5.09.2018

Подсчет и комбинаторные тождества.

1. (a) Докажите *правило Паскаля*: $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   (b) Докажите рекуррентное соотношения для чисел Стирлинга второго рода:

   $$S(n+1, k+1) = (k+1) \cdot S(n, k+1) + S(n, k).$$

   $S(n, k)$ — количество разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств.

2. (a) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдется двух подряд идущих чисел?

   (b) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдется трех подряд идущих чисел?

3. Найдите суммы:

   (a) $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n$;

   (b) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$;

   (c) $C_n^k + C_{n+1}^{k+1} + \ldots + C_{n+m}^{k+m}$;

   (d) $(C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$;

   (d) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n$.

4. Найдите «явные» формулы для сумм. В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

   (a) $\sum\limits_{k \geqslant 0} C_n^{2k}$.

   (b) $\sum\limits_{k \geqslant 0} C_n^{4k}$.