ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Летняя школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Самара, Россия
8–15 июня 2009 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Summer school-conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Samara, Russia
June 8–15, 2009

ABSTRACTS

Издательство "Универс групп"
Самара 2009

Летняя школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Самара, Россия, 8–15 июня 2009 г. Тезисы докладов. — Самара: Изд-во "Универс групп", 2009. — 68 с.

Сборник содержит тезисы докладов участников летней школы-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", проводившейся в Самаре с 8 по 15 июня 2009 года Самарским государственным университетом и Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова. Кроме этого, в сборник входят анонсы некоторых лекционных курсов, прочитанных на школе-конференции.

Превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп

Авдеев Р.С., г. Москва
suselr@yandex.ru

Пусть G — связная полупростая комплексная алгебраическая группа, H — её замкнутая подгруппа. Однородное пространство G/H называется *сферическим*, если борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H. Важной характеристикой сферического однородного пространства G/H является его *полугруппа старших весов* $\Lambda_+(G/H)$, описывающая (простой) спектр леворегулярного представления G в $\mathbb{C}[G/H]$. Сферическое однородное пространство G/H называется *превосходным*, если оно квазиаффинно и полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ порождается непересекающимися линейными комбинациями фундаментальных весов. Превосходные сферические однородные пространства обладают рядом хороших свойств (см. работу [1]; в ней для этих пространств не используется термин "превосходные"), что и обуславливает интерес к их изучению. Кроме того, оказывается, что все односвязные симметрические пространства являются превосходными.

Доклад посвящён классификации с точностью до изоморфизма всех превосходных *аффинных* сферических однородных пространств G/H. Для формулировки результатов нам потребуется ещё одно понятие. Сферическое однородное пространство G/H называется *строго неприводимым*, если сферическое однородное пространство $G/N_G(H)^0$ не является локально изоморфным прямому произведению никаких двух нетривиальных сферических однородных пространств. Имеют место следующие два результата:

Теорема 1. *Пусть G/H — превосходное аффинное сферическое однородное пространство. Тогда существуют строго неприводимые превосходные аффинные сферические однородные пространства $G_1/H_1, \ldots, G_m/H_m$, такие что $G/H \simeq G_1/H_1 \times \ldots \times G_m/H_m$.*

Теорема 2. *Если сферическое однородное пространство превосходно, то и его односвязное накрывающее пространство превосходно.*

Теорема 1 сводит задачу к классификации всех с точностью до изоморфизма строго неприводимых превосходных аффинных сферических однородных пространств. Для этого привлекается известная классификация односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств G/H, а также используются известные для этих пространств полугруппы старших весов $\Lambda_+(G/H)$ (найдены в [2], [3], а также в неопубликованных работах Ю.В. Дзядыка). Ввиду теоремы 2 задача сводится к следующей: для каждого известного односвязного превосходного аффинного сферического однородного пространства G/H_0 найти все такие подгруппы $H \subset G$, что $H_0 \subset H \subset N_G(H_0)$, $H^0 = H_0$ и пространство G/H превосходно. Результатом решения этой задачи служит полученный автором полный список таких пар (G, H) и соответствующих им пространств G/H.

Список литературы

[1] D.I. Panyushev. Parabolic subgroups with Abelian unipotent radical as a testing site for invariant theory. Canad. J. Math., v. **51**, №3, 1999, p. 616–635.
[2] M. Krämer. Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Compositio Math., v. **38**, №2, 1979, p. 129–153.
[3] Р.С. Авдеев. Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп. Известия РАН, сдано в печать.

Универсальное свойство реализации Кокса аффинных многообразий

Аржанцев И.В.[1], Гайфуллин С.А.
кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова
arjantse@mccme.ru, sgayf@yandex.ru

Обобщение известной конструкции из торической геометрии, предложенной Д. Коксом в 1995 году, позволяет сопоставить нормальному алгебраическому многообразию X с конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ кольцо $R(X)$, градуированное группой $\mathrm{Cl}(X)$. Кольцо $R(X)$ называют кольцом Кокса многообразия X. По построению, однородная компонента $R(X)_0$ этого кольца совпадает с алгеброй регулярных функций на X. Если многообразие X аффинно, а кольцо $R(X)$ конечно порождено, мы получаем каноническую реализацию X в качестве категорного фактора аффинного многообразия $\overline{X} := \mathrm{Spec}\,(R(X))$ по действию квазитора Нерона–Севери S, группа характеров которого отождествлена с $\mathrm{Cl}(X)$. В частности, для торического многообразия X многообразие $\overline{X}$ является аффинным пространством [4]. Если группа $\mathrm{Cl}(X)$ свободна, то кольцо $R(X)$ факториально. Для произвольной конечно порожденной группы $\mathrm{Cl}(X)$ можно гарантировать только однородную факториальность $R(X)$, то есть однозначность разложения на простые множители в полугруппе однородных элементов кольца $R(X)$ [1]. Будем называть морфизм факторизации $\pi\colon \overline{X} \to X$ реализацией

[1]Первый автор поддержан грантом Пьера Делиня

Кокса аффинного многообразия X. Основным результатом доклада является доказательство универсальности реализации Кокса.

Теорема 1 [2]. *Пусть Z — аффинное многообразие с действием квазитора Q. Предположим, что алгебра $\mathbb{K}[Z]$ однородно факториальна относительно градуировки, определяемой Q-действием, факторпространство $Z//Q$ изоморфно многообразию X и образ каждого простого дивизора в Z относительно морфизма факторзации $q\colon Z \to X$ имеет в X коразмерность $\leqslant 1$. Тогда найдутся такие сюръективный гомоморфизм $\mu\colon Q \to S$ и доминантный морфизм $\nu\colon Z \to \overline{X}$, для которых $\nu(gz) = \mu(g)\nu(z)$ и $q(z) = \pi(\nu(z))$ для всех $g \in Q$ и $z \in Z$.*

В доказательстве используется связь реализации Кокса с теорией дивизоров полугруппы [3]. Напомним, что теорией дивизоров коммутативной полугруппы Γ называется вложение Γ в свободную полугруппу $D(\Gamma)$ с определенными условиями минимальности. Упомянутая связь состоит в том, что для полугруппы Γ классов ассоциированности регулярных функций на нормальном аффинном многообразии X в качестве полугруппы $D(\Gamma)$ выступает полугруппа классов ассоциированности однородных элементов кольца $R(X)$. Полугрупповым аналогом теоремы 1 является утверждение о том, что при определенных условиях вложение полугруппы Γ в свободную полугруппу пропускается через теорию классов дивизоров.

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев. О факториальности колец Кокса. Мат. заметки, т. **85**, вып. 5, 2009, с. 643–651.

[2] И.В. Аржанцев, С.А. Гайфуллин. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий, arXiv: `math.AG/0810.1148`.

[3] З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

[4] D. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Alg. Geom., v. **4**, №1, 1995, p. 17–50.

Локальные конечномерные алгебры и $\mathbb{G}_a^n$-действия

Аржанцев И.В., Шаройко Е.В.
кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова
arjantse@mccme.ru, sharojko@mccme.ru

Напомним, что торическое многообразие — это нормальное алгебраическое многообразие с заданным локально транзитивным действием алгебраического тора T. Такие многообразия допускают комбинаторное описание в терминах вееров выпуклых конусов, см. [2]. Во многом благодаря этому описанию торические многообразия играют важную роль в геометрии, алгебре, комбинаторике и топологии. Имеется несколько подходов, позволяющих перенести идеи торической геометрии на другие классы многообразий. Например, можно заменить тор на коммутативную унипотентную группу $\mathbb{G}_a^n = \mathbb{G}_a \times \cdots \times \mathbb{G}_a$ (n копий), где $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа основного алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Теория локально транзитивных $\mathbb{G}_a^n$-действий может рассматриваться как "аддитивный аналог" торической геометрии. Но здесь мы сталкиваемся с принципиальными отличиями. Так локально транзитивное действие унипотентной группы на аффинном многообразии транзитивно. Далее, число T-орбит на торическом многообразии конечно, и изоморфизм между торическими многообразиями в категории многообразий влечет изоморфизм в категории торических многообразий. Оба эти свойства нарушаются в аддитивной ситуации: достаточно рассмотреть $\mathbb{G}_a^2$-действия на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, заданные формулами

$$[z_0 : z_1 : z_2] \to [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_2 z_0] \text{ и}$$
$$[z_0 : z_1 : z_2] \to [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_1 z_1 + (\frac{a_1^2}{2} + a_2) z_0].$$

Тем не менее, изучение локально транзитивных $\mathbb{G}_a^n$-действий также приводит к замечательному соответствию. На сей раз это соответствие между действиями и локальными коммутативными конечномерными алгебрами с фиксированной системой порождающих, установленное в работе [3]. Исходным является соответствие между рациональными $(m+1)$-мерными $\mathbb{G}_a^n$-модулями V с фиксированным циклическим вектором v и классами изоморфизма пар (R, U), где R — локальная $\mathbb{K}$-алгебра с m-мерным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и $U \subseteq \mathfrak{m}$ — n-мерное подпространство, порождающее алгебру R. Эти данные определяют локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на замыкании орбиты точки $\langle v \rangle$ в проективизиции $\mathbb{P}^m$ пространства V. Обратно, каждое локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на нормальном проективном многообразии реализуется таким образом. Целью доклада является дальнейшее развитие соответствия Хассетта–Чинкеля.

В случае, когда подпространство U совпадает с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, мы получаем локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на пространстве $\mathbb{P}^n$. Напомним, что модальностью действия называется максимальное число параметров в непрерывном семействе $\mathbb{G}_a^n$-орбит. Мы опишем модальность в терминах алгебры R.

Локально транзитивные $\mathbb{G}_a^n$-действия на проективных гиперповерхностях соответствуют гиперплоскостям $U \subset \mathfrak{m}$. В [1] описаны локально транзитивные $\mathbb{G}_a^n$-действия на невырожденной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Там показано, что для каждого n такое действие единственно с точностью до изоморфизма, и найдена соответствующая пара (R, U). Мы охарактеризуем пары (R, U), отвечающие действиям на вырожденных квадриках. Здесь в большинстве случаев семейство классов изоморфизма действий допускает параметры. Пусть пара (R, U) определяет локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на гиперповерхности $H \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Будет показано, что степень H равна наибольшему значению d, для которого идеал $\mathfrak{m}^d$ не лежит в U.

Список литературы

[1] Е.В. Шаройко. Соответствие Хассетта–Чинкеля и автоморфизмы квадрики, arXiv: `math.RT/0902.4529`.

[2] W. Fulton. Introduction to toric varieties. Annals of Math. Studies, v. **131**, Princeton University Press, 1993.

[3] B. Hassett, Yu. Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Notices, **20**, 1999, p. 1211–1230.

Конечномерные полупростые алгебры Хопфа[2]

Артамонов В.А., г. Москва

artamon@mech.math.msu.su

В последние годы в [1] получено при некоторых ограничениях описание точечных конечномерных алгебр Хопфа. Другим важным классом, требующим описания, является класс конечномерных полупростых алгебр Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не делит размерность алгебры.

Мы будет рассматривать случай, когда неизоморфные неприводимые H-модули размерности > 1 имеют разные размерности.

[2]Работа частично поддержана РФФИ грант 09-01-00058

В теории конечных групп известен результат Г. Сейтца [2], описавшего конечные группы G, имеющие только одно неприводимое комплексное представление размерности > 1. Такие группы G — либо экстраспециальные 2-группы порядка $2^{2m+1,}$ $n = 2^m$, либо $|G| = n(n+1)$, где $n + 1 = p^f$ и p — простое число.

Напомним основные определения. Ассоциативная алгебра H над полем k называется алгеброй Хопфа, если в ней задан гомоморфизм алгебр $\Delta\colon H \to H^{\otimes 2}$, называемый *коумножением*, гомоморфизм алгебр $\varepsilon\colon H \to k$, называемый *коединицей* и анти-алгебраический гомоморфизм $S\colon H \to H$, называемый *антиподом*, причем коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "\Delta\otimes 1"'] & H^{\otimes 3}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "1"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"'] & H
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[drr, "\varepsilon"] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes S"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "\mu"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "S\otimes 1"'] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "\mu"'] & k
\end{tikzcd}$$

где $\mu : H^{\otimes 2} \to H$ — отображение умножения.

Если H конечномерно, то дуальное пространство H^* также является алгеброй Хопфа с *конволютивным* умножением $l_1 * l_2$, коумножением Δ^*, коединицей ε^* и антиподом S^*, которые вводятся по правилу:

$$l_1 * l_2 = \mu \cdot (l_1 \otimes l_2) \cdot \Delta, \quad \Delta(l)(x \otimes y) = l(xy),$$
$$(S^* l)(x) = l(S(x)), \quad \varepsilon^*(l) = l(1)$$

для всех $x, y \in H$.

Элемент $g \in H$ *групповой*, если $\Delta(g) = g \otimes g$ и $\varepsilon(g) = 1$. Множество $G(H)$ всех групповых элементов образует мультипликативную подгруппу в группе обратимых элементов в H.

Элементы из $G(H^*)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами алгебр $H \to k$. Поэтому H как полупростая k-алгебра имеет полупрямое разложение

$$H = (\oplus_{g\in G} ke_g) \oplus \mathrm{Mat}(d_1, k) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}(d_m, k),\\ 1 < d_1 < \cdots < d_m, \tag{1}$$

где $\{e_g \mid g \in G\}$ — система центральных ортогональных идемпотентов в H.

Обозначим через E_g, $g \in G$, одномерный H-модуль, для которого $hx = h(g)x$ при любых $h \in H$. Число одномерных неизоморфных H-модулей E_g, $g \in G$, равно порядку группы G. Пусть $M_1, \ldots, M_m$ — полное множество неизоморфных неприводимых H-модулей размерностей $d_1, \ldots, d_m$.

Предложение 1 (Н. Андрушкиевич, В.А. Артамонов). *Если $g \in G$ и $i = 1, \ldots, m$, то имеются изоморфизмы H-модулей $E_g \otimes M_i \simeq M_i \otimes E_g \simeq M_i$. Если $1 \leqslant i, j \leqslant m$, то имеются изоморфизмы H-модулей*

$$M_i \otimes M_j = \delta_{ij} \left(\oplus_{g\in G} E_g\right) \oplus \left(\oplus_{t=1}^m m_{ij}^t M_t\right),\\ m_{ij}^t = \dim_k \mathrm{Hom}_H(M_i \otimes M_j, M_t) \geqslant 0.$$

Поэтому $d_i d_j = \delta_{ij}|G| + \sum_t m_{ij}^t d_t$ и $|G| \leqslant d_1^2$.

Следствие 1. *Если $m = 1$, то порядок G делится на d_1. Порядок G делит d_1^2, причем $|G| = d_1^2$ тогда и только тогда, когда $M_1 \otimes M_1 \simeq \oplus_{g\in G} E_g$.*

Введем левое и правое действия $H^* \rightharpoonup H$, $H \leftharpoonup H^*$ по правилу: если $f \in H^*$ и $x \in H$, где

$$\Delta(x) = \sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in H \otimes H,$$

то

$$f \rightharpoonup x = \sum_x x_{(1)} \langle f, x_{(2)} \rangle, \quad x \leftharpoonup f = \sum_x \langle f, x_{(1)} \rangle (x_{(2)}).$$

Если $g \in G(H^*)$, то $g \rightharpoonup x$, $x \leftharpoonup g$ являются автоморфизмами алгебры H.

Теорема 1 (Н. Андрушкиевич, В.А. Артамонов). *Предположим, что $g \in G$ и $x \in \mathrm{Mat}(d_r, k)$. Тогда существуют (косо-)симметричная матрица $U_r \in \mathrm{GL}(d_r, k)$ и система ортогональных идемпотентов $\Delta_{g,i} \in \mathrm{Mat}(d_i, k)^{\otimes 2}$, $g \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$, такие, что*

$$\Delta(e_g) = \sum_{f\in G} e_f \otimes e_{f^{-1}g} + \sum_{i=1,\ldots,m} \Delta_{g,i},$$

$$\Delta(x) = \sum_{g\in G} \left[(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)\right] + \sum_{i,j=1}^m \Delta_{ij}^r(x),$$

$$S(e_g) = e_{g^{-1}},\ \varepsilon(e_g) = \delta_{1,g}, \quad S(x) = \frac{1}{d_r} U_r\, {}^t x U_r^{-1}, \quad \varepsilon(x) = 0,$$

где $\Delta_{ij}^r(x) \in \mathrm{Mat}(d_i, k) \otimes \mathrm{Mat}(d_j, k)$. *При этом*

$$\Delta_{g,i} = \frac{1}{d_i} \sum_{r,s=1}^{d_i} E_{rs} \otimes \left(g^{-1} \rightharpoonup S\left(E_{sr}\right)\right) = \frac{1}{d_i} \sum_{r,s=1}^{d_i} \left(E_{rs} \leftharpoonup g^{-1}\right) \otimes S\left(E_{sr}\right).$$

Без ограничения общности можно считать, что каждая матрица U_r либо единичная, либо имеет блочно-диагональный вид, где по главной диагонали стоят двумерные клетки

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебры Хопфа с $m = 1$ в разложении (1) были изучены рядом авторов.

Случай, когда порядок G имеет максимально возможное значение d_1^2 был рассмотрен в [3, Следствие 3.3]. Показано, что группа G абелева и дана классификация моноидальной категории представлений в терминах бихарактеров группы G.

При этом если $d_1 = 2$, то имеется с точностью до эквивалентности четыре класса алгебр Хопфа H. Именно, групповые алгебры абелевых групп D_4 порядка 8, группы диэдра порядка 8, группы кватернионов Q_8 порядка 8 и алгебра Г. Каца, порождаемая элементами x, y, z с определяющими соотношениями, коумножением, коединицей и антиподом

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad zx = yz, zy = xz, \\ z^2 = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy), \quad \varepsilon(z) = 1, \quad S(z) = z^{-1}, \\ \Delta(z) = \frac{1}{2}\left((1 + y) \otimes 1 + (1 - y) \otimes x\right)(z \otimes z), \end{aligned}$$

при этом элементы x, y — групповые.

В работе [4] дано явное описание H, если порядок G равен d_1^2 и либо d_1 нечетно, либо G — элементарная абелева 2-группа.

Теорема 2 [5, 6]. *Предположим, что* H *из* (1), $m = 1$ *и порядок группы* $G = G(H^*)$ *равен* d_1^2 . *Тогда* $\Delta_{11}^1 = 0$ *в теореме* 1 *и проективное представление* $\Psi(g) = A_g \in \mathrm{GL}(d_1, k)$ *размерности* d_1 *группы* G *является неприводимым и точным, причем*

$$\begin{aligned} g \rightharpoonup x = A_g x A_{g^{-1}}, \quad x \leftharpoonup g = U\, {}^t\!A_g U^{-1} x\, U\, {}^t\!A_{g^{-1}} U^{-1}, \\ \left[A_g,\, U\, {}^t\!A_h^{-1} U^{-1}\right] = \mu_{g,h} E, \quad \mu_{g,h} \in k^*, \end{aligned}$$

для всех $g \in G$. *В частности,* $G = A \times A$ *для некоторой абелевой группы* A *порядка* d_1. *Обратно, если* H *имеет полупростое разложение* (1) *при $m = 1$ и коумножение, коединицу, антипод из теоремы 1, где $\Delta^1_{11} = 0$, и $G = A \times A$, как и выше, то H является алгеброй Хопфа.*

Следствие 2 [5]. *Если H из теоремы 2, то дуальная алгебра H^* является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй*

$$H^* = H^*_0 \oplus H^*_1, \quad H^*_0 = kG,\ H^*_1 = \mathrm{Mat}(d_1, k).$$

Теорема 3 [5]. *Пусть $m = 1$, $d_1 > 2$ и H из теоремы 2. Тогда H^* не изоморфно любой алгебре Хопфа из той же теоремы.*

Неприводимые проективные представления Ψ, используемые для построения алгебры Хопфа в теореме 2, обладают свойством

$$[\Psi(g), U\, {}^t\Psi(h) U^{-1}] = 1. \tag{2}$$

Теорема 4 [6]. *Пусть G — прямое произведение двух циклических групп порядка d_1. Тогда существует неприводимое проективное представление группы G размерности d_1 с условием (2). С помощью этого представления строится алгебра Хопфа H, $U_1 = E$ или U_1 — кососимметрическая матрица, у которой по побочной диагонали чередуются $1, -1$. Если $d_1 = p$ — простое число, то группа G всегда имеет указанное прямое разложение, и в этом случае получается полное описание алгебр Хопфа.*

Дано описание действия алгебр Хопфа H из теоремы 2 на квантовых многочленах.

Список литературы

[1] N. Andruskiewitch, H.-J. Schneider. On the classification of finite dimensional pointed Hopf algebras, arXiv: `math.QA/0502157`.
[2] G.M. Seitz. Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one. Proc. Amer. Math. Soc., v. **19**, 1968, p. 459—461.
[3] D. Tambara, S. Yamagami, Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. J. Algebra, v. **209**, 1998, p. 692–707.
[4] D. Tambara. Representations of tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. Israel J. Math., v. **118**, 2000, p. 29–60.
[5] V.A. Artamonov, I.A. Chubarov. Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras, Modules and comodules, Trends in Mathematics, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 2008, p. 65–85.
[6] V.A. Artamonov, I.A. Chubarov, Properties of some semisimple Hopf algebras. Contemp. Math., Proceedings of the Conference on Algebras, Representations and Applications. Edited by: V. Futorny, V. Kac, I. Kashuba and E. Zelmanov.

Конечные группы и q-ряды с мультипликативными коэффициентами

Воскресенская Г.В., г. Самара
galvosk@mail.ru

Пусть G — конечная группа. Каждому элементу группы можно сопоставить модулярную форму, используя характеристические многочлены операторов $T(g)$, где T — точное представление. Возникающие здесь модулярные формы являются произведениями эта-функций Дедекинда от различных аргументов. Это соответствие называется соответствием с помощью фрейм-форм (Frame-shape correspondence).

Мы расскажем в докладе о свойствах этого соответствия и рассмотрим проблему нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные с элементами этих групп, являются эта-произведениями с мультипликативными коэффициентами. Такие группы называются $M\eta P$-группами. Задача их полной классификации пока остается открытой проблемой.

Теорема. *Конечная простая группа G является $M\eta P$-группой тогда и только тогда, когда G — простая подгруппа в M_{24}.*

Список литературы

[1] D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay. Multiplicative products of $\eta-$functions. Contemp. Math., v. **45**, 1985, p. 89–98.
[2] K. Ono. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., v. **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
[3] G.V. Voskresenskaya. Multiplicative Dedekind η-functions and representations of finite groups. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, v. **17**, 2005, p. 359–380.

Сизигии для инвариантов тернарных квартик

Гизатуллин М.Х., г. Самара
gizmarat@yandex.ru

Получено явное описание всех тринадцати порождающих элементов алгебры проективных инвариантов общей тернарной формы четвёртой степени. Представлены все основные соотношения, связывающие построенные фундаментальные инварианты. Тем самым подтверждена одна из гипотез Т. Шиоды, высказанных им более сорока лет тому назад. Кроме того, явно описаны фундаментальные коварианты и контраварианты для тернарных квартик. Имеются оценки для числа фундаментальных смешанных конкомитантов, установлены простейшие сизигии для некоторых из них.

О свойстве разделения для компактных групп

Гичев В.М., г. Омск
gichev@ofim.oscsbras.ru

Свойство разделения ("Separation Property", сокращенно SP) было определено в работе [1] так: подмножество X линейного пространства V обладает SP, если для любой пары независимых линейных функционалов α, β на V существует $x \in X$ такой, что $\alpha(x) = 0, \beta(x) \neq 0$. Это означает, что отвечающие X линейные функции на двойственном к V пространстве разделяют его точки (в указанном выше смысле) и равносильно тому, что для любой линейной гиперплоскости H (т.е. подпространства коразмерности 1) в V множество $X \cap H$ порождает H. Там же были сформулированы определения слабого (WSP) и сильного (SSP) свойств разделения. Основные результаты [1] относятся к орбитам в пространствах неприводимых представлений связных полупростых групп; в частности, в [1] описаны старшие веса представлений, для которых орбита старшего вектора удовлетворяет SP (WSP, для SSP — замыкание орбиты) и показано, что в этом случае SP выполняется для всех нетривиальных орбит. Для алгебраических торов SP, WSP и SSP охарактеризованы в работе [2] в геометрических терминах, относящихся к семейству весов представления. В [1] и в [3] было обнаружено такое свойство неприводимых представлений: орбита произвольного вектора пересекает любую линейную гиперплоскость. В [3] был также поставлен вопрос: выполняется ли оно для неприводимых комплексных представлений размерности выше 1 связных компактных групп? (Результаты упомянутых работ получены для алгебраических групп в предположении алгебраической замкнутости поля;

вещественный случай обсуждался в [3].) Положительный ответ получен в [4], а одно из доказанных в [5] утверждений означает выполнение SP для неприводимых вещественных представлений связных компактных групп. В докладе предполагается рассказать об этих и некоторых близких результатах.

Список литературы

[1] H. Kraft, N.R. Wallach. On the separation property of orbits in representation spaces. Journal of Algebra, v. **258**, 2002, p. 228–254.

[2] О.В. Чувашова. Свойства отделимости для замыканий торических орбит. Матем. сб., т. **197**, №3, 2006, с. 117–134

[3] J. Galindo, P. de la Harpe, T. Vust. Two observations on irreducible representations of groups. J. Lie Theory, v. **12**, 2002, p. 535–538

[4] V.M. Gichev. A note on common zeroes of Laplace–Beltrami eigenfunctions. Ann. of Global Analysis and Geometry, v. **26**, 2004, p. 201–208.

[5] В.М. Гичев. Несколько замечаний о сферических гармониках. Алгебра и анализ, т. **20**, вып. 4, 2008, p. 64–86.

Спектр представления редуктивной группы G в пространствах сечений однородных линейных расслоений на G/TU'

Горфинкель Н.Е., г. Москва
nataly.gorfinkel@gmail.com

Рассмотрим связную редуктивную комплексную алгебраическую группу G и произвольную алгебраическую подгруппу $H \subset G$. Одной из естественных задач, возникающих при изучении однородных пространств, является нахождение спектра представления группы G в пространстве функций $\mathbb{C}[G/H]$. Однако эта задача не всегда осмысленна: в некоторых случаях ее решение никак не характеризует однородное пространство, поскольку функций на нем "мало": например, если $H = B$ — борелевская подгруппа в G, то однородное пространство G/B проективно и $\mathbb{C}[G/B] = \mathbb{C}$.

В таких случаях разумно поставить более общую задачу, а именно, изучать спектр представления группы G в сечениях однородных (то есть снабженных действием группы G) линейных расслоений над G/H. Такие расслоения находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами группы H, а именно, каждому характеру χ ставится в соответствие расслоение $G *_H \mathbb{C}_\chi$ над G/H со слоем $\mathbb{C}_\chi$ над точкой eH, где $\mathbb{C}_\chi$ — это одномерное векторное пространство, в котором H действует характером χ. Пространство сечений такого расслоения как G-модуль изоморфно подмодулю в алгебре функций на группе:

$$\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi) \simeq \mathbb{C}[G]^{(H)}_{-\chi},$$

где $\mathbb{C}[G]^{(H)}_{-\chi}$ — множество H-весовых функций на G веса $-\chi$ для действия H на $\mathbb{C}[G]$ правыми сдвигами аргумента. В частности, в случае тривиального характера χ получаем

$$\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi) \simeq \mathbb{C}[G]^H \simeq \mathbb{C}[G/H].$$

Неприводимые G-подмодули, встречающиеся в пространствах сечений таких расслоений, можно описать, используя полугруппу весов $B \times H$-полуинвариантных функций на G (здесь B действует на $\mathbb{C}[G]$ левыми сдвигами аргумента, а H — правыми). Эту полугруппу, которую мы будем обозначать $\tilde{\mathfrak{X}}(G/H)$, называют расширенной полугруппой весов однородного пространства G/H. Старшие веса неприводимых G-подмодулей в пространстве $\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi)$ суть такие веса λ группы B, что $(\lambda, -\chi) \in \tilde{\mathfrak{X}}(G/H)$.

В частности, в случае, когда G/H сферично, то есть борелевская подгруппа имеет открытую орбиту в G/H или, эквивалентно, спектр представления G в каждом из пространств $\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi)$ прост, он однозначно восстанавливается по полугруппе весов $\tilde{\mathfrak{X}}(G/H)$. Например, для борелевской подгруппы B полугруппа $\tilde{\mathfrak{X}}(G/B)$ порождается всеми парами $(\omega_i^*, \omega_i), i = 1, \ldots, n$, где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — фундаментальные веса группы G, а n — ее ранг. (Здесь λ^* обозначает старший вес неприводимого представления, сопряженного к неприводимому представлению старшего веса λ.) Для каждого доминантного веса χ представление G в пространстве $\Gamma(G *_B \mathbb{C}_{-\chi})$ изоморфно неприводимому представлению старшего веса χ^*.

Теперь сформулируем основной результат, который будет представлен в докладе. Фиксируем максимальные тор T и унипотентную подгруппу U такие, что $B = T \leftthreetimes U$. Пусть U' — коммутант группы U. Положим $H = TU'$. Пространство G/H имеет много общего с G/B: оно тоже сферично и $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}$ (за исключением случаев $G = SL_2(\mathbb{C})$ и $G = SL_3(\mathbb{C})$). В докладе будет доказана следующая

Теорема. *Полугруппа $\tilde{\mathfrak{X}}(G/H)$ свободно порождается всеми парами (ω_i^*, ω_i) и $(\omega_i^*, \omega_i - \alpha_i), i = 1, \ldots, n$, где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — фундаментальные веса, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — простые корни, а n — ранг группы G.*

Полуортогональные разложения производных категорий и скрученные эквивариантные пучки

Елагин А.Д., г. Москва
alexelagin@rambler.ru

Пусть X — алгебраическое многообразие над полем k с действием алгебраической группы G. Представляет интерес вопрос о связи между производными категориями когерентных пучков и G-эквивариантных когерентных пучков на X. Один из результатов в этом направлении состоит в следующем: если производная категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ пучков на X допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$, компоненты которого сохраняются действием редуктивной группы G, то для производной категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))$ эквивариантных пучков имеется аналогичное полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_n \rangle$. В простейшем частном случае полуортогонального разложения, образованного исключительным набором, точная формулировка такова (см. [1, теорема 2.6]):

Если в производной категории когерентных пучков $\mathcal{D}^b(coh(X))$ существует полный исключительный набор из эквивариантных пучков $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$, то категория $\mathcal{D}^b(coh^G(X))$ допускает полуортогональное разложения

$$\langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{D}^b(Repr(G)), \ldots, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{D}^b(Repr(G)) \rangle,$$

в котором подкатегории $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{D}^b(Repr(G))$ эквивалентны производным категориям представлений группы G.

Это утверждение можно обобщить ([1, теорема 2.10]) на случай исключительного набора, образованного пучками, сохраняемыми действием группы. С действием группы на исключительный пучок связан некоторый коцикл, который является препятствием к введению на пучке эквивариантной структуры. Возникающее понятие "коцикла" на алгебраической группе служит естественным обобщением 2-коцикла со значениями в k^* для абстрактных групп и связано с классификацией центральных расширений группы с помощью $\mathbb{G}_m$. При построении полуортогонального разложения оказывается нужным вместо представлений группы рассматривать представления, скрученные на коцикл, а также иметь дело со скрученными эквивариантными пучками. Оказывается, что изучение скрученных эквивариантных пучков (и, в частности, представлений) может быть сведено к изучению эквивариантных пучков относительно расширения группы, соответствующего коциклу.

Список литературы

[1] A. Elagin. Semiorthogonal decompositions of derived categories of equivariant coherent sheaves, arXiv: `math.AG/08095166`.

Наибольшая подалгебра Хопфа в биалгебре[3]

Еряшкин М.С., Скрябин С.М., г. Казань
`darkghost@hitv.ru`

Как известно, алгебры Хопфа выделяются среди биалгебр наличием антипода. Для двух подалгебр Хопфа H_1, H_2 биалгебры B не ясно, всегда ли существует подалгебра Хопфа, содержащая H_1 и H_2 одновременно.

Сначала рассматриваются подкоалгебры специального вида.

Определение *Назовем подкоалгебру $C \subseteq B$ слабо обратимой в B, если отображение включения $i\colon C \to B$ обратимо в $\hom(C, B)$. Обозначим $s_C = i^{-1}$. Назовем C обратимой в B, если, кроме того, $\operatorname{Im} s_C \subseteq C$.*

Обозначим через B^{op} биалгебру, полученную из B изменением умножения на противоположное ($a \cdot_{B^{\text{op}}} b = b \cdot_B a$ для $a, b \in B$). Можно показать, что справедливо следующее

Предложение 1. *Любая биалгебра B содержит наибольшую обратимую в B подкоалгебру. Кроме того, B содержит наибольшую подкоалгебру, обратимую как в B, так и в B^{op}.*

[3]Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00222

Без дополнительных теоретико-кольцевых предположений не удается доказать, что подкоалгебры, существование которых установлено в предложении 1, замкнуты относительно умножения в B. Но если B слабо конечна, то справедлива следующая

Теорема 1. *Слабо конечная биалгебра B имеет наибольшую подалгебру Хопфа $\mathcal{H}(B)$, а также наибольшую подалгебру Хопфа с биективным антиподом $\mathbb{H}(B)$. При этом $\mathcal{H}(B)$ (соотв. $\mathbb{H}(B)$) совпадает с наибольшей обратимой в B (соотв. в B и в B^{op}) подкоалгеброй. Для произвольной алгебры Хопфа (соотв. алгебры Хопфа с биективным антиподом) H морфизмы биалгебр $H \to B$ находятся в биективном соответствии с морфизмами алгебр Хопфа $H \to \mathcal{H}(B)$ (соотв. $H \to \mathbb{H}(B)$).*

Следствие 1. *Если J — биидеал алгебры Хопфа H, причем биалгебра H/J слабо конечна, то J является идеалом Хопфа. В частности, любой биидеал является идеалом Хопфа в случае, когда H нётерова справа или слева, а также в случае, когда H удовлетворяет полиномиальному тождеству.*

В [1, Th. 1] утверждение о том, что J является идеалом Хопфа, сформулировано для нескольких случаев: H/J конечномерна, H/J коммутативна, H точечна, H кокоммутативна (при этом условие $\varepsilon(J) = 0$, накладываемое на биидеал, заменено требованием $J \cap k = 0$). То же самое заключение верно в предположении о том, что H — строго коплоский H/J-комодуль справа или слева [2, Cor. 1.5].

Список литературы

[1] W.D. Nichols. Quotients of Hopf algebras. Comm. Algebra, v. **6**, 1973, p. 1789–1800.
[2] M. Takeuchi. Quotient spaces for Hopf algebras, Comm. Algebra, v. **22**, 1994, p. 2503–2523.

О структуре факторов по действию алгебраических супергрупп

Зубков А.Н., г. Омск
a.zubkov@yahoo.com

В работах Манина, Воронова, Пенкова и др. строились факторы простых супергрупп по действию параболических суперподгрупп (над полями нулевой характеристики). Эти факторы строились чисто геометрическими средствами, как супермногообразия флагов. В случае произвольных супергрупп до сих пор неизвестно, будет ли фактор G/H, где G и H — алгебраические супергруппы, хотя бы суперсхемой (в смысле Гротендика). Более точно, K-пучок G/H может быть стандартным образом вложен в суперграссманиан, который имеет каноническую структуру суперсхемы. Однако как он там расположен – открытый вопрос. Например, будет ли G/H локально замкнутой суперподсхемой? Известны примеры, когда G/H не проективно (Манин, R. Fioresi). В предлагаемом докладе обсуждаются подходы к этой проблеме над полями произвольной характеристики и недавние результаты автора. Везде далее, если характеристика основного поля p ненулевая, то $p \neq 2$. Автором получены следующие результаты:

1. Если $p > 0$, то G/H — суперсхема.
2. Если H нормальна в G, то G/H — аффинная супергруппа [3].
3. Если X аффинная суперсхема и конечная супергруппа G действует на X, то X/G — аффинная суперсхема [4].
4. Если четная часть H редуктивна и характеристика поля $p > 0$, то G/H — аффинная суперсхема [3].

В классической теории алгебраических групп проблема описания подгрупп H, для которых G/H — аффинная схема, хорошо известна [1, 2]. Такие подгруппы носят название "обозримых" ("observable"). Пункт 4) дает частичный ответ на проблему, поставленную J. Brundan. Именно, не будет ли G/H аффинной суперсхемой, если H_{even} редуктивна? Другими словами, не будет ли H с редуктивной четной частью всегда обозрима?

Список литературы

[1] E. Cline, B. Parshall, L. Scott. Induced modules and affine quotients. Math. Ann., v. **230**, 1977, p. 1–14.

[1] F.D. Grosshans. Algebraic homogeneous spaces and invariant theory. Lecture Notes in Math., v. **1673**, Springer, 1997.

[1] A.N. Zubkov. Affine quotients of supergroups, accepted to Transformation Groups, arXiv: `math.QA/0804.3493v2`.

[1] A.N. Zubkov. On quotients of affine superschemes over finite supergroups, submitted to J. Pure and Applied Algebra.

Орбиты унипотентных групп, ассоциированные с ортогональными подмножествами в системах корней

Игнатьев М.В., г. Самара
mihail.ignatev@gmail.com

Доклад основан на работах автора [2] и [3].

Пусть Φ — приведённая система корней, k — алгебраическое расширение поля из p элементов, где p — простое число, достаточно большое по сравнению с рангом Φ. Пусть U — максимальная унипотентная подгруппа в группе Шевалле с системой корней Φ над полем k, Φ^+ — соответствующее подмножество положительных корней. Пусть также $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы U и $\mathfrak{u}^*$ — сопряжённое к $\mathfrak{u}$ пространство. Группа U действует на $\mathfrak{u}$ с помощью присоединённого представления; сопряжённое представление в $\mathfrak{u}^*$ называется *коприсоединённым.* Орбиты коприсоединённого представления играют ключевую роль в описании неприводимых представлений группы U [4], [5].

Обозначим через D произвольное подмножество Φ^+, состоящее из попарно ортогональных корней, а через $\xi\colon D \to k^*$ — любое отображение. Положим $f = f_{D,\xi} = \sum_{\beta\in D} \xi_\beta e^*_\beta$, где $\xi_\beta = \xi(\beta)$, $\beta \in D$, $e_\alpha \in \mathfrak{u}$ — корневые векторы, а $e^*_\alpha \in \mathfrak{u}^*$ — двойственные к ним. Будем говорить, что коприсоединённая орбита $\Omega = \Omega_{D,\xi}$ элемента f *ассоциирована* с подмножеством D. Многие важные классы орбит на самом деле ассоциированы с ортогональными подмножествами (см., например, [1], [6]).

Обозначим через $\sigma = \sigma_D$ инволюцию (элемент второго порядка) в группе Вейля W системы корней Φ, равную произведению отражений, соответствующих корням из D. Пусть $l(\sigma)$ — её длина в простых отражениях и $s(\sigma) = |D|$.

Теорема. *Пусть поле k алгебраически замкнуто. Тогда $\dim\Omega$ не зависит от ξ и не превосходит числа $l(\sigma) - s(\sigma)$, то есть $\dim\Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2\vartheta$, где $\vartheta \geqslant 0$ зависит только от D. Для классических систем корней число ϑ задаётся явной формулой* (9) *из* [2].

Отметим, что оценка на размерность орбиты Ω во многих случаях является точной (например, $\vartheta = 0$ всегда в случае $\Phi = A_n$ или C_n). Для классических групп над конечным полем полученная формула для $\dim\Omega$ позволяет охарактеризовать все возможные размерности неприводимых комплексных представлений группы U. А именно, пусть $2\mu = 2\mu(\Phi)$ — максимально возможная размерность коприсоединённой орбиты U (орбиты всегда имеют чётную размерность), см., например, [1, Propositions 6.3, 6.6].

Следствие. *Пусть $k = \mathbb{F}_q$ — поле из q элементов. Группа U обладает неприводимым комплексным представлением размерности N тогда и только тогда, когда $N = q^l$, где $0 \leqslant l \leqslant \mu$.*

Список литературы

[1] C.A.M. Andrè, A.M. Neto. Super-characters of finite unipotent groups of types B_n, C_n and D_n. J. Algebra, v. **305**, 2006, p. 394–429.

[2] М.В. Игнатьев. Ортогональные подмножества систем корней и коприсоединённые орбиты унипотентных групп. Мат. заметки, to appear, см. также arXiv: `math.RT/0904.2841v1`.

[3] М.В. Игнатьев. Ортогональные подмножества систем корней и метод орбит, препринт.

[4] D. Kazhdan. Proof of Springer's hypothesis. Israel J. Math., v. **28**, 1977, p. 272–286.

[5] А.А. Кириллов. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга, ИДМИ, 2002.

[6] А.Н. Панов. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединённые орбиты. Зап. научн. сем. ПОМИ, т. **349**, 2007, с. 150–173, см. также arXiv: `math.RT/0801.3022v1`.

Алгебра обобщенных дуальных чисел

Ильина М.С., г. Тамбов

`iljina_zmea@mail.ru`

В настоящей работе мы строим коммутативную ассоциативную алгебру Λ_n размерности n над полем вещественных чисел, обобщающую алгебру дуальных чисел (последняя есть Λ_2). Группу "движений" алгебры Λ_n мы определяем как группу G линейных операторов в Λ_n, порожденную группой $\mathbb{R}^n$ параллельных переносов и группой V "вращений", т. е. умножений на e^{iy}. Мы находим все аффинные связности в Λ_n, инвариантные относительно G. Для $n = 2$ такие связности были найдены в [1]. Мы находим геодезические, отвечающие инвариантным аффинным связностям в Λ_n. Оказывается, что каждая геодезическая лежит в двумерной плоскости.

§ 1. Алгебра обобщенных дуальных чисел

Напомним [4], что дуальными числами называются символы $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, действия над ними производятся как над многочленами от буквы i, причем считается, что $i^2 = 0$. В частности, два числа $z = x + iy$, $w = u + iv$

перемножаются по формуле

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i(xv + yu). \tag{1.1}$$

Эти числа образуют алгебру Λ_2 над $\mathbb{R}$ размерности 2. Она ассоциативна и коммутативна. Дуальные числа можно реализовать как вещественные матрицы второго порядка:

$$z = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующее обобщение алгебры дуальных чисел. Запишем вектор $z \in \mathbb{R}^n$ в виде $z = (x, y_2, \ldots, y_n)$, где $x \in \mathbb{R}$, $y = (y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, а затем запишем этот вектор в виде $z = x + iy$. Зададим умножение векторов $z = x + iy$, $w = u + iv$ из $\mathbb{R}^n$ формулой, по виду точно такой же, что и (1.1):

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i(xv + uy).$$

Мы получаем ассоциативную и коммутативную алгебру над $\mathbb{R}$ размерности n. Обозначим ее Λ_n. Ее можно реализовать как алгебру вещественных матриц порядка n:

$$z = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & xE \end{pmatrix},$$

записанных в блочном виде соответственно разбиению $n = 1 + (n-1)$ числа n, здесь y — вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n-1}$, x — число, E — единичная матрица порядка $n - 1$. Группу "движений" алгебры Λ_n определим как группу G линейных операторов в Λ_n, порожденную группой $\mathbb{R}^n$ параллельных переносов и группой V "вращений", т. е. умножений на e^{iy}. Такое умножение есть линейный оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & E \end{pmatrix}.$$

§ 2. Аффинные связности

Приведем некоторые сведения об аффинных связностях [2], [3]. *Аффинная связность* на многообразии M — это соответствие ∇, которое каждому векторному полю X сопоставляет линейное отображение ∇_X пространства векторных полей в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gY} &= f\nabla_X + g\nabla_Y, \\ \nabla_X(fY) &= (Xf)Y + f\nabla_X Y \end{aligned}$$

для $f, g \in C^\infty(M)$. Оператор ∇_X называется *ковариантной производной* относительно X.

Определим функции $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ (*символы Кристоффеля*) формулой

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Символы Кристоффеля образуют n матриц

$$\nabla_i = \left(\Gamma_{ij}^k\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

(k — номер строки, j — номер столбца).

Пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M. Аффинная связность ∇ называется *инвариантной* относительно Φ, если

$$d\Phi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\Phi(X)} d\Phi(Y). \tag{2.2}$$

Пусть Φ в локальных координатах задается функциями $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда условие инвариантности имеет вид

$$\sum_{m,k,s} \Gamma_{ks}^m(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_m} = \sum_{m,p} \Gamma_{ij}^p(x) \frac{\partial y_m}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial y_m} \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Для аффинной связности на пространстве $\mathbb{R}^n$, инвариантной относительно группы всех параллельных переносов, символы Кристоффеля постоянны:* $\Gamma_{ij}^k = \mathrm{const}$.

Пусть $x(t)$ — кривая на многообразии M, $\dot{x}(t)$ — касательный вектор к ней (точка обозначает производную по t). Кривая $x(t)$ называется *геодезической*, если $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$. В локальных координатах геодезическая задается уравнением

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0. \tag{2.4}$$

§ 3. Инвариантные аффинные связности на алгебре Λ_n

В этом параграфе мы находим все аффинные связности на алгебре Λ_n, инвариантные относительно группы G, см. § 1, и находим геодезические.

Пусть ∇ — аффинная связность на алгебре Λ_n, инвариантная относительно группы G. По теореме 2.1 ее символы Кристоффеля Γ_{ij}^k постоянны. Для этих *чисел* по (2.3) получаем уравнения

$$\sum_{k,s} \Gamma_{ks}^m \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \sum_p \Gamma_{ij}^p \frac{\partial y_m}{\partial x_p}. \tag{3.1}$$

Для удобства формулировок и вычислений вернемся от обозначений элементов алгебры Λ_n в § 1 к стандартным обозначениям векторов из $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Возьмем стандартный базис в $\mathbb{R}^n$: $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, единица стоит на k-м месте.

Теорема 3.1. *Аффинная связность ∇ на алгебре Λ_n, инвариантная относительно группы G, зависит от n^2-n+1 параметров, соответствующие матрицы* (2.1) *имеют вид*

$$\nabla_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\nabla_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae_p - c_p & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где a — число из $\mathbb{R}$, b — вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n-1}$, e_p — элемент стандартного базиса в $\mathbb{R}^{n-1}$: $e_p = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, единица стоит на p-ом месте, c — вещественная $(n-1) \times (n-1)$-матрица:

$$c = \begin{pmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

c_p — ее столбец с номером $p = 2, \ldots, n$.

Геодезические в алгебре Λ_n с аффинной связностью, указанной в теореме 3.1, имеют вид

$$y_k = -\frac{b_k}{2}x^2 + \lambda_k x + \mu_k, \quad k = 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

где λ_k и μ_k — произвольные постоянные.

Всякая геодезическая лежит в двумерной плоскости.

Список литературы

[1] В.Ф. Молчанов, Н.А. Малашонок. Некоторые геометрические и физические задачи для плоскости дуального переменного. Державинские чтения V, Матер. научн. конф., Тамбов, 2000, с. 5–7.

[2] П.К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии, — М., 1956.

[3] С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.

[4] И.М. Яглом. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — М.: Наука, 1969.

δ-супердифференцирования простых конечномерных супералгебр[4]

Кайгородов И.Б., г. Новосибирск

kib@math.nsc.ru

Понятие δ-дифференцирования, т.е. такого линейного отображения ϕ алгебры A, что

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)),$$

где $\delta \in F$, было введено В.Т. Филипповым. Он рассматривал действие δ-дифференцирований на первичных алгебрых Ли, первичных мальцевских нелиевых и первичных альтернативных алгебрах.

Автор в работах [1, 2] даёт полное описание δ-дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, полупростых конечномерных йордановых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 и классических супералгебр Ли.

Однородный элемент ϕ суперпространства $End(A)$ эндоморфизмов $A \to A$ называется δ-супердифференцированием, если

$$\phi(xy) \;=\; \delta(x\phi(y) + (-1)^{p(x)deg(\phi)}\phi(x)y).$$

Под тривиальными δ-супердифференцированиями будем понимать 0-супердифференцирования, 1-супердифференцирования и $\frac{1}{2}$-супердифференцирования, являющиеся умножением на элемент из поля.

В настоящей работе рассматриваются нетривиальные δ-супердифференцирования простых конечномерных йордановых супералгебр и супералгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Теорема. *Простые конечномерные йордановы супералгебры и супералгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не имеют нетривиальных δ-супердифференцирований.*

Список литературы

[1] И.Б.Кайгородов. О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр. Алгебра и логика, т. **46**, вып. 5, 2007, с. 585–605.

[2] И.Б. Кайгородов. О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли. Сиб. матем. журнал, т. **50**, вып. 3, 2009, в печати.

[4]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, гранта НШ-344.2008.1, интеграционного проекта СО РАН №97, гранта мэрии г. Новосибирска для молодых ученых.

О классификации решений модифицированного уравнения Янга–Бакстера

Коновалова Е.И., г. Самара
lenita@mail.ru

Метод классической r-матрицы играет важную роль в теории интегрируемых систем ([1], 1.2). В связи с этим ставится задача о классификации r-матриц для заданной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение. Пусть $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ — линейный оператор. Говорят, что R — классическая r-матрица, если скобка $[x, y]_R := \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry])$ удовлетворяет тождеству Якоби. Алгебру Ли с такой скобкой будем обозначать $\mathfrak{g}_R$.

Модифицированным классическим уравнением Янга–Бакстера (MYBE) называется уравнение $[Rx, Ry] - R([Rx, y] + [x, Ry]) = -[x, y]$. Уравнение MYBE является достаточным условием для того, чтобы R являлась классической r-матрицей.

Имеется важный частный случай, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$ — прямая сумма двух подалгебр (как линейных подпространств) и R есть разность соответствующих проекторов: $R = P_1 - P_2$. В докладе будет представлена полная классификация таких решений MYBE для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ с точностью до сопряжения группой $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Пространство решений вида $R = P_1 - P_2$ можно разбить на 25 семейств, полное описание которых содержится в работе [2].

В общем случае положим $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm I)$, где I — тождественный оператор, $\mathfrak{g}_\pm = \operatorname{Im} R_\pm$, $\mathfrak{i}_\pm = \operatorname{Ker} R_\mp$, $\mathfrak{m}_\pm = \mathfrak{g}_\pm/\mathfrak{i}_\pm$. Определено отображение

$$\theta_R \colon \mathfrak{m}_+ \longrightarrow \mathfrak{m}_- \colon (R + I)x \mapsto (R - I)x.$$

Известно ([1], 1.2), что R однозначно восстанавливается по набору

$$\Lambda = (\mathfrak{g}_+, \mathfrak{i}_+, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{i}_-, \theta_R)$$

в форме $R(x) = (1 + \theta_R)x_0 + x_+ + x_-$, где $x \in \mathfrak{g}$, $x_0 \in \mathfrak{m}_+$, $x_\pm \in \mathfrak{g}_\pm$.

В работе [3] дана полная классификация решений MYBE для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Примеры решений MYBE, представленные в виде набора Λ:

1. $\Lambda = (\mathfrak{i}_+ = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}, \mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p} = \mathfrak{b}_+ + \mathbb{C}e_{21},$
   $\mathfrak{i}_- = \mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}, \mathfrak{g}_- = \mathfrak{b}_- + \mathbb{C}e_{12}, \theta_R)$, где
   $$\theta_R \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} + \frac{a_{33}}{2}(1-c) & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} + \frac{a_{33}}{2}(1-c) \end{pmatrix},$$
   $c \in \mathbb{C}^*, c \neq -1, \sum a_{ii} = 0.$

2. $\Lambda = (\mathfrak{i}_+ = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}, \mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p} = \mathfrak{b}_+ + \mathbb{C}e_{21},$
$\mathfrak{i}_- = \mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}, \mathfrak{g}_- = \mathfrak{b}_- + \mathbb{C}e_{12}, \theta_R)$, где

$$\theta_R \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{22} - \frac{a_{33}}{2}(1+c) & -a_{12} \\ 0 & -a_{21} & -a_{11} - \frac{a_{33}}{2}(1+c) \end{pmatrix},$$

$c \in \mathbb{C}^*, c \neq -1, \sum a_{ii} = 0.$

Список литературы

[1] А.Г. Рейман, М.А. Семенов-тян-Шанский Интегрируемые системы. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
[2] Е.И. Коновалова. Разложение $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ в прямую сумму подалгебр Ли как линейных подпространств. Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, №7(57), 2007, с. 63–72.
[3] Е.И. Коновалова. Решение модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, №6(65), 2008, с. 90–104.

GIT-эквивалентность и диагональные действия

Котенкова П.Ю., кафедра высшей алгебры
МГУ им. М.В. Ломоносова
kotpy@mail.ru

Пусть $G \subset GL(V)$ — алгебраическая группа, диагонально действующая на $\mathbb{V} = V^{n_1} \oplus (V^*)^{n_2}$, $n_1 + n_2 = m$. Обозначим через $P(a_1, \ldots, a_m) \subset k[\mathbb{V}]$, $a_i \in \mathbb{Z}_+$, подпространство многочленов, однородных степени a_i по i-ой группе координат. С каждым вектором $a \in \mathbb{Z}_+^m$ свяжем открытое подмножество

$$U(a) = \{v \in \mathbb{V} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ F \in P(ka_1, \ldots, ka_m)^G : F(v) \neq 0\}.$$

Назовём точки $a, b \in \mathbb{Z}_+^m$ *GIT-эквивалентными* ($a \sim b$), если $U(a) = U(b)$.

Пусть $v \in \mathbb{V}$. *Орбитный конус* точки v — это конус $\omega(v) = \mathrm{cone}(a \mid \exists F \in P(a)^G : F(v) \neq 0)$. Несложно показать, что точки a и b эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $a \in \omega(v)$, $b \in \omega(v)$, либо $a \notin \omega(v)$, $b \notin \omega(v)$ (см. [2]).

GIT-конусом точки $a \in \mathbb{Z}_+^m$ называется конус $\tau(a) = \bigcap\limits_{a \in \omega(v)} \omega(v)$. Если алгебра инвариантов конечно порождена, то набор GIT-конусов образует веер (назовём его *GIT-веером*) в пространстве $\mathbb{Q}^m$. (Этот факт доказан в работе [2]). Таким образом, классами GIT-эквивалентности являются относительные внутренности конусов GIT-веера.

В работе [3] построен GIT-веер для случая $G = \mathrm{SL}(n)$, $n_2 = 0$, в работе [1] — для $G = \mathrm{Sp}(n)$.

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема. *Для действия* $SL(n) : V^{n_1} \oplus (V^*)^{n_2}$ *GIT-веер получается разбиением конуса, задаваемого неравенствами*

$$x_l \geqslant 0,\ l = 1, \ldots, n_1,\ y_m \geqslant 0,\ m = 1, \ldots, n_2,$$

$$(n-k)(\sum_{j=1}^{n_2} y_j - \sum_{i\in I} x_i) + k\sum_{i\notin I} x_i \geqslant 0,\ (n-k)(\sum_{i=1}^{n_1} x_i - \sum_{j\in J} y_j) + k\sum_{j\notin J} y_j \geqslant 0,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \ldots, n_1\}$, $J \subset \{1, \ldots, n_2\}$, $|I| = |J| = k$, *гиперплоскостями*

$$x_1 + \ldots + x_{n_1} = y_1 + \ldots + y_{n_2},$$
$$(n-k)\sum_{i\in I} x_i - k\sum_{i\notin I} x_i = (n-k)\sum_{j\in J} y_j - k\sum_{j\notin J} y_j,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $I \subset \{1, \ldots, n_1\}$, $J \subset \{1, \ldots, n_2\}$, *причём должно быть выполнено хотя бы одно из условий:* $k \leqslant |I| \leqslant n_1 - n + k$ *или* $k \leqslant |J| \leqslant n_2 - n + k$.

Аналогичное описание получено для $G = \mathrm{SO}(n)$.

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, J. Hausen. Geometric Invariant Theory via Cox rings. J. Pure Appl. Algebra, v. **213**, 2009, p. 154–172.

[2] F. Berchtold, J. Hausen. GIT-equivalence beyond the ample cone. Michigan Math. J., v. **54**, №3, 2006, p. 483–516.

[3] I.V. Dolgachev, Y. Hu. Variation of geometric invariant theory quontients. (With an appendix: "An example of a thick wall" by N. Ressayre). Publ. Math. de l'IHÉS, v. **87**, 1998, p. 5–56.

Существенная размерность алгебраических торов

Крутиков Ю.Ю., г. Самара

yuri820710@mail.ru

Пусть k — любое поле, k_s — его сепарабельное замыкание, $G = Gal(k_s/k)$ — абсолютная группа Галуа поля k. Основной объект исследования — алгебраический k-тор [1], то есть аффинная групповая схема вида

$$T = \mathrm{Spec}(k_s[\widehat{T}])^G,$$

где $\widehat{T}$ — G-модуль конечного $\mathbb{Z}$-ранга без кручения такой, что $\widehat{T} \cong X(T)$. Здесь $X(T)$ — модуль рациональных характеров тора T.

Тор T можно рассматривать как "точечный функтор", действующий из категории расширений поля k в категорию множеств. Произвольному расширению K/k ставится в соответствие множество рациональных K-точек:

$$K \mapsto T(K) = \mathrm{Hom}(k[T], K).$$

С этой точки зрения к тору применимо функториальное понятие существенной размерности [2], напомним определение.

Определение 1. Пусть $\mathcal{E}_k$ — категория расширений поля k, Set — категория множеств, $\mathcal{F}_k$ — категория ковариантных функторов, действующих из $\mathcal{E}_k$ в Set, F — объект $\mathcal{F}_k$, K — расширение поля k и $a \in F(K/k)$. Для $n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ говорят, что *существенная размерность* $a \leqslant n$ (и обозначают $\mathrm{ed}(a) \leqslant n$), если существует промежуточное расширение E, $k \subset E \subset K$, такое, что

1) $\mathrm{tr}\deg(E : k) \leqslant n$,

2) a принадлежит образу отображения $F(E/k) \to F(K/k)$.

Говорят, что $\mathrm{ed}(a) = n$, если $\mathrm{ed}(a) \leqslant n$ и $\mathrm{ed}(a) \nleqslant n-1$. *Существенная размерность* F — верхняя граница всех $\mathrm{ed}(a)$ для всех $a \in F(K/k)$ для всех K/k. Существенная размерность F обозначается $\mathrm{ed}(F)$.

Для алгебраических торов существенную размерность можно найти на основании следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть T — алгебраический k-тор, тогда* $\mathrm{ed}(T) = n - \dim T$, *где n — минимально возможное значение, при котором возможно регулярное вложение T в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$, и $\dim T$ — размерность T как алгебраического многообразия.*

Мы рассмотрели все трехмерные торы, не представимые в виде прямого произведения торов меньшей размерности. В обозначениях статьи [3], в которой проводится классификация торов T_1–T_{36}, мы получили результаты, представленные в таблице 1.

Также мы рассмотрели все четырехмерные торы с максимальными группами разложений. В обозначениях статьи [4] мы получили результаты, представленные в таблице 2.

Торы	ed(T)
$T_1,\ T_{12}$	0
$T_2,\ T_3,\ T_3,\ T_5,\ T_6,\ T_8,\ T_9,\ T_{16},\ T_{18},\ T_{23},\ T_{30}$	1
$T_{10},\ T_{11},\ T_{20},\ T_{21},\ T_{25},\ T_{28},\ T_{31},\ T_{34}$	3
$T_7,\ T_{13},\ T_{14},\ T_{15},\ T_{17},\ T_{19},\ T_{24},\ T_{27},\ T_{33},\ T_{36}$	5
$T_{22},\ T_{26},\ T_{29},\ T_{32},\ T_{35}$	9

Таблица 1

Торы	ed(T)
C_4	4
P_4	6
B	8
T	14
S_4	16
F_4	20

Таблица 2

Список литературы

[1] В.Е. Воскресенский. Алгебраические торы. — М.: Наука, 1977.
[2] G. Berhuy G., G. Favi. Essential Dimension: a Functorial Point of View (After A. Merkurjev). Doc. Math., v. **8**, 2003, p. 279–330.
[3] Ю.Ю. Крутиков. Аффинные представления трехмерных алгебраических торов. Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, №7(57), 2007, с. 92–106.
[4] С.С. Рышков. Максимальные конечные подгруппы целочисленных $n \times n$ матриц. Труды МИАН им. В.А.Стеклова, т. **128**, 1972, с. 183–211.

Простые модули с нормальными замыканиями орбит максимального тора

Куюмжиян К.Г., кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова
karina@mccme.ru

Пусть G – связная односвязная простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Зафиксируем в ней максимальный тор T. Пусть V – конечномерный рациональный G-модуль. Будем исследовать следующее свойство модуля V: для каждой точки $v \in V$ замыкание её орбиты $\overline{Tv}$ является нормальным (аффинным) алгебраическим многообразием. В работе [2] наличие этого свойства исследовано для всех присоединенных модулей V (случай A_n разобран также в [3, Ex. 3.7] и [4]).

В работе указанное свойство исследуется для всех простых G-модулей, где G – классическая группа.

Основная теорема. *Для следующих (в случае $SL(n)$ – и сопряженных к ним) неприводимых представлений классических групп замыкания всех орбит максимального тора нормальны:*

Тип системы корней	n	Группа	Старший вес
A	n	$SL(n)$	π_1
A	n	$SL(n)$	$\pi_1 + \pi_n$
A	2	$SL(2)$	$3\pi_1$
A	2	$SL(2)$	$4\pi_1$
A	3	$SL(3)$	$2\pi_1$
A	4	$SL(4)$	π_2
A	5	$SL(5)$	π_2
A	6	$SL(6)$	π_2
A	6	$SL(6)$	π_3
B	n	$SO(2n+1)$	π_1

Тип	n	Группа	Ст. вес
B	2	$Spin(5)$	π_2
B	2	$SO(5)$	$2\pi_2$
B	3	$Spin(7)$	π_3
B	4	$Spin(9)$	π_4
C	n	$SP(2n)$	π_1
C	3	$SP(6)$	π_2
C	4	$SP(8)$	π_2
D	n	$SO(2n)$	π_1
D	4	$Spin(8)$	π_3
D	4	$Spin(8)$	π_4

Для всех остальных представлений указанных выше групп, кроме двух случаев, построен вектор, замыкание орбиты которого не нормально.

Ответ пока неизвестен для системы корней D и двух ее представлений со старшими весами π_{n-1} и π_n, где $n = 5, 6$.

Так как свойство нормальности замыкания T-орбиты имеет хорошо известную комбинаторную интерпретацию – насыщенность соответствующего набора весов, практически все рассуждения проходят на комбинаторном языке. Для проверки насыщенности конкретных наборов векторов мы применяем, в частности, методы из работ [3] и [4].

Список литературы

[1] K. Kuyumzhiyan. Simple $SL(n)$-modules with normal closures of maximal torus orbits. Journal of Algebraic Combinatorics, to appear, doi:10.1007/s10801-009-0175-2.

[2] J. Morand. Closures of torus orbits in adjoint representations of semisimple groups. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **328**, №3, 1999, p. 197–202.

[3] B. Sturmfels. Equations Defining Toric Varieties, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 437–449.

[4] B. Sturmfels. Gröbner Bases and Convex Polytopes. University Lecture Series, **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

Фильтрованные деформации исключительных простых алгебр Ли характеристики 3

Ладилова А.А., г. Нижний Новгород

`ladilova@algebraic.ru`

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли малой характеристики представляет интерес описание деформаций известных серий простых алгебр Ли.

В работе исследуются фильтрованные деформации исключительных алгебр Ли серий $\mathcal{R}$, Y, Z над алгебраически замкнутым полем характеристики 3. Согласно [1], алгебры Ли $\mathcal{R} = W(2:\overline{m}) \oplus B^2(\Omega)$, $Y = W(3:\overline{m}) \oplus \Omega^1_{\mathrm{div}}$, $Z = W(3:\overline{m}) \oplus \mathcal{O}_{\text{-div}} \oplus \Omega^1_{\mathrm{div}} \oplus B^2(\Omega)$ обладают стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой.

Фильтрованной деформацией градуированной алгебры Ли L называется такая фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{L}$, что $\mathrm{gr}\,\mathcal{L} \cong L$. Известно (см. [2]), что локальные фильтрованные деформации алгебры описываются положительной частью второй группы когомологий $H^2_+(L,L) = \oplus_{i>0} H^2_i(L,L)$, где $H^2_i(L,L)$ — однородное пространство естественной градуировки. Поэтому значительная часть работы состоит в вычислении когомологий алгебры $W(\overline{m})$ с коэффициентами в соответствующем модуле. Справедлива следующая лемма.

Лемма.

1. Группы когомологий $H^2_+(W(2:\overline{m}), B^2(\Omega))$, $H^2_+(W(2:\overline{m}), Z^2(\Omega))$, $H^2_+(W(3:\overline{m}), \Omega^1_{\mathrm{div}})$, $H^2_+(W(3:\overline{m}), \mathcal{O}_{-\mathrm{div}})$ *тривиальны.*

2. $H^2_+(W(3:\overline{m}), B^2(\Omega)) = H^2_+(W(3:\overline{m}), Z^2(\Omega)) = \langle -\partial_1^* \wedge \partial_2^* \otimes \mathrm{d}x^{(\delta)} \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_1^* \wedge \partial_3^* \otimes \mathrm{d}x^{(\delta)} \wedge \mathrm{d}x_2 - \partial_2^* \wedge \partial_3^* \otimes \mathrm{d}x^{(\delta)} \wedge \mathrm{d}x_1 \rangle$, *где* $\delta = (3^{m_1}-1, 3^{m_2}-1, 3^{m_3}-1)$.

Вычисление второй группы когомологий с коэффициентами в коиндуцированном модуле M основано на формуле из [3]:

$$H^2(W, M) \cong H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, M_{-1}) + H^1(\Omega) \otimes H^1(W_{(0)}, M_{-1}) + H^2(\Omega) \otimes H^0(W_{(0)}, M_{-1}),$$

где $H^i(\Omega)$ — группа когомологий де Рама.

Из леммы следует, что фильтрованная деформация $\mathfrak{L}$ алгебры L содержит подалгебру $W(\overline{m})$. Далее доказывается, что $\mathfrak{L}$ и L изоморфны сначала как $W(\overline{m})$-модули, а затем как алгебры Ли. Таким образом, справедлива

Теорема. *Алгебры Ли серий $\mathcal{R}$, Y, Z являются жесткими относительно фильтрованных деформаций.*

Список литературы

[1] С.М. Скрябин. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3. Матем. сб., т. **183**, №8, 1992, с. 3–22.
[2] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. Ann. Math., v. **79**, №1, 1964, p. 59–103.
[3] М.И. Кузнецов. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p. Изв. АН СССР. Сер. матем., т. **53**, 1989, с. 557–589.

Алгебры Ли $\mathfrak{u}(2)$, $\mathfrak{u}(1,1)$ и осцилляторная как единая матричная система в $\mathfrak{u}(2,1)$

Левичев А.В., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
levit@math.bu.edu

В хронометрии Сигала (см. монографию [5] или обзор [1]) группа Ли $U(2)$ является аналогом векторной группы мира Минковского M специальной теории относительности. Более полувека известен специальный линейный изоморфизм M алгебры Ли $\mathfrak{d} = \mathfrak{u}(2)$, играющий важную роль в теоретической физике. В 1982 году автором (тогда он работал в Самарском университете) было замечено, что осцилляторная алгебра Ли $\mathfrak{l}$ допускает инвариантную невырожденную форму лоренцевой сигнатуры. В дальнейшем это свойство было использовано в физике (см., например, [4]). В [2] была введена $\mathfrak{u}(1,1)$-модель мира M и предложено обобщение хронометрии (т.н. DLF-теория, здесь $\mathfrak{f} = \mathfrak{u}(1,1)$). Другие четырёхмерные алгебры Ли не допускают таких инвариантных форм. Доказываемые ниже утверждения не являются сложными (математически), но они укрепляют веру автора в теоретическую перспективность DLF-подхода (ср., например, с [4], где группы D и F рассматриваются как единая система).

Поясним, что рассматриваются вещественные алгебры Ли. В названии заметки автор постарался максимально отразить её содержание. Автор надеется, что после ознакомления с Утверждением 2 (см. ниже) смысл словосочетания "единая матричная система в $\mathfrak{u}(2,1)$" проясняется.

Исходим из следующих коммутационных соотношений, задающих осцилляторную алгебру Ли:

$$[l_2, l_3] = -l_1, \quad [l_2, l_4] = l_3, \quad [l_4, l_3] = l_2. \tag{1}$$

В работе [7] эта (четырёхмерная разрешимая) алгебра Ли была реализована матрицами четыре на четыре.

Заметим, что $\mathfrak{l}$ не является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$. Это легко установить даже прямой проверкой. Другими словами,

Утверждение 1. *Алгебра Ли осциллятора не может быть реализована матрицами два на два (пусть даже и с комплексными коэффициентами).*

Очевидным следствием (доказываемого ниже) Утверждения 2 является возможность реализации алгебры Ли осциллятора матрицами три на три.

Введём матрицу

$$\begin{pmatrix} 2ix_1 & z & -2ix_1 \\ -\bar{z} & ix_4 & \bar{z} \\ 2ix_1 & z & -2ix_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $z = x_2 + ix_3$, а параметры x_1, x_2, x_3, x_4 вещественны. Введём следующие алгебры Ли: $\mathfrak{u}(1,1)$ — это совокупность всех 2×2 матриц m, для которых выполняется соотношение

$$ms + sm^* = 0, \tag{3}$$

где s — диагональная матрица с элементами 1, -1;
$\mathfrak{u}(2)$ — это совокупность всех 2×2 матриц m, для которых выполняется соотношение (3) с единичной матрицей s;
$\mathfrak{u}(2,1)$ — это совокупность всех 3×3 матриц m, для которых выполняется соотношение (3), а диагональная матрица s задаётся элементами 1, 1, -1.

Утверждение 2. *Матрицы* (2) *принадлежат* $\mathfrak{u}(2,1)$ *и реализуют алгебру Ли осциллятора: выполняются коммутационные соотношения* (1)*. В* (2) *левый верхний блок задаёт алгебру* $\mathfrak{u}(2)$*, а правый нижний блок задаёт алгебру* $\mathfrak{u}(1,1)$.

Доказательство. Непосредственная проверка формул (1) и (3).

Замечание. В частности, автор надеется, что реализация (2) поможет построить новые (естественные с точки зрения DLF-подхода, см. примеры в [3]) соответствия между рассматриваемыми алгебрами Ли и между соответствующими группами Ли (в терминах *контракций*, *деформаций* и т.п.).

Список литературы

[1] А.В. Левичев. Хронометрическая теория И. Сигала как завершение специальной теории относительности. Изв. ВУЗов. Физика, №8, 1993, с. 84–89.

[2] A. Levichev. Three symmetric worlds instead of the Minkowski space-time. Известия РАЕН, серия МММИУ, **7**, №3–4, 2003, с. 87–93.

[3] А.В. Левичев, О.С. Свидерский. Contractions of certain Lie algebras in the context of the DLF-theory. Siberian Advances in Mathematics, сдана в печать.

[4] R. Nappi, E. Witten. Wess–Zumino–Witten model based on a nonsemisimple group. Phys. Rev. Lett., v. **71**, №23, 1993, p. 3751–3753.

[5] I. Segal. Mathematical cosmology and extragalactic astronomy. Pure and Applied Mathematics, v. **68**, Academic Press, New York, 1976.

[6] Я.А. Смородинский, А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин. Групповые и вероятностные основы квантовой теории. УФН, т. **162**, вып. 12, 1992, с. 1–95.

[7] R.F. Streater. The Representations of the Oscillator Group. Comm. Math. Phys., v. **4**, 1967, p. 217–236.

Представления многомерных токов

Локтев С.А., г. Москва

loktev@itep.ru

В докладе будет рассказано о конечномерных линейных представлениях алгебр токов — многочленов (в более общей постановке — функций на аффинном многообразии) со значениями в редуктивной алгебре Ли. Хотя неприводимые представления этих алгебр устроены очень просто, категория всех представлений исключительно сложна даже в случае одной переменной. Основным объектом доклада будут модули Вейля — универсальные конечномерные представления, порождённые старшим вектором.

Проективные системы корней, увеличенные диаграммы Дынкина и ядро группы Вейля

Минченко А.Н., Cornell University
andrei_msu@mail.ru

Речь пойдёт о новых приемах для описания подсистем систем корней. А именно, будут построены модификации диаграмм Дынкина, которые "содержат" все такие подсистемы, и будет указан простой критерий сопряженности последних.

О многообразиях коммутативных алгебр лиевского типа[5]

Мищенко С.П., Попов А.В., г. Ульяновск
mishchenkosp@mail.ru, klever176@rambler.ru

Будем опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $abc = (ab)c$, а также предполагать, что характеристика основного поля равна 0.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие линейных алгебр. Обозначим $P_n(\mathbf{V})$ пространство полилинейных элементов от свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$ в относительно свободной алгебре этого многообразия. Напомним, что рост многообразия называется *полиномиальным*, если существуют такие неотрицательные числа C и m, что для любого n выполняется неравенство $\dim P_n(\mathbf{V}) < Cn^m$.

Следуя статье [1], рассмотрим тождество $x(yz) \equiv \alpha\,(xy)z + \beta\,(xz)y$ для некоторых элементов поля α, β и скажем, что линейная алгебра, в которой оно выполняется, имеет *лиевский тип*. Отметим, что это тождество позволяет любой элемент сводить к линейной комбинации левонормированных элементов.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная алгебра лиевского типа. Тогда либо алгебра A является ассоциативно-коммутативной алгеброй, либо в алгебре A выполнено тождество*

$$x^3 \equiv 0 \qquad (1)$$

и она является йордановой алгеброй. В последнем случае верно и обратное: коммутативная алгебра с тождеством (1) *является йордановой и имеет лиевский тип.*

[5]Работа частично поддержана грантом РФФИ 07-01-00080.

Для йордановых алгебр доказана также

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— многообразие разрешимых алгебр с тождеством* (1). *Тогда существует такое число* m, *что в* $\mathbf{V}$ *выполнено тождество* $(x_1y_1)(x_2y_2)\dots(x_my_m) \equiv 0$, *то есть квадрат любой алгебры является нильпотентным. Кроме того, многообразие* $\mathbf{V}$ *имеет полиномиальный рост.*

Список литературы

[1] С.П. Мищенко. Одно достаточное условие нильпотентности коммутанта алгебры Ли. Известия ВУЗов, №8(435), 1998, с. 43–47.

О почти полиномиального роста многообразиях алгебр Лейбница[6]

Мищенко С.П., Шишкина Т.В., г. Ульяновск

`mishchenkosp@mail.ru, tanja073@mail`

Обобщением понятия алгебры Ли является алгебра Лейбница, которая определяется тождеством $(xy)z = (xz)y + x(yz)$ и, вероятно, впервые появилась в работе [1].

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие линейных алгебр. Обозначим через F относительно свободную алгебру многообразия со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1x_2,\dots\}$. Через $P_n(\mathbf{V})$ обозначим подпространство всех полилинейных элементов от $x_1,\dots,x_n$ в пространстве F.

Асимптотическое поведение размерности $c_n(\mathbf{V})$ пространства $P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. В частности, рост многообразия называется *полиномиальным*, если существуют такие неотрицательные числа C и m, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^m$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *почти полиномиальный* рост, если рост самого многообразия не является полиномиальным, а любое собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост.

В работе [2] исследовано многообразие ${}_3\mathbf{N}$ левонильпотентных ступени не выше трех алгебр Лейбница над полем характеристики нуль, которое определяется тождеством $x(y(zt)) \equiv 0$. В частности, приведены два примера подмногообразий многообразия ${}_3\mathbf{N}$, имеющих почти полиномиальный рост.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Существует ровно два подмногообразия многообразия* ${}_3\mathbf{N}$, *рост которых почти полиномиален.*

[6] Работа частично поддержана грантом РФФИ 07-01-00080.

Список литературы

[1] А.М. Блох. Об одном обобщении понятия алгебры Ли. Доклады Академии наук СССР, т. **18**, №3, 1965, с. 471–473.

[2] L.E. Abanina, S.P. Mishchenko. The variety of Leibniz algebras defined by the identity $x(y(zt)) = 0$. Serdika Math. J., **29**, 2003, p. 291–300.

Параболически связные подгруппы

Нетай И.В., кафедра высшей алгебры
МГУ им. М.В. Ломоносова
netai@mccme.ru

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Замкнутую подгруппу $H \subseteq G$ назывём *параболически связной*, если для любой параболической подгруппы $P \subset G$ пересечение $P \cap H$ связно. Используя стандартные факты теории алгебраических групп (см., например, [1]), нетрудно показать, что для параболической связности H достаточно проверять связность пересечения $B \cap H$ для всех подгрупп Бореля $B \subset G$.

В работе свойство параболической связности исследуется для связных сферических редуктивных подгрупп в группе $SL(n)$. Список таких подгрупп получен в работе [3].

Теорема 1. *Подгруппы $SL(m) \times SL(n) \subset SL(m+n)$ для любых $m \neq n$, $S(GL(m) \times GL(n)) \subset SL(m+n)$ для $m \neq n$, $Sp(2n) \subset SL(2n)$, $Sp(2n) \subset SL(2n+1)$, $Sp(2n) \times T^1 \subset SL(2n+1)$ параболически связны. В свою очередь, подгруппы $SO(n) \subset SL(n)$ и $S(GL(n) \times GL(n)) \subset SL(2n)$ параболически связными не являются.*

Доказательство теоремы использует леммы о существовании базиса, согласованного с флагами и билинейными формами.

Интерес к параболически связным подгруппам мотивирован задачами комплексного анализа. Пусть X — компактное пространство Мойшезона, на котором редуктивная группа G действует алгебраически, то есть действие G на X определено морфизмом $G \to \mathrm{Aut}(X)$ алгебраических групп.

Теорема 2 [2, Thm. 2]. *Если для некоторой подгруппы Бореля $B \subset G$ и некоторой точки $x_0 \in X$ орбита Bx_0 плотна в X, и каждая замкнутая G-орбита содержит такую точку x, что для параболической подгруппы $Q \subset G$, соответствующей G_x и содержащей B, пересечение $Q \cap G_{x_0}$ связно, то X — алгебраическое G-многообразие.*

Тем самым, параболическая связность подгруппы гарантирует алгебраичность вложений соответствующего однородного пространства в некоторые комплексные многообразия. Пример неалгебраического $PSL(2)$-квазиоднородного пространства Мойшезона получен в работе [4].

Список литературы

[1] Дж. Хамфри. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980.

[2] J. Hausen. Algebraicity criteria for almost homogeneous complex spaces. Arc. der Math., **74**, 2000, p. 317–320.

[3] M. Krämer. Sphärische untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Compositio Math., v. **38**, №2, 1979, p. 129–153.

[4] D. Luna, L. Moser-Jauslin, Th. Vust. Almost homogeneous Artin–Moishezon varieties under the action of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Topological methods in algebraic transformation groups (New Brunswick, NJ, 1988), p. 107–115, Progr. math., **80**, Birkhäuser Boston, MA, 1989.

Редукция клеток Шуберта

Панов А.Н., г. Самара

apanov@list.ru

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая расщепимая алгебра Ли над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и G — алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана и $\mathfrak{n}$ — максимальная нильпотентная подалгебра, инвариантная относительно $\mathfrak{h}$. Соответствующие подгруппы в G обозначим H и N. Согласно методу орбит А.А. Кириллова, задача описания неприводимых представлений произвольной нильпотентной группы Ли равносильна задаче описания коприсоединенных орбит этой группы. Однако для группы N обнаруживается, что задача классификации коприсоединенных орбит сама является открытой проблемой, далекой от решения. В докладе будет рассказано о подходе к классификации коприсоединенных орбит группы N, основанном на редукции клеток Шуберта.

Пусть $\mathfrak{n}_-$ — максимальная нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. С помощью формы Киллинга отождествим $\mathfrak{n}_-$ с сопряженным пространством $\mathfrak{n}^*$ к подалгебре $\mathfrak{n}$. Пусть $f \in K[G]$ и $x \in \mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}^*$. Разлагая $f(\exp(tx))$ по степеням t, получаем $f(\exp(tx)) = t^k f_0(x) + t^{k+1} f_1(x) + \ldots + t^{k+m} f_m(x)$, где $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — элементы $K[\mathfrak{n}^*]$.

Предложение 1. *Если f — инвариант лево-правого действия группы $N \times N$ на $K[G]$, то f_0 — инвариант коприсоединенного представления группы N.*

Обозначим через F_i, где $1 \leqslant i \leqslant \operatorname{rank}\mathfrak{g}$, матричный элемент i-го фундаментального представления вида $(T_g^{(i)}v, v')$, где v (соотв. v') — старший (соотв. младший) вектор в представлении.

Гипотеза 1. *Поле инвариантов коприсоединенного представления группы N является конечным расширением поля рациональных функций от элементов $\{F_{i,0}, 1 \leqslant i \leqslant \operatorname{rank}\mathfrak{g}\}$.*

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ — идеал $K[G]$, инвариантный относительно лево-правого действия $N \times N$. Предположим, что $\mathfrak{I}$ порождается инвариантами правого действия группы N в $K[G]$. Обозначим через $\mathfrak{I}_0$ идеал в $K[\mathfrak{n}^*]$, порожденный элементами f_0, где $f \in \mathfrak{I}$. Утверждается, что идеал $\mathfrak{I}_0$ инвариантен относительно коприсоединенного представления группы N.*

Назовем $\mathfrak{I}_0$ редуцированным идеалом. Для любого элемента w из группы Вейля обозначим через $\mathfrak{I}_w$ определяющий идеал клетки Шуберта на многообразии флагов. Идеал $\mathfrak{I}_w$ удовлетворяет всем условиям Предложения 2. Аннулятор X_w редуцированного идеала $\mathfrak{I}_{w,0}$ содержится в $\mathfrak{n}^*$ и инвариантен относительно коприсоединенного представления. Обозначим через X_w^0 объединение орбит максимальной размерности в X_w.

Гипотеза 2. *Сопряженное пространство $\mathfrak{n}^*$ есть объединение X_w^0, где $w \in W$.*

В докладе будет приведено полное описание отдельных серий орбит и обсуждена связь редукций классических и квантовых клеток Шуберта.

Аффинные моноиды как моноиды эндоморфизмов конечномерных алгебр

Перепечко А.Ю., кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова

perepechko@mccme.ru

Пусть k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, A — конечномерная (не обязательно ассоциативная) алгебра над k.

Мотивировкой данной работы был результат [1], полученный в 2003 году Н. Л. Гордеевым и В. Л. Поповым. А именно,

Теорема. *Пусть G — аффинная алгебраическая группа над k. Тогда найдётся простая алгебра A, группа $\mathrm{Aut}(A)$ автоморфизмов которой изоморфна G.*

Данный вопрос логично попытаться перенести на алгебраические моноиды.

Моноид $\mathrm{End}(A)$ эндоморфизмов алгебры A является замкнутым подмоноидом моноида $\mathrm{L}(A)$ операторов на A как на векторном пространстве, то есть $\mathrm{End}(A)$ — аффинный алгебраический моноид. Возникает вопрос, любой ли алгебраический моноид можно так получить.

Автором был получен следующий результат.

Теорема. *Пусть M — аффинный алгебраический моноид. Тогда найдётся конечномерная алгебра A такая, что*

$$\mathrm{End}(A) \cong M \sqcup \{\mathfrak{z}\},$$

где $\mathfrak{z}$ — нулевой эндоморфизм алгебры A и является изолированной компонентой $\mathrm{End}(A)$.

Доказательство частично основано на работе Гордеева–Попова и состоит из двух этапов.

I. Для заданных конечномерного пространства U, двумерного пространства P и подпространства $S \subseteq (P \otimes U)^{\otimes r}$ строится алгебра A такая, что

$$\mathrm{End}(A) = \mathrm{L}(U)_S \sqcup \{z\},$$

где $\mathrm{L}(U)_S = \{f \in \mathrm{L}(U) \mid f(S) \subseteq S\}$.

II. Для данного аффинного моноида M найдутся подпространства U, S такие, что $M \cong L(U)_S$.

Заметим, что по сравнению с аффинными группами возникают два отличия. Во-первых, если в моноиде есть нетривиальные необратимые элементы, то алгебра A заведомо не будет простой. Во-вторых, моноид $\mathrm{End}(A)$ обязательно содержит нулевой элемент, в то время как в M его может не быть. Этим объясняется выделенный нулевой элемент в теореме.

Список литературы

[1] N.L. Gordeev, V.L. Popov. Automorphism groups of finite dimensional simple algebras. Annals of Mathematics, **158**, 2003, p. 1041–1065.

[1] M.S. Putcha. Linear algebraic monoids. LMS Lecture Notes Series **133**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[3] L. Renner, Linear algebraic monoids. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **134**, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

Нормальность компонент слоёв Спрингера над нильпотентами с нулевым квадратом

Перрен Н.
Университет Париж VI
nperrin@math.jussieu.fr

Смирнов Е. Ю.[7]
Независимый московский университет
smirnoff@mccme.ru

Пусть V — n-мерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ произвольной характеристики, $\mathcal{F} = \{(0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V)\}$ — многообразие полных флагов в пространстве V. Пусть также N — нильпотентный элемент в $\mathfrak{gl}(V)$, а $\lambda_N = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k)$ — разбиение числа n, полученное как упорядоченный набор размеров жордановых клеток элемента N.

Определение 1. *Слоем Спрингера* над элементом N называется множество флагов

$$\mathcal{F}_N = \{(V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{F} \mid N(V_i) \subset V_{i-1} \quad \forall i \in [1, n]\}.$$

Теорема 2 [4]. *$\mathcal{F}_N$ является связным алгебраическим многообразием. Вообще говоря, $\mathcal{F}_N$ приводимо, но при этом равноразмерно. Число неприводимых компонент $\mathcal{F}_N$ равно числу стандартных таблиц Юнга формы λ_N.*

Геометрия неприводимых компонент слоёв Спрингера достаточно сложна. Так, они, вообще говоря, будут особыми многообразиями. Известно [2], что они гладки в тех случаях, когда $\lambda_N = (\lambda_1, \lambda_2)$ или $\lambda_N = (\lambda_1, 1, \ldots, 1)$. В случае, когда все λ_i не превосходят 2 (т.е. когда $N^2 = 0$), они уже могут быть особыми; имеется критерий их гладкости ([1]). Общий критерий гладкости неприводимых компонент слоёв Спрингера пока неизвестен.

В данной работе рассматривается последний из перечисленных случаев: нас интересует геометрия слоёв Спрингера $\mathcal{F}_N$ над нильпотентными элементами с нулевым квадратом.

Пусть N — такой нильпотентный элемент, X — неприводимая компонента слоя Спрингера $\mathcal{F}_N$. Мы строим разрешение особенностей $\pi\colon \tilde{X} \to X$ многообразия X. При помощи него мы доказываем, что X допускает расщепление Фробениуса, и получаем следующий результат, верный в произвольной характеристике:

[7]Работа частично поддержана грантом РФФИ–CNRS 07-01-92214-НЦНИЛ-а

Теорема 3 [3].
(i) Все неприводимые компоненты слоя Спрингера $\mathcal{F}_N$ *нормальны;*
(ii) морфизм $\pi\colon \tilde{X} \to X$ *является рациональным разрешением особенностей;*
(iii) многообразие X *коэн–маколеево с дуализирующим пучком* $\pi_*\omega_{\tilde{X}}$*;*
(iv) в случае, когда $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$*, особенности многообразия* X *рациональны.*

Список литературы

[1] L. Fresse. Singular components of the Springer fiber in the two columns case, arXiv: `math.AG/0803.2188` (2008).
[2] F.Y.C. Fung. On the topology of components of the Springer fibers and their relation to Kazhdan–Lusztig theory. Adv. Math., **178**, 2003.
[3] N. Perrin, E. Smirnov. Normality of the components of the Springer fiber in the two columns case, preprint, 2009.
[4] N. Spaltenstein. Classes unipotentes et sous-groupes de Borel. Lecture Notes in Math., v. **946**, Springer–Verlag, 1982.

Об инвариантах модулярных свободных алгебр Ли

Петроградский В.М., Смирнов А.А., г. Ульяновск
`petrogradsky@rambler.ru, dronsmr@yandex.ru`

Предположим, что $L(X)$ — свободная алгебра Ли конечного ранга над полем положительной характеристики. Пусть G — нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов алгебры $L(X)$. Известно, что подалгебра инвариантов $H = L^G$ бесконечно порождена [2]. Наша цель — определить, насколько велико ее свободное порождающее множество. Пусть $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ — однородное свободное порождающее множество для H, где элементы Y_n имеют степень n относительно X. В случае поля характеристики нуль найдена точная формула для производящей функции $\mathcal{H}(Y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ [3]. В случае поля положительной характеристики мы описываем рост производящей функции и доказываем, что последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально. Доказательство опирается на результаты [1], [3].

Список литературы

[1] R.M. Bryant. On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra. J. London Math. Soc., v. **43**, 1991, p. 215–224.
[2] R.M. Bryant, A.I. Papistas. On the fixed points of a finite group acting on a relatively free Lie algebra. Glasgow Math. J.б v. **42**, 2000, p. 167–181.
[3] В.М. Петроградский. Характеры и инварианты свободных супералгебр Ли. Алгебра и анализ. т. **13**, вып. 1, 2001, с. 158–181.

Абелевы многообразия над конечными полями

Рыбаков С.Ю., г. Москва
rybakov.sergey@gmail.com

Это обзорный доклад. Я расскажу про алгебры эндоморфизмов абелевых многообразий над конечными полями, действие автоморфизма Фробениуса на модуле Тейта, классификацию классов изогении абелевых многообразий при помощи чисел Вейля и дзета-функции. Если хватит времени, расскажу о своих результатах по классификации групп рациональных точек на абелевых многообразиях над конечными полями.

Поле инвариантов присоединенного представления унитреугольной группы

Севостьянова В.В., г. Самара
berlua@mail.ru

Рассмотрим полную матричную группу $\mathrm{GL}\,(n, K)$, определённую над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики. Пусть B (соотв. N) — её борелевская (соотв. максимальная унипотентная) подгруппа, состоящая из верхнетреугольных матриц с ненулевыми (соотв. единичными) элементами по диагонали. Зафиксируем параболическую подгруппу P, содержащую B. Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}\,(n, K)$, соответствующие P, B, N. Представим $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$ в виде суммы нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочно-диагональной подалгебры $\mathfrak{r}$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно присоединённого представления группы N. Это действие может быть продолжено до представления в алгебре $K\,[\mathfrak{m}]$ и поле $K\,(\mathfrak{m})$. Цель работы — описание инвариантов присоединённого действия N в $\mathfrak{m}$.

Каждый положительный корень γ в $\mathfrak{gl}\,(n, K)$ имеет вид $\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Отождествим γ с парой (i, j) и множество положительных корней Δ^+ с множеством пар (i, j), $i < j$. Система положительных корней $\Delta^+_{\mathfrak{r}}$ редуктивной подалгебры $\mathfrak{r}$ — подсистема в Δ^+. Обозначим E_γ для базисного элемента E_{ij} в $\mathfrak{n}$, если $\gamma = (i, j)$.

Определим бинарное отношение $\succ$ в Δ^+, для которого $\gamma' \succ \gamma$, если $\gamma' - \gamma \in \Delta^+_{\mathfrak{r}}$. Обозначим через M множество $\gamma \in \Delta^+$ таких, что $E_\gamma \in \mathfrak{m}$. Отождествим $K\,[\mathfrak{m}]$ с алгеброй многочленов от переменных x_{ij}, $(i, j) \in M$.

Подмножество S в M будем называть *базой*, если элементы S попарно несравнимы и для любого $\gamma \in M \setminus S$ существует $\xi \in S$ такой, что $\gamma \succ \xi$. Отметим, что M имеет единственную базу S.

Упорядоченный набор положительных корней $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ будем называть *цепочкой*, если $\gamma_1 = (a_1, a_2)$, $\gamma_2 = (a_2, a_3)$, $\gamma_3 = (a_3, a_4)$ и т.д.

Будем говорить, что два корня $\xi, \xi' \in S$ образуют *допустимую пару* $q = (\xi, \xi')$, если существует $\alpha_q \in \Delta_{\mathfrak{r}}^+$ такой, что набор корней $\{\xi, \alpha_q, \xi'\}$ является цепочкой. Заметим, что корень α_q находится по q однозначно.

Образуем множество $Q := Q(\mathfrak{p})$, состоящее из допустимых пар корней из S. По каждой допустимой паре $q = (\xi, \xi')$ построим положительный корень $\phi_q = \alpha_q + \xi'$. Рассмотрим подмножество $\Phi = \{\phi_q : \ q \in Q\}$.

Рассмотрим формальную матрицу $\mathbb{X}$, в которой на местах $(i,j) \in M$ стоят переменные x_{ij}, а остальные элементы равны нулю. Для любого положительного корня $\gamma = (a, b)$ обозначим через S_γ множество таких $\xi = (i,j) \in S$, что $i > a$ и $j < b$. Пусть $S_\gamma = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}$. Обозначим через M_γ минор M_I^J матрицы $\mathbb{X}$ с упорядоченными системами строк $I = \mathrm{ord}\,\{a, i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцов $J = \mathrm{ord}\,\{j_1, \ldots, j_k, b\}$.

По каждой допустимой паре $q = (\xi, \xi')$ построим многочлен
$$L_q = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \in \Delta_{\mathfrak{r}}^+ \cup \{0\} \\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha_q}} M_{\xi+\alpha_1} M_{\alpha_2+\xi'}.$$

Теорема [1]. *Для произвольной параболической подалгебры система многочленов*
$$\{M_\xi, \ \xi \in S, \ L_q, \ q \in Q\}$$
содержится в алгебре инвариантов $K\,[\mathfrak{m}]^N$ и алгебраически независима над полем K.

Теорема. *Пусть Ω — N-орбита такая, что при $x \in \Omega$ для любого $\xi \in S$ и любой допустимой пары $q \in Q$ выполняется $M_\xi(x) \neq 0$ и $L_q(x) \neq 0$. Тогда Ω пересекает множество*
$$\mathcal{Y} = \langle E_\xi, \ \xi \in S, \ E_\varphi, \ \varphi \in \Phi\rangle$$
в единственной точке.

Теорема. *Поле инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ — свободное поле рациональных функций от M_ξ, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$.*

Список литературы

[1] А.Н. Панов, В.В. Севостьянова. Регулярные N-орбиты в нильрадикале параболической подалгебры. Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского. Тезисы докладов. — Самара: Изд-во "Самарский университет", 2007, с. 152–161.

Орбитное отношение эквивалентности для действия алгебры Хопфа[8]

Скрябин С.М., г. Казань

Serge.Skryabin@ksu.ru

Пусть H — алгебра Хопфа над полем k. Говорят, что ассоциативная с единицей k-алгебра A является H-модульной алгеброй, если на A задана структура левого H-модуля, относительно которой отображение умножения $A \otimes A \to A$ есть гомоморфизм H-модулей. В случае, когда $H = kG$ — групповая алгебра, данное условие равносильно заданию действия группы G на A посредством автоморфизмов. Цель работы состоит в построении отношения эквивалентности на множестве $\operatorname{Spec} A$ простых идеалов H-модульной алгебры A, которое обобщает понятие G-орбиты.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех конечномерных подкоалгебр в H. С каждым идеалом $P \in \operatorname{Spec} A$ связывается семейство идеалов $\{P_C \mid C \in \mathfrak{F}\}$, где

$$P_C = \{a \in A \mid Ca \subset P\}.$$

Подмножество $O \subset \operatorname{Spec} A$ назовем H-орбитой, если для каждой пары идеалов $P \in O$ и $P' \in \operatorname{Spec} A$ включение $P' \in O$ выполнено в точности тогда, когда P' — минимальный простой идеал над одним из идеалов вида P_C, $C \in \mathfrak{F}$. В отличие от случая действия группы данное определение не гарантирует того, что каждый простой идеал принадлежит H-орбите. Обозначим через $\operatorname{Spec}_f A$ множество простых идеалов P, которые не являются началом никакой бесконечной строго возрастающей цепочки $P_0 \subset P_1 \subset \cdots$ в $\operatorname{Spec} A$.

Теорема. *Если H-модульная алгебра A конечно-порождена как модуль над своим центром, то $\operatorname{Spec}_f A$ представляется в виде дизъюнктного объединения H-орбит. Таким образом, орбитное отношение эквивалентности определено на $\operatorname{Spec}_f A$.*

Вопрос о существовании орбитного отношения эквивалентности для произвольной H-модульной алгебры A не исследован.

[8]Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00222

Квантовые дубли янгианов супералгебр Ли

Стукопин В.А., г. Ростов-на-Дону

stukopin@mail.ru

Описаны квантовые дубли янгианов супералгебр Ли типов $A(n,n)$. Получена формула для универсальной R-матрицы, а также её образ в представлениях. Обсуждаются возможные приложения полученных результатов в теории интегрируемых моделей и квантовой теории суперструн.

Преобразование Фурье–Кириллова представлений алгебры Ли группы SU(2) и преобразование Фурье–Кириллова представлений T_0, $T_{1/2}$, T_1 группы SU(2)

Тугарёв Д.С., г. Тамбов

tugaryov@mail.ru

Формула следа Кириллова для компактной группы G состоит в следующем: преобразование Фурье характера неприводимого представления, умноженного на квадратный корень из якобиана экспоненциального отображения, есть дельта-функция (с множителем), сосредоточенная на соответствующей G-орбите в коприсоединённом представлении. Рассмотрим группу $\mathrm{SU}(2)$:

$$g = \begin{pmatrix} x+iy & u+iv \\ -u+iv & x-iy \end{pmatrix},$$

где $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ и $x^2+y^2+u^2+v^2 = 1$, так что G есть единичная сфера в $\mathbb{R}^4$. В качестве инвариантной меры на группе возьмём евклидову меру на сфере:

$$dg = |v|^{-1} dx dy du.$$

Тогда мера всей группы будет равна $2\pi^2$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ изоморфна $\mathbb{R}^3$ как векторное пространство. В качестве базиса в $\mathfrak{g}$ возьмём следующие матрицы:

$$L_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \text{так что}$$
$$X = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3.$$

Интересно найти преобразование Фурье от матричных элементов (или всей матрицы представления) алгебры Ли группы $\mathrm{SU}(2)$. Экспоненциальное отображение сопоставляет матрице $X = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3$ из $\mathfrak{g}$ её матричную экспоненту:

$$\mathrm{e}^X = \cos\|X\| \cdot E + \frac{\sin\|X\|}{\|X\|} \cdot X,$$

где $\|X\|$ отвечает скалярному произведению $\langle X,\ Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, E — единичная матрица. Обозначим аналитический квадратный корень из якобиана экспоненциального отображения

$$j(X) = \frac{\sin\|X\|}{\|X\|}.$$

Неприводимые представления T_l группы $\mathrm{SU}(2)$ нумеруются числами

$$l = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \ldots$$

Характер $\chi_l(g)$ представления T_l есть

$$\chi_l(\mathrm{e}^X) = \frac{\sin(2l+1)\|X\|}{\sin\|X\|}.$$

Формула следа Кириллова в нашем случае есть

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_l(\mathrm{e}^X) j(X) \mathrm{e}^{-i\langle\xi,\ X\rangle} dX = 4\pi^2 \cdot \delta(\|\xi\|^2 - (2l+1)^2).$$

В частности, для $l = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} j(X) \mathrm{e}^{-i\langle\xi,\ X\rangle} dX = 4\pi^2 \cdot \delta(\|\xi\|^2 - 1).$$

Дифференцируя последнее равенство по ξ_k и принимая во внимание, что матричные элементы неприводимого представления T_l алгебры Ли группы $\mathrm{SU}(2)$ являются линейными функциями от $x_1,\ x_2,\ x_3$, получим:

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_l(X) j(X) \mathrm{e}^{-i\langle Y,\ X\rangle} dX = 8\pi^2 i \cdot T_l(Y) \cdot \delta'(\|Y\|^2 - 1),$$

где $Y = \xi_1 L_1 + \xi_2 L_2 + \xi_3 L_3,\ \delta'(t)$ — производная дельта-функции $\delta(t)$.

Рассмотрим тривиальное представление T_0 группы $\mathrm{SU}(2)$. В этом случае каждому элементу $\mathrm{e}^X \in\mathrm{SU}(2)$ сопоставляется единица. Получим:

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_0(\mathrm{e}^X) j(X) \mathrm{e}^{-i\langle Y,\ X\rangle} dX = 4\pi^2 \cdot \delta(\|Y\|^2 - 1).$$

Рассмотрим теперь тавтологическое представление $T_{1/2}$. В этом случае получим

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_{1/2}(\mathrm{e}^X) j(X) \mathrm{e}^{-i\langle Y,\ X\rangle} dX =$$
$$= 4\pi^2 \cdot \operatorname{ch}\sqrt{\Delta}\,\delta(\|Y\|^2-1)E + 8\pi^2 i \cdot \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\delta'(\|Y\|^2-1)T_{1/2}(Y),$$

где $Y = \xi_1 L_1 + \xi_2 L_2 + \xi_3 L_3$.

Рассмотрим представление $T_1(\mathrm{e}^X)$. Для этого случая получим следующее:

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_1(\mathrm{e}^X) j(X) \mathrm{e}^{-i\langle Y,\ X\rangle} dX = 4\pi^2\delta(\|Y\|^2-1)E + 8\pi^2 i \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\delta'(\|Y\|^2-1)T_1(Y) +$$
$$+8\pi^2 i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\right)\left(4\delta'(\|Y\|^2-1)E - \delta''(\|Y\|^2-1)(T_1(Y))^2\right),$$

где $Y = \xi_1 L_1 + \xi_2 L_2 + \xi_3 L_3$.

Список литературы

[1] А.А. Кириллов. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга, ИДМИ, 2002.

[2] A.H. Dolley, R.W. Raffoul. Matrix coefficients and coadjoint orbits of compact Lie groups. Proc. Amer. Math. Soc., v. **135**, №8, 2007, p. 2567–2571.

Алгебры операторов Лакса и интегрируемые системы

Шейнман О.К., г. Москва

sheinman@mi.ras.ru

Содержание

Лекция 1. Алгебры операторов Лакса

В этой лекции вводится новый класс алгебр Ли, естественно обобщающий (нескрученные) алгебры Каца–Муди.

1. Данные Тюрина

Пусть Σ — компактная риманова поверхность рода g, которую мы рассматриваем как алгебраическую кривую над $\mathbb{C}$. Отметим на Σ две точки $P_\pm$ и K точек γ_s, $s = 1, \dots, K$. Каждой точке γ_s мы сопоставляем вектор $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$, заданный с точностью до пропорциональности. Систему данных

$$T := \{(\gamma_s, \alpha_s) \mid s = 1, \dots, K\} \tag{1}$$

назовем *данными Тюрина.* Эти данные связаны с модулями голоморфных векторных расслоений на Σ. В частности, для общих значений (γ_s, α_s) с $\alpha_s \neq 0$ и $K = ng$ данные Тюрина параметризуют полустабильные оснащенные голоморфные векторные расслоения ранга n и степени ng на Σ.

Пусть $\mathfrak{g}$ обозначает одну из классических матричных алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ или $\mathfrak{sn}(n)$, где последняя — алгебра скалярных матриц.

2. Алгебры операторов Лакса

Для каждой тройки $\Sigma, T, \mathfrak{g}$ мы определим бесконечномерную алгебру Ли, которую будем называть *алгеброй операторов Лакса* и обозначать $\overline{\mathfrak{g}}$.

Назовем L-оператором мероморфную $\mathfrak{g}$-значную функцию L на Σ, голоморфную вне $\{P_+, P_-\}$ и всех γ_s, а в каждой точке $\gamma = \gamma_s$ имеющую разложение

$$L = \frac{L_{-2}}{(z-z_\gamma)^2} + \frac{L_{-1}}{z-z_\gamma} + L_0 + \dots\ , \tag{2}$$

где z — локальная координата в окрестности γ, z_γ — координата самой точки γ, L_{-2}, L_{-1}, L_0, $L_1, \ldots \in \mathfrak{g}$. Мы предполагаем, что

$$L_{-2} = 0, \quad \text{если } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(2n) \text{ и } L_{-2} = \nu\alpha\alpha^t\sigma, \text{ если } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{sp}(2n), \tag{3}$$

$$L_{-1} = \begin{cases} \alpha\beta^t, & \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \\ \alpha\beta^t - \beta\alpha^t, & \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n), \\ (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n), \end{cases} \tag{4}$$

где α — вектор, ассоциированный с γ, $\beta \in \mathbb{C}^n$ — некоторый вектор, а t вверху — знак транспонирования, σ — матрица симплектической формы;

$$\beta^t\alpha = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{so}(n);\ \beta^t\sigma\alpha = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n);\quad L_0\alpha = k\alpha, \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{C}$;

$$\alpha^t\alpha = \beta^t\alpha (= \alpha^t\beta) = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n);\quad \alpha^t\sigma L_1\alpha = 0 \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \tag{6}$$

Теорема 1. *Операторы Лакса образуют алгебру Ли относительно операции поточечного коммутирования.*

Пример. Пусть риманова поверхность Σ — это сфера с отмеченными точками 0 и ∞, а точек γ вообще нет. Тогда алгебры операторов Лакса совпадают с известными алгебрами петель.

3. Почти градуированная структура

Пусть

$$\mathfrak{g}_m = \{L \in \overline{\mathfrak{g}}\ |(L) + D \geqslant 0\},$$

где (L) — дивизор $\mathfrak{g}$-значной функции L, и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + \sum_{s=1}^{K} \gamma_s,$$

а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + 2\sum_{s=1}^{K} \gamma_s.$$

Мы называем $\mathfrak{g}_m$ *(почти однородным) подпространством степени m* алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$.

Теорема 2. *Для* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n),\ \mathfrak{so}(n),\ \mathfrak{sp}(2n)$

$$1^\circ. \quad \dim \mathfrak{g}_m = \dim \mathfrak{g}.$$

$$2^\circ. \quad \overline{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_m.$$

$$3^\circ. \quad [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \bigoplus_{m=k+l}^{k+l+g} \mathfrak{g}_m.$$

4. Центральные расширения

Центральные расширения алгебр Ли — важный объект в теории представлений и в приложениях к квантовой физике. Например, алгебра Гейзенберга является центральным расширением коммутативной алгебры Ли. Здесь мы рассмотрим центральные расширения алгебр операторов Лакса.

Центральным расширением алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ называется короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\ i\ } \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\ p\ } \overline{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0, \tag{7}$$

где $\mathrm{Im}(i) = \ker(p)$ — центр в $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Два центральных расширения называются эквивалентными, если существует изоморфизм e (*эквивалентность*) такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[dd, "e"] \arrow[dr, "p"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & \overline{\mathfrak{g}} \arrow[r] & 0. \\ & & \widehat{\mathfrak{g}}' \arrow[ur, "p'"'] & & \end{tikzcd} \tag{8}$$

2-*коциклом* на $\overline{\mathfrak{g}}$ называется билинейный кососимметрический функционал γ на $\overline{\mathfrak{g}}$, такой, что для любой тройки элементов $X, Y, Z \in \overline{\mathfrak{g}}$ выполняется равенство $\gamma([X,Y],Z) + \gamma([Z,X],Y) + \gamma([Y,Z],X) = 0$. Если $\gamma(X,Y) = \phi([X,Y])$, где $\phi \in \overline{\mathfrak{g}}^*$, то γ называется *кограницей* (и обозначается $\delta\phi$). Если $\gamma - \gamma' = \delta\phi$, то γ и γ' называются *когомологичными*.

Если γ — 2-коцикл на $\overline{\mathfrak{g}}$, можно построить ассоциированное центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma$. По определению, это векторное пространство $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma = \overline{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}t$

со следующим коммутатором:

$$\widehat{[L, L']} = [L, L'] + \gamma(L, L') \cdot t, \quad \widehat{[L, t]} = 0, \qquad L, L' \in \overline{\mathfrak{g}}. \tag{9}$$

Каждое центральное расширение может быть получено таким образом путем выбора сечения $s : \overline{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathfrak{g}}$. Два центральных расширения $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma$ и $\widehat{\mathfrak{g}}_{\gamma'}$ эквивалентны, если определяющие их коциклы γ и γ' когомологичны.

Пример. Стандартным примером коцикла на алгебре токов является

$$\gamma_{st}(L, L') = \operatorname{res}_{P_+} \operatorname{tr}(L \cdot dL').$$

5. Почти градуированные центральные расширения и локальные коциклы

Центральные расширения, вообще говоря, не единственны, даже с точностью до эквивалентности. В последнем примере мы могли бы взять не вычет, а интеграл по любому контуру на римановой поверхности. Однако если брать центральные расширения в категории почти градуированных алгебр Ли, возникает теорема единственности, по крайней мере в случае простой алгебры $\mathfrak{g}$. Такие центральные расширения называют *почти градуированными*. Почти градуированные центральные расширения задаются локальными коциклами. Коцикл γ называется *локальным*, если для $L \in \mathfrak{g}_m$, $L' \in \mathfrak{g}_{m'}$ из $\gamma(L, L') \neq 0$ следует, что $|m + m'| \leqslant M$, где M — постоянное число, не зависящее от m, m', L, L'. Например, для алгебр Каца–Муди $M = 0$.

6. Построение локальных коциклов

Стандартный коцикл из нашего примера не является локальным, но его можно подправить на кограницу так, чтобы получился локальный коцикл. Пусть $\mathfrak{L}$ — матричнозначная 1-форма, в окрестности γ равная

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-2} \frac{dz}{(z - z_\gamma)^2} + \mathfrak{L}_{-1} \frac{dz}{z - z_\gamma} + \mathfrak{L}_0 dz + \dots\ ,$$

причем $\mathfrak{L}$ удовлетворяет тем же условиям, что и L, с одним лишь отличием: $\tilde{\beta}^t \alpha = 1$, где $\tilde{\beta}$ играет для $\mathfrak{L}$ ту же роль, что β для L.

Теорема 3. *Для каждого $\mathfrak{L}$, удовлетворяющего перечисленным свойствам, 1-форма $\operatorname{tr}(L\, dL' - [L, L']\mathfrak{L})$ регулярна за исключением точек $P_\pm$ и выражение*

$$\gamma(L, L') = \operatorname{res}_{P_+} \operatorname{tr} \left(L\, dL' - [L, L']\mathfrak{L}\right)$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

Задача. *Докажите, что $\gamma(L, L') = \operatorname{res}_{P_+} \operatorname{tr}\big(L \cdot (d + \operatorname{ad} \mathfrak{L}) L'\big)$.*

Таким образом γ_{st} из нашего примера станет локальным коциклом, если обычное дифференцирование оператора L' заменить ковариантным. Интересно, что ковариантные дифференцирования такого вида играют основную роль в уравнениях изомонодромных дефомаций на римановых поверхностях, введенных И.М. Кричевером.

7. Классификация почти градуированных центральных расширений

Теорема 4. *Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(2n)$ почти градуированное центральное расширение единственно с точностью до эквивалентности и умножения коцикла на число и соответствует построенному выше (теорема 3) коциклу. Для $\mathfrak{gl}(n)$ есть еще одно расширение, заданное коциклом $\gamma'(L, L') = res_{P_+}\mathrm{tr}(L \cdot L')$.*

Лекция 2. Интегрируемость. Уравнения типа Лакса. Иерархии коммутирующих потоков

8. Интегрируемость по Лиувиллю

Фазовое пространство — это гладкое симплектическое многообразие. Динамическая система — это система обыкновенных дифференциальных уравнений на кривую $x = x(t)$ в фазовом пространстве, имеющая вид $\dot{x} = \xi(x)$, где ξ — векторное поле (точка вверху обозначает производную по времени).

Пусть ω — симплектическая форма, $\mathbf{i}$ — изоморфизм между векторными полями и 1-формами, заданный с помощью ω: векторному полю η сопоставляется 1-форма $\mathbf{i}\eta(\xi) = \omega(\xi, \eta)$. Скобка Пуассона двух функций f и g на M определяется как функция $\{f, g\} = \omega(\mathbf{i}^{-1}df, \mathbf{i}^{-1}dg)$. Если $\{f, g\} = 0$, то говорят, что f и g находятся в инволюции.

Векторное поле ξ называется гамильтоновым, если $\xi = \mathbf{i}^{-1}dH$ для некоторой функции H. В этом случае H называется его гамильтонианом. Динамическая система $\dot{x} = \xi(x)$ называется гамильтоновой с гамильтонианом H, если для любой гладкой функции u на фазовом пространстве ее производная в силу системы удовлетворяет уравнению $\dot{u} = \{H, u\}$. Условия гамильтоновости динамической системы и соответствующего векторного поля эквивалентны.

Гамильтонова система называется вполне интегрируемой, если число ее (функционально) независимых первых интегралов равно половине размерности фазового пространства.

Теорема Лиувилля. *Если гамильтонова система вполне интегрируема, то существует такая система канонических координат I_s, φ_s, что совместные поверхности уровня набора функций $I = \{I_s\}$ — торы, φ_s — угловые координаты на них, и в силу системы $\dot{I}_s = 0$, $\dot{\varphi}_s = w(I)$, где w — некоторая функция.*

Пример. Эллиптическая система Калоджеро–Мозера — гамильтонова система, заданная гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}(p_1^2 + \ldots + p_n^2) + \sum_{\alpha \in R_+} \wp(q_\alpha),$$

где R — система корней ранга n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — ее инвариантная форма, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_\alpha = \langle q, \alpha \rangle$, $\wp$ — функция Вейерштрасса. Ниже показано, что эта система вполне интегрируема.

9. Уравнения типа Лакса

Мы определим фазовое пространство как подпространство плоского пространства с координатами γ_s, α_s, k_s, β_s. Пусть L и M — функции этих параметров со значениями в пространстве мероморфных функций на Σ. Пусть пространство $\mathcal{L}^D$ образовано теми наборами параметров, для которых $\{L \in \bar{\mathfrak{g}} \,|(L) + D + \delta \sum \gamma_s \geqslant 0\}$, где $D = \sum_i m_i P_i$ — произвольный положительный дивизор на Σ не содержащий точек γ (δ равно 2 для симплектической алгебры и 1 для всех остальных). При фиксированных α и γ функция L удовлетворяет условиям, сформулированным в прошлой лекции. Уравнения типа Лакса — это уравнения на параметры, вытекающие из соотношения $L_t = [L, M]$. Ниже излагается общий метод построения уравнений типа Лакса, обладающих свойствами гамильтоновости и интегрируемости.

10. M-операторы и времена

Выше мы подробно рассмотрели свойства L-операторов. Рассмотрим теперь свойства M-операторов.

Пусть $M \colon \Sigma \to \mathfrak{g}$ — мероморфная функция. Мы требуем, чтобы в точке $\gamma = \gamma_s$ она имела разложение того же типа, что и L (определяемое типом алгебры $\mathfrak{g}$):

$$M = \frac{M_{-2}}{(z - z_\gamma)^2} + \frac{M_{-1}}{z - z_\gamma} + M_0 + \ldots\ , \tag{10}$$

где z — фиксированная локальная координата в окрестности γ, z_γ — координата самой точки γ, $M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, \ldots \in \mathfrak{g}$ и

$$M_{-2} = \lambda \alpha \alpha^t \sigma, \qquad M_{-1} = (\alpha \mu^t + \varepsilon \mu \alpha^t)\sigma, \tag{11}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}^n$, σ — матрица $n\times n$, верхнее t обозначает транспонирование матриц,

$$\begin{aligned} &\lambda \equiv 0,\, \varepsilon = 0, \quad \sigma = id \ \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n),\\ &\lambda \equiv 0,\, \varepsilon = -1,\ \sigma = id \ \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n),\\ &\qquad \varepsilon = 1 \qquad\qquad\quad \text{ для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n), \end{aligned} \tag{12}$$

и σ — матрица симплектической формы при $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$. Здесь и ниже мы опускаем индексы s, γ, указывающие на точку γ, за исключением обозначения z_γ.

Каждый M-оператор и скалярная функция k на фазовом пространстве в силу Лаксова уравнения определяют динамическую систему. В частности, на данных Тюрина

$$\dot z_\gamma = -\mu^t\sigma\alpha, \quad \dot\alpha = -M_0\alpha + k\alpha. \tag{13}$$

Пусть M_a и M_b — два M-оператора, ∂_a и ∂_b — времена соответствующих динамических систем.

Лемма 5. *Для любых двух M-операторов M_a, M_b и соответствующих времен выражение*

$$M_{ab} = \partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b]$$

также является M-оператором.

11. Где принимают значения M-операторы

С этого момента будем предполагать, что в лаксовом уравнении $L \in \overline{\mathfrak{g}}$, $M \in \overline{\mathfrak{g}^\diamond}$, где между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^\diamond$ имеется соответствие:

$$\mathfrak{g}^\diamond = \begin{cases} \mathfrak{gl}(n), & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n),\\ \mathfrak{so}(2n+1), & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n), \mathfrak{so}(2n+1),\\ \mathfrak{tsp}(2n), & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \end{cases}$$

Здесь $\mathfrak{tsp}(2n)$ — это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n+2)$, состоящая из матриц с нулевыми первым столбцом и последней строкой. Во всех случаях предполагается, что $\mathfrak{g}$ стандартным образом вложена в $\mathfrak{g}^\diamond$, таким образом, коммутатор $[L, M]$ определен. Как и выше, с дивизором $D = \sum m_i P_i$ свяжем полный дивизор особенностей L и M-операторов $\widetilde{D} = D + \delta\sum_{s=1}^K \gamma_s$, где

$$\delta = \begin{cases} 1, & \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n),\ \mathfrak{sl}(n),\ \mathfrak{so}(2n),\ \mathfrak{so}(2n+1),\\ 2, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \end{cases}$$

Настало время уточнить значение K. Пусть

$$K = \begin{cases} ng, & \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n),\ \mathfrak{sl}(n),\ \mathfrak{so}(2n),\ \mathfrak{so}(2n+1),\\ (n+1)g, & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n). \end{cases}$$

Определим $\mathcal{N}^D \subset \overline{\mathfrak{g}^\diamond}$ как подпространство M-операторов таких, что $(M)+\widetilde{D} \geqslant 0$.

Лемма 6. $\dim \mathcal{N}^D = (\dim \mathfrak{g}^\diamond)(\deg D+1)$.

12. Построение иерархии

Зафиксируем дополнительно точку $P_0 \in \Sigma$. Пусть w_0, w_i — локальные координаты в окрестностях точек P_0, P_i соответственно. Определим a как тройку

$$a=(P_i,k,m), \quad k>0,\ m>-m_i, \tag{14}$$

где k,m — целые числа, $k\equiv 1(\operatorname{mod}2)$ для $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1)$ и $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ (тем самым мы занумеровали времена геометрическими объектами).

Теорема 7. *Для каждого $L\in\overline{\mathfrak{g}}$ в общем положении существует единственный $\mathfrak{g}^\diamond$-значный M-оператор M_a такой, что*

- *(i) вне γ-точек он имеет полюс только в P_i и*

$$M_a(q)=w_i^{-m}L^k(q)+O(1),$$

  то есть сингулярные части M_a и $w_i^{-m}L^k$ совпадают;

- *(ii) M_a нормирован условием $M_a(P_0)=0$.*

Подчеркнем, что в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2n)$ для M_a выполняется соотношение $\alpha\sigma M_{a1}\alpha=0$.

Теорема 8. *Уравнения*

$$\partial_a L=[L,M_a],\ \partial_a=\partial/\partial t_a \tag{15}$$

определяют семейство (иерархию) коммутирующих потоков на открытом подмножестве пространства $\mathcal{L}^D$.

Коммутативность означает, что $[\partial_a+M_a,\partial_b+M_b]=0$.

Лекция 3. Гамильтоновость лаксовых уравнений. Системы Калоджеро–Мозера

13. Симплектическая структура Кричевера–Фонга и гамильтононианы

Симплектическая структура на пространстве $\mathcal{L}^D$ введена И.М. Кричевером и Д. Фонгом в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n)$ и затем использовалась Кричевером для доказательства гамильтоновости лаксовых уравнений того типа, которые мы здесь рассматриваем. Эта структура имеет универсальный характер и применяется во многих вопросах теории солитонов.

Пусть Ψ — матрица, образованная левыми собственными векторами L, нормированными условием $\sum \psi_i = 1$. Она определена с точностью до перестановки своих столбцов. Мы рассматриваем L и Ψ как матричные функции на $\mathfrak{L}^D$ со значениями в пространстве мероморфных функций на Σ. Пусть δL и $\delta\Psi$ — дифференциалы этих функций, то есть 1-формы на $\mathfrak{L}^D$. Рассмотрим диагональную форму K матричной функции L,

$$\Psi L = K\Psi,$$

имеющую собственные значения L на диагонали, и матричнозначную 1-форму δK. Пусть Ω — 2-форма на $\mathfrak{L}^D$ со значениями в пространстве мероморфных функций на Σ, определенная соотношением

$$\Omega = \operatorname{tr}(\delta\Psi \wedge \delta L \cdot \Psi^{-1} - \delta K \wedge \delta\Psi \cdot \Psi^{-1}).$$

Форма Ω уже не зависит от порядка столбцов Ψ (собственных значений K) и, следовательно, корректно определена на $\mathfrak{L}^D$.

Выберем голоморфный дифференциал (1-форму) dz на Σ и определим 2-форму ω на $\mathfrak{L}^D$ со значениями в $\mathbb{C}$:

$$\omega = -\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{K} \operatorname{res}_{\gamma_s} \Omega dz + \sum_{P_i \in D} \Omega dz\right).$$

Задача. $\Omega = 2\delta \operatorname{tr}\left(\delta\Psi \cdot \Psi^{-1} K\right)$.

Теорема 9. *Форма ω кососимметрична, невырождена и замкнута на $\mathfrak{L}^D$.*

Вклад γ-точек в ω с точностью до пропорциональности равен

$$\tilde{\omega} = \sum_s (\delta k_s \wedge \delta z_s + \delta\alpha_s^t \wedge \delta\beta_s). \qquad (16)$$

Теорема 10 (И.М. Кричевер). *Динамическая система $\partial_a L = [L, M_a]$ является гамильтоновой с гамильтонианом*

$$H_a = \frac{1}{k+1} \operatorname{res}_{P_i} \operatorname{tr}(w^{-m} L^{k+1}) dz, \;\; a = (P_i, k, m).$$

При заданном L эти гамильтонианы находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, отвечающей симплектической форме Кричевера–Фонга.

14. Некоторые сведения о функциях Вейерштрасса

Эти сведения понадобятся для построения нашего основного примера — эллиптической системы Калоджеро–Мозера. Пусть ω, ω' — пара комплексных чисел таких, что $\operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega} > 0$. Рассмотрим решетку в $\mathbb{C}$ с образующими 2ω, $2\omega'$.

Существует единственная функция $\wp$ на $\mathbb{C}$ с периодами 2ω, $2\omega'$, имеющая двойной полюс при $z = 0$ и такая, что $\wp(0) = 0$ ($\wp$-функция Вейерштрасса). Имеет место формула

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(z - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2}\right]$$

(Σ' означает суммирование за исключением нулевой точки решетки). Функция $\wp$ четна: $\wp(z) = \wp(-z)$. Пусть ζ — единственное нечетное решение уравнения $\wp(z) = -\zeta'(z)$.

Уравнение $\zeta(z) = \frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)}$ определяет целую функцию на $\mathbb{C}$ такую, что $\sigma(z) = z + O(z^5)$. Имеют место следующие законы преобразования:

$$\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta, \quad \zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta',$$

$$\sigma(z + 2\omega) = -\sigma(z)\exp[2\eta(z + \omega)], \quad \sigma(z + 2\omega') = -\sigma(z)\exp[2\eta'(z + \omega')]$$

и формула сложения:

$$\frac{\sigma(u + v)\sigma(u - v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp(v) - \wp(u).$$

15. Эллиптическая система Калоджеро–Мозера

Возьмем оператор Лакса

$$L_{ij}(z) = \frac{\sigma(z + q_j - q_i)\sigma(z - q_j)\sigma(q_i)}{\sigma(z)\sigma(z - q_i)\sigma(q_j - q_i)\sigma(q_j)} \ (i \neq j), \quad L_{jj} = p_j. \tag{17}$$

Дивизор D состоит из одной точки $z = 0$ с кратностью 1; γ-точки здесь обозначены q_i. Функция L корректно определена на той эллиптической кривой, где определена σ-функция.

В каждой точке $z = q_i$ имеет место разложение

$$L = -\alpha_i\beta_i^t(z - q_i)^{-1} + L_{0i} + \dots,$$

где

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad L_{0i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & * & p_i & * & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(в α_i отличен от 0 единственный элемент с номером i, точно так же в β_i отличен от -1 единственный элемент с тем же номером, а в матрице L_{0i} только одна ненулевая строка).

Вычисляя гамильтониан второго порядка по теореме 10, получим, с точностью до нормировки,

$$H = -\frac{1}{2}\operatorname{res}_{z=0}\operatorname{tr}(z^{-1}L^2) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \operatorname{res}_{z=0}\sum_{i<j}\frac{\sigma(z+q_i-q_j)\sigma(z+q_j-q_i)}{\sigma(z)^2\sigma(q_i-q_j)^2}.$$

Применяя формулу сложения для σ-функции и учитывая, что $\operatorname{res}_{z=0}(z^{-1}\wp(z)) = 0$, получаем

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{i<j}\wp(q_i-q_j).$$

H называется эллиптическим гамильтонианом Калоджеро-Мозера. Он описывает движение частиц с попарным взаимодействием на эллиптической кривой. Так как при $q_i = q_j$ потенциал сингулярен, эти гиперплоскости являются запрещенными. В вещественном случае частицы движутся по окружности и не выходят из камеры Вейля алгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Ввиду периодичности можно считать это движением в аффинной камере Вейля.

По общей формуле $\omega = \sum_{i=1}^{n}(\delta\alpha_i^t\wedge\delta\beta_i + \delta z_i\wedge\delta k_j)$. В данном случае α_i и β_i постоянны и их вклад исчезает. По определению, $z_i = q_i$, и, кроме того, очевидно, что $L_{0i}\alpha_i = p_i\alpha_i$, то есть $k_i = p_i$. Таким образом, $\omega = \sum_{i=1}^{n}\delta q_i\wedge\delta p_i$, то есть имеет канонический вид.

Открытый вопрос: к чему приведет указанная схема для рода 2?

16. Тригонометрический, гиперболический и рациональный случаи систем Калоджеро–Мозера

Функция $\wp$ удовлетворяет уравнению $\wp'^2 = 4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3)$, где $e_\alpha = \wp(\omega_\alpha)$, ω_1 и ω_3 — полупериоды, $\omega_2 = -\omega_1-\omega_3$.

При $e_1 = e_2 = a$, $e_3 = -2a$

$$\wp(z) = a + 3a\operatorname{sh}(\sqrt{3a}\,z)^{-2}.$$

При $e_1 = 2a$, $e_2 = e_3 = -a$

$$\wp(z) = -a + 3a\sin(\sqrt{3a}\,z)^{-2}.$$

При $e_1 = e_2 = e_3 = 0$

$$\wp(z) = z^{-2}.$$

При соответствующих соотношениях между e_1,e_2 и e_3 мы получаем гиперболический, тригонометрический и рациональный случай систем Калоджеро–Мозера. Отметим, что тригонометрический и эллиптический случаи соответствуют движению финитного типа, а в остальных двух случаях движение инфинитно.

Лаксово представление для эллиптической системы Калоджеро–Мозера найдено в 1980 г. Кричевером, а для остальных потенциалов ранее Ольшанецким и Переломовым.

17. Симплектическое обобщение

Вычислим гамильтониан второго порядка $H = -\frac{1}{2}\operatorname{res}_{z=0}\operatorname{tr}(z^{-1}L^2)$ для оператора Лакса

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \in \overline{\mathfrak{sp}(2n)}. \tag{18}$$

Матрицу A возьмем равной оператору Лакса рассмотренной выше задачи Калоджеро–Мозера:

$$A_{ij} = \frac{\sigma(z+q_j-q_i)\sigma(z-q_j)\sigma(q_i)}{\sigma(z)\sigma(z-q_i)\sigma(q_j-q_i)\sigma(q_j)}\ (i \neq j), \quad A_{jj} = p_j, \tag{19}$$

а B и C возьмем диагональными:

$$B_{jj} = \wp(z-q_j), \quad C_{jj} = \varepsilon_j(\wp(z) - \wp(q_j))^2,$$

где ε_j — произвольное комплексное число. Тогда

$$H = -\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{i\neq j}\wp(q_i-q_j) + \sum_{j=1}^{n} V(q_j),$$

где

$$V(q_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_j\left(\wp^3(q_j) + \wp(q_j)\wp''(q_j) + \wp(q_j)\frac{g_2}{10} + \frac{1}{24}\wp^{(IV)}(q_j)\right).$$

Мы получили гамильтониан Калоджеро–Мозера с добавкой, зависящей от координаты частицы, что соответствует внешнему потенциальному полю. Произвольность множителя ε_i означает, что мы можем это поле (или любую его компоненту) как угодно отмасштабировать, или вообще "выключить" без потери интегрируемости системы.

Таким образом в симплектическом случае алгебры операторов Лакса приводят к системе Калоджеро–Мозера, соответствующей системе корней A_n, с внешним полем. Но для произвольных систем корней R широко известны системы Калоджеро–Мозера, задаваемые гамильтонианами вида

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\operatorname{rank} R} p_j^2 + \sum_{\alpha\in R_+} \wp(\langle q,\alpha\rangle).$$

Для систем корней классических алгебр Ли их тоже можно получить с помощью развиваемых здесь методов. Получаются также все известные интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе волчки Манакова, Лагранжа, Ковалевской, и многое другое.

Список литературы

[1] I.M. Krichever. Vector bundles and Lax equations on algebraic curves. Comm. Math. Phys., v. **229**, 2002, p. 229–269.

[2] И.М. Кричевер, О.К. Шейнман. Алгебры операторов Лакса. Функциональный анализ и его приложения, т. **41**, №4, 2007, с. 46–59, arXiv: `math.RT/0701648`.

[3] M. Schlichenmaier, O.K. Sheinman. Central extensions of Lax operator algebras, arXiv: `math.QA/0711.4688`.

[4] О.К. Шейнман. Алгебры операторов Лакса и интегрируемые иерархии. Труды математического института им. В.А.Стеклова, т. **263**, 2008.

[5] A.N. Tyurin. Classification of vector bundles on an algebraic curve of an arbitrary genus. Soviet Izvestia, Ser. Math., v. **29**, p. 657–688.

Полуинварианты 2-представлений колчанов

Федотов С.Н., кафедра высшей алгебры
МГУ им. М.В. Ломоносова
`glwrath@yandex.ru`

По теореме Размыслова–Прочези [4] алгебра инвариантов представлений произвольного колчана с данным вектором размерности порождена следами всевозможных ориентированных циклов.

Для алгебры полуинвариантов 2-представлений, то есть представлений с вектором размерности $\underline{\alpha} = (2, 2, \ldots, 2)$, удается предъявить систему порождающих похожего вида. Удобно считать, что матрица $\widehat{F}$, присоединенная к матрице отображения $F : U \to V$, определяет отображение, действующее в обратную сторону, то есть $\widehat{F} : V \to U$. Через φ_a будем обозначать отображение, ассоциированное со стрелкой a. Рассмотрим какое-нибудь произведение P отображений φ_a и присоединенных к ним. Определим его *подлежащий граф* как последовательность стрелок, вдоль которых идут эти отображения.

При этом считается, что $\widehat{\varphi}_a$ идет вдоль стрелки, направленной противоположно a, даже если в колчане такой стрелки нет. *Маршрутом* в колчане назовем произведение отображений φ_a и присоединенных к ним, для которого подлежащий граф является путем. К примеру, любой путь — это маршрут. Основным результатом является

Теорема 1. *Для произвольного колчана Q и вектора размерности $\underline{\alpha} = (2, 2, \ldots, 2)$ алгебра полуинвариантов $\Bbbk[\mathrm{Rep}(Q, \underline{\alpha})]^{SL(\underline{\alpha})}$ порождена следами всевозможных замкнутых маршрутов, в которых ни один из множителей не повторяется дважды (при этом φ_a и $\widehat{\varphi}_a$ считаются различными сомножителями).*

Для доказательства используется общий вид порождающих алгебры полуинвариантов как векторного пространства [2].

Полученные знания о порождающих алгебры полуинвариантов мы надеемся использовать для обобщения конструкции Кинга [3] в духе работы [1].

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, J. Hausen. Geometric invariant theory via Cox rings. J. of Pure and Applied Algebra, 2008, doi:10.1016/j.jpaa.2008.06.005.

[2] M. Domokos, A.N. Zubkov. Semi-invariants of quivers as determinants. Transformation Groups, v. **6**, №1, 2001, p. 9–24.

[3] A.D. King. Moduli of representations of finite-dimensional algebras. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), v. **45**, №4, 1994, p. 515–530.

[4] L. Le Bruyn, C. Procesi. Semi-simple representations of quivers. Trans. Amer. Math. Soc., **317**, 1990, p. 585–598.

Минимальные представления, абелевы радикалы и приложения

Фейгин Е.Б., г. Москва

evgfeig@gmail.com

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая конечномерная алгебра Ли, ω_i — фундаментальный вес. Представление $V(\omega_i)$ со старшим весом ω_i называется коминимальным (cominuscule representation), если простой корень α_i (α_i соответствует ω_i) входит с коэффициентом 1 в разложение старшего корня $\mathfrak{g}$ по простым корням. Легко видеть, что для коминимального фундаментального веса ω_i соответствующий нильпотентный радикал $\mathfrak{n}_i \hookrightarrow \mathfrak{g}$ абелев. Таким образом, для любого $k \geqslant 1$ представление $V(k\omega_i)$ может быть представлено в виде фактора симметрической алгебры $S^\bullet(\mathfrak{n}_i)$ по некоторому идеалу $I_i(k)$.

Пусть $\mathfrak{g}_i \hookrightarrow \mathfrak{g}$ — подалгебра Леви, соответствующая радикалу $\mathfrak{n}_i$. Имеется естественное действие $\mathfrak{g}_i$ на пространстве соотношений $I_i(k)$. Таким образом, возникают два естественных вопроса:

- Описать явно идеал соотношений $I_i(k)$ в симметрической алгебре $S^\bullet(\mathfrak{n}_i)$; описать $I_i(k)$ как $\mathfrak{g}_i$-модуль.
- Описать разложение $V(k\omega_i)$ на неприводимые представления $\mathfrak{g}_i$.

Мы дадим ответы на эти вопросы для алгебр типа A.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. В этом случае все фундаментальные веса коминимальны. Пусть ω_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, — стандартно занумерованные фундаментальные веса $\mathfrak{sl}_n$. Тогда $\mathfrak{g}_i \simeq \mathfrak{gl}_i \oplus \mathfrak{gl}_{n-i}$ и $\mathfrak{n}_i \simeq U \otimes W$, где U (W) – стандартное i- $(n-i)$-мерное неприводимое представление $\mathfrak{gl}_i$ $(\mathfrak{gl}_{n-i})$. Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k)$ — набор неотрицательных целых чисел. Для $k = i$ $(k = n-i)$ обозначим через $U(\lambda)$ $(W(\lambda))$ представление $\mathfrak{gl}_i$ $(\mathfrak{gl}_{n-i})$ со старшим весом λ. Тогда выполняется следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $i \leqslant n-i$. Тогда*

- $I_i(k) = S^{k+1}(U) \otimes S^{k+1}(W) \hookrightarrow S^{k+1}(U \otimes W)$.
- $V(k\omega_i) \simeq \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_i \geqslant 0):\ \lambda_1 \leqslant k} U(\lambda) \otimes W(\lambda)$.

Отметим, что аналогичное утверждение может быть сформулировано и доказано для всех коминимальных представлений простых алгебр Ли.

Теорема 1 даёт формулу для градуированного характера ПБВ-фильтрации на коминимальных представлениях. Теорема 1 также имеет неожиданные приложения в теории вертекс-операторных алгебр. Точнее, она позволяет описать C_2 — алгебру, соответствующую аффинной алгебре $\widehat{\mathfrak{sl}_n}$ уровня k, а также доказать неаномальность соответствующей алгебры Жу.

Совместная работа с Б. Фейгиным и П. Литтелманном.

Градуированные алгебры Ли ранга 2

Хорева Н.А., г. Нижний Новгород
khorevana@mail.ru

Важную роль в классификации простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$ играет теорема распознавания В. Каца, доказанная в [4] для $p > 3$. В этой теореме описываются градуированные алгебры Ли $L = \sum_{i=-q}^{s} L_i$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) L_0 — редуктивная алгебра Ли;

(2) L_{-1} — неприводимый ограниченный L_0-модуль;

(3) отрицательная часть порождается L_{-1};

(4) условие транзитивности: если $x \in L_i,\ i \geqslant 0,\ x \neq 0$, то $[x, L_{-1}] \neq 0$;

(5) условие 1-транзитивности: если $x \in L_i,\ i \leqslant 0,\ x \neq 0$, то $[x, L_1] \neq 0$.

В случае $p = 3$ теорема распознавания доказана в [2] для $q = 1$.

В данной работе рассматриваются градуированные алгебры Ли над полем характеристики 3 с компонентой $L_0 = \mathfrak{gl}(2)$, $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ или $\mathfrak{sl}(3)$.

Теорема 1. *Пусть L — конечномерная градуированная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 такая, что $L_0 = \mathfrak{gl}(2)$, $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ или $\mathfrak{sl}(3)$, а L_{-1} — ограниченный неприводимый L_0-модуль, отрицательная часть порождается L_{-1}, выполняются условия транзитивности и 1-транзитивности. Тогда L изоморфна одной из следующих алгебр: $\mathfrak{pgl}(3)$, подалгебре в алгебре G_2, 10-мерной алгебре серии $L(\varepsilon)$, алгебре Франк $\mathtt{Fr}(n)$, контактной алгебре $K(3 : \bar{n})$, специальной алгебре $S(3 : \bar{n})$ или алгебре серии $X(\mathcal{F}, \omega)$ [3], где ω — однородная форма объема.*

Список литературы

[1] В. Кац. Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста. Изв. АН СССР. Сер. матем., т. **32**, 1968, с. 1323–1367

[2] А.И. Кострикин, В.В. Острик. К теореме распознавания для алгебр Ли характеристики 3. Матем. сб., т. **186**, №10, 1995, с. 73–88.

[3] С.М. Скрябин. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3. Матем. сб., т. **183**, №8, 1992, с. 3–22.

[4] G. Benkart, T. Gregory, A. Premet. The Recognition Theorem for Graded Lie Algebras in Prime Characteristic, preprint.

Содержание

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Подписано в печать 26.05.2009.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ.л. 4,25. Уч.-изд. л. 3,52.
Тираж 100 экз. Заказ № 891.
Издательство "Универс групп", 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано в ООО "Универс групп"