Аннуляторы ограниченных $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей и симплектическая геометрия

Алексей Владимирович Петухов

Институт Проблем Передачи Информации

22 августа 2018 года

Дифференциальные уравнения и $\mathfrak{g}$-модули

Определение

Пусть X — гладкое неприводимое многообразие над $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. **Действием $\mathfrak{g}$ на X** *называется любой гомоморфизм алгебр Ли*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(X).$$

Тезис: $\mathfrak{g}$-модули $=$ линейные дифференциальные уравнения (на X)

Дифференциальные уравнения и $\mathfrak{g}$-модули

Определение

Пусть X — гладкое неприводимое многообразие над $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. **Действием $\mathfrak{g}$ на X** *называется любой гомоморфизм алгебр Ли*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(X).$$

Тезис: $\mathfrak{g}$-модули = линейные дифференциальные уравнения (на X)

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} f \leftarrow \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} f \leftarrow f,$$

$$(m, M) \to \mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} m \leftarrow \text{Решения } \rho(\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} m).$$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модули

Пусть $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — это подалгебра Ли, а M — какой-то $\mathfrak{g}$-модуль.

могут существовать подалгебры, действие которых интегрируется до действия их присоединённных групп $\Longleftrightarrow$ есть действие подходящей группы на решениях этого уравнения

Определение

M называется $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-**модулем**, *если* $\forall m \in M(\dim(\mathrm{U}(\mathfrak{k})m) < \infty)$.

Пример

Пусть V — это какой-то конечномерный $\mathfrak{k}$-модуль. Тогда $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{k})} V$ является $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулем.

Пример

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n) = \langle x_i \partial_j \rangle_{1 \le i,j \le n}, \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n),$$

$$M := \{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^d f \mid \deg f + 2d = \sqrt{2}\}.$$

$$M \cong_K \oplus_{k \ge 0} R_K(k\pi_1).$$

Подалгебра Фернандо-Каца

Теорема

Если $\dim \mathfrak{g} < \infty$, *то существует наибольшая подалгебра Ли* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, *для которой* M *— это* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$*-модуль. Она называется* **подалгеброй Фернандо-Каца** *и обозначается* $\mathfrak{g}[M]$.

Подалгебра Фернандо-Каца

Теорема

Если $\dim \mathfrak{g} < \infty$, *то существует наибольшая подалгебра Ли* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, *для которой* M *— это* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$*-модуль. Она называется* **подалгеброй Фернандо-Каца** *и обозначается* $\mathfrak{g}[M]$.

Теорема

Для всякого дифференциального уравнения, есть наибольшая группа, которая естественным образом действует на его решениях.

От алгебры к геометрии

$\mathfrak{g}$-модуль $M \to (\mathrm{V}(M), \mathrm{GV}(M))$ — это подмногообразия в $\mathfrak{g}^*$.
$\mathfrak{g}$ — полупроста, M — простой $\mathfrak{g}$-модуль M.

- $\mathrm{GV}(M)$ зависит только от аннулятора M,
- $\mathrm{GV}(M)$ — это нильпотентная коприсоединённая орбита в $\mathfrak{g}^*$,
- многообразия $\mathrm{GV}(M)$ и $\mathrm{V}(M)$ сохраняются умножениями $\mathfrak{g}^*$ на константы,
- $2\dim \mathrm{V}(M) \geq \dim \mathrm{GV}(M)$,
- если M это $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль, то $(\Rightarrow)$ $V(M)|_{\mathfrak{k}} = 0$,
- если M это $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль, то $(\Rightarrow)$ многообразие $V(M)$ является K-эквивариантным.

Пример

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n) = \langle x_i \partial_j \rangle_{1 \le i,j \le n}, \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n),$$

$$M := \{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^d f \mid \deg f + 2d = \sqrt{2}\}.$$

$$M \cong_K \oplus_{k \ge 0} R_K(k\pi_1).$$

$$\mathrm{GV}(M) = \text{матрицы ранга 1 и следа } 0 \approx \mathrm{T}^*\mathbb{P}^{n-1},$$

$$\mathrm{V}(M) \approx \text{конормальное расслоение к конике в } \mathbb{P}^{n-1}$$

Допустимые и ограниченные модули

$\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$

Определение

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M называется **допустимым**, *если кратность вхождения любого $\mathfrak{k}$-модуля в M конечна.*

Определение

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M называется **ограниченным**, *если $\exists C > 0$, для которого кратность вхождения любого $\mathfrak{k}$-модуля в M меньше C.*

Допустимые и ограниченные модули

$\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$

Определение

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-*модуль* M *называется* **допустимым**, *если* $\mathrm{V}(M) /\!\!/ K$ *есть точка.*

Определение

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-*модуль* M *называется* **ограниченным**, *если* K-*сферичны все неприводимые компоненты* $\mathrm{V}(M)$
(имеют открытую орбиту борелевской подгруппы).

Результат

$\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$

Теорема (И. Пенков, В. Серганова)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-*модуль* M *ограничен, если и только если* $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} M$ *удовлетворяет [условию].*

Теорема (П. 2018)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-*модуль* M *ограничен, если и только если* $\mathrm{GV}(M)$ *удовлетворяет [условию].*

Результат

$\mathfrak{g}$ полупроста, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$

Теорема (И. Пенков, В. Серганова)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$*-модуль* M *ограничен, если и только если* $\mathrm{Ann}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})} M$ *удовлетворяет [условию].*

Теорема (П. 2018)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$*-модуль* M *ограничен, если и только если* $\mathrm{GV}(M)$ *удовлетворяет [условию].*

Доказательство основано на результатах **эквивариантной симплетической геометрии**, полученных И. Лосевым, Д. Тимашёвым и В. Жгуном.

Изотропно, коизотропно, лагранжево

Фиксируем $(V, \omega), \omega \in \Lambda^2 V^*$.

- $W \subset V$ называется **изотропным**, если $W \subset W^\perp$,
- $W \subset V$ называется **коизотропным**, если $W^\perp \subset W$,
- $W \subset V$ называется **лагранжевым**, если $W = W^\perp$.

Изотропно, коизотропно, лагранжево

Фиксируем $(V, \omega), \omega \in \Lambda^2 V^*$.

- $W \subset V$ называется **изотропным**, если $W \subset W^\perp$,
- $W \subset V$ называется **коизотропным**, если $W^\perp \subset W$,
- $W \subset V$ называется **лагранжевым**, если $W = W^\perp$.

Фиксируем $(X, \omega), \omega \in \Lambda^2 T^* X$.

- $Y \subset X$ называется **изотропным**, если $\mathrm{T}_y Y$ изотропно в $\mathrm{T}_y X$,
- $Y \subset X$ называется **коизотропным**, если $\mathrm{T}_y Y$ коизотропно в $\mathrm{T}_y X$,
- $Y \subset X$ называется **лагранжевым**, если $\mathrm{T}_y Y$ лагранжево в $\mathrm{T}_y X$.

Изотропно, коизотропно, лагранжево

Фиксируем $(X, \omega), \omega \in \Lambda^2 T^* X$.

- действие $K : X$ называется K-**изотропным**, если Kx изотропно в X,
- действие $K : X$ называется K-**коизотропным**, если Kx коизотропно в X,
- действие $K : X$ называется K-**лагранжевым**, если Kx лагранжево в X.

Фиксируем $(X, \omega), \omega \in \Lambda^2 T^* X$.

- $Y \subset X$ называется **изотропным**, если $\mathrm{T}_y Y$ изотропно в $\mathrm{T}_y X$,
- $Y \subset X$ называется **коизотропным**, если $\mathrm{T}_y Y$ коизотропно в $\mathrm{T}_y X$,
- $Y \subset X$ называется **лагранжевым**, если $\mathrm{T}_y Y$ лагранжево в $\mathrm{T}_y X$.

Симплектический результат

Теорема (П. 2018)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M ограничен, если и только если $\mathrm{GV}(M)$ является K-коизотропным.

Симплектический результат

Теорема (П. 2018)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M ограничен, если и только если $\mathrm{GV}(M)$ является K-коизотропным.

Теорема (В. Жгун, Д. Тимашёв)

Пусть O — нильпотентная коприсоединённая орбита в $\mathfrak{g}^*$, а $L \subset O$ — K-эквивариантное лагранжево многообразие. Пусть так же $L\,|_{\mathfrak{k}} = 0$. Тогда

$$K\text{-сферично многообразие } L \iff K\text{-коизотропно многообразие } O.$$

Так не бывает

Теорема (И. Лосев)

Пусть $\mathbb{O}$ *— нильпотентная коприсоединённая орбита в* $\mathfrak{g}^*$*. Тогда*
а) общий слой отображения $\mathbb{O} \to \mathbb{O}/\!\!/K$ *содержит единственную открытую орбиту,*
б) $\mathrm{Quot}(\mathbb{C}[\mathbb{O}]^K) = \mathrm{Quot}(\mathbb{C}[\mathbb{O}])^K$,
в) если $\mathbb{O}$ *является* K*-коизотропным, то любой слой отображения* $\mathbb{O}/\!\!/K \to \mathfrak{k}^*/\!\!/K$ *состоит из точек или пуст.*

Спасибо за Ваше Внимание!