построим график квантилей. На рисунке 2.10 можно заметить, что присутствуют скачки относительно нормального распределения. Наиболее явный из них — нижний хвост. Остальные — небольшие скачки по ходу линии нормального распределения. Проверим с помощью критерия Шапиро-Уилка, можно ли считать полученные остатки нормально распределёнными.

Shapiro-Wilk normality test

```
data: Residual
W = 0.9513, p-value = 0.124
```

В полученных результатах W — статистика Шапиро-Уилка. Вероятность ошибки $p = 0.1152 > 0.05$, а значит нулевая гипотеза не отвергается. Следовательно опровергнуть предположение о нормальности на основе данного теста нельзя.

Проверим критерий χ^2 Пирсона:

Pearson chi-square normality test

```
data: Residual
P = 10.5143, p-value = 0.1046
```

В полученных результатах P — статистика χ^2 Пирсона. Вероятность ошибки $p = 0.09511 > 0.05$, а значит нулевая гипотеза не отвергается. Но при этом, это значение очень близко к 0.05. Проверим критерий: примем уровень значимости $\alpha = 0.05$, тогда из таблицы распределения χ^2 найдём критическое значение критерия $\chi^2_{кр}(\alpha, k) \approx 43.8$. Отсюда следует, что

$$\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр},$$

где $\chi^2_{набл} = P = 10.7895$. А значит, гипотезу о нормальности не отклоняем.

Построим график автокорреляционной функции для определения наличия взаимосвязей в ряде остатков (рисунок 2.11). На графике пунктирные линии разграничивают значимые и не значимые корреляции: значения, выходящие за линии, являются значимыми [?, с.376]. На представленном графике автокорреляционной функции можно заметить на лаге 15 значение, выходящее за интервал, обозначенный пунктирными линиями. Проверим значимость автокорреляций с помощью теста Льюнга-Бокса [?, с.377-378]. Данный тест проверяет наличие автокорреляций в исследуемом ряде.

Box-Ljung test

```
data: Residual
X-squared = 0.0754, df = 1, p-value = 0.7836
```

В результатах теста $p > 0.05$, что говорит о том, что тест не выявил значимых автокорреляций.

На рисунке 2.11 также можно заметить затухание с увеличением лага. На основе этого можно сделать предположение о стационарности. Для проверки этого предположения воспользуемся расширенным тестом Дики-Фуллера(ADF) [?].

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: Residual
Dickey-Fuller = -3.2695, Lag order = 3, p-value = 0.09261
alternative hypothesis: stationary
```

Как видно из результатов проверки теста, $p < 0.05$. Следовательно, необходимо принять альтернативную гипотезу о стационарности.

Полученная модель получилась неоднозначной, с одной стороны, полученное значение коэффициента детерминации показало недостаточную точность полученной модели и не удалось достоверно показать нормальность ряда остатков. С другой стороны, была показана стационарность и отсутствие автокорреляции. Поэтому возникает необходимость строить модель другими методами.

2.5 Вариограммный анализ. Кригинг.

Традиционные детерминированные методы, широко используемые в задачах ?интерполяции?, в большинстве случаев на практике не позволяют в полной мере решить ту

или иную задачу. В наиболее благоприятных вариантах исследований они позволяют оценивать значения в точках, в которых измерения не проводились и определять значения на плотной сетке (в близких к измерениям точках). Следует также отметить, что данные измерений, как правило, дискретны и пространственно неоднородно распределены. В свою очередь, анализ этих данных и его результаты в значительной мере зависят как от качества так и от количества исходных данных. И именно такие выводы были сделаны в результате проделанной в предыдущих частях данной работы. Отсюда следует, что необходимо использовать другие современные методы, позволяющие сделать более точные модели и выводы.

Для поставленной задачи в современных исследованиях хороших результатов позволяет добиться методы геостатистики, что подтверждается работами [Трататата]. Современная геостатистика — это широкий спектр статистических моделей и инструментов для анализа, обработки и представления пространственно-распределенной информации.

В рамках геостатистики, для получения наилучшей в статистическом смысле пространственной оценки используются модели из семейства кригинга (*kriging*) — наилучшего линейного несмещенного оценителя (*Best Linear Unbiased Estimator* — *BLUE*). Кригинг является “наилучшим” оценителем в статистическом смысле — его оценка обладает минимальной дисперсией. Важным свойством кригинга является точное воспроизведение значений измерений в имеющихся точках (интерполяционные свойства). В отличие от многочисленных детерминированных методов оценка кригинга сопровождается оценкой ошибки интерполяции в каждой точке. Полученная ошибка позволяет охарактеризовать неопределенность интерполяционной оценки данных при помощи доверительных интервалов.

В отличие от детерминированных методов, геостатистические оценки опираются на информацию о внутренней структуре данных, зависят от самих данных, т. е. являются адаптивными.

В различных геофизических явлениях выделяют свойство пространственной непрерывности: чем ближе две точки, тем ближе значение. Для оценки данного свойства построим диаграмму взаимного разброса пар точек (*h-scatterplot*), разделённых расстоянием h . Эта диаграмма позволяет увидеть пространственную непрерывность и проверить наличие корреляции в данных как качественно, так и количественно.

Построенная диаграмма (рисунок 2.12) отображает поведение данных с увеличением лага. Следует отметить, что в классическом случае присутствия зависимости, поведение должно было быть следующим: на начальных графиках сильная концентрация, и с увеличением лага эта концентрация уменьшается. В нашем случае такого не наблюдается. Напротив, на всех лагах присутствует слабая зависимость. Что, вообще говоря, вполне обосновано спецификой исследуемых данных: рассматривается температура воды за один определённый месяц в течение нескольких лет. Ко всему прочему, это подтверждается результатами проведённого ранее анализа остатков.

Центральная идея геостатистики состоит в использовании знаний о пространственной корреляции экспериментальных данных для построения пространственных оценок и интерполяций. Вариограмма — ключевой инструмент для оценки степени пространственной корреляции, имеющейся в данных, и для ее моделирования. Модель вариограммы является функцией, определяющей зависимость изменения исследуемой величины в пространстве от расстояния. Следовательно, интерполяционная модель, основанная на такой корреляционной функции, будет отражать реальные явления, которые лежат в основе данных измерений. Всевозможные пары точек могут быть рассортированы по классам в соответствии с разностью их координат $h = x_i - x_j$, называемой *лагом*. Для близких точек разность значений функции в них обычно меньше и растёт с увеличением расстояния между точками. Вычислив среднее значение квадратов разностей для каждого значения

лага h (для каждого собранного класса пар измерений), можно получить дискретную функцию, называемую *экспериментальной вариограммой*.

Построим экспериментальную вариограмму с помощью пакета “gstat” и функции “variogram”. С помощью этой функции можно построить экспериментальную вариограмму, основанную на классической оценке вариограммы и робастной оценке Крепси [Cressie, N.A.C., 1993, Statistics for Spatial Data, Wiley.; Cressie, N., C. Wile, 2011, Statistics for Spatio-temporal Data, Wiley.]. Построим с помощью классической оценки.

Построенная вариограмма отображена на рисунке 2.13. На представленном рисунке можно заметить, что на промежутке $[0; 1]$ не происходит роста значений вариограммы. Наоборот, наблюдается разрыв: первое значение находится значительно выше 0. При этом вариограмма не сильно выходит за пределы дисперсии переменной, которая равна 3.9. Более того, первое значение уже достигло порога. Что говорит о...

Таким образом, в построенной диаграмме присутствует эффект самородков.

На основе экспериментальной вариограммы построим модель вариограммы для дальнейшего использования на этапе кригинга. Моделью вариограммы может служить не каждая функция, а только та, для которой выполнено условие положительной определенности. Положительная определенность модели вариограммы гарантирует, что уравнения кригинга, построенные с использованием данной модели, имеют единственное устойчивое решение. Поэтому при моделировании используются только те функции, для которых положительная определенность установлена, а также их взвешенные линейные комбинации с неотрицательными весами, которые тоже будут являться положительно определенными. Модель вариограммы строится как линейная комбинация подходящих базисных моделей. Вообще говоря, построение модели вариограммы представляет собой итеративный процесс, на каждом шаге которого следует наилучшим образом подобрать параметры очередного модельного приближения. Но в данной работе использовался несколько другой подход.

Для построения модели вариограммы была реализована возможность автоматического подбора модели на основе функции “fit.variogram”. Суть этого подхода заключается в следующем: при заданных начальных условиях (эффект самородков, ранг, порог), для всех возможных базисных моделей подгонялись их параметры, для этих моделей вычислялись сумма квадратов ошибок, и на основе этого показателя выбиралась наиболее эффективная модель. Другими словами, выбор модели осуществлялся методом наименьших квадратов.

На рисунке 2.14 показан результат выполнения представленной ранее функции. Таким образом, наилучшей моделью вариограммы, построенной по классической оценке, стала линейная комбинация двух: эффект самородков с параметрами $(\sigma^2, 0)$ и сферическая с параметрами (σ^2, ρ) .

Задача геостатистики — оценить значения изучаемой пространственной переменной в произвольных точках области исследования на основе анализа ее значений, измеренных в ограниченном числе выборочных точек. По построенной модели вычислим оценки при помощи ординарного (?простого?) кригинга, реализованного функцией “krige”. Вычисленные значения Полученные значения оказались очень близкими к нулю и поэтому прогноз почти не изменился. Это говорит о том, что построенная модель не смогла уловить поведение исходных данных. Что, вообще говоря, можно объяснить спецификой исходных данных. ?Объяснение?

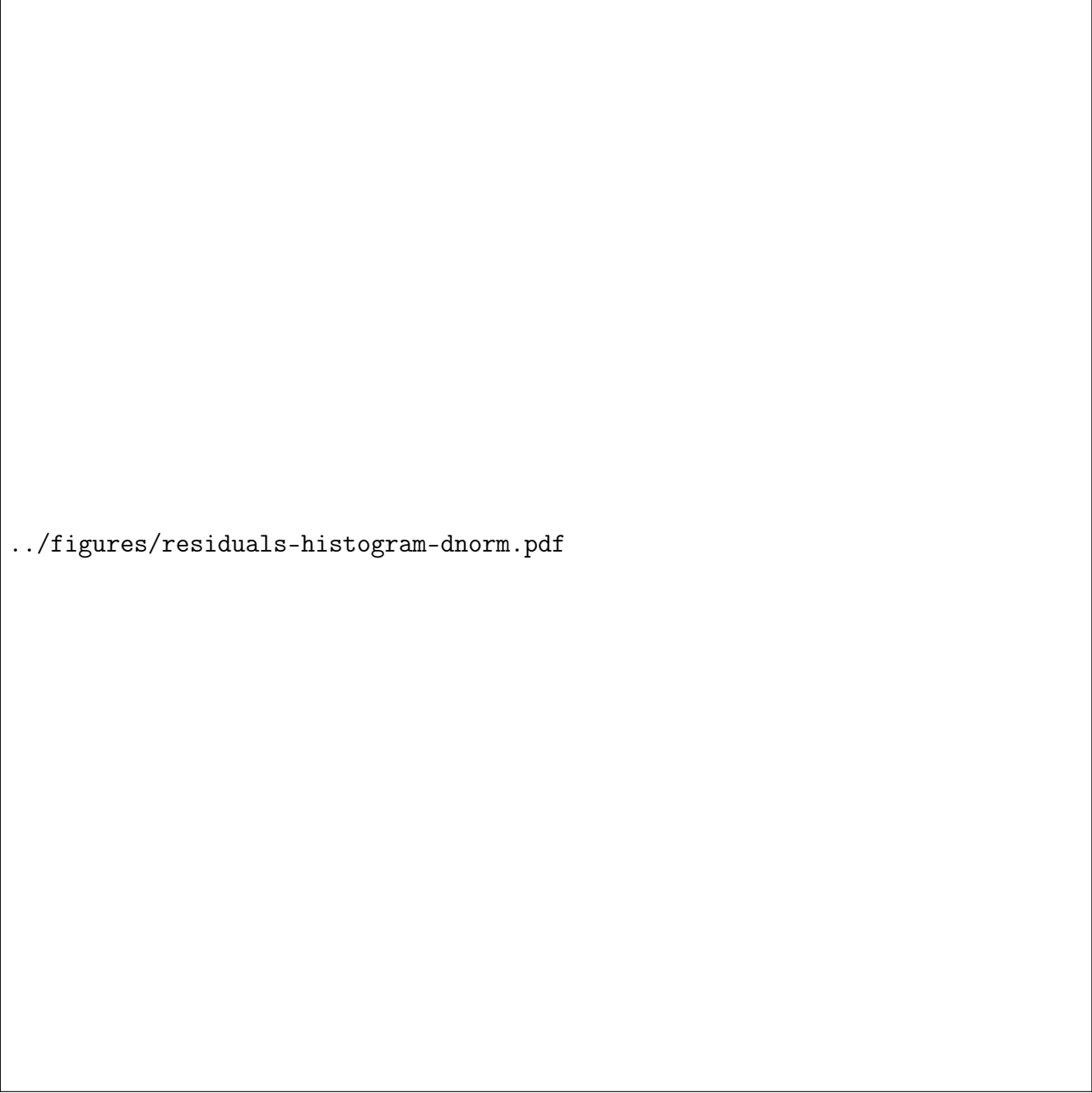
Попробуем улучшить результат с помощью робастной оценки Крепси.

Представленная на рисунке 2.15 эмпирическая вариограмма, построенная по робастной оценке, отличается от соответствующей вариограмме, построенной по классической оценке. Появилось заметное поведение вариограммы, в отличие от предыдущей, где значения концентрировались около порога.

Модель вариограммы, представленная на рисунке 2.16, является также линейной ком-

бинацией двух базисных моделей: эффекта самородков с параметрами (4.6175154 0.000000) и волновой с параметрами (0.4736754 4.318585).

Результаты кригинга показали следующие прогнозные значения: -0.29913001 , -0.09802080 , 0.09224593 , 0.20372323 , 0.20764537 , 0.12216628 . Что значительно отличается от результатов, полученных с помощью классической оценки.



../figures/residuals-histogram-dnorm.pdf

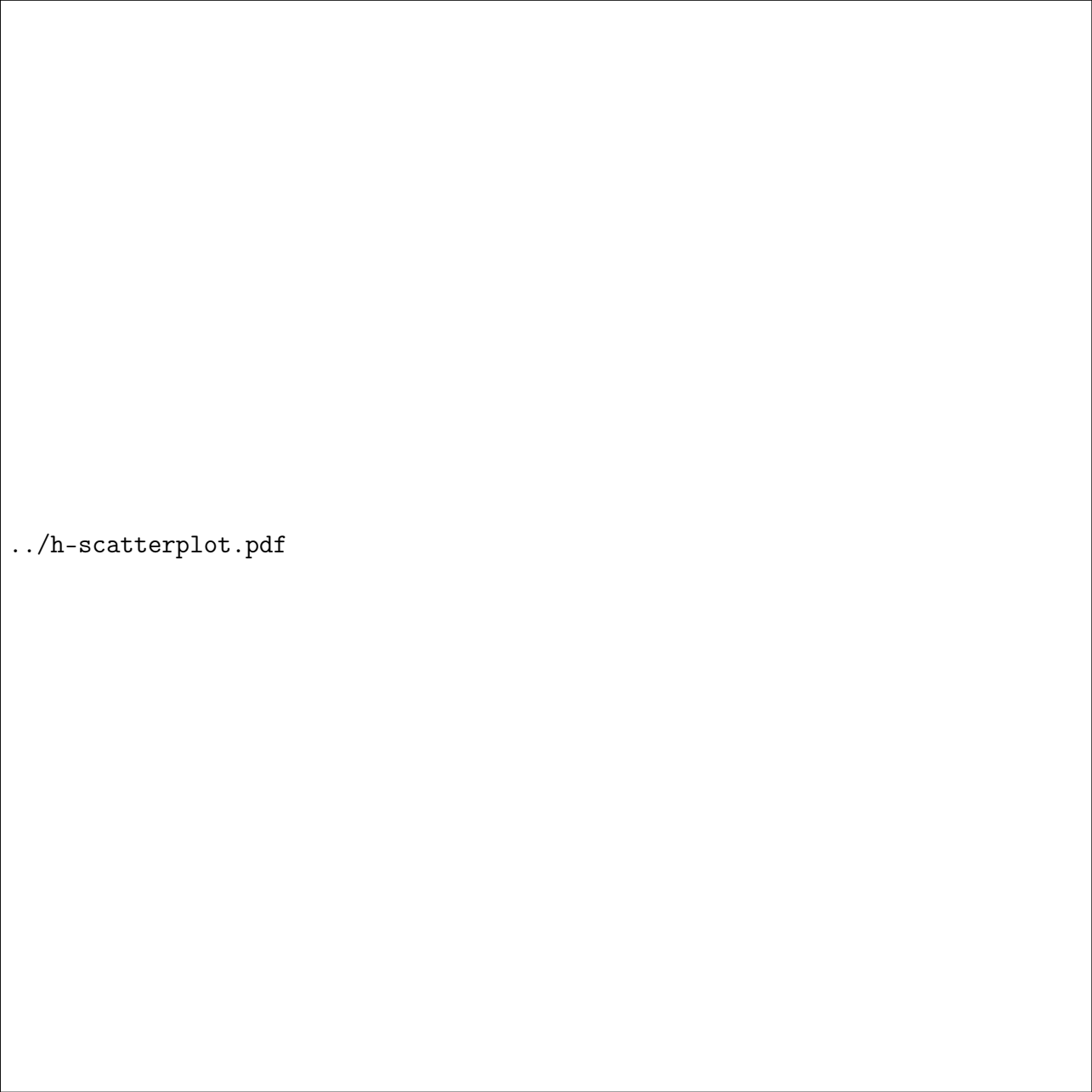
Рисунок 2.9 — Гистограмма остатков с кривой плотности нормального распределения

../figures/residuals-qnorm.pdf

Рисунок 2.10 — График квантилей для остатков

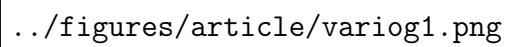
../figures/residuals-acf.pdf

Рисунок 2.11 — График автокорреляционной функции



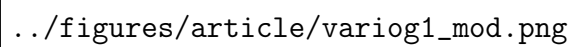
`../h-scatterplot.pdf`

Рисунок 2.12 — Диаграмма взаимного разброса

The image is a placeholder for a variogram plot. It contains the text `../figures/article/variog1.png` in a monospaced font, indicating the location of the plot file. The plot itself is not visible.

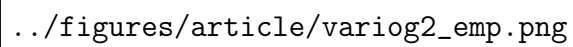
`../figures/article/variog1.png`

Рисунок 2.13 — Экспериментальная вариограмма (классическая оценка)

The image is a placeholder for a theoretical variogram plot. It contains the text `../figures/article/variog1_mod.png` in a monospaced font, which likely refers to the location of the actual plot file. A theoretical variogram typically shows the relationship between the variance of the difference between two observations and the distance between them, often following a specific mathematical model like a Gaussian or exponential function.

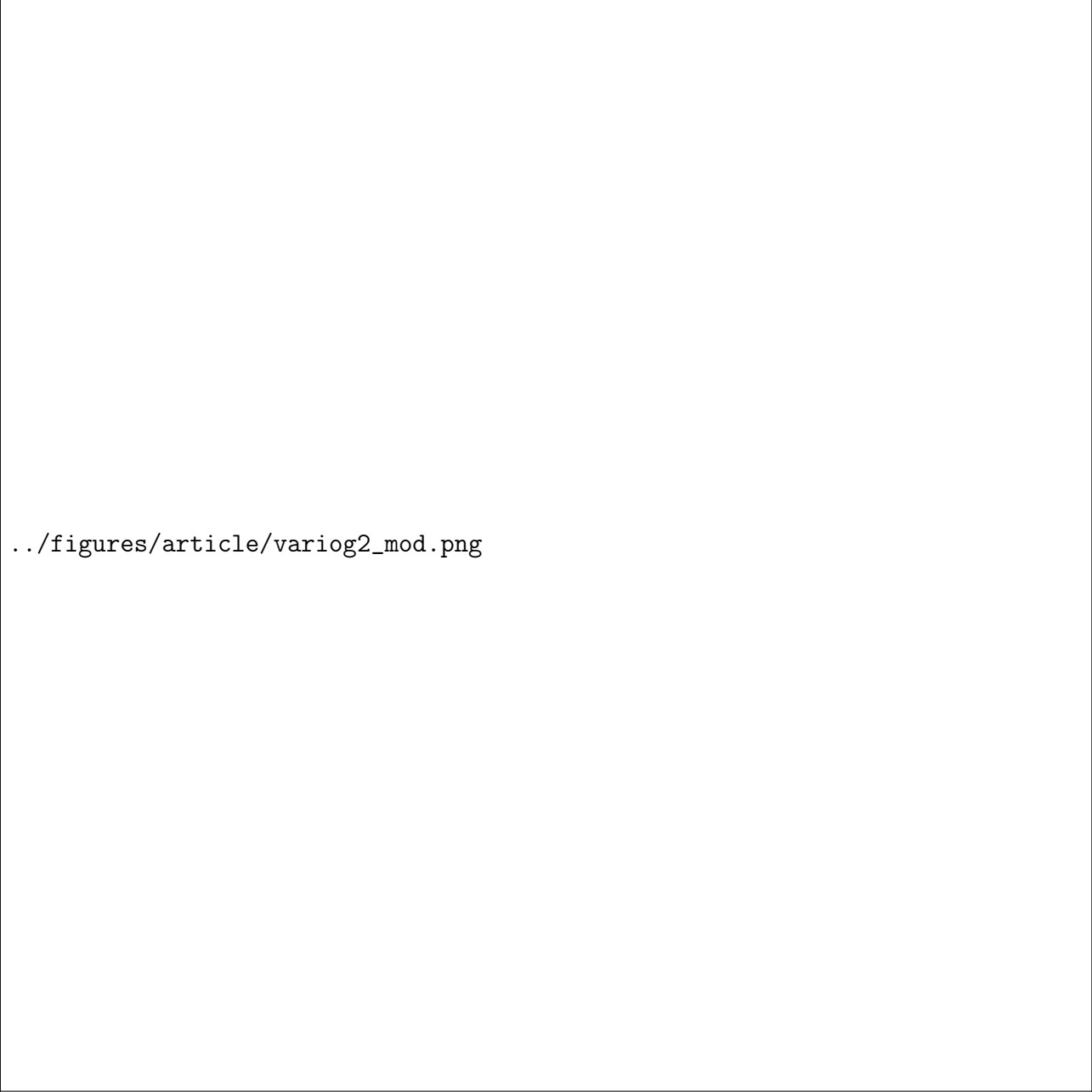
`../figures/article/variog1_mod.png`

Рисунок 2.14 — Теоретическая вариограмма

The image is a rectangular box containing the text `../figures/article/variog2_emp.png`. This text likely represents a file path to a plot that is not visible in this view.

`../figures/article/variog2_emp.png`

Рисунок 2.15 — Экспериментальная вариограмма (робастная оценка)



../figures/article/variog2_mod.png

Рисунок 2.16 — Теоретическая вариограмма (робастная оценка)

Заключение

В представленной работе был проведён сравнительный анализ современных пакетов прикладных программ для статистического анализа. Из них как инструмент исследования был выбран язык программирования **R**, по причине его доступности и предоставления огромного числа пакетов. С помощью этого пакета была исследована важнейшая характеристика любого водоёма — температура воды. Исследование проводилось на основе данных, полученных из наблюдений за озером Баторино, в период с 1975 по 2012 год в июле месяце. Для этого были вычислены и проанализированы описательные статистики, проведена проверка на нормальность, проведён визуальный анализ. В результате указанной части работы было обнаружено, что распределение температуры воды в озере Баторино близко к нормальному закону распределения с параметрами $\mathcal{N}(20.08, 5.24)$. Отклонение от нормальности отмечается полученными коэффициентами асимметрии и эксцесса. Исследуемое распределение имеет небольшую скошенность вправо и более растянутую колоколообразную форму относительно нормального закона распределения. В результате проведённого корреляционного анализа была выявлена умеренная зависимость между температурой воды и временем: был обнаружен рост температуры с течением времени.

В работе, как заключительный этап исследования, был проведён регрессионный анализ. В процессе которого была построена аддитивная модель временного ряда, найдён тренд, и, как следствие удаления тренда из построенной модели, был получен ряд остатков. Построенная детерминированными методами линейная регрессионная модель оказалась значимой и адекватной, но при этом описывает поведение временного ряда лишь частично. В результате анализа ряда остатков было выявлено отклонение распределения от нормальности. Что говорит о наличии некоторых неучтённых данной моделью факторов, затрудняющих дальнейшее исследование классическими методами. Следует также отметить стационарность и отсутствие автокорреляций в ряде остатков. Эти результаты говорят о постоянстве вероятностных свойств с течением времени, а также об отсутствии зависимостей между наблюдениями.

В заключение хотелось бы отметить, что представленные в данной работе классические методы анализа временных рядов, в этом случае оказались недостаточными для полноценного исследования. Поэтому в дальнейшем исследовании следует использовать отличные от использованных в работе современные методы анализа.

ПРИЛОЖЕНИЕ А Исходные данные

	year	temperature
1	1975.00	20.20
2	1976.00	16.00
3	1977.00	17.70
4	1978.00	16.75
5	1979.00	17.50
6	1980.00	16.77
7	1981.00	19.80
8	1982.00	19.00
9	1983.00	21.40
10	1984.00	19.40
11	1985.00	20.40
12	1986.00	16.50
13	1987.00	17.10
14	1988.00	23.80
15	1989.00	19.90
16	1990.00	18.50
17	1991.00	23.00
18	1992.00	21.90
19	1993.00	18.00
20	1994.00	21.40
21	1995.00	18.90
22	1996.00	19.10
23	1997.00	21.00
24	1998.00	18.40
25	1999.00	23.50
26	2000.00	21.00
27	2001.00	24.20
28	2002.00	23.10
29	2003.00	18.00
30	2004.00	19.10
31	2005.00	20.00
32	2006.00	21.30
33	2007.00	19.40
34	2008.00	21.80
35	2009.00	21.90
36	2010.00	24.30
37	2011.00	22.80
38	2012.00	20.20

Таблица А.1 — Исходные данные.

ПРИЛОЖЕНИЕ В Результаты вычислений

	year	residual
1	1975.00	2.05
2	1976.00	-2.25
3	1977.00	-0.66
4	1978.00	-1.71
5	1979.00	-1.06
6	1980.00	-1.89
7	1981.00	1.04
8	1982.00	0.14
9	1983.00	2.44
10	1984.00	0.33
11	1985.00	1.23
12	1986.00	-2.77
13	1987.00	-2.27
14	1988.00	4.33
15	1989.00	0.33
16	1990.00	-1.17
17	1991.00	3.22
18	1992.00	2.02
19	1993.00	-1.98
20	1994.00	1.32
21	1995.00	-1.28
22	1996.00	-1.18
23	1997.00	0.62
24	1998.00	-2.09
25	1999.00	2.91
26	2000.00	0.31
27	2001.00	3.41
28	2002.00	2.21
29	2003.00	-2.99
30	2004.00	-1.99
31	2005.00	-1.20
32	2006.00	0.00
33	2007.00	-2.00
34	2008.00	0.30
35	2009.00	0.30

Таблица В.1 — Временной ряд остатков.

ПРИЛОЖЕНИЕ С Код программ

```
1 # Descriptive statistics
2
3 # Function for getting all descriptive statistics
4 dstats.describe <- function(data, locale=F) {
5   stats <- c(dstats.mean(data), dstats.median(data), dstats.quartile.lower(data),
6             dstats.quartile.upper(data), dstats.min(data), dstats.max(data),
7             dstats.range(data), dstats.quartile.range(data), dstats.variance(data),
8             dstats.std.dev(data), dstats.coef.var(data), dstats.std.error(data),
9             dstats.skew(data), dstats.std.error.skew(data), dstats.kurtosis(data),
10            dstats.std.error.kurtosis(data))
11   if (locale) {
12     descr.row <- c("Среднее", "Медиана", "Нижний квартиль", "Верхний квартиль",
13                  "Минимум", "Максимум", "Размах", "Квартильный размах",
14                  "Дисперсия", "Стандартное отклонение", "Коэффициент вариации",
15                  "Стандартная ошибка", "Асимметрия", "Ошибка асимметрии",
16                  "Эксцесс", "Ошибка эксцесса")
17     descr.col <- c("Значение")
18   } else {
19     descr.row <- c("Mean", "Median", "Lower Quartile", "Upper Quartile", "Range",
20                  "Minimum", "Maximum", "Quartile Range", "Variance", "Standard Deviation",
21                  "Coefficient of Variance", "Standard Error", "Skewness",
22                  "Std. Error Skewness", "Kurtosis", "Std. Error Kurtosis")
23     descr.col <- c("Value")
24   }
25   df <- data.frame(stats, row.names=descr.row)
26   colnames(df) <- descr.col
27
28   df
29 }
30
31 dstats.mean <- function(data, ...) {
32   mean(data, ...)
33 }
34
35 dstats.median <- function(data, ...) {
36   median(data, ...)
37 }
38
39 dstats.quartile.lower <- function(data, ...) {
40   quantile(data, ...)[[2]]
41 }
42
43 dstats.quartile.upper <- function(data, ...) {
44   quantile(data, ...)[[4]]
45 }
46
47 dstats.quartile.range <- function(data) {
48   dstats.quartile.upper(data) - dstats.quartile.lower(data)
49 }
50
51 dstats.min <- function(data, ...) {
52   min(data, ...)
53 }
54
55 dstats.max <- function(data, ...) {
56   max(data, ...)
57 }
58
59 dstats.range <- function(data) {
60   max(data) - min(data)
61 }
62
63 dstats.variance <- function(data, ...) {
64   var(data, ...)
65 }
66
67 dstats.std.dev <- function(data) {
68   sd(data)
69 }
70
71 dstats.coef.var <- function(data) {
72   mn <- mean(data)
73   if (abs(mn) > 1.987171e-15) {
```

```

74 |     (var(data) / mean(data)) * 100
75 | } else
76 |     0
77 | }
78 |
79 | dstats.std.error <- function(data) {
80 |     sd(data) / sqrt(length(data))
81 | }
82 |
83 | dstats.skew <- function(data) {
84 |     n <- length(data)
85 |     mean <- mean(data)
86 |     (n * sum(sapply(data, FUN=function(x){(x - mean)^3}))) /
87 |       ((n - 1)*(n - 2)*dstats.std.dev(data)^3)
88 | }
89 |
90 | dstats.std.error.skew <- function(data) {
91 |     n <- length(data)
92 |     sqrt((6*n*(n - 1)) / ((n - 2)*(n + 1)*(n + 3)))
93 | }
94 |
95 | dstats.test.skew <- function(data) {
96 |     dstats.skew(data) / dstats.std.error.skew
97 | }
98 |
99 | dstats.kurtosis <- function(data) {
100 |     n <- length(data)
101 |     mean <- mean(data)
102 |     (n*(n + 1)*sum(sapply(data, FUN=function(x){(x - mean)^4})) - 3*(sum(sapply(data, FUN=
103 |       function(x){(x - mean)^2})))^2*(n - 1)) /
104 |       ((n - 1)*(n - 2)*(n - 3)*dstats.variance(data)^2)
105 | }
106 |
107 | dstats.std.error.kurtosis <- function(data) {
108 |     n <- length(data)
109 |     2 * dstats.std.error.skew(data) * sqrt((n^2 - 1) / ((n - 3)*(n + 5)))
110 | }
111 |
112 | dstats.test.kurtosis <- function(data) {
113 |     dstats.kurtosis(data) / dstats.std.error.kurtosis(data)
114 | }

```

Листинг C.1: Описательные статистики