Однородные локально нильпотентные дифференцирования триномиальных алгебр

Юлия Зайцева

МГУ

2018 год

Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. École Norm. Sup. 3 (1970), 507–588

Триномиальная алгебра

Триномиальная алгебра

Фиксируем $n = n_0 + n_1 + n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$ и наборы
$l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^{n_i}$ для каждого $i = 0, 1, 2$.

$$\mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0, 1, 2,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i]$$

Триномиальная алгебра

Фиксируем $n = n_0 + n_1 + n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$ и наборы $l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^{n_i}$ для каждого $i = 0, 1, 2$.

$$\mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0, 1, 2,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i] \ \ni\ g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} =$$

$$= T_{01}^{l_{01}} \ldots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \ldots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \ldots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} \text{ — трином}$$

Триномиальная алгебра

Фиксируем $n = n_0 + n_1 + n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$ и наборы $l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^{n_i}$ для каждого $i = 0, 1, 2$.

$$\mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0,1,2,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i] \ \ni \ g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} =$$
$$= T_{01}^{l_{01}} \ldots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \ldots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \ldots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} \text{ — трином}$$

Триномиальная гиперповерхность: $\{g = 0\} \subset \mathbb{A}^n$.

Триномиальная алгебра

Фиксируем $n = n_0 + n_1 + n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$ и наборы
$l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^{n_i}$ для каждого $i = 0, 1, 2$.

$$\mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0, 1, 2,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i] \ \ni \ g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} =$$
$$= T_{01}^{l_{01}} \ldots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \ldots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \ldots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} \text{ — трином}$$

Триномиальная гиперповерхность: $\{g = 0\} \subset \mathbb{A}^n$.
Триномиальная алгебра: $R(g) := \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$.

Триномиальная алгебра

Фиксируем $n = n_0 + n_1 + n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$ и наборы $l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^{n_i}$ для каждого $i = 0, 1, 2$.

$$\mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0, 1, 2,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i] \ \ni \ g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} =$$

$$\begin{array}{lllll} = T_{01}^{l_{01}} \ldots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} & + & T_{11}^{l_{11}} \ldots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} & + & T_{21}^{l_{21}} \ldots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} \ \text{— трином} \\ \quad w_{01} \ \ldots \ w_{0n_0} & & w_{11} \ \ldots \ w_{1n_1} & & w_{21} \ \ldots \ w_{2n_2} \ \text{— веса} \end{array}$$

Триномиальная гиперповерхность: $\{g = 0\} \subset \mathbb{A}^n$.
Триномиальная алгебра: $R(g) := \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$.

Триномиальная алгебра

Фиксируем $n = n_0 + n_1 + n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$ и наборы
$l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^{n_i}$ для каждого $i = 0, 1, 2$.

$$\mathbb{K}[T_{ij} \mid i = 0,1,2,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i] \ \ni\ g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} =$$

$$\begin{array}{ccccccccccl} = T_{01}^{l_{01}} & \ldots & T_{0n_0}^{l_{0n_0}} & + & T_{11}^{l_{11}} & \ldots & T_{1n_1}^{l_{1n_1}} & + & T_{21}^{l_{21}} & \ldots & T_{2n_2}^{l_{2n_2}} \text{ — трином} \\ w_{01} & \ldots & w_{0n_0} & & w_{11} & \ldots & w_{1n_1} & & w_{21} & \ldots & w_{2n_2} \text{ — веса} \end{array}$$

Триномиальная гиперповерхность: $\{g = 0\} \subset \mathbb{A}^n$.
Триномиальная алгебра: $R(g) := \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$.

Градуирована группой

$$K = \mathbb{Z}^n \,/\, \langle l_{01}w_{01} + \ldots + l_{0n_0}w_{0n_0} = \ \ldots\ = l_{21}w_{21} + \ldots + l_{2n_2}w_{2n_2} \rangle,$$

$$\deg T_{ij} = \text{образ } w_{ij} \text{ при факторизации.}$$

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}},\ R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}},\ R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} C = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3 \\ 1 \leqslant c_i \leqslant n_i \\ \\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^3 \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{array}}$$

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}},\ R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$$\boxed{\text{(i) } \beta_i \neq 0 \ \forall i}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} C = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3 \\ 1 \leqslant c_i \leqslant n_i \\ \\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^3 \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\text{(ii) } \beta_{i_0} = 0}$$

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}}, \; R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$\boxed{\text{(i) } \beta_i \neq 0 \; \forall i}$ $\boxed{+ \text{ не более одного } i_1 \text{ с } l_{i_1 c_{i_1}} > 1}$

$$C = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3$$
$$1 \leqslant c_i \leqslant n_i$$

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^3$$
$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$$

$\boxed{\text{(ii) } \beta_{i_0} = 0}$ $\boxed{+ \text{ не более одного } i_1 \neq i_0 \text{ с } l_{i_1 c_{i_1}} > 1}$

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}},\ R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}]\,/\,(g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$C = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3$
$1 \leqslant c_i \leqslant n_i$

$\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^3$
$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$

(i) $\beta_i \neq 0\ \forall i$

$+$ не более одного i_1 с $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

(ii) $\beta_{i_0} = 0$

$+$ не более одного $i_1 \neq i_0$ с $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i, i_0} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}}, \; R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$$\boxed{\begin{gathered} C = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3 \\ 1 \leqslant c_i \leqslant n_i \\[2em] \beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^3 \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{gathered}}$$

$\boxed{\text{(i) } \beta_i \neq 0 \; \forall i}$ $\boxed{+ \text{ не более одного } i_1 \text{ с } l_{i_1 c_{i_1}} > 1}$

$$\boxed{\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i} \dfrac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}}$$

$\boxed{\text{(ii) } \beta_{i_0} = 0}$ $\boxed{+ \text{ не более одного } i_1 \neq i_0 \text{ с } l_{i_1 c_{i_1}} > 1}$

$$\boxed{\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i, i_0} \dfrac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}}$$

$\delta_{C,\beta}$ — однородное LND алгебры $R(g)$.

$$g = T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}},\ R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}]\,/\,(g)$$

Определим дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ на алгебре $R(g)$:

$C = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3$, $1 \leqslant c_i \leqslant n_i$

$\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^3$, $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$

(i) $\beta_i \neq 0\ \forall i$

\+ не более одного i_1 с $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i} \dfrac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

(ii) $\beta_{i_0} = 0$

\+ не более одного $i_1 \neq i_0$ с $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k \neq i, i_0} \dfrac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

$\delta_{C,\beta}$ — однородное LND алгебры $R(g)$.

Элементарные дифференцирования: $h\delta_{C,\beta}$, $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$.

Теорема (Гайфуллин, З. '18). *Любое однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $R(g)$ элементарно.*

Теорема (Аржанцев, Hausen, Herppich, Liendo '14)
The automorphism group of a variety with torus action of complexity one
Любое примитивное однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры регулярных функций на триномиальной поверхности элементарно.

Теорема (Гайфуллин, З. '18). *Любое однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры* $R(g)$ *элементарно.*

План доказательства

Пусть δ — однородное LND алгебры $R(g)$.

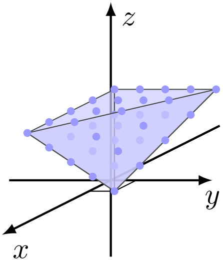
1. Если $\delta(T_0^{l_0})$, $\delta(T_1^{l_1})$ и $\delta(T_2^{l_2})$ лежат в одном подпространстве размерности 1, то δ элементарно.

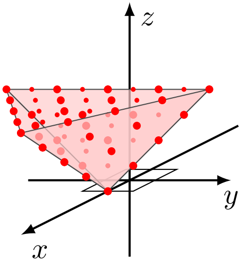
2. Назовём переменную T_{ij} *неядерной*, если $\delta(T_{ij}) \neq 0$. Тогда в каждом мономе $T_i^{l_i}$ не больше одной неядерной переменной.

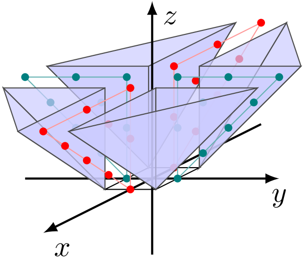
3. Используя показатели при неядерных переменных доказываем, что $\delta(T_0^{l_0})$, $\delta(T_1^{l_1})$ и $\delta(T_2^{l_2})$ лежат в одном подпространстве размерности 1.

Корни Демазюра

Корни алгебры $R(g)$ для $g = T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^2$.







Спасибо за внимание!