Проективная двойственность

Для векторного пространства V точки в $\mathbb{P}(V^*)$ — это гиперплоскости в $\mathbb{P}(V)$, и наоборот. Данное соответствие сохраняет отношение инцидентности и называется *проективной двойственностью.* При фиксировании билинейной формы происходит отождествление пространств V и V^* — это *полярное соответствие*, переводящее *полюс* в *поляру.* В данном листке $\dim V = 3$.

1. Какая теорема двойственна теореме Паппа?
(Папп) *Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают три прямые $A'B, B'C, C'A$ соответственно в точках X, Y, Z. Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.*

2. При каких a являются параллельными прямые, заданные уравнениями

$$ax_1 - x_2 + 3ix_0 = 0,\ -aix_0 + x_1 - ix_2 = 0,\ 3ix_2 + 5x_0 + x_1 = 0?$$

3. (параметризация пучка гиперплоскостей) Пусть $H \subset \mathbb{P}(V)$ — подпространство коразмерности 2. Пусть F_H — пучок гиперплоскостей, содержащих H, а t — прямая, трансверсальная к F_H, то есть не пересекающая H. Докажите, что отображение $f_t\colon t \to F_H$, переводящее точку $p \in t$ в гиперплоскость $\langle p, H\rangle$ — проективный изоморфизм.

4. Пусть $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, а F_1, F_2 — пучки прямых, проходящих через P_1, P_2 соответственно. Возьмём произвольное отображение $f\colon F_1 \to F_2$. Докажите эквивалентность условий:

- f — проективный изоморфизм, сохраняющий прямую $\langle P_1, P_2\rangle$;
- существует такая прямая r, не проходящая через P_1, P_2, что $f(s) = \langle s \cap r, P_2\rangle$ для любой прямой $s \in F_1$.

5. При проективной двойственности (применяемой к касательным кривой) коника на проективной плоскости переходит в конику.

6. Множество точек, лежащих на своей поляре, образует самодвойственную конику.

7. (*, *теорема Шаля*) Точки пересечения сторон треугольника с полярами противоположных вершин лежат на одной прямой.