Полубесконечная конструкция твистованных представлений алгебры Динга-Йохара

Р. Гонин

совместная работа с М. Берштейном

24 августа 2018

Аффинные алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$

- $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли
- $\langle x, y\rangle$ – инвариантная симметрическая форма
- $\mathfrak{g}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ – алгебра токов
- $\hat{\mathfrak{g}}$ – центральное расширение алгебры токов.

$$[x \otimes t^n, y \otimes t^m] = [x, y] \otimes t^{n+m} + n\langle x, y\rangle \delta_{n+m,0} C. \tag{1}$$

Аффинные алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$

- $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли
- $\langle x, y\rangle$ – инвариантная симметрическая форма
- $\mathfrak{g}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ – алгебра токов
- $\hat{\mathfrak{g}}$ – центральное расширение алгебры токов.

$$[x \otimes t^n, y \otimes t^m] = [x, y] \otimes t^{n+m} + n\langle x, y\rangle \delta_{n+m,0} C. \tag{1}$$

Пример $\hat{\mathfrak{sl}}_2$.

$$[h_n, e_m] = 2e_{n+m}, \quad [h_n, f_m] = -2f_{n+m}; \tag{2}$$

$$[e_n, f_m] = 2h_{n+m} + n\delta_{n+m,0} C; \tag{3}$$

$$[e_n, e_m] = [f_n, f_m] = 0, \quad [h_n, h_m] = 2nC. \tag{4}$$

Полубесконечная конструкция для представлений $\hat{\mathfrak{g}}$

- V – конечномерное представление $\mathfrak{g}$
- $v_1, \ldots, v_n$ – базис V
- $V[t, t^{-1}] = V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ –представление алгебры петель $\mathfrak{g}[t, t^{-1}]$. Оно называется evaluation представление.
- $v_i \otimes t^k = u_{kn+i}$ – базис evaluation представления
- полубесконечная степень $\Lambda^{\infty/2} V[z, z^{-1}]$ – векторное пространство, с базисом

$$u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_3} \wedge \cdots \wedge u_N \wedge u_{N+1} \wedge u_{N+2} \wedge \ldots \tag{5}$$

Полубесконечная конструкция для $\hat{\mathfrak{g}}$

Пусть $X \in \hat{\mathfrak{g}}$ имеет степень d. То есть $Xu_i \in \mathbb{C}u_{i+d}$. Более того, потребуем $d \neq 0$. Определим действие X по формуле

$$X(u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_3} \wedge \dots) = \sum_k u_{i_1} \wedge \dots \wedge X(u_{i_i}) \wedge \dots \tag{6}$$

Лемма

Лишь конечное число слагаемых в формуле 6 не равно нулю.

Теорема

На $\Lambda^{\infty/2}V[z, z^{-1}]$ действует алгебра $\hat{\mathfrak{g}}$.

Пример Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое (векторное) представление. Тогда $\hat{\mathfrak{gl}}_\mathfrak{n}$ действует на $\Lambda^{\infty/2}V[z, z^{-1}]$. При этом $C \mapsto 1$.

Пример для $\hat{\mathfrak{gl}}_1$

- Пусть $\mathfrak{gl}_1 = \mathbb{C}a$. Возьмём в качестве представление одномерное $V = \mathbb{C}$ и скажем, что $a \mapsto 1$.
- $a_k = a \otimes t^k$. Алгебра $\hat{\mathfrak{gl}}_1$ задана соотношением $[a_k, a_l] = \delta_{k+l,0} C$ (алгебра Гейзенберга).
- Представление $\Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}[z, z^{-1}] \cong \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F_m$.
- Представление F_m – фоковское. Это неприводимое представление, порождённое вектором

$$|m\rangle = t^{-m} \wedge t^{-m+1} \wedge t^{-m+2} \wedge \dots \tag{7}$$

Этот вектор характеризуется тем, что

$$a_k|m\rangle = 0 \text{ для } k > 0 \tag{8}$$

- Оператор a_0 на неприводимом представлении может действовать любой константой. Удобно считать, что a_0 на F_m действует умножением на m.

Алгебра q-разностных операторов $\mathfrak{Diff}_q$

- Ассоциативной алгеброй q-разностных операторов называется ассоциативная алгебра с единицей, порождённая элементами $x^{\pm 1}$ и $D^{\pm 1}$, удовлетворяющими соотношению $Dx = qxD$.
- $E_{a,b} := q^{ab/2} x^b D^a$
- Рассмотрим соответвующую алгебру Ли

$$[E_{m,n}, E_{r,s}] = (q^{(sm-nr)/2} - q^{(nr-sm)/2}) E_{m+r,n+s}$$

- $\mathfrak{Diff}_q$ – центральное расширение

$$[E_{m,n}, E_{r,s}] = (q^{(nr-sm)/2} - q^{(sm-nr)/2}) E_{m+r,n+s} x^{m+r} D^{n+s} +$$

$$+ \delta_{m,-r} \delta_{n,-s} (cm + c' n).$$

Полубесконечная конструкция для $\mathfrak{Diff}_q$

- $V = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ – аналог evaluation представления.
- $E_{a,b}x^k = q^{ab/2}x^b D^a x^k = q^{ab/2+ak}x^{b+k}$
- На $\Lambda^{\infty/2}V$ действует $\mathfrak{Diff}_q$. При этом $c \to 1$, $c' \to 0$. То есть

$$[E_{m,n}, E_{r,s}] = (q^{(nr-sm)/2} - q^{(sm-nr)/2})E_{m+r,n+s}x^{m+r}D^{n+s} + \delta_{m,-r}\delta_{n,-s}m$$

- $\Lambda^{\infty/2}V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{(n)}$
- $\mathcal{F}_{(n)}$ – неприводимое "фоковское"представление.
- Можно определить модули $\mathcal{F}_u$. При этом $\mathcal{F}_{(n)} = \mathcal{F}_{q^n}$

Другое описание $\mathcal{F}_u$

$$c \to 1, \quad c' \to 0, \tag{9}$$

$$E_{0,n} \to a_n. \tag{10}$$

Производящая функция $\sum_n E_{1,n} z^{-n}$

$$\frac{u}{1-q} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{q^{-n/2} - q^{n/2}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n<0} \frac{q^{-n/2} - q^{n/2}}{n} a_{-n} z^n\right) \tag{11}$$

Производящая функция $\sum_n E_{-1,n} z^{-n}$

$$\frac{u^{-1}}{1-q^{-1}} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n<0} \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{n} a_{-n} z^n\right). \tag{12}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ действие

$$\sigma = \begin{pmatrix} m' & m \\ n' & n \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

действует по формулам

$$\sigma(E_{a,b}) = E_{m'a+mb,n'a+nb} \tag{13}$$
$$\sigma(c') = m'c' + n'c \tag{14}$$
$$\sigma(c) = mc' + nc. \tag{15}$$

M – какой-то модуль. M^σ– "твистованный модуль".

- $M = M^\sigma$ как векторное простарнство
- другое действие $v \to \sigma(X)v$ другими словами $\rho_{M^\sigma} = \rho_M \circ \sigma$

.

Твистованное представление $\mathcal{F}^\sigma$

Задача

Описать явно $\mathcal{F}^\sigma$

Пример Мы ограничемся примером $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{F} \subset \Lambda^{\infty/2} V$
- $\mathcal{F}^\sigma \subset \Lambda^{\infty/2} V^\sigma$
- Надо описать явно V^σ
- Выберем базис $v_k = q^{k^2/4} x^k$. Действие в V^σ

$$E_{0,n} v_k = v_{k+2n} \tag{16}$$

$$E_{1,n} v_k = q^{n/2} q^{(2k-1)/4} v_{k+2n-1} \tag{17}$$

$$E_{-1,n} v_k = q^{-n/2} q^{-(2k+1)/4} v_{k+2n+1} \tag{18}$$

Твистованное представление $\mathcal{F}^\sigma$

Сопаставим $v_{2k} \to (z^k, 0)$, $v_{2k+1} \to (0, z^k)$
Получили гомоморфизм $\mathfrak{Diff}_q \to \mathfrak{Diff}_q \otimes \mathrm{Mat}_{2\times 2}$, индуцирующий изоморфизм $\mathbb{C}[x, x^{-1}]^\sigma = \mathbb{C}^2[z, z^{-1}]$

$$E_{0,n} \to \begin{pmatrix} E_{0,n} & 0 \\ 0 & E_{0,n} \end{pmatrix}$$

$$E_{1,n} \to \begin{pmatrix} 0 & q^{1/4} E_{1,n} \\ q^{-1/4} z^{-1} E_{1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1,n} \to \begin{pmatrix} 0 & q^{-3/4} z E_{-1,n} \\ q^{-1/4} E_{-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Твистованное представление $\mathcal{F}^\sigma$: следствия

- элементы $E_{(0,n)}$ образуют алгебру Гейзенберга $[E_{(0,n)}, E_{(0,m)}] = 2\delta_{n+m,0}$
- при ограничении на эту подалгебру $\mathcal{F}^\sigma \cong \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n$
- $E_{\pm 1,b} : F_n \to F_{n-1} \oplus F_{n+1}$

Твистованное представление $\mathcal{F}^\sigma$: следствия

- элементы $E_{(0,n)}$ образуют алгебру Гейзенберга $[E_{(0,n)}, E_{(0,m)}] = 2\delta_{n+m,0}$
- при ограничении на эту подалгебру $\mathcal{F}^\sigma \cong \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n$
- $E_{\pm 1,b} : F_n \to F_{n-1} \oplus F_{n+1}$
- явные формулы...
- тождества на q-деформированные конформные блоки

$$(\mp Z^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}})_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mp)^n Z^{n^2+\frac{n}{2}} P_n(q) \mathcal{F}(q^{2n+1/2}, q, q|Z), \tag{19}$$

где

$$(Z; t_1, t_2)_\infty = \prod_{i_1, i_2 = 0}^{\infty} (1 - t_1^{i_1} t_2^{i_2} Z) \tag{20}$$

$$P_n(q) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\left((1 - q^{j+1/2})(1 - q^{-j-1/2})\right)^{k-j}}. \tag{21}$$

Твистованное представление $\mathcal{F}^{\sigma}$: общее σ

Теперь рассмотрим случай общего σ. Точнее, пусть σ имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} m' & m \\ n' & n \end{pmatrix}$$

и $n \neq 0$.

Теорема

Имеется гомоморфизм из $\mathfrak{Diff}_q$ в $\mathfrak{Diff}_q \otimes Mat_{n\times n}$ индуцирующий отождествление $\mathbb{C}[x, x^{-1}]^{\sigma} = \mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$

$$E_{0,n} \mapsto z^n \tag{22}$$

$$E_{1,n} \mapsto \sum_{b-a\equiv n' \bmod n} z^{(b-a-n')/n} E_{1,n} : q^{(a+b)/n-1} \otimes e_{ab} \tag{23}$$

- На $\Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$ имеется естественное действие $\hat{\mathfrak{gl}}_n$.
- Вертексным оператором Ψ мы будем называть гомоморфизм представлений

$$\Psi : \mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \otimes \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \to \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \tag{24}$$

- Определим $\psi_a[k] : \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \to \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$ как ограничение Ψ на $v_a z^k \otimes \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$
- Аналогично определим Ψ^* (двойственный вертексный оператор)

$$\Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \to \mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \otimes \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$$

- Определим $\psi_a[k]^*$ применение Ψ^* и проекции на $v_a z^k \otimes \Lambda^{\infty/2}\mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$

Действие $\hat{\mathfrak{gl}}_n$ на $\mathcal{F}^\sigma$

Определим производящие функции

$$\psi_a(z) = \sum_i \psi_a[i] z^{-i-1}; \quad \psi_b^*(z) = \sum_i \psi_b^*[i] z^{-i}. \tag{25}$$

Мы можем выразить

$$\sum E_{1,n} z^{-n} = \sum_{b-a \equiv n' \bmod n} \psi_a(q^{-1/2} z^n) \psi_b^*(q^{1/2} z^n) z^{1+\frac{b-a-n'}{n}} q^{(a+b)/n-1}$$

Алгебра Динга-Йохара

- Алгебра Динга-Йохара зависит от двух параметров q_1, q_2.
- Специализация алгебры Динга-Йохара в точке $q_1 = q_2^{-1} = q$ даёт алгебру $\mathfrak{Diff}_q$
- Роль q_1 и q_2 в определении симметрична. Более того, мы можем ввести $q_3 = q_1^{-1} q_2^{-1}$. Роль всех трёх q_i в определении симметрична.
- Алгебра Динга-Йохара порождена E_n, F_n и H_n. Они переходят в $E_{1,n}, E_{-1,n}$ и $E_{0,n}$ в пределе $q_3 \to 1$.
- Есть два центральных элемента C, $C^{\perp}$
- Алгебра Динга-Йохара имеет большое значение в математическое физике (связана с суперсимметричными калибровочными теориями) и алгебраической геометрии (алгебра Холла когерентных пучков на эллиптической кривой)

Алгебра Динга-Йохара: соотношения

$$[H_r, H_s] = r\frac{C^r - C^{-r}}{\kappa_r}\delta_{r+s,0} \tag{26}$$

$$[H_r, E_m] = -C^{\frac{-r-|r|}{2}}E_{m+n}, \qquad [H_r, F_m] = C^{\frac{-r+|r|}{2}}F_{m+n}. \tag{27}$$

Квадратичные

$$f(z,w)E(z)E(w) = -f(w,z)E(w)E(z) \tag{28}$$

$$f(w,z)F(z)F(w) = f(z,w)F(w)F(z) \tag{29}$$

где $f(z,w) = (z - q_1 w)(z - q_2 w)(z - q_3 w)$

$$[E(z), F(w)] = \frac{1}{\kappa_1}(\delta(\frac{Cw}{z})K^+(w) - \delta(\frac{Cz}{w})K^-(z))$$

где $K^{\pm}(z) = (C^{\perp})^{\pm 1}\exp\left(\sum_{r>0}\frac{\kappa_r}{\mp r}H_{\pm r}z^{\mp r}\right).$

$+$ кубические соотношения ("соотношения Серра")

Твистованное представление алгебры Динга-Йохара

- На алгебре Динга-Йохара действует группа $SL_2(\mathbb{Z})$ автоморфизмами.
- У Динга-Йохара $SL_2(\mathbb{Z})$ имеется фоковский модуль (точнее их три, свой для q_1, q_2 и q_3). Поэтому можно поставить вопрос явного описания $\mathcal{F}^\sigma$

Гипотеза (Берштейн, Г)

На $\mathcal{F}^\sigma$ имеется действие аффинной квантовой группы $U_{q_3}\mathfrak{gl}_n$ такое, что $E(z)$ и $F(z)$ выражаются как квадратичное выражение от вертексных операторов.

$$E(z) \approx \Phi_1(z)\Psi_2^*(q_1 z) + z\Phi_2(z)\Psi_1^*(q_1 z)$$

Гипотеза Горского-Негуца

- Имеется некоторое семейство базисов s_λ^α в $\mathcal{F}$, определённых для каждого $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. λ пробегает диаграммы Юнга.
- s_λ^α меняет только в точках $\alpha \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, при $n \leq |\lambda|$

Предложение (имени Леклерка-Тибона)

Имеется инволюция на $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ переводящая $q \mapsto q^{-1}$. $e_i \mapsto e_i$, $f_i \mapsto f_i$, $K_i \mapsto K_i^{-1}$. Эта инволюция спускается на фоковское представление $U_q(\mathfrak{gl}_n)$.

Гипотеза (Горский, Негуц)

- *Имеется действие $U_{q_3}\mathfrak{gl}_n$ на $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ отождествляется с фоковским представлением $U_{q_3}\mathfrak{gl}_n$*
- *Матрица перехода в точке m/n задаётся инволюцией Леклерка-Тибона.*
- *Действие Гейзенберга $U_{q_3}\mathfrak{gl}_n$ совпадает с действием Гейзенберга на $\mathcal{F}^\sigma$.*

Спасибо за внимание!