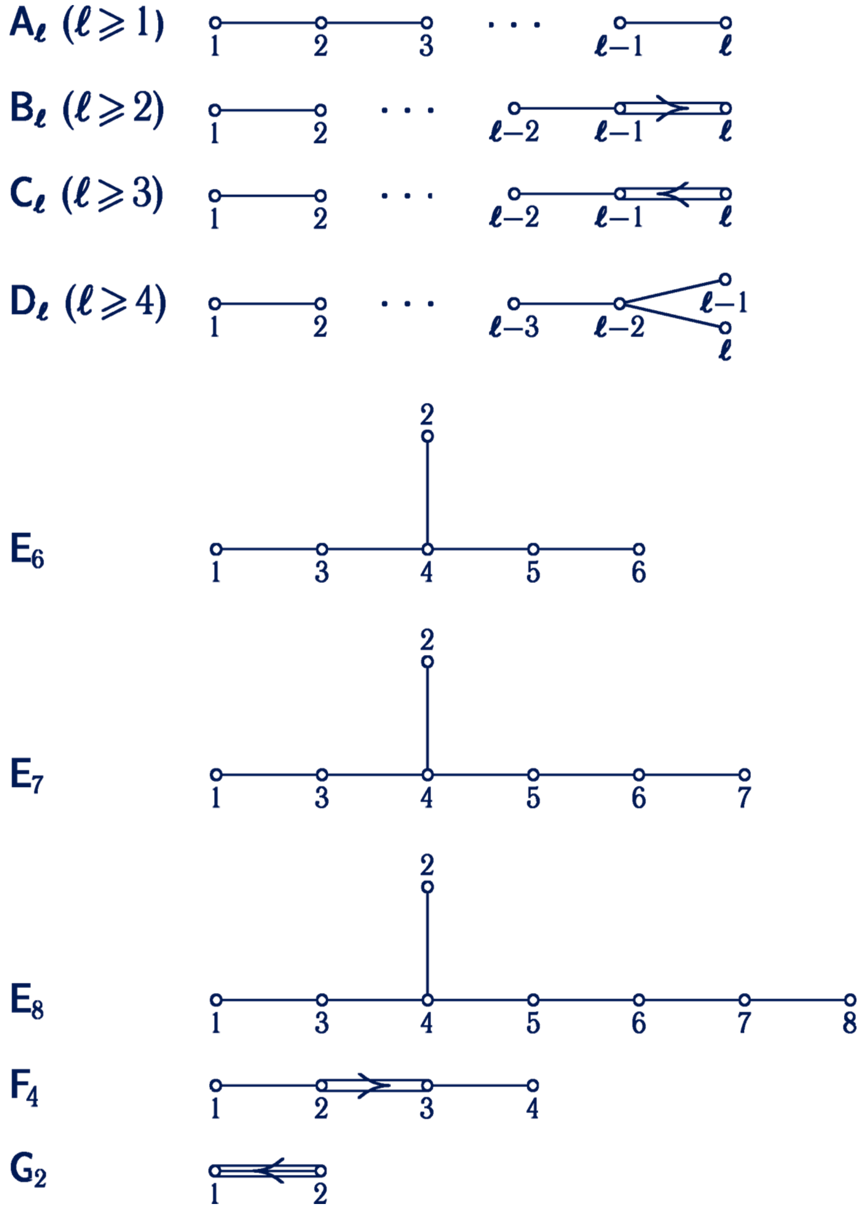
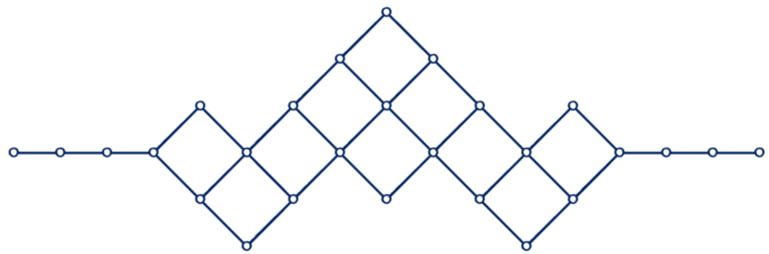


Десятая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва
28 января – 2 февраля 2023

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ



НАУКА И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ РОССИИ

SIMC
Steklov International Mathematical Center

МИАН

Факультет компьютерных наук

Лаборатория алгебраических групп преобразований

Москва
2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

Десятая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия

28 января – 2 февраля 2023 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Tenth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia

January 28 – February 2, 2023

ABSTRACTS

Москва

Издательство

2023

Предисловие

Десятая школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» проходила в Москве с 28 января по 2 февраля 2023 года. Организаторы: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН), г. Москва. Информацию о предыдущих школах-конференциях см. на сайте `http://https://lie-school.ru`.

Программный комитет школы-конференции: И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ), Н.А. Вавилов (СПбГУ), М.Х. Гизатуллин (Самара), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), А.С. Клещёв (Университет Орегона, США), А.Н. Панов (Самарский университет), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), Е.Б. Фейгин (НИУ ВШЭ, Сколтех), В.И. Черноусов (Университет Альберты, Канада), О.К. Шейнман (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), К.А. Шрамов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Организационный комитет школы-конференции: И.В. Аржанцев (НИУ ВШЭ, председатель), С.О. Горчинский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, заместитель председателя), А.Н. Панов (Самарский университет, заместитель председателя), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова, заместитель председателя), М.В. Игнатьев (Самарский университет), Ю.И. Зайцева (НИУ ВШЭ), А.Ю. Перепечко (ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, НИУ ВШЭ), А.А. Шафаревич (МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные из России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Чудесные многообразия в теории сферических многообразий*
  (Роман Сергеевич Авдеев, НИУ ВШЭ, Москва, Россия);

- *Инвариант Макар-Лиманова и автоморфизмы аффинных алгебраических многообразий*
  (Сергей Александрович Гайфуллин, МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия);

- *Автоморфизмы трехмерных многообразий Фано*
  (Александр Геннадьевич Кузнецов, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия);

- *Умножения двойных классов смежности и шлейфы бесконечномерных групп*
(Юрий Александрович Неретин, ИТЭФ им. А.И. Алиханова НИЦ «Курчатовский институт», МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия);
- *Слоения, возникающие из конфигураций векторов, двойственность Гейла и момент-угол многообразия*
(Тарас Евгеньевич Панов, МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия);
- *Квадратичные формы и мотивы Чжоу*
(Виктор Александрович Петров, СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия).

Сборник содержит анонсы лекционных курсов и тезисы докладов участников школы-конференции.

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение 075–15–2022–265).

Оргкомитет

Аннотации лекционных курсов

Чудесные многообразия в теории сферических многообразий

Р.С. Авдеев
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
suselr@yandex.ru

В теории алгебраических групп преобразований видное место занимают сферические многообразия – это алгебраические многообразия, снабжённые регулярным действием связной редуктивной группы G таким образом, что борелевская подгруппа $B \subset G$ обладает плотной открытой B-орбитой. Наиболее известные примеры сферических многообразий — торические многообразия, многообразия флагов и симметрические пространства. С самого начала изучения сферических многообразий в 1980-е гг. внимание исследователей привлекала задача их классификации. Эта задача естественным образом разбивается на две независимых подзадачи: во-первых, классифицировать всевозможные однородные сферические многообразия (они называются сферическими однородными пространствами), а во-вторых, для каждого сферического однородного пространства описать его всевозможные открытые эквивариантные вложения. Полное решение второй подзадачи было известно ещё на заре развития этой науки благодаря знаменитой теории Луны–Вюста открытых эквивариантных вложений однородных пространств. Данная теория позволяет описать все сферические многообразия с фиксированной открытой G-орбитой в терминах так называемых цветных вееров, которые обобщают обычные вееры, используемые для классификации торических многообразий. Задача же классификации сферических однородных пространств оказалась гораздо более сложной и потребовала для своего решения ещё нескольких десятилетий. Принципиальный сдвиг в этом направлении произошёл в 2001 г. благодаря работе Луны, в которой он свёл задачу к задаче классификации так называемых чудесных многообразий (по-английски «wonderful varieties») и сформулировал гипотезу об их полном комбинаторном описании. Чудесные многообразия — это гладкие полные G-многообразия, обладающие плотной открытой G-орбитой и удовлетворяющие дополнительным условиям на конфигурацию остальных G-орбит. Эти многообразия являются сферическими и включают в себя многообразия флагов. В данном курсе планируется обсудить упомянутые выше сюжеты, чудесные многообразия и два различных подхода к доказательству гипотезы Луны, один из которых, инициированный самим Луной в той же работе 2001 г., в итоге привёл к успеху.

Инвариант Макар-Лиманова и автоморфизмы аффинных алгебраических многообразий

С.А. Гайфуллин

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

sgayf@yandex.ru

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над полем k. Алгебраические подгруппы в группе регулярных автоморфизмов X, изоморфные аддитивной группе поля k соответствуют *локально нильпотентным дифференцированиям* алгебры регулярных функций $k[X]$. Напомним, что локально нильпотентным дифференцированием (ЛНД) данной алгебры A называется такой линейный оператор $\delta\colon A \to A$, удовлетворяющий тождеству Лейбница $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$, что для любого $a \in A$ найдётся натуральное n с условием $\delta^n(a) = 0$.

В 1996 году Леонид Макар-Лиманов [2]. предложил рассмотреть пересечение ядер всех ЛНД данной алгебры. В последствии это подкольцо получило название *инвариант Макар-Лиманова* и стало обозначаться $\mathrm{ML}(A)$. Слово «инвариант» отражает тот факт, что данное подкольцо инвариантно относительно регулярных автоморфизмов алгебры.

В курсе лекций будет рассказано некоторое количество техник полезных для вычисления инварианта Макар-Лиманова алгебр (многообразий). Также мы рассмотрим два применения инварианта. Первое — применение для доказательства неизоморфности многообразий. Если две алгебры имеют неизоморфные инварианты Макар-Лиманова, то они не изоморфны. Именно этому применению инвариант обязан своей известностью. Классический пример — это доказательство неизоморфности кубики Кораса–Расселла, которая задаётся в четырёхмерном пространстве уравнением $\{x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\}$ и трёхмерного аффинного пространства. Второе — применение для описания группы автоморфизмов данного многообразия. Оказывается, что знание того, что некоторое подкольцо инвариантно бывает полезно для изучения всей группы автоморфизмов. Также в лекциях мы рассмотрим аналоги инварианта Макар-Лиманова: инвариант Дерксона и некоторые модификации этих двух инвариантов.

Список литературы

[1] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia Math. Sci. **136**. Springer–Verlag, 2006.

[2] L. Makar-Limanov. On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in $\mathbb{C}^4$ or a $\mathbb{C}^3$-like threefold which is not $\mathbb{C}^3$. Israel J. Math. **96** (1996), 419–429.

Автоморфизмы трёхмерных многообразий Фано

А.Г. Кузнецов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
akuznet@mi-ras.ru

Многообразия Фано составляют наиболее важный класс рационально связных (то есть близких к рациональным) проективных алгебраических многообразий. Классификация гладких трёхмерных многообразий Фано, полученная в работах Дж. Фано, В. Исковских, Ш. Мори и Ш. Мукаи — одна из жемчужин алгебраической геометрии XX века. В курсе я расскажу о наиболее интересных трёхмерных многообразиях Фано, в первую очередь об «основной серии» (многообразиях с числом Пикара 1) и о их группах автоморфизмов.

Умножения двойных классов смежности и шлейфы бесконечномерных групп

Ю.А. Неретин
ИТЭФ им. А.И. Алиханова НИЦ «Курчатовский институт», МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
neretin@mccme.ru

Пусть G — группа, K — её подгруппа, пусть $K\backslash G/K$ — пространство двойных классов смежности. Оказвается, что для «бесконечномерных групп» G это факторпространство обладает естественным ассоциативным умножением. Естественность, например, означает, что для любого унитарного представления группы G в пространстве K-неподвижных векторов действует полугруппа двойных классов (первый такой пример был обнаружен Исмагиловым в 1960 гг.). Это бывает, в частности, для бесконечномерных групп матриц (над вещественным, конечным или p-адическим полем), для симметрических групп. Эти полугруппы удаётся явно описывать, и это приводит, с одной стороны, к неожиданным алгебраическим структурам, а с другой — к явным описаниям факторпространств на комбинаторном или геометрическом языке, причём эти описания работают и в конечномерной ситуации. Цель лекций — явные описания инвариантов и мультипликативных структур (унитарные представления будут присутствовать лишь в качестве необходимого фона).

В частности, предполагается обсудить такие примеры.

1) G — произведение нескольких бесконечных симметрических групп, K — диагональная подгруппа (или меньшая симметрическая подгруппа в диагонали).

2) G — бесконечномерная унитарная группа, K — ортогональная подгруппа меньшего размера.

Слоения, возникающие из конфигураций векторов, двойственность Гейла и момент-угол многообразия

Т.Е. Панов
МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ,
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
tpanov@mech.math.msu.su

Пусть $V \cong \mathbb{R}^k$ — вещественное векторное пространство и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ — последовательность (*конфигурация*) векторов в двойственном пространстве V^*, порождающая его. Рассмотрим *экспоненциальное действие* V на пространстве $\mathbb{R}^m$, заданное следующим образом:

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) &\mapsto \Big(x_1 e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v}\rangle}, \ldots, x_m e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v}\rangle}\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Это классический пример динамической системы, восходящий к работам Пуанкаре. В то же время, действие (1), а также его голоморфные и алгебраические версии возникают в важных современных конструкциях алгебраической геометрии и топологии, среди которых

– полные пересечения вещественных и эрмитовых квадрик (*топология и голоморфная динамика*);

– фактор-конструкция Батырева–Кокса торических многообразий (*торическая геометрия*);

– гладкие и комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях и LVM-многообразиях (*торическая топология и комплексная геометрия*).

Имеется замечательная связь между линейными свойствами конфигурации Γ и топологией слоения $\mathbb{R}^m$ орбитами действия (1). Наиболее эффективно эта связь описывается при помощи *двойственной по Гейлу* конфигурации векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ в пространстве $W^* \cong \mathbb{R}^{m-k}$.

С геометрической точки зрения интерес представляют пространства *невырожденных листов* слоения, то есть подмножества $U \subset \mathbb{R}^m$, ограничение действия (1) на которые свободно. Такие подмножества $U = U(\mathcal{K})$ представляют собой дополнения до наборов координатных подпространств в $\mathbb{R}^m$ и задаются симплициальными комплексами $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$. Если действие

V на $U(\mathcal{K})$ не только свободно, но и *собственно* (что влечёт замкнутость орбит), то пространство листов (орбит) $U(\mathcal{K})/V$ является гладким многообразием, а в случае голоморфного или алгебраического действия — комплексно-аналитическим и алгебраическим многообразием, соответственно.

Ключевой топологический факт заключается в том, что действие V на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно тогда и только тогда, когда данные $\{\mathcal{K}; \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ задают *симплициальный веер* Σ в пространстве W^*. На основе двойственности Гейла критерий веера можно сформулировать непосредственно в терминах исходной конфигурации Γ, задающей действие. Кроме того, пространство орбит $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный. В этом случае $U(\mathcal{K})/V$ отождествляется с *вещественным момент-угол-многообразием* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$, а для голоморфного действия на $\mathbb{C}^m$ — с *момент-угол-многообразием* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$. Наконец, если конфигурация Γ (или, эквивалентно, A) лежит в решётке, то веер Σ рационален, а действие (1) задаёт алгебраическое действие тора на $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$, факторпространство которого — торическое многообразие X_Σ. (Это известно как фактор-конструкция Батырева–Кокса.)

Также интерес представляет класс действий, для которых соответствующий веер Σ является нормальным веером выпуклого многогранника. Здесь также имеется критерий в терминах конфигурации Γ на основе двойственности Гейла. (В рациональном случае это даёт критерий того, что торическое многообразие X_Σ является проективным.) В случае, когда веер Σ является нормальным, пространство орбит $U(\mathcal{K})/V$ отождествляется с невырожденным пересечением вещественных квадрик (а в случае голоморфного действия — с пересечением эрмитовых квадрик). Доказательство этого факта использует свойства многомерного преобразования Лежандра.

Квадратичные формы и мотивы Чжоу

В.А. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

v.a.petrov@spbu.ru

Пусть F — поле характеристики не два. Пифагоровым числом поля F назовем такое наименьшее число n, что любой элемент поля, представимый в виде суммы нескольких квадратов, представим уже в виде суммы n квадратов. Например, пифагорово число поля вещественных чисел равно 1, конечного поля равно 2, а по теореме Лагранжа о сумме четырех квадратов пифагорово число поля рациональных чисел равно 4.

Можно предположить, что пифагорово число всегда является степенью двойки. Но оказывается, что для любого натурального n существует поле с пифагоровым числом n. Что удивительно, для своего доказательства этот элементарный по формулировке факт требует привлечения тонких понятий из теории квадратичных форм (размерность Ижболдина) и мощной техники мотивов Чжоу. Конечно, эта теория имеет и другие применения, некоторые из которых я упомяну в курсе.

Тезисы докладов участников

Количество классов сопряжённых элементов и проблема распознавания

К.К. Абдурасулов
Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
abdurasulov0505@mail.ru

В этой работе приведена классификация разрешимых алгебр Ли с нильрадикалом коразмерности, равной числу порождающих нильрадикалов. Учитывая единственность таких алгебр Ли, данная классификация даёт положительное решение гипотезы Снобля в случае, когда коразмерность нильрадикала совпадает с числом порождающих нильрадикалов. Более того, доказана полнота этих алгебра.

Определение 1. Алгебра G над полем F называется алгеброй Ли, если для любых элементов $x, y, z \in G$ выполняются следующие два тождества:

$$[x, x] = 0 - \text{тождество антикоммутативности},$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 - \text{тождество Якоби},$$

где $[-, -]$ — умножение в G.

Для произвольной алгебры Ли L определим ряды

$$L^{[1]} = L,\ L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}]; \qquad L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L^1],\ k \geqslant 1.$$

Определение 2. Алгебра Ли L называется разрешимой (соответственно, нильпотентной), если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^{[s]} = 0$ (соответственно, $L^s = 0$).

Максимальный нильпотентный идеал алгебры Ли L называется нильрадикалом.

Определение 3. Линейное отображение $d \in End(L)$ называется дифференцированием алгебры L, если выполняется равенство

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \quad \text{для любых } x, y \in L.$$

Справедливость тождества Якоби влечёт тот факт, что оператор правого умножения на элемент алгебры является дифференцированием алгебры. Дифференцирования вида $ad_x(y) = [y, x]$ называются внутренними.

Определение 4. [1] Алгебра Ли называется полной, если её центр тривиальный и любое дифференцирование алгебры является внутренним.

Приведем гипотезу Снобля о разрешимых алгебрах максимальной размерности с заданным нильрадикалом [2].

Гипотеза. Пусть N — комплексная нильпотентная (не характеристически нильпотентная) алгебра Ли. Пусть $L,\ L'$ – разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом N максимальной размерности в том смысле, что нет таких разрешимых алгебр Ли больших размерностей. Тогда алгебры L и L' изоморфны.

Теорема 1. Пусть L — разрешимая алгебра Ли с нильрадикалом N и такая, что $\dim L/N = \dim N/N^2 = k$. Тогда R допускает базис $\{e_1,\ \dots,\ e_k,\ e_{k+1},\ \dots,\ e_n,\ x_1,\ \dots,\ x_k\}$ такой, что таблица умножения в L имеет следующий вид:

$$\begin{cases} [e_i, e_j] = \sum\limits_{t=k+1}^{n} \gamma_{i,j}^t e_t, & 1 \leqslant i, j \leq n, \\ [e_i, x_i] = e_i, & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ [e_i, x_j] = \alpha_{i,j} e_i, & k+1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k, \end{cases}$$

где $\alpha_{i,j}$ — количество вхождений базисного элемента $e_j,\ j = 1,\ \dots,\ k$, в формирование элемента $e_i,\ i = k+1,\ \dots,\ n$.

Замечание. Следует отметить, что в Теореме 1 структурные константы $\alpha_{i,j}$ разрешимой алгебры Ли однозначно определяются структурными константами нильрадикала. Таким образом, Теорема 1 даёт положительное решение Гипотезы в случае, когда $\dim L/N = \dim N/N^2$.

Теорема 2. Пусть L — разрешимая алгебра Ли с нилрадикалом N и такая, что $\dim L/N = \dim N/N^2$. Тогда L — полная алгебра.

Список литературы

[1] Н. Джекобсон. Алгебры Ли. М.: Мир. — 1964.

[1] L. Šnobl. On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras. J. Phys. A **43** (2010), 505202.

Многогранники Кокстера в пространствах Лобачевского

С.А. Александров
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
cyanprism@gmail.com

Многогранниками Кокстера называют многогранники, все углы которых являются целыми частями π. В евклидовых пространствах и на сферах все такие многогранники были классифицированы Кокстером в 1934 году. Изучение многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского было начато Винбергом. В 1984 году ему удалось доказать, что, в отличие от евклидового и сферического случаев, в пространствах Лобачевского размерности 30 и более таких многогранников нет. В 1992 Бугаенко построил пример многогранника Кокстера рекордной на текущий момент размерности 8. Одной из центральных задач этой области является нахождение размерностей, в которых такие многогранники могут существовать.

В своём докладе я расскажу о моих основных результатах, полученных в работе [1], а также недавних продвижениях других авторов в этой области (см. [2], [3], [4]).

Список литературы

[1] S. Alexandrov. Lannér diagrams and combinatorial properties of compact hyperbolic Coxeter polytopes, arXiv: `math.GT/2203.07248` (2022).
[2] A. Burcroff. Near classification of compact hyperbolic Coxeter d-polytopes with $d+4$ facets and related dimension bounds, arXiv: `math.CO/2201.03437` (2022).
[3] J. Ma and F. Zheng. Compact hyperbolic Coxeter 4-polytopes with 8 facets, arXiv: `math.GT/2201.00154` (2022).
[4] J. Ma and F. Zheng. Compact hyperbolic Coxeter five-dimensional polytopes with nine facets, arXiv: `math.GT/2203.16049` (2022).

Лучезарные торические многообразия I

И.В. Аржанцев[1]
ФКН НИУ ВШЭ, Москва, Россия
arjantsev@hse.ru

Полное торическое многообразие X будем называть лучезарным, если максимальная унипотентная подгруппа U группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X с открытой орбитой. Оказывается, такие многообразия могут быть охарактеризованы целым рядом замечательных свойств. В докладе мы

[1]Работа автора выполнена в НИУ ВШЭ за счёт гранта РНФ №22–41–02019.

обсудим эти свойства, охарактеризуем полные веера, отвечающие лучезарным многообразиям, и предложим комбинаторную технику, позволяющую описывать множество корней Демазюра лучезарного многообразия. В качестве приложения будет описана структура максимальной унипотентной подгруппы U группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Доклад основан на совместных работах с Александром Перепечко, Еленой Ромаскевич и Кириллом Шахматовым.

Список литературы

[1] К.В. Шахматов. Гладкие непроективные эквивариантные пополнения аффинного пространства. Математические заметки **109** (2021), no. 6, 929–937.

[2] I. Arzhantsev, A. Perepechko, K. Shakhmatov. Radiant toric varieties and unipotent group actions, arXiv: `math.RT/2209.04021` (2022).

[3] I. Arzhantsev, Romaskevich. Additive actions on toric varieties. Proceedings of the American Mathematical Society **145** (2017), no. 5, 1865–1879.

[4] S. Dzhunusov. Additive actions on complete toric surfaces. International Journal of Algebra and Computation **31** (2021), no. 1, 19–35.

[5] S. Dzhunusov. On uniqueness of additive actions on complete toric varieties. J. Algebra **609** (2022), 642–656.

Модели конечномерных неприводимых представлений для классических алгебр Ли

Д.В. Артамонов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

artamonov.dmitri@gmail.com

Моделью неприводимых конечномерных представлений будем называть прямую сумму с кратностью 1 всех конечномерные непроходимых представлений алгебры $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{sp}_{2n}$, $\mathfrak{o}_{2n+1}$, $\mathfrak{o}_{2n}$. Такое понятие было введено в [1]. Имеется несколько очень близких явных конструкций моделей: конструкция Вейля с помощью тезорных произведений векторного представления; конструкция с помощью операторов рождения/уничтожения (для серии A); конструкция Желобенко с помощью функций на группе на соотвествующей группе Ли (для всех серий).

В докладе будет предложена ещё одна близкая явная конструкция. Модель будет выделяться как пространство решений некоторой системы УрЧП.

Пусть $Z = \{1, ..., n\}$ для серии A; $Z = \{-n, ..., -1, 1, ..., n\}$ для серий C, D; $Z = \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n\}$ для серии B. Возьмём независимые переменные

A_X, индекированные собственными подмножествами $X \subset Z$. На эти переменные алгебра Ли действует путём действия на индексы, входящие в X. Соответственно, есть действие на функции от этих переменных.

С переменной $A_{i_1,\dots,i_k}$ связывается минор, построенный на столбцах $i_1, \dots, i_k$ и первых k строках. В пространстве полиномов от переменных A_X имеется идеал Pl, порожденный соотношениями, которым удовлетворяют данные миноры для матриц, лежащих в соответствующей группе Ли. Этот идеал инвариантен под действием алгебры Ли. Теперь, заменив $A_X \mapsto \frac{d}{dA_X}$, получим идеал в кольце дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Пространство его решений и будет моделью представлений.

При этом систему УрЧП, задаваемую данным идеалом, можно записать в виде антисимметризованной системы ГКЗ (А–ГКЗ). Эта система УпЧП тесно связана с гипергеометрической системой Гельфанда–Капранова–Зелевинсокого, и эта связь позволяет построить базис в пространстве решений системы А–ГКЗ. Таким образом, модель будет обладать явно построенным базисом. В докладе будет установлена связь этого базиса с базисом Гельфанда–Цетлина.

В данной модели совершенно явно записывается инвариантное скалярное произведение, это делает возможным явно осуществить некоторые нетривиальные вычисления [3]. Для серии A результаты опубликованы в [2].

Список литературы

[1] И.М. Гельфанд, А.В. Зелевинский, Модели представлений классических групп и их скрытые симметрии. Функциональный анализ и его приложения **18** (1984), no. 3, 14–31.

[2] D.V. Artamonov. A functional realization of the Gelfand–Tsetlin base. Известия РАН. Сер. матем., принято к печати; arXiv: `math.RT/2210.4560213` (2022).

[3] Д.В. Артамонов. Формулы вычисления $3j$-символов для представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$ в базисе Гельфанда–Цетлина. Сибирский математический журнал **63** (2022), no. 4, 595–610; arXiv: `math.RT/2105.10761`.

Горенштейновы алгебры и единственность аддитивных действий

И.С. Бельдиев

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

ivbeldiev@gmail.com

Будем предполагать, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. Аддитивное действие на алгебраическом многообразии X — это эффективное регулярное действие группы $\mathbb{G}_a^m \cong (\mathbb{K},+)^m$ на X с открытой орбитой. В случае, когда X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, аддитивное действие на X называется индуцированным, если оно продолжается до регулярного действия на $\mathbb{P}^n$.

В работе [1] доказано, что существует, с точностью до естественных эквивалентностей, взаимно-однозначное соответствие между индуцированными аддитивными действиями на гиперповерхностях в $\mathbb{P}^{n-1}$, не содержащихся ни в какой гиперплоскости, и парами (A, U), называемыми H-парами, где A — локальная конечномерная алгебра размерности n с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ (что, как показано в той же работе [1], эквивалентно условию $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$), $U \subset \mathfrak{m}$ — подпространство коразмерности 1, порождающее алгебру A.

Отдельный интерес представляет случай, когда X — невырожденная гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, то есть такая гиперповерхность, уравнение которой при любом выборе координат в $\mathbb{P}^n$ зависит от $n+1$ однородной переменной. В работе [1] установлена связь между аддитивными действиями на невырожденных гиперповерхностях и горенштейновыми локальными конечномерными алгебрами (то есть такими локальными конечномерными алгебрами A с максимальным идеалом m, для которых идеал $\operatorname{Soc} A = \{a \in A \mid \mathfrak{m}a = 0\}$ одномерен). А именно, доказано, что индуцированные аддитивные действия на невырожденных гиперповерхностях степени d в $\mathbb{P}^{n-1}$ взаимно-однозначно оответствуют H-парам (A, U), где A — горенштейнова алгебра размерности n с цоколем $\mathfrak{m}^d$ и U — дополнительная к $\operatorname{Soc} A$ гиперплоскость в $\mathfrak{m}$. Более того, там же доказано, что если $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — невырожденная гиперповерхность, то существует не более одного индуцированного действия на X с точностью до эквивалентности. В связи с этим сформулирована естественная гипотеза.

Гипотеза. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — вырожденная гиперповерхность, допускающая индуцированное аддитивное действие. Тогда существует не меньше двух индуцированных аддитивных действий на X с точностью до эквивалентности.

Автору удалось доказать эту гипотезу, что в совокупности с перечисленными результатами приводит к следующей теореме.

Теорема. Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ — гиперповерхность, допускающая индуцированное аддитивное действие. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) индуцированное аддитивное действие на X единственно;

(b) X невырожденна;

(c) индуцированному аддитивному действию на X соответствует H-пара (A, U), для которой алгебра A горенштейнова, а $U \subset \mathfrak{m}$ — подпространство, дополнительное к идеалу $\operatorname{Soc} A$.

Помимо этого, в работе [1] показано, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d, допускающая индуцированное аддитивное действие, то $d \leqslant n$, а также отмечено, что при $n \leqslant 5$ существуют индуцированные аддитивные действия на невырожденных гиперповерхностях в $\mathbb{P}^n$ всех степеней от 2 до n. Возникает вопрос: верно ли это утверждение для произвольного $n \geqslant 2$? Ответ на этот вопрос, как удалось доказать автору, положительный. Сформулируем соответствующий результат в виде предложения.

Предложение. Для любых натуральных n и d таких, что $2 \leqslant d \leqslant n-1$, в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ существует невырожденная гиперповерхность степени d, допускающая индуцированное аддитивное действие.

Работа поддержана грантом №23–21–00472 РНФ.

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев, Ю.И. Зайцева. Эквивариантные пополнения аффинных пространств. УМН **77 (466)** (2022), no. 4, 3–90.

Характеры неприводимых представлений унитреугольной группы

М.С. Венчаков, М.В. Игнатьев

Самарский университет, Самара, Россия

mihail.venchakov@gmail.com, mihail.ignatev@gmail.com

Пусть N — конечная группа, $\varphi\colon N \to GL(V)$ — её конечномерное комплексное представление, $\chi\colon N \to \mathbb{C}$ — его характер. Назовём носителем характера множество

$$\operatorname{Supp}(\chi) = \{g \in N \mid \chi(g) \neq 0\}.$$

Далее, пусть $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Обозначим через

$B \subset G$ борелевскую подгруппу в G, состоящую из верхнетреугольных матриц из G, и пусть $N \subset B$ — её унипотентный радикал (он состоит из верхнетреугольных матриц из G с единицами на главной диагонали).

Основным инструментов в теории представлений группы N является метод орбит, созданный А.А. Кирилловым в 1962 году [5]. Его суть в следующем. Группа N действует своей алгебре Ли $\mathfrak{n}$, состоящей из верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали, присоединённым способом. Это задаёт двойственное действие на двойственном пространстве $\mathfrak{n}^*$; это действие называется коприсоединённым. При отождествлении $\mathfrak{n}^*$ с пространством нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали с помощью формы следа это действие принимает вид

$$g.\lambda = (g\lambda g^{-1})_{\mathrm{low}},\ g \in N,\ \lambda \in \mathfrak{n}^*,$$

где матрица $(a)_{\mathrm{low}}$ получается из матрицы a заменой элементов на диагонали и выше на нули. Метод орбит гласит, что имеется взаимно однозначное соответствие между неприводимыми характерами группы N и её коприсоединёнными орбитами. А именно, орбите Ω соответствует характер

$$\chi_\Omega(g) = \frac{1}{\sqrt{|\,\Omega\,|}} \sum_{\mu\in\Omega} \theta(\mu(\ln(g))),\ g \in N,$$

где $\theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ — фиксированный нетривиальный гомоморфизм групп.

Описание орбит в общем случае — дикая задача, поэтому особый интерес представляет изучение классов орбит, важных с точки зрения теории представлений, и соответствующих им характеров. На пространстве $\mathfrak{n}^*$ есть естественная стратификация N-инвариантными подпространствами

$$\mathfrak{n}_k = \{\lambda \in \mathfrak{n} \mid \lambda_{n,i} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Определение. Характер глубины k — это характер, соответствующий орбите максимальной размерности в $\mathfrak{n}_k$.

К примеру, орбиты максимально возможной размерности были описаны в самой первой работе А.А. Кириллова по методу орбит [5]. Соответствующие им характеры глубины 0 были вычислены К. Андре в 2001 году [1]. Далее, орбиты предмаксимальной размерности были описаны А.Н. Пановым в работе [3]. Характеры глубины 1, отвечающие некоторым из таких орбит, были вычислены вторым автором в работе [2].

Следующий естественный шаг — вычисление характеров глубины 2; это и является основной целью доклада. А именно, мы классифицируем орбиты максимальной размерности в $\mathfrak{n}_2$; они параметризуются парами (D, ψ), где D — некоторое подмножество в множестве Φ^+ положительных корней группы G, а $\psi\colon D \to \mathbb{F}_q^\times$ — произвольное отображение. Далее, для каждого такого D мы опишем ряд подмножеств $D' \subset \Phi^+$; каждому такому подмножеству и произвольному отображению $\xi\colon D' \to \mathbb{F}_q^\times$ мы сопоставляем элемент

$$x_{D',\xi} = 1 + \sum_{(i,j)\in D'} \xi(i,j)e_{i,j} \in N,$$

где $e_{i,j}$ — элементарная матрица с единицей на месте (i, j) и нулями в остальных местах, а множество положительных корней отождествляется с

$$\Phi^+ = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Наконец, обозначим через $\mathcal{K}_{D',\xi}$ класс сопряжённости элемента $x_{D',\xi}$ в группе N.

Основной результат заключается в следующем.

Теорема. i) *Получена явная система уравнений, задающих каждый класс сопряжённости* $\mathcal{K}_{D',\xi}$. ii) *Доказано, что* $\mathrm{Supp}(\chi_{D,\psi}) = \bigsqcup_{D',\xi} \mathcal{K}_{D',\xi}$. iii) *Для произвольных* D', ξ *вычислено значение*

$$\chi_{D,\psi}(x_{D',\xi}) = q^{m_D} \prod_{(i,j)\in D\cap D'} \theta(\psi(i,j)\chi(i,j)),$$

где m_D *— некоторое целое число, которое однозначно определяется по* D. *Всё это вместе даёт полное описание характеров глубины* 2.

Список литературы

[1] C.A.M. Andre. The basic character table of the unitriangular group, J. Algebra **241** (2001), 437–471.

[2] M.V. Ignatev. Subregular characters of the unitriangular group over a finite field. J. Math. Sci. **156** (2009), no. 2, 276–291; arXiv: `math.RT/0801.3079`.

[3] M.V. Ignatev, A.N. Panov. Coadjoint orbits of the group $\mathrm{UT}(7, K)$. J. Math. Sci. **156** (2009), no. 2, 292–312; arXiv: `math.RT/0603649`.

[4] M.V. Ignatev, M.S. Venchakov. Characters of depth 2 of the unitriangular group, in preparation.

[5] A.A. Kirillov. Unitary representations of nilpotent Lie groups, Russian Math. Surveys **17** (1962), no. 4, 53–104.

Количество классов сопряжённых элементов и проблема распознавания

Г.В. Воскресенская

Самарский университет, Самара, Россия

galvosk@mail.ru

В современных исследованиях по теории групп актуальными являются проблемы распознавания групп по некоторым условиям. Здесь возможны разные подходы. В исследованиях математиков В.Д. Мазурова, Д.О. Ревина, М.А. Гречкосеевой и других исследуется проблема распознавания группы по спектру — множеству $\omega(G)$ порядков её элементов [2]. В работах И.Б. Горшкова, Н.В. Масловой исследуется распознавание по графу Грюнберга–Кегеля [1]. В работе В.В. Паньшина изучается распознавание групп по множеству размеров классов сопряжённости [3].

В этом докладе мы расскажем о распознавании ещё по по одному множеству. Пусть G — конечная группа, $c(n,G)$ — количество классов сопряжённых элементов, на которые распределяются элементы порядка n в группе G. Если в группе нет элементов порядка n, то $c(n,G)=0$. Мы расскажем об исследованиях проблемы распознавания по множеству $\{c(n,G)\}$, которое для краткости обозначим через $ncl(G)$. Если группы распознаваемы по спектру, то они распознаются и по множеству $ncl(G)$, однако групп, распознаваемых по множеству $ncl(G)$, больше. В ряде случаев для распознавания группы нет необходимости указывать всё это множество и даже предварительно указывать порядок группы.

Выделяются три основных вопроса:

1) Когда группа G определяется множеством $ncl(G)$ однозначно?

2) Какие группы имеют одни и те же множества $ncl(G)$?

3) Какие группы можно определить частичными условиями на числа $c(n,G)$?

Теорема 1. Абелева группа однозначно распознается по множеству $ncl(G)$, если указан её порядок.

Теорема 2. Пусть p — простое число, $|G|=p^n$, $n\geqslant 4$, $c(p^{n-1},G)\neq 0$. Тогда группа G однозначно распознаётся по частичным условиям на числа $c(n,G)$. Условия приведены в следующей таблице.

G	Частичные условия на $c(n,G)$
$Z_{p^{n-1}}\times Z_p$	p нечётное, $c(p^n,G)=0,\ c(p^{n-1},G)=p^n-p^{n-1}$
Z_{p^n}	p нечётное, $c(p^n,G)\neq 0$
$\langle a,b\colon a^{p^{n-1}}=b^p=e, ba=a^{1+p^{n-2}}b\rangle$	p нечётное, $c(p^n,G)=0,\ c(p^{n-1},G)=p^{n-1}-p^{n-2}$
Z_{2^n}	$c(2^n,G)\neq 0$
$Z_{2^{n-1}}\times Z_2$	$c(2^n,G)=0,\ c(2^{n-1},G)=2^{n-1}, c(2,G)=3$
$D_{2^{n-1}}$	$c(2^n,G)=0,\ c(2^{n-1},G)=2^{n-2},\ c(2,G)=3$
$\langle a,b\colon a^{2^{n-1}}=b^2=e,$ $bab^{-1}=a^{1+2^{n-2}}\rangle$	$c(2^{n-2},G)=2^{n-1},$ $c(2^n,G)=0,\ c(2,G)=2,\ c(8,G)=4$
$\langle a,b\colon a^{2^{n-1}}=b^2=e,$ $bab^{-1}=a^{-1+2^{n-2}}\rangle$	$c_G(2^{n-2})=2^{n-2},$ $c(2^n,G)=0,\ c(2,G)=2,\ c(8,G)=2$
$\langle a,b\colon a^{2^{n-1}}=b^2=e,$ $b^2=a^{2^{n-2}}, bab^{-1}=a^{-1}\rangle$	$c(2^n,G)=0,\ c(2,G)=1$

Теорема 3. В группе G выполняются условия $c(3, G) = 2$, $c(1, G) = c(2, G) = 1$, $c(n, G) = 0\ \forall n \neq 1, 2, 3$, если и только если $G \cong A_4$.

Список литературы

[1] И.Б. Горшков, Н.В. Маслова. Конечные простые группы с графами Грюнберга–Кегеля как у разрешимых групп. Алгебра и логика **57** (2018), no. 2, 175–196.

[2] В.Д. Мазуров. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов. Алгебра и логика **37** (1998), no. 6, 651–666.

[3] В.В. Паньшин. О распознавании групп по множеству размеров классов сопряженности. Вторая конференция Математических центров России, 7–11 ноября 2022: сборник тезисов. М.: Изд-во МГУ, 2022, 172–173.

[4] М. Холл. Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 468 с.

Гомологии петель момент-угол комплексов и квазиторических многообразий

Ф.Е. Вылегжанин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия

vylegf@gmail.com

Квазиторические многообразия — это обобщение гладких проективных торических многообразий [1]. Гладкое многообразие M^{2n} с локально стандартным действием компактного тора T^n называют квазиторическим, если пространство орбит диффеоморфно простому выпуклому многограннику P.

Имеет место следующий аналог конструкции Батырева–Кокса. Симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на m вершинах сопоставим *момент-угол комплекс* [2]

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{J \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^J \subset (D^2)^m, \quad (D^2, S^1)^J = \prod_{j \in J} D^2 \times \prod_{i \in [m] \setminus J} S^1.$$

Тогда любое квазиторическое многообразие над P можно получить факторизацией момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\partial P^*}$ по свободному действию некоторого подтора $T^{m-n} \subset (S^1)^m$. Таким образом, квазиторические многообразия задаются комбинаторными данными $(\mathcal{K}, \Lambda)$, $\mathcal{K} = \partial P^*$, $\Lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$.

Мы изучаем гомологии пространств петель на момент-угол комплексах и квазиторических многообразиях. Результаты Панова и Рэя [3] дают вложение этих алгебр в Ext-алгебру кольца Стэнли–Райснера $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Более точно, имеем расширения алгебр Хопфа

$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \Lambda[u_1,\ldots,u_m] \to 0,$$

$$1 \to H_*(\Omega M;\mathbf{k}) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \Lambda[\theta_1,\ldots,\theta_n] \to 0.$$

Если симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *флаговый* (любой набор вершин, попарно соединённых рёбрами, является симплексом), то Ext-алгебра кольца Стэнли–Райснера известна из работ Фрёберга:

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = T(u_1,\ldots,u_m)/(u_1^2=\cdots=u_m^2=0;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}).$$

Это позволяет описать образующие и вычислить число соотношений.

Теорема [4]. Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс, $\mathbf{k}$ — поле. Тогда алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ минимально задаётся $\sum_{J\subset[m]}\dim_\mathbf{k}\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ образующими Грбич–Панова–Терио–Ву [5] вида

$$[u_{j_1},[\ldots,[u_{j_k},u_i]\ldots]],\ J=\{j_1<\cdots<j_k\}\sqcup\{i\}$$

и $\sum_{J\subset[m]}\dim_\mathbf{k}\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ соотношениями. Относительно естественной $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m)$-градуировки образующие и соотношения имеют степени $(-|J|,2J)$.

Теорема. Пусть многогранник P таков, что $\mathcal{K}=\partial P^*$ — флаговый симплициальный комплекс, $\mathbf{k}$ — поле. Тогда алгебра $H_*(\Omega M;\mathbf{k})$ минимально задаётся $h_1(P)=(m-n)$ образующими степени 1 и

$$h_2(P)=f_{n-2}(P)-m(n-1)+n(n-1)/2$$

соотношениями степени 2. Образующие – это линейные комбинации элементов $u_1,\ldots,u_m$, соответствующие базису решётки $\mathrm{Ker}(\Lambda)\simeq\mathbb{Z}^{m-n}$.

Частичные результаты также получены для «почти флаговых» комплексов.

Теорема. Пусть симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ получен из флагового комплекса $\mathcal{K}^f$ удалением максимальных граней $I_1,\ldots,I_r$, $|I_j|\ge 3$. Тогда алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ является свободным произведением алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^f};\mathbf{k})$ и тензорной алгебры на $\sum_{s=1}^r 2^{m-|I_s|}$ образующих вида

$$[u_{k_1},[u_{k_2},\ldots,[u_{k_t},w_{I_j}]\ldots]],\quad j=1,\ldots,r;\ \{k_1<\cdots<k_t\}\cap I_j=\varnothing.$$

Здесь w_{I_j} — «высшие коммутаторы» элементов u_i, $i\in I_j$, соответствующие недостающим граням I_j.

Исследование выполнено при поддержке фонда «Базис» и в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] M. Davis, T. Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.

[2] V.M. Buchstaber, T.E. Panov. Toric topology. Math. Surv. Monogr. **204** Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2015.

[3] T.E. Panov, N. Ray. Categorical aspects of toric topology. Toric topology. Proc. Int. Conf., Osaka, 2006. Contemp. Math. **460**. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008, 293–322.

[4] Ф.Е. Вылегжанин. Алгебры Понтрягина и LS-категория момент–угол-комплексов во флаговом случае. Труды МИАН **317**(2022), 64–88; arXiv: `math.AT/2203.08791`.

[5] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, J. Wu. The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes. Trans. Amer. Math. Soc., **368(9)** (2016), 6663–6682.

Комбинаторика множеств исключительных кривых на поверхностях дель Пеццо, связанная с группами Вейля–Кокстера

М.Х. Гизатуллин
Самара, Россия
gizmarat@yandex.ru

В 1858 году Людвиг Шлефли (L. Schläfli) указал на существование так называемых двойных шестёрок (*double-sixes*) прямых на гладкой кубической поверхности (его первая статья на эту была, благодаря быстрому содействию А. Кэли, опубликована на английском, и термин *double-six* моментально вошёл в обиход геометров мира). Всего на кубической поверхности имеется 27 прямых, и из них можно составить 36 двойных шестёрок. Иногда такие (или похожие) 36 объектов рассматриваются как результат проективизации 72-х аффинных (или даже евклидовых) объектов, но я этого делать не буду. В докладе хочу обсудить некоторые проективные конфигурации, составляемые из таких шестёрок.

В 1932-м году Тодд (J.A. Todd) обратил внимание геометров на одно двенадцатиэлементное множество попарно непересекающихся троек из двойных шестёрок. Интерес математиков к этому примеру привлёк Кокстер (H.S.M.

Coxeter) в статье 1940-го года. Конечно, такое множество представляет из себя геометрическую конфигурацию, поэтому геометрические свойства такой дюжины сохраняются при действии группы Вейля $W(E_6)$, и можно таким действием произвести более полутысячи тоддовых дюжин. Я обнаружил примеры более коротких (точнее, девятиэлементных) множеств из попарно непересекающихся четвёрок, состоящих из двойных шестёрок. Указанных четвёрок имеется 135, а упомянутых девяток из таких четвёрок — всего 960. Чуть расширенная группа $W(E_6)$ действует на этих 960 объектах транзитивно, стабилизатор девятки — группа из 54-х элементов, рассмотренная Тоддом в одной его работе 1946 года (работа посвящена описанию всей группы Вейля и связанным с ней проективным конструкциям).

Планирую также рассказать о проблеме Киркмана для указанных девяток. Варианты проблемы Киркмана популяризировал Кокстер при редактировании и частичном пересмотре книги Болла (W.W. Rouse Ball) «Математические эссе и развлечения». При рассмотрении этой проблемы возникают интересные, на мой взгляд, алгебраические и топологические конструкции.

Надеюсь успеть, если позволит время, рассказать коротко об обобщениях перечисленных рассмотрений на случай некоторых поверхностей дель Пеццо, точнее, поверхностей, связанных с группами $W(E_7), W(E_8)$.

О порождающих декартовой подалгебры и идеалов свободного произведения алгебр Ли

Б.Н. Демисенов
Костанайский региональный университет имени А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан
demissenov@mail.ru

Все алгебры, которые мы рассмотрим в докладе, — это ассоциативные и лиевы алгебры над одним и тем же полем $\boldsymbol{k}$. Вначале приведем новое доказательство того, что декартова подалгебра D свободного лиевого произведения алгебр Ли $*_{Lie}A_\alpha$ — это свободная лиева алгебра. Ранее этот результат был получен Кукиным Г.П. и Эйделькиндом Д.И., независимо друг от друга (см. [1], [2]). Новое доказательство проще известных доказательств. В ходе доказательства сформировано множество порождающих, отличное от использовавшихся в работах вышеназванных авторов. Это множество свободных порождающих декартовой подалгебры D свободного произведения двух алгебр Ли используется далее, где исследуются идеалы свободных лиевых произведений двух алгебр Ли $A*_{Lie}B$. Получен необходимый признак принадлежности идеалу свободного произведения – аналог леммы Ширшова (см. [3]). Так же, как и в названной лемме, это всё получено только для множеств с определёнными ограничениями, порождающих рассматриваемый идеал.

Всё это позволило доказать теорему о том, что свободное лиево произведение ненулевых алгебр Ли не может совпадать ни с каким своим главным идеалом.

В качестве следствия из теоремы получен (для свободного произведения алгебр Ли) аналог гипотезы Кервера–Лауденбаха для свободного произведения групп (см. [4]), для которой Клячко А.А. дал отрицательный ответ в классе групп без кручения (см. [5]). Следует отметить, что гипотеза Кервера–Лауденбаха для алгебр Ли является также прямым следствием результата Бокутя Л.А. из работы [6]. Необходимые сведения об алгебрах Ли можно найти в монографии [7].

Список литературы

[1] Г.П. Кукин. О свободных произведениях ограниченных алгебр Ли. Матем. сб. **95(137)** (1974), no. 1(9), 53–83.
[2] Д.И. Эйделькинд. Вербальные произведения групп Магнуса. Матем. сб. **85(127)** (1971), no. 4(8), 504–526.
[3] А.И. Ширшов. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли. Сиб. мат. журн. **3** (1962), no. 2, 292–296.
[4] Р. Линдон, П. Шупп. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.
[5] А.А. Клячко. Гипотеза Кервера–Лауденбаха и уравнения над группами. Третья Межд. конф. по алгебре, 23–28 августа 1993 г., сборник тезисов. Красноярск, 1993, 150–151.
[6] Л.А. Бокуть. Вложение алгебр Ли в алгебраически замкнутые алгебры Ли. Алгебра и логика **1** (1962), no. 2, 47–53.
[7] Ю.Л. Бахтурин. Тождества в алгебрах Ли. — М: Наука, 1985.

B-нормализуемые $\mathbb{G}_a$-действия на произвольных сферических многообразиях

В.С. Жгун
Московский физико-технический институт,
НИИСИ РАН, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
zhgoon@mail.ru

Доклад основан на совместных работах с Р.С. Авдеевым [2], [3]. Мы обсудим необходимые и достаточные условия существования и единственности B-нормализуемых действий аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a$ на сферических многообразиях.

Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, снабжённое действием связной редуктивной алгебраической группы G. Нас будут интересовать регулярные $\mathbb{G}_a$-действия на X, нормализуемые действием борелевской подгруппы $B \subset G$. Всякое такое действие индуцирует подгруппу в группе автоморфизмов многообразия X, называемую *B-корневой подгруппой* на X. Для всякой B-корневой подгруппы H на X присоединённое действие группы B на $\mathrm{Lie}(H)$ сводится к умножению на характер группы B, который мы обозначим через $\chi(H)$ и будем называть *весом* H. Если ∂ — локально нильпотентное дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$, соответствующее H, то ∂ также нормализуется группой B, причём с тем же весом $\chi(H)$.

Далее будем предполагать, что многообразие X является *сферическим*, то есть оно нормально и обладает открытой B-орбитой. Обозначим через $\mathcal{D}^B$ (соответственно $\mathcal{D}^G$) конечное множество всех B-инвариантных (соответственно G-инвариантных) простых дивизоров в X. Элементы множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}^B \backslash \mathcal{D}^G$ традиционно называются *красками* сферического многообразия X. В соответствии с предложением 1 из [2] горизонтальные B-корневые подгруппы, то есть не сохраняющие открытую B-орбиту, можно разделить на два типа.

Определение 1. Пусть H — горизонтальная B-корневая подгруппа на X, и пусть дивизор $D \in \mathcal{D}^B$ таков, что $HD \neq D$. Если $D \in \mathcal{D}^G$, то назовём H *тороидальной*. Если D является краской типа (T), то назовём H *размывающей*.

Зафиксируем максимальный тор $T \subset B$ и обозначим через $\mathfrak{X}(T)$ его решётку характеров. Естественное спаривание между $M = \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и двойственной решёткой N обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Поскольку в X есть открытая B-орбита, для каждого $\lambda \in M$ существует единственная с точностью до пропорциональности B-полуинвариантная рациональная функция f_λ на X веса λ. Каждый дивизор $D \in \mathcal{D}^B$ определяет элемент $\varkappa(D) \in N$ по формуле $\langle \varkappa(D), \lambda \rangle = \mathrm{ord}_D(f_\lambda)$ для всех $\lambda \in M$.

Предположим, что B-нормализуемое аддитивное действие веса μ двигает единственный B-дивизор D_0 (который либо имеет тип (T), либо G-инвариантен) соответствующий ребру $\rho_\mu := \varkappa(D_0)$.

Определение 2. *Тороидальная модель* $X_0 \subset X$, ассоциированная с ρ_μ, — это модель, в которой выброшены G-орбиты, лежащие в замыкании красок D, где $D \neq D_0$ (заметим, что если D_0 не является краской, то последнее условие пусто).

В цветной веер для X_0 входят только те грани, которые порождены подмножеством в множестве рёбер, состоящим из отметок G-инвариантных дивизоров и рёбра ρ_μ.

Определение 3. *Усечённая тороидальная модель* $X_{00} \subset X_0$, ассоциированная с ρ_μ, — это модель, соответствующая вееру, в котором оставлены только цветные конусы, содержащие ребро, соответствующее D_0.

Определение 4. Сферическое многообразие X называется *дивизориально-максимальным*, если оно не может быть G-эквивариантно вложено в другое нормальное сферическое многообразие $\overline{X}$ с дополнением $\overline{X} \setminus X$ коразмерности $\geqslant 2$.

Дивизориальная максимальность соответствует следующему условию на веер сферического многообразия.

Определение 5. Цветной веер называется *дивизориально-максимальным*, если он не содержится ни в каком цветном веере, натянутом на те же рёбра.

Очевидно, что любой веер содержится в дивизориально-максимальном.

Предложение 1. *Аддитивное B-нормализуемое $\mathbb{G}_a$-действие на X, двигающее дивизор D_0, продолжается на дивизориально-максимальную компактификацию. Оно ограничивается на тороидальную и усечённую тороидальную модель X_0 и X_{00}, а также на все максимальные простые сферические подмногообразия модели X_{00}.*

Заметим, что простые сферические многообразия, соотвествующие цветным конусам $\mathcal{C}$, содержащим ребро ρ_μ, являются H-инвариантными. Действительно они получаются выбрасыванием G-орбит, лежащих в дивизорах, не принадлежащих вееру $\mathcal{C}$, в то же время эти дивизоры H-инвариантны.

Предложение 2. *Пусть тороидальная модель X снабжена B-нормализуемым $\mathbb{G}_a$-действием веса μ, двигающим дивизор D_0 (он соотвествует ребру ρ_μ в цветном веере). Предположим, что цветной веер X дивизориально-максимален. Тогда в цветном веере не существует рёбер ρ_D, соответствующих G-инвариантным дивизорам, со следующими свойствами*:

(1) *ρ_D ортогонален μ,*

(2) *ρ_D не принадлежит ни одной цветной грани веера, содержащей ρ_μ.*

Теорема. (a) *Пусть на сферическом многообразии X существует B-корневая подгруппа, двигающая дивизор D_0. Тогда она определяет аддитивное действие на всех максимальных простых сферических многообразиях, для которых в веере в качестве ребра присутствует $\varkappa(D_0)$. Более того, для* *веса μ этой B-корневой подгруппы имеем $\langle\varkappa(D_0);\mu\rangle = -1$ и $\langle\varkappa(D_0);\mu\rangle \geqslant 0$ для всех $D \neq D_0, D \in \mathcal{D}^B$.*

(b) *Предположим, что X дивизориально-максимально. Пусть дан набор аддитивных действий B-корневых подгрупп H_i на простых сферических подмногообразиях $X_i \subset X_{00}$, совпадающих на пересечении $\cap_i X_i$, тогда это действие продолжается до аддитивного действия на всём X. Более того, на всех дивизорах с отметками, не входящими в веер X_{00}, это действие тождественно.*

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, R. Avdeev. Root subroups on affine spherical varieties. Selecta Math. (N.S.) **28** (2022), no. 3, Article 60.
[2] R.S. Avdeev, V.S. Zhgoon. On the existence of B-root subgroups on affine spherical varieties. Dokl. Math. **105** (2022), no. 2, 51–55.
[3] R. Avdeev, V. Zhgoon, in preparation.

Разрешимые моноиды коранга один

Ю.И. Зайцева
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
yuliazaitseva@gmail.com

Аффинным алгебраическим моноидом называется неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X с ассоциативным умножением $\mu\colon X\times X \to X$, которое является морфизмом алгебраических многообразий и обладает нейтральным элементом. Группа обратимых элементов $G(X)$ алгебраического моноида X является алгебраической группой, открытой по Зарисскому в X. Моноид X называется коммутативным (соответственно, разрешимым), если группа его обратимых элементов коммутативна (соответственно, разрешима).

В работе [1] были изучены структуры коммутативных моноидов на аффинных пространствах $\mathbb{A}^n$, в частности, дана классификация таких структур в произвольной размерности n для рангов 0, $n-1$ и n и получена полная классификация коммутативных моноидов на $\mathbb{A}^n$ в размерности не выше 3. В работе [3] некоторые из этих результатов для моноидов рангов 0, $n-1$ и n обобщены на произвольные нормальные аффинные многообразия. В частности, получена полная классификация структур коммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях. В статье [2] получена классификация структур некоммутативных моноидов на нормальных аффинных поверхностях. Следующим логичным шагом является исследование некоммутативных моноидов в больших размерностях. Я расскажу про случай разрешимых некоммутатичных моноидов ранга $n-1$, в частности, их классификацию на трёхмерном аффинном пространстве. Как и в предыдущих случаях, такие моноиды оказываются торическими многообразиями, а структуры моноидов связаны с их корнями Демазюра.

Работа поддержана грантом РНФ 22–41–02019.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, S. Bragin, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Commun. in Cont. Math. **22** (2020), no. 8, 1950064: 1–23.
[2] B. Bilich. Classification of noncommutative monoid structures on normal affine surfaces. Proceedings of the American Mathematical Society **150** (2022), no. 10, 4129–4144.
[3] S. Dzhunusov, Yu. Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. Forum Math. **33** (2021), no. 1, 177–191.
[4] A. Rittatore. Algebraic monoids with affine unit group are affine. Transformation Groups **12** (2007), no. 3, 601–605.

О некотором классе обобщённых дифференцирований

А.С. Захаров
Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия
antzakh@gmail.com

Алгебра Новикова–Пуассона — это алгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, заданная тождествами

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y;\ (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z);$$

$$xy \circ z = x(y \circ z);\ xz \circ y - x \circ yz = yz \circ x - y \circ xz,$$

и $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра. З. Жанг, Ю. Ченг, Л. А. Бокуть (2019) показали, что каждая алгебра Новикова вкладывается в строгую супералгебру Новикова векторного типа (то есть такую, что умножение задается по формуле $a \circ b = ad(b)$, где d — дифференцирование). Для алгебр Новикова–Пуассона это не так, потому что существуют s-тождества. Мы изучали алгебры с обобщённым дифференцированием, их связь с алгебрами Новикова–Пуассона.

В результате изучения был выделен класс обобщённых дифференцирований, удовлетворяющих тождествам

$$x(D-E)(y) = y(D-E)(x); \quad x(D-F)(y) = y(D-F)(x). \tag{1}$$

Классические примеры обобщённых дифференцирований лежат в этом классе. Для обобщённых дифференцирований из этого класса существует продолжение на локализацию $S^{-1}A$ алгебры A, заданное следующим образом:

$$\widehat{D}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{s^2E(a) + asD(s) - aE(s^2)}{s^3},$$

$$\widehat{E}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{sD(a) - aF(s)}{s^2}, \qquad \widehat{F}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{sD(a) - aE(s)}{s^2},$$

где $a \in A, s \in S$.

Теорема 1. *Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с тернарным дифференцированием (D, E, F), $s \in A$ — не делитель нуля и $S = \{s^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, то есть A вкладывается в $S^{-1}A$. Тогда продолжение (D, E, F) на $S^{-1}A$ существует тогда и только тогда, когда выполняются тождества* (1).

Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с тернарным дифференцированием (D, E, F). Если выполнены тождества (1), то $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра Новикова–Пуассона, где $a \circ b = aD(b)$.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра с обобщённым дифференцированием по Брешару (D, δ), $A \cdot A = A$, а также с операцией $\circ$, заданной правилом $a \circ b = aD(b)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$\langle A, \cdot\rangle$ — (D, δ)-простая алгебра;*
2. *$\langle A, \cdot\rangle$ — δ-простая алгебра;*
3. *$\langle A, \circ\rangle$ проста.*

Список литературы

[1] I.M. Gel'fand, I.Ya. Dorfman. Hamiltonian operators and algebraic structures related to them. Functional Analysis and Its Applications **13** (1979), no. 4, 248–262.
[2] A.A. Balinskii, S.P. Novikov. Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR. **283** (1985), no. 5, 1036–1039.

[3] A.S. Dzhumadildaev, C. Lofwall. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities. Homology, Homotopy and Applications **4** (2002), no. 2, 165–190.
[4] Z. Zhang, Y. Chen, L.A. Bokut. On free Gelfand–Dorfman–Novikov superalgebras and a PBW type theorem. International Journal of Algebra and Computation **29** (2019), no. 3, 481–505.
[5] А.С. Захаров. Супералгебры Гельфанда–Дорфмана–Новикова–Пуассона и их обёртывающие. Сибирские мат. электр. известия **16** (2019), 1843–1855.

Обобщение теоремы ABC

В.В. Киктева
МГУ имени М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
kiktevanika@gmail.com

Дифференцирование алгебры A над полем $\mathbb{K}$ — это линейное отображение $D\colon\ A \to A$, удовлетворяющее тождеству Лейбница. Дифференцирование называется **локально нильпотентным** (обозначение: **LND**), если для каждого $a \in A$ существует такое натуральное число n, что $D^n(a) = 0$.

Пусть B — аффинная $\mathbb{C}$-область целостности, ненулевое $D \in LND(B)$.

Даны числа $m, n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Даны ненулевые элементы $a_1, ..., a_m \in Ker\ D$, натуральные числа $k_{11}, ..., k_{1n_1}, ...,\ k_{m1}, ..., k_{mn_m}$ и $b_{11}, ..., b_{1n_1}, ..., b_{m1}, ..., b_{mn_m} \in B$.

Пусть

$$f_1 := a_1 b_{11}^{k_{11}} ... b_{1n_1}^{k_{1n_1}},\ \dots\ ,\ f_m := a_m b_{m1}^{k_{m1}} ... b_{mn_m}^{k_{mnm}} \in B.$$

Теорема 1. Пусть $f_1 + ... + f_m = 0$, но для любого натурального $s < m$ для любых $1 \leqslant i_1 < ... < i_s \leqslant m$, верно $f_{i_1} + ... + f_{i_s} \neq 0$, и НОД$(f_1, ..., f_m) = 1$. Выполняется

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{k_{ij}} \leqslant \frac{1}{m-2}.$$

Тогда $b_{ij} \in Ker\ D$ для $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n_i$.

Теорема 1 является обобщением следующего утверждения:

Теорема ABC. ([1]) Пусть B — $\mathbb{K}$-область целостности, где $\mathbb{K}$ — поле нулевой характеристики. Если попарно взаимно простые $x, y, z \in B$ удовлетворяют равенству $x^a + y^b + z^c = 0$ для $a, b, c \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ таких, что $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} \leqslant 1$, то для любого $D \in LND(B)$ верно $\mathbb{K}[x, y, z] \subseteq Ker\ D$.

Теорема 2. Пусть для любого натурального $s \leqslant m$ для любых $1 \leqslant i_1 < ... < i_s \leqslant m$, выполняется $f_{i_1} + ... + f_{i_s} \neq 0$. При этом

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{k_{ij}} \leqslant \frac{1}{m-1}$$

и $f_1 + ... + f_m \in Ker\ D$.

Тогда $b_{ij} \in Ker\ D$ для $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n_i$.

Теорема 2 позволяет в частном случае ответить на следующий вопрос.

Вопрос. ([1], Question 11.9) Пусть B — аффинная $\mathbb{C}$-область целостности, дан многочлен $p \in \mathbb{C}^{[m]}$, $m \geqslant 2$ такой, что для любого ненулевого $\delta \in LND(\mathbb{C}^{[m]})$, $\delta(p) \neq 0$. Пусть для некоторых алгебраически независимых $a_1, ..., a_m \in B$ и ненулевого $D \in LND(B)$ верно $D(p(a_1, ..., a_m)) = 0$. Верно ли, что $D(a_i) = 0\ \forall i = 1, ..., m$?

Список литературы

[1] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia of Mathematical Sciences **136**. Springer, Berlin, 2017.

Неальтернирующие гамильтоновы формы с коэффициентами в алгебре разделённых степеней

А.В. Кондратьева, М.И. Кузнецов
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
alisakondr@mail.ru, kuznets-1349@yandex.ru

Хорошо известные алгебры Ли картановского типа, состоящие из векторных полей, сохраняющих специальную, гамильтонову или контактную форму, имеют аналог в характеристике p. Заметим, что алгебра функций должна быть заменена алгеброй разделённых степеней $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$ (см. [1]), соответствующей некоторому обобщённому флагу $\mathcal{F}$ пространства E, $\mathcal{F}$: $E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис E, согласованный с $\mathcal{F}$, тогда $\mathcal{O}_n(\mathcal{F}) = \mathcal{O}(n : \mathbf{m})$, где $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ — n-набор высот переменных $x_1, \ldots, x_n$ относительно флага $\mathcal{F}$. В случае поля характеристики 2 можно построить большой класс простых гамильтоновых алгебр Ли, соответствующих неальтернирующим симметричным дифференциальным формам.

Класс неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли может представлять интерес по крайней мере по двум причинам. Во-первых, гамильтоновы алгебры Ли можно отнести к алгебрам картановского типа при $p = 2$, что имеет большое значение для классификации простых алгебр Ли малых характеристик. Во-вторых, эти алгебры Ли могут допускать невырожденные дифференцирования, что может представлять интерес для теории p-групп.

Неальтернирующие гамильтоновы алгебры над полем характеристики 2 были впервые построены в 1993 г. Lin Lei [2] как алгебры Ли полиномов от разделённых степеней с симметричной скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum_i \partial_i f \partial_i g$. В случае, когда высоты переменных равны 1, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли изоморфны первой серии простых алгебр Ли, построенных И. Капланским [3]. В [4], [5] вводятся симметричные дифференциальные формы в разделённых степенях и изучаются неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, подобные гамильтоновым супералгебрам Ли нулевой характеристики относительно стандартных скобок Пуассона. Отметим, что классификация альтернирующих гамильтоновых форм над алгеброй срезанных многочленов получена М.И. Кузнецовым, С.А. Кирилловым ([6]). Полная классификация над алгеброй разделённых степеней построена С.М. Скрябиным ([7], [8]).

В докладе обсуждается общая теория неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли в разделённых степенях над совершенным полем характеристики 2. Основные результаты можно найти в [9]. В [10] дана инвариантная конструкция комплекса симметричных дифференциальных форм в характеристике 2 и предложена программа исследования. На первом этапе авторы получили все инварианты симметрических гамильтоновых дифференциальных форм с постоянными коэффициентами относительно параболической подгруппы в $GL(V)$, соответствующей флагу $\mathcal{F}$. В частности, было показано, что существует базис V, согласованный с флагом $\mathcal{F}$, такой, что форма имеет матрицу $diag(M_0, \ldots, M_0,\ M_1, \ldots, M_1,\ 1_s)$, где

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Позднее, используя теорию усечённых коиндуцированных модулей [11], [12]), авторы доказали, что в случае, когда $n > 4$, или $n = 4$ и флаг $\mathcal{F}$ нетривиален, или $n = 2,\ 3$ и E_1 содержит неизотропный вектор относительно формы $\overline{\omega}$ на E, дуальной форме ω, каждая фильтрованная алгебра Ли, связанная с градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгеброй, задаётся неальтернирующей гамильтоновой дифференциальной формой с полиномиальными коэффициентами в разделённых степенях.

Одним из основных результатов является доказательство эквивалентности неальтернирующей гамильтоновой формы ω с полиномиальными коэффициентами и форме $\omega(0)$ при условии, что канонический вид $\omega(0)$ содержит $(dx_i)^{(2)}$ или $dx_i dx_j + (dx_j)^{(2)}$ для некоторой переменной x_i высоты $m_i > 1$. Приведены некоторые результаты по проблеме классификации неальтернирующих гамильтоновых форм, для которых это условие не выполняется. В этом случае неальтернирующая гамильтонова форма ω может быть не эквивалентна $\omega(0)$.

Теорема. Пусть K — совершенное поле характеристики 2, ω — неальтернирующая гамильтонова форма над алгеброй разделённых степеней $\mathcal{O}_n(\mathcal{F})$, E^0 — подпространство всех изотропных векторов E относительно формы $\overline{\omega(0)}$ на E, двойственной к $\omega(0)$.

(i) если $E_1 \not\subset E^0$, то ω эквивалентна $\omega(0)$;

(ii) если $E_1 \subset E^0$, то ω эквивалентна $\lambda\omega'$, где $\lambda \in K$ и ω' равна

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{n-2} dx_{n-1} + dx_n^{(2)} + dz_j dz_n, \quad \textit{если } n = 2k+1$$

и

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{n-1} dx_n + dx_n^{(2)} + dz_j dz_{n-1}, \quad \textit{если } n = 2k.$$

Более того, форма ω' не эквивалентна $\omega(0)$. Здесь $dz_i = x_i^{(2^{m_i}-1)} dx_i$ и, в случае $n = 2k+1$, $j \neq n$, а в случае $n = 2k$, $j \neq n-1$.

Список литературы

[1] А.И. Кострикин, И.Р. Шафаревич. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. Изв. АН СССР. Сер.матем. **33** (1969), no. 2, 251–322.

[2] L. Lei. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n, m)$ of characteristic two. Commun. Algebra **21** (1993), no. 2, 99–411.

[3] I. Kaplansky. Some simple Lie algebras of characteristic 2. Lecture notes in Math. **933** (1982), 127–129.

[4] S. Bouarrouj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites. Divided power (co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan matrix. Homology, Homotopy Appl. **12** (2010), no. 1, 237–248.

[5] A. Lebedev. Analog of orthogonal, Hamiltonian, and contact Lie superalgebras in characteristic 2. J. Nonlin. Math. Phys. **17** (2010), suppl. 1, 399–411.

[6] М.И. Кузнецов, С.А. Кириллов. Гамильтоновы дифференциальные формы над алгеброй разделенных степеней. Изв. Опросы. **41** (1986), no. 2, 205–206.

[7] С.М. Скрябин. Классификация гамильтоновых форм над разделенными степенями. Матем. сб. **69** (1991), 121–141.

[8] С.М. Скрябин. Нормальные формы симплектических и контактных форм над алгебрами разделенных степеней, arXiv: `abs/1906.11496` (2019).

[9] M.I. Kuznetsov, A.V. Kondrateva, N.G. Chebochko. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in characteristic 2. I, arXiv: abs/1812.11213. (2018).
[10] М.И. Кузнецов, А.В. Кондратьева, Н.Г. Чебочко. О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2. Матем. журнал. **16** (2016), no. 2, 54–65.
[11] М.И. Кузнецов. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p. Изв. АН СССР. Сер.матем. **53** (1989), no. 3, 557–589.
[12] М.И. Кузнецов. Теорема вложения для транзитивных фильтрованных алгебр Ли характеристики p. Изв. вузов. Матем. **10** (1991), 43–45.
[13] A.V. Kondrateva. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables. Lobachevskii Journal of Mathematics. **42** (2021), no. 12, 2841–2853.

Пертурбативный подход к непертурбативным явлениям квантовых инвариантов узлов

Е.Н. Ланина
Московский физико-технический институт, Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия
lanina.en@phystech.edu

Доклад основан на работах автора [1], [2].

Рассмотрим алгебру хордовых диаграмм $\mathcal{D}$ с определенными 1T- и 4T-соотношениями, первое из которых запрещает диаграммы с изолированными хордами, а второе дает корректно определить операцию перемножения хордовых диаграмм. Пространство хордовых диаграмм $\mathcal{D}$ имеет естественную градуировку по количеству хорд $\mathcal{D} = \bigoplus_n \mathcal{D}_n$. Мы приводим примеры хордовых диаграмм для $n = 0, \ldots, 4$ на рис. 1.

Определение 1. *Интеграл Концевича или универсальный инвариант Васильева определяется как следующий ряд*:

$$I^{\mathcal{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m} \mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}} \, \mathcal{D}_{n,m} \right) \hbar^n, \tag{1}$$

где $\mathcal{D}_{n,m}$ — хордовые диаграммы с n хордами, а $\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}$ — инварианты Васильева. На каждом уровне n есть $\dim \mathcal{D}_n$ хордовых диаграмм, поэтому $m = 1, \ldots, \dim \mathcal{D}_n$.

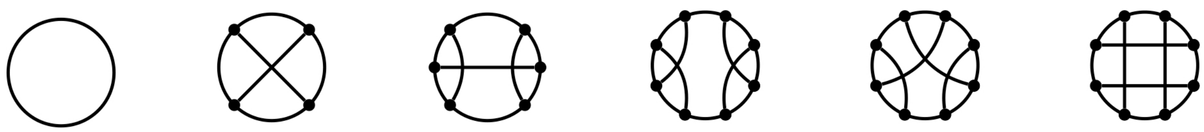
Существует гипотеза, что множество всех инвариантов Васильева образует полный инвариант узла, то есть зная все инварианты Васильева, можно различить любые два узла. Интеграл Концевича содержит все инварианты Васильева, поэтому также гипотетически является полным инвариантом узла.

Однако с интегралом Концевича работать неудобно, так как он является бесконечным абстрактным рядом из хордовых диаграмм. Поэтому на практике к интегралу Концевича применяют отображение, называемое весовой системой алгебры Ли $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$ и переводящие хордовые диаграммы в центр универсальной обертывающей данной алгебры Ли. Весовую систему затем можно ассоциировать с представлением R, применяя соответствующее отображение ρ_R и беря след.

Определение 2. *Цветной полином ХОМФЛИ является образом интеграла Концевича под действием весовой системы* $\mathfrak{sl}_N$, *ассоциированной с представлением* R:

$$\varphi^R_{\mathfrak{sl}_N}\left(I^{\mathcal{K}}\right) = \mathcal{H}^{\mathcal{K}}_R(q,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_m \ \mathcal{V}^{\mathcal{K}}_{n,m}\ \mathcal{G}^R_{n,m}\right)\hbar^n \tag{2}$$

где $q = e^{\hbar}$, *а* $a = e^{N\hbar}$. *Здесь* $\varphi^R_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_{n,m}) = \mathcal{G}^R_{n,m}$ *называются групповыми факторами.*



$\mathcal{D}_{0,1}$ $\mathcal{D}_{2,1}$ $\mathcal{D}_{3,1}$ $\mathcal{D}_{4,1}$ $\mathcal{D}_{4,2}$ $\mathcal{D}_{4,3}$

Рис 1. Примеры хордовых диаграмм

Цветной полином ХОМФЛИ с физической точки зрения определяется как петля Вильсона в теории Черна–Саймонса, где интегрирование ведется по узлу $\mathcal{K}$, а калибровочные поля $SU(N)$ берутся в представлении R. Соответственно, ряд (2) получается как пертурбативное разложение по постоянной Планка.

В силу определения весовой системы $\varphi^R_{\mathfrak{sl}_N}$ и леммы Шура групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ являются полиномами от собственных значений $\mathfrak{sl}_N$ операторов Казимира $\mathcal{C}_k$, $k = 2,\ldots,N$:

$$\boxed{\mathcal{G}^R_{n,m} = \varphi^R_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_{n,m}) = \mathrm{Pol}\left(\mathcal{C}^R_1,\ldots,\mathcal{C}^R_N\right).} \tag{3}$$

Удобно ввести фильтрацию по числу образующих $\mathfrak{sl}_N$ в центре универсальной обертывающей алгебры $ZU(\mathfrak{sl}_N)$:

$$\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_3 \subset \mathcal{Z}_4 \subset \cdots \subset ZU(\mathfrak{sl}_N), \tag{4}$$

где $\mathcal{Z}_k$ состоит из произведений не более чем $2k$ образующих. Тогда отображение $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$ переводит $\mathcal{D}_n$ в $\mathcal{Z}_n$. Однако конкретный вид вложений $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n$ был неизвестен. Мы предлагаем подход к решению этой задачи, то есть к явному нахождению функций $\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathcal{C}_2^R, \ldots, \mathcal{C}_N^R\right)$ для произвольных ранга алгебры $\mathfrak{sl}_N$ и представлений R, а также для любого порядка n. Подход включает в себя две идеи:

- Первая идея состоит в том, чтобы использовать аналитическое продолжение собственных значений операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$. Вложим собственные значения операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$ в пространство собственных значений операторов Казимира алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$. Мы утверждаем, что это продолжение совпадает с аналитическим продолжением квантовых $\mathfrak{sl}_N$-инвариантов до цветных полиномов ХОМФЛИ.

- Вторая идея состоит в том, чтобы использовать известные симметрии цветных полиномов ХОМФЛИ для ограничения вида функций $\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathcal{C}_2^R, \ldots, \mathcal{C}_N^R\right)$.

В ходе исследования мы также приходим к следующей гипотезе.

Гипотеза 1. *Известных симметрий и свойств цветного полинома ХОМФЛИ достаточно, чтобы полностью зафиксировать его групповую структуру.*

Из известной групповой структуры цветных полиномов ХОМФЛИ мы получаем ряд важных следствий для квантовых инвариантов узлов. Среди них — предъявление конкретных примеров теоремы о неинъективности отображения $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R$, а также доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Цветной полином ХОМФЛИ узла $\mathcal{K}$ обладает симметрией «тяни-крюк».*

Список литературы

[1] E. Lanina, A. Sleptsov, N. Tselousov. Chern–Simons perturbative series revisited. Physics Letters B **823** (2021), 136727.

[2] E. Lanina, A. Sleptsov, N. Tselousov. Implications for colored HOMFLY polynomials from explicit formulas for group-theoretical structure. Nuclear Physics B **974** (2022), 115644.

Инварианты поливекторных представлений $GL_n(R)$

Р.А. Лубков
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
RomanLubkov@yandex.ru

В 1984 году Майкл Ашбахер доказал Subgroup Structure Theorem, которая утверждает, что каждая максимальная подгруппа конечной классической группы либо попадает в один из восьми явно описанных классов $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$, либо является «почти» простой группой в некотором неприводимом представлении, попадая в класс $\mathcal{S}$.

В докладе мы обсудим поливекторные представления полной линейной группы, которые попадают в исключительный класс Ашбахера $\mathcal{S}$. Мы напомним, какими инвариантами задавались указанные группы для алгебраически замкнутых полей и найдем инварианты для произвольных коммутативных колец. В качестве приложения покажем, как полученные сведения помогают в решении фундаментальных задач теории алгебраических групп.

Чебышёвские пары сопряжённых конечномерных норм, инвариантных относительно групп Вейля простых компактных алгебр Ли

М.В. Мещеряков
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия
mesh@math.mrsu.ru

В теории алгебраических групп преобразований важную роль играют теоремы типа теоремы Шевалле об ограничении. К результатам такого вида относится характеризация в работе Э.Б. Винберга [1] инвариантных относительно присоединённого представления норм в простых компактных алгебрах Ли $\mathfrak{G}$, как продолжений норм в подалгебрах Картана $\mathfrak{H}$, инвариантных относительно соответствующих групп Вейля W. Эта теорема обобщает известный в матричном анализе результат Неймана об унитарно/ортогонально инвариантных матричных нормах (см. [2]).

Инвариантные нормы в матричном анализе широко применяются в задачах геометрической теории наилучшего приближения. Особый интерес представляет *свойство единственности наилучшего приближения.* Назовем пару конечномерных норм *чебышёвской парой норм*, если пересечение любых их шаров с центрами в различных точках, не имеющее внутренних точек, либо пусто, либо является одноточечным множеством.

Основной результат нашего сообщения формулируется в следующем виде.

Теорема А. Пусть W — группа Вейля простой компактной алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Инвариантная норма в подалгебре Картана $\mathfrak{H}$, единичный шар которой выпуклая оболочка $convW_x$ орбиты W_x ненулевого элемента $x \in \mathfrak{G}$, и сопряжённая к ней норма, задаваемая полярой орбиты W_x , образуют чебышёвскую пару W-инвариантных норм в $\mathfrak{H}$.

Продолжения норм указанного в теореме вида до инвариантных норм в алгебре Ли $\mathfrak{G}$, по видимому, образуют чебышёвскую пару норм.

Гипотеза. Выпуклые оболочки центрально симметричных орбит присоединенного представления в простой компактной простой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ и их поляры относительно формы Киллинга являются единичными шарами чебыш‘вской пары инвариантных норм в алгебре $\mathfrak{G}$.

Гипотеза верна (см. [3]) для евклидовой операторной нормы и сопряжённой к ней норме в редуктивной алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Единичные шары ограничений этих норм на подалгебру диагональных матриц суть n–мерный куб и двойственный ему многомерный октаэдр.

В связи с вышеупомянутой гипотезой следует отметить интересную работу [4], хотя вопрос о чебышёвских парах инвариантных норм в ней не рассматривается.

Выделение класса норм, задаваемых именно орбитопами, существенно для наличия свойства чебышёвости, поскольку иные пары норм уже среди W-инвариантных норм им не всегда обладают. Более того, верна следующая теорема.

Теорема Б. Орбитопы общего положения присоединённых представлений компактных простых групп Ли не являются чебышёвскими множествами относительно инвариантных норм, единичные шары которых суть орбитопы тех же представлений в простых компактных алгебрах Ли.

Доклад основывается на работе, направленной в печать.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг. Инвариантные нормы в компактных простых алгебрах Ли. Функциональный анализ и его приложения **2** (1968), no 2, 89–90.

[2] R.A. Horn, C.R. Jonson. Matrix analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

[3] A.R.Alimov, H.Berens. Example of Chebyshev sets in matrix spaces. J. Approximation Theory **99** (1999), 44–54.
[4] R. Holmes, T.Y. Tam. Distance to the convex hull of an orbit under the action of a compact Lie group. J. Australian Math. Soc. (Ser. A) **66** (1999), 331–357.

Гомологии и когомологии алгебры Ли фонарщика

Д.В. Миллионщиков
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва, Северо-Западный центр математических исследований имени Софьи Ковалевской в ПсковГУ. Псков, Россия
`mitia_m@hotmail.com`

Иванов, Михайлов и Зайковский показали, что группа вторых гомологий $H_2(\widehat{\mathcal{L}}(2), R)$ пронильпотентного пополнения $\widehat{\mathcal{L}}(2)$ свободной алгебры Ли $\mathcal{L}(2)$ над целостным кольцом R содержит подпространство V, изоморфное кольцу формальных рядов $R[[u]]$. Тем самым, когомологическая размерность пополнения $\widehat{\mathcal{L}}(2)$ будет заведомо больше 1. В своем доказательстве Иванов, Михайлов и Зайковский [1] использовали свойства специальной алгебры Ли $\mathfrak{l}$ над целостным кольцом R, названной в [1] алгеброй Ли фонарщика. Алгебра Ли фонарщика $\mathfrak{l}$ была определена [1] как полупрямое произведение $\mathfrak{l} = Rt \times R[x]$ кольца Rt и абелевой алгебры Ли $R[x]$ над R с правилом коммутирования $[t, p(x)] = xp(x)$, где $p(x) \in R[x]$ обозначает произвольный многочлен из $R[x]$.

Феликс и Мурилло доказали в [2], что пронильпотентное пополнение $\widehat{\mathfrak{l}}$ рациональной алгебры ($R = \mathbb{Q}$) Ли фонарщика является алгеброй Ли, ассоциированной к $\mathbb{Q}$-пополнению по Мальцеву $\widehat{G}$ целочисленной ламповой группы G. Феликс и Мурилло доказали бесконечномерность q-мерных гомологий $H_q(\mathfrak{l}, \mathbb{Q})$. Однако полностью вычислить пространства $H_q(\mathfrak{l}, \mathbb{Q}), q \geqslant 3$, им не удалось.

Доклад снован на работе автора [3], где было показано, что алгебра Ли фонарщика $\mathfrak{l}$ изоморфна бесконечномерной естественно градуированной алгебре Ли максимального класса $\mathfrak{m}_0$, также в [3] был построен бесконечный базис биградуированных гомологий $H_{*,*}(\mathfrak{l}, \mathbb{Q})$.

Список литературы

[1] S. Ivanov, R. Mikhailov, A. Zaikovskii. Homological properties of parafree Lie algebras. J. Algebra **560** (2020), 1092–1106.

[2] И. Феликс, А. Мурилло. Гомологии алгебры Ли фонарщика. Алгебра и логика **60** (2021), no. 6, 636–646.
[3] Д.В, Миллионщиков. Гомологии и когомологии алгебры Ли фонарщика. Труды МИАН **318** (2022)б 166–176.

Разрешимые супералгебры Лейбница с некоторыми филиформными нильрадикалами

Х.А. Муратова[1], А.М. Саттаров[2]
[1]Международный университет Кимё в Ташкенте,
[2]Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
xalkulova@gmail.com, saloberdi90@mail.ru

Супералгебры Лейбница, которые включают алгебры Ли и Лейбница, а также супералгебры Ли, характеризуются тождеством, определяемым применением оболочки Грассмана к алгебре Лейбница. Для таких супералгебр известные факты из структурной теории алгебр Лейбница частично уместны, и чётная часть их является алгеброй Лейбница. Наложение условий на характеристическую последовательность, нильиндекс и размерность супералгебры позволяет классифицировать различные классы нильпотентных супералгебр Лейбница. В задаче классификации разрешимых супералгебр Лейбница использование дифференцирования нулевой степени нильрадикала позволило получить описание таких супералгебр с заданными нильрадикалами. Доказано, что максимальный нильиндекс нильпотентной супералгебры Лейбница равен $n+m+1$, и такие супералгебры были полностью классифицированы [2]. В задаче классификации разрешимых супералгебр Лейбница использование дифференцирования нулевой степени нильрадикала позволило классифицировать разрешимые супералгебры Лейбница с заданными нильрадикалами.

Надо отметить, что в работах [3] и [4] получены классификации разрешимых супералгебр Ли и Лейбница с некоторыми заданными нильрадикалами. В данной работе приведём одномерное разрешимое расширение супералгебр Лейбница нильиндекса $n+m$ с характеристической последовательностью $(n-1, 1|m)$.

Теорема 1. [1] Пусть L — супералгебра Лейбница нильиндекса $n+m$ с характеристической последовательностью $(n-1,1|m)$, тогда $m=n-1$ или и $m=n$ существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ в супералгебре L такой, что её умножение в этом базисе имеет следующий вид (для краткости мы приводим только названия супералгебр):

– если $m = n-1$, то $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ и $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$,
–если $m = n$, тогда имеем $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$ и $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$.

Поскольку данный класс супералгебр является большим, мы хотим представить разрешимое расширение супералгебры $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$ в случае $G(0, 0, \dots, 0, 0)$. А классификация разрешимых супералгебр с такими разложимыми нильрадикалами является интересной задачей с точки зрения структурной теории неассоциативных супералгеб.

Приведем таблицы умножений нильрадикала $G(0, 0, \dots, 0, 0)$:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & 1 \le j \le n-2, \\ [e_1, y_1] = \frac{1}{2} y_2, \\ [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_i, & 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_1] = e_1, \\ [y_j, y_1] = e_{j+1}, & 2 \le j \le n-1, \end{cases}$$

Далее в следующей теореме приведем таблицы умножений разрешимых супералгебр с нильрадикалами $G(0, 0, \dots, 0, 0)$.

Теорема 2. [4] Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ разрешимая супералгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен супералгебре $G(0, 0, \dots, 0)$. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных супералгебр:

$$MG_1: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & & 1 \le j \le n-2, \\ [y_1, y_1] = e_1, & [y_j, y_1] = e_{j+1}, & 2 \le j \le n-1, \\ [e_1, y_1] = \frac{1}{2} y_2, & [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_i, & 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, x_1] = 2e_1, & [e_i, x_1] = 2(i-1)e_i, & 3 \le i \le n, \\ [y_i, x_1] = (2i-1)y_i, & & 1 \le i \le n-1, \\ [x_1, e_1] = -2e_1, & [x_1, y_1] = -y_1, & [e_2, x_2] = e_2, \end{cases}$$

$$MG_2: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [y_j, e_1] = y_{j+1}, & & 1 \le j \le n-2, \\ [y_1, y_1] = e_1, & [y_j, y_1] = e_{j+1}, & 2 \le j \le n-1, \\ [e_1, y_1] = \frac{1}{2} y_2, & [e_i, y_1] = \frac{1}{2} y_i, & 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, x_1] = 2e_1, & [e_i, x_1] = 2(i-1)e_i, & 3 \le i \le n, \\ [y_i, x_1] = (2i-1)y_i, & 1 \le i \le n-1, \\ [x_1, e_1] = -2e_1, & [x_1, y_1] = -y_1, \\ [e_2, x_2] = e_2, & [x_2, e_2] = -e_2, \end{cases}$$

$$G_1(b):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-2,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & & 1\le i\le n-1,\\ [e_1,x]=2e_1, & [e_2,x]=be_2, & [e_i,x]=2(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=-2e_1, & [x,e_2]=-be_2, & [x,y_1]=-y_1, & b\neq 0,\end{cases}$$

$$G_2(b):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-2,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & & 1\le i\le n-1,\\ [e_1,x]=2e_1, & [e_2,x]=be_2, & [e_i,x]=2(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,e_1]=-2e_1, & [x,y_1]=-y_1,\end{cases}$$

$$G_3:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-2,\\ [y_1,y_1]=e_1,\\ [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & 1\le i\le n-1,\\ [e_1,x]=2e_1, & [x,e_1]=-2e_1,\\ [e_2,x]=2(n-1)e_2+e_n,\\ [e_i,x]=2(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,y_1]=-y_1,\end{cases}\qquad G_4(\gamma,b):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & 1\le j\le n-2,\\ [y_1,y_1]=e_1,\\ [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2,\\ [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\ [y_i,x]=(2i-1)y_i, & 1\le i\le n-1,\\ [e_1,x]=2e_1, & [x,e_1]=-2e_1,\\ [e_2,x]=be_n,\\ [e_i,x]=2(i-1)e_i, & 3\le i\le n,\\ [x,y_1]=-y_1,\\ [x,x]=\gamma e_2, & (\gamma,b)=(0,1),(1,0),(1,1)\end{cases}$$

$$G_5:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [y_j,e_1]=y_{j+1}, & & 1\le j\le n-2,\\ [y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, & 2\le j\le n-1,\\ [e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, & 3\le i\le n-1,\\ [e_1,x]=\sum\limits_{k=3}^{n}a_{k-1}e_k, & [e_2,x]=e_2, & [e_i,x]=\sum\limits_{k=i+1}^{n}a_{k+1-i}e_k, & 3\le i\le n,\\ [x,x]=\gamma e_n, & [y_i,x]=\sum\limits_{k=i+1}^{n-1}a_{k+1-i}y, & 1\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$
G_6:\begin{cases}
[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\
[y_j,e_1]=y_{j+1}, & \qquad\qquad\qquad\quad 1\le j\le n-2,\\
[y_1,y_1]=e_1, & [y_j,y_1]=e_{j+1}, \quad 2\le j\le n-1,\\
[e_1,y_1]=\frac{1}{2}y_2, & [e_i,y_1]=\frac{1}{2}y_i, \quad 3\le i\le n-1,\\
[e_1,x]=\sum\limits_{k=3}^{n}a_{k-1}e_k, & [e_2,x]=e_2, \quad [e_i,x]=\sum\limits_{k=i+1}^{n}a_{k+1-i}e_k, \quad 3\le i\le n,\\
[x,e_2]=-e_2, & [x,x]=\gamma e_n, \quad [y_i,x]=\sum\limits_{k=i+1}^{n-1}a_{k+1-i}y, \quad 1\le i\le n-1.
\end{cases}
$$

Надо отметить, что первый ненулевой параметр среди $\{a_2,a_3,\dots,a_{n-1},\gamma\}$ в алгебрах G_5 и G_6 можно приравнять к 1.

Список литературы

[1] Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, B.A. Omirov. The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$. Acta Math. Sinica (English Series) **25** (2009), no. 1, 171–190.

[2] S. Albeverio, Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov. On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. in Algebra **33** (2005), no. 1, 159–172.

[3] A.Kh. Khudoyberdiyev, M. Ladra, Kh.A. Muratova. Solvable Leibniz superalgebras whose nilradical is a Lie superalgebra of maximal nilindex. Bulletin of National University of Uzbekistan: Math. and Nat. sci. **2** (2019), no. 1, 52–68.

[4] A.Kh. Khudoyberdiyev, Kh.A. Muratova. Solvable Leibniz superalgebras whose the nilradical has the characteristic sequence $(n-1,1\mid m)$ and nilindex $n+m$, arXiv: `math.RA/.2204.03836` (2022).

Максимальные разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом

М.А. Назиров

Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

`madalixon@inbox.ru`

Алгебры Лейбница были введены в начале 90-х годов прошлого столетия французским математиком Ж.-Л. Лоде как алгебры, характеризующиеся тождеством Лейбница 4]. Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли, и поэтому многие свойства, справедливые для алгебр Ли, продолжаются на случай алгебр Лейбница.

В 1945 году А.И. Мальцев доказал, что разрешимая алгебра Ли определяется однозначно её нильрадикалом. Далее, в 1963 году Г.М. Мубарякзянов разработал метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и ниль-независимых дифференцирований нильрадикала. Методом Мубаряказянова в работе [1] были получены описания некоторых классов разрешимых алгебр Ли. Описанию разрешимых алгебр Лейбница с некоторыми заданными нильрадикалами посвящена работа [3].

В данной работе приведена классификация разрешимых алгебр Лейбница с естественный образом градуированным квази-филиформным нильрадикалом и дополняющим пространством максимальной размерности.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

где $[,]$ — умножение в L.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим ряды

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}]; \quad L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1].$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется *разрешимой* (*нильпотентной*), если существует $s \in N$ такое, что $L^{[s]} = 0$ ($L^s = 0$). Минимальное число, обладающее таким свойством, называется *индексом разрешимости* (*нильпотентности*) алгебры L.

Максимальный нильпотентный (разрешимый) идеал алгебры Лейбница L называется нильрадикалом (радикалом).

Определение 3. Линейное отображение d из L в себя называется *дифференцированием*, если для любых $x, y \in L$ выполняется тождество

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)].$$

Линейные отображения $f_1, \ \ldots, \ f_k$ называются *ниль-независимыми*, если

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k$$

не нильпотентно при всех значениях α_i, кроме нуля.

Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница, следовательно, R можно записать как сумму векторных пространств $R = N + Q$, где N — нильрадикал в R и Q — дополняющее векторное пространство.

Предложение 1. [3] Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница. Тогда размерность Q не превышает максимального числа ниль-независимых дифференцирований N.

Теперь рассмотрим следующую алгебру. Эта алгебра является естественным образом градуированной квази-филиформной алгеброй Лейбница, которая получена в работе [2].

$$\mathcal{L}_n^{3,-1}\colon\ \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\leqslant i\leqslant n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+e_2,\\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n. \end{cases}$$

Приведём описание дифференцирования алгебры $\mathcal{L}_n^{3,-1}$.

Предложение 2. Произвольное дифференцирование d алгебры $\mathcal{L}^{3,-1}$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} d(e_1)=\sum\limits_{t=1}^{n}a_te_t,\\ d(e_i)=(ia_1+a_{n-1})e_i+\sum\limits_{t=i+1}^{n-2}a_{t-i+1}e_t, \quad 2\leqslant i\leqslant n-2,\\ d(e_{n-1})=\sum\limits_{t=2}^{n}b_te_t,\\ d(e_n)=(b_{n-3}-a_{n-3})e_{n-2}+(b_{n-1}+a_1)e_n, \end{cases}$$

где $b_i=a_i,\ 2\leqslant i\leqslant n-3,\ b_{n-1}=a_1+a_{n-1}$.

Теорема. Пусть R — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $\mathcal{L}_n^{3,-1}$ и дополняющим пространством максимальной размерности. Тогда существует базис $\{e_1,e_2,\dots,e_n,x,y\}$ в алгебре такой что, умножение в этом базисе имеет следующий вид:

$$R(\mathcal{L}_n^{3,-1})\colon\ \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leqslant i\leqslant n-3, & [e_{n-1},e_1]=e_n+e_2, & [e_1,e_{n-1}]=-e_n,\\ [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_i,x]=(i-1)e_i, & [e_n,x]=e_n, & [x,e_1]=-e_1+e_{n-1},\\ [x,e_n]=-e_n, & [e_1,y]=e_{n-1}, & [e_i,y]=e_i, & 2\leqslant i\leqslant n-2,\\ [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & [e_n,y]=e_n, & [y,e_1]=-e_{n-1}, & [y,e_{n-1}]=-e_{n-1},\\ [y,e_n]=-e_2-e_n. \end{cases}$$

Список литературы

[1] J.M.A. Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, Classification of Lie algebras with naturally graded quasi-filiform nilradicals. J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 11, 2168–2186.

[2] L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. **44** (2009), no. 5, 527–539..

[3] E.M. Cañete, A.Kh. Khudoyberdiyev. The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. Lin. Alg. Appl., **439** (2013), no. 1, 273–288.

[4] J.-L. Loday. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. (2) **39** (1993), no. 3–4, 269–293.

Формальный коцикл Ботта

Д.В. Осипов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, НИУ ВШЭ, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия

d_osipov@mi-ras.ru

Р. Ботт в [1] предложил следующую конструкцию группового коцикла. Пусть M — гладкое компактное ориентируемое n-мерное многообразие, и Γ — группа, действующая справа на многообразии M при помощи сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Рассмотрим абелеву группу $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел относительно умножения.

Заметим, что, так как мы предположили, что группа Γ действует на многообразии M справа, группа Γ действует слева на абелевой группе $C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ гладких функций из многообразия M в группу $\mathbb{R}_+$ по следующему правилу

$$h(f)(x) = f(xh)\,,$$

где $h \in \Gamma$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$, $x \in M$.

Пусть ω — форма объема на многообразии M. Для любого элемента $h \in \Gamma$ определим функцию $\mu(h) \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ следующим образом

$$\mu(h) = \frac{h^*(\omega)}{\omega}.$$

Теперь $n + 1$-коцикл B, такой, что его класс задает элемент из группы $H^{n+1}(\Gamma, \mathbb{R})$, определяется как

$$B(h_1, \ldots, h_{n+1}) = \int_M \log \mu(\widehat{h_1}) \; d\log \mu(\widehat{h_2}) \wedge \ldots \wedge d \log \mu(\widehat{h_{n+1}})\,,$$

где $h_1, \ldots, h_{n+1} \in \Gamma$, и $\widehat{h_i} = h_1 \; h_2 \ldots h_i$ для $1 \le i \le n$.

В случае, когда $n = 1$, $M = S^1$ является окружностью и $\omega = d\theta$, где θ — координата на окружности, коцикл Ботта также назывется коциклом Ботта–Тёрстона. В этом случае он задает центральное расширение группы $\Gamma = \mathrm{Diff}(S^1)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1 при помощи группы $\mathbb{R}$. Касательная алгебра Ли к получившийся бесконечномерной группе Ли будет алгеброй Вирасоро, а сам коцикл Ботта–Тёрстона при переходе к алгебрам Ли становится кратен 2-коциклу Гельфанда Фукса на алгебре Ли векторных полей на окружности.

Можно написать формальную версию для коцикла Ботта для n-мерного тора.

В случае $n = 1$ формальный коцикл Ботта–Тёрстона — это 2-коцикл на группе непрерывных A-автоморфизмов алгебры $A((t))$ рядов Лорана над кольцом A со значениями в группе A^* обратимых элементов кольца A.

В своем докладе я расскажу, следуя [2], что центральное расширение, заданное формальным коциклом Ботта-Тёрстона, эквивалетно 12-кратной сумме Бэра детерминантного центрального расширения, если A является $\mathbb{Q}$-алгеброй. В качестве следствия этого результата получается часть новой формальной теоремы Римана–Роха. Эта теорема Римана–Роха применяется к окольцованному пространству на отделимой схеме S над полем $\mathbb{Q}$, где структурный пучок окольцованного пространства локально на схеме S изоморфен пучку $\mathcal{O}_S((t))$ и склеивающие автоморфизмы непрерывны. Локально на схеме S это окольцованное пространство соответствует проколотой формальной окрестности сечения гладкого морфизма в U относительной размерности 1, где открытое подмножество $U \subset S$.

Список литературы

[1] R. Bott. On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms. Enseign. Math. (2) **23** (1977), no. 3–4, 209–220.

[2] Д.В. Осипов. Формальный коцикл Ботта–Тёрстона и часть формальной теоремы Римана–Роха. Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия. Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина. Труды МИАН **320**, МИАН, М., 2023 (в печати); arXiv: `2211.15932` (2022).

U-инварианты представлений редуктивных групп

А.Н. Панов

Самарский университет, Самара, Россия

`apanov@list.ru`

Пусть $G = \mathrm{GL}(n)$ — полная матричная группа над полем K, $U = \mathrm{UT}(n)$ — унитреугольная группа, $V = \mathrm{Mat}(n)$ и $\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$.

Рассмотрим $\mathcal{H}_2 = \mathrm{Mat}(n) \oplus \mathrm{Mat}(n)$ и действие $\mathrm{Ad}_g(A_1, A_2) = (\mathrm{Ad}_g A_1, \mathrm{Ad}_g A_2)$ группы G на $\mathcal{H}_2$. Пусть $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ и $Y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$, где $\{x_{ij}\}$ и $\{y_{ij}\}$ — стандартные координатные функции первой и второй компоненты в $\mathcal{H}_2$.

Для любого целого $i \in [1,n]$ обозначим через $i' = n - i + 1$ число, симметричное i относительно центра отрезка $[1,n]$. Для любой пары (i,j) условие $i' \leqslant j$ означает, что пара (i,j) лежит на или ниже побочной диагонали. Для такой пары определен минор $M_{ij}(X)$ порядка i' матрицы X с системой строк $[i,n]$ и столбцов $[1,i'-1] \sqcup \{j\}$.

Для пары $j \leqslant k$ рассмотрим минор $N_{jk}(Y)$ порядка k' матрицы Y с системой строк $\{j\} \sqcup [k+1,n]$ и столбцов $[1,k']$. Для пары $i' < k$ рассмотрим многочлен

$$P_{ik}(X,Y) = \sum_{i' \leqslant j \leqslant k} M_{ij}(X) \cdot N_{jk}(Y).$$

Пусть $P_{ik}(X) = P_{ik}(X,X)$ и $\mathbb{P}(X) = \{P_{ik}(X)\colon 1 \leqslant i' < k \leqslant n\}$. Для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ рассмотрим левый нижний угловой минор $D_k(X)$ порядка k' матрицы X и обозначим $\mathbb{D}(X) = \{D_k(X)\colon 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Теорема 1. Система многочленов $\mathbb{P}(X) \cup \mathbb{D}(X)$ свободно порождает поле U-инвариантов $K(\mathrm{Mat}(n))^U$ над полем K.

Пусть X^τ — матрица, симметричная X относительно побочной диагонали. Ортогональная и симплектическая группы определим стандартным образом, используя симметрию относительно побочной диагонали. Обе группы действуют на $\mathrm{Mat}(n)$ присоединенным образом. Пусть $\mathcal{U}$ — пересечение $\mathrm{UT}(n)$ с ортогональной или симплектической группой. Рассмотрим множество $\mathbb{P}(X^\tau, X)$, состоящее из многочленов $\{P_{ik}(X^\tau, X)\}$, где $i' > k \geqslant i$ в ортогональном случае и $i' > k > i$ в симплектическом случае.

Теорема 2. Система многочленов $\mathbb{P}(X) \cup \mathbb{D}(X) \cup \mathbb{P}(X^\tau, X)$ свободно порождает поле $\mathcal{U}$-инвариантов $K(\mathrm{Mat}(n))^{\mathcal{U}}$ над полем K.

В работах [1], [2] была использована другая конструкция для построения образующих элементов в полях U-инвариантов.

Список литературы

[1] К.А. Вяткина, А.Н. Панов. Поля U-инвариантов присоединённого представления группы $\mathrm{GL}(n,K)$, Матем. заметки **93** (2013), no. 1, 144–147.
[2] A.N. Panov. Fields of invariants for unipotent radicals of parabolic subgroups. Linear and Multilinear Algebra, published online, 2022; arXiv: `math.RT/2203.12370`.

Лучезарные торические многообразия II

А.Ю. Перепечко[1]
ИППИ РАН имени А.А. Харкевича, НИУ ВШЭ, Москва, Россия
a@perep.ru

Доклад является продолжением одноимённого доклада И.В. Аржанцева и основан на совместной работе И.В. Аржанцева, К.В. Шахматова и автора [1].

Полное торическое многообразие X назовём *лучезарным*, если максимальная унипотентная подгруппа U группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ действует на X с открытой орбитой. Мы рассмотрим два типа лучезарных многообразий в зависимости коммутативности U и опишем их свойства.

Мы опишем множество корней Демазюра, соответствующих подгруппе U, в комбинаторных терминах. В частности, мы представим ориентированные графы на множестве корней Демазюра, позволяющие описать центральные и производный ряды подгруппы U.

Наконец, мы представим возникающие ограничения на эквивариантные торические пополнения унипотентных алгебраических групп.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, A. Perepechko, K. Shakhmatov. Radiant toric varieties and unipotent group actions, arXiv: math.AG/2209.04021 (2022).

Описание коприсоединённых орбит максимальной и субмаксимальной размерности в нильпотентных алгебрах типов A, B, C, D

А.В. Петухов
ИППИ РАН имени А.А. Харкевича, Москва, Россия
alex--2@yandex.ru

Пусть N — это конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Орбиты коприсоединённого действия $N : \mathfrak{n}^*$ активно изучаются вот уже более 50 лет в контексте метода орбит Кириллова [4], [5], и их полное описание во многих интересных случаях является дикой задачей (насколько мне известно, даже для довольно маленьких алгебр Ли, скажем, заданных системой корней F_4, ответ пока не найден). С другой стороны, для максимальных нильпотентных подгрупп простых групп классических серий A, B, C, D имеется стратификация орбит Андре [1], [2], разбивающая все орбиты на большие и довольно явно

[1]Работа автора выполнена в НИУ ВШЭ за счёт гранта РНФ №22–41–02019.

описанные классы; каждая страта (класс) в этой конструкции описывается расстановкой ладей на некотором поле (тип поля зависит от типа алгебры).

В моём докладе я хотел показать как, используя комбинаторику стратификации Андре, можно получить полную классификацию коприсоединённых орбит максимальной и субмаксимальной размерности во всех классических типах A_n, B_n, C_n, D_n, что естественным образом расширяет соответствующие результаты А.А. Кириллова [4] и А.Н. Панова [6] для типа A. Общая идея состоит в том, чтобы доказать, что подавляющее большинство страт Андре не может содержать орбиты максимальной и субмаксимальной размерности (что, в целом, соответствует идеям статьи [6]), изучив свойства некоторого графа, построенного по матрице, ассоциированной с линейными формами из этой страты. Доклад основан на совместной работе с М.В. Игнатьевым [3], которую мы сейчас пишем.

Список литературы

[1] C.A.M. Andre. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group. J. Algebra **176** (1995), 959–1000.

[2] C.A.M Andre, A.M. Neto. Super-characters of finite unipotent groups of types B_n, C_n and D_n. J. Algebra **305** (2006), 394–429.

[3] М.В. Игнатьев, А.В. Петухов. Описание орбит для максимальных подалгебр классических алгебр Ли для экстремальных размерностей, in preparation.

[4] A.A. Kirillov. Unitary representations of nilpotent Lie groups. Russian Math. Surveys **17** (1962), 53–110.

[5] A.A. Kirillov. Lectures on the orbit method. Grad. Stud. Math. **64**, AMS, 2004.

[6] A.N. Panov. Involutions in S_n and associated coadjoint orbits. J. Math. Sci. **151** (2008), 3018–3031.

Первичные йордановы супералгебры, удовлетворяющие стандартному тождеству

А.В. Попов

Ульяновск, Россия

klever176@rambler.ru

Будем предполагать, что основное поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику.

Алгебра A над полем $\mathbb{F}$ называется *первичной* в случае, если произведение любых её ненулевых идеалов не равно нулю, и *полупервичной*, если любой её идеал I не тривиален, то есть $I^2 \neq 0$.

Понятие первичности/полупервичности допускает некоторые вариации. В частности, отдельно выделяют первичные алгебры без ниль-идеалов, без локально-нильпотентных идеалов и др.

В случае йордановых алгебр известно описание первичных йордановых алгебр без ниль-идеалов [1]. Кроме того, имеются примеры первичных йордановых алгебр все элементы которых — ниль-элементы [2], [3].

Известно, что все конечно-порожденные первичные йордановы алгебры не содержат ниль-идеалов [4]. Данное ограничение дополняется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть A — первичная йорданова алгебра, удовлетворяющая стандартному йорданову тождеству $\sum\limits_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}\,yx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}=0$. Тогда A не содержит ненулевых ниль-идеалов.*

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр, порождённое алгеброй A (то есть класс всех алгебр, удовлетворяющих тождествам алгебры A). Если A — первичная алгебра, то в общем случае свободная алгебра $\mathbb{F}_{\mathcal{V}}[X]$ многообразия $\mathcal{V}$ (X — счётное множество порождающих) не обязательно первична, но является *T-первичной*. А именно, произведение любых её ненулевых T-идеалов (то есть идеалов, устойчивых относительно действия $End\left(\mathbb{F}_{\mathcal{V}}[X]\right)$) не равно нулю. Любое многообразие $\mathcal{V}$, чья свободная алгебра является T-первичной, называется T-первичным многообразием.

Если A — первичная супералгебра, то её грассманова оболочка $G(A)$ также порождает T-первичное многообразие. Оказывается, что в «хороших» многообразиях все первичные T-подмногообразия порождаются первичными супералгебрами (любую первичную алгебру можно рассматривать как первичную супералгебру) [5]. В йордановом случае оказывается справедливой теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие йордановых алгебр, удовлетворяющая стандартному йорданову тождеству $\sum\limits_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}\,yx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}=0$. Тогда все T-первичные подмногообразия многообразия $\mathcal{V}$ порождаются первичными супералгебрами.*

Как теорема 1, так и теорема 2 являются следствиями следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие йордановых алгебр. Всякая алгебра из $\mathcal{V}$ имеет конечную мультипликативную длину в том и только в том случае, когда в $\mathcal{V}$ выполнено стандартное тождество $\sum\limits_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}\,yx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$.*

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие йордановых алгебр, не содержащее в качестве подмногообразия многообразия разрешимых индекса 2 йордановых алгебр. Тогда для любой алгебры A из $\mathcal{V}$ всякий ее нильпотентный идеал сильно нильпотентен.*

Список литературы

[1] Е.И. Зельманов. О первичных йордановых алгебрах. II. Сиб. мат. журнал **24** (1983), no. 1, 89–104.

[2] С.В. Пчелинцев. Первичные алгебры и абсолютные делители нуля. Изв. Акад. Наук СССР **50** (1986), no. 1, 79–100.

[3] В.Г. Скосырский. Первичные йордановы алгебры и конструкции Кантора. Алгебра и логика **33** (1994), no. 3, 301–316.

[4] Е.И. Зельманов. Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры. Сиб. мат. журнал **23** (1982), no. 6, 100–116.

[5] И.П. Шестаков. Альтернативные и йордановы супералгебры. Труды X Сибирской Школы «Алгебра и Анализ». Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997, 157–169.

[6] А.Р. Кемер. Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры. Изв. Акад. Наук СССР **48** (1984), 1042–1059.

Многочлены Ласку и подразбиение многогранника Гельфанда–Цетлина

Е.Д. Преснова[1]

НИУ ВШЭ, Москва, Россия

Ekaterina-Presnova@yandex.ru

Модуль Демазюра D_λ^w для данного представления V_λ группы $\mathrm{GL}(n)$ и перестановки $w \in S_n$ определяется как линейная оболочка B-орбиты экстремального вектора $wv_\lambda \in V_\lambda$, где $B \subset \mathrm{GL}(n)$ — фиксированная борелевская подгруппа. Модули Демазюра возникают во многих задачах теории представлений; их характеры называются *ключевыми многочленами* (key polynomials) и допускают ряд явных комбинаторных описаний. *Многочлены Ласку* являются неоднородными деформациями ключевых многочленов. Они описываются следующим образом:

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\beta)} = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } \alpha \text{ — разбиение (то есть } \alpha_i \geqslant \alpha_{i+1}) \\ \pi_i^{(\beta)}(\mathcal{L}_{s_i\alpha}^{(\beta)}) & \text{иначе,} \end{cases}$$

[1]Работа поддержана грантом Junior Leader фонда «Базис»

где α — бесконечная последовательность неотрицательных целых чисел, где число положительных элементов конечно, а α_i — i-е вхождение.

Оператор $\pi_i^{(\beta)}$, действующий на кольце многочленов $\mathbb{Z}[\beta][x_1, x_2, \ldots]$, определяется следующим образом:

$$\pi_i^{(\beta)}(f) = \frac{x_i f + \beta x_i x_{i+1} f - s_i(x_i f + \beta x_i x_{i+1} f)}{x_i - x_{i+1}} \tag{1}$$

Ключевые многочлены получаются как специализации многочленов Ласку при $\beta = 0$:

$$\mathcal{L}_\alpha^{(0)} = k_\alpha. \tag{2}$$

В работе [1] описано соответствие целых точек многогранника Гельфанда–Цетлина мономам соответствующего характера Демазюра. Основной целью работы является комбинаторное описание многочленов Ласку в терминах подразбиений многогранника Гельфанда–Цетлина, где мономы при β^i будут соответствовать клеткам размерности i.

В случае размерности $n = 3$ и самой длинной перестановки $w_0 = s_1 s_2 s_1$ получена конструкция, позволяющая представить многогранник Гельфанда–Цетлина в виде клеточного комплекса, где клетки размерности i будут соответствовать мономам при β^i. Более того, ограничение конструкции на когановские грани, соответствующие перестановкам меньшей длины, позволяет получить описание для всех остальных многочленов Ласку от трёх переменных.

В дальнейшем планируется обобщить данный результат на случай произвольной размерности.

Список литературы

[1] V.A. Kirichenko, E.Yu. Smirnov, V.A. Timorinю Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes. Uspekhi Mat. Nauk **67** (2012), no. 4(406), 89–128.

[2] Yu. Tianyi. Set-valued tableaux rule for Lascoux polynomials, arXiv: `math.CO/2110.00164`.

Жёсткость алгебры Ли $\mathfrak{pgl}(4)$ в характеристике 2

М.М. Рабиа

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

`rabiannovgorod91@gmail.com`

Деформации полупростых алгебр Ли малой размерности над полем характеристики 2 представляют интерес в связи с проблемой классификации простых конечномерных алгебр Ли. В работах [1], [2] исследованы локальные деформации алгебр Шевалле L и их факторалгебр по центру $\overline{L}$ над алгебраически замкнутыми полями характеристики 3 и 2. В [3] найдены орбиты интегрируемых локальных деформаций простой алгебры Ли$\overline{A_3}$ над полем характеристики 2 и показано, что с точностью до изоморфизма имеются две глобальные деформации этой алгебры. Согласно [4], все известные простые 14-мерные алгебры Ли являются деформациями алгебры $\overline{A_3}$. В работе [5] исследованы деформации полупростой алгебры Ли, имеющей единственный дифференциально простой идеал с простым 3-мерным ядром $W_1(2)$.

Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(4) = \overline{A_3}$ имеет достаточно большую алгебру внешних дифференцирований: согласно [6], $\dim H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 7$. Таким образом, имеется множество неизоморфных полупростых алгебр Ли, которые являются расширениями одномерной алгебры Ли с помощью $\mathfrak{g}$. В докладе рассматривается одна из таких алгебр Ли $L = \mathfrak{pgl}(4)$. Автор доказал, что $H^2(L, L) = 0$. Таким образом, справедлива.

Теорема. Алгебра Ли $L = \mathfrak{pgl}(4)$ над полем характеристики 2 является жёсткой.

Список литературы

[1] М.И. Кузнецов, Н.Г. Чебочко. Деформации классических алгебр Ли. Матем. сб. **191** (2000), no. 8, 69–88.

[2] Н.Г. Чебочко. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I. Матем. сб. **196** (2005), no. 9, 125–156.

[3] M.I. Kuznetsov, N.G. Chebochko. Integrable cocycles and global deformations of Lie algebra of type G_2 in characteristic 2. Commun. Algebra **45** (2017), no. 7, 2969–2977.

[4] M.I. Kuznetsov M.I., A.V. Kondrateva, N.G. Chebochko. Simple 14-dimensional Lie algebras in characteristic two. J. Math. Sci. **240** (2019), no. 4, 474–480.

[5] A. Grishkov, P. Zusmanovich. Deformations of current Lie algebras. I. Small algebras in characteristic 2. J. Algebra **473** (2017), 513–544.

[6] Д.С. Пермяков. Дифференцирования классических алгебр Ли характеристики 2. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математика. Вып. 1(3), 2005, 123–134.

Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов

В.В. Севостьянова
Самарский университет, Самара, Россия
berlua@mail.ru

Доклад основан на работах [1], [2].

Пусть $\mathbb{H}^d$ — гильбертово пространство размерности d над вещественным или комплексным полем $\mathbb{F}$.

Определение 1. Набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\mathbb{H}^d$ будем называть фреймом, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$ такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Эквивалентно, конечный фрейм в $\mathbb{H}^d$ можно определить как произвольный полный набор векторов: $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$ ([3]).

Оператором *синтеза* фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ называется $\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{H}^d$, $\mathbf{\Phi x} := \sum\limits_{j=1}^n \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ — j-я координата $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$. Матрица оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ — $d \times n$-матрица, столбцами которой являются векторы фрейма. Оператором *анализа* называется оператор $\mathbf{\Phi}^*\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}^n$, для которого $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle$, $j = 1, \ldots, n$. Подробнее о фреймах см. [4], [5], [6].

Если $a = b$, то имеет место равенство $\mathbf{\Phi\Phi}^* = a\mathbf{I}$, и такие фреймы называются *a-жёсткими*. 1-жёсткие фреймы будем называть *фреймами Парсеваля*. Обозначим через $\mathcal{X}_{d,n}$ многообразие фреймов Парсеваля в $\mathbb{F}^{dn}$. Можно показать, что многообразие $\mathcal{X}_{d,n}$ гладкое и неприводимое, см. [4].

На множестве фреймов можно ввести различные классы эквивалентности.

Определение 2. Фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, переводящее векторы одного фрейма в векторы другого: $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i,\ \forall i$.

Хорошо известно, что матрицы Грама двух систем векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ совпадают тогда и только тогда, когда эти системы унитарно эквивалентны. Тогда унитарно эквивалентные фреймы однозначно определяются значениями скалярных произведений $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, $i \leqslant j$.

Заметим, что класс унитарно эквивалентных фреймов зависит от порядка, в котором расположены векторы фрейма.

Определение 3. Будем говорить, что два фрейма Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ *перестановочно унитарно эквивалентны*, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентны.

Имеет место утверждение, согласно которому квадратная матрица $\mathbf{G}$ является матрицей Грама фрейма Парсеваля тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}$ — матрица ортогонального проектирования, то есть $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^2$ (подробнее см. [4]). Пусть $\mathrm{Gr}(d, n)$ — множество таких ортогональных проекций, являющееся гладким неприводимым многообразием. Поскольку матрица Грама однозначно определяет унитарный класс эквивалентности, для описания перестановочно унитарных классов эквивалентности достаточно изучить действие симметрической группы на многообразии $\mathrm{Gr}(d, n)$. В докладе пойдет речь об орбитах и инвариантах этого действия. Будут указаны регулярные функции, в общем положении разделяющие перестановочно-унитарные классы эквивалентности на $\mathfrak{X}_{d,n}$.

Список литературы

[1] С.Я. Новиков, В.В. Севостьянова. Классы эквивалентности фреймов Парсеваля. Мат. заметки **112** (2022), no. 6, 940—954.

[2] В.В. Севостьянова. Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов. Математика и теоретические компьютерные науки №2, 2023, принята к печати.

[3] O. Christensen. An introduction to frames and Riesz bases. Boston, Birkhauser, 2002.

[4] S.F.D. Waldron. An Introduction to finite tight frames. Boston, Birkhauser, 2018.

[5] M. Fickus, J. Jasper, E.J. King, D.G. Mixon. Equiangular tight frames that contain regular simplices. Linear Algebra and its Applications **555** (2018), 98–138.

[6] S.Ya. Novikov. Equiangular tight frames with simplices and with full spark in $\mathbb{R}^d$. Lobachevskii Journal of Mathematics **42** (2021), no. 1, 155–166.

О билинейной форме на кольце представлений $\mathfrak{gl}(m,n)$

А.Н. Сергеев
Саратовский нацинальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
SergeevAN@info.sgu.ru

Доклад основан на работе автора [1].

Пусть $p \to p^*$ будет автоморфизмом кольца многочленов Лорана $P_{m,n} = \mathbb{Z}[x_i, x_i^{-1}, y_j, y_j^{-1}]$ таким, что

$$x_i^* = x_i^{-1},\ i = 1, \dots, m, \quad y_j^* = y_j^{-1},\ j = 1, \dots, n.$$

Положим

$$\Delta(x) = \prod_{i>j}\left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right),\ \Delta(y) = \prod_{i>j}\left(1 - \frac{y_i}{y_j}\right),\ \Delta(x,y) = \prod_{i,j}\left(1 + \frac{y_j}{x_i}\right)$$

и для $p, q \in P_{m,n}$ определим

$$(p,q) = \frac{1}{m!}\frac{1}{n!}\left[p^* q \frac{\Delta(x)\Delta(x)^*\Delta(y)\Delta(y)^*}{\Delta(x,y)\Delta(x,y)^*}\right]_0$$

где $[\ ,\ ]_0$ означает постоянный член и $(\Delta(x,y)\Delta(x,y)^*)^{-1}$ понимается как

$$(\Delta(x,y)\Delta(x,y)^*)^{-1} = \frac{(y_1 \dots y_n)^m}{(x_1 \dots x_m)^n}\left[\prod_{i.j}\left(1 + \frac{y_j}{x_i}\right)\right]^{-2}.$$

Теорема. *Справедливо следующее равенство*:

$$\dim Hom_{\mathfrak{g}}(P, L) = (chP, chL),$$

где $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,n)$, P *— конечномерный проективный модуль, а* L *— любой конечномерный модуль.*

Список литературы

[1] A.N. Sergeev. Canonical bilinear form and Euler Characters. J. Algebra **601** (2022), 149–177.

Многогранники и K-теория торических и флаговых многообразий

Е.Ю. Смирнов
НИУ ВШЭ, Независимый москоский университет, Москва, Россия
esmirnov@hse.ru

В работе А.В. Пухликова и А.Г. Хованского [7] было предложено описание кольца когомологий торического многообразия X как фактора кольца дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по аннулятору многочлена объёма многогранника моментов многообразия X. Эта конструкция была обобщена К. Кавехом [1], который заметил, что кольцо когомологий многообразия полных флагов может быть получено в результате применения аналогичной конструкции ко многограннику Гельфанда—Цетлина. Впоследствии это описание было использовано в совместной работе докладчика с В.А. Кириченко и В.А. Тиморином [3], в которой была предложена реализация исчисления Шуберта на многообразиях полных флагов при помощи пересечения определённых наборов граней многогранников Гельфанда–Цетлина.

Я расскажу о нашей совместной работе с Л.В. Мониным, посвящённой обобщению этих результатов на случай K-теории. А именно, нами было предложено обобщение конструкции алгебр с горенштейновой двойственностью, задаваемой обратными системами Маколея (см. препринт Хованского и Монина [2]) на случай операторов сдвига с постоянными коэффициентами. Далее эта конструкция была использована для определения K-кольца многогранника; для этого была рассмотрена алгебра операторов сдвига с постоянными коэффициентами по модулю аннулятора многочлена Эрхарта многогранника. Особенно интересен здесь случай целочисленно простых многогранников, отвечающих гладким торическим многообразиям.

Далее нам удалось показать, что K-теория торического многообразия совпадает с K-кольцом его многогранника моментов. В последнем кольце были выписаны явные представители классов структурных пучков замыканий орбит тора. Наконец, было получено обобщение этой конструкции на случай многообразий полных флагов; группа Гротендика такого многообразия изоморфна K-кольцу многогранника Гельфанда–Цетлина (который, однако, уже не является простым, что доставляет дополнительные технические трудности). В K-кольце многогранника Гельфанда–Цетлина удается предъявить элементы, отвечающие классам структурных пучков многообразий Шуберта. Это описание позволяет проводить вычисления в группе Гротендика многообразия флагов в терминах граней многогранников Гельфанда–Цетлина, что даёт обобщение результатов работы [4].

Работа выполнена при поддержке фонда «Базис».

Список литературы

[1] K. Kaveh. Note on cohomology rings of spherical varieties and volume polynomial. J. Lie Theory **21** (2011), no. 2, 263–283.
[2] A. Khovanskii, L. Monin. Gorenstein algebras and toric bundles, arXiv: `math.AG/2106.15562` (2021).
[3] V.A. Kirichenko, E.Yu. Smirnov, V.A. Timorin. Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes. Russian Mathematical Surveys **67** (2012), no. 4, 685–719.
[4] A.V. Pukhlikov, A.G. Khovanskii. Finitely additive measures of virtual polyhedra. Algebra i Analiz **4** (1992), no. 2, 161–185.

L_p-аппроксимации решений параболических уравнений второго порядка на многообразиях ограниченной геометрии

А.С. Смирнова[1]
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
`smirnovaas@hse.ru`

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с частными производными в римановом многообразии ограниченной геометрии. Класс многообразий ограниченной геометриии содержит в себе все компактные многообразия, а также широкий класс некомпактных многообразий, что создаёт значительные технические трудности. Например, интегралы по многообразию становятся несобственными в случае, когда многообразие имеет бесконечный объём. При этом условие ограниченной геометрии многообразия гарантирует полноту любого гладкого ограниченного векторного поля на таком многообразии. В таком случае мы можем использовать технику сдвига вдоль интегральных кривых векторного поля: векторные поля будут являться коэффициентами уравнения, затем мы используем их для создания операторнозначной функции (называемой функцией Чернова), которая определена на $[0, +\infty)$. Вот почему нам нужно, чтобы интегральные кривые векторных полей существовали для всех положительных значений времени $t > 0$ (на компактных многообразиях это выполняется автоматически). После этого мы используем функцию Чернова и начальное условие для создания аппроксимаций Чернова $u_n(t, x)$, которые сходятся к решению $u(t, x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{L_p(M)} = 0$. Таким образом, решение выражается в виде явной формулы, содержащей в качестве

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101.

параметров коэффициенты уравнения и начальное условие. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова об аппроксимации операторных полугрупп.

Графы Горески–Коттвица–Макферсона и кольца Чжоу орисферических многообразий с числом Пикара равным одному

А.К. Сонина
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
sasha-sonina@mail.ru

В настоящей работе мы рассматриваем компактификации орисферических пространств с числом Пикара один. Такие многообразия допускают полную классификацию, приведённую в работе [3]. Особый интерес представляют два многообразия размерностей 7 и 23 с действием исключительных групп типов G_2 и F_4 соответственно.

Мы даем рецепт вычисления таблицы умножения эквивариантных колец Чжоу таких пространств при помощи метода Горески–Коттвица–Макферсона [2]. А именно, эквивариантное кольцо когомологий допускает описание в виде набора расстановок многочлена на графе, вершины которого соответствуют точкам, неподвижным под действием тора, а ребра — инвариантным прямым. Мы строим так называемый flow up базис, который позволяет быстро вычислять произведение двух образующих. В частном случае пространства с действием группы типа G_2 мы явно задаём эквивариантное кольцо Чжоу образующими и соотношениями [4].

Теорема. $CH_T^*((G_2, \omega_1, \omega_2)) = CH_T^*(pt)[h, flow_2, flow_3] \ / \langle R_i \rangle_{i \in I}$, где h — образующая степени 1, $flow_2$ — образующая степени 2, $flow_3$ — образующая степени 3, а R_i — соотношения, полученные из таблицы умножения.

Вычисление по большей части чисто комбинаторное по своей природе. Однако для построения flow up базиса используется тот геометрический факт, что раздутие рассматриваемого многообразия вдоль одного проективного однородного подмногообразия изоморфно проективизации некоторого расслоения над другим проективым однородным подмногообразием (доказанный, например, в [1]).

Список литературы

[1] R. Gonzales, C. Pech, N. Perrin, A. Samokhin. Geometry of horospherical varieties of Picard rank one. IMRN **2022** (2022), no. 12, 8916–9012.

[2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem. Invent. Math. **131** (1998), 25–83.

[3] B. Pasquier. On some smooth projective two-orbit varieties with Picard number 1. Math. Ann. **344** (2009), no. 4, 963–987.

[4] В.А. Петров, А.К. Сонина. Кольцо Чжоу оросферических многообразий с числом Пикара один. Записки научных семинаров ПОМИ **513** (2022), 147–163.

Строение нормализатора максимального тора в конечных группах лиева типа

А.М. Старолетов, А.А. Гальт
Институт математики им. С.Л. Соболева РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
`staroletov@math.nsc.ru, galt84@gmail.com`

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ простого поля характеристики p. Через σ будем обозначать эндоморфизм Стейнберга. Рассмотрим конечную группу лиева типа G, это означает, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leqslant G \leqslant \overline{G}_\sigma$. Если $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, то $T = \overline{T} \cap G$ — максимальный тор группы G. Общая задача заключается в описании таких групп G и их максимальных торов T, что алгебраический нормализатор $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ расщепляется над T. Отметим, что задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса [1].

Данная проблема решена для конечных групп лиевых типов A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8 и F_4 в работах [2]–[6]. Более того, для группы $F_4(q)$ в случае отсутствия дополнения в алгебраическом нормазилаторе для максимального тора найдены добавления минимального порядка. Мы завершаем исследование поставленного вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора для оставшихся конечных групп лиева типа.

Теорема. Пусть $G \in \{G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q), {}^2F_4(q), {}^2B_2(q)\}$. Если T — максимальный тор группы G и N — его алгебраический нормализатор, то N расщепляется над T.

Препринт статьи выложен на сайте `arxiv.org` [7].

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН (проект FWNF–2022–0002).

Список литературы

[1] J. Tits. Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter étendus. J. Algebra **4** (1966), 96–116.
[2] А.А. Гальт. О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах. Известия РАН. Сер. матем. **78** (2014), no. 3, 2014, 19–34; arXiv: `math.GR/1302.2520`.
[3] A.A. Galt. On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups. J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 7, 1550114.
[4] A.A Galt. On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups. J. Algebra Appl. **16** (2017), no. 9, 1750174.
[5] А.А. Гальт, А.М. Старолетов. О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в группах $E_7(q)$ и $E_8(q)$. Мат. труды **24** (2021), no. 1, 52–101; arXiv: `math.GR/1901.00372v2`.
[6] А.А. Гальт, А.М. Старолетов. Минимальные добавления к максимальным торам в их нормализаторах для групп $F_4(q)$. Известия РАН. Сер. матем. **86** (2022), no. 1, 134–159: arXiv: `math.GR/2007.03417`.
[7] A.A. Galt, A.M. Staroletov. On splitting of the normalizer of a maximal torus in finite groups of Lie type, arXiv: `math.GR/2212.12199` (2022).

Короткие SL_2-структуры и их представления

Р.О. Стасенко
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
theromestasenko@yandex.ru

Известна классическая конструкция Титса—Кантора-–Кёхера, позволяющая по простой йордановой алгебре J построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, имеющую вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J).$$

Теорема Титса—Кантора-–Кёхера утверждает, что между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли, удовлетворяющими описанной выше формуле, существует взаимно однозначное соответствие.

Конструкцию Титса—Кантора-–Кёхера можно интерпретировать как линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ автоморфизмами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое разлагается на неприводимые представления размерностей 1 и 3. Естественным обобщением является следующее понятие. Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi\colon S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

В докладе рассматриваются SL_2-структуры. SL_2-структуру назовем короткой, если представление Φ группы SL_2 разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3. При этом изотипное разложение представления Φ будет иметь вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \big(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\big) \oplus \big(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\big).$$

Конструкция Титса—Кантора—Кёхера получается при $J_1 = 0$. Доклад будет посвящён случаю $J_1 \neq 0$.

Аналогично теореме Титса-–Кантора-–Кехера, будет установлено взаимно однозначное соответствие между простыми алгебрам Ли с короткой SL_2-структурой с $J_1 \neq 0$ и так называемыми простыми симплектическими структурами Ли–Йордана $(\delta_0; \mathfrak{g}_0; J_; J_2)$, где J_1 —– симплектическое пространство, $\mathfrak{g}_0$ —– редуктивная подалгебра Ли в $\mathfrak{sp}(J_1)$, а J_2 —– простая йорданова подалгебра симметрических операторов на J_1, а δ_0 — некоторое билинейное симметрическое отображение. Будет дана полная классификация коротких SL_2-структур на простых алгебрах Ли.

Короткие и очень короткие SL_2-структуры можно аналогичным образом задавать на произвольных $\mathfrak{g}$-модулях, используя соответствующее линейное представление алгебры ли $\mathfrak{g}$. Подобная конструкция имеет интересные приложения к теории представлений йордановых алгебр, о которых также будет рассказано в докладе.

Аффинный суперянгиан

В.А. Стукопин

Московский физико-технический институт, Москва, Россия,

Южный математический институт ВНЦ РАН,

Владикавказ, Россия

stukopin@mail.ru

Доклад основан на совместной работе автора и В.Д. Волкова [1].

Суперянгиан $Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{g}}(\Pi)) = Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ аффинной специальной линейной супералгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}(\Pi) = \widehat{\mathfrak{sl}}(m|n)$ определяется в случае произвольной системы простых корней Π, сначала в терминах так называемой «минималистской» системы образующих и определяющих соотношений. Мы также вводим суперянгиан $\check{Y}_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ специальной линейной супералгебры Ли в терминах новой системы образующих Дринфельда, так же в случае произвольной системы простых корней супералгебры Ли $Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$. Мы доказываем, что суперянгианы $Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ и $\check{Y}_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ изоморфны как ассоциативные супералгебры. Мы также вводим группоид Вейля в случае суперянгиана $Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ и явно описываем действие элементов группоида, как изоморфизмов в категории суперянгианов $Y_\hbar(\widehat{\mathfrak{g}}(\Pi))$ аффинной специальной линейной супералгебры, определяемых различными системами простых корней Π.

Список литературы

[1] D. Volkov, V. Stukopin. Affine super Yangian, in preparation.

Классификация коприсоединённых орбит унипотеного радикала борелевской подгруппы простой алгебраической группы типа F_4

М.А. Сурков

Самарский университет, Самара, Россия

`victorsumaev@yandex.ru`

Пусть G — простая комплексная алгебраическая группа, B — её борелевская подгруппа, N — её унипотентный радикал, $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли N. Группа N действует на $\mathfrak{n}$ присоединённым действием. Мы можем рассмотреть двойственное действие N на пространстве $\mathfrak{n}^*$, которое называется коприсоединённым. Если Φ — система корней G, то $\mathfrak{n} = \langle e_\alpha, \alpha \in \Phi^+\rangle$, $N = \exp(\mathfrak{n})$. Все сколь-нибудь хорошо изученные на данный момент коприсоединённые орбиты — это так называемые орбиты, ассоциированные с расстановками ладей. Они подробно рассматриваются в работах К. Андре, А.Н. Панова, М.В. Игнатьева, А.А. Шевченко и автора (см.[1], [2], [3], [4], [5]). Наша цель — описать все коприсоединённые орбиты N в случае $\Phi = F_4$ в терминах носителей канонических форм. Носителем линейной формы $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ называется подмножество $supp\lambda = \{\alpha \in \Phi^+ \colon \lambda(e_\alpha) \neq 0\}$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — простые корни в F_4, занумерованные как в [6]. Каждый положительный корень можно представить как сумму простых корней. Введём на положительных корнях F_4 лексикографический порядок. Для каждой линейной формы $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ и каждого корня $\gamma \in \Phi^+$ рассмотрим две матрицы $A_{\lambda,\gamma}$ и $B_{\lambda,\gamma}$. Столбцы обеих матриц занумерованы $\beta \in \Phi^+$ в лексикографическом порядке, строки матрицы $A_{\lambda,\gamma}$ занумерованы $\alpha \in \Phi^+$ такими, что $\alpha \succeq \gamma$, а строки $B_{\lambda,\gamma}$ занумерованы $\alpha \in \Phi^+$ такими, что $\alpha \succ \gamma$, и элементы обеих матриц — это $\lambda([e_\alpha, e_\beta])$.

Теорема. Пусть $\Phi = F_4$, и пусть S — это множество $\lambda \in \mathfrak{n}^*$, для которых выполнено условие
$$\forall \gamma \in supp\lambda \ \ \mathrm{rk} A_{\lambda,\gamma} = \mathrm{rk} B_{\lambda,\gamma}.$$
Тогда для любой коприсоединённой орбиты существует единственная форма $\lambda \in S$, принадлежащая данной орбите.

Нами получен список из 880 носителей, классифицирующий коприсоединённые орбиты. Оказывается, что множество S — это в точности все линейные формы с носителем из этого списка, а также некоторые формы с одним из трёх носителей:
$\{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2\}$, $\{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2, \alpha_4\}$,
$\{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_4\}$, при этом координаты любой такой формы λ в двойственном базисе удовлетворяют уравнению
$$\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\lambda^2_{\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4} = \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\lambda^2_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}.$$
Здесь $\lambda = \sum\limits_{\alpha\in\Phi^+} \lambda_\alpha e^*_\alpha$, где $\{e^*_\alpha\}$ — двойственный базис к $\{e_\alpha\}$. Результаты, полученные нами, подтверждаются результатами из [7], в которых посчитано количество орбит каждой размерности для конечного поля $\mathbb{F}_q$.

Благодарности. Данная работа была поддержана МЦМУ им. Эйлера (соглашение №075–15–2022–287).

Список литературы

[1] C.A.M. Andre. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group. J. Algebra **176** (1995), 959–1000.
[2] C.A.M Andre, A.M. Neto. Super-characters of finite unipotent groups of types B_n, C_n and D_n. J. Algebra **305** (2006), 394–429.
[3] M.V. Ignatev, M.A. Surkov. Rook placements in G_2 and F_4 and associated coadjoint orbits. To appear in Comm. Math.; arXiv: `math.RT/2107.03221` (2021).
[4] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Centrally generated primitive ideals of U(n) for exceptional types. J. Algebra **565** (2021), 627–650.
[5] A.N. Panov. Involutions in S_n and associated coadjoint orbits. J. Math. Sci. **151** (2008), 3018–3031.
[6] N. Bourbaki. Algebra II. Chapters 4–7. Elements of mathematics (Berlin). Springer–Verlag, Berlin, 2003.
[7] S.M. Goodwin, P. Mosch, G. Röhrle. On the coadjoint orbits of maximal unipotent subgroups of reductive groups. Transformation Groups **21** (2016), 399–426.

О некоторых группах и алгебрах Ли в алгебрах Клиффорда

Е.Р. Филимошина
НИУ ВШЭ, Москва, Россия
filimoshinaek@gmail.com

Доклад основан на работах [1], [2], [3], [4].

В данной работе мы рассматриваем вырожденные и невырожденные алгебры Клиффорда [5], [6], [7], [8] (или геометрические алгебры) произвольной размерности и сигнатуры над полем вещественных или комплексных чисел. В частности, рассматривается случай алгебр Грассмана (внешних алгебр). В настоящее время алгебры Клиффорда активно применяются в физике, компьютерных науках, инженерии и других науках.

В докладе мы вводим и изучаем пять семейств групп Ли специального типа в алгебрах Клиффорда. Эти группы Ли сохраняют некоторые фундаментальные подпространства алгебры Клиффорда при присоединённом и скрученном присоединённом действиях и являются аналогами известной группы Липшица, сохраняющей подпространство ранга 1 при скрученном присоединённом действии. Мы рассматриваем случаи чётного и нечётного подпространств, подпространств фиксированных рангов и их прямых сумм. Скрученное присоединённое действие введено в классической работе [9], оно осуществляет двулистное накрытие ортогональных групп соответствующими спинорными группами в случае произвольной размерности и сигнатуры. Рассматриваемые в докладе группы Ли содержат спинорные группы в качестве подгрупп. В случае малых размерностей некоторые из рассматриваемых групп Ли связаны с группой Гейзенберга и могут быть реализованы как подгруппы групп обратимых верхнетреугольных матриц. Унитреугольная группа может быть реализована как подгруппа этих групп.

В работе представлены алгебры Ли, которые соответствуют пяти рассматриваемым семействам групп Ли. В случае произвольной размерности полученные пять семейств алгебр Ли содержат пространство бивекторов, которое является алгеброй Ли спинорных групп. Приводятся коммутационные соотношения рассматриваемых алгебр Ли, с помощью которых можно описать их универсальные обёртывающие алгебры, пользуясь теоремой Пуанкаре – Биркгофа – Витта. В случае малых размерностей мы представляем рассматриваемые алгебры Ли в виде прямых сумм простых и разрешимых алгебр Ли. Данные алгебры Ли изоморфны известным матричным алгебрам Ли, в частности, классическим алгебрам Ли и алгебрам Гейзенберга. В дальнейшем планируется определить системы корней максимальных полупростых подалгебр рассматриваемых алгебр Ли в случае произвольной размерности.

Список литературы

[1] D. Shirokov. On inner automorphisms preserving fixed subspaces of Clifford algebras. Advances in Applied Clifford Algebras **31** (2021), Article no. 30.
[2] E. Filimoshina, D. Shirokov. On generalization of Lipschitz groups and spin groups. Mathematical Methods in the Applied Sciences (2022), 1–26.
[3] E. Filimoshina, D. Shirokov. On some Lie groups in degenerate geometric algebras. ICACGA 2022 (Colorado Springs, CO, USA, 2022). Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham, to appear.
[4] E. Filimoshina, D. Shirokov. On some Lie groups in degenerate Clifford geometric algebras. Advances in Applied Clifford Algebras, submitted (2023).
[5] C. Chevalley. The Algebraic Theory of Spinors. Columbia University Press, New York, 1954.
[6] I. Porteous. Clifford Algebras and the Classical Groups. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
[7] P. Lounesto. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
[8] J. Helmstetter, A. Micali. Quadratic Mappings and Clifford Algebras. Birkhäuser, Basel, 2008.
[9] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. Clifford Modules. Topology **3** (1964), 3–38.

Группа автоморфизмов торальных многообразий

А.А. Шафаревич[1]
НИУ ВШЭ, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
shafarevich.a@gmail.com

Доклад основан на совместной с А. Н. Трушином работе [2].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{K}$. Многообразие X называется *торальным*, если X изоморфно подмногообразию в алгебраическом торе $T = (\mathbb{K}^*)^n$.

Торальные многообразия являются жёсткими многообразиями, то есть не допускают нетривиальных действий аддитивной группы поля $\mathbb{K}$. В работе [1] было показано, что группа автоморфизмов жёстких многообразий содержит единственный максимальный тор. Также там были приведены примеры

[1] Автор поддержан фондом развития теоретической физики и математики «Базис».

жёстких многообразий, для которых удалось найти группу регулярных автоморфизмов.

В докладе будет расказанно об устройстве группы автоморфизмов торальных многообразий.

Теорема. Пусть X — торальное многообразие и T максимальный тор в группе автоморфизмов. Тогда многообразие X изоморфно прямому произведению $Y \times T$, где Y — торальное многообразие с дискретной группой автоморфизмов. Более того,

$$\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}(Y) \leftthreetimes (\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}) \leftthreetimes (\mathbb{K}[Y]^*)^k),$$

где k — размерность тора T и $\mathbb{K}[Y]^*$ — мультипликативная группа обратимых регулярных функций на Y.

Известно, что если X — неприводимое алгебраическое многообразие, то факторгруппа $\mathbb{K}[X]^*/\mathbb{K}^*$ является свободной конечно порождённой абелевой группой. Если X — торальное многообразие, то ранг $\mathbb{K}[X]^*/\mathbb{K}^*$ не меньше размерности X. В докладе будет рассказанно, как найти группу автоморфизмов торальных многообразий X, у которых ранг $\mathbb{K}[X]^*/\mathbb{K}^*$ равен или отличается на единицу от размерности X.

Список литературы
[1] I. Arzhantsev, S. Gayfullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Mathematische Nachrichten **290** (2017), no. 5–6, 662–671.
[2] A. Shafarevich, A. Trushin. On the automorphism group of a toral variety, arXiv: `math.AG/2211.16584` (2022).

Касательные конусы к аффинным многообразиям Шуберта

А.А. Шевченко
Самарский университет, Самара, Россия
`shevchenko.alexander.1618@gmail.com`

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, T — максимальный тор, B — содержащая его борелевская подгруппа, W — группа Вейля G относительно T. Обозначим через $F = G/B$ многообразие флагов. Оно распадается в объединение клеток Шуберта $F = \sqcup_{w \in W} X_w^o$. Замыкание клетки Шуберта X_w^o обозначается X_w и называется многообразием Шуберта, соответствующим элементу w. Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке $p = eB$, рассматриваемый как подсхема в касательном пространстве $T_pX_w \subset T_pF$. Описание касательных конусов — сложная задача теории алгебраических групп [2]. В 2011 году Д.Ю. Елисеев и А.Н. Панов [3] вычислили касательные конусы в явном виде для $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $n \leqslant 5$. На основании полученных результатов А.Н. Панов выдвинул следующую гипотезу.

Гипотеза. Пусть w_1, $w_2 \in W$ — различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.

Легко показать, что гипотезу достаточно проверить для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней. В 2013 году гипотеза была доказана Д.Ю. Елисеевым и М.В. Игнатьевым [4] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов A_n, F_4, G_2. В 2015 году гипотеза была доказана для так называемых базисных инволюций совместно М.В. Игнатьевым и автором [5] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типа D_n. В 2016 году гипотеза была доказана совместно М.А. Бочкарёвым, М.В. Игнатьевым и автором [1] для групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней типов B_n и C_n. В 2020 году гипотеза была доказана для некоторых пар инволюций совместно М.В. Игнатьевым и автором [6] в типах E_6, E_7, E_8.

Пусть теперь $G = G(A)$ — комплексная группа Каца-–Муди, ассоциированная с произовльной матрицей Картана A (не обязательно симметричной) со стандартной подгруппой Бореля B и стандартным максимальным тором $T \subset B$, тогда $W \cong N(T)/T$ — группа Вейля ассоциированная с парой (G, T). Все остальные объекты, необходимые для формулировки гипотезы, определяются аналогично, только G/B является инд-многообразием флагов. В докладе будет рассмотрен случай, когда W является аффинной группой Вейля типа A или группой аффинных перестановок.

Исследование А.А. Шевченко выполнено в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (по договору №ЕД–125006/Ф от 15.12.2022). Поездка А.А. Шевченко на школу-конференцию была осуществлена за счёт трэвел-гранта №22–3–5–11–1 фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Список литературы

[1] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, **465** (2016), 259-–286; arXiv: `math.RT/1310.3166`.

[2] S. Billey, S. Lakshmibai. Singular loci of Schubert varieties. Progr. in Math. **182**, Birkhäuser, 2000.

[3] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга. Записки научных семинаров ПОМИ **394** (2011),

218–225; arXiv: math.RT/1109.0399.
[4] Д.Ю. Елисеев, М.В. Игнатьев. Многочлены Костанта–Кумара и касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в A_n, F_4, G_2. Записки научных семинаров ПОМИ **414** (2013), 82–105; arXiv: math.RT/1210.5740.
[5] М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко. О касательных конусах к многообразиям Шуберта типа D_n. Алгебра и анализ **27** (2015), no. 4, 28–49; arXiv: math.AG/1410.4025.
[6] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. On tangent cones to Schubert varieties in type E. Communications in Mathematics **28** (2020), no. 2, 179–197; arXiv: math.AG/2007.04110.

Скрученные действия на когомологиях и бимодули

В.В. Щиголев
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
shchigolev_vladimir@yahoo.com

Пусть X — топологическое пространство, на котором слева непрерывно действует топологическая группа L. Кольца эквивариантных когомологий точки $H^\bullet_L(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ канонически действуют на $H^\bullet_L(X, \Bbbk)$ слева по формуле $hm = a_X^*(h) \cup m$, где $a_X \colon X \to \mathrm{pt}$ — постоянное отображение.

В докладе мы рассмотрим правые действия колец $H^\bullet_R(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ на $H^\bullet_L(X, \Bbbk)$, где L и R — замкнутые подгруппы компактной группы Ли G. Любое такое действие коммутирует с описанным выше каноническим левым действием и, таким образом, превращает $H^\bullet_L(X, \Bbbk)$ в бимодуль. Для введения правых действий нам потребуется дополнительная информация: так называемые *скручивающие* отображения $A \colon X \to G/R$, которые являются непрерывными L-эквивариантными отображениями.

Основной целью доклада является описание явной геометрической конструкции (через вложение произведений конструкций Бореля) следующего гомоморфизма:

$$H^\bullet_L(X/R, \Bbbk \otimes_{H^\bullet_P(\mathrm{pt},\Bbbk)} H^\bullet_Q(Y, \Bbbk) \to H^\bullet_L\left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y, \Bbbk\right),$$

где R и Q — замкнутые подгруппы замкнутой подгруппы $P \leqslant G$. Мы описываем условия (близкие к эквивариантно формальным), при которых этот гомоморфизм является изоморфизмом. Этот результат можно рассматривать как эквивариантную форму изоморфизма Кюннета.

В качестве примеров применений установленного изоморфизма можно рассмотреть вычисление (как бимодулей) колец когомологий многообразия флагов в виде [1] и многообразий Ботта–Самельсона, а также доказательство формулы произведения стандартных бимодулей [2, Section 3.4]. Кроме того, явная конструкция изоморфизма позволяет следить с геометрической точки зрения за морфизмами бимодулей Зёргеля на диаграммном языке [2, Section 5].

Список литературы

[1] M. Brion. Equivariant cohomology and equivariant intersection theory. In: A. Broer, A. Daigneault, G. Sabidussi (eds). Representation theories and algebraic Geometry. Nato ASI Series **514**. Springer, Dordrecht, 1998, 1–37.

[2] B. Elias, G. Williamson. Soergel calculus. Representation Theory **20** (2016), 295–374.

Burde's series of simple pre-Lie algebras

V.Yu. Gubarev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

`wsewolod89@gmail.com`

Pre-Lie algebras appeared during 1960s independently in affine geometry (E.B. Vinberg, J.-L. Koszul) and ring theory (M. Gerstenhaber). An algebra A is a pre-Lie algebra, if

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z)$$

holds for all $x, y, z \in A$.

In 1998, D. Burde found [1] a series of simple pre-Lie algebras I_n. Denote e_k, $k = 1, \ldots, n$, the linear basis of I_n, and define the product $\cdot$ by the formulas

$$e_n \cdot e_n = 2e_n, \quad e_n \cdot e_j = e_j, \quad e_j \cdot e_j = e_n, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

all omitted products are assumed equal to zero.

A. Mizuhara based on the studies of H. Shima [5] gave a list of simple pre-Lie algebras over a solvable Lie algebra [4], including I_n. In [1], it was proved that I_2 is the only simple pre-Lie algebra of dimension 2 over $\mathbb{C}$. However, already in dimension 3, there are an infinite number of pairwise non-isomorphic simple pre-Lie algebras over $\mathbb{C}$ [1]. All simple pre-Lie algebras obtained from I_4 by infinitesimal deformations were described in [1]. Simple real forms on I_n were given in [2]. In [3], it was shown that the quantum special linear algebra $SL_q(2)$

over $\mathbb{C}$ with real q may be quantised from the pre-Lie product on su_2^* which occurs to be isomorphic to I_3 (over $\mathbb{R}$).

We describe all main operators on I_n: automorphisms, derivations, and Rota—Baxter operators of an arbitrary weight λ.

Theorem 1. Let $n > 1$ and $\operatorname{char} F \neq 2$. Then $\operatorname{Aut}(I_n) \cong O_{n-1}(F)$ and $\operatorname{Der}(I_n) \cong \mathfrak{o}_{n-1}(F)$.

Theorem 2. Let $\operatorname{char} F \neq 2$.

a) Then for every Rota—Baxter operator R of weight λ on I_n, we have $R^2 + \lambda R = 0$ and $A^T A = 0$, where A is a matrix of R in the basis $e_1, \dots, e_n$.

b) If F is totally real field, then there are only trivial RB-operators on I_n.

c) If F is quadratically closed, then there are nontrivial RB-operators of nonzero weight on I_n for $n \geq 2$ and nontrivial RB-operators of weight 0 on I_n for $n \geq 3$.

The research is supported by Russian Science Foundation (project 21–11–00286).

References

[1] D. Burde. Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra. Manuscipta Math. **95** (1998), 397–411.
[2] X. Kong, C. Bai, D. Meng. On real simple left-symmetric algebras. Comm. Algebra **40** (2012), no. 5, 1641–1668.
[3] S. Majid, W. Tao. Noncommutative Differentials on Poisson-Lie groups and pre-Lie algebras. Pacific J. Math. **284** (2016), 213–256.
[4] A. Mizuhara. On simple left symmetric algebras over a solvable Lie algebra. Sci. Math. Jpn. **57** (2003), no. 2, 325–337.
[5] H. Shima. Homogenous Hessian manifold. Ann. Inst. Fourier **30** (1980), no. 3, 91–128.

Monomial Rota—Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ coming from averaging operators

A.F. Khodzitskii
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
a.khodzitskii@g.nsu.ru

The report is based on the work [2].

Given an algebra A over a field F, a linear operator R on A is called a Rota—Baxter operator, if the following relation

$$R(a)R(b) = R\big(R(a)b + aR(b) + \lambda ab\big)$$

holds for all $a, b \in A$. Here $\lambda \in F$ is a fixed scalar called a weight of R. Rota—Baxter operator is an algebraic generalization of the integral operator.

An operator L on $F[x, y]$ is called monomial if $L(x^k y^l) = \varepsilon_{kl} x^{a_{kl}} y^{b_{kl}}$, where $\varepsilon_{kl} \in F$ for all $k, l \in \mathbb{N}$. Monomial Rota—Baxter operators on $F[x]$ were introduced in [1], and such operators on $F[x]$ were classified in [3].

Let A be an algebra, then an operator T on A is called homomorphic averaging operator if $T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b)) = T(ab)$ holds for all $a, b \in A$. Then $R = -T$ is a Rota — Baxter operator of weight 1 on A.

Up to change x with y, a nonzero monomial homomorphic averaging operator T on $F[x, y]$ equals one of the following operators (except simple cases):

(1) $T(x^n y^m) = x^{rm} y^m$, $r \in \mathbb{N}$,

(2) $T(x^n y^m) = \alpha^n y^{m+rn}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in F^*$.

Problem. Describe all Rota—Baxter operators of weight 1 on $F[x, y]$ of the form

$$R(x^n y^m) = \alpha_{n,m} T(x^n y^m),$$

where $\alpha_{n,m} \in F$ and T is a monomial homomorphic averaging operator on $F[x, y]$.

We solve Problem completely for the case (1) and for (2), when $r = 0, 1$. We expect that the approach applied for the case (2), $r = 1$, works for $r > 1$ too.

Theorem. Let $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2} \in F$ be pairwise distinct such that $2\alpha_{1,1} \neq \alpha_{1,0} + \alpha_{1,2}$. Then a monomial operator of the form $R(x^n y^m) = \alpha_{n,m} y^{n+m}$, where $\alpha_{n,m}$ are expressed by the formulas

$$\alpha_{1,m} = \frac{\alpha_{1,0}\alpha_{1,m-1} - \alpha_{1,1}\alpha_{1,m-2}}{\alpha_{1,0} + \alpha_{1,m-1} - (\alpha_{1,1} + \alpha_{1,m-2})}, \quad \alpha_{k+1,m} = \alpha_{k,m}(\alpha_{1,0} - \alpha_{1,k+m}) - \alpha_{1,0}\alpha_{k,m+1},$$

is an RB-operator of weight 1 on $F[x, y]$.

References

[1] L. Guo, M. Rosenkranz, S.-H. Zheng. Rota–Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators. Pacific J. Math., **275** (2015), no. 2, 481–507.

[2] A. Khodzitskii. Monomial Rota–Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ coming from averaging operators, arXiv: `math.RA/2210.15953` (2022).

[3] H. Yu. Classification of monomial Rota–Baxter operators on $k[x]$. J. Algebra Appl. **15** (2016), 1650087.

Buchberger algorithm and compactness for bicommutative algebras

K.M. Tulenbaev
Institute Of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
tulen75@hotmail.com

Bicommutative algebras are defined by the identities $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$ and $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b$. A bicommutative algebra A is most close to commutative and associative case. Especially, A^2 is commutative and associative [1].

As usual, we define a prime ideal ρ of a bicommutative algebra A with the property that iff $\forall x, y \in A$ from $x \circ y \in \rho$ follows that $x \in \rho$ or $y \in \rho$. But we must be very careful with operating with such ideals because most theorems of commutative algebra is true because we have identity element 1 such that $a \circ 1 = 1 \circ a = a$. For bicommutative case, existence of such element give us associative and commutative case.

Another one unpleasant moment is that maximal ideal can not be prime.

Let us denote X to be $SpecA$. But we can prove that if Zariski topology is not empty, then X is compact space if bicommutative algebra A is finitely generated.

Theorem 1. Let A be a finitely generated bicommutative algebra then $X = SpecA$ is compact space.

I use basis of free bicommutative algebra, given in [2]. I prove analogue of Diamond Lemma, which was proved for associative case by G.M. Bergman in [3], for bicommutative case. Also I define correctly S-polynomials for bicommutative case and use analogue of Buchberger algorithm, created by B. Buchberger in [4] for the ring of polynomials.

The author is grateful to grant AP14869221 «Applications of combinatorial K-theory» MES RK.

References

[1] A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev. Bi-commutative algebras (in Russian). UMN **58** (2003), no. 6, 149–150. English transl.: Russian Math. Surveys **58** (2003), no. 6, 1196–1197.

[2] A.S. Dzhumadil'daev, N.A. Ismailov, K.M. Tulenbaev. Free Bicommutative algebras. Serdica Mathematical Journal **37** (2011), no. 1, 25–44.

[3] G.M. Bergman. The Diamond Lemma for ring theory. Advances in Mathematics **29** (1978), 178–218.

[4] B. Buchberger. Computer algebra symbolic and algebraic computation. Springer–Verlag, Wien, 1983.

Local derivation on the conformal Galilei algebra

B.B. Yusupov
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in paper in [1]. Sh.A. Ayupov and K.K. Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. In [2] local derivations and automorphism of complex finite-dimensional simple Leibniz algebras are investigated, and it is proved that all local derivations on a finite-dimensional complex simple Leibniz algebras are automatically derivations and it is shown that filiform Leibniz algebras admit local derivations which are not derivations. In this paper, we will study local derivations on the conformal Galilei algebra.

In this paper, we denoted by $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, and $\mathbb{C}$ the sets of all integers, positive integers, and complex numbers respectively. In this section we give some necessary notations, definitions and preliminary results.

A derivation on a Lie algebra g is a linear map $D\colon g \to g$ satisfying

$$D[x,y] = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

for all $x, y \in g$. Denote by $Der(g)$ the set of all derivations of g. For all $a \in g$, the map $ad(a)$ on g defined as $ad(a)(x) = [a, x]$, $x \in g$ is a derivation and derivations of this form are called inner derivation and denote by $ad(g)$.

A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$.

In recent years Galilei groups and their Lie algebras have been intensively studied. The interest is due to an appearance of this kind of symmetries in very different areas of physics and mathematics [3], [6]. The conformal extension of the Galilei algebra is parameterized by a positive half-integer number l and is called the l-conformal Galilei algebra. For $l \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}$, we denote the conformal Galilei algebra by $\mathfrak{g}$, which has a basis given by

$$\{e, h, f, p_k, z \mid k = 0, 1, 2, \ldots, 2l\}$$

and the Lie bracket given by

$$
\begin{gathered}
[h,e]=2e, \qquad [h,f]=-2f, \qquad [e,f]=h,\\
[h,p_k]=2(l-k)p_k, \qquad [e,p_k]=kp_{k-1}, \qquad [f,p_k]=(2l-k)p_{k+1},\\
[z,\mathfrak{g}]=0,\\
[p_k,p_{k'}]=\delta_{k+k',2l}(-1)^{k+l+\frac{1}{2}}k!(2l-k)!z, \quad \text{for } k,k'=0,1,2,\dots,2l.
\end{gathered}
$$

The conformal Galilei algebra can be viewed as a semidirect product $\mathfrak{g}=sl_2 \ltimes H_l$ of two subalgebras. $sl_2 = Span\{e,h,f\}$ and Heisenberg subalgebra $H_l = Span\{p_k, z \mid k=0,1,2,\dots,2l\}$. The irreducible representations of the conformal Galilei algebra are classified in [4], [5].

The following lemma can be used to determine the derivation of $\mathfrak{g}$.

Let δ be an outer derivation of $\mathfrak{g}$ determined by

$$
\delta(h)=\delta(e)=\delta(f)=0, \qquad \delta(z)=z, \qquad \delta(p_k)=\frac{1}{2}p_k, \ k=0,1,\dots,2l. \tag{1}
$$

Lemma. [7] $Der\mathfrak{g} = \mathbb{C}\delta \oplus \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$, where $\delta(p_i)=\frac{1}{2}p_i$, $\delta(z)=z$ for $i=0,1,\dots,2l$.

Now we give the main theorem concerning local derivations on the conformal Galilei algebra $\mathfrak{g}$.

Theorem. Every local derivation on $\mathfrak{g}$ is a derivation.

References

[1] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra **493** (2016), 381–388.

[2] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **43** (2020), 2199–2234.

[3] K. Andrzejewski, J. Gonera, P. Maslanka. Nonrelativistic conformal groups and their dynamical realizations, Phys. Rev. D **86** (2012), 065009.

[4] N. Aizawa, P.S. Isaac. On irreducible representations of the exotic conformal Galilei algebra, J. Phys. A **44** (2011), 035401.

[5] Y. Cai, Y. Cheng, R. Shen. Quasi-Whittaker modules for Schrodinger algebra, Linear Algebra Appl. **463** (2014), 16–32.

[6] A. Galajinsky, I. Masterov. Dynamical realization of l-conformal Galilei algebra and oscillators, Nuclear Phys. B **866** (2013), no. 2, 212–227.

[7] Yu. Zhao, Yo. Cheng. 2-local derivation on the conformal Galilei algebra, arXiv: `math.RA/2103.04237` (2021).

Содержание

Предисловие 2
Аннотации лекционных курсов 4
Авдеев Р.С. Чудесные многообразия в теории сферических многообразий 4
Гайфуллин С.А. Инвариант Макар-Лиманова и автоморфизмы аффинных алгебраических многообразий 5
Кузнецов А.Г. Автоморфизмы трёхмерных многообразий Фано . . . 6
Неретин Ю.А. Умножения двойных классов смежности и шлейфы бесконечномерных групп 6
Панов Т.Е. Слоения, возникающие из конфигураций векторов, двойственность Гейла и момент-угол многообразия 7
Петров В.А. Квадратичные формы и мотивы Чжоу 8
Тезисы докладов участников 10
Абдурасулов К.К. Количество классов сопряжённых элементов и проблема распознавания 10
Александров С.А. Многогранники Кокстера в пространствах Лобачевского 12
Аржанцев И.В. Лучезарные торические многообразия I 12
Артамонов Д.В. Модели конечномерных неприводимых представлений для классических алгебр Ли 13
Бельдиев И.С. Горенштейновы алгебры и единственность аддитивных действий 14
Венчаков М.С., Игнатьев М.В. Характеры неприводимых представлений унитреугольной группы 16
Воскресенская Г.В. Количество классов сопряжённых элементов и проблема распознавания 18
Вылегжанин Ф.Е. Гомологии петель момент-угол комплексов и квазиторических многообразий 20
Гизатуллин М.Х. Комбинаторика множеств исключительных кривых на поверхностях дель Пеццо, связанная с группами Вейля–Кокстера 22
Демисенов Б.Н. О порождающих декартовой подалгебры и идеалов свободного произведения алгебр Ли 23
Жгун В.С. B-нормализуемые $\mathbb{G}_a$-действия на произвольных сферических многообразиях 24
Зайцева Ю.И. Разрешимые моноиды коранга один 27

Захаров А.С. О некотором классе обобщённых дифференцирований . 28
Киктева В.В. Обобщение теоремы ABC 30
Кондратьева А.В., Кузнецов М.И. Неальтернирующие гамильтоновы формы с коэффициентами в алгебре разделённых степеней . 31
Ланина Е.Н. Пертурбативный подход к непертурбативным явлениям квантовых инвариантов узлов 34
Лубков Р.А. Инварианты поливекторных представлений $GL_n(R)$ . . 37
Мещеряков М.В. Чебышёвские пары сопряжённых конечномерных норм, инвариантных относительно групп Вейля простых компактных алгебр Ли 37
Миллионщиков Д.В. Гомологии и когомологии алгебры Ли фонарщика 39
Муратова Х.А.[1], *Саттаров А.М.*[2] Разрешимые супералгебры Лейбница с некоторыми филиформными нильрадикалами 40
Назиров М.А. Максимальные разрешимые алгебры Лейбница с квазифилиформным нильрадикалом 43
Осипов Д.В. Формальный коцикл Ботта 46
Панов А.Н. U-инварианты представлений редуктивных групп 47
Перепечко А.Ю. Лучезарные торические многообразия II 49
Петухов А.В. Описание коприсоединённых орбит максимальной и субмаксимальной размерности в нильпотентных алгебрах типов A, B, C, D 49
Попов В.А. Первичные йордановы супералгебры, удовлетворяющие стандартному тождеству 50
Преснова Е.Д. Многочлены Ласку и подразбиение многогранника Гельфанда–Цетлина 52
Рабиа М.М. Жёсткость алгебры Ли $\mathfrak{pgl}(4)$ в характеристике 2 53
Севостьянова В.В. Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов 55
Сергеев А.Н. О билинейной форме на кольце представлений $\mathfrak{gl}(m,n)$ 57
Смирнов Е.Ю. Многогранники и K-теория торических и флаговых многообразий 58
Смирнова А.С. L_p-аппроксимации решений параболических уравнений второго порядка на многообразиях ограниченной геометрии 59
Сонина А.К. Графы Горески–Коттвица–Макферсона и кольца Чжоу орисферических многообразий с числом Пикара равным одному 60
Староветов А.М., Гальт А.А. Строение нормализатора максимального тора в конечных группах лиева типа 61
Стасенко Р.О. Короткие SL_2-структуры и их представления 62

Стукопин В.А. Аффинный суперянгиан 63
*Сурков М.А.*Классификация коприсоединённых орбит унипотеного радикала борелевской подгруппы простой алгебраической группы типа F_4 64
Филимошина Е.Р. О некоторых группах и алгебрах Ли в алгебрах Клиффорда 66
Шафаревич А.А. Группа автоморфизмов торальных многообразий . 67
Шевченко А.А. Касательные конусы к аффинным многообразиям Шуберта 68
Щиголев В.В. Скрученные действия на когомологиях и бимодули . . 70
Gubarev V.Yu. Burde's series of simple pre-Lie algebras 71
Khodzitskii A.F. Monomial Rota—Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ coming from averaging operators 72
Tulenbaev K.M. Buchberger algorithm and compactness for bicommutative algebras 74
Yusupov B.B. Local derivation on the conformal Galilei algebra 75

Научное издание

Десятая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия
28 января – 2 февраля 2023 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The Tenth School-Conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia
January 28 – February 2, 2023

ABSTRACTS

Тексты статей печатаются в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Тираж 130 экз.

Отпечатано в типографии Риза-Принт
Адрес 101000, г. Москва, Милютинский пер. 18А, оф.№1