Лабораторная работа №3. Решение смешанной задачи методом разделения переменных

Группа 7
Вариант 16
Павлов Александр

1. Постановка задачи

- Точное решение: $u(x,t) = \cos(x+1)\sin(t+1)\,e^{-2t^2-1}$
- Тип уравнения: гиперболическое (Г)
- Тип граничных условий: слева – 3-го рода, справа – 3-го рода
- $L = 1$
- $a = 2, h = 2$

Получаем следующую задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 4e^{-2\,t^2-1}\cos(x+1)\left((4\,t^2+1)\sin(t+1) - 2tcos(t+1)\right)$$

$$u|_{t=0} = \frac{\cos(x+1)\sin(1)}{e}$$

$$u_t|_{t=0} = \frac{\cos(x+1)\cos(1)}{e}$$

$$(u_x - 2u)|_{x=0} = \left(-e^{-2\,t^2-1}(2\cos(1)+\sin(1))\right)\sin(t+1)$$

$$(u_x + 2u)|_{x=1} = \left(e^{-2t^2-1}(2\cos(2)-\sin(2))\right)\sin(t+1)$$

2. Решение поставленной задачи

Приведём эту задачу к однородной с помощью замены $u = v + w$. Приняв

$$w(x,t) = \frac{1}{8}(e^{-2t^2-1}(6\cos(1) + 2\cos(2) + 3\sin(1) - \sin(2) - (2x)(2\cos(1) - \\ - 2\cos(2) + \sin(1) + \sin(2))))\sin(t+1),$$

получаем однородную задачу относительно v:

$$v_{tt} = 4v_{xx} + \frac{1}{8}e^{-2t^2-1}(((8(16t^2-1))\cos(x+1) + (16t^2-5)(-6\cos(1) - 2\cos(2) - 3\sin(1) + \sin(2) + (2x)(2\cos(1) - 2\cos(2) + \sin(1) + \sin(2))))\sin(t+1) - ((8t)\cos(t+1))(-6\cos(1) - 2\cos(2) + 8\cos(x+1) - 3\sin(1) + \sin(2) + (2x)(2\cos(1) - 2\cos(2) + \sin(1) + \sin(2))))$$

$$v|_{t=0} = \sin(1)(-6\cos(1) - 2\cos(2) + 8\cos(x+1) - 3\sin(1) + \sin(2) + (2x)(2\cos(1) - 2\cos(2) + \sin(1) + \sin(2)))/(8e) = \nu(x)$$

$$v_t|_{t=0} = \cos(1)\left(-6\cos(1) - 2\cos(2) + 8\cos(x+1) - 3\sin(1) + \sin(2) + (2x)(2\cos(1) - 2\cos(2) + \sin(1) + \sin(2))\right)/(8e) = \mu(x)$$

$$v_x - 2v|_{x=0} = 0$$

$$v_x + 2v|_{x=1} = 0$$

Решение ищем в виде $\sum X_k(x)T_k(t)$.

Составляем задачу Штурма-Лиувилля:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'(0) - 2X(0) = 0$$

$$X'(1) + 2X(1) = 0$$

Решение ищем в случае $\lambda > 0$ в виде

$$X(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$C_1 = \frac{C_2\sqrt{\lambda}}{2}$$

Получаем следующее выражение:

$$X_k(x) = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2}\cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(\sqrt{\lambda_k}x)$$

где $\sqrt{\lambda_k}$ – корни уравнения:

$$tg(\sqrt{\lambda}) = \frac{-4\sqrt{\lambda}}{4-\sqrt{\lambda}}$$

Решаем задачу для T_k:

$$T_k'' + 4\lambda T_k = g_k(t)$$

$$T_k(0) = \nu_k$$

$$T_k'(0) = \mu_k$$

где

$$g_k(t) = \frac{(X_k, g(x,t))}{(X_k, X_k)}, \nu_k = \frac{(X_k, \nu(x))}{(X_k, X_k)}, \mu_k = \frac{(X_k, \mu(x))}{X_k, X_k}$$

Получаем следующее:

$$T_{k_{\text{oo}}}(t) = \nu_k \cos\left(2\sqrt{\lambda_k}t\right) + \frac{\mu_k}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin(2\sqrt{\lambda_k}t)$$

$$T_{k_{\text{чн}}}(t) = \int_0^t K_k(t-\tau) g_k(\tau)\, d\tau$$

где функция Коши $K_k(t)$ – решение задачи:

$$T_k''(t) + 4\lambda_k T_k(t) = 0$$

$$T_k(0) = 0$$

$$T_k'(0) = 1$$

$$K_k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin(2\sqrt{\lambda_k}t)$$

Найдя из приведённого выше $T_{\text{k}_{\text{oo}}}(t)$ и $T_{k_{\text{чн}}}(t)$, получаем решение:

$$T_k(t) = T_{k_{\text{oo}}}(t) + T_{k_{\text{чн}}}(t)$$

Тогда ответом к поставленной задаче будет являться:

$$u(x,t) = w(x,t) + \sum_{k=1}^{N} X_k(x) T_k(t)$$

где N – заданное в программе количество слагаемых.