Асимптотики.

Если не оговорено противное, то o, O, асимптотики и пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

Запись $f(n) \ll g(n)$ означает, что $f(n) = o(g(n))$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Запись $f(n) \gtrsim g(n)$ означает, что $f(n) > (1+o(1))g(n)$.

Найти асимптотику для функции $f(n)$ означает найти «явную» функцию $a(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a(n)} = 1$, то есть упростить с точностью до эквивалентности “$\sim$”.

1. Проверьте, что

(a) $n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \sim (2+o(1))^2$;

(b) $3^{\sqrt{n}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \sim (2+o(1))^2$.

2. Найдите асимптотику для функций:

(a) $f(n) = 2^{n-1}$;

(b) $g(n) = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{\pi n}{4}$;

(c) $h(n) = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3})$;

(d) количества A_n подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел.

3. (a) (неравносильность $e^{o(n)}$ и $o(e^n)$) Подберите функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ такие, что $f(n) \sim g(n)$, но $e^{f(n)} \neq O(e^{g(n)})$.

(b) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = o(g(n))$ и $g(n) = o(f(n))$?

(c) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = O(f(n))$?

(d) Следует ли из двух соотношений из (d), что $f(n) \sim g(n)$?

4. Найдите асимптотику для

(a) $\sqrt[n]{C_n^{[n/2]}}$ (*указание*: оцените $C_n^{[n/2]}$ сверху и снизу);

(b) $\sqrt[m]{C_{3m}^m}$ (*указание*: докажите $\frac{2^{2m}}{3^{3m}}C_{3m}^m \in [\frac{1}{3m+1}, 1]$);

(c) $C_{n^2}^n$;

(d) $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

(e) $\ln(n!)$;

Формула Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

5. Найдите асимптотику функции $s = s(n)$, заданной как

(a) $s^{s^3} = n$;

(b) $s(n) :=$ min $\{m \in \mathbb{N} \mid 2^m/m > n\}$.

(c) $s(n) :=$ min $\{m \in \mathbb{N} \mid C_m^{[m/2]} > n\}$;

(d) $s(n) :=$ max $\{k \in \mathbb{N} \mid k^{k!} \leq n\}$.