

Эйлеровы циклы и последовательности де Брёйна

Мультиграф — это граф с петлями и кратными рёбрами. Формально — симметричная квадратная матрица из целых неотрицательных чисел (обозначающих кол-во или *кратность* рёбер). Ребро называется кратным, если его кратность больше единицы.

Ориентированным мультиграфом (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел.

Эйлеров цикл (путь) в мультиграфе — это цикл (путь), проходящий по каждому ребру ровно один раз. Мультиграф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

Критерий Эйлера. Мультиграф эйлеров тогда и только тогда, когда он связан и все вершины в нём чётной степени.

1. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами:

- (a) ориентированных, без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?
- (b) неориентированных, имеющих k рёбер, без петель и кратных рёбер?
- (c) неориентированных, имеющих k рёбер, если петли и кратные рёбра допускаются?

Последовательность де Брёйна (П. д. Б.) с параметрами n и k — последовательность, элементы которой принадлежат заданному множеству из k элементов (обычно — $\{0, 1, \dots, k-1\}$), причем все ее подпоследовательности длины n различны, и среди этих подпоследовательностей встречаются все k^n возможных последовательностей. Таким образом, длина П. д. Б. равна $k^n + n - 1$.

Правило «0 лучше» (обобщение правила «0 лучше 1»). Построим последовательность из $0, 1, \dots, k-1$ следующим образом, следя, чтобы все подпоследовательности длины n были различны. Начнём с n нулей. Далее каждый раз пишем 0, если можем. Если нет — пишем что угодно. Если не можем написать ничего — заканчиваем написание последовательности.

2. Постройте последовательность де Брёйна с параметрами $k = 2$ ('двоичную') и

- (a) $n = 3$, начинающуюся с 111;
- (b) $n = 4$, заканчивающуюся на 1010.

Определим *мультиграф де Брёйна* для слов длины n из k -буквенного алфавита. (Стандартный термин — граф де Брёйна.) Его вершины — слова длины $n-1$ из k -буквенного алфавита. Ориентированные ребра соответствуют словам $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$; ориентированное ребро $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, ведет от вершины $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ к вершине $(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ (эти вершины могут совпадать).

3. Дан связный ориентированный мультиграф с n вершинами. Входящая и исходящая степени вершины k совпадают и равны d_k для всех k .

- (a) Докажите, что существует дерево, содержащее все вершины этого мультиграфа, все ребра которого направлены в сторону вершины 1.
- (b) Фиксируем дерево T из (a). Будем обходить этот граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину v . Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему T , если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему T (такое ребро единственно). Докажите, что движение закончится в вершине 1, и что в результате получится ориентированный эйлеров цикл.
- (c) Докажите, что число ориентированных эйлеровых циклов в этом мультиграфе кратно числу $(d_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_n - 1)!$.

4. Математик забыл трёхзначный код своего замка. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Докажите, что математик сможет открыть замок за

- (a) 29 нажатий кнопок замка, если в коде могут содержаться только цифры 1, 3, 7;
- (b) 1002 нажатия, если в коде могут содержаться все десять цифр.

Эйлеровы циклы и последовательности де Брёйна

Мультиграф — это граф с петлями и кратными рёбрами. Формально — симметричная квадратная матрица из целых неотрицательных чисел (обозначающих кол-во или *кратность* рёбер). Ребро называется кратным, если его кратность больше единицы.

Ориентированным мультиграфом (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел.

Эйлеров цикл (путь) в мультиграфе — это цикл (путь), проходящий по каждому ребру ровно один раз. Мультиграф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

Критерий Эйлера. Мультиграф эйлеров тогда и только тогда, когда он связан и все вершины в нём чётной степени.

1. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами:

- (a) ориентированных, без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?
- (b) неориентированных, имеющих k рёбер, без петель и кратных рёбер?
- (c) неориентированных, имеющих k рёбер, если петли и кратные рёбра допускаются?

Последовательность де Брёйна (П. д. Б.) с параметрами n и k — последовательность, элементы которой принадлежат заданному множеству из k элементов (обычно — $\{0, 1, \dots, k-1\}$), причем все ее подпоследовательности длины n различны, и среди этих подпоследовательностей встречаются все k^n возможных последовательностей. Таким образом, длина П. д. Б. равна $k^n + n - 1$.

Правило «0 лучше» (обобщение правила «0 лучше 1»). Построим последовательность из $0, 1, \dots, k-1$ следующим образом, следя, чтобы все подпоследовательности длины n были различны. Начнём с n нулей. Далее каждый раз пишем 0, если можем. Если нет — пишем что угодно. Если не можем написать ничего — заканчиваем написание последовательности.

2. Постройте последовательность де Брёйна с параметрами $k = 2$ ('двоичную') и

- (a) $n = 3$, начинающуюся с 111;
- (b) $n = 4$, заканчивающуюся на 1010.

Определим *мультиграф де Брёйна* для слов длины n из k -буквенного алфавита. (Стандартный термин — граф де Брёйна.) Его вершины — слова длины $n-1$ из k -буквенного алфавита. Ориентированные ребра соответствуют словам $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$; ориентированное ребро $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, ведет от вершины $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ к вершине $(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ (эти вершины могут совпадать).

3. Дан связный ориентированный мультиграф с n вершинами. Входящая и исходящая степени вершины k совпадают и равны d_k для всех k .

- (a) Докажите, что существует дерево, содержащее все вершины этого мультиграфа, все ребра которого направлены в сторону вершины 1.
- (b) Фиксируем дерево T из (a). Будем обходить этот граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину v . Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему T , если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему T (такое ребро единственно). Докажите, что движение закончится в вершине 1, и что в результате получится ориентированный эйлеров цикл.
- (c) Докажите, что число ориентированных эйлеровых циклов в этом мультиграфе кратно числу $(d_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (d_n - 1)!$.

4. Математик забыл трёхзначный код своего замка. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Докажите, что математик сможет открыть замок за

- (a) 29 нажатий кнопок замка, если в коде могут содержаться только цифры 1, 3, 7;
- (b) 1002 нажатия, если в коде могут содержаться все десять цифр.