О связи между янгианами супералгебр Ли и квантовыми петлевыми супералгебрами

Владимир Стукопин

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов,
САМАРА, 2018

Введение

Мы строим изоморфизм между пополнениями янгиана специальной линейной супералгебры и квантованем петлевой супералгебры специальной линейной супералгебры. Эти результаты являются супераналогами результатов Sachin Gautam и Valerio Toledano Laredo об изоморфизме между пополнениями янгиана простой алгебры Ли и $\mathfrak{g}$ янгиана and quantum loop algebra of $U_{\hbar}(L\mathfrak{g})$ ([3], см. также работу [5] для дальнейшего развития этой теории). Данный доклад является естественным продолжением работ [1], [2], в которых в рамках подхода В. Дринфельда определён янгиан $Y(A(m,n))$ специальной линейной супералгебры $A(m,n)$. Доклад представляет часть работы о связи между представлениями янгиана специальной линейной супералгебры Ли и представлениями квантовой петлевой супералгебры.

Специальная линейная супералгебра Ли

Definition

Супералгебра Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$ порождается образующими : $h_i, x_i^{\pm}$, $i \in I$. Образующие $x_{m+1}^{\pm}$ – нечётные, в то время как остальные образующие – чётные, другими словами, функция чётности p принимает на образующих следующие значения:
$p(h_i) = 0, i \in I, p(x_j^{\pm}) = 0, j \neq m+1, p(x_{m+1}^{\pm}) = 1$. Эти образующие удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:
$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i,\, x_j^{\pm}] = \pm a_{ij} x_j^{\pm}$,
$[x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_i$,
$[[x_m^{\pm}, x_{m+1}^{\pm}], [x_{m+1}^{\pm}, x_{m+2}^{\pm}]] = 0$
$ad^{1-\tilde{a}_{ij}}(x_i^{\pm}) x_j^{\pm} = 0.$
$[x_i^{\pm}, [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}]] = 0$ если $|i-j| = 1$, $[x_i^{\pm}, x_j^{\pm}] = 0$ в остальных случаях $(i \neq j)$.

Квантовая аффинная супералгебра

Будем обозначать через $L\mathfrak{g}$ (супер)алгебру Ли (лорановских) петель со значениями в базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Отметим, что это просто аффинная супералгебра Ли без центрального и градуирующего элементов.
Пусть $I = \{1,2,\ldots,m+1,\ldots m+n+1\}$. Мы будем обозначать множество простых корней этой супералгебры Ли через $\Gamma = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots\alpha_{m+n+1}\}$ и отождествлять с I. Будем также предполагать, что α_{m+1} нечётный простой корень выделенной корневой системы $A(m,n)$. Пусть также $I_0 = \{0,1,2,\ldots,m+1,\ldots m+n+1\}$, множество, индексирующее аффинные корни (расширенную систему корней) $\Gamma_0 = \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots\alpha_{m+n+1}\}$.

Я напомню определение матрицы Картана. Матрица Картана (выделенная) A для аффинной супералгебры Ли $A^{(1)}(n,m)$ это следующая матрица $A=(a_{ij})_{i,j=0}^{n+m+1}$, $a_{ii}=2, i\neq m+1, a_{m+1,m+1}=0$, $a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=-1, i\neq m+1, a_{m+1,m+2}=1, a_{0,m+n+1}=a_{m+n+1,0}=-1$, и остальные элементы равны 0. Эта матрица может быть симметризована при помощи следующей симметризующей матрицы $D=\mathrm{diag}[1,\dots,1,-1,\dots,-1]$, где первые $m+1$ элементов диаглнальной матрицы равны 1, а остальные равны -1. Таким образом DA- симметризованная матрица Картана.
Пусть $\{E_{i,r},F_{i,r},H_{i,r}\}_{i\in I,r\in\mathbb{Z}}$ токовые образующие квантовой аффинной супералгебры $U_{\hbar}((L\mathfrak{g})$.

Definition

Квантовая аффинная супералгебра $U_q(A)^{(1)}(m,n))$ это супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}$, порождённая образующими
$H_{i,r}:=h_{\alpha_i,r},\quad K_i^{\pm1},\quad C^{\pm1/2},\quad E_{i,k}:=x^+_{\alpha_i,k},\quad F_{i,k}:=x^-_{\alpha_i,k}\quad i\in I=\{1,2,\dots,m+n+1\},\quad r\in\mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующим соотношениям :

Definition

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = \delta_{r,-s}\tfrac{1}{r}[ra_{ij}]_{q_i}\frac{C^r - C^{-r}}{q^j - q^{-j}}, K_i K_i^{-1} = 1, \quad C^{1/2}C^{-1/2} = 1,\ [K_i, K_j] =$$

$$[K_i, h_{j,r}] = 0\ \ K_i x^{\pm}_{j,r} K_i^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,r},\ [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm\tfrac{1}{r}[ra_{ij}]_{q_i} C^{\mp|r|/2} x^{\pm}_{j,r+s},$$

$$x^{\pm}_{i,r+1}x^{\pm}_{j,s} - q^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,s}x^{\pm}_{i,r+1} = q^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{i,r}x^{\pm}_{j,s+1} - q^{\pm a_{ij}} x^{\pm}_{j,s+1}x^{\pm}_{i,r}$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij}\frac{C^{(r-s)/2}\Phi^{+}_{i,r+s} - C^{-(r-s)/2}\Phi^{-}_{i,r+s}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$\textstyle\sum_{\pi\in\Sigma_M}\sum_{k=0}^{M}\begin{bmatrix}M\\k\end{bmatrix}_{q_i} x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(k)}}x^{\pm}_{j,s}x^{\pm}_{i,r_{\pi(k+1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(M)}} = 0, \quad i \neq j.$$

$$[[x^{\pm}_{m,k}, x^{\pm}_{m+1,0}]_q, [x^{\pm}_{m+1,0}, E^{\pm}_{m+2,r}]_q]_q = 0$$

Здесь сумма берётся по всем перестановкам σ множества $\{1, ..., r\}$.

Определение квантовой петлевой алгебры

Definition

Пусть $U_\hbar(L\mathfrak{g})$ ассоциативная супералгебра над кольцом $\mathbb{C}[[\hbar]]$ формальных степенных рядов, порождённая образующими $\{E_{i,k}, F_{i,k}, H_{i,k}\}_{i\in I, k\in\mathbb{Z}}$, такими, что:

Q1) Для всех $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}$ $[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0$.

Q2) Для всех $i,j\in I$ и $k\in\mathbb{Z}$ $[H_{i,0}, E_{j,k}] = a_{i,j}E_{j,k}, \quad [H_{i,0}, F_{j,k}] = -a_{i,j}F_{j,k}$.

Q3) Для всех $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$[H_{i,r}, E_{j,k}] = \frac{[ra_{i,j}]_{q_i}}{r}E_{j,r+k}, \quad [H_{i,r}, F_{j,k}] = -\frac{[ra_{i,j}]_{q_i}}{r}F_{j,r+k}$.

Q4) Для всех $i,j\in I$ и $k,l\in\mathbb{Z}$

$E_{i,k+1}E_{j,l} - q_i^{a_{ij}}E_{j,l}E_{i,k+1} = q_i^{a_{ij}}E_{i,k}E_{j,l+1} - E_{j,l+1}E_{i,k}$,

$F_{i,k+1}F_{j,l} - q_i^{-a_{ij}}F_{j,l}F_{i,k+1} = q_i^{-a_{ij}}F_{i,k}F_{j,l+1} - F_{j,l+1}F_{i,k}$.

Q5) Для всех $i,j\in I$ и $k,l\in\mathbb{Z}$ $[E_{i,j}, F_{k,l}] = \delta_{i,j}\frac{\psi_{i,k+l}-\varphi_{i,k+l}}{q_i-q_i^{-1}}$.

Q6) Пусть $i\neq j\in I$ и пусть также $M = 1-d_ia_{ij}$ для $i\leq m$ и $M = 1+d_ia_{ij}$ для $i\geq m+1$. Для всех $k_1,\dots,k_M\in\mathbb{Z}$ и $l\in\mathbb{Z}$

$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_M}\sum_{s=0}^{M}(-1)^s\begin{bmatrix}M\\s\end{bmatrix}_{q_i} E_{i,k_{\pi(1)}}\cdot\ldots\cdot E_{i,k_{\pi(s)}}\cdot E_{j,l}\cdot E_{i,k_{\pi(s+1)}}\cdot\ldots\cdot E_{i,k_{\pi(M)}} = 0$,

$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_M}\sum_{s=0}^{M}(-1)^s\begin{bmatrix}M\\s\end{bmatrix} F_{i,k_{\pi(1)}}\cdot\ldots\cdot F_{i,k_{\pi(s)}}\cdot F_{j,l}\cdot F_{i,k_{\pi(s+1)}}\cdot\ldots\cdot F_{i,k_{\pi(M)}} = 0$,

где элементы $\psi_{i,r}, \varphi_{i,r}$ определяются следующими формулами :
$\psi_i(z) = \sum_{r\geq 0} \psi_{i,r} z^{-r} = \exp(\frac{\hbar d_i}{2} H_{i,0}) \exp((q_i - q_i^{-1}) \sum_{s\geq 1} H_{i,s} z^{-s}),$
$\varphi_i(z) = \sum_{r\geq 0} \varphi_{i,r} z^{-r} = \exp(-\frac{\hbar d_i}{2} H_{i,0}) \exp(-(q_i - q_i^{-1}) \sum_{s\geq 1} H_{i,-s} z^{s}),$
где $\psi_{i,-k} = \varphi_{i,k} = 0$ для $k \geq 1$. Здесь, $p(H_{i,r}) = 0$ для $i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$, и
$p(E_{i,r}) = p(F_{i,r}) = 0$ для $i \in I \backslash \{m+1\}, r \in \mathbb{Z}$, и
$p(E_{m+1,r}) = p(F_{m+1,r}) = 0$ для $r \in \mathbb{Z}$, $[a, b]_q = ab - (-1)^{p(a)p(b)} qba.$

Янгиан специальной линейной супералгебры Ли

Definition

Пусть, как и выше, $\mathfrak{g} = A(m,n)$, тогда $Y_{\hbar}(\mathfrak{g})$ это ассоциативная супералгебра, порождённая образующими $\{x^{\pm}_{i,r}, h_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}_+}$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

Y1)Для всех $i,j \in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$ $[h_{i,r}, h_{j,l}] = 0$.

Y2) Для всех $i,j\in I$ и $s\in\mathbb{Z}_+$ $[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm d_i a_{ij} x^{\pm}_{j,s}$.

Y3) Для всех $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{d_i a_{ij}\hbar}{2}(h_{i,r}x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s}h_{i,r}).$$

Y4) Для всех $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{d_i a_{ij}\hbar}{2}(x^{\pm}_{i,r}x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s}x^{\pm}_{i,r}).$$

Y5) Для всех $i,j\in I$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$ $[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,l}] = \delta_{i,j}h_{i,r+s}$.

Y6) Пусть $i\neq j\in I$ и пусть также, как и выше $M = 1 - d_i a_{ij}$ для $i\leq m$ и $M = 1 + d_i a_{ij}$ для $i \geq m+1$. Тогда all $k_1,\dots,k_M\in\mathbb{Z}$ and $l\in\mathbb{Z}_+$

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_M}[x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}}, [x^{\pm}_{i,r_{\pi(2)}}, \dots, [x^{\pm}_{i,r_{\pi(M)}}, x^{\pm}_{j,s}]\dots]] = 0.$$

Y7) $[[x^{\pm}_{m,k}, x^{\pm}_{m+1,0}], [x^{\pm}_{m+1,0}, x^{\pm}_{m+2,t}]] = 0,\ k,t\in\mathbb{Z}$.

Definition

Заметим, что $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ является $\mathbb{Z}_+$-градуированной супералгеброй с градуировкойопределяемой следующими условиями на образующих: $\deg(h_{i,r}) = \deg(x^\pm_{i,r}) = r$ и $\deg(\hbar) = 1$. Более того, функция чётности принимает следующие значения на образующих $p(h_{i,r}) = 0$ for $i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$, и $p(x^\pm_{i,r}) = 0$ для $i \in I \backslash \{m+1\}$, а $p(x^\pm_{m+1,r}) = 1$ для $r \in \mathbb{Z}_+$.

Классификация неприводимых представлений янгиана и квантовой петлевой супералгебры

Сформулируем главный результат о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана и квантовой петлевой супералгебры для случая специальной линейной супералгебры Ли.

Theorem

1) Каждый простой конечномерный $Y_{\hbar}(A(m,n))$-модуль V это модуль со старшим весом $d : V = V(d)$, то есть, $h_i(u)v_0 = \left(1+\hbar\sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k}\cdot u^{-k-1}\right)v_0 = \left(1+\hbar\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k}\cdot u^{-k-1}\right)v_0$, где v_0 это старший вектор и $i = \{1,2,\dots,m+n+1\}$.

2) Модуль $V(d)$ является конечномерным простым модулем тогда и только тогда, когда существуют полиномы P_i^d, $i \in \{1,2,\dots,m,m+2,\dots m+n+1\} = I\backslash\{m+1\}$, а также полиномы P_{m+1}^d, Q_{m+1}^d, которые удовлетворяют следующим условиям :

a) все эти полиномы со старшим коэффициентом, равным 1 и ненулевым свободным членом;

b) $\dfrac{P_i^d(u+d_i a_{ii}\hbar/2)}{P_i^d(u)} = 1+\hbar\sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k}\cdot u^{-k-1}, \quad i \in I\backslash\{m+1\}$,

$\dfrac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} = 1+\hbar\sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k}\cdot u^{-k-1}$. Здесь $d_i a_{ii}$ матричный элемент симметризованной матрицы Картана супералгебры Ли $A(m,n)$.

Theorem

1. Каждый простой конечномерный $U_{\hbar}(LA(m,n))$ -модуль V является модулем со старшим весом δ :$V=V(\delta)$, то есть , $\psi_i(z)v_0=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{+}_{i,k}\cdot z^{-k}\right)v_+, \quad \varphi_i(z)v_0=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{-}_{-i,k}\cdot z^{k}\right)v_+$, где v_0 старший вектор и $i=\{1,2,\dots,m+n+1\}$.

2. Модуль $V(\delta)$ является конечномерным простым в том и только в том случае если существуют полиномы P_i^{δ},
$i\in\{1,2,\dots,m,m+2,\dots m+n+1\}=I\backslash\{m+1\}$, а также полиномы $P_{m+1}^{\delta},Q_{m+1}^{\delta}$, удовлетворяющие следующим условиям:
a) все эти полиномы со старшим коэффициентом равным 1 и ненулевым свободным членом;
b) $q^{-d_ia_{ii}/2}\dfrac{P_i^{\delta}(q^{d_ia_{ii}}z)}{P_i^{\delta}(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{+}_{i,k}\cdot z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{-}_{i,-k}\cdot z^{k}, \quad i\in I\backslash\{m+1\}$,

$$\frac{P_{m+1}^{\delta}(z)}{Q_{m+1}^{\delta}(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{+}_{m+1,k}\cdot z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{-}_{m+1,-k}\cdot z^{k}.$$

Отображение Φ

Пусть $\{E_{i,r}, F_{i,r}, H_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}}$ токовые образующие квантовой петлевой супералгебры $U_\hbar((L\mathfrak{g})$, а $\{e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}\}_{i\in I, k\in\mathbb{Z}_+}$ – образующие янгиана $Y_\hbar(\mathfrak{g})$. Определим отображение

$$\Phi : U_\hbar((L\mathfrak{g}) \to \widehat{Y_\hbar(\mathfrak{g})} \tag{1}$$

на образующих следующими формулами :

$$\Phi(H_{i,r}) = \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \sum_{k\geq 0} t_{i,k} \frac{r^k}{k!}, \tag{2}$$

$$\Phi(E_{i,r}) = e^{r\sigma_i^+} \sum_{m\geq 0} g^+_{i,m} e_{i,m}, \; \Phi(F_{i,r}) = e^{r\sigma_i^-} \sum_{m\geq 0} g^-_{i,m} f_{i,m}. \tag{3}$$

Здесь мы используем следующие обозначения: $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$, а d_i элементы симметризующей матрицы Картана супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$.

Мы используем здесь логарифмические образующие $\{t_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{N}}$ коммутативной супералгебры $Y_\hbar(\mathfrak{h}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{g})$которая порождена образующими $\{h_{i,r}\}_{i\in I, r\in\mathbb{Z}_{\nleq}}$. Эти логарифмические образующие квантовой универсальной обёртывающей супералгебры определяются следующим равенством порождающих функций образующих : $\hbar\sum_{r\geq 0} t_{i,r} u^{-r-1} = \log(1+\sum_{r\geq 0} h_{i,r} u^{-r-1})$.

Элементы $\{g^{\pm}_{i,m}\}_{i\in I,m\in Z_0}$ принадлежат пополнению $\widehat{Y^0}$ супералгебры $Y^0 = Y_{\hbar}(\mathfrak{h})$ и определяются следующим образом . Рассмотрим следующий формальный степенной ряд :

$G(v) = \log\left(\frac{v}{e^{v/2} - e^{v/2}}\right) \in Q[[v]]$ и определим $\gamma_i \in Y^0\hat{}[v]$ следующей формулойb:

$$\gamma_i(v) = \hbar \sum_{r\geq 0} \frac{t_{i,r}}{r!} \left(-\frac{d}{dv}\right)^{r+1} G(v).$$

Тогда, $\sum_{m\geq 0} g^{\pm}_{i,m} v^m = \left(\frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\gamma_i(v)}{2}\right)$.

Окончательно, здесь, $\boldsymbol{\sigma}_i^{\pm}$ гоморфизмы подсупералгебр $\boldsymbol{\sigma}_i^{\pm} : Y_{\hbar}(\mathfrak{b}_{\pm})(\subset Y_{\hbar}(\mathfrak{g})) \to Y_{\hbar}(\mathfrak{b}_{\pm})$, которые определяются на образующих $\{h_{i,r}, e_{i,r} = x^{+}_{i,r}, f_{i,r} = x^{-}_{i,r}\}$ следующим образом. Они оставляют неподвижными образующие $h_{i,k}$, и на остальных образующих действуют сдвигом второго индекса:

$\boldsymbol{\sigma}_i^{+} : e_{j,r} \to e_{j,r+\delta_{ij}}, \boldsymbol{\sigma}_i^{-} : f_{j,r} \to f_{j,r+\delta_{ij}}$. Эти гомоморфизмы аналоги, введённых Дринфельдом гомоморфизмов $T_{\pm}$. Отображения :

$\boldsymbol{\sigma}_i^{\pm} : x^{\pm}_{j,r} \mapsto x^{\pm}_{j,r+\delta_{i,j}}, \quad h_{j,r} \mapsto h_{j,r}$ продолжаются до гомоморфизмов

Главный результат

Theorem

1) Отображение $\Phi : \mathrm{U}_\hbar((\mathrm{L}\mathfrak{g}) \to \widehat{\mathrm{Y}_\hbar(\mathfrak{g})}$, единственным образом определяется формулами (2), (3) как мономорфизм ассоциативных супералгебр.

2) Это отображение Φ единственным образом продолжается до гомоморфизма топологоческих пополнений: $\hat{\Phi} : \widehat{\mathrm{U}_\hbar(\mathrm{L}\mathfrak{g})} \to \widehat{\mathrm{Y}_\hbar(\mathfrak{g})}$ этих супералгебр. Более того, отображение $\hat{\Phi}$ – изоморфизм топологических супералгебр.

Доказательство теоремы

Я кратко опишу схему доказательства этой теоремы. Доказательство основывается на приведённой выше классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана и квантовой петлевой супералгебры, а также на редукции к частным случаям янгиана и квантовой петлевой супералгебры для супералгебр Ли $\mathfrak{sl}(1,1)$ и $\mathfrak{sl}(2)$. Я относительно подробно рассмотрю доказательство для первого упомянутого частного случая. Напомню определения янгиана и квантовой петлевой супералгебры в этом частном случае супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1,1)$.

Definition

Янгиан $Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}(1,1))$ порождается образующими $h_n, e_n, f_n, n \in Z_0$, которые удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_k, h_l] = 0, \quad [h_k, e_l] = [h_k, f_l] = 0,$$

$$[e_k, e_l] = [f_k, f_l] = 0,$$

$$[e_k, f_l] = h_{k+l}.$$

Квантовая петлевая супералгебра $U_{\hbar}(L\mathfrak{sl}(1,1))$ порождается образующими $\{E_n, F_n, H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют следующим определяющим соотноениям:

$$[H_r, H_s] = 0,$$

$$[H_r, E_s] = [H_r, F_s] = 0, \qquad [E_r, E_s] = [F_r, F_s] = 0,$$

$$[E_r, F_s] = \frac{\psi_{r+s} - \varphi_{r+s}}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}},$$

для всех $r, s \in \mathbb{Z}$. Здесь, как и выше, элементы ψ_r, φ_r определяются следующими формулами :

$$\psi_i(z) = \sum_{r\geq 0} \psi_r z^{-r} = \exp(\tfrac{\hbar}{2} H_0) \exp((e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}) \sum_{s\geq 1} H_s z^{-s}),$$

$$\varphi_i(z) = \sum_{r\geq 0} \varphi_r z^{r} = \exp(-\tfrac{\hbar}{2} H_0) \exp(-(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}) \sum_{s\geq 1} H_{-s} z^{s}).$$

Доказательство в частном случае

Опишем сначала явно гомоморфизм $\Phi : U_\hbar(\mathfrak{sl}(1,1)) \to Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}(1,1)})$. Я напомню сначала определение преобразования Бореля (более точно, обратного преобразования Бореля) чуть в более общем алгебраическом контексте.

Будем обозначать через Впреобразование, сопоставляющее функции $f(u) \in A[[u]]$ со значениями в некоторой ассоциативной супералгебре A, функцию $B(f)(v) \in u^{-1}A[[u^{-1}]]$, определяемую формулой $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^{-k-1} \to B(f)(v) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r v^r}{r!}$.

Отметим следующие свойства преобразования Бореля порождающей функции $t(u)$ логарифмических образующих $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$. Так как, $[h(u), e_k] = [h(u), f_k] = 0$, то получаем, что $[t(u), e_k] = [t(u), f_k] = 0$. Последнее означает, что

$$[B(t(u))(v), e_k] = [B(t(u))(v), f_k] = 0$$

Легко проверить, используя свойства преобразования Бореля, аналогичные свойствам преобразования Лапласа, что

$$B(\log(1 - pu^{-1})) = \frac{1 - e^{pv}}{v}$$

Действительно:

$$\mathrm{B}(\log(1-pu^{-1})) = \frac{1}{v}\mathrm{B}(\tfrac{d}{du}(\log(1-pu^{-1}))) = \frac{1}{v}\mathrm{B}\left(\frac{-pu^{-2}}{1-pu^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{v}\mathrm{B}\left(\frac{-p}{u(u-p)}\right) = \frac{1}{v}\mathrm{B}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-p}\right) = \frac{1}{v}(1-e^{pv}).$$

Для доказательства теоремы в частном случае, достаточно проверить эквивалентность последних соотношений в данных выше определениях янгиана и квантовой петлевой супералгебры в частном случае. Сначала заметим, что

$\Phi(E_r) = e^{r\sigma_+}\sum_{m\geq 0} g_m e_m = \sum_{m\geq 0} g_m^{(+,k)} e_m = e^{r\sigma_+} g(\sigma_+) e_0,$

$\Phi(F_r) = e^{r\sigma_-}\sum_{m\geq 0} g_m f_m = \sum_{m\geq 0} g_m^{(-,k)} f_m = e^{r\sigma_-} g(\sigma_-) f_0.$ Докажем явным вычислением равенство

$$[\Phi(E_r), \Phi(F_s)] = \frac{\Phi(\psi_{r+s}) - \Phi(\varphi_{r+s})}{e^{\hbar/2} - e^{\hbar/2}}.$$

Прямое вычисление правой и левой частей позволяет доказать это равенство. Легко видеть, что по определению $\Phi(\mathrm{E_r})\Phi(\mathrm{F_s}) = \mathrm{e}^{\mathrm{r}\boldsymbol{\sigma}_+}\mathrm{g}(\boldsymbol{\sigma}_+)\mathrm{e}_0\mathrm{e}^{\mathrm{s}\boldsymbol{\sigma}_-}\mathrm{g}(\boldsymbol{\sigma}_-)\mathrm{f}_0$.

Так как $g(v) = \sum_{m\geq 0} g_m v^m = \sum_{m\geq 0} g_m v^m = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar} - e^{-\hbar/2}}\right)^{1/2} \exp(\gamma(v)/2) = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} B(t(u)) \left(-\frac{d}{dv}\right) \left(\frac{d}{dv} \log\left(\frac{e^{v/2} - e^{-v/2}}{v}\right)\right)\right).$

Пусть также $\partial_v := \dfrac{d}{dv}$. Тогда $g(v) = \sum_{m\geq 0} g_m v^m = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} B(t(u)) (-\partial_v) \left(\log\left(\frac{e^{v/2} - e^{-v/2}}{v}\right)\right)'\right)$. Легко проверяется, что

$$g(\boldsymbol{\sigma}_+)e_0 = \sum_{m\geq 0} g_m \boldsymbol{\sigma}_+^m e_0 = \sum_{m\geq 0} g_m e_m.$$

Аналогично, $g(\boldsymbol{\sigma}_-)f_0 = \sum_{m\geq 0} g_m \boldsymbol{\sigma}_-^m e_0 = \sum_{m\geq 0} g_m f_m$. Заметим также, то если переменные u и v коммутируют, то
$g(u)g(v) = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar} - e^{-\hbar/2}}\right)\exp(\boldsymbol{\gamma}(u)/2 + \boldsymbol{\gamma}(v)/2) =$
$\left(\frac{\hbar}{e^{\hbar} - e^{-\hbar/2}}\right)\exp\left(\frac{1}{2}B(t(u_1))\left(-\frac{d}{du}\right)(\log(f_0(u)))' + \right),$

$$\frac{1}{2}B(t(u_1))\left(-\frac{d}{dv}\right)\frac{d}{dv}(\log(f_0))')$$

где $f_0(u) = \dfrac{e^{u/2} - e^{-u/2}}{u}$.
Сейчас мы можем уже вычислить $\Phi(E_r)\Phi(E_l)$.

Итак, $g(u)g(v) = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar} - e^{-\hbar/2}}\right)\exp(\boldsymbol{\gamma}(u)/2 + \boldsymbol{\gamma}(v)/2) =$

$\left(\frac{\hbar}{e^{\hbar} - e^{-\hbar/2}}\right)\exp\big(\frac{1}{2}B(t(u_1))\left(-\frac{d}{du}\right)(\log(f_0(u)))' + \frac{1}{2}B(t(u_1))\left(-\frac{d}{dv}\right)\frac{d}{dv}(\log(f$

$f_0(u) = \dfrac{e^{u/2} - e^{-u/2}}{u}$. Легко видеть, что

$\Phi(E_r)\Phi(E_l) = e^{r\boldsymbol{\sigma}_+}g(\boldsymbol{\sigma}_+)e_0e^{l\boldsymbol{\sigma}_-}g(\boldsymbol{\sigma}_-)e_0f_0 = g(\boldsymbol{\sigma}_+)g(\boldsymbol{\sigma}_-)e_rf_l$. Аналогично,

$\Phi(F_l)\Phi(E_r) = g(\boldsymbol{\sigma}_+)g(\boldsymbol{\sigma}_-)f_le_r$. Отсюда сразу получаем, что

$[\Phi(E_r)\Phi(E_l), \Phi(E_l)\Phi(E_r)] = [g(\boldsymbol{\sigma}_+)g(\boldsymbol{\sigma}_-)e_rf_l, g(\boldsymbol{\sigma}_+)g(\boldsymbol{\sigma}_-)f_le_r]$

$= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} g_mg_n(e_{m+r}f_{n+l} - f_{n+l}e_{m+r}) = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} g_mg_nh_{m+n+r+l}.$

С другой стороны, $\Phi(H_r) = \frac{B(t(u))(r)}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}$. Тогда $\Phi(\psi(z)) =$
$\sum_{r \geq 0} \Phi(\psi_r) z^{-r} = \exp\left(\frac{\hbar \Phi(H_0)}{2}\right) \exp\left((e^{\hbar/2} - e^{\hbar/2}) \sum_{s \geq 1} \Phi(H_s) z^{-s}\right)$
$= \exp\left(\frac{\hbar \Phi(H_0)}{2}\right) \exp\left(\sum_{s \geq 1} B(t(u))(s) z^{-s}\right)$
$= \exp\left(\frac{\hbar}{2(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2})} t_0\right) \exp\left(\sum_{s \geq 1} B(t(u))(s) z^{-s}\right)$. Аналогично,
$\Phi(\varphi(z)) = \sum_{r \geq 0} \Phi(\varphi_r) z^r = \exp\left(\frac{-\hbar \Phi(H_0)}{2}\right) \exp\left(\sum_{s \geq 1} B(t(u))(-s) z^s\right)$.
Далее мы будем использовать, приведённые выше теоремы о классификации конечномерных неприводимых представлений.

Теория модулей работает

Мы опишем действие образующих, соответственно, квантовой петлевой супералгебры и янгиана, в конечномерном простом модуле. Обозначим через D^{Y} янгианный морфизм в конечномерные простые янгианные модули, заданный семейством полиномов Дринфельда. В случае $\mathrm{Y}(\mathfrak{sl}(1,1)$ конечномерный простой янгианный модуль задаётся парой полиномов Дринфельда $\mathrm{P}^{\mathrm{d}}(\mathrm{u})$ и $\mathrm{Q}^{\mathrm{d}}(\mathrm{u})$ со старшими коэффициентами, равными 1. В этом случае полиномы единственным образом определяются своими комплексными корнями : $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}}$ и $\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_{\mathrm{n}}$.

В этом случае действие порождающей фунции картановских образующих янгиана на старшем векторе определяется формулой:

$$h(u)v_0 = \left(1 + \sum_{k\geq 0} d_k u^{-k-1}\right) v_0, \quad \frac{P^d(u)}{Q^d(u)} = 1 + \sum_{k\geq 0} d_k u^{-k-1},$$

где, как и выше $h(u) = 1 + \sum_{k\geq 0} h_k u^{-k-1}$. Другими словами
$h(u)v_0 = \dfrac{P^d(u)}{Q^d(u)} v_0 = \dfrac{(u-a_1)\cdot\ldots(u-a_n)}{(u-b_1)\cdot\ldots(u-b_n)} v_0.$
Определим тогда отображение
$D^Y : Y^0 \to R(n) = C[\hbar, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n]$

$$D^Y(h(u)) = \frac{P^d(u)}{Q^d(u)} = \frac{(u-a_1)\cdot\ldots(u-a_n)}{(u-b_1)\cdot\ldots(u-b_n)}.$$

Модули над квантовой петлевой алгеброй

Аналогично, определим отображение

$$\mathrm{D}^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}^{0} \to \mathrm{S}(\mathrm{n}) = \mathrm{C}[\mathrm{q}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{n}],$$

$\mathrm{D}^{\mathrm{U}}(\psi(\mathrm{z})) = \dfrac{\mathrm{P}^{\delta}(\mathrm{z})}{\mathrm{Q}^{\delta}(\mathrm{z})} = \dfrac{(\mathrm{z}-\mathrm{A}_1)\cdot\ldots(\mathrm{z}-\mathrm{A}_\mathrm{n})}{(\mathrm{z}-\mathrm{B}_1)\cdot\ldots(\mathrm{z}-\mathrm{B}_\mathrm{n}))}$. Вычислим сейчас действие гомоморфизма $\mathrm{D}^{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y}(\mathfrak{sl}(1,1)) \to \mathrm{End}(\mathrm{V}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}})$ на $\mathrm{t}(\mathrm{u})$, а также образы образующих h_k и t_k под действием этого гомоморфизма. Справедлива следующая лемма.

Lemma

Справедливы следующие равенства:

$$D^U(\psi_r) = \sum_{p=1}^n B_p^r (B_p - A_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{B_p - A_{p'}}{B_p - B_{p'}} \right),$$

$$D^U(\varphi_r) = \sum_{p=1}^n B_p^{-r} (A_p - B_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{B_p - A_{p'}}{B_p - B_{p'}} \right),$$

$$D^U((q - q^{-1})H_k) = \tfrac{1}{p} \sum_{p=1}^n (B^p - A^p), \quad D^Y(h_r) =$$

$$\sum_{p=1}^n b_p^r (b_p - a_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{b_p - a_{p'}}{b_p - b_{p'}} \right), \quad D^Y(t_r) = \frac{1}{r+1} \sum_{p=1}^n \frac{b_p^{r+1} - a_p^{r+1}}{\hbar},$$

$$D^Y(B(t(u))(v) = \sum_{p=1}^n \frac{\exp(b_p v) - \exp(a_p v)}{v}.$$

Главный шаг доказательства

Lemma

1) Гомоморфизмы

$$D^{Y} : Y^{0} \to \bigoplus_{n\geq 1} R(n), \quad D^{U} : U^{0} \to \bigoplus_{n\geq 1} S(n),$$

инъективны.

Сформулируем главное вспомогательное утверждение.

Lemma

Имеет место следующее равенство

$$\Phi\left(\frac{\psi_k - \varphi_k}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}\right) = \frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} e^{kv} \exp(\gamma(v))|_{v^n = h_n}.$$

Доказательство.

Вычислим сначала левую часть равенства. □

$$\hbar e^{kv} \exp(B(-\partial)G'(v)|_{v^n=h_n} = \hbar e^{kv} \exp\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{e^{b_p(\partial)} - e^{a_p(\partial)}}{\partial}\right) G(v)|_{v^n=h_n}$$

$= \hbar e^{kv}\sum_{p=1}^{n}\exp\left(G(v+b_p)-G(v+a_p)\right)|_{v^n=h_n}=$
$\hbar e^{kv}\prod_{p=1}^{n}\frac{v-b_p}{v-a_p}\frac{e^{(v-a_p)/2}-e^{-(v-a_p)/2}}{e^{(v-b_p)/2}-e^{-(v-b_p)/2}}|_{v^n=h_n}$. Таким образом, мы получаем

$$D^Y\left(\hbar e^{kv}\prod_{p=1}^{n}\frac{v-b_p}{v-a_p}\frac{e^{(v-a_p)/2}-e^{-(v-a_p)/2}}{e^{(v-b_p)/2}-e^{-(v-b_p)/2}}|_{v^n=h_n}\right).$$

Прямое вычисление доказывает следующее предложение. Пусть $F(v)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k v^k$. Тогда $F(v)|_{v^n=h_n}=\sum_{k=0}^{\infty}f_k h_k$. Таким образом, мы получаем, что

$$D^Y\left(\hbar e^{kv}\exp(\gamma v)|_{v^n=h_n}\right)=D^Y\left(\hbar e^{kv}\prod_{p=1}^{n}\frac{v-b_p}{v-a_p}\exp(\frac{b_p-a_p}{2})\frac{e^v-e^{a_p}}{e^v-e^{b_p}}|_{v^n=h_n}\right.$$

Учитывая, что $\lim_{v\to b_p}\frac{v-b_p}{e^v-e^{b_p}}=e^{-b_p}$ мы переписываем последнее равенство в следующем виде
$\hbar\sum_{p=1}^{n}e^{kb_p}\hbar\prod_{p'\neq p}\frac{b_p-b_{p'}}{b_p-a_{p'}}\frac{1}{b_p-a_p}\frac{e^{b_p}-e^{a_{p'}}}{e^{b_p}-e^{b_{p'}}}(e^{b_p}-e^{a_p})$
$=\hbar\sum_{p=1}^{n}e^{kb_p}(e^{b_p}-e^{a_p})\prod_{p'\neq p}\frac{e^{b_p}-e^{a_{p'}}}{e^{b_p}-e^{b_{p'}}}.$

Мы также видим, что $(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2}-e^{-\hbar/2}})D^{U}(\psi_{r}) = \hbar\sum_{p=1}^{n} B_{p}^{r}(B_{p}-A_{p})\left(\prod_{p'\neq p}\frac{B_{p}-A_{p'}}{B_{p}-B_{p'}}\right)$, что совпадает, после подстановки $A_{p}=e^{a_{p}}$, $B_{p}=e^{b_{b}}$ с $D^{Y}(\hbar e^{rv}\exp(\gamma v)|_{v^{n}=h_{n}})$. Аналогично, рассматривая разложение в окрестности бесконечности, мы получаем, что $D^{Y}(\hbar e^{rv}\exp(\gamma v)|_{v^{-n-1}=h_{n}})$ совпадает с $(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2}-e^{-\hbar/2}})D^{U}(\varphi_{r})$. Лемма доказана.

Легко видеть, что из доказанной леммы вытекает равенство : $[\Phi(E_r),\Phi(F_l)] = \dfrac{\Phi(\psi_{r+s})-\Phi(\varphi_{r+s})}{e^{\hbar/2}-e^{-\hbar/2}}$, так как в силу, по существу, доказанной ранее инъективности отображения D^U, следующей из лемм 1 и 2, левая часть доказываемого равенства равна $e^{kv}\exp(\gamma v)|_{v^n=h_n}$. Из второй леммы и инъективности отображения D^Y, следует, что и правая часть доказываемого равенства равна $e^{kv}\exp(\gamma v)|_{v^n=h_n}$. Теорема доказана.

Сводится к доказанному частному случаю и результату, полученному Gautam и Toledano Laredo.

Приложения

Теория представлений янгианов и квантовых аффинных супералгебр. Конструкция точного функтора между категориями представлений.

Классический предел

$$\Phi = \exp^* : U(\mathfrak{g}[z, z^{-1}]) \to U(\mathfrak{g}[s]), \exp^*(X \otimes z^k) = X \otimes e^{ks}.$$

V. Stukopin Representations of the Yangian of a Lie superalgebra of type A(m,n). – Izvestija Mathematics. -- 77(2013), No 5, 1021--1043 pp.

Stukopin V. Yangian of the strange Lie superalgebra and its double. – Theoretical and mathematical physics, v.174(2013), no 1, p. 140 – 153.

S. Gautam, V. Toledano Laredo Yangians and Quantum Loop Algebras.– arXiv:1012.3687 [math.QA]

H. Chen, N. Guay Twisted affine Lie superalgebra of type Q and quantization of its enveloping superalgebra. – preprint.

S. Gautam, V. Toledano Laredo Meromorphic tensor equivalence for Yangians and quantum loop algebras. – arXiv:1403.5251 [math.QA]

S. Gautam, V. Toledano Laredo Yangians, quantum loop algebras and abelian difference equations. – arXiv:1310.7318 [math.QA].

V. Stukopin Isomorphism between super Yangian and quantum loop superalgebra. – arXiv:math/1804. 06678 [math.QA].

Спасибо за внимание