Взвешенные ПБВ вырождения

И. Махлин, Сколтех/НИУ ВШЭ

План

- классическое многообразие флагов и вложение Плюккера
- (абелевы) ПБВ вырождения (Feigin–Fourier–Littelmann 2010, Feigin 2010, Feigin 2011, Cerulli-Irelli–Feigin–Reineke 2011,...)
- взвешенные ПБВ вырождения («ФФЛВ вырождения», Fang–Feigin–Fourier–M. 2017)
- «вырождения Гельфанда–Цетлина» (WIP)

Вложение Плюккера

- $G = SL_n(\mathbb{C})$, $F = G/B$ — многообразие полных флагов
- L_λ — неприводимое представление со старшим весом λ
- вложение Плюккера: $F \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(L_{\omega_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(L_{\omega_{n-1}})$ (ω_k — фундаментальный вес)
- $L_{\omega_k} = \wedge^k(\mathbb{C}^n)$, в нем базис из $e_{i_1,\ldots,i_k} = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ по $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$
- $R = \mathbb{C}[\{X_{i_1,\ldots,i_k}\}]$ — однородное координатное кольцо $\mathbb{P}$, вложение Плюккера задается идеалом $I \subset R$

Другая реализация F

- N — противоположная B унипотентная подгруппа
- $v_\lambda \in L_\lambda$ — старший вектор, $\mathbb{C}Nv_\lambda = L_\lambda$
- $\mathbb{v}_\lambda \in \mathbb{P}(L_\lambda)$ — точка, соответствующая $\mathbb{C}v_\lambda$
- $F = \overline{N\mathbb{v}_\lambda} \subset \mathbb{P}(L_\lambda)$ для регулярного λ

Абелевы ПБВ вырождения I

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{n}_- = \mathrm{Lie} N$
- для пар $1 \leq i < j \leq n$ отрицательные корневые векторы $f_{i,j} \in \mathfrak{n}_-$
- ПБВ фильтрация: $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)_m$ — линейная оболочка мономов от $f_{i,j}$ степени не больше m
- Теорема ПБВ: присоединенная градуированная алгебра $\mathcal{U}^a = \bigoplus \mathcal{U}_m / \mathcal{U}_{m-1}$ — это симметрическая алгебра пространства n_- (т.е. $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-^a)$ для абелевой алгебры Ли $\mathfrak{n}_-^a$) с образующими $f_{i,j}^a$
- индуцированная фильтрация $(L_\lambda)_m = \mathcal{U}(\lambda)_m v_\lambda$, присоединенное градуированное пространство L_λ^a — $\mathcal{U}^a$-модуль (ПБВ вырождение представления)

Абелевы ПБВ вырождения II

- группа $N^a = \mathbb{G}_a^{\binom{n}{2}}$ с $\mathrm{Lie} N^a = \mathfrak{n}_-^a$
- N^a действует на $\mathbb{P}(L_\lambda^a)$
- в L_λ^a есть «старший вектор» v_λ^a, $\mathbb{v}_\lambda^a \in \mathbb{P}(L_\lambda^a)$ — соответствующая точка
- ПБВ вырождение многообразия флагов: $F^a = \overline{N^a \mathbb{v}_\lambda^a} \subset \mathbb{P}(L_\lambda^a)$ (λ — регулярный)

Вложение Плюккера для F^a

- $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-градуировка на R:
  $\mathrm{grad}^a X_{i_1,\dots,i_k} = |\{i_1,\dots,i_k\}\backslash\{1,\dots,k\}|$
- начальный идеал $\mathrm{in}_{\mathrm{grad}^a} I \subset R$ — линейная оболочка начальных частей (компонент минимальной градуировки) элементов I
- ***Теорема 1.*** Подмногообразие в $\mathbb{P}$, задаваемое идеалом $\mathrm{in}_{\mathrm{grad}^a} I$, изоморфно F^a.

Базисы Фейгина–Фурье–Литтелманна–Винберга

- целочисленному доминантному весу $\lambda = a_1\omega_1 + \ldots + a_{n-1}\omega_{n-1}$ сопоставляется многогранник ФФЛВ $P_\lambda \in \mathbb{R}^{\{1\le i<j\le n\}}$
- P_λ — множество точек $T = (T_{i,j})$, для которых
  1. $T_{i,j} \ge 0$ для любых $1 \le i < j \le n$
  2. $\sum_{(i,j)\in d} T_{i,j} \le a_i + \ldots + a_j$ для каждого пути Дика d из $(i, i+1)$ в $(j, j+1)$
- Π_λ — множество целых точек в P_λ
- ***Теорема 2.*** Множество $\{\prod_{i,j}(f^a_{i,j})^{T_{i,j}} v^a_\lambda,\ T \in \Pi_\lambda\}$ — базис в L^a_λ.
- **Следствие.** Множество $\{\prod_{i,j} f_{i,j}^{T_{i,j}} v_\lambda,\ T \in \Pi_\lambda\}$ — базис в L_λ (при любых порядках сомножителей в произведениях).

Взвешенные ПБВ вырождения

- сопоставим каждому отрицательному корню число $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ (*система весов* A)
- $\mathbb{Z}$-фильтрация на $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ задается

$$\mathcal{U}_m = \mathrm{span}(f_{i_1,j_1} \dots f_{i_N,j_N} | a_{i_1,j_1} + \dots + a_{i_N,j_N} \leq m)$$

(т.е. фильтруем по *взвешенной ПБВ степени*)

- присоединенная градуированная алгебра $\mathcal{U}^A$
- индуцированная фильтрация $(L_\lambda)_m = \mathcal{U}_m v_\lambda$
- присоединенное градуированное пространство L_λ^A — $\mathcal{U}^A$-модуль (вырожденное представление)

ФФЛВ вырождения I

- **Вопрос:** для каких взвешенных вырождений подходит базис ФФЛВ?
- **Ответ:** при
  (A) $a_{i,j} + a_{j,k} \geq a_{i,k}$ при $1 \leq i < j < k \leq n$ и
  (B) $a_{i,j} + a_{k,l} \geq a_{i,l} + a_{k,j}$ при $1 \leq i < k < j < l \leq n$
- $(\mathfrak{n}_-)_m = \bigoplus_{a_{i,j} \leq m} \mathbb{C} f_{i,j}$ — фильтрованная алгебра Ли в силу (A)
- присоединенная градуированная алгебра Ли — $\mathfrak{n}_-^A = \bigoplus \mathbb{C} f_{i,j}^A$
- $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-^A) = \mathcal{U}^A$
- аналог теоремы 2:
  Теорема 3. Множество $\{\prod_{i,j} (f_{i,j}^A)^{T_{i,j}} v_\lambda^A,\ T \in \Pi_\lambda\}$ — базис в L_λ^A.

ФФЛВ вырождения II

- связная односвязная группа Ли N^A с $\mathrm{Lie}(N^A) = \mathfrak{n}_-^A$
- N^A действует на $\mathbb{P}(L_\lambda^A)$
- в L_λ^a есть «старший вектор» v_λ^A, $\mathbb{v}_\lambda^a \in \mathbb{P}(L_\lambda^A)$ — соответствующая точка
- вырожденное многообразие флагов: $F^A = \overline{N^A \mathbb{v}_\lambda^A} \subset \mathbb{P}(L_\lambda^A)$ (λ — регулярный)
- для $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ пусть $\{p_1 < \ldots < p_l\} = \{1, \ldots, k\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$, а $\{q_1 > \ldots > q_l\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \backslash \{1, \ldots, k\}$
- градуировка на R: $\mathrm{grad}^A X_{i_1,\ldots,i_k} = a_{p_1,q_1} + \ldots + a_{p_l,q_l}$
- аналог теоремы 1:
  Теорема 4. Подмногообразие в $\mathbb{P}$, задаваемое идеалом $\mathrm{in}_{\mathrm{grad}^A} I$, изоморфно F^A.

Замечания

- точки, удовлетворяющие (A) и (B) — целые точки конуса K, для всех точек относительной внутренности любой грани K получаем одни и те же вырождения
- если все $a_{i,j} = 0$, то получаем невырожденный случай (и всегда, когда все неравенства (A) и (B) обращаются в равенства)
- если все $a_{i,j} = 1$, то получаем абелевы ПБВ вырождения (и всегда, когда все неравенства (A) — строгие, а все (B) — равенства)
- ***Теорема 5.*** Если A лежит во внутренности конуса K, то многообразие F^A — торическое многообразие многогранника ФФЛВ P_λ для регулярного λ.

Вопросы

- **Вопрос:** для каких торических вырождений многообразия флагов есть похожий теоретико-представленческий сюжет?
- **Уточняющий вопрос:** а нельзя ли что-нибудь похожее сказать для многогранников Гельфанда–Цетлина и соответствующих торических многообразий?
- **Ответ:** вроде можно!

Действие «вырожденной» алгебры

- ассоциативная алгебра Φ_n с образующими $\{\varphi_{i,j}, 1 \le i < j \le n\}$ и соотношениями $\varphi_{i_1,j_1}\varphi_{i_2,j_2} = 0$ при $i_1 > i_2$ и $\varphi_{i,j_1}\varphi_{i,j_2} = \varphi_{i,j_2}\varphi_{i,j_1}$ при $1 \le i < j_1 < j_2 \le n$
- для $1 \le k \le n-1$ подпространство $L_\lambda(k) \subset L_\lambda$ — порожденное из v_λ действием $\mathcal{U}(\bigoplus_{i \ge k} \mathbb{C}f_{i,j})$
- пусть $\varphi_{i,j}$ действует на весовых векторах из $L_\lambda(i)$ так же, как $f_{i,j}$, а на весовых векторах вне $L_\lambda(i)$ — нулем
- это действие Φ_n на пространстве L_λ

Вырождения Гельфанда–Цетлина I

- возьмем систему весов $A = (a_{i,j})$ такую, что
  (A1) $a_{i,j} + a_{j,k} \leq a_{i,k}$ при $1 \leq i < j < k \leq n$ и
  (B1) $a_{i,j} + a_{k,l} \leq a_{i,l} + a_{k,j}$ при $1 \leq i < k < j < l \leq n$
- проградуируем Φ_n при помощи $\deg^A \varphi_{i,j} = a_{i,j}$, однородные компоненты — $\Phi_{n,m}$
- фильтрация $\Phi_{n,\leq m} = \bigoplus_{l \leq m} \Phi_{n,l}$, присоединенная градуированная алгебра — опять Φ_n с той же градуировкой
- индуцированная фильтрация $(L_\lambda)_{\leq m} = \Phi_{n,\leq m} v_\lambda$, присоединенное градуированное пространство $\tilde{L}_\lambda^A$ — модуль над Φ_n

Вырождения Гельфанда–Цетлина II

- проблема: нет действия группы... зато есть экспонента!
- для $c \in \mathbb{C}^{\{1 \le i < j \le n\}}$ введем оператор $\exp(c) = \prod_{i,j} \exp(c_{i,j}\varphi_{i,j})$ на $\tilde{L}^A_\lambda$, в котором сомножители упорядочены по возрастанию i слева направо
- есть старший вектор $\tilde{v}^A_\lambda \in \tilde{L}^A_\lambda$ и соответствующая точка $\tilde{\mathbb{v}}^A_\lambda \in \mathbb{P}(\tilde{L}^A_\lambda)$
- вырожденное многообразие флагов $\tilde{F}^A$ — замыкание образа отображения из $\mathbb{C}^{\{1 \le i < j \le n\}}$ в $\mathbb{P}(\tilde{L}^A_\lambda)$, переводящего c в $\exp(c)\tilde{\mathbb{v}}^A_\lambda$
- ***Теорема 6.*** Пусть все неравенства (A1) и (B1) — строгие. Тогда $\tilde{F}^A$ — торическое многообразие многогранника Гельфанда–Цетлина GT_λ.