Полиномиальные алгебры Ли-Рейнхарта и рост бесконечномерных алгебр Ли

Д.В. Миллионщиков

МГУ им. М.В. Ломоносова и МИАН им. В.А. Стеклова

7-я школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов",

Самара, 20 августа 2018 г.

Алгебра Ли-Рейнхарта

Определение

Пусть R – поле и A – коммутативная R-алгебра. Пара $(A, \mathcal{L})$ называется алгеброй Ли-Рейнхарта, если
1) $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли над R, которая действует на A левыми дифференцированиями, т.е.

$$X(ab) = X(a)b + aX(b), \forall a, b \in A, \forall X \in \mathcal{L};$$

2) алгебра Ли $\mathcal{L}$ является A-модулем.
Пара $(A, \mathcal{L})$ должна удовлетворять следующим условиям совместности

$$\begin{aligned} [X, aY] = X(a)Y + a[X, Y], \forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall a \in A; \\ (aX)(b) = a(X(b)), \ \forall a, b \in A, \forall X \in \mathcal{L}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Градуированная алгебра многочленов $A = R[t_1, t_2, \dots, t_p]$

Рассмотрим теперь градуированную R-алгебру $A = R[t_1, t_2, \dots, t_p] = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ многочленов от переменных $t_1, \dots, t_p$ над полем R.
Веса (градуировки) ее образующих t_i заданы как

$$deg(t_i) = m_i, m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, p.$$

Полиномиальные алгебры Ли-Рейнхарта

Определение (В.М. Бухштабер, 2002)

Алгебра Ли-Рейнхарта $(R[t_1, t_2, \dots, t_p], \mathcal{L})$ над полем R называется полиномиальной алгеброй Ли, если
1) $\mathcal{L}$ является *свободным* левым модулем ранга N над градуированной полиномиальной алгеброй $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$.
2) $\mathcal{L} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_i$ является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй Ли

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{i+j}, \; i, j \in \mathbb{Z}.$$

и ее градуировка согласована с градуировкой алгебры $R[t_1, t_2, \dots, t_p]$

$$p(t)L \in \mathcal{L}_{i+deg(p(t))}, \; deg(L(q(t)) = deg(q(t)) + i, L \in \mathcal{L}_i,$$

где $p(t), q(t)$ – однородные полиномы.

Коммутационные полиномиальные соотношения

Бухштабер предложил задавать полиномиальную алгебру Ли $(R[t_1, t_2, \dots, t_p], \mathcal{L})$ при помощи ее специального базиса $L_1, \dots, L_N$ – базиса свободного левого $R[t_1, \dots, t_p]$-модуля $\mathcal{L}$. Так, что каждый L_i является однородным элементом веса n_i. Возникают структурные соотношения

$$\begin{gathered} [L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k L_k, \;\; c_{ij}^k = c_{ij}^k(t) \in R[t_1, \dots, t_p], \\ L_i(t_q) = v_i^q, \;\; v_i^q = v_i^q(t) \in R[t_1, \dots, t_p]. \end{gathered} \tag{2}$$

Причем веса (степени) однородных многочленов $c_{ij}^k(t)$ и $v_i^q(t)$ должны быть согласованы, т.е. подобраны специальным образом.

Полиномиальная алгебра Ли ранга один

Пример

Рассмотрим полиномиальную алгебру Ли $\mathcal{L}_1^1$ над $R = \mathbb{C}$.
а) $\mathcal{L}_1^1$= свободный левый модуль $\mathbb{C}[t]$ с единственным базисным элементом L, причем $deg(t) = 1, deg(L) = 1$.
Произвольный элемент такого модуля имеет вид $P(t)L$, где $P(t)$ – многочлен из $\mathbb{C}[t]$.
б) Соотношения:
1) $[L, L] = 0$ (выполняется a priori);
2) $L(1) = 0, L(t) = t^2$.

Утверждение

Полиномиальная алгебра Ли $\mathcal{L}_1^1$, рассмотренная как алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, изоморфна положительной части W^+ алгебры Витта W.

Пример

Рассмотрим полиномиальную алгебру Ли $(\mathbb{C}[t], \mathcal{L}^1_{1,2})$ с двумя образующими L_1, L_2 весов $1, 2$ соответственно и $deg(t) = 1$. Структура полиномиальной алгебры Ли:

$$[L_1, L_2] = tL_2, \quad L_1(t) = L_2(t) = 0.$$

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{m}_0 \cong \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}(L_1, L_2)$ над полем $\mathbb{C}$, порожденную L_1, L_2.

Утверждение

$\mathfrak{m}_0$ *может быть задана базисом* $e_1, e_2, e_3, \dots$ *и соотношениями* $[e_1, e_i] = e_{i+1}, i \geq 2$.

Введем $e_1 = L_1, e_2 = L_2, e_3 = tL_2, e_3 = t^2L_2, e_4 = t^3L_2, \dots$.

Рост алгебр Ли

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$, порожденную конечномерным подпространством V_1. Для $n > 1$ введем V_n – линейную оболочку всех коммутаторов $[[\dots[\dots],],\dots]$ элементов из V_1 длины не выше n с произвольной расстановкой скобок.

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots, \ \cup_{i=1}^{+\infty} V_i = \mathfrak{g}.$$

Определим размерность Гельфанда-Кириллова алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$GKdim\mathfrak{g} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log \dim V_n}{\log n}.$$

Конечность размерности Гельфанда-Кириллова означает, что существует полином $P(x)$ такой, что $\dim V_n < P(n)$ для всех $n > 1$.

Функция роста $F_{\mathfrak{g}}(n) = \dim V_n$.

- самый быстрый рост – свободная алгебра Ли $L(X)$ от m образующих.

$$F_{L(X)}(n) \sim \frac{1}{n} m^n$$

- самый медленный рост
$\mathfrak{m}_0 = \langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle, [e_1, e_i] = e_{i+1}, \forall i.$

$$F_{\mathfrak{m}_0}(n) = n+1.$$

- $\mathfrak{g} = W^+$

$$F_{W^+}(n) = 2n - 3$$

В 1990 О. Матье доказал гипотезу Виктора Каца (1968) о том, что бесконечномерная простая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ конечного роста, т.е. $\dim \mathfrak{g}_n \le P(n)$, $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, изоморфна одной алгебре Ли из следующих типов:

i) (алгебра петель) алгебра петель $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, где $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая алгебра Ли;

ii) (алгебра скрученных петель) подалгебра Ли в $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$

$$\bigoplus_{\substack{i \in \mathbb{Z},\, i \equiv j \bmod n, \\ j = 0, 1, \dots, n-1}} \mathfrak{g}_j \otimes t^i \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}],$$

где простая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathfrak{g}_i$ градуирована циклической группой $\mathbb{Z}_n$;

iii) алгебры Ли Картановского типа: W_n, S_n, K_n, H_n;

iv) алгебра Витта.

Теорема (Vergne, 1970)

Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *– полож. град. алгебра Ли такая, что:*

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \ \dim \mathfrak{g}_1 = 2, \ \dim \mathfrak{g}_i = 1, i \geq 2.$$

Тогда $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *изоморфна* $\mathfrak{m}_0$.

Теорема (М., 2017, Мат. сборник 2019)

Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *– комплексная положительно градуированная алгебра Ли такая, что:*

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \ \dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leq 3, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *изоморфна одной и только одной алгебре Ли из*

$$\mathfrak{m}_0, \mathfrak{n}_1, \ \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_2^3, \left\{\mathfrak{m}_0^S \mid S \subset \{3,5,7,9,\dots\}\right\}.$$

Теорема (М., 2018)

Пусть $(\mathbb{K}[t_1,\dots,t_p],\mathcal{L}^{m_1,\dots,m_p}_{n_1,\dots,n_N})$ *– полиномиальная алгебра Ли конечного ранга с градуирующим базисом (оснащением)* $L_1,\dots,L_N$*. Тогда алгебра Ли* $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}(L_1,\dots,L_N)$ *над полем* $\mathbb{K}$*, порожденная базисными элементами* $L_1,\dots,L_N$ *имеет не более, чем полиномиальный рост. Более точно*

$$GK\dim \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}(L_1,\dots,L_N)\le p.$$

Рассмотрим гиперболическое уравнение Клейна-Гордона.

$$u_{tt} - u_{zz} = f(u).$$

В характеристических переменных $x = \frac{z+t}{2}, y = \frac{z-t}{2}$ оно запишется как

$$u_{xy} = f(u). \tag{3}$$

Волновое уравнение

$$u_{xy} = 0. \tag{4}$$

Общее решение волнового уравнения (4)

$$u(x,y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

где $\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)$ – произвольные функции одной переменной. Очевидно, что для решения $u(x,y)$ уравнения (4) выполнено

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x) = 0, \frac{\partial}{\partial x}(u_y) = 0.$$

Определение

Функция $F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots)$ называется x-интегралом уравнения Клейна-Гордона $u_{xy} = f(u)$ если $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Представим $F(u, u_x, u_{xx}, \dots) = F(u, u_1, u_2, \dots)$, где $u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, u_3 = u_{xxx}, \dots$
Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F(u, u_x, u_{xx}, \dots) &= u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_1} + u_{xxy} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots \\ &= u_y \frac{\partial F}{\partial u} + f \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots \end{aligned}$$

Лемма

F является x-интегралом тогда и только тогда, когда

$$X_0(F) = \frac{\partial F}{\partial u} = 0, X_1(F) = f \frac{\partial F}{\partial u_1} + D_x(f) \frac{\partial F}{\partial u_2} + D_x^2(f) \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots$$

Рассмотрим дифференциальные операторы, действующие на пространстве $\mathcal{F}$ аналитических функций от переменных $u, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, где $u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, \dots$ для некоторой функции $u(x, y)$

Оператор $D = D_x$ полной производной относительно x

$$D_x g(u, u_x, u_{xx}, \dots) = u_x \frac{\partial g}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial g}{\partial u_1} + u_{xxx} \frac{\partial g}{\partial u_2} + \dots = \\ = u_1 \frac{\partial g}{\partial u} + u_2 \frac{\partial g}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial g}{\partial u_2} + \dots$$

$$D = D_x = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial}{\partial u_n} + \dots,$$

Для функции $f(u)$

$$Df = f_u u_x = f_u u_1, \;\; D^2(f) = f_{uu} u_x^2 + f_u u_{xx} = f_{uu} u_1^2 + f_u u_2$$

Напомним определение двух дифференциальных операторов

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, X_1 = f \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_n} + \dots$$

Характеристическая алгебра Ли гиперболического УРЧП

Рассмотрим коммутатор

$$[X_0, X_1] = [\frac{\partial}{\partial u}, X_1] = f_u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f_u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}(f_u)\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots$$

Являются ли $X_0, X_1, [X_0, X_1]$ (функционально) независимыми?

Пример (уравнение Лиувилля):

$$f(u) = e^u, \ [X_0, X_1] = X_1.$$

линейная оболочка $\langle X_0, X_1, [X_0, X_1] \rangle$ для $f(u) = e^u$ двумерна.

Определение

Алгебра Ли $\chi(f)$, порожденная двумя операторами X_0, X_1 называется характеристической алгеброй Ли уравнения Клейна-Гордона $u_{xy} = f(u)$.

Уравнение Лиувилля, интегралы, общее решение

$w_2 = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2$ является x-интегралом уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$ В самом деле

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = u_{xyx} - u_x u_{xy} = (e^u)_x - e^u u_x = 0.$$

Общее решение уравнения Лиувилля

$$u = \ln \frac{2\Psi'(x)\Phi'(y)}{(\Psi(x)+\Phi(y))^2},$$

где $\Psi(\cdot), \Phi(\cdot)$ – произвольные функции одной переменной.

Характеристическая алгебра Ли $\chi(e^u)$ изоморфна двумерной разрешимой алгебре Ли

$$\chi(e^u) = \langle X_0, X_1 \rangle, \ [X_0, X_1] = X_1.$$

$u_{xy} = u$ – нет x-интегралов!!!

Пример

У уравнения $u_{xy} = u$ нет нетривиальных x-интегралов.
Рассмотрим характеристическую алгебру Ли $\chi(u)$, порожденную $X_0 = \frac{\partial}{\partial u}$ and
$X_1(u) = u\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial}{\partial u_4} + \dots,$

Если $F(u, u_1, u_2, \dots)$ аннулируется обоими X_0 и X_1, то тогда она аннулируется всеми операторами алгебры Ли $\chi(u)$.

$$[X_0, X_1] = \frac{\partial}{\partial u_1}, [X_1, [X_0, X_1]] = -\frac{\partial}{\partial u_2}, [X_1, [X_1, [X_0, X_1]]] = \frac{\partial}{\partial u_3}, \dots$$

Значит $\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \forall k \geq 1$. Что влечет $F = const$.

Интегрируемость по Дарбу

Определение

Гиперболическое уравнение

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{5}$$

называется интегрируемым по Дарбу, если у него есть оба x-, y-интеграла.

В случае $u_{xy} = f(u)$ наличие интеграла w_n обеспечивает оба x-, y-интеграла. Для нелинейного уравнения Клейна-Гордона $u_{xy} = f(u)$ имеется лишь один случай интегрируемости по Дарбу – когда оно может быть "сведено"к уравнению Лиувилля (Шабат, Жибер 1979).

Уравнение sinh-Гордон $u_{xy} = \sinh u$

Характеристическая алгебра Ли $\chi(\sinh u)$ порождена

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, X_1 = \sinh u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(\sinh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + D^2(\sinh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

Тогда

$$X_2 = [X_0, X_1] = \cosh u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(\cosh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + D^2(\cosh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

$$[X_0,[X_0,X_1]] = X_1 = \sinh u \tfrac{\partial}{\partial u_1} + D(\sinh u)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + D^2(\sinh u)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

Матрица оператора adX_0 в базисе X_1, X_2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

adX_0 имеет два собственных значения ± 1.
Рассмотрим соответствующие собственные векторы
$X_1' = X_1 + X_2$ и $X_2' = X_1 - X_2$.

$$X_1' = e^u\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + (u_1^2+u_2)\frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots + B_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots\right),$$
$$X_2' = e^{-u}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + (u_1^2-u_2)\frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots + B_{n-1}(-u_1,\ldots,-u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots\right)$$

где $B_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})$ – $(n-1)$-й полный многочлен Белла.
Несколько первых многочленов Белла:

$$B_1(u_1) = u_1, B_2(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2, B_3(u_1, u_2, u_3) = u_1^3 + 3u_1u_2 + u_3,$$
$$B_4(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1^4 + 6u_1^2u_2 + 4u_1u_3 + 3u_2^2 + u_4, \ldots$$

Порождающая функция для многочленов Белла

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i\frac{t^i}{i!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(u_1, \ldots, u_n)\frac{t^n}{n!}.$$

Уравнение sinh-Гордона и положительные петли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$

Рассмотрим $\mathfrak{n}_1$, подалгебру Ли полиномиальных матриц, заданную для в виде линейной оболочки ($k \geq 0$)

$$e_{3k+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & t^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^{k+1} & 0 \end{pmatrix}, e_{3k+3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^{k+1} & 0 \\ 0 & -t^{k+1} \end{pmatrix}.$$

с коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = c_{i,j} e_{i+j}, \; c_{i,j} = \begin{cases} 1, & j-i \equiv 1 \bmod 3; \\ 0, & j-i \equiv 0 \bmod 3; \\ -1, & j-i \equiv -1 \bmod 3. \end{cases}$$

Теорема (М., 2017)

Алгебра Ли $\mathcal{L}ie_{\mathbb{R}}(X_1', X_2')$, порожденная X_1', X_2' изоморфна $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \otimes \mathbb{R}[t]$.

Доказательство теоремы

Зададим рекуррентно операторы

$$X'_{3k+1} = -[X'_1, X'_{3k}], X'_{3k+2} = [X'_2, X'_{3k}], X'_{3k+3} = [X'_1, X'_{3k+2}], k \geq 1.$$

Лемма

Дифференциальные операторы $X'_{3k+1}, X'_{3k+2}, X'_{3k+3}, k \geq 0,$ *нетривиальны и удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\begin{gathered}
[X_0, X'_{3k+1}] = X'_{3k+1}, [X_0, X'_{3k+2}] = -X'_{3k+2}, [X_0, X'_{3k}] = 0, \\
[D, X'_{3k+1}] = -e^u X'_{3k}, [D, X'_{3k+2}] = e^{-u} X'_{3k}, \\
[D, X'_{3k+3}] = -e^{-u} X'_{3k+1} + e^u X'_{3k+2}; \\
[X'_i, X'_j] = c_{i,j} X'_{i+j},\ c_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{if } j-i \equiv 1 \bmod 3; \\ 0, \text{if } j-i \equiv 0 \bmod 3; \\ -1, \text{if } j-i \equiv -1 \bmod 3. \end{cases}
\end{gathered} \tag{6}$$

Квазиполиномиальная алгебра Ли-Рейнхарта $(A, \mathcal{L})$

Рассмотрим алгебру A квазимногочленов вида

$$e^{ku}P(u_1, u_2, \dots), k \in \mathbb{Z},\ \deg(e^{ku}) = 0, \deg(u_i) = -1, i \geq 1.$$

Введем генераторы квазиполиномиальной алгебры Ли $\mathcal{L}$:

$$L_{-1} = D, L_0 = \frac{\partial}{\partial u}, L_i = X_i', i \geq 1,$$
$$\deg(L_{-1}) = -1, \deg(L_0) = 0,$$
$$\deg(L_{3k+1}) = (L_{3k+2}) = 2k+1, \deg(L_{3k}) = 2k.$$

Структурные соотношения (6) из предыдущего слайда, плюс

$$L_{-1}(e^{ku}) = ke^{ku}u_1, L_{-1}(u_i) = u_{i+1}, i \geq 1;$$
$$L_1(u_i) = P_{i-1}(u_1, \dots, u_{i-1}), L_2(u_i) = P_{i-1}(-u_1, \dots, -u_{i-1})$$

A.V. Zhiber, R.D. Murtazina, “On the characteristic Lie algebras for equations "$u_{xy} = f(u, u_x)$. J. Math. Sci., **151**:4 (2008), 3112–3122

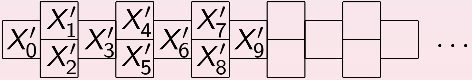
Теорема (М., 2017)

Характеристическая алгебра Ли уравнения sinh-Gordon

$$u_{xy} = \sinh u$$

изоморфна про-разрешимой подалгебре Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_1$ *аффинной алгебре Ли* $A_1^{(1)}$ *(алгебра Каца-Муди).*

$\tilde{\mathfrak{n}}_1$:



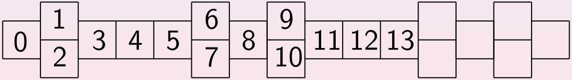
Theorem (М., 2017)

Характеристическая алгебра Ли уравнения Цицейки

$$u_{xy} = e^{u} + e^{-2u}$$

изоморфна разрешимой подалгебре Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_2$ *скрученной аффинной алгебры Ли* $A_2^{(2)}$.

$\tilde{\mathfrak{n}}_2$:



$\dots$