Алгебры операторов Лакса и интегрируемые системы

Шейнман О.К., г. Москва
sheinman@mi.ras.ru

Содержание

Лекция 1. Алгебры операторов Лакса

В этой лекции вводится новый класс алгебр Ли, естественно обобщающий (нескрученные) алгебры Каца-Муди.

1. Данные Тюрина

Пусть Σ — компактная риманова поверхность рода g, которую мы рассматриваем как алгебраическую кривую над $\mathbb{C}$. Отметим на Σ две точки $P_\pm$ и K точек γ_s, $s = 1, \ldots, K$. Каждой точке γ_s мы сопоставляем вектор $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$, заданный с точностью до пропорциональности. Систему данных

$$T := \{(\gamma_s, \alpha_s) \mid s = 1, \ldots, K\} \tag{1}$$

назовем *данными Тюрина.* Эти данные связаны с модулями голоморфных векторных расслоений на Σ. В частности, для общих значений (γ_s, α_s) с $\alpha_s \neq 0$ и $K = ng$ данные Тюрина параметризуют полустабильные оснащенные голоморфные векторные расслоения ранга n и степени ng на Σ.

Пусть $\mathfrak{g}$ обозначает одну из классических матричных алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ или $\mathfrak{sn}(n)$, где последняя — алгебра скалярных матриц.

2. Алгебры операторов Лакса

Для каждой тройки $\Sigma, T, \mathfrak{g}$ мы определим бесконечномерную алгебру Ли, которую будем называть *алгеброй операторов Лакса* и обозначать $\overline{\mathfrak{g}}$.

Назовем L-оператором мероморфную $\mathfrak{g}$-значную функцию L на Σ, голоморфную вне $\{P_+, P_-\}$ и всех γ_s, а в каждой точке $\gamma = \gamma_s$ имеющую разложение

$$L = \frac{L_{-2}}{(z - z_\gamma)^2} + \frac{L_{-1}}{z - z_\gamma} + L_0 + \dots \ , \tag{2}$$

где z — локальная координата в окрестности γ, z_γ — координата самой точки γ, L_{-2}, L_{-1}, L_0, $L_1, \ldots \in \mathfrak{g}$. Мы предполагаем, что

$$L_{-2} = 0, \quad \text{если } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(2n) \text{ и } L_{-2} = \nu\alpha\alpha^t\sigma, \text{ если } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(2n), \tag{3}$$

$$L_{-1} = \begin{cases} \alpha\beta^t, & \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n) \\ \alpha\beta^t - \beta\alpha^t, & \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \\ (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n) \end{cases} . \tag{4}$$

где α — вектор, ассоциированный с γ, $\beta \in \mathbb{C}^n$ — некоторый вектор, а t вверху — знак транспонирования, σ — матрица симплектической формы;

$$\beta^t\alpha = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{so}(n); \ \beta^t\sigma\alpha = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n); \quad L_0\alpha = k\alpha, \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{C}$;

$$\alpha^t\alpha = \beta^t\alpha (= \alpha^t\beta) = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n); \quad \alpha^t\sigma L_1\alpha = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \tag{6}$$

Теорема 1. *Операторы Лакса образуют алгебру Ли по операции поточечного коммутирования.*

Пример. Пусть риманова поверхность Σ — это сфера с отмеченными точками 0 и ∞, а точек γ вообще нет. Тогда алгебры операторов Лакса совпадают с известными алгебрами петель.

3. Почти градуированная структура Пусть

$$\mathfrak{g}_m = \{L \in \overline{\mathfrak{g}} \ |(L) + D \geq 0\},$$

где (L) — дивизор $\mathfrak{g}$-значной функции L, и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + \sum_{s=1}^{K} \gamma_s,$$

а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + 2\sum_{s=1}^{K} \gamma_s.$$

Мы называем $\mathfrak{g}_m$ *(почти однородным) подпространством степени* m алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$.

Теорема 2. *Для* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n),\ \mathfrak{so}(n),\ \mathfrak{sp}(2n)$

$$1^\circ.\quad \dim\, \mathfrak{g}_m = \dim\, \mathfrak{g}.$$

$$2^\circ.\quad \overline{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_m.$$

$$3^\circ.\quad [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \bigoplus_{m=k+l}^{k+l+g} \mathfrak{g}_m.$$

4. Центральные расширения

Центральные расширения алгебр Ли — важный объект в теории представлений и в приложениях к квантовой физике. Например, алгебра Гейзенберга является центральным расширением коммутативной алгебры Ли. Здесь мы рассмотрим центральные расширения алгебр операторов Лакса.

Центральным расширением алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ называется короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\ i\ } \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\ p\ } \overline{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0, \tag{7}$$

где $\mathrm{Im}(i) = \ker(p)$ — центр в $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Два центральных расширения называются эквивалентными, если существует изоморфизм e (*эквивалентность*), такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, leftrightarrow, "e"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & \overline{\mathfrak{g}} \arrow[r] & 0. \\
 & & \widehat{\mathfrak{g}}' \arrow[ur, "p'"'] & &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

2-коциклом на $\overline{\mathfrak{g}}$ называется билинейный кососимметрический функционал γ на $\overline{\mathfrak{g}}$, такой, что для любой тройки элементов $X, Y, Z \in \overline{\mathfrak{g}}$ выполняется равенство $\gamma([X,Y],Z) + \gamma([Z,X],Y) + \gamma([Y,Z],X) = 0$. Если $\gamma(X,Y) = \phi([X,Y])$, где $\phi \in \overline{\mathfrak{g}}^*$, то γ называется *кограницей* (и обозначается $\delta\phi$). Если $\gamma - \gamma' = \delta\phi$, то γ и γ' называются *когомологичными*.

Если γ — 2-коцикл на $\overline{\mathfrak{g}}$, можно построить ассоциированное центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma$. По определению это векторное пространство $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma = \overline{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}t$ со следующим коммутатором:

$$\widehat{[L, L']} = [L, L'] + \gamma(L, L') \cdot t, \quad \widehat{[L, t]} = 0, \qquad L, L' \in \overline{\mathfrak{g}}. \tag{9}$$

Каждое центральное расширение может быть получено таким образом путем выбора сечения $s : \overline{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathfrak{g}}$. Два центральных расширения $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma$ и $\widehat{\mathfrak{g}}_{\gamma'}$ эквивалентны, если определяющие их коциклы γ и γ' когомологичны.

Пример. Стандартным примером коцикла на алгебре токов является

$$\gamma_{st}(L, L') = \mathrm{res}_{P_+} \mathrm{tr}(L \cdot dL').$$

5. Почти градуированные центральные расширения и локальные коциклы

Центральные расширения вообще говоря не единственны, даже с точностью до эквивалентности. В последнем примере мы могли бы взять не вычет, а интеграл по любому контуру на римановой поверхности. Однако если брать центральные расширения в категории почти градуированных алгебр Ли, возникает теорема единственности, по крайней мере в случае простой алгебры $\mathfrak{g}$. Такие центральные расширения называют *почти градуированными.* Почти градуированные центральные расширения задаются локальными коциклами. Коцикл γ называется *локальным*, если для $L \in \mathfrak{g}_m$, $L' \in \mathfrak{g}_{m'}$ из $\gamma(L, L') \neq 0$ следует, что $|m + m'| \leq M$, где M — постоянное число, не зависящее от m, m', L, L'. Например, для алгебр Каца-Муди $M = 0$.

6. Построение локальных коциклов

Стандартный коцикл из нашего примера не является локальным, но его можно подправить на кограницу так чтобы получился локальный коцикл. Пусть $\mathcal{L}$ — матричнозначная 1-форма, в окрестности γ равная

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-2}\frac{dz}{(z - z_\gamma)^2} + \mathcal{L}_{-1}\frac{dz}{z - z_\gamma} + \mathcal{L}_0 dz + \dots\ ,$$

причем $\mathcal{L}$ удовлетворяет тем же условиям, что и L, с одним лишь отличием: $\tilde{\beta}^t\alpha = 1$, где $\tilde{\beta}$ играет для $\mathcal{L}$ ту же роль, что β для L.

Теорема 3. *Для каждого $\mathcal{L}$, удовлетворяющего перечисленным свойствам, 1-форма* $\mathrm{tr}\,(L\,dL' - [L, L']\mathcal{L})$ *регулярна за исключением точек $P_\pm$, и выражение*

$$\gamma(L, L') = \mathrm{res}_{P_+}\,\mathrm{tr}\,(L\,dL' - [L, L']\mathcal{L})$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Задача. *Докажите, что* $\gamma(L, L') = \mathrm{res}_{P_+}\,\mathrm{tr}\big(L \cdot (d + ad\mathcal{L})L'\big)$.

Таким образом γ_{st} из нашего примера станет локальным коциклом, если обычное дифференцирование оператора L' заменить ковариантным. Интересно, что ковариантные дифференцирования такого вида играют основную роль в уравнениях изомонодромных дефомаций на римановых поверхностях, введенных И.М. Кричевером.

7. Классификация почти градуированных центральных расширений

Теорема 4. *Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(2n)$ почти градуированное центральное расширение единственно с точностью до эквивалентности и умножения коцикла на число, и соответствует построенному выше (теорема 3) коциклу. Для $\mathfrak{gl}(n)$ есть еще одно расширение, заданное коциклом $\gamma'(L, L') = res_{P_+}\mathrm{tr}(L \cdot L')$.*

Лекция 2. Интегрируемость. Уравнения типа Лакса. Иерархии коммутирующих потоков

8. Интегрируемость по Лиувиллю

Фазовое пространство — это гладкое симплектическое многообразие. Динамическая система — это система обыкновенных дифференциальных уравнений на кривую $x = x(t)$ в фазовом пространстве, имеющая вид $\dot{x} = \xi(x)$, где ξ — векторное поле (точка вверху обозначает производную по времени).

Пусть ω — симплектическая форма, $\mathbf{i}$ — изоморфизм между векторными полями и 1-формами, заданный с помощью ω: векторному полю η сопоставляется 1-форма $\mathbf{i}\eta(\xi) =$

$\omega(\xi,\eta)$. Скобка Пуассона двух функций f и g на M определяется как функция $\{f,g\} = \omega(\mathbf{i}^{-1}df, \mathbf{i}^{-1}dg)$. Если $\{f,g\}=0$, то говорят, что f и g находятся в инволюции.

Векторное поле ξ называется гамильтоновым, если $\xi = \mathbf{i}^{-1}dH$ для некоторой функции H. В этом случае H называется его гамильтонианом. Динамическая система $\dot{x} = \xi(x)$ называется гамильтоновой с гамильтонианом H, если для любой гладкой функции u на фазовом пространстве ее производная в силу системы удовлетворяет уравнению $\dot{u} = \{H, u\}$. Условия гамильтоновости динамической системы и соответствующего векторного поля эквивалентны.

Гамильтонова система называется вполне интегрируемой, если число ее (функционально) независимых первых интегралов равно половине размерности фазового пространства.

Теорема Лиувилля. *Если гамильтонова система вполне интегрируема, то существует такая система канонических координат I_s, φ_s, что совместные поверхности уровня набора функций $I=\{I_s\}$ — торы, φ_s — угловые координаты на них, и в силу системы $\dot{I}_s = 0$, $\dot{\varphi}_s = w(I)$, где w — некоторая функция.*

Пример. Эллиптическая система Калоджеро-Мозера — гамильтонова система, заданная гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}(p_1^2 + \ldots + p_n^2) + \sum_{\alpha\in R_+} \wp(q_\alpha),$$

где R — система корней ранга n, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — ее инвариантная форма, $q=(q_1,\ldots,q_n)$, $q_\alpha = \langle q,\alpha\rangle$, $\wp$ — функция Вейерштрасса. Ниже показано, что эта система вполне интегрируема.

9. Уравнения типа Лакса

Мы определим фазовое пространство как подпространство плоского пространства с координатами γ_s, α_s, k_s, β_s. Пусть L и M — функции этих параметров со значениями в пространстве мероморфных функций на Σ. Пусть пространство $\mathcal{L}^D$ образовано теми наборами параметров, для которых $\{L \in \bar{\mathfrak{g}} \mid (L) + D + \delta\sum\gamma_s \geq 0\}$, где $D = \sum_i m_i P_i$ — произвольный положительный дивизор на Σ не содержащий точек γ (δ равно 2 для симплектической алгебры и 1 для всех остальных). При фиксированных α и γ функция L удовлетворяет условиям, сформулированным в прошлой лекции. Уравнения типа Лакса — это уравнения на параметры, вытекающие из соотношения $L_t = [L,M]$. Ниже излагается общий метод построения уравнений типа Лакса, обладающих свойствами гамильтоновости и интегрируемости.

10. M-операторы и времена

Выше мы подробно рассмотрели свойства L-операторов. Рассмотрим теперь свойства M-операторов.

Пусть $M:\Sigma\to\mathfrak{g}$ — мероморфная функция. Мы требуем, чтобы в точке $\gamma=\gamma_s$ она имела разложение того же типа, что и L (определяемое типом алгебры $\mathfrak{g}$):

$$M = \frac{M_{-2}}{(z-z_\gamma)^2} + \frac{M_{-1}}{z-z_\gamma} + M_0 + \ldots\ , \tag{10}$$

где z — фиксированная локальная координата в окрестности γ, z_γ — координата самой точки γ, $M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, \ldots \in \mathfrak{g}$ и

$$M_{-2} = \lambda\alpha\alpha^t\sigma, \qquad M_{-1} = (\alpha\mu^t + \varepsilon\mu\alpha^t)\sigma, \tag{11}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}^n$, σ — матрица $n \times n$, верхнее t обозначает транспонирование матриц

$$\begin{aligned} \lambda \equiv 0, \varepsilon = 0, \quad \sigma = id \quad &\text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n), \\ \lambda \equiv 0, \varepsilon = -1, \ \sigma = id \quad &\text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n), \\ \varepsilon = 1 \qquad\qquad\quad &\text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n), \end{aligned} \tag{12}$$

и σ — матрица симплектической формы, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$. Здесь и ниже мы опускаем индексы s, γ, указывающие на точку γ, за исключением обозначения z_γ.

Каждый M-оператор и скалярная функция k на фазовом пространстве в силу Лаксова уравнения определяют динамическую систему. В частности, на данных Тюрина

$$\dot{z}_\gamma = -\mu^t \sigma \alpha, \quad \dot{\alpha} = -M_0 \alpha + k\alpha. \tag{13}$$

Пусть M_a и M_b — два M-оператора, ∂_a и ∂_b — времена соответствующих динамических систем.

Лемма 5. *Для любых двух M-операторов M_a, M_b и соответствующих времен выражение*

$$M_{ab} = \partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b]$$

также является M-оператором.

11. Где принимают значения M-операторы

С этого момента будем предполагать, что в лаксовом уравнении $L \in \overline{\mathfrak{g}}$, $M \in \overline{\mathfrak{g}^\diamond}$, где между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^\diamond$ имеется соответствие:

$$\mathfrak{g}^\diamond = \begin{cases} \mathfrak{gl}(n) & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n) \\ \mathfrak{so}(2n+1) & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n), \mathfrak{so}(2n+1) \\ \mathfrak{tsp}(2n) & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \end{cases}$$

Здесь $\mathfrak{tsp}(2n)$ — это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n+2)$, состоящая из матриц с нулевыми первым столбцом и последней строкой. Во всех случаях предполагается, что $\mathfrak{g}$ стандартным образом вложена в $\mathfrak{g}^\diamond$, таким образом коммутатор $[L, M]$ определен. Как и выше, с дивизором $D = \sum m_i P_i$ свяжем полный дивизор особенностей L и M-операторов $\widetilde{D} = D + \delta \sum_{s=1}^K \gamma_s$, где

$$\delta = \begin{cases} 1, & \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n),\ \mathfrak{sl}(n),\ \mathfrak{so}(2n),\ \mathfrak{so}(2n+1), \\ 2, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \end{cases}$$

Настало время уточнить значение K. Пусть

$$K = \begin{cases} ng, & \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n),\ \mathfrak{sl}(n),\ \mathfrak{so}(2n),\ \mathfrak{so}(2n+1), \\ (n+1)g, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \end{cases}$$

Определим $\mathcal{N}^D \subset \overline{\mathfrak{g}^\diamond}$ как подпространство M-операторов, таких что $(M) + \widetilde{D} \geq 0$.

Лемма 6. $\dim \mathcal{N}^D = (\dim \mathfrak{g}^\diamond)(\deg D + 1)$.

12. Построение иерархии

Зафиксируем дополнительно точку $P_0 \in \Sigma$. Пусть w_0, w_i — локальные координаты в окрестностях точек P_0, P_i соответственно. Определим a как тройку

$$a = (P_i, k, m), \quad k > 0, \ m > -m_i, \tag{14}$$

где k, m — целые числа, $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ (тем самым мы занумеровали времена геометрическими объектами).

Теорема 7. *Для каждого $L \in \overline{\mathfrak{g}}$ в общем положении существует единственный $\mathfrak{g}^\diamond$-значный M-оператор M_a, такой что*

- *(i) вне γ-точек он имеет полюс только в P_i и*

$$M_a(q) = w_i^{-m} L^k(q) + O(1),$$

то есть сингулярные части M_a и $w_i^{-m} L^k$ совпадают;

- *(ii) M_a нормирован условием $M_a(P_0) = 0$.*

Подчеркнем, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ для M_a выполняется соотношение $\alpha\sigma M_{a1}\alpha = 0$.

Теорма 8. *Уравнения*

$$\partial_a L = [L, M_a], \ \partial_a = \partial / \partial t_a \tag{15}$$

определяют семейство (иерархию) коммутирующих потоков на открытом подмножестве пространства $\mathcal{L}^D$.

Коммутативность означает, что $[\partial_a + M_a, \partial_b + M_b] = 0$.

Лекция 3. Гамильтоновость лаксовых уравнений. Системы Калоджеро-Мозера

13. Симплектическая структура Кричевера-Фонга и гамильтононианы

Симплектическая структура на пространстве $\mathcal{L}^D$ введена И.М. Кричевером и Д. Фонгом в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ и затем использовалась Кричевером для доказательства гамильтоновости лаксовых уравнений того типа, которые мы здесь рассматриваем. Эта структура имеет универсальный характер и применяется во многих вопросах теории солитонов.

Пусть Ψ — матрица, образованная левыми собственными векторами L, нормированными условием $\sum \psi_i = 1$. Она определена с точностью до перестановки своих столбцов. Мы рассматриваем L и Ψ как матричные функции на $\mathcal{L}^D$ со значениями в пространстве мероморфных функций на Σ. Пусть δL и $\delta\Psi$ — дифференциалы этих функций, то есть 1-формы на $\mathcal{L}^D$. Рассмотрим диагональную форму K матричной функции L,

$$\Psi L = K \Psi,$$

имеющую собственные значения L на диагонали, и матричнозначную 1-форму δK. Пусть Ω — 2-форма на $\mathcal{L}^D$ со значениями в пространстве мероморфных функций на Σ, определенная соотношением

$$\Omega = \operatorname{tr}(\delta\Psi \wedge \delta L \cdot \Psi^{-1} - \delta K \wedge \delta\Psi \cdot \Psi^{-1}).$$

Ω уже не зависит от порядка столбцов Ψ (собственных значений K) и следовательно корректно определена на $\mathcal{L}^D$.

Выберем голоморфный дифференциал (1-форму) dz на Σ и определим 2-форму ω на $\mathcal{L}^D$ со значениями в $\mathbb{C}$:

$$\omega = -\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{K} \operatorname{res}_{\gamma_s} \Omega dz + \sum_{P_i \in D} \Omega dz\right).$$

Задача. $\Omega = 2\delta \operatorname{tr}\left(\delta\Psi \cdot \Psi^{-1} K\right).$

Теорема 9. *Форма ω кососимметрична, невырождена и замкнута на $\mathcal{L}^D$.*

Вклад γ-точек в ω с точностью до пропорциональности равен

$$\tilde{\omega} = \sum_s (\delta k_s \wedge \delta z_s + \delta\alpha_s^t \wedge \delta\beta_s). \tag{16}$$

Теорема 10 (И.М. Кричевер). *Динамическая система $\partial_a L = [L, M_a]$ является гамильтоновой с гамильтонианом*

$$H_a = \frac{1}{k+1} \operatorname{res}_{P_i} \operatorname{tr}(w^{-m} L^{k+1}) dz, \ \ a = (P_i, k, m).$$

При заданном L эти гамильтонианы находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, отвечающей симплектической форме Кричевера-Фонга.

14. Некоторые сведения о функциях Вейерштрасса

Эти сведения понадобятся для построения нашего основного примера — эллиптической системы Калоджеро-Мозера. Пусть ω, ω' — пара комплексных чисел, таких что $\operatorname{Im} \frac{\omega'}{\omega} > 0$. Рассмотрим решетку в $\mathbb{C}$ с образующими 2ω, $2\omega'$.

Существует единственная функция $\wp$ на $\mathbb{C}$ с периодами 2ω, $2\omega'$, имеющая двойной полюс при $z = 0$ и такая, что $\wp(0) = 0$ ($\wp$-функция Вейерштрасса). Имеет место формула

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + {\sum_{m,n}}' \left[\frac{1}{(z - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right]$$

(Σ' означает суммирование за исключением нулевой точки решетки). Функция $\wp$ четна: $\wp(z) = \wp(-z)$. Пусть ζ — единственное нечетное решение уравнения $\wp(z) = -\zeta'(z)$.

Уравнение $\zeta(z) = \frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)}$ определяет целую функцию на $\mathbb{C}$, такую, что $\sigma(z) = z + O(z^5)$. Имеют место следующие законы преобразования:

$$\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta, \quad \zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta'$$

$$\sigma(z + 2\omega) = -\sigma(z) \exp[2\eta(z + \omega)], \quad \sigma(z + 2\omega') = -\sigma(z) \exp[2\eta'(z + \omega')]$$

и формула сложения:

$$\frac{\sigma(u + v)\sigma(u - v)}{\sigma(u)^2 \sigma(v)^2} = \wp(v) - \wp(u).$$

15. Эллиптическая система Калоджеро-Мозера Возьмем оператор Лакса

$$L_{ij}(z) = \frac{\sigma(z + q_j - q_i)\sigma(z - q_j)\sigma(q_i)}{\sigma(z)\sigma(z - q_i)\sigma(q_j - q_i)\sigma(q_j)} \ (i \neq j), \quad L_{jj} = p_j. \tag{17}$$

Дивизор D состоит из одной точки $z = 0$ с кратностью 1; γ-точки здесь обозначены q_i. Функция L корректно определена на той эллиптической кривой, где определена σ-функция.

В каждой точке $z = q_i$ имеет место разложение

$$L = -\alpha_i \beta_i^t (z - q_i)^{-1} + L_{0i} + \dots,$$

где

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L_{0i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & * & p_i & * & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(в α_i отличен от 0 единственный элемент с номером i, точно так же в β_i отличен от -1 единственный элемент с тем же номером, а в матрице L_{0i} только одна ненулевая строка).

Вычисляя гамильтониан второго порядка по теореме 10, получим, с точностью до нормировки

$$H = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_{z=0} \operatorname{tr}(z^{-1} L^2) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \operatorname{res}_{z=0} \sum_{i<j} \frac{\sigma(z + q_i - q_j)\sigma(z + q_j - q_i)}{\sigma(z)^2 \sigma(q_i - q_j)^2}.$$

Применяя формулу сложения для σ-функции, и учитывая, что $\operatorname{res}_{z=0}(z^{-1}\wp(z)) = 0$ получаем

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{i<j} \wp(q_i - q_j).$$

H называется эллиптическим гамильтонианом Калоджеро-Мозера. Он описывает движение частиц с попарным взаимодействием на эллиптической кривой. Так как при $q_i = q_j$ потенциал сингулярен, эти гиперплоскости являются запрещенными. В вещественном случае частицы движутся по окружности и не выходят из камеры Вейля алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Ввиду периодичности можно считать это движением в аффинной камере Вейля.

По общей формуле $\omega = \sum_{i=1}^{n} (\delta\alpha_i^t \wedge \delta\beta_i + \delta z_i \wedge \delta k_j)$. В данном случае α_i и β_i постоянны, и их вклад исчезает. По определению $z_i = q_i$, и, кроме того, очевидно, что $L_{0i}\alpha_i = p_i\alpha_i$, то есть $k_i = p_i$. Таким образом $\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta q_i \wedge \delta p_i$, то есть имеет канонический вид.

Открытый вопрос: к чему приведет указанная схема для рода 2?

16. Тригонометрический, гиперболический и рациональный случаи систем Калоджеро-Мозера

Функция $\wp$ удовлетворяет уравнению $\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$, где $e_\alpha = \wp(\omega_\alpha)$, ω_1 и ω_3 — полупериоды, $\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$.

При $e_1 = e_2 = a$, $e_3 = -2a$

$$\wp(z) = a + 3a \operatorname{sh}(\sqrt{3a}\, z)^{-2}.$$

При $e_1 = 2a$, $e_2 = e_3 = -a$,

$$\wp(z) = -a + 3a \sin(\sqrt{3a}\, z)^{-2}.$$

При $e_1 = e_2 = e_3 = 0$

$$\wp(z) = z^{-2}.$$

При соответствующих соотношениях между e_1,e_2 и e_3 мы получаем гиперболический, тригонометрический и рациональный случай систем Калоджеро-Мозера. Отметим, что тригонометрический и эллиптический случаи соответствуют движению финитного типа, а в остальных двух случаях движение инфинитно.

Лаксово представление для эллиптической системы Калоджеро-Мозера найдено в 1980 г. Кричевером, а для остальных потенциалов ранее Ольшанецким и Переломовым.

17. Симплектическое обобщение

Вычислим гамильтониан второго порядка $H = -\frac{1}{2}\operatorname{res}_{z=0}\operatorname{tr}(z^{-1}L^2)$ для оператора Лакса

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \in \overline{\mathfrak{sp}(2n)}. \tag{18}$$

Матрицу A возьмем равной оператору Лакса рассмотренной выше задачи Калоджеро-Мозера:

$$A_{ij} = \frac{\sigma(z+q_j-q_i)\sigma(z-q_j)\sigma(q_i)}{\sigma(z)\sigma(z-q_i)\sigma(q_j-q_i)\sigma(q_j)}\ (i \neq j),\quad A_{jj} = p_j, \tag{19}$$

а B и C возьмем диагональными:

$$B_{jj} = \wp(z-q_j),\quad C_{jj} = \varepsilon_j(\wp(z) - \wp(q_j))^2,$$

где ε_j — произвольное комплексное число. Тогда

$$H = -\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{i\neq j}\wp(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{n} V(q_j),$$

где

$$V(q_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_j\left(\wp^3(q_j) + \wp(q_j)\wp''(q_j) + \wp(q_j)\frac{g_2}{10} + \frac{1}{24}\wp^{(IV)}(q_j)\right).$$

Мы получили гамильтониан Калоджеро-Мозера с добавкой, зависящей от координаты частицы, что соответствует внешнему потенциальному полю. Произвольность множителя ε_i означает, что мы можем это поле (или любую его компоненту) как угодно отмасштабировать, или вообще "выключить" без потери интегрируемости системы.

Таким образом в симплектическом случае алгебры операторов Лакса приводят к системе Калоджеро-Мозера, соответствующей системе корней A_n, с внешним полем. Но для произвольных систем корней R широко известны системы Калоджеро-Мозера, задаваемые гамильтонианами вида

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\operatorname{rank} R} p_j^2 + \sum_{\alpha\in R_+}\wp(\langle q, \alpha\rangle).$$

Для систем корней классических алгебр Ли их тоже можно получить с помощью развиваемых здесь методов. Получаются также все известные интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе волчки Манакова, Лагранжа, Ковалевской, и многое другое.

Список литературы

[1] I.M. Krichever. Vector bundles and Lax equations on algebraic curves. Comm. Math. Phys. **229**, 2002, p. 229–269.

[2] И.М. Кричевер, О.К. Шейнман. Алгебры операторов Лакса. Функциональный анализ и его приложения, т. **41**, №4, 2007, с. 46–59, arXiv: `math.RT/0701648`.

[3] M. Schlichenmaier, O.K. Sheinman. Central extensions of Lax operator algebras, arXiv: `math.QA/0711.4688`.

[4] О.К. Шейнман. Алгебры операторов Лакса и интегрируемые иерархии. Труды математического института им. В.А.Стеклова, т. **263**, 2008.

[5] A.N. Tyurin. Classification of vector bundles on an algebraic curve of an arbitrary genus. Soviet Izvestia, ser. Math., **29**, p. 657–688.