Коэффициенты Клебша-Гордана для алгебры $\mathfrak{gl}_3$

Д.В. Артамонов[1]

[1]МГУ им. М.В. Ломоносова

Пусть U, V - конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$. Тензорное произведение $U \otimes V$ раскладывается в прямую сумму неприводимых

$$U \otimes V = \sum_{\alpha} W^{\alpha}, \tag{1}$$

Пусть $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ - базисы в U, V, а $\{w_k^{\alpha}\}$ - базис W^{α}. Имеет место разложение

$$w_k^{\alpha} = \sum_{i,j} C_k^{i,j}(\alpha) u_i \otimes v_j, \tag{2}$$

коэффициенты $C_k^{i,j}(\alpha)$ называются коэффициентами Клебша-Гордана.

Вычисление в общем случае: Biedenharn, Baird, Louck, 1963-1973: НИЧЕГО НЕ ПОНЯТНО!!!

Самая известная попытка вычислить в явном виде: S. Prakash, H. S. Sharatchandra, 1996: ФОРМУЛЫ

$$C_k^{i,j}(\alpha) = ...$$

НЕТ!!!

Алгоритмическое вычисление: A. Alex, M. Kalus, A. Huckleberry, J. Delft, 2010: ЕСТЬ ОНЛАЙН КАЛЬКУЛЯТОР!!!

На функцию $f(g)$, $g \in GL_3$ элемент группы $X \in GL_3$ действует с помощью правых сдвигов по правилу

$$(Xf)(g) = f(gX).$$

Пусть a_i^j есть функция матричного элемента, стоящего в строке j и столбце i. Введём определители

$$a_{i_1,\dots,i_k} := det(a_i^j)_{i=i_1,\dots,i_k}^{j=1,\dots,k}.$$

Оператор $E_{i,j}$ действует на определитель путем действия на столбцовые индексы

$$E_{i,j}a_{i_1,\dots,i_k} = a_{\{i_1,\dots,i_k\}|_{j\mapsto i}}. \quad (3)$$

Тензорное произведение представлений можно реализовать как функцию на произведении $GL_3 \times GL_3$.

a_i^j - матричные элементы первого множителя GL_3,

b_i^j - матричные элементы второго множителя GL_3.

$$(ab)_{i_1,i_1} = det\begin{pmatrix} a_i^1 \\ b_i^1 \end{pmatrix}_{i=i_1,i_2}, \quad (aabb)_{i_1,i_2,i_1,i_3} = a_{i_1,i_2}b_{i_1,i_3} - a_{i_1,i_3}b_{i_1,i_2},$$

$$(aab) = det\begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ b_i^1 \end{pmatrix}_{i=1,2,3}, \quad (abb) = det\begin{pmatrix} a_i^1 \\ b_i^1 \\ b_i^2 \end{pmatrix}_{i=1,2,3}$$

$$U \simeq [m_1, m_2, 0], \quad V \simeq [\bar{m}_1, \bar{m}_2, 0]$$

$$f(\omega, \varphi, \psi, \theta) = \frac{a_1^{\alpha} b_1^{\beta} a_{1,2}^{\gamma} b_{1,2}^{\delta} (ab)_{1,2}^{\omega} (abb)^{\varphi} (aab)^{\psi} (aabb)_{1,2,1,3}^{\theta}}{\alpha! \beta! \gamma! \delta! \varphi! \psi! \omega! \theta!}$$

Theorem

Пространство gl_3-старших векторов в тензорном произведенеии имеет базис, состоящий из векторов типа

$$f(0, \varphi, \psi, \theta), \quad \begin{cases} \varphi, \psi, \theta \geq 0, \\ \alpha + \varphi = m_1 - m_2 \quad \gamma + \theta + \psi = m_2, \\ \beta + \psi = \bar{m}_1 - \bar{m}_2, \quad \delta + \varphi + \theta = \bar{m}_2, \end{cases} \tag{4}$$

и типа

$$f(\omega, \varphi, \psi, 0), \quad \begin{cases} \omega, \varphi, \psi \geq 0, \\ \alpha + \omega + \varphi = m_1 - m_2, \quad \gamma + \theta + \psi = m_2, \\ \beta + \omega + \psi = \bar{m}_1 - \bar{m}_2, \quad \delta + \varphi + \theta = \bar{m}_2, \end{cases} \tag{5}$$

Фиксируем $\mathfrak{gl}_3$-старший вектор в $U \otimes V$ типа $f(\omega, \varphi, \psi, 0) \to [M_1, M_2, M_3]$. Берём в нем вектор

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & & M_2 & & & & M_3 \\ & & M_1 - T_1 & & & & M_2 - T_2 & & \\ & & & & M_1 - T_1 - S & & & & \end{pmatrix}, \tag{6}$$

Фиксируем разложения

$$\begin{aligned} &T_1 =: T_1' + T_1'' + T_1''' + T_1'''', \\ &T_2 =: T_2' + T_2'', \\ &T_1'' + T_2'' + \omega =: L_1 + L_2, \\ &S =: S' + S'', \end{aligned} \tag{7}$$

а также фиксируем произвольные $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Theorem

$$\begin{pmatrix} M_1 & & M_2 & & M_3 \\ & M_1 - T_1 & & M_2 - T_2 & \\ & & M_1 - T_1 - S & & \end{pmatrix} =$$

$$= \sum const \cdot \begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & m_1 - T_1' - A & & m_2 - T_1''' - T_2' + A & \\ & & m_1 - T_1' - S' - L_1 & & \end{pmatrix} \otimes$$

$$\otimes \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & & \bar{m}_2 & & 0 \\ & \bar{m}_1 - T_1'' - B & & \bar{m}_2 - T_1'''' - T_2'' + B & \\ & & \bar{m}_1 - T_1'' - S'' - L_2 & & \end{pmatrix}$$

Коэффициента при произведении приведён ниже (??)

Фиксируем $\mathfrak{gl}_3$-старший вектор в $U \otimes V$ типа $f(\omega, \varphi, \psi, 0) \to [M_1, M_2, M_3]$. Берём в нем вектор

$$
\begin{tikzcd}
M_1 & & M_2 & & 0 \\
& M_2 + T_2 \arrow[ur, "T_2"'] & & T_1 \arrow[ur, "T_1"'] & \\
& & T_1 + S \arrow[ur, "S"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

Theorem

$$\begin{pmatrix} M_1 & & M_2 & & 0 \\ & M_2+T_2 & & T_1 & \\ & & T_1+S & & \end{pmatrix} =$$

$$\sum const \begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & m_2+T_1'''+T_2'-A & & T_1'+A & \\ & & T_1'+S'+L_1 & & \end{pmatrix} \otimes$$

$$\otimes \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & & \bar{m}_2 & & 0 \\ & \bar{m}_2+T_1''''+T_2''+B & & T_1''+B & \\ & & T_1''+S''+L_2 & & \end{pmatrix}$$

коэффициент такой же как ранее, с точностью до знака

$$(-1)^{T_1'''+T_1''''+T_1''+T_2''+\omega+\theta}.$$

Пусть $B \subset \mathbb{Z}^N$ - решётка, а $\gamma \in \mathbb{Z}^N$ - фиксированный вектор. Гипергеометрический Γ-ряд

$$F_{\gamma,B}(z) = \sum_{b \in B} \frac{z^{b+\gamma}}{\Gamma(b+\gamma+1)}, \tag{9}$$

где $z = (z_1, ..., z_N)$ и

$$z^{b+\gamma} := \prod_{i=1}^{N} z_i^{b_i+\gamma_i}, \quad \Gamma(b+\gamma+1) := \prod_{i=1}^{N} \Gamma(b_i+\gamma_i+1).$$

Выбираем старший вектор

$$\frac{a_1^{m_1-m_2}a_{1,2}^{m_2}}{(m_1-m_2)!m_2!} \sim [m_1, m_2, 0]$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & k_1 & & k_2 & \\ & & s & & \end{pmatrix}$$

Theorem

Положим $B = \mathbb{Z} < (1, -1, -1, 1) >$,
$\gamma = (s_1 - m_2, k_1 - s_1, m_2 - k_2, 0)$, тогда диаграмме соответствует функция

$$\frac{a_3^{m_1-k_1}}{(m_1-k_1)!}\frac{a_{1,2}^{k_2}}{k_2!}F_{\gamma,B}(a_1, a_2, a_{1,3}, a_{2,3})$$

Представление со старшим вектором типа $f(\omega,\varphi,\psi,0)$,

$$\begin{pmatrix} M_1 & & M_2 & & M_3 \\ & M_1 - T_1 & & M_2 - T_2 & \\ & & M_1 - T_1 - S & & \end{pmatrix} \leftrightarrow F(a_i^j, b_k^l) \tag{10}$$

Нам нужно

1. Найти $F(a_i^j, b_k^l)$
2. Представить

$$F(a_i^j, b_k^l) = \sum_{\xi} const_{\xi} \cdot \frac{a_3^{u_\xi}}{u_\xi!}\frac{a_{1,2}^{v_\xi}}{v_\xi!} F_{\gamma^\xi}(a_1, a_2, a_{1,3}, a_{2,3}) \cdot$$
$$\cdot \frac{b_3^{g_\xi}}{g_\xi!}\frac{b_{1,2}^{h_\xi}}{h_\xi!} F_{\delta^\xi}(b_1, b_2, b_{1,3}, b_{2,3})$$

Старший вектор

$$f_0 = f(\omega, \varphi, \psi, 0) = \frac{a_1^{\alpha} b_1^{\beta} a_{1,2}^{\gamma} b_{1,2}^{\delta} (ab)_{1,2}^{\omega} (abb)^{\varphi} (aab)^{\psi}}{\alpha! \beta! \gamma! \delta! \varphi! \psi! \omega!}$$

Вектор, соотвествующий диаграмме, записывается так:

$$\frac{E_{2,1}^{S}}{S!} \frac{E_{3,2}^{T_2}}{T_2!} \frac{\nabla_{3,1}^{T_1}}{T_1!} f_0,$$

$$\nabla_{3,1} = E_{3,1} + (E_{1,1} - E_{2,2} + 1)^{-1} E_{3,2} E_{2,1}$$

Применим $\frac{\nabla_{3,1}^{T_1}}{T_1!}$ к

$$f_0=\frac{a_1^{\alpha}b_1^{\beta}a_{1,2}^{\gamma}b_{1,2}^{\delta}(ab)_{1,2}^{\omega}(abb)^{\varphi}(aab)^{\psi}}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\varphi!\psi!\omega!}$$

получаем

$$\sum_{k_1+k_3+\varphi'+\psi'=T_1} d_{k_1+k_3,\varphi'+\psi'}^{M_1-M_3}\frac{\Phi!}{\varphi!\varphi'!}\frac{\Psi!}{\psi!\psi'!}$$
$$\frac{a_1^{\alpha-k_1-\varphi'}}{(\alpha-k_1-\varphi')!}\frac{b_1^{\beta-k_3-\psi'}}{(\beta-k_3-\psi')!}\frac{a_{1,2}^{\gamma-\psi'}}{(\gamma-\psi')!}\frac{b_{1,2}^{\delta-\varphi'}}{(\delta-\varphi')!}\frac{(ab)_{1,2}^{\omega}}{\omega!}\cdot \qquad (11)$$
$$\cdot\frac{a_3^{k_1}}{k_1!}\frac{b_3^{k_3}}{k_3!}\frac{(aab)^{\Psi}}{\Psi!}\frac{(abb)^{\Phi}}{\Phi!},$$

где

$$d_{k,n-k}^{h}=(-1)^{n-k}k!(n-k)!\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{n-k}\leq n}(h+1-i_1)^{-1}\ldots(h+1-i_k)^{-1}$$

Lemma

$$\frac{(abb)^{\Phi}}{\Phi!}\frac{(aab)^{\Psi}}{\Psi!}\frac{(ab)_{1,2}^{\omega}}{\omega!}=\sum_{\alpha}X_{\alpha}a_3^{u_{\alpha}}a_{1,2}^{v^{\alpha}}(a_2a_{1,3}-a_1a_{2,3})^{p_{\alpha}}\cdot$$
$$\cdot\, b_3^{g_{\alpha}}b_{1,2}^{h_{\alpha}}(b_2b_{1,3}-b_1b_{2,3})^{q_{\alpha}}F_{\theta^{\alpha}}(a)G_{\vartheta^{\alpha}}(b),$$

Lemma

$$a_1^uF_{\gamma}=\sum_{\alpha}Y_{\alpha}(a_2a_{1,3}-a_1a_{2,3})^{p_{\alpha}}F_{\gamma^{\alpha}}$$

Lemma

$$\frac{E_{3,2}^n}{n!}\frac{a_3^{m_1-k_1}}{(m_1-k_1)!}\frac{a_{1,2}^{k_2}}{k_2!}F_{\gamma}=\sum_{\alpha}Z_{\alpha}a_3^{i_{\alpha}}a_{1,2}^{j_{\alpha}}(a_1a_{2,3}-a_2a_{1,3})^{r_{\alpha}}F_{\varepsilon^{\alpha}}$$

$$F_{\gamma,B}(a_1, a_2, a_{1,3}, a_{2,3}), \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{1,3}, 0)$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_{2,3}} - \frac{\partial^2}{\partial a_2 \partial a_{1,3}}\right) F_{\gamma,B} = 0, \\
&a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} F_{\gamma,B} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} F_{\gamma,B} = (\gamma_1 + \gamma_2) F_{\gamma,B}, \\
&a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} F_{\gamma,B} + a_{1,3} \frac{\partial}{\partial a_{1,3}} F_{\gamma,B} = (\gamma_1 + \gamma_{1,3}) F_{\gamma,B}, \\
&a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} F_{\gamma,B} - a_{2,3} \frac{\partial}{\partial a_{2,3}} F_{\gamma,B} = (\gamma_1 - \gamma_{2,3}) F_{\gamma,B}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Сингулярное множество: $a_1 a_2 a_{1,3} a_{2,3}(a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3}) = 0$
Асимптотическое поведение:

$$F_{\gamma,B} \mid_{a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3} = 0} = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_{1,3}^{\gamma_{1,3}} F_{\gamma}(\mathbf{1}),$$

$$F_{\gamma}(\mathbf{1}) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_1 + 1)\Gamma(\gamma_2 + 1)\Gamma(\gamma_{1,3} + 1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{1,3} + 1)}{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 + 1)\Gamma(\gamma_1 + \gamma_{1,3} + 1)}$$

$$a_1^u F_\gamma = \sum_\alpha Y_\alpha (a_2 a_{1,3} - a_1 a_{2,3})^{p_\alpha} F_{\gamma^\alpha}$$

Чтобы найти члены справа с $p_\alpha = 0$ делаем подстановку $|_{a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3} = 0}$. Получаем

$$a_1^{u+\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_{1,3}^{\gamma_{1,3}} F_\gamma(\mathbf{1}) = Y_\alpha a_1^{\gamma_1^\alpha} a_2^{\gamma_2^\alpha} a_{1,3}^{\gamma_{1,3}^\alpha} F_{\gamma^\alpha}(\mathbf{1})$$

Чтобы найти члены с $p_\alpha > 0$ используем тождество

$$O\Big((a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3})^k F_\gamma\Big) = (k(k+1) + k(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{1,3}))\cdot$$
$$\cdot (a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3})^{k-1} F_\gamma$$

Поэтому, чтобы члены с $p_\alpha = p$ применяем O^p, а затем делаем подстановку $|_{a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3} = 0}$.

$$\frac{(abb)^{\Phi}}{\Phi!}\frac{(aab)^{\Psi}}{\Psi!}\frac{(ab)^{\omega}_{1,2}}{\omega!}=\sum_{\alpha}X_{\alpha}a_3^{u_{\alpha}}a_{1,2}^{v^{\alpha}}(a_2a_{1,3}-a_1a_{2,3})^{p_{\alpha}}\cdot$$

$$\cdot\, b_3^{g_{\alpha}}b_{1,2}^{h_{\alpha}}(b_2b_{1,3}-b_1b_{2,3})^{q_{\alpha}}F_{\theta^{\alpha}}(a)G_{\vartheta^{\alpha}}(b), \tag{13}$$

$$a_1^u F_{\gamma}=\sum_{\alpha}Y_{\alpha}(a_2a_{1,3}-a_1a_{2,3})^{p_{\alpha}}F_{\gamma^{\alpha}} \tag{14}$$

$$\frac{E^n_{3,2}}{n!}\frac{a_3^{m_1-k_1}}{(m_1-k_1)!}\frac{a_{1,2}^{k_2}}{k_2!}F_{\gamma}=\sum_{\alpha}Z_{\alpha}a_3^{i_{\alpha}}a_{1,2}^{j_{\alpha}}(a_1a_{2,3}-a_2a_{1,3})^{r_{\alpha}}F_{\varepsilon^{\alpha}} \tag{15}$$

Нужно найти $\frac{E^S_{2,1}}{S!}\frac{E^{T_2}_{3,2}}{T_2!}\frac{\nabla^{T_1}_{3,1}}{T_1!}f_0$.

Для $\frac{\nabla^{T_1}_{3,1}}{T_1!}f_0$ имеем

$$\sum_{k_1+k_3+\varphi'+\psi'=T_1} d^{M_1-M_3}_{k_1+k_3,\varphi'+\psi'}\frac{\Phi!}{\varphi!\varphi'!}\frac{\Psi!}{\psi!\psi'!}\frac{a_3^{k_1}}{k_1!}\frac{b_3^{k_3}}{k_3!}\frac{a_{1,2}^{\gamma-\psi'}}{(\gamma-\psi')!}\frac{b_{1,2}^{\delta-\varphi'}}{(\delta-\varphi')!}$$

$$\overbrace{\frac{a_1^{\alpha-k_1-\varphi'}}{(\alpha-k_1-\varphi')!}\frac{b_1^{\beta-k_3-\psi'}}{(\beta-k_3-\psi')!}\underbrace{\frac{(ab)^{\omega}_{1,2}}{\omega!}\frac{(aab)^{\Psi}}{\Psi!}\frac{(abb)^{\Phi}}{\Phi!}}_{\text{первое тождество}}}^{\text{второе тождество}},$$

$$\underbrace{\cdot}_{\text{первое тождество}} = \sum_{\alpha} X_{\alpha}\, a_3^{u_\alpha} a_{1,2}^{v^\alpha}(a_2a_{1,3}-a_1a_{2,3})^{p_\alpha}\cdot b_3^{g_\alpha} b_{1,2}^{h_\alpha}(b_2b_{1,3}-b_1b_{2,3})^{q_\alpha} F_{\theta\alpha}(a)G_{\vartheta\alpha}(b)$$

Применение $\frac{E^{T_2}_{3,2}}{T_2!}$ - третее тождество

Применение $\frac{E^{S}_{2,1}}{S!}$ - просто.

В результате - выражение вида

$$\frac{E_{2,1}^{S}}{S!}\frac{E_{3,2}^{T_2}}{T_2!}\frac{\nabla_{3,1}^{T_1}}{T_1!}f_0=\sum_{\xi}const_{\xi}\cdot\frac{a_3^{u_\xi}}{u_\xi!}\frac{a_{1,2}^{v_\xi}}{v_\xi!}F_{\gamma^{\xi}}(a)\cdot$$

$$\cdot\frac{b_3^{g_\xi}}{g_\xi!}\frac{b_{1,2}^{h_\xi}}{h_\xi!}F_{\delta^{\xi}}(b)$$

Рассмотрим сопоставление

$$a_3 \leftrightarrow a_{1,2}, \quad a_1 \leftrightarrow a_{2,3}, \quad a_2 \leftrightarrow -a_{1,3}$$

1. $$(-1)^{s+t_2}\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & m_1-t_1 & & m_2-t_2 & \\ & & m_1-t_1-s & & \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_1 & & m_1-m_2 & & 0 \\ & m_1-m_2+t_2 & & t_1 & \\ & & t_1+s & & \end{pmatrix}$$

2. $$...(aabb)^{\theta}_{2313}(abb)^{\phi}(aab)^{\psi} \mapsto ...(-1)^{\theta}(ab)^{\theta}_{12}(aab)^{\phi}(abb)^{\psi}.$$

Фиксируем разложения

$$
\begin{gathered}
T_1' =: k_1 + \varphi_3 + q + q_2, \;\; T_1'' =: \varphi_1 + \varphi_2, \\
T_1'' =: k_3 + \psi_3 + q + q_3, \;\; T_1'''' =: \psi_1 + \psi_2, \\
\omega_2 := L_1 - \varphi_2 - \psi_1, \;\; \omega_1 := L_2 - \psi_1 - \varphi_2 \\
A =: t + r + U, \;\; B =: s + l + V
\end{gathered} \tag{16}
$$

И вводим обозначения

$$
\begin{gathered}
q_1 := q - q_2 - q_3, \;\; H := S', \;\; J = S'', \\
N_1 = U, \;\; N_2 = T_2' - U, \;\; M_1 = V, \;\; M_2 = T_2'' - V,
\end{gathered} \tag{17}
$$

$$
(-1)^{t+s+r+l} d^{M_1-M_3}_{k_1+k_3,\varphi'+\psi'} \frac{\Phi!}{\varphi!\varphi'!} \frac{\Psi!}{\psi!\psi'!} i_\alpha! j_\alpha! o_\alpha! e_\alpha! \cdot
$$

$$
\cdot \frac{X^{\theta^\alpha,\vartheta^\alpha,q_i}_{\psi_i,\varphi_i,\omega_i} Y^{\theta^\alpha,\alpha-k_1-\varphi'}_t Y^{\vartheta^\alpha,\beta-k_3-\psi'}_s Z^{\gamma^t,u_\alpha+q+k_1+t}_{N_1,N_2,P} Z^{\delta^s,g_\alpha+q+k_3+s}_{M_1,M_2,P}}{(\alpha-k_1-\varphi)!(\beta-k_3-\psi)!(\gamma-\psi)!(\delta-\varphi)!k_1!k_3!} \cdot
$$

$$
\cdot (u_\alpha+q+k_1+t)!(v^\alpha+q+\gamma-\psi'+t)! \cdot
$$

$$
\cdot (g_\alpha+q+k_3+s)!(h_\alpha+q+\delta-\varphi'+s)! \tag{18}
$$

$$d^h_{k,n-k}=(-1)^{n-k}k!(n-k)!\sum_{1\le i_1<...<i_{n-k}\le n}(h+1-i_1)^{-1}...(h+1-i_k)^{-1}$$

$$\begin{cases}
u_\alpha=\varphi_3+q_2,\ \ v_\alpha=\psi_3+q_3,\ \ \ g_\alpha=\psi_3+q_3,\ \ h_\alpha=\varphi_3+q_2,\\
\theta^\alpha_1=\varphi_1+\omega_1-\psi_1,\ \theta^\alpha_2=\varphi_2+\omega_2+\psi_1,\ \theta^\alpha_{1,3}=\psi_2+\psi_1,\\
\vartheta^\alpha_1=\psi_1+\omega_2-\varphi_1,\ \vartheta^\alpha_2=\psi_2+\omega_1+\varphi_1,\ \vartheta_{1,3}=\varphi_2+\varphi_1,\\
X_\alpha=\frac{1}{\prod_{t=1}^q(t(t+1)+t(\theta^\alpha_1+\theta^\alpha_2+\theta^\alpha_{1,3}))\cdot\prod_{t=1}^q(t(t+1)+t(\vartheta^\alpha_1+\vartheta^\alpha_2+\vartheta^\alpha_{1,3}))}\cdot\\
\cdot\frac{(-1)^{\varphi_2+\psi_2+\omega_2}}{\varphi_1!\varphi_2!\varphi_3!\psi_1!\psi_2!\psi_3!\omega_1!\omega_2!}\frac{1}{F_{\theta^\alpha}(\mathbf{1})F_{\vartheta^\alpha}(\mathbf{1})}\cdot(-1)^{q_2+q_3}\cdot q!\cdot h^{\Phi,\Psi,\omega}_{q_1,q_2,q_3},\\
h^{\Phi,\Psi,\omega}_{q_1,q_2,q_3}=\sum_{\{1,...,q\}=I_1\sqcup I_2\sqcup I_3,|I_j|=q_j}\prod_{j\notin I_2\sqcup I_3}((q-j)+\\
+(\Phi-\{\text{number of } i_s\in I_2 \text{ such that } i_s<j\})+(\Psi-\\
-\{\text{number of } i_s\in I_3 \text{ such that } i_s<j\})+\omega)
\end{cases}$$

$$\gamma_1^\alpha = \gamma_1 + u,$$
$$\gamma_2^\alpha = \gamma_2 - p,$$
$$\gamma_{1,3}^\alpha = \gamma_{1,3} - p,$$
$$Y_\alpha = Y_p^{\gamma,u} = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-k+1)} \cdot \frac{F_\gamma(\mathbf{1})}{F_{\gamma^\alpha}(\mathbf{1})} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\prod_{t=p}^{1}(t(t+1) + t(\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha + \gamma_{1,3}^\alpha))}$$

где

$$F_\gamma(\mathbf{1}) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_1+1)\Gamma(\gamma_2+1)\Gamma(\gamma_3+1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma_1+1)\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+1)}{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2+1)\Gamma(\gamma_1+\gamma_3+1)}$$

$$i_\alpha = m_1 - k_1 + n_1, \quad j_\alpha = k_2 - n_2,$$
$$\varepsilon_1^\alpha = \gamma_1,$$
$$\varepsilon_2^\alpha = \gamma_2 - n_1 - r,$$
$$\varepsilon_{1,3}^\alpha = \gamma_{1,3} + n_2 - r,$$
$$Z_\alpha = Z_{n_1,n_2,r}^{\gamma,m_1-k_1} = \frac{1}{\prod_{t=1}^{r}(t(t+1) + t(\varepsilon_1^\alpha + \varepsilon_2^\alpha + \varepsilon_{1,3}^\alpha))} \frac{F_{\gamma - n_2 e_2}(\mathbf{1})}{F_{\gamma^\alpha}(\mathbf{1})} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{(m_1-k_1)!n_1!(k_2-n_2)!n_2!}$$

$$U \otimes V = \sum_{\alpha} W^{\alpha}, \tag{19}$$

Имеет место разложение

$$u_i \otimes v_j = \sum_{k,\alpha} C^{k}_{i,j}(\alpha) w^{\alpha}_{k} \tag{20}$$

Рассмотрим случай такого α, что

$$f_0 = \frac{a_1^{\alpha} b_1^{\beta} a_{1,2}^{\gamma} b_{1,2}^{\delta}}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}$$

В функциональной реализации

$$W(\alpha) = span < f(a)g(a) >$$

$$F_\gamma F_\delta = \sum_\alpha X_\alpha (z_1 z_4 - z_2 z_3)^{p_\alpha} F_{\theta^\alpha}.$$

Theorem

В этом разложении для каждого $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеется единственное слагаемое с $p_\alpha = p$, для него

$$\begin{cases} \theta_1^\alpha = \gamma_1 + \delta_1 \\ \theta_2^\alpha = \gamma_2 + \delta_2 - p \\ \theta_3^\alpha = \gamma_3 + \delta_3 - p \end{cases}, \quad ,$$

$$X_p = \frac{p! F_{B,(\gamma,\delta,p,0,0,0)}(\mathbf{1}^{10}, -1, -1)}{F_{\theta^\alpha}(\mathbf{1})} (\prod_{k=1}^{p} (k(k+1) + k(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + \theta_3^\alpha)).$$

Здесь $\mathbf{1}^{10}$ - десятимерный вектор, состоящий из единиц, а B...

$F_{B,(\gamma,\delta,p,0,0,0)}(\mathbf{1}^{10},-1,-1)$ есть значение в точке $(\mathbf{1}^{10},-1,-1)$ Г-ряда от 12 переменных $z_1,z_2,z_3,z_4,w_1,w_2,w_3,w_4,x_1,x_1',x_2,x_2'$. Этот ряд определяется постоянным вектором $(\gamma,\delta,p,0,0,0)$ и решёткой B, порождённой векторами

$$
\begin{aligned}
& e_{z_1}-e_{z_2}-e_{z_1}+e_{z_4}, \quad e_{w_1}-e_{w_2}-e_{w_3}+e_{w_4},\\
& e_{z_1}-e_{z_4}-e_{w_1}+e_{w_4}-e_{x_1}+e_{x_1'},\\
& e_{z_1}-e_{z_2}-e_{w_3}+e_{w_4}-e_{x_1}+e_{x_2},\\
& e_{z_1}-e_{z_3}-e_{w_2}+e_{w_4}-e_{x_1}+e_{x_2'}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & k_1 & & k_2 & \\ & & s & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{m}_1 & & \bar{m}_2 & & 0 \\ & \bar{k}_1 & & \bar{k}_2 & \\ & & \bar{s} & & \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} m_1+\bar{m}_1 & & m_2+\bar{m}_2 & & 0 \\ & k_1+\bar{k}_1-p & & k_2+\bar{k}_2+p & \\ & & s+\bar{s} & & \end{pmatrix} \tag{22}$$

Theorem

Пусть даны представления U, V алгебры $\mathfrak{gl}_3$ со старшими весами $[m_1, m_2, 0]$ и $[\bar{m}_1, \bar{m}_2, 0]$. Проекция на W^α тензорного произведения диаграмм (??) представляется как сумма по $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ диаграмм вида (??) с коэффициентом $(-1)^p X_p Y_p$

$$Y_p = \frac{((m_1+\bar{m}_1)-(k_1+\bar{k}_1)+p)!}{(m_1-k_1)!(\bar{m}_1-\bar{k}_1)!} \frac{(k_2+\bar{k}_2-p)!}{k_2!\bar{k}_2!} \tag{23}$$