Плоские графы

1. (a) Докажите *формулу Эйлера*: для любого связного плоского графа с n вершинами, e ребрами и f гранями имеет место равенство $n - e + f = 2$.
(b) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с k компонентами связности.

2. *Применения формулы Эйлера*. Докажите следующие утверждения:

(a) Для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, имеющего более двух вершин, выполнены соотношения $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.
(b) Графы K_5 и $K_{3,3}$ невозможно нарисовать на плоскости без самопересечений.
(c) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.
(d) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ ребер, то $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$.

3. Докажите, что вершины планарного графа можно так раскрасить в шесть цветов, что никакие две одноцветные вершины не соединены ребром (то есть любой планарный граф — шестидольный). А в пять цветов?

4. Нарисуйте графы K_5 и $K_{3,3}$ без самопересечений

(a) на торе;
(b) на ленте Мёбиуса.

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций добавления и удаления проходных вершин, то есть вершин степени 2.

Граф H называется *минором* графа G, если существует подграф $G_1 \subset G$, который при помощи операций стягивания ребра можно свести к графу H.

Критерии планарности. Граф планарен тогда и только тогда, когда

- (*Понтрягина–Куратовского*) он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.
- (*Вагнера*) графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.

Плоские графы

1. (a) Докажите *формулу Эйлера*: для любого связного плоского графа с n вершинами, e ребрами и f гранями имеет место равенство $n - e + f = 2$.
(b) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с k компонентами связности.

2. *Применения формулы Эйлера*. Докажите следующие утверждения:

(a) Для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, имеющего более двух вершин, выполнены соотношения $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.
(b) Графы K_5 и $K_{3,3}$ невозможно нарисовать на плоскости без самопересечений.
(c) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.
(d) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ ребер, то $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$.

3. Докажите, что вершины планарного графа можно так раскрасить в шесть цветов, что никакие две одноцветные вершины не соединены ребром (то есть любой планарный граф — шестидольный). А в пять цветов?

4. Нарисуйте графы K_5 и $K_{3,3}$ без самопересечений

(a) на торе;
(b) на ленте Мёбиуса.

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций добавления и удаления проходных вершин, то есть вершин степени 2.

Граф H называется *минором* графа G, если существует подграф $G_1 \subset G$, который при помощи операций стягивания ребра можно свести к графу H.

Критерии планарности. Граф планарен тогда и только тогда, когда

- (*Понтрягина–Куратовского*) он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.
- (*Вагнера*) графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.