О K_2-аналоге проблемы Серра для групп Шевалле

Сергей Синчук

Школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", Самара, Россия

24 августа 2018

Содержание

Определение линейной группы Стейнберга

Пусть $n \geq 3$, а R – ассоциативное кольцо.

Определение (Группа Стейнберга)

$\mathrm{St}(n, R)$ группа заданная множеством образующих $\{x_{ij}(a) \mid 1 \leq i \neq j \leq n, a \in R\}$ и набором соотношений:

1. $x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b),\ \ a, b \in R$;
2. $[x_{ij}(a), x_{jk}(b)] = x_{ik}(ab),\ \ |\{i, j, k\}| = 3$;
3. $[x_{ij}(a), x_{kl}(b)] = 1,\ \ i \neq l,\ \ j \neq k$;

Есть гомоморфизм $\pi\colon\ \mathrm{St}(n, R) \to \mathrm{GL}(n, R),\ \pi(x_{ij}(a)) = t_{ij}(a)$.

Определение (Элементарная подгруппа)

$\mathrm{E}(n, R) = \mathrm{im}(\pi) = \langle t_{ij}(a) \rangle \subseteq \mathrm{GL}(n, R)$

Младшие K-функторы

Можно определить $K_i\colon \mathbf{Rings} \to \mathbf{Ab}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

Определение

$K_0(R) = \mathrm{Gr}(\{\text{классы изом. кон. пор. проект. } R\text{-модулей}\}, \oplus)$

Младшие K-функторы

Можно определить $K_i\colon \mathbf{Rings} \to \mathbf{Ab}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

Определение

$K_0(R) = \mathrm{Gr}(\{\text{классы изом. кон. пор. проект. } R\text{-модулей}\}, \oplus)$

$$\mathrm{GL}(\infty, R) = \bigcup_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n, R),\ \mathrm{E}(\infty, R) = \bigcup_{n\to\infty} \mathrm{E}(n, R)$$

Определение

$K_1(R) = \mathrm{GL}(\infty, R)^{ab} = \mathrm{GL}(\infty, R)/\,\mathrm{E}(\infty, R)$

Младшие K-функторы

Можно определить $K_i\colon \mathbf{Rings} \to \mathbf{Ab}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;

Определение

$K_0(R) = \mathrm{Gr}(\{\text{классы изом. кон. пор. проект. } R\text{-модулей}\}, \oplus)$

$$\mathrm{GL}(\infty, R) = \bigcup_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n, R),\ \mathrm{E}(\infty, R) = \bigcup_{n\to\infty} \mathrm{E}(n, R)$$

Определение

$K_1(R) = \mathrm{GL}(\infty, R)^{ab} = \mathrm{GL}(\infty, R)/\,\mathrm{E}(\infty, R)$

$$\mathrm{St}(\infty, R) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{St}(n, R)$$

Определение

$K_2(R) = \mathrm{Ker}(\mathrm{St}(\infty, R) \to \mathrm{GL}(\infty, R))$

Простейшие примеры

Пусть R коммутативно.

- $\mathrm{K}_0(R) = \mathbb{Z}^c \oplus \widetilde{\mathrm{K}_0}(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\widetilde{\mathrm{K}_0}(R) = 0$;

Простейшие примеры

Пусть R коммутативно.

- $\mathrm{K}_0(R) = \mathbb{Z}^c \oplus \widetilde{\mathrm{K}_0}(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\widetilde{\mathrm{K}_0}(R) = 0$;
- $\mathrm{K}_1(R) = R^* \oplus \mathrm{SK}_1(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\mathrm{SK}_1(R) = 0$;

Простейшие примеры

Пусть R коммутативно.

- $\mathrm{K}_0(R) = \mathbb{Z}^c \oplus \widetilde{\mathrm{K}_0}(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\widetilde{\mathrm{K}_0}(R) = 0$;
- $\mathrm{K}_1(R) = R^* \oplus \mathrm{SK}_1(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\mathrm{SK}_1(R) = 0$;
- Если F поле, то $\mathrm{K}_2(F) = \mathrm{K}_2^M(F) = F^* \otimes F^* / \langle u \otimes (1-u), \mid u \neq 0, 1 \rangle$;
- $\mathrm{K}_2(\mathbb{F}_q) = 0$.

Простейшие примеры

Пусть R коммутативно.

- $\mathrm{K}_0(R) = \mathbb{Z}^c \oplus \widetilde{\mathrm{K}_0}(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\widetilde{\mathrm{K}_0}(R) = 0$;
- $\mathrm{K}_1(R) = R^* \oplus \mathrm{SK}_1(R)$;
- R локально или о.г.и., тогда $\mathrm{SK}_1(R) = 0$;
- Если F поле, то $\mathrm{K}_2(F) = \mathrm{K}_2^M(F) = F^* \otimes F^* / \langle u \otimes (1-u), \mid u \neq 0, 1 \rangle$;
- $\mathrm{K}_2(\mathbb{F}_q) = 0$.

Теорема (“Фундаментальная теорема алг. K-теории”)

Пусть R регулярно, тогда $\mathrm{K}_i(R[t]) = \mathrm{K}_i(R)$, а $\mathrm{K}_i(R[t, t^{-1}]) = \mathrm{K}_i(R) \oplus \mathrm{K}_{i-1}(R), i > 0$, а $\mathrm{K}_0(R[t, t^{-1}]) = \mathrm{K}_0(R)$.

“Нестабильные аналоги”

Пусть R коммутативно.

$$\mathrm{K}_{0,n}(R) = \{\text{мн-во классов изом. проект. } R\text{-мод. пост. ранга } n\}$$

$$\mathrm{K}_{1,n}(R) = \mathrm{GL}_n(R)/\,\mathrm{E}(n,R) \text{ - априори мн-во с отм. точкой (группа при } n \geq 3)$$

$$\mathrm{K}_{2,n}(R) = \mathrm{Ker}(\pi\colon\ \mathrm{St}(n,R) \to \mathrm{GL}(n,R)) \text{ – априори группа (абелева группа при } n \geq 4)$$

Теорема (о стабилизации)

Пусть $n \geq d + i + 1$, где $d = \mathrm{dimMax}(R)$, тогда

$$K_{i,n}(R) = \begin{cases} \widetilde{\mathrm{K}_0}(R) & i = 0, ([P] \mapsto [P] - [R^n]) \\ K_i(R) & i > 1. \end{cases}$$

"Нестабильные аналоги"

Пусть Φ непривод. система корней, R – коммутативно. $\mathrm{St}(\Phi, R)$ определяется при помощи образующих $x_\alpha(\xi)$ и соотношений:

1. $x_\alpha(\xi_1)x_\alpha(\xi_2) = x_\alpha(\xi_1+\xi_2), \alpha\in\Phi, \xi\in R;$
2. $[x_\alpha(\xi_1), x_\beta(\xi_2)] = \prod\limits_{i\alpha+j\beta\in\Phi,\ i,j>0} x_{i\alpha+j\beta}(N^{ij}_{\alpha\beta}\cdot\xi_1^i\xi_2^j), \quad \alpha\neq-\beta;$
3. $w_\alpha(\xi)x_\beta(s)w_\alpha(\xi)^{-1} = x_{\sigma_\alpha\beta}(\eta_{\alpha,\beta}\xi^{-\langle\beta,\alpha\rangle}s),\ s\in R,\ \xi\in R^*$, где $w_\alpha(\xi) := x_\alpha(\xi)x_{-\alpha}(-\xi^{-1})x_\alpha(\xi)$, где $\eta_{\alpha,\beta}=\pm1$.

“Нестабильные аналоги”

Пусть Φ непривод. система корней, R – коммутативно. $\mathrm{St}(\Phi, R)$ определяется при помощи образующих $x_\alpha(\xi)$ и соотношений:

1. $x_\alpha(\xi_1)x_\alpha(\xi_2) = x_\alpha(\xi_1 + \xi_2), \alpha \in \Phi, \xi \in R;$
2. $[x_\alpha(\xi_1), x_\beta(\xi_2)] = \prod\limits_{i\alpha+j\beta\in\Phi,\ i,j>0} x_{i\alpha+j\beta}(N^{ij}_{\alpha\beta} \cdot \xi_1^i \xi_2^j), \quad \alpha \neq -\beta;$
3. $w_\alpha(\xi)x_\beta(s)w_\alpha(\xi)^{-1} = x_{\sigma_\alpha\beta}(\eta_{\alpha,\beta}\xi^{-\langle\beta,\alpha\rangle}s),\ s \in R,\ \xi \in R^*$, где $w_\alpha(\xi) := x_\alpha(\xi)x_{-\alpha}(-\xi^{-1})x_\alpha(\xi)$, где $\eta_{\alpha,\beta} = \pm 1$.

$$\mathrm{K}_2(\Phi, R) \hookrightarrow \mathrm{St}(\Phi, R) \xrightarrow{\pi} \mathrm{G}_{sc}(\Phi, R) \twoheadrightarrow \mathrm{K}_1(\Phi, R)$$

Связь с $\mathrm{K}_{i,n}(R)$ и примеры вычисления:

- $1 \to \mathrm{K}_1(\mathrm{A}_\ell, R) \to \mathrm{K}_{1,\ell+1}(R) \to R^* \to 1,$
- $\mathrm{K}_2(\mathrm{A}_\ell, R) = \mathrm{K}_{2,\ell+1}(R).$
- $\mathrm{K}_1(\Phi, R)$ тривиальны, если R полулок. кольцо или о.г.и.

Пример вычисления $K_2(\Phi, F)$

Абелева группа $K_{2,2}(F)$ определяется при помощи образующих $\{u, v\}$, $u, v \in F^*$ и соотношений.

- $\{t, u\}\{tu, v\} = \{t, uv\}\{u, v\}$;
- $\{1, 1\} = 1$;
- $\{u, v\} = \{u^{-1}, v^{-1}\}$;
- $\{u, v\} = \{u, (1-u)v\}$, $u \neq 1$.

Теорема (H. Matsumoto '69)

$$K_2(\Phi, F) = \begin{cases} K_{2,2}(F) & \Phi = A_1, C_\ell, \\ K_2^M(F) & \text{иначе.} \end{cases}$$

$K_2^M(\mathbb{F}_q) = K_{2,2}(\mathbb{F}_q) = 1$, а значит группы $G_{sc}(\Phi, \mathbb{F}_q)$ задаются образущими и соотношениями Стейнберга

Обобщение теоремы Мацумото

Пусть A - обобщенная матрица Картана, F - поле

Определение (группа Стейнберга для группы Каца–Муди)

$$\mathrm{K}_2(A, F) \hookrightarrow \mathrm{St}(A, F) \xrightarrow{\pi} \mathrm{G}(A, F)$$

Пусть I – абелева подгруппа $K_{2,2}(F)$ порожденная символами $\langle \{u^2, v\} \mid u, v \in F^* \rangle$.

Теорема (J. Morita, U. Rehmann, M. Westaway, S.)

$K_2(A, F)$ прямая сумма слагаемых вида $\mathrm{K}_{2,2}(F)/n_i I$, $\mathrm{K}_2^M(F)/n_i$, где все целые коэффициенты $n_i \geq 0$ можно вычислить по A с помощью явного алгоритма.

$\mathcal{F}$-аналог проблемы Серра

Пусть F - поле, а $\mathcal{F}$: **CRings** $\to$ **Sets**$_*$ один из функторов $\mathrm{K}_{0,n}, \mathrm{K}_{1,n}, \mathrm{K}_{2,n}, \mathrm{K}_1(\Phi, -), \mathrm{K}_2(\Phi, -)$.

Вопрос

Правда ли, что для любого $m \geq 1$ имеет место равенство $\mathcal{F}(F) = \mathcal{F}(F[t_1, \ldots, t_m])$?

Два ингредиента

Ответ положителен, если удаётся доказать:

- ($\mathbb{P}^1$-склейка) Для любого локального кольца R следующий квадрат декартов:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(R) & \longrightarrow & \mathcal{F}(R[t]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(R[t^{-1}]) & \longrightarrow & \mathcal{F}(R[t, t^{-1}]) \end{array}$$

Два ингредиента

Ответ положителен, если удаётся доказать:

- ($\mathbb{P}^1$-склейка) Для любого локального кольца R следующий квадрат декартов:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(R[t]) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(R[t^{-1}]) \arrow[r] & \mathcal{F}(R[t, t^{-1}]) \end{tikzcd}$$

- (локально-глобальный принцип, LGP) Для коммутативного R и $g \in \mathcal{F}(R[t])$ эквивалентны:
  - $g \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}(R) \hookrightarrow \mathcal{F}(R[t]))$;
  - Для любого $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $\mathcal{F}(\lambda_\mathfrak{m})(g) \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}(R_\mathfrak{m}) \hookrightarrow \mathcal{F}(R_\mathfrak{m}[t]))$, где $\lambda_\mathfrak{m} \colon R[t] \to R_\mathfrak{m}[t]$

Проблема Серра о проективных модулях

Для $\mathcal{F} = \mathrm{K}_{0,n}$ решение положительно

- $\mathbb{P}^1$-склейка для $K_{0,n}$ = локальная теорема Хоррокса '64
- LGP для $K_{0,n}$ = теорема Квиллена '76

K_1-аналог

Пример (P. Cohn '67)

$$\begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \\ -y^2 & 1-xy \end{pmatrix} \notin \mathrm{E}(2, k[x,y])$$

Для $\mathcal{F} = \mathrm{K}_{1,n}$ есть решение для $n \geq 3$, Суслин '77

K_1-аналог

Пример (P. Cohn '67)

$$\begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \\ -y^2 & 1-xy \end{pmatrix} \notin \mathrm{E}(2, k[x,y])$$

Для $\mathcal{F} = \mathrm{K}_{1,n}$ есть решение для $n \geq 3$, Суслин '77
Для $n \geq 3$ и R – коммутативного, $\mathrm{E}(n, R)$ – нормальная подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$, в частности $\mathrm{K}_{1,n}(R)$ – группа для $n \geq 3$

Лемма (Суслин)

Пусть $u \in {}^nR$, $v \in \mathrm{Umd}(n, R)$ (унимодулярный столбец) такие, что $uv = 0$, тогда матрица $T(v, u) := e + vu$ содержится в элементарной подгруппе $\mathrm{E}(n, R)$.

K_1-аналог, продолжение

Доказательстве $\mathbb{P}^1$-склейки основывается на некотором матричном разложении. Для $I \trianglelefteq R$ определим $E(n, R, I) = \langle t_{ij}(a) \mid a \in I \rangle^{\mathrm{E}(n,R)}$.

Теорема (Суслин)

Для локального кольца R с макс. идеалом $\mathfrak{m}$ имеет место разложение

$$\mathrm{E}(n, R[t, t^{-1}]) = \mathrm{E}(n, R[t]) \cdot B_{R[t,t^{-1}]} \cdot \mathrm{E}(n, R[t, t^{-1}], \mathfrak{m}[t, t^{-1}])$$

Аналог для $K_1(\Phi, -)$

Теорема (G. Taddei '86)

$E(\Phi, R)$ – нормальная подгруппа в $G_{sc}(\Phi, R)$ для Φ ранга > 1.

Аналог для $\mathrm{K}_1(\Phi, -)$

Теорема (G. Taddei '86)

$\mathrm{E}(\Phi, R)$ – нормальная подгруппа в $G_{sc}(\Phi, R)$ для Φ ранга > 1.

Теорема (E. Abe '83 + В. Копейко '78–82)

Для $\Phi \neq \mathrm{G}_2, \mathrm{B}_\ell$ выполнено $\mathrm{K}_1(\Phi, F[t_1, \ldots, t_m]) = \mathrm{K}_1(\Phi, F)$.

Теорема (А. Ставрова '14)

Для Φ ранга > 1 выполнено $\mathrm{K}_1(\Phi, F[t_1, \ldots, t_m]) = \mathrm{K}_1(\Phi, F)$.

K_2-аналог

Теорема (van der Kallen '77)

Для $n \geq 4$ группа $\mathrm{St}(n, R)$ может быть задана при помощи образующих $X(v, u)$, $v \in \mathrm{Umd}(n, R)$, $u \in {}^nR$, $uv = 0$ и соотношений

1. $X(v, u_1 + u_2) = X(v, u_1) \cdot X(v, u_2)$;
2. $X(v, u)^{X(v', u')} = X((e - v'u') \cdot v, u \cdot (e + v'u'))$;

$\pi(X(v, u)) = T(v, u) = e + vu$

Следствие

Для $n \geq 4$ и любого коммутативного R группа $K_{2,n}(R)$ содержится в центре $\mathrm{St}(n, R)$.

K_2-аналог продолжение

Теорема (М. Туленбаев '83)

Для $n \geq 5$ аналог проблемы Серра решается для $\mathrm{K}_{2,n}$.

K_2-аналог продолжение

Теорема (М. Туленбаев '83)

Для $n \geq 5$ аналог проблемы Серра решается для $\mathrm{K}_{2,n}$.

Теорема (M. Wendt '12)

Если $\mathrm{rk}(\Phi) = 2$, то существует эпиморфизм $\mathrm{K}_2(\Phi, k[x, y]) \twoheadrightarrow F_\infty$, в частности, не имеет места аналог проблемы Серра для $\mathrm{K}_{2,3}$.

K_2-аналог продолжение

Теорема (А. Лавренов '15, '18)

Для функтора $\mathrm{K}_2(\mathrm{C}_\ell, -)$, $\ell \geq 3$ справедлив LGP, кроме того $\mathrm{K}_2(\mathrm{C}_\ell, R) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{St}(\mathrm{C}_\ell, R))$.

K_2-аналог продолжение

Теорема (А. Лавренов '15, '18)

Для функтора $\mathrm{K}_2(\mathrm{C}_\ell, -)$, $\ell \geq 3$ справедлив LGP, кроме того $\mathrm{K}_2(\mathrm{C}_\ell, R) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{St}(\mathrm{C}_\ell, R))$.

Теорема (С. '15, С.–Лавренов '16)

Пусть Φ система корней типа ADE ранга ≥ 3. Тогда для $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$ справедлив LGP (в частности он справедлив для $\mathrm{K}_{2,4}$), кроме того, $\mathrm{K}_2(\Phi, R) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{St}(\Phi, R))$.

K_2-аналог продолжение

Теорема (А. Лавренов '15, '18)

Для функтора $\mathrm{K}_2(\mathrm{C}_\ell, -)$, $\ell \geq 3$ справедлив LGP, кроме того $\mathrm{K}_2(\mathrm{C}_\ell, R) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{St}(\mathrm{C}_\ell, R))$.

Теорема (С. '15, С.–Лавренов '16)

Пусть Φ система корней типа ADE ранга ≥ 3. Тогда для $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$ справедлив LGP (в частности он справедлив для $\mathrm{K}_{2,4}$), кроме того, $\mathrm{K}_2(\Phi, R) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{St}(\Phi, R))$.

Гипотеза

Если Φ ранга ≥ 3, то для $\mathrm{K}_2(\Phi, -)$ решается аналог проблемы Серра.

Спасибо за внимание!