Некоторые интегрируемые системы алгебраического происхождения и разделение переменных

О.К.Шейнман

МИАН

“Группы Ли и теория инвариантов”
Самарский университет
Август 2018 г.

Основная теорема

$$F_i(H_1, \dots, H_n, x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

Теорема: Пусть $H_1, \dots, H_n$ определены из (1) как функции от $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, $1 \le k \le n$, $(\frac{\partial H_1}{\partial y_k}, \dots, \frac{\partial H_n}{\partial y_k}) \neq 0$ и

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_{k-1}, F_{k+1} \dots, F_n)}{\partial(H_1, \dots, H_{k-1}, H_k, H_{k+1} \dots, H_n)} = n - 1.$$

Тогда $\{H_i, H_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$ для любой скобки Пуассона, т.ч. $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij} h_i(x_i, y_i)$, где h_k – гладкая функция двух переменных, и $h_k = 0$ если k не удовлетворяет сформулированным выше требованиям.

Лемма: При сделанных предположениях $\frac{\partial H_j}{\partial x_k} = M_k \frac{\partial H_j}{\partial y_k}$, $j = 1, \dots, n$ где M_k – функция от $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$.

Доказательство леммы

При $i \neq k$ уравнение $F_i(H_1, \ldots, H_n, x_i, y_i) = 0$ явно не зависит от x_k, y_k. Дифференцируя его сначала по x_k, а затем по y_k, мы получим две одинаковые системы линейных уравнений на частные производные функций $H_1, \ldots, H_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \ i \neq k$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial H_j} \frac{\partial H_j}{\partial y_k} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \ i \neq k$$

Из условия на ранги следует, что векторы $(\frac{\partial H_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial H_n}{\partial x_k})$ и $(\frac{\partial H_1}{\partial y_k}, \ldots, \frac{\partial H_n}{\partial y_k})$ линейно зависимы, то есть

$$\exists M_k : \frac{\partial H_j}{\partial x_k} = M_k \frac{\partial H_j}{\partial y_k}, \quad \forall j$$

.

Линейный случай: обобщенные системы Штекеля

$H_1, \dots, H_n$ заданы <u>линейной</u> системой

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_i, y_i) H_j = f_{i0}(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

$f_{ij}(x, y)$ – гладкие функции 2 переменных,
$\operatorname{rank}\left(f_{ij}(x, y)\right)_{i=1,\dots,k-1,k+1,\dots n}^{j=1,\dots,n} = n - 1, \ \forall k.$

Example (Классическая система Штекеля, известна с 1891 г.)

$$\gamma_i(x_i) + \sum_{j=1}^{d} H_j x_i^{\alpha_j} = f_0(x_i) y_i^2$$

Интегрируемые системы, заданные семействами плоских кривых

Дано семейство плоских алгебраических кривых, зависящих от параметров H_j:

$$f(x,y) = f_0(x,y) - \sum_{j=1}^{d} H_j f_j(x,y) = 0.$$

Найдем H_j из условия, что кривая проходит через d точек $(x_1, y_1), \ldots, (x_d, y_d)$. Положим $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij} h_i(x_i, y_i)$.

Доказательство Основной Теоремы в этом случае получено: O.Babelon–M.Talon (2002), B.Enriquez–V.Rubtsov (2003).

Координаты угла в случае $h_j = h$ для всех j (Д.Талалаев, 2003; Hurtubise):

$$\phi_j = \sum_{i=1}^{d} \int^{(x_i,y_i)} \frac{f_j(x,y)dx}{\partial_y f(x,y) h(x,y)}.$$

Интегрируемые системы, связанные с итерполяционными полиномами

Интерполяционный полином Лагранжа

$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} H_j x^j$: $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

$H_j = H_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$

Теорема: $\{H_i, H_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n)$

Координаты угла $\phi_j = \frac{1}{j}(x_1^j + \ldots + x_n^j)$ – полиномы Ньютона.

Интерполяционный полином Эрмита

Классический: $\mathcal{H}_m(x) : \mathcal{H}_m^{(l_i)}(x_i) = y_i^{(l_i)}$, $i = 1, \ldots, n$,

где $l_i = 0, \ldots, \alpha_i - 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m + 1$.

Модифицированный: $\mathcal{H}_m^{(l_i)}(x_i^{(l_i)}) = y_i^{(l_i)}$, $i = 1, \ldots, n$ Then

$$f_{(i,l_i),j}(x,y) = \frac{(j-1)!}{(j-l_i-1)!} x^{j-l_i-1}, \quad f_{(i,l_i),0}(x,y) = y$$

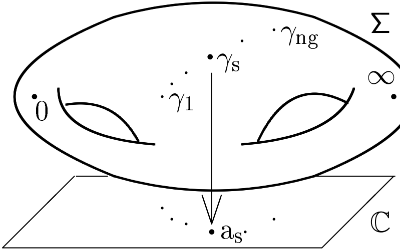
Системы Хитчина типа A_n на гиперэллиптических кривых вида $y^2 = x^{2g+1} + \sum_{i=0}^{2g} u_i x^i$

$$L(z) = \frac{\alpha_s \beta_s^t}{z - a_s} + L_{0s} + O(z - a_s)$$

$$L_{0s}, \ldots \in \mathfrak{sl}(n), \quad \gamma_s = (a_s, b_s) \in \Sigma,$$

$$\alpha_s, \beta_s \in \mathbb{C}^n, \quad \beta_s^t \alpha_s = 0,$$

$$L_{0s}\alpha_s = \kappa_s \alpha_s, \quad \kappa_s \in \mathbb{C}$$



$$(L) + k\sum_{s=1}^{K} \gamma_s + 2(g-1)\infty \geq 0$$

$$(\quad 2(g-1)\infty = (dx/y) \quad)$$

Спектральные кривые гиперэллиптических систем Хитчина типа A_n, B_n, C_n (Ш'2018)

Базовая кривая Σ: $y^2 = P_{2g+1}(x)$

Спектральная кривая: $\det(\lambda - L) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{l} r_j(x,y)\lambda^{n-d_j} = 0$

где $r_j(x,y) = \chi_{d_j}(L(x,y))$

и χ_{d_j} – инвариантный полином степени d_j на $\mathfrak{g}$

$\Longrightarrow (r_j) + 2d_j(g-1)\infty \geq 0 \Longrightarrow$

Теорема: Спектральная кривая (ее аффинная часть) любой системы Хитчина перечисленных выше типов является полным пересечением двух поверхностей в $\mathbb{C}^3$: $y^2 = P_{2g+1}(x)$ и

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{g(d_j-1)} H_{jk}^{(0)} x^k + \sum_{s=0}^{(g-1)(d_j-1)-2} H_{js}^{(1)} x^s y \right) \lambda^{n-d_j} = 0$$

где $d_j - 1$ – показатели соответствующей системы корней ($j = 1, \dots, n$), $H_k^{(0)}$, $H_s^{(1)}$ – параметры.

Описание гиперэллиптических систем Хитчина типов A_n, B_n, C_n методом разделения переменных (Ш'2018)

Зададим каждую спектральную кривую набором точек в $\mathbb{C}^3$, через которые она проходит. Тогда получим следующее описание систем Хитчина.

Фазовое пространство состоит из троек $\{(x_i, y_i, \lambda_i) \mid i = 1, \dots, (\dim \mathfrak{g})(g-1)\}$ т.ч. $y_i^2 = P_{2g+1}(x_i)$;

Гамильтонианы $H_k^{(0)}$, $H_s^{(1)}$ определены из системы линейных уравнений, полученной подстановкой каждой точки (x_i, y_i, λ_i) в уравнение спектральной кривой;

Скобка Пуассона задана соотношением $\{\lambda_i, x_j\} = \delta_{ij} y_i$ (может быть выведено из Krichever, CMP, 2002)

Пример: Система Хитчина рода 2 и типа A_1

(предыдущие результаты: Э.Превиато'94; К.Гаведски'98)

Базовая кривая Σ: $y^2 = P_5(x)$
Спектральная кривая: $\lambda^2 = H_0 + H_1 x + H_2 x^2$ (П.Борисова, 2018)

Параметризуем класс спектральных кривых тройками $((\lambda_1, x_1, y_1), (\lambda_2, x_2, y_2), (\lambda_3, x_3, y_3))$ s.t.

$$\lambda_i^2 = H_0 + H_1 x_i + H_2 x_i^2, \quad y_i^2 = P_5(x_i) \ (i = 1, 2, 3)$$

В этих координатах

$$H_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & x_1 & x_1^2 \\ \lambda_2^2 & x_2 & x_2^2 \\ \lambda_3^2 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Симплектическая форма:

$$\sigma = d\lambda_1 \wedge \frac{dx_1}{y_1} + d\lambda_2 \wedge \frac{dx_2}{y_2} + d\lambda_3 \wedge \frac{dx_3}{y_3}$$

Координаты Дарбу гиперэллиптических систем Хитчина типов A_l, B_l, C_l

Координаты действия: $H^{(0)}_{jk}$, $H^{(1)}_{js}$.

Координаты угла:

$$\phi^{(0)}_{jk} = \sum_{i=1}^{(\dim \mathfrak{g})(g-1)} \int^{(x_i, y_i, \lambda_i)} \frac{x^k \lambda^{n-d_j} dx}{R'_\lambda(x, y, \lambda)\, y}, ;$$

$$\phi^{(1)}_{js} = \sum_{i=1}^{(\dim \mathfrak{g})(g-1)} \int^{(x_i, y_i, \lambda_i)} \frac{x^s \lambda^{n-d_j} dx}{R'_\lambda(x, y, \lambda)}$$

where $j = 1, \ldots, l$, $0 \le k \le d_j(g-1)$, $0 \le s \le (d_j - 1)(g-1) - 2$, $R = \det(\lambda - L)$.