Audition CNRS – Concours 06/03

Réseaux structurés : cryptanalyse et nouvelles constructions

Alice Pellet-Mary

- Janvier - mars 2020 : chercheure invitée au Simons institute, Berkeley
- Depuis novembre 2019 : Post-doctorante à KU Leuven, avec Frederik Vercauteren
- De 2016 à 2019 : Doctorante à l'ENS de Lyon, sous la direction de Damien Stehlé

Problèmes algorithmiques et cryptographie

Primitives cryptographiques

chiffrement | signature | chiffrement homomorphe | chiffrement fonctionnel | ...

codes correcteurs | réseaux euclidiens | isogénies

factorisation | logarithme discret | ...

Problèmes algorithmiques (supposés difficiles)

Problèmes algorithmiques et cryptographie

Primitives cryptographiques

chiffrement | signature | chiffrement homomorphe | chiffrement fonctionnel | ...

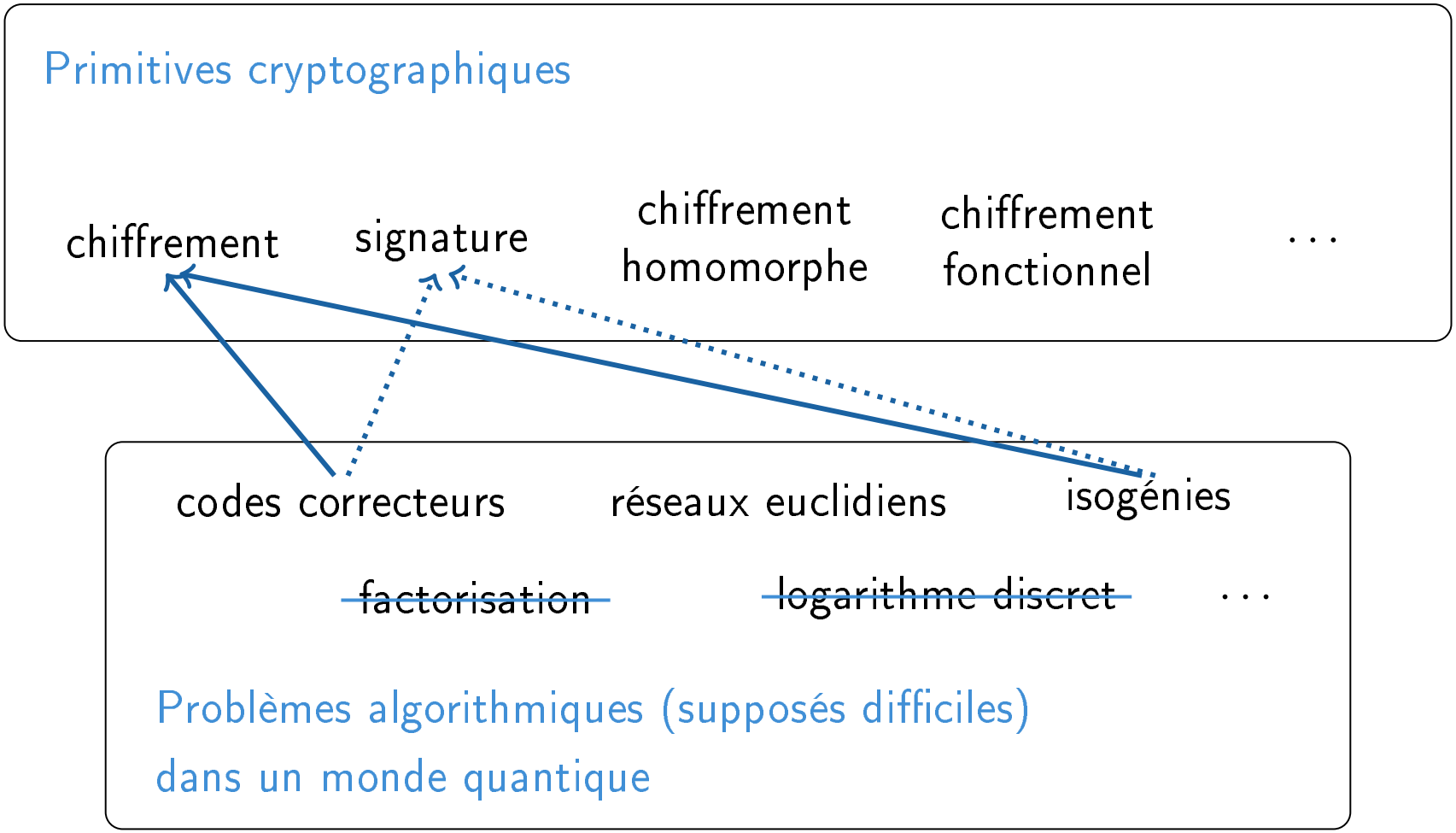
codes correcteurs | réseaux euclidiens | isogénies

~~factorisation~~ | ~~logarithme discret~~ | ...

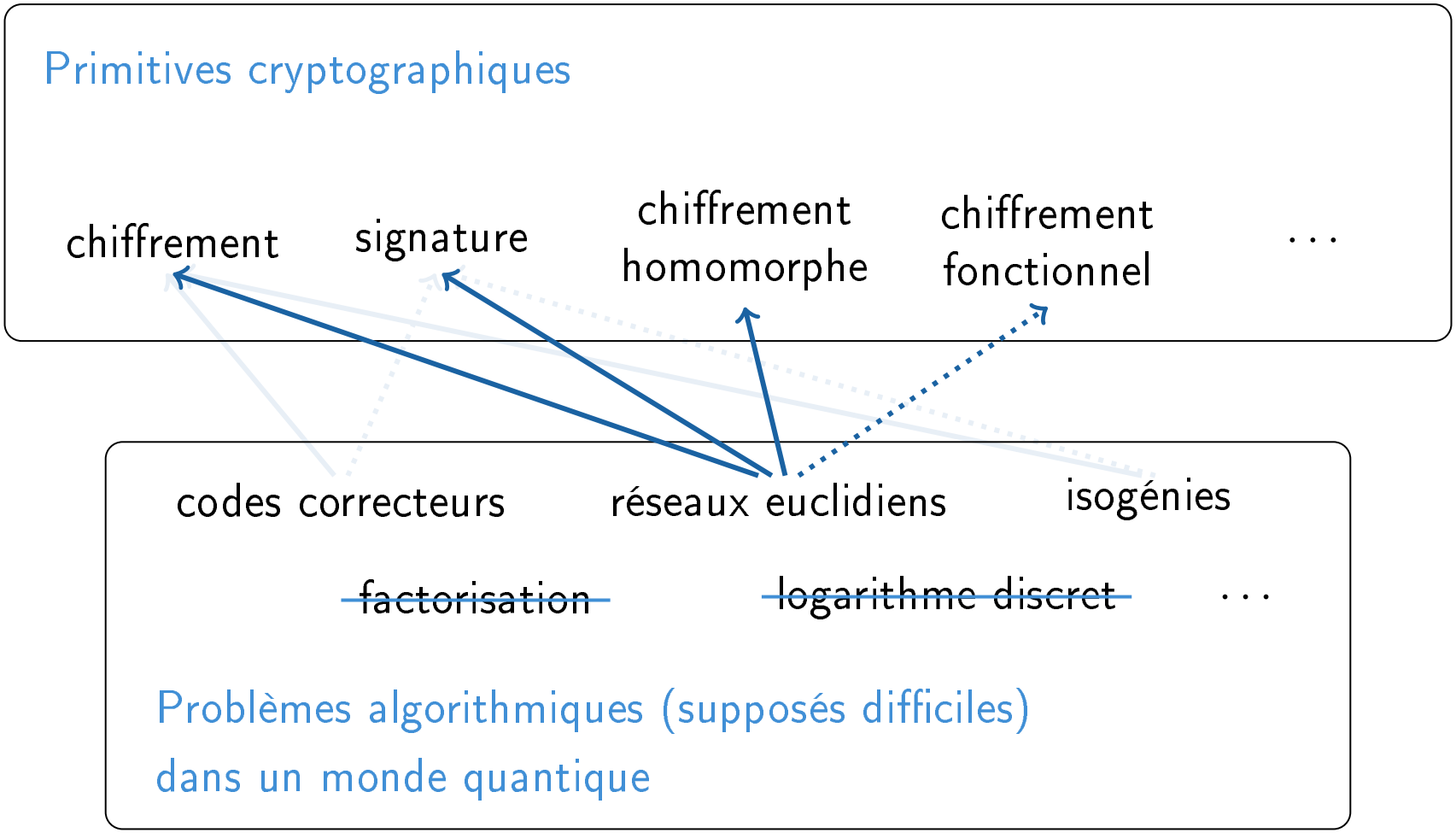
Problèmes algorithmiques (supposés difficiles)

dans un monde quantique

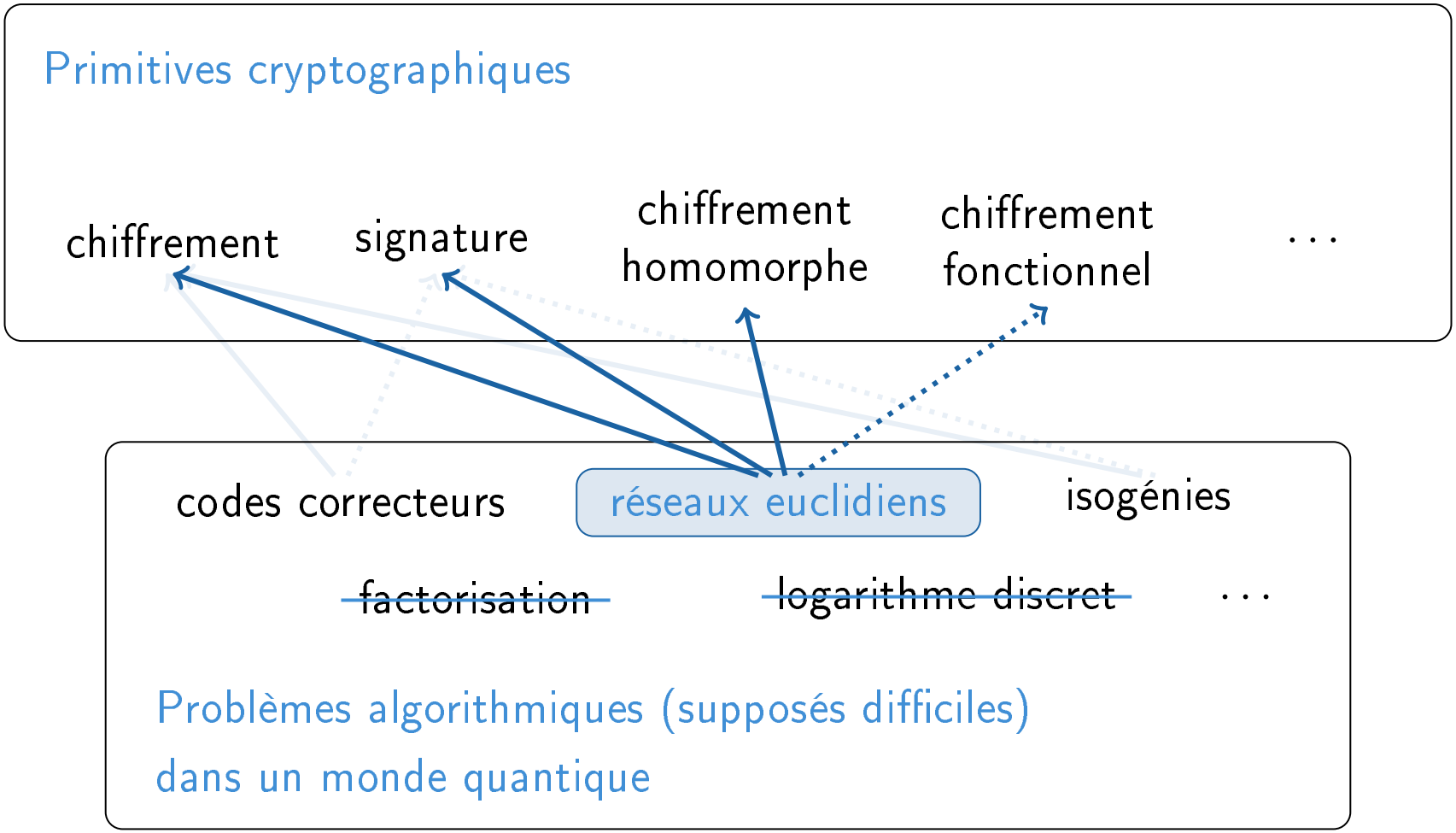
Problèmes algorithmiques et cryptographie



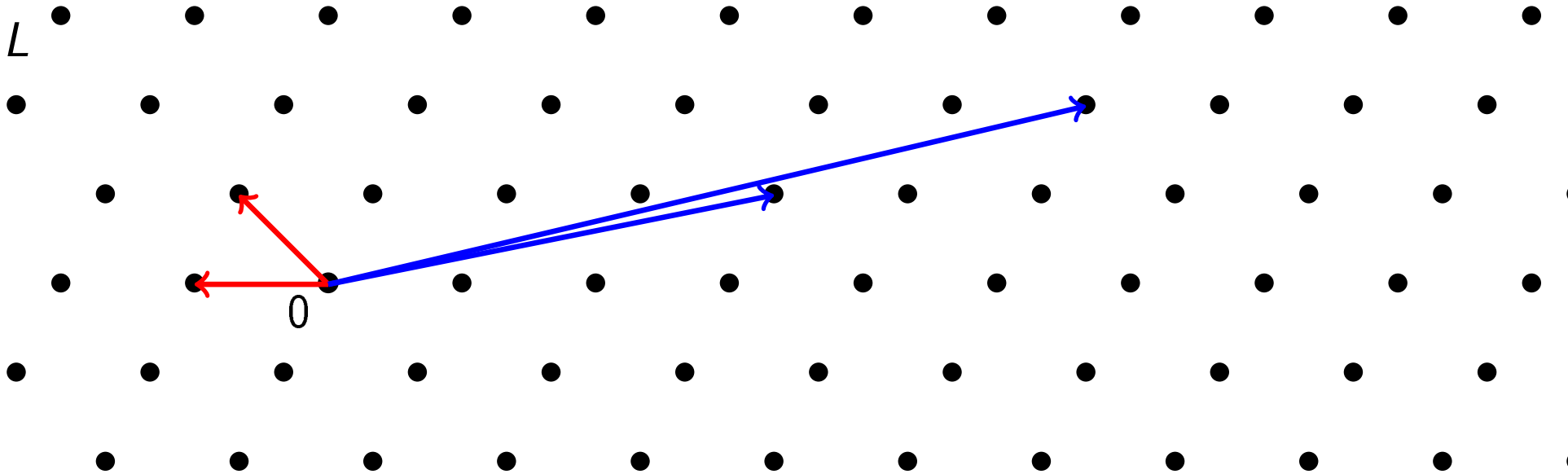
Problèmes algorithmiques et cryptographie



Problèmes algorithmiques et cryptographie

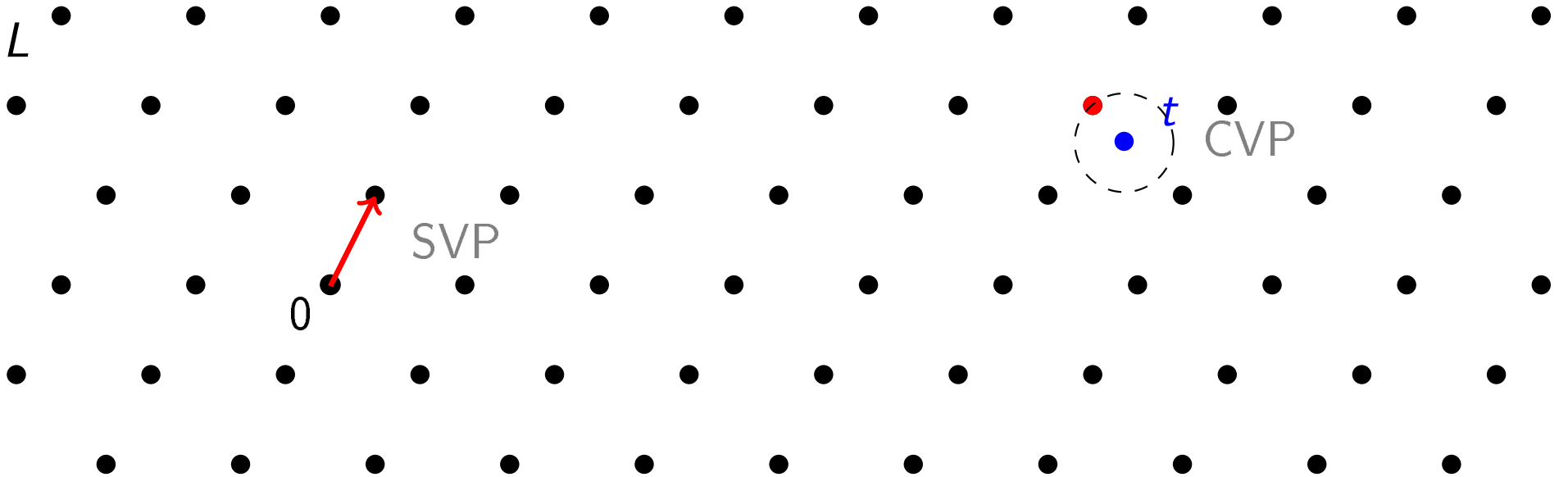


Réseau euclidien



- $L = \{Bx \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$ est un réseau
- $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une base
- n est la dimension de L

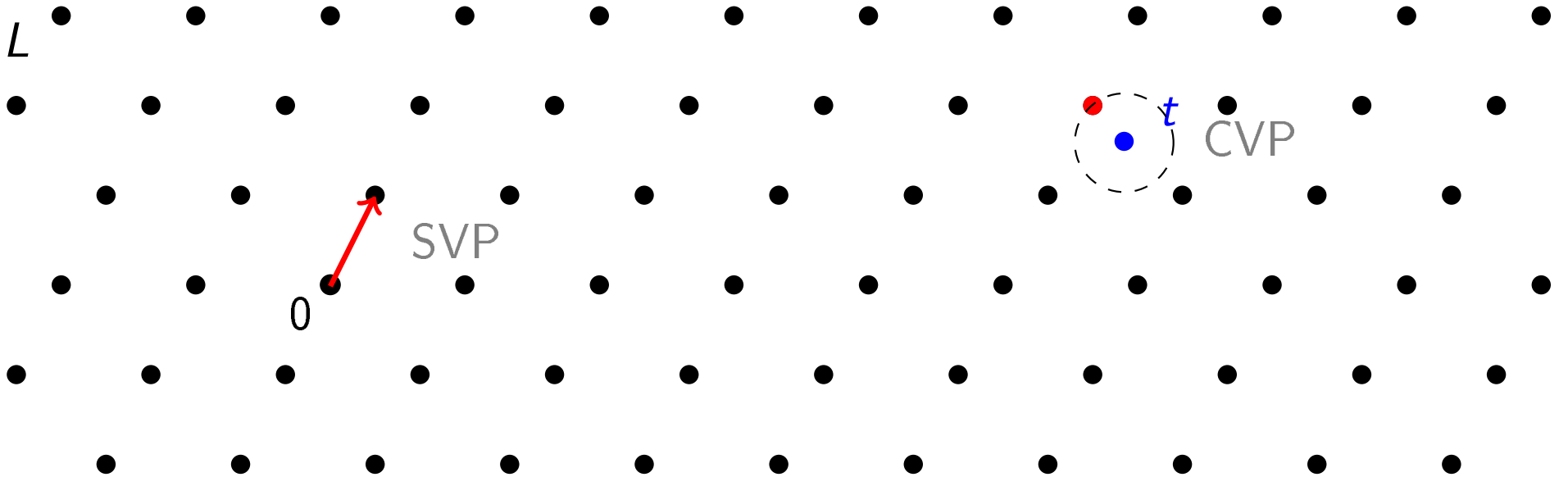
Problèmes algorithmiques



SVP : Shortest Vector Problem

CVP : Closest Vector Problem

Problèmes algorithmiques



SVP : Shortest Vector Problem

CVP : Closest Vector Problem

Problèmes (supposés) difficiles

- même avec un ordinateur quantique
- même en autorisant une approximation $\mathrm{poly}(n)$

Réseaux modules

Réseau module : réseau euclidien + structure algébrique

Réseaux modules

Réseau module : réseau euclidien + structure algébrique

- Réseau de dimension n sur $\mathbb{Z}$

Réseaux modules

Réseau module : réseau euclidien + structure algébrique

- Réseau de dimension $n = kd$ sur $\mathbb{Z}$
- Réseau de rang k sur $R := \mathbb{Z}[X]/P(X)$, avec P irréductible de degré d

(en fais, anneau des entiers d'un corps de nombres)

e.g., $k = 3$, $d = 256$, $n = 768$

Réseaux modules

Réseau module : réseau euclidien + structure algébrique

- Réseau de dimension $n = kd$ sur $\mathbb{Z}$
- Réseau de rang k sur $R := \mathbb{Z}[X]/P(X)$, avec P irréductible de degré d

(en fais, anneau des entiers d'un corps de nombres)

Avantages/inconvénients :

+ Constructions plus efficaces
– SVP restreint aux réseaux modules pourrait être plus facile

e.g., $k = 3$, $d = 256$, $n = 768$

Réseaux modules

Réseau module : réseau euclidien + structure algébrique

- Réseau de dimension $n = kd$ sur $\mathbb{Z}$
- Réseau de rang k sur $R := \mathbb{Z}[X]/P(X)$, avec P irréductible de degré d

(en fais, anneau des entiers d'un corps de nombres)

Avantages/inconvénients :

+ Constructions plus efficaces
– SVP restreint aux réseaux modules pourrait être plus facile (pas pour l'instant)

e.g., $k = 3$, $d = 256$, $n = 768$

Un de mes résultats : LLL pour les réseaux modules

Motivation

LLL sur $\mathbb{Z}$

Résout SVP
Temps : $\mathrm{poly}(n)$
Approx : 2^n

[LLL82] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. Mathematische Annalen.

Motivation

LLL sur $\mathbb{Z}$

Résout SVP
Temps : $\mathrm{poly}(n)$
Approx : 2^n

LLL sur R ?

Résoudrait SVP dans les modules de rang k
Temps : $\mathrm{poly}(d, k)$
Approx : $\mathrm{poly}(d) \cdot 2^k$

[LLL82] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. Mathematische Annalen.

Motivation

LLL sur $\mathbb{Z}$

Résout SVP
Temps : $\mathrm{poly}(n)$
Approx : 2^n

LLL sur R ?

Résoudrait SVP dans les modules de rang k
Temps : $\mathrm{poly}(d, k)$
Approx : $\mathrm{poly}(d) \cdot 2^k$

- Attaquerait 11 des 26 candidats du NIST[1]

[LLL82] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. Mathematische Annalen.

[1] Processus de standardisation post-quantique débuté en 2017

Motivation

LLL sur $\mathbb{Z}$

Résout SVP
Temps : $\mathrm{poly}(n)$
Approx : 2^n

LLL sur R ?

Résoudrait SVP dans les modules de rang k
Temps : $\mathrm{poly}(d, k)$
Approx : $\mathrm{poly}(d) \cdot 2^k$

- Attaquerait 11 des 26 candidats du NIST[1]

Problème ouvert depuis plus de 20 ans [Nap96, FP96, KL17]
$\Rightarrow$ jusqu'à présent : généralisation seulement si $d \leq 4$

[Nap96] H. Napias. A generalization of the LLL-algorithm over Euclidean rings or orders. Journal de théorie des nombres de Bordeaux.
[FP96] C. Fieker, M. E. Pohst. Lattices over number fields. ANTS.
[KL17] T. Kim, C. Lee. Lattice reductions over euclidean rings with applications to cryptanalysis. IMACC.

Résultat

An LLL Algorithm for Module Lattices

avec C. Lee, D. Stehlé et A. Wallet, Asiacrypt 2019.

Résultat

An LLL Algorithm for Module Lattices

avec C. Lee, D. Stehlé et A. Wallet, Asiacrypt 2019.

Algorithme LLL pour n'importe quel P de degré d :

- Approx : $\mathrm{quasipoly}(d)^k$ (pour les cyclotomiques)
- Temps : $\mathrm{poly}(k, d)$ à condition d'avoir un oracle résolvant CVP dans un réseau $L = L(R)$ fixé

Résultat

An LLL Algorithm for Module Lattices

avec C. Lee, D. Stehlé et A. Wallet, Asiacrypt 2019.

Algorithme LLL pour n'importe quel P de degré d :

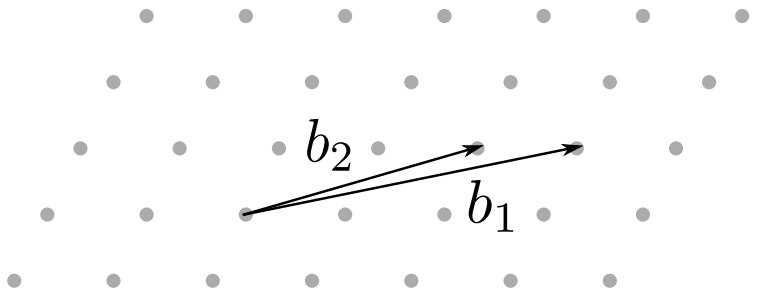
- Approx : $\mathrm{quasipoly}(d)^k$ (pour les cyclotomiques)
- Temps : $\mathrm{poly}(k, d)$ à condition d'avoir un oracle résolvant CVP dans un réseau $L = L(R)$ fixé

À retenir :

⋆ Premier algorithme LLL pour tous les polynômes P

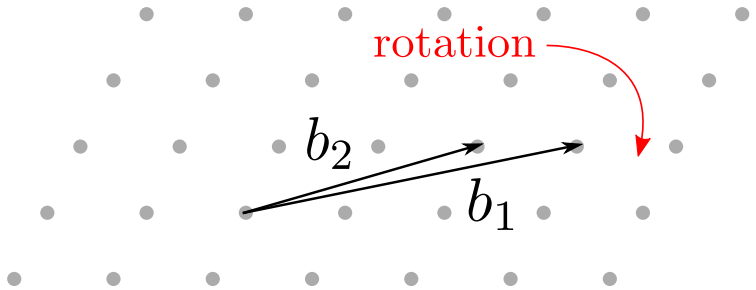
⋆ Bon formalisme pour passer de $\mathbb{Z}$ à R

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



$$M = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)

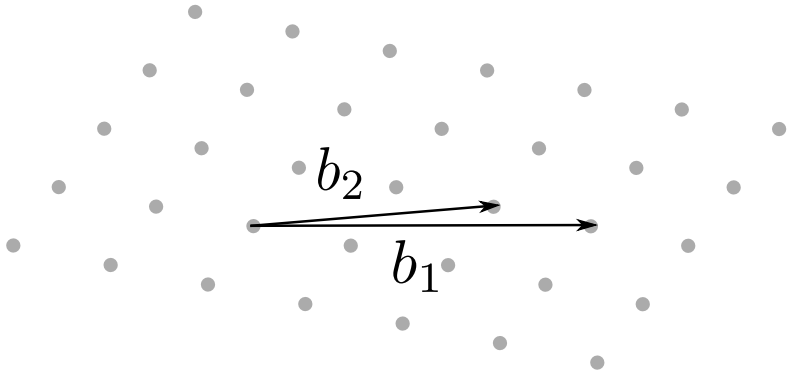


rotation

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

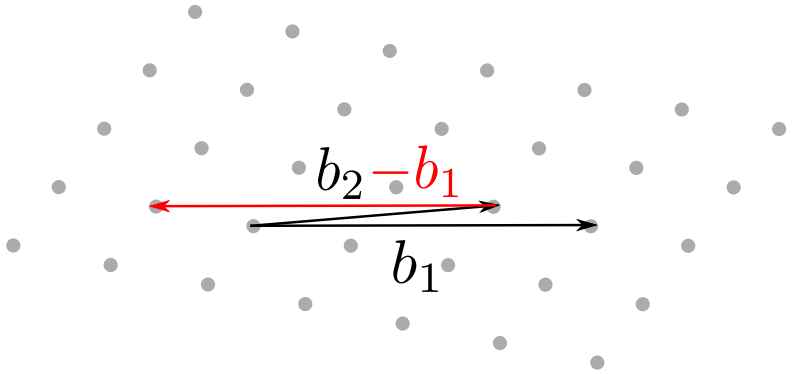
factorisation QR

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



$$M = \begin{pmatrix} 10{,}2 & 7{,}3 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)

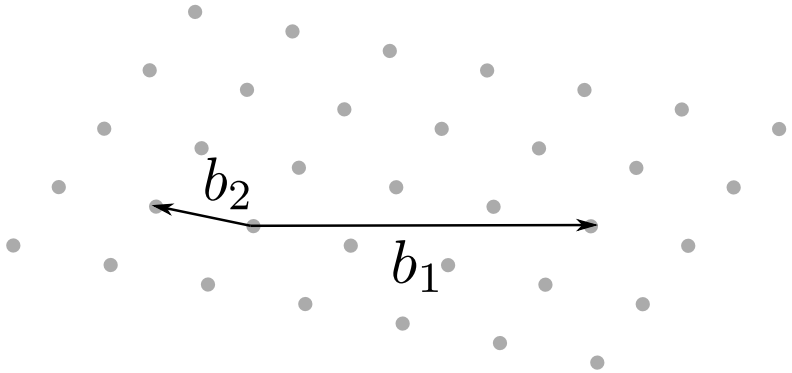


réduire b_2 avec b_1

$$M = \begin{pmatrix} 10{,}2 & 7{,}3 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

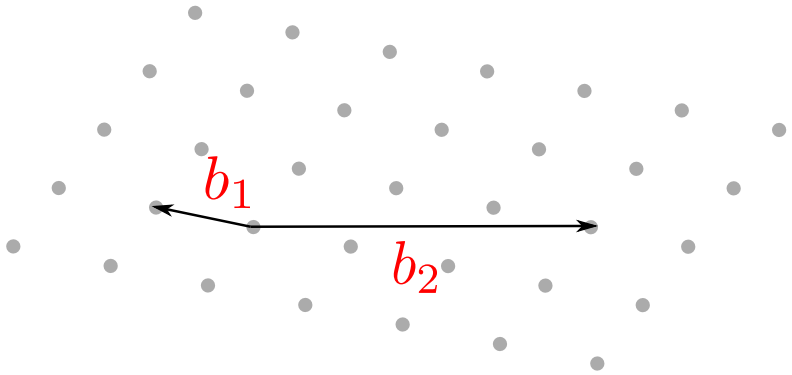
"division euclidienne centrée"
(sur $\mathbb{R}$) de 7,3 par 10,2

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



$$M = \begin{pmatrix} 10{,}2 & -2{,}9 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

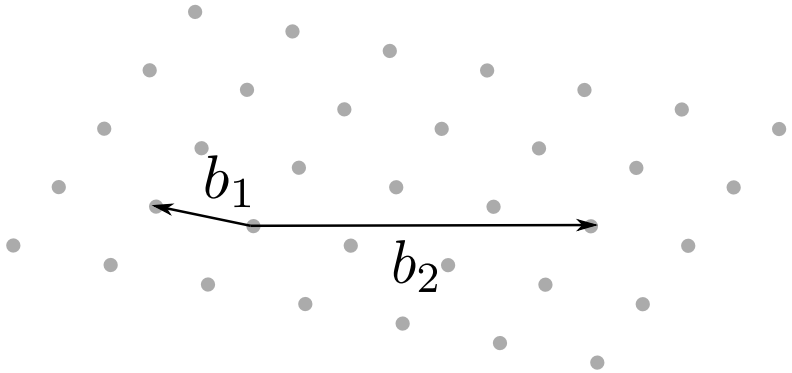
LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



échanger b_1 et b_2

$$M = \begin{pmatrix} -2{,}9 & 10{,}2 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$

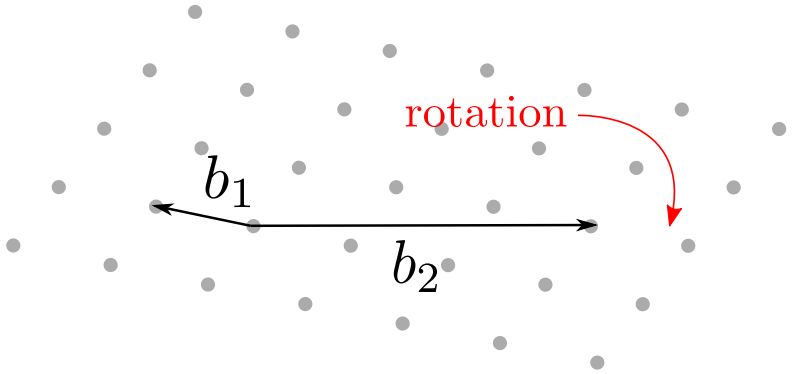
LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



recommencer

$$M = \begin{pmatrix} -2{,}9 & 10{,}2 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$

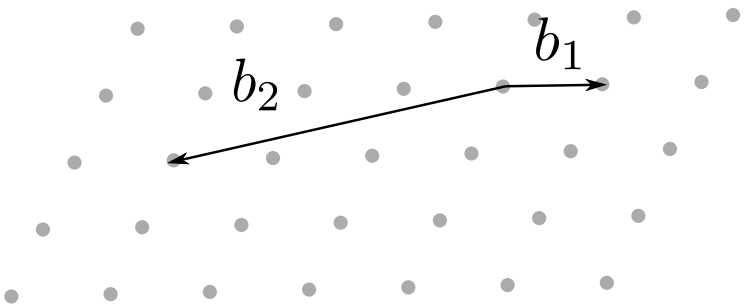
LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



rotation

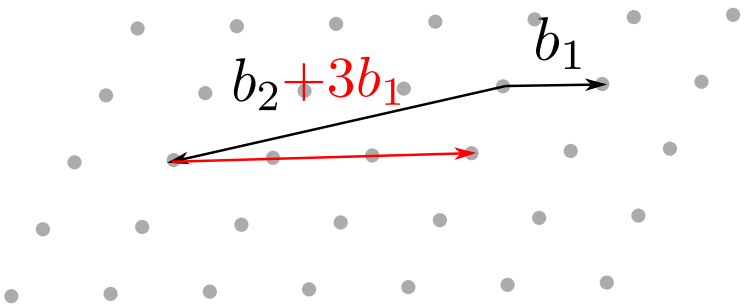
$$M = \begin{pmatrix} -2{,}9 & 10{,}2 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



$$M = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)

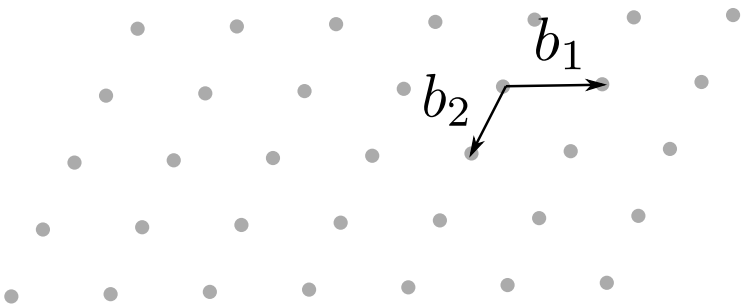


réduire b_2 avec b_1

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

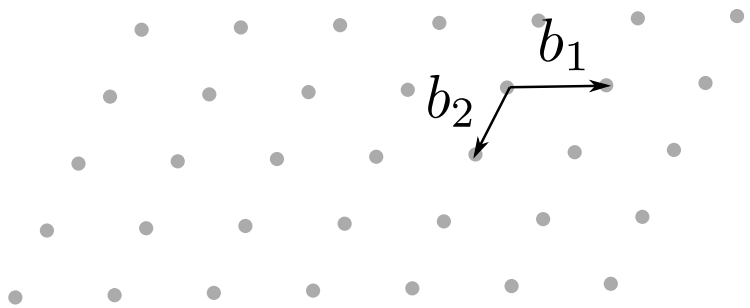
"division euclidienne centrée" (sur $\mathbb{R}$) de -10 par 3

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

LLL sur $\mathbb{Z}$ en dimension 2 (Lagrange-Gauss)



$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ingrédient principal

La division euclidienne (et la factorisation QR)

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $r \in R$ t.q.

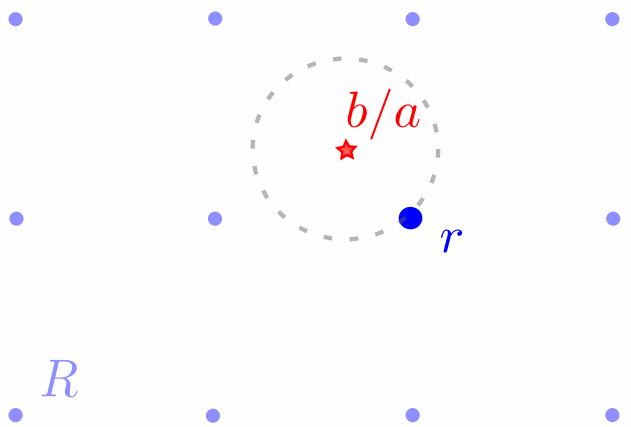
$$\|b/a - r\| \leq 1/2$$

Division euclidienne $\sim$ CVP dans R

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $r \in R$ t.q.

$$\|b/a - r\| \leq 1/2$$

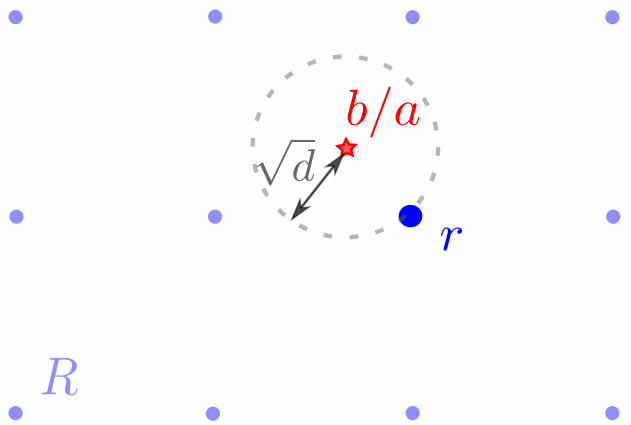


Division euclidienne $\sim$ CVP dans R

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $r \in R$ t.q.

$$\|b/a - r\| \leq 1/2$$



Division euclidienne $\sim$ CVP dans R

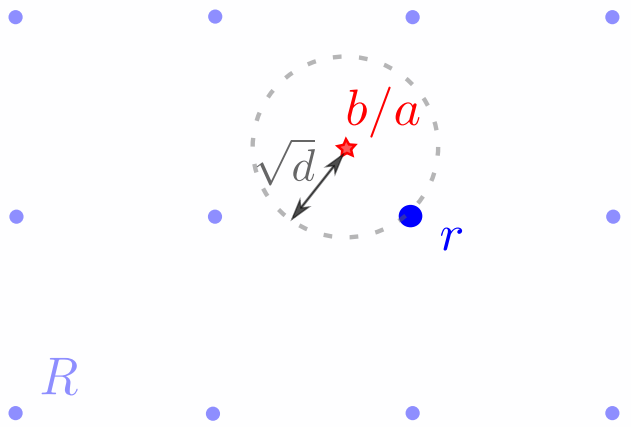
Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$

Sortie : $u, v \in R$ t.q.

$\|b/a - u/v\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$

et $\|v\| \leq \mathrm{poly}(d)$

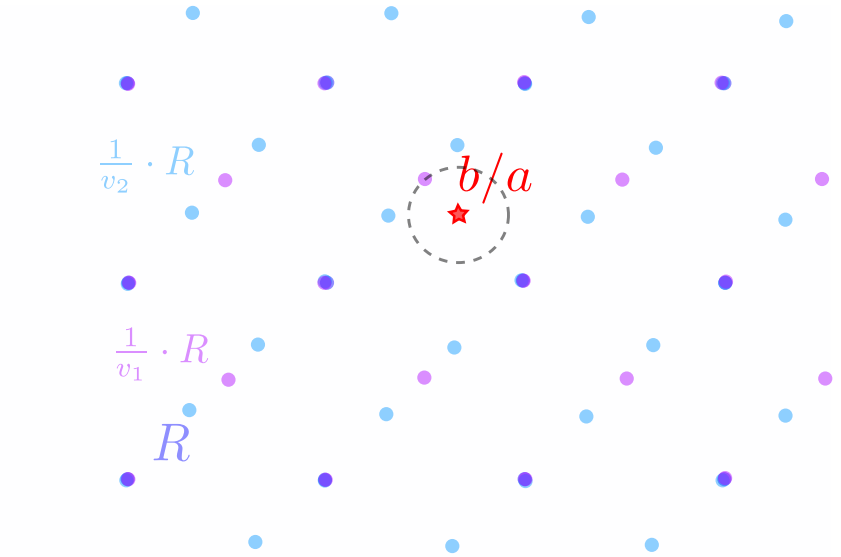


Division euclidienne $\sim$ CVP dans R

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $u, v \in R$ t.q.

$\|b/a - u/v\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$
et $\|v\| \leq \mathrm{poly}(d)$



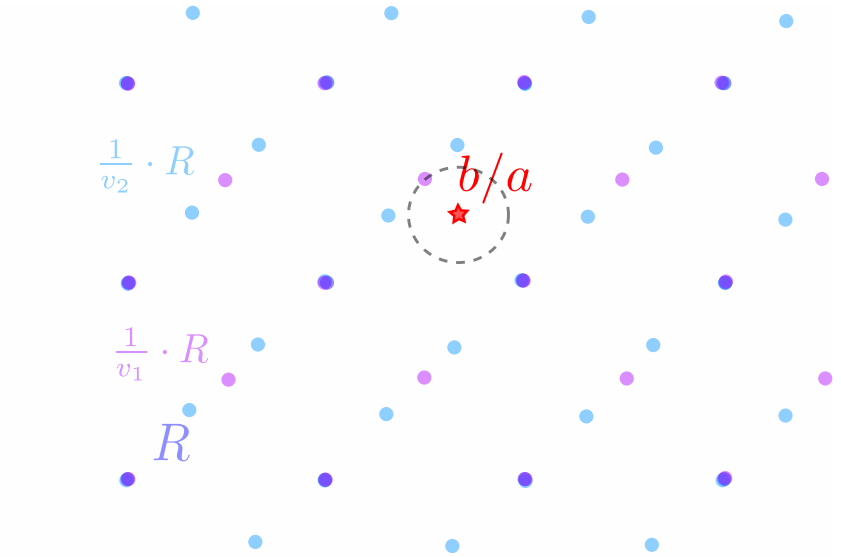
Division euclidienne $\sim$ CVP dans R

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $u, v \in R$ t.q.

$\|b/a - u/v\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$

et $\|v\| \leq \mathrm{poly}(d)$



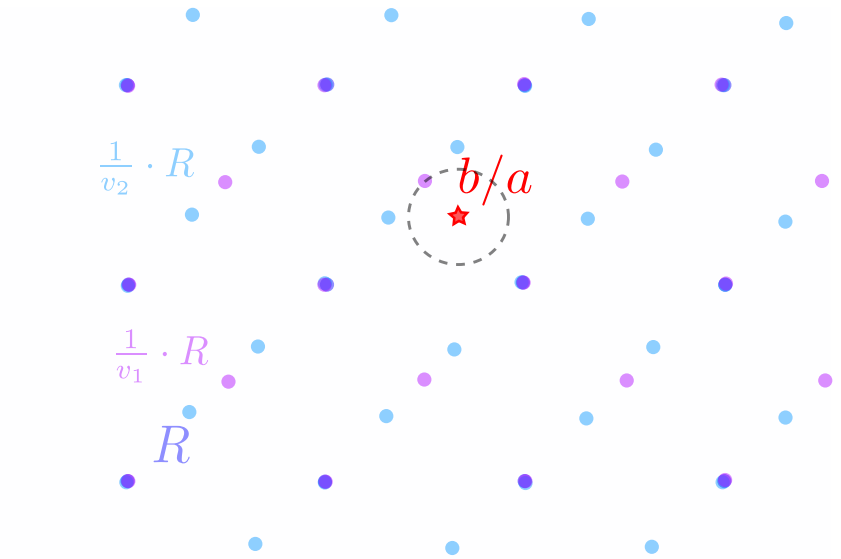
Comment calculer u et v ?

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $u, v \in R$ t.q.

$\|b/a - u/v\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$

et $\|v\| \leq \mathrm{poly}(d)$



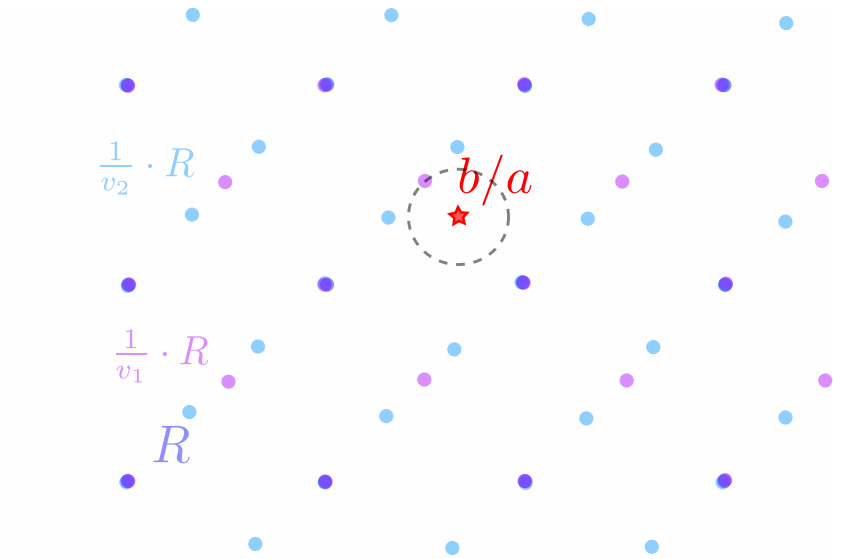
Comment calculer u et v ?

Techniques :
- chercher $u/v = \prod_i x_i^{\alpha_i}$ avec $x_i \in R$ fixés et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$

Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$
Sortie : $u, v \in R$ t.q.

$\|b/a - u/v\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$
et $\|v\| \leq \mathrm{poly}(d)$



Comment calculer u et v ?

Techniques :

- chercher $u/v = \prod_i x_i^{\alpha_i}$ avec $x_i \in R$ fixés et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$
- prendre le log
  - $\log(u/v) \in L := \{\sum_i \alpha_i \log(x_i)\,,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$

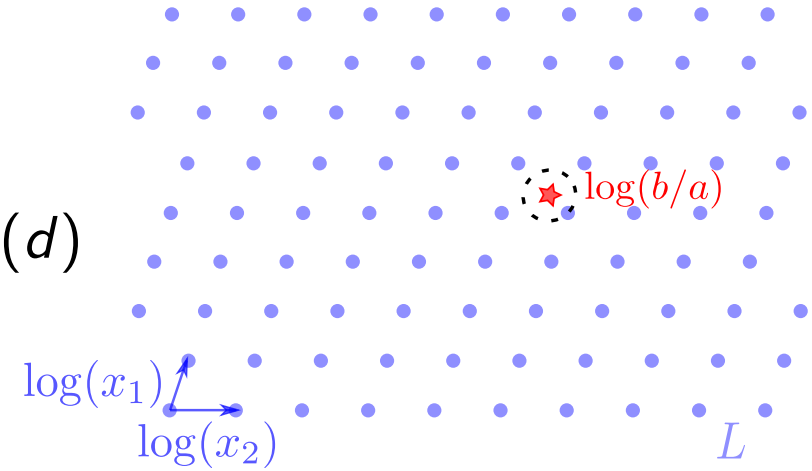
Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$

Sortie : $\log(u/v) \in L$ t.q.

$$\|\log(b/a) - \log(u/v)\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$$

et $\|\log(v)\| \leq O(\log d)$



Comment calculer u et v ?

Techniques :

- chercher $u/v = \prod_i x_i^{\alpha_i}$ avec $x_i \in R$ fixés et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$
- prendre le log
  - $\log(u/v) \in L := \{\sum_i \alpha_i \log(x_i)\,,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$

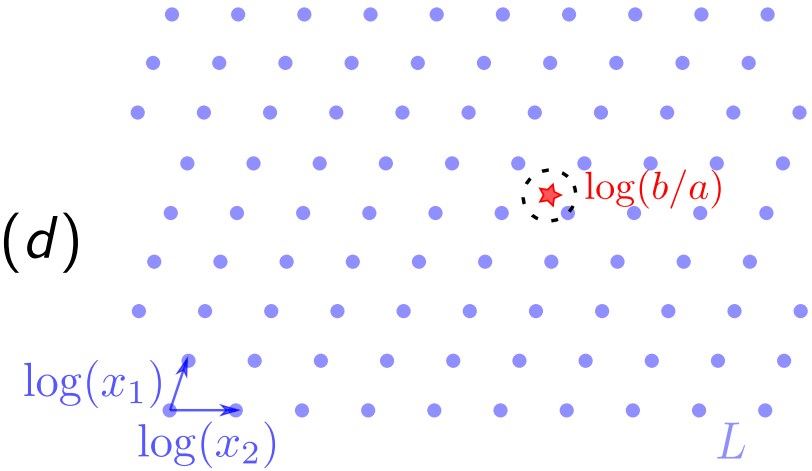
Une pseudo-division euclidienne sur R

Entrée : $a, b \in R$

Sortie : $\log(u/v) \in L$ t.q.

$$\|\log(b/a) - \log(u/v)\| \leq 1/\mathrm{poly}(d)$$

et $\|\log(v)\| \leq O(\log d)$



Pseudo-division euclidienne $\sim$ CVP dans L

Conclusion et impact

CVP dans $L \Rightarrow$ pseudo-division euclidienne dans R

$\Rightarrow$ LLL pour les R-modules de rang 2

Conclusion et impact

CVP dans $L \Rightarrow$ pseudo-division euclidienne dans R

$\Rightarrow$ LLL pour les R-modules de rang 2

Sous le tapis :

- le 'vrai' L contient les unités et le groupe des classes de R

Conclusion et impact

CVP dans $L \Rightarrow$ pseudo-division euclidienne dans R
$\Rightarrow$ LLL pour les R-modules de rang 2

Sous le tapis :

- le 'vrai' L contient les unités et le groupe des classes de R
- heuristiques sur la densité de L

Conclusion et impact

CVP dans $L \Rightarrow$ pseudo-division euclidienne dans R

$\Rightarrow$ LLL pour les R-modules de rang k

Sous le tapis :

- le 'vrai' L contient les unités et le groupe des classes de R
- heuristiques sur la densité de L
- généralisation au rang k

Conclusion et impact

CVP dans $L \Rightarrow$ pseudo-division euclidienne dans R
$\Rightarrow$ LLL pour les R-modules de rang k

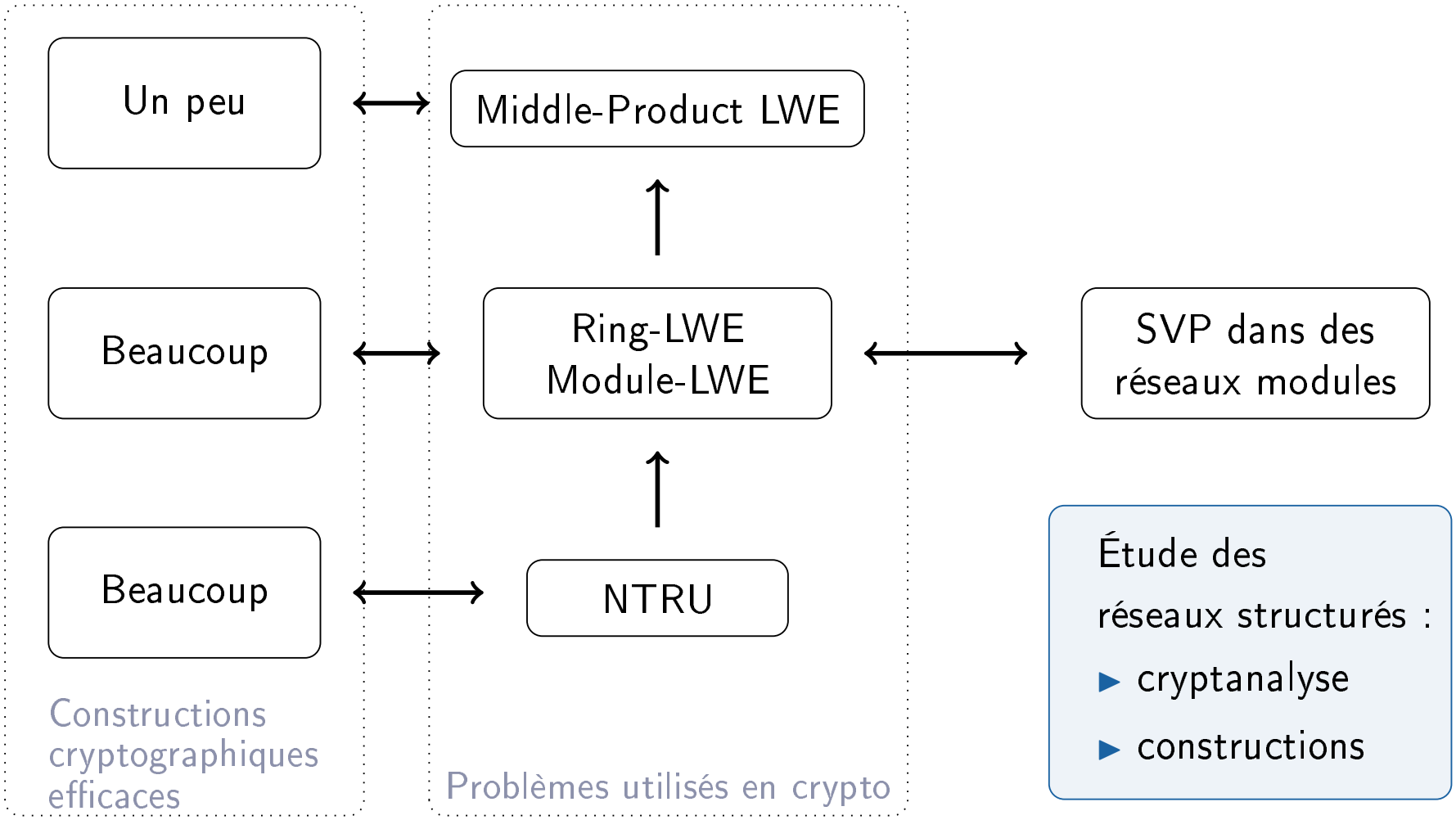
Sous le tapis :

- le 'vrai' L contient les unités et le groupe des classes de R
- heuristiques sur la densité de L
- généralisation au rang k

Une seule chose manquante : un algorithme efficace pour CVP dans L

Projet de recherche

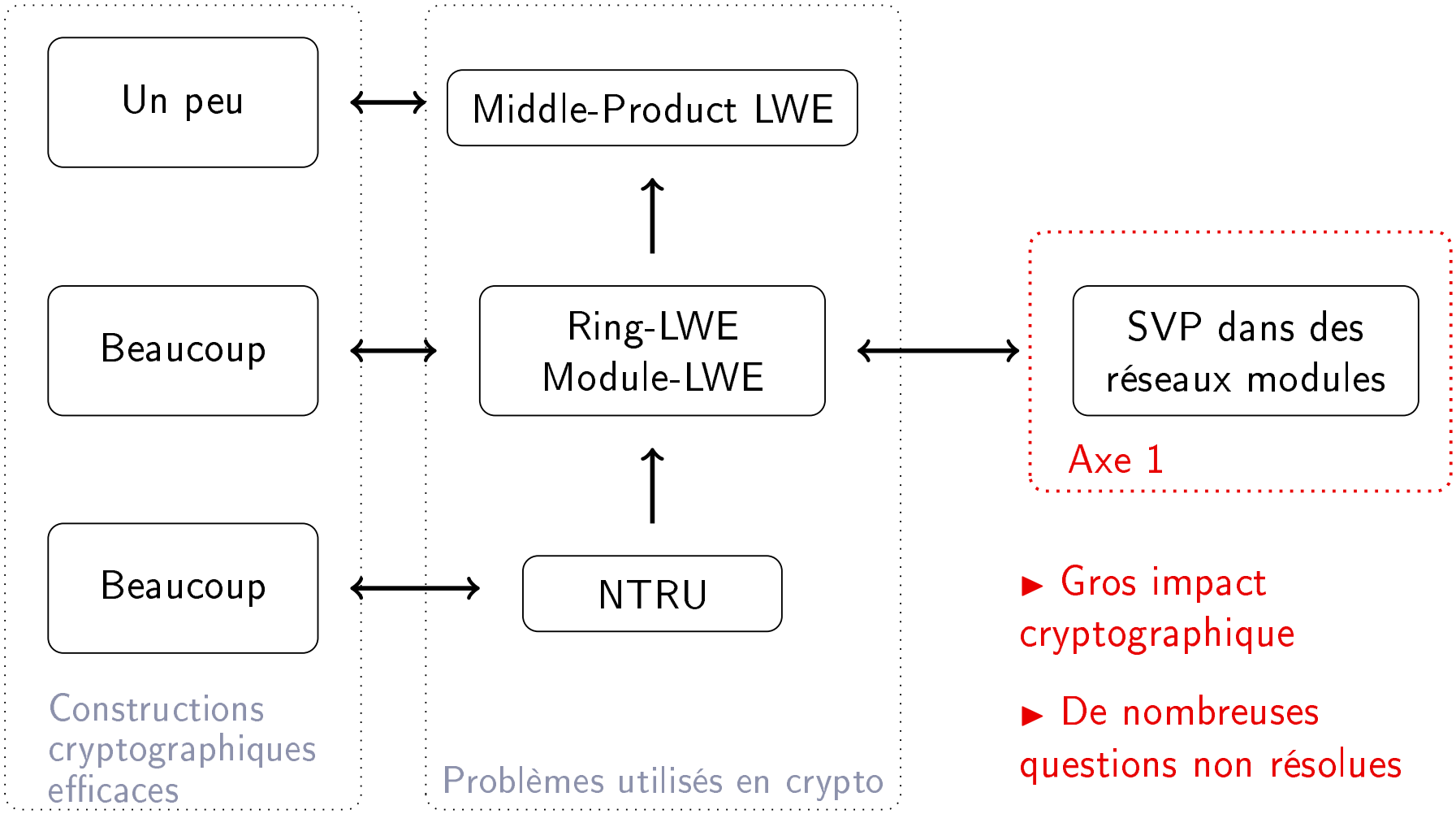
Projet de recherche



Étude des réseaux structurés :

- cryptanalyse
- constructions

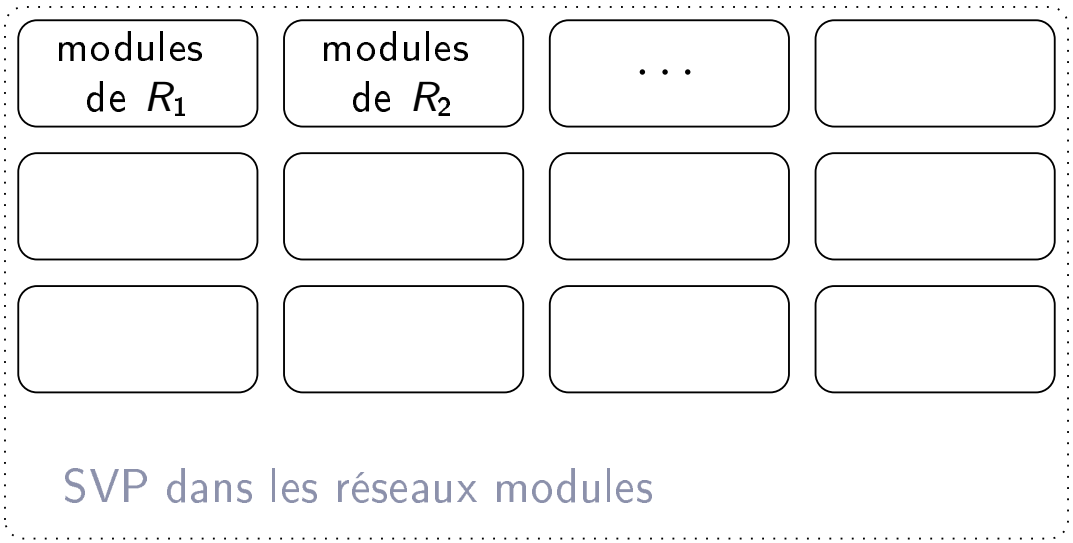
1. SVP dans les réseaux modules



- Gros impact cryptographique
- De nombreuses questions non résolues

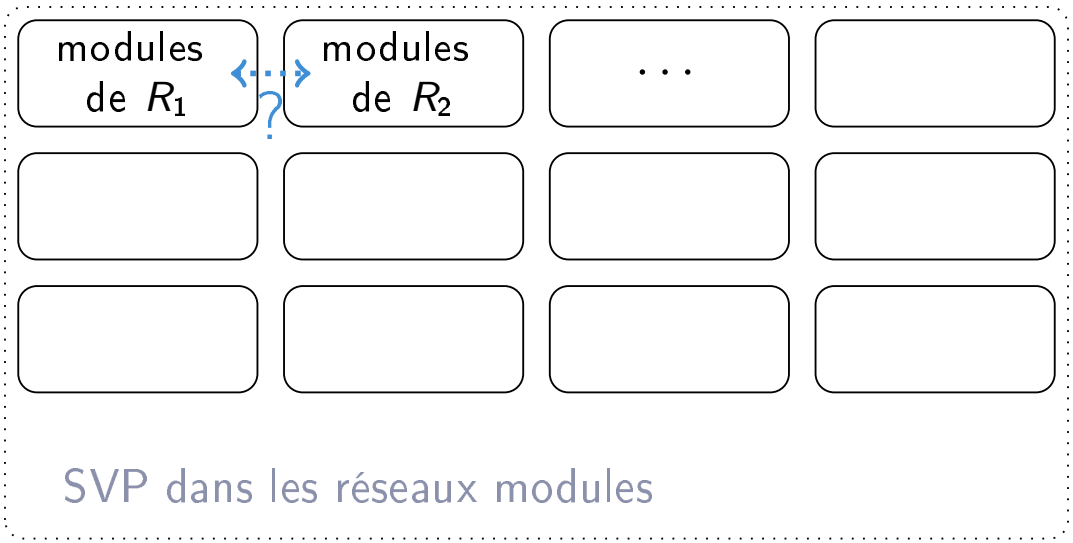
1. SVP dans les réseaux modules

Une question possible :



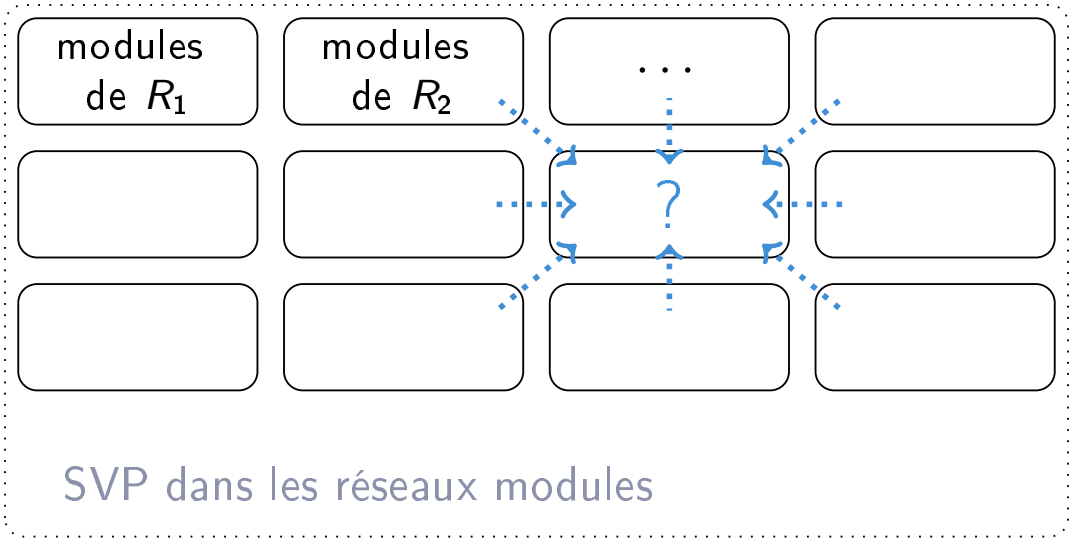
1. SVP dans les réseaux modules

Une question possible :



- Deux anneaux avec la même géométrie ?

Une question possible :



- Deux anneaux avec la même géométrie ?
- Un anneau qui en domine d'autres ?

Une autre question possible :

[Sch08] : Module de rang 1 $\rightsquigarrow$ classe du groupe des classes d'Arakelov

- "bon" formalisme pour les modules de rang 1
- réduction 'pire cas / moyen cas' pour les modules de rang 1
  (collaboration avec K. de Boer, L. Ducas et B. Wesolowski)

[Sch08] R. Schoof. Computing Arakelov Class Groups.

Une autre question possible :

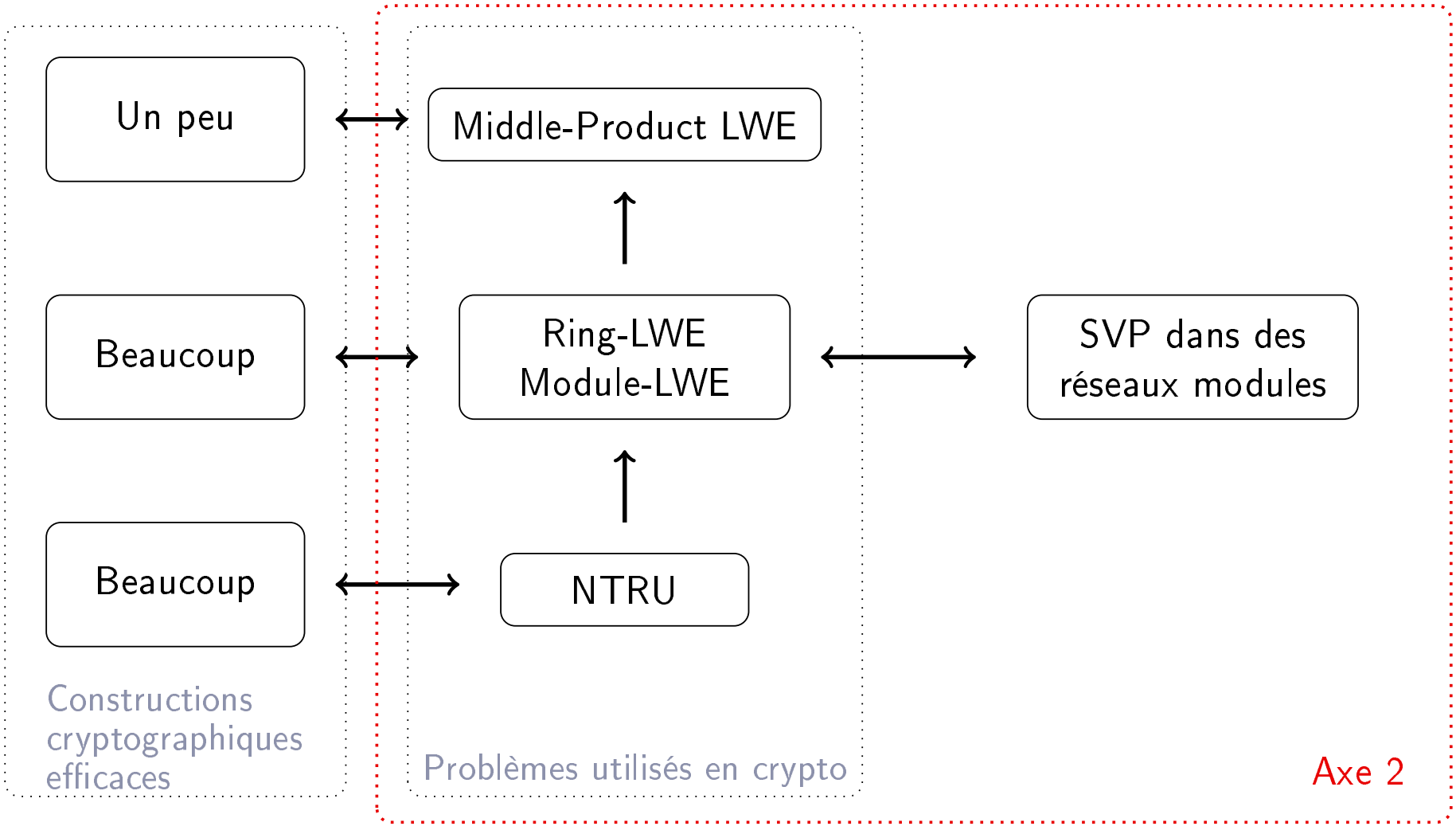
[Sch08] : Module de rang 1 $\rightsquigarrow$ classe du groupe des classes d'Arakelov

- "bon" formalisme pour les modules de rang 1
- réduction 'pire cas / moyen cas' pour les modules de rang 1
  (collaboration avec K. de Boer, L. Ducas et B. Wesolowski)

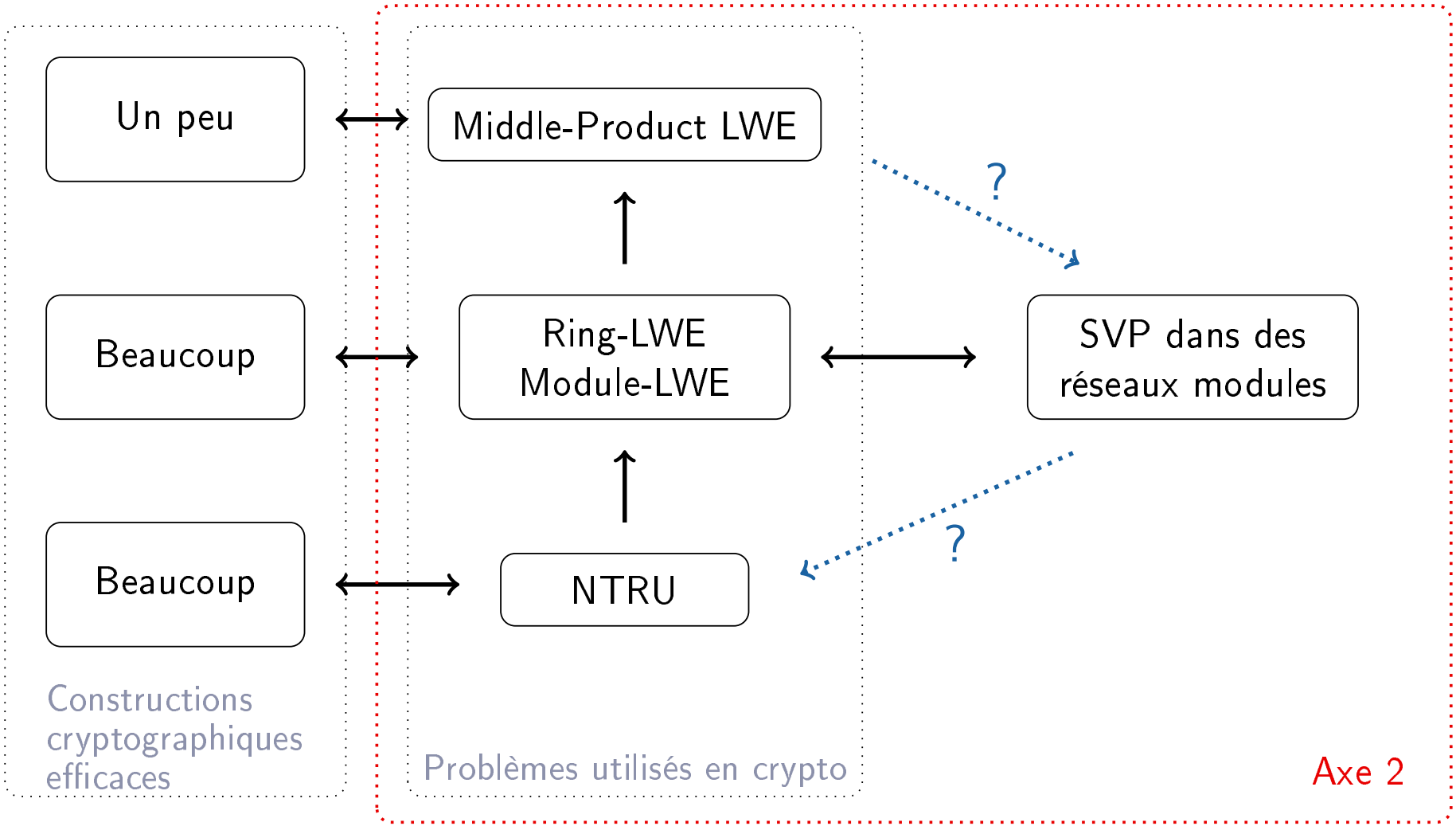
Existe-t-il une généralisation au rang $k \geq 2$?

[Sch08] R. Schoof. Computing Arakelov Class Groups.

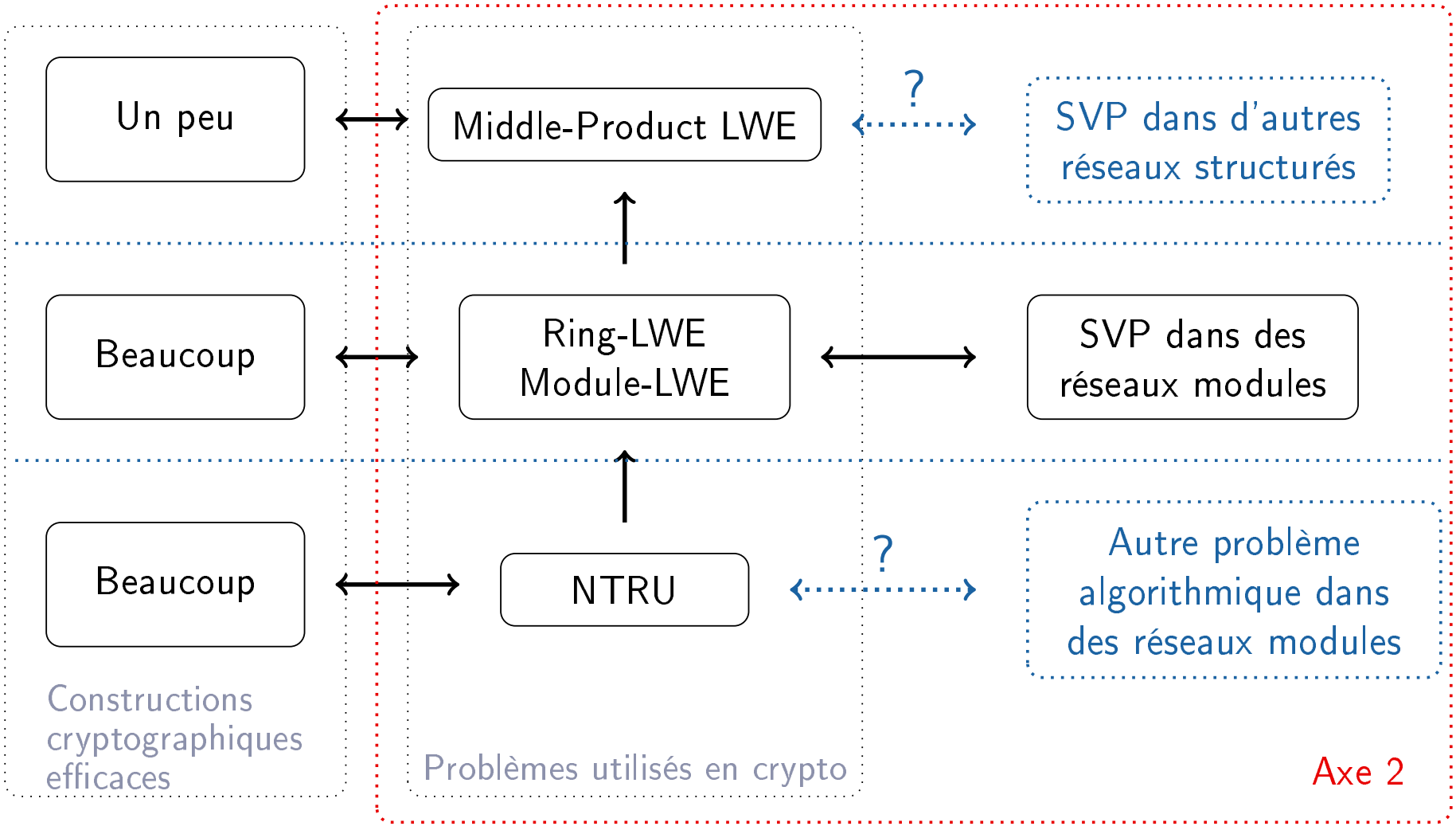
2. Lien avec d'autres problèmes algorithmiques



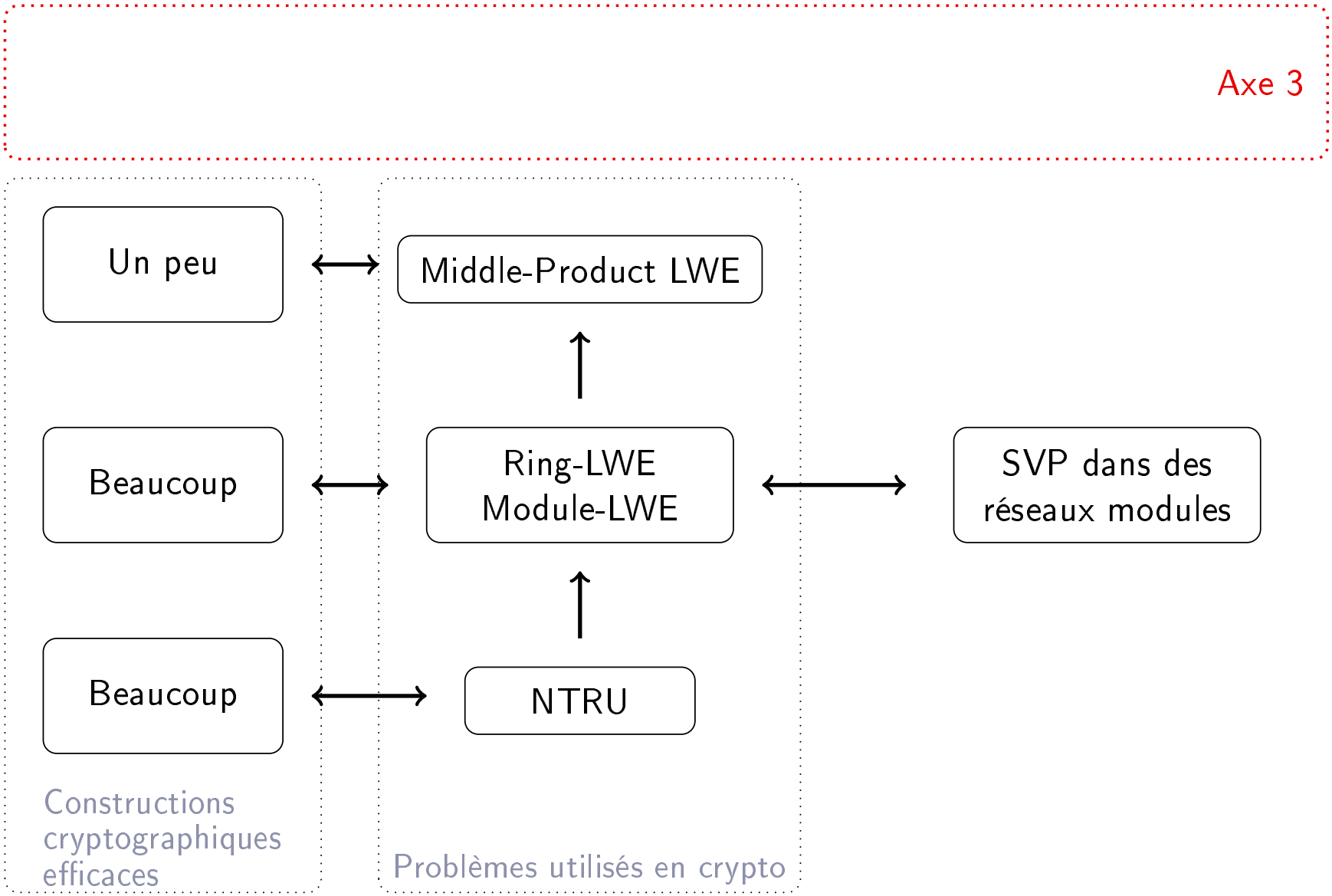
2. Lien avec d'autres problèmes algorithmiques



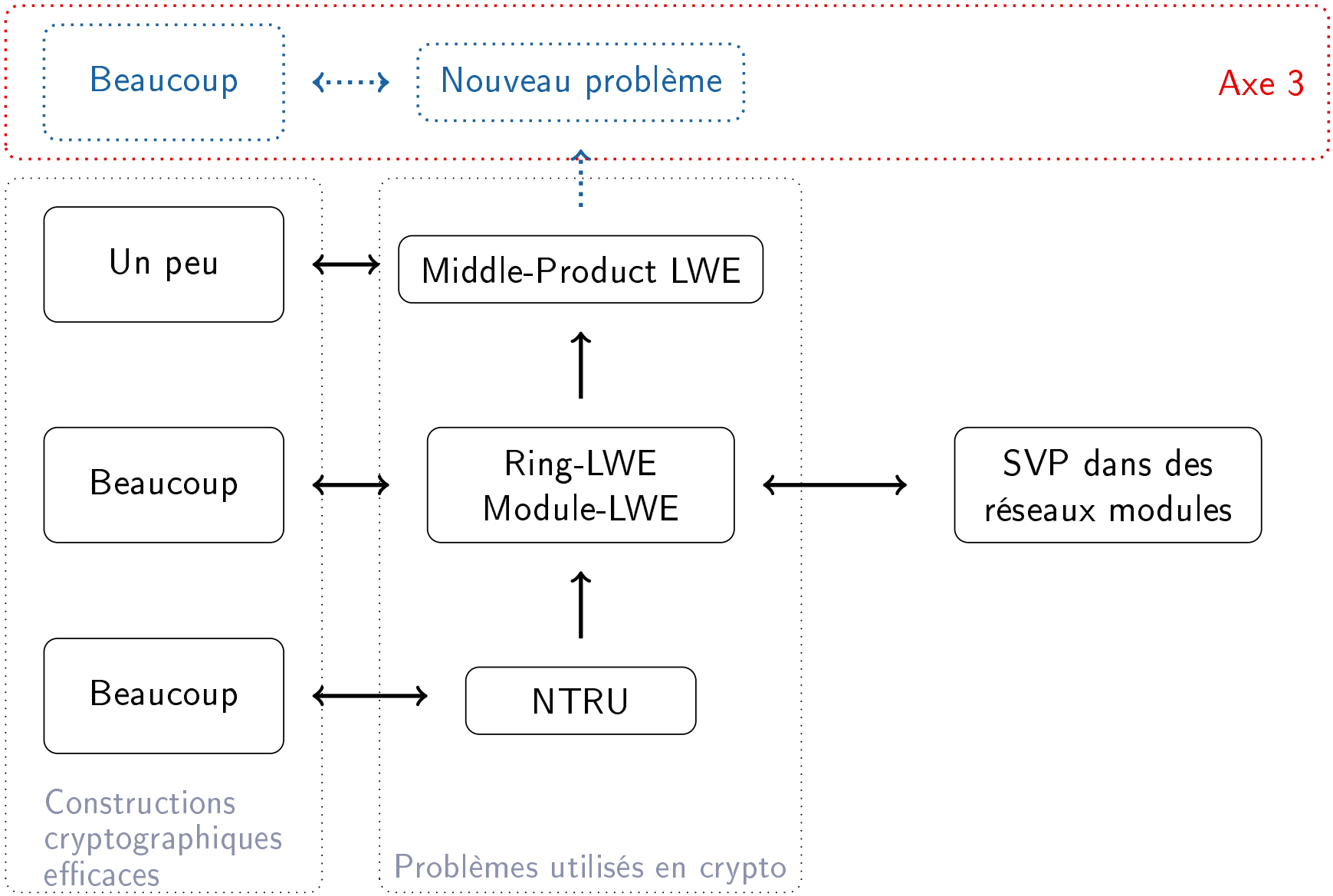
2. Lien avec d'autres problèmes algorithmiques



3. Nouvelles constructions



3. Nouvelles constructions



Mises à jour :

- Un article accepté à Eurocrypt 2020
  - avec S. Agrawal (IIT Madras, Chennai)
- Un article accepté à Crypto 2020
  - avec K. de Boer, L. Ducas et B. Wesolowski (CWI, Amsterdam + CNRS)

Intégrations possibles :

- équipe de théorie des nombres de l'IMB, Bordeaux
- équipe géométrie et algèbre effective de l'IRMAR, Rennes
- institut Fourier, Grenoble