Аффинные торические SL_3-вложения

Н. Ю. Медведь

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова,
Факультет компьютерных наук Высшей Школы Экономики

18 августа 2018 г.

Основной объект

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

На неприводимом нормальном аффинном многообразии X действует группа $G = SL_n(\mathbb{K})$ с открытой орбитой.

Основной объект

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

На неприводимом нормальном аффинном многообразии X действует группа $G = SL_n(\mathbb{K})$ с открытой орбитой.

Такие многообразия можно представлять как замыкания G/H для некоторой подгруппы H. Отдельный интерес представляет случай $H = \{e\}$, то есть случай, когда G действует с тривиальным стабилизатором общей точки. Тогда говорят, что X — аффинное G-вложение.

Классификация SL_2-вложений

В 1973 году в статье «Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $\mathrm{SL}(2)$» В. Л. Поповым была получена полная классификация аффинных неприводимых нормальных многообразий с действием группы SL_2 с открытой орбитой.

В этой классификации аффинному неприводимому нормальному многообразию с действием группы SL_2 с открытой орбитой со стабилизатором $\mathbb{Z}_r$ соответствует пара $(\frac{p}{q}, r)$, где $p, q, r \in \mathbb{N}, 0 < \frac{p}{q} \leq 1$.

В 1973 году в статье «Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $\mathrm{SL}(2)$» В. Л. Поповым была получена полная классификация аффинных неприводимых нормальных многообразий с действием группы SL_2 с открытой орбитой.

В этой классификации аффинному неприводимому нормальному многообразию с действием группы SL_2 с открытой орбитой со стабилизатором $\mathbb{Z}_r$ соответствует пара $(\frac{p}{q}, r)$, где $p, q, r \in \mathbb{N}, 0 < \frac{p}{q} \leq 1$.

Отметим, что используемые методы существенно используют свойства группы SL_2 и не продолжаются на случай произвольного SL_n.

Напоминание: торические многообразия

Напомним, что нормальное алгебраическое многообразие X называется торическим, если на нём действует алгебраический тор $T = (\mathbb{K}^\times)^n$ так, что он вкладывается в X и действует при этом на себе левыми сдвигами.

Торические многообразия могут быть описаны комбинаторно, при этом соответствии неприводимые аффинные торические многообразия без обратимых функций соответствуют строго выпуклым полиэдральным конусам в $\mathbb{Q}^n$.

С. А. Гайфуллин, 2008: «Аффинные торические SL(2)-вложения».

- В терминах классификации аффинных многообразий с действием группы SL_2 с открытой орбитой указано, какие из них торические (ответ: когда r делится на $q - p$).
- При этом случай SL_2-вложения соответствует $r = 1$, то есть высоте $\frac{p}{p+1}$.
- Описаны конуса этих многообразий.

Описание результатов

Все аффинные торические многообразия с действием SL_3 с открытой орбитой могут быть получены как категорные факторы линейного представления $SL_3 \times Q$ по действию Q, где Q — некоторый квазитор. Результаты работы таковы:

1. описаны все подходящие представления;
2. среди них перечислены все те, для которых у получившегося фактора стабилизатор общей точки тривиален, то есть фактор является SL_3-вложением;
3. показано, что ранг группы классов дивизоров аффинного торического многообразия может равняться только 0,1,2 или 3;
4. приведён пример многообразия с двумя различными действиями SL_3 с открытой орбитой.

Простым дивизором Вейля D на многообразии X называется замкнутое подмногообразие коразмерности 1. Ими можно формально породить абелеву группу дивизоров Вейля $\mathrm{WDiv}(X)$.

Каждой рациональной функции f на многообразии соответствует так называемый *дивизор нулей и полюсов*. Дивизоры, получающиеся подобным образом, называют *главными дивизорами*, а подгруппу в группе дивизоров, из них состоящую, обозначим $\mathrm{PDiv}(X)$.

Факторгруппу $\mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PDiv}(X)$ называют *группой классов дивизоров* и обозначают $Cl(X)$.

Кольцо Кокса (общий случай)

Здесь и далее X предполагается неприводимым нормальным аффинным многообразием без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов дивизоров.

$$\mathcal{R}(X) = \bigoplus_{[D]\in Cl(X)} \mathcal{O}(X,D) \text{ — кольцо Кокса мн-я } X,$$

где $\mathcal{O}(X,D) = \{f | (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$.

$$Q : \mathfrak{X}(Q) = Cl(X) \text{ — характеристический квазитор}$$

$$\overline{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{R}(X) \text{ — тотальное координатное пространство}$$

$$\pi : \overline{X} \overset{//Q}{\twoheadrightarrow} X \text{ — реализация Кокса}$$

Свойства кольца Кокса

Теорема (см. книгу “Cox Rings”)

Пусть $\pi : \overline{X} \overset{//Q}{\to} X$ *— реализация Кокса, а* $\mu : G \times X \to X$ *— действие односвязной полупростой группы* G *на* X.

Тогда существует действие $\mu' : G \times \overline{X} \to \overline{X}$ *такое, что действия* G *и* Q *коммутируют, то есть* $\pi \circ \mu' = \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \pi)$.

Свойства кольца Кокса

Теорема (см. книгу “Cox Rings”)

Пусть $\pi : \overline{X} \overset{//Q}{\to} X$ *— реализация Кокса, а* $\mu : G \times X \to X$ *— действие односвязной полупростой группы* G *на* X.

Тогда существует действие $\mu' : G \times \overline{X} \to \overline{X}$ *такое, что действия* G *и* Q *коммутируют, то есть* $\pi \circ \mu' = \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \pi)$.

Теорема (D.Cox)

Если X *торическое, то* $\mathcal{R}(X)$ *— кольцо многочленов, то есть* $\overline{X}$ *— аффинное пространство.*

Сводим к модулям

Предложение

Пусть G — односвязная полупростая алгебраическая группа, действующая на аффинном многообразии X с открытой орбитой, а Q — характеристический квазитор многообразия X. Тогда X — торическое тогда и только тогда, когда существует $(G \times Q)$-модуль V с открытой $(G \times Q)$-орбитой такой, что X будет G-эквивариантно изоморфно категорному фактору V по действию Q. При этом $V//Q$ является реализацией Кокса многообразия X.

Таким образом, достаточно изучить $(G \times Q)$-модули с открытой орбитой такие, что $V \to V//Q$ является реализацией Кокса.

Критерий реализации Кокса

Теорема

Пусть на $V = \mathbb{K}^m$ *действует линейно квазитор* Q. *Обозначим веса координатных функций* x_i *через* $\overline{w_i} \in \overline{M} = \mathfrak{X}(Q)$. *Через* M *обозначим факторгруппу* $\overline{M}/\mathrm{Tor}(\overline{M})$, *образы* $\overline{w_i}$ *в факторгруппе обозначим* w_i.
Тогда V *с действием* Q *— тотальное координатное пространство аффинного торического многообразия* $V//Q$ *тогда и только тогда, когда для* $\{\overline{w_i}\}$ *выполнены следующие условия:*

1. *при удалении любого* $\overline{w_i}$ *оставшиеся порождают всю группу* $\overline{M}$;
2. *для любой гиперплоскости, содержащей начало координат, в каждом из образующихся открытых полупространств лежат хотя бы по два* w_i *с учётом кратности.*

Результаты

Теорема

Все подходящие $(SL_3 \times Q)$-модули V исчерпываются списком из нижеприведенной таблицы. При этом для модуля

$$V = \underbrace{\mathbb{K}^3 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}^3}_{k} \oplus \underbrace{\mathbb{K} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}}_{r}$$

тор T действует с весами $v_1, v_2, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_r$. Конечная часть квазитора действует произвольно так, чтобы действие квазитора было эффективно.

Результаты

Теорема

Все подходящие $(SL_3 \times Q)$-модули V исчерпываются списком из нижеприведенной таблицы. При этом для модуля

$$V = \underbrace{\mathbb{K}^3 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}^3}_{k} \oplus \underbrace{\mathbb{K} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}}_{r}$$

тор T действует с весами $v_1, v_2, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_r$. Конечная часть квазитора действует произвольно так, чтобы действие квазитора было эффективно.

V	$\dim Q$	условия на действие тора
$\mathbb{K}^3$	0	—

Результаты

V	$\dim Q$	условия на действие тора
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$	0	—
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$	1	v_1 и v_2 противоположно направлены и $\lvert v_1 \rvert, \lvert v_2 \rvert$ взаимно просты
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}$	1	v_1 и v_2 противоположно направлены, $\lvert v_1 \rvert$, $\lvert v_2 \rvert$ и $\lvert w_1 \rvert$ взаимно просты в совокупности
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$	2	v_1 и v_2 линейно независимы, w_1 и w_2 линейно независимы и лежат строго в конусе, порождённом $-v_1$ и $-v_2$; v_1, v_2, w_1, w_2 порождают решётку характеров тора
$\mathbb{K}^3 \oplus (\mathbb{K}^3)^*$	1	v_1 и v_2 противоположно направлены; $\lvert v_1 \rvert, \lvert v_2 \rvert$ взаимно просты и не равны одновременно 1

Результаты

V	$\dim Q$	условия на действие тора
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$	1	...
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$	2	...
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}$	2	...
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$	3	...
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus (\mathbb{K}^3)^*$	2	...

Случай тривиального стабилизатора

Теорема

Группа SL_3 действует на аффинном торическом многообразии X с открытой орбитой и тривиальным стабилизатором общей точки тогда и только тогда, когда X является категорным фактором аффинного пространства V по действию тора T, где действие T на V удовлетворяет одному из следующих условий:

Случай тривиального стабилизатора

V	$\dim T$	условия на действие тора
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$	1	$v_1 + v_2 + v_3 = \pm 1$
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}$	2	$\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$, система векторов v_1, v_2, v_3, w_1 порождает всю решетку, существует натуральное число a такое, что $\frac{1}{a} w_1$ и $v_1 + v_2 + v_3$ порождают всю решетку
$\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$	3	$\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 3$, система векторов v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 порождает всю решетку, существуют a_1 и a_2 такие, что $\frac{1}{a_1} w_1, \frac{1}{a_2} w_2$ и $v_1 + v_2 + v_3$ порождают всю решетку

Пример двух различных действий SL_3

Заметим, что в случае SL_2 вместо 20-ти приведённых выше случаев возможен был только один $(\mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^2)$, поэтому не возникало модулей равной размерности, но с разным разложением на неприводимые SL-модули. В случае же SL_3 не только возникают сопряженные модули, но возможна и ситуация, когда действие Q на V совместимо с двумя принципиально различными разложениями на SL-модули.

Пример

Рассмотрим пятимерное многообразие $X \cong \mathbb{A}^6 // \mathbb{K}^\times$, где $T = \mathbb{K}^\times$ действует с весами $(2, 2, 2, -1, -1, -1)$. Рассмотрим два действия SL_3 на $\mathbb{A}^6$, коммутирующих с действием T: действие на $\mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{K}^3$ и на $\mathbb{K}^3 \oplus (\mathbb{K}^3)^*$.
В первом случае на X возникают орбиты размерностей 5 (открытая), 3, 0. Во втором случае размерности орбит равны 5, 4, 0. Таким образом, действия различны.

Что не вошло в заявленный анонс?

Теорема

При $n \geq 4$ для любого d существует SL_n-вложение с группой классов $\mathbb{Z}^d$.

Набросок доказательства.

Мы рассматриваем модуль $\underbrace{\mathbb{K}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}^n}_{n} \oplus \underbrace{\mathbb{K} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}}_{d-1}$. Для него мы строим специальный набор весов $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_{d-1}$, удовлетворяющий условиям для реализации Кокса. При построении набора существенно используется то, что весов хотя бы $d+3$. Далее оказывается, что для этого набора открытой орбиты нет, но его можно скорректировать так, что все еще будет реализация Кокса, но у действия будет открытая орбита. $\square$

Спасибо!