Системы Калоджеро - Мозера и супералгебры Ли

A. N,Sergeev[1,2]

[1]National Research University Higher School of Economics

[2]Saratov State University

- Гомоморфизм Хариш - Чандры
- Построение интегралов. Пара Лакса

6. Супер многочлены Джека
7. Теория представлений и деформированные системы КМС
   - Суперанлгебры Ли
   - Супералгебра $\mathfrak{gl}(1,1)$
   - Представления супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,m)$
   - Симметрические алгебры Ли
   - Симметрическая пара $(\mathfrak{gl}(\mathfrak{n},2\mathfrak{m}), Osp(n,2m))$
   - Супералгебра Ли $\mathfrak{gl}(1,2)$ и сферические функции

Definition

Алгеброй задачи КМС называется алгебра $\mathcal{D}_n^{rat}$ порожденная операторами умножения на функции $f_{ij}=\frac{1}{x_i-x_j}$, $1\leq i\neq j\leq n$ и операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,\dots,n$. Мы предполагаем, что умножения и дифференцирования действуют в алгебре рациональных функций $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)$.

Theorem

Алгебра $\mathcal{D}_n^{rat}$ может быть задана образующими и соотношениями

$$f_{ij} + f_{ji} = 0, \quad f_{ij} f_{il} + f_{ji} f_{jl} + f_{li} f_{lj} = 0, \quad i < j < l$$

$$\partial_l f_{ij} - f_{ij} \partial_l = (\delta_{li} - \delta_{lj}) f_{ij}^2$$

Definition

Рациональным оператором Калоджеро - Мозера - Сазерленда типа A_{n-1} называется дифференциальный оператор вида

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i<j} \frac{2k(k+1)}{(x_i - x_j)^2}$$

где k - комплексный параметр.

Этот оператор принадлежит алгебре $\mathcal{D}_n^{rat}$.

Definition

Обозначим через $C(L_2)$ централизатор в алгебре $\mathcal{D}_n^{rat}$ оператора L_2.

Example

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Этот оператор коммутирует с L_2 и следовательно принадлежит $C(L_2)$.

Мы хотим описать весь централизатор. Сделаем это сначала для случая $n = 2$.

Theorem

Пусть $n = 2$. Если k не является целым числом, то $C(L_2)$ порождается двумя элементами L_1 и L_2.

Definition

Гомоморфизмом Хариш - Чандры называется гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n], \ \varphi(f_{ij}) = 0, \varphi(\partial_i) = \xi_i, \ 1 \leq i, j \leq n$$

Следующая теорема является основной для описания централизатора в общем случае.

Theorem

1) *Для любого k ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор L_2 иньективено*
2) *Если $k \notin \mathbb{Z}$ то образ централизатора содержится в подалгебре многочленов инвариантых относительно симметрической группы.*

Example

$$\varphi(L_1) = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad \varphi(L_2) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

Докажем теперь сюрьективность гомоморфизма Хариш - Чандры в случае нецелого значения параметра k. Для этого необходимо построить достаточное количество интегралов.

Theorem

Пусть A некоторая алгебра и $a \in A$. Обозначим через E единичную матрицу размера $n \times n$, и L, M такие матрицы размера $n \times n$ с элементами из A , что

$$[L, aE] = [L, M], \tag{1}$$

Кроме того, пусть e^*, e такие матрицы с элементами из A размеров $1 \times n$ и $n \times 1$ соответственно (строка и столбец), что

$$e^* M = Me = 0, \;\; e^* a = ae^*, \; ea = ae \tag{2}$$

Тогда элементы

$$L_r = e^* L^r e$$

коммутируют с элементом a.

Докажем теорему.

Доказательство.

Равенство (1), может быть переписано в виде $[L, aE - M] = 0$. Следовательно $[L^r, aE - M] = 0$. Поэтому

$$e^*(aE - M)L^r e = e^* L^r (aE - M)e$$

Поэтому $e^* a L^r e = e^* L^r aEe$ и следовательно $ae^* L^r e = e^* L^r ea$. $\square$

Теперь мы можем доказать сюрьективность гомоморфизма Хариш - Чандры.

Theorem

Определим матрицу L размера $n \times n$ с помощью равенства

$$L = (L_{ij})\,, \quad L_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_{ij} = \frac{k}{x_i - x_j},\ i \neq j$$

Тогда

$$L_r = \sum_{ij} (L^r)_{ij} \tag{3}$$

являются дифференциальными операторами порядка r коммутирующими между собой. Образы операторов L_r относительно гомоморфизма Хариш - Чандры порождают алгебру симметрических полиномов. В частности при не целом k гмоморфизм Хариш - Чандры сюрьективен.

Example

$$\varphi(L_r) = \xi_1^r + \cdots + \xi_n^r$$

.

Существует еще один способ построения интегралов. Для его описания удобно перейти к радиальной форме оператора KMC, сделав сопряжение на функцию. Введем обозначение

$$\delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^k$$

.

Lemma

Справедливо равенство

$$\mathcal{L}_2 = \delta L_2 \delta^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i<j} \frac{2k}{x_i - x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

Замечание

Отображение $a \to \delta a \delta^{-1}$ *является автоморфизмом алгебры* $\mathcal{D}_n^{rat}$, *таким что*

$$\partial_i \longrightarrow \partial_i - k \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad f_{ij} \longrightarrow f_{ij}$$

Соответственно централизатор оператора $\delta L_2 \delta^{-1}$ *равен* $\delta C(L_2) \delta^{-1}$, *а соответствующий гомоморфизм Хариш-Чандры отображает централизатор в подалгебру алгебры полиномов* $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ *симметричных относительно группы* S_n.

Lemma

Оператор $\mathcal{L}_2$ *сохраняет пространство симметрических многочленов.*

Definition

Операторы

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + k \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}(\sigma_{ij} - 1), \ldots i, \neq j = 1, 2, \ldots, n$$

где σ_{ij} - транспозиции называются операторами Данкла.

Lemma

Операторы Данкла сохраняют пространство многочленов.

Theorem

Операторы Данкла обладают следующими свойствами

1. $\sigma D_i = D_{\sigma(i)} \sigma, \ \sigma \in S_n$
2. $D_i D_j = D_j D_i$

Example

При ограничении на пространство симметрических многочленов выполнено равенство

$$\mathcal{L}_2 = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$$

Определим по индукции следующие операторы

$$\partial_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1\ , \ldots , n$$

$$\partial_i^{(p)} = \partial_i^{(1)} \partial_i^{(p-1)} - \sum_{j \neq i} \frac{k}{x_i - x_j} \left(\partial_i^{(p-1)} - \partial_j^{(p-1)} \right)$$

Несложно проверить, что ограничение на симметрические функции D_i^p совпадает с $\partial_i^{(p)}$.

Corollary

Ограничение

$$D_1^p + \cdots + D_n^p$$

на симметрические многочлены совпадает с

$$\partial_1^{(p)} + \cdots + \partial_n^{(p)}$$

Theorem

Для любого симметрического многочлена f оператор $\mathcal{L}_f = f(D_1, \ldots, D_n)$ сохраняет пространство симметрических многочленов и коммутируе с $\mathcal{L}_2$. Отображение $f \to \mathcal{L}_f$ является изоморфизмом алгебры симметрических функций на алгебру дифференциальных операторов коммутирующих с $\mathcal{L}_2$ при не целом значении параметра k.

Приведем доказательство этой Теоремы.

Доказательство.

Достаточно проверить это утверждение на образующих, например степенных суммах. Мы видели, что ограничение $D_1^r + \cdots + D_n^r$ это $\partial_1^{(p)} + \cdots + \partial_n^{(p)}$ и как легко видеть из рекуррентных формул

$$\varphi(\partial_1^{(p)} + \cdots + \partial_n^{(p)}) = \xi_1^r + \cdots + \xi_n^r$$

$\square$

Definition

Алгеброй тригонометрической задачи КМС называется алгебра $\mathcal{D}_n^{tr}$ порожденная операторами умножения на функции $f_{ij} = \frac{x_i}{x_i - x_j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$ и операторами дифференцирования $\partial_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Мы предполагаем, что умножения и дифференцирования действуют в алгебре рациональных функций $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$.

Мы также можем задать эту алгебру образующими и соотношениями.

Theorem

Алгебра $\mathcal{D}_n^{tr}$ может быть задана образующими и соотношениями

$$f_{ij} + f_{ji} = 1, \ \ f_{ij} f_{il} + f_{ji} f_{jl} + f_{li} f_{lj} = 1, \ \ i < j < l$$

$$\partial_l f_{ij} - f_{ij} \partial_l = (\delta_{lj} - \delta_{li})(f_{ij}^2 - f_{ij})$$

Введем следующий оператор.

Definition

Тригонометрическим оператором КМС называется оператор следующего вида

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 - 2k(k+1) \sum_{i<j} \frac{x_i x_j}{(x_i - x_j)^2}$$

Этот оператор принадлежит алгебре $\mathcal{D}_n^{tr}$. Обозначим через $C(L_2)$ централизатор в алгебре $\mathcal{D}_n^{tr}$ оператора L_2.

Example

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Этот оператор коммутирует с L_2 и следовательно принадлежит $C(L_2)$.

Мы хотим описать весь централизатор. Сделаем это сначала для случая $n = 2$.

Theorem

Пусть $n = 2$. Если k не является целым числом, то $C(L_2)$ порождается двумя элементами L_1 и L_2.

Как и в рациональном случае нам нужен гомоморфизм Хариш - Чандры.

Definition

Гомоморфизмом Хариш - Чандры называется гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{D}_n^{tr} \longrightarrow \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n], \ \varphi(f_{ij}) = 1, \ i < j, \ \varphi(\partial_i) = \xi_i, \ 1 \le i, j \le n$$

Theorem

1) *Для любого k ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор L_2 иньективено*

2) *Если $k \notin \mathbb{Z}$ то образ централизатора содержится в подалгебре многочленов инвариантых относительно симметрической группы.*

Example

$$\varphi(L_1) = \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$
$$\varphi(L_2) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

Theorem

Определим матрицу L размера $n \times n$ с помощью равенства

$$L = (L_{ij}), \quad L_{ii} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_{ij} = \frac{k x_i}{x_i - x_j}, \; i \neq j$$

Тогда

$$\tilde{L}_r = \sum_{ij} (L^r)_{ij} \tag{4}$$

являются дифференциальными операторами порядка r и коммутируют между собой. Их образы при гомоморфизме Хариш -Чандры порождают алгебру симметрических полиномов.

Corollary

Для нецелого значения параметра k централизатор порожден элементами $\tilde{L}_r$, $r = 1, 2, \dots$, а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом с алгеброй симметрических полиномов.

Доказательство следует из того факта, что старшая компонента образа при гомомомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_r равена

$$\xi_1^r + \dots + \xi_i^r$$

Положим

$$\delta = \prod_{i<j} \frac{(x_i - x_j)^k}{(x_i x_j)^{\frac{k}{2}}},$$

.

Lemma

Справедливо равенство

$$\delta L_2 \delta^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 - k \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}(\partial_i - \partial_j) + \frac{k^2(n+1)n(n-1)}{3}$$

Обозначим полученный оператор через (без константы) $\mathcal{L}_2$.

Замечание

Отображение $a \to \delta a \delta^{-1}$ *является автоморфизмом алгебры* $\mathcal{D}_n$, *таким что*

$$\partial_i \longrightarrow \partial_i - \frac{k}{2} \sum_{j \neq i} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}, \quad f_{ij} \longrightarrow f_{ij}$$

Соответственно централизатор оператора $\delta L_2 \delta^{-1}$ *равен* $\delta C(L_2) \delta^{-1}$, *а соответствующий гомоморфизм Хариш-Чандры отображает централизатор в подалгебру алгебры полиномов* $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ *симметричных относительно* $\xi_i - \rho_i$, *где* $\rho_i = \frac{k}{2}(n - 2i + 1)$, *или равносильное требование инвариантность относительно аффинного преобразования* $\sigma \circ \xi_i = \xi_{\sigma(i)} - \rho_{\sigma(i)} + \rho_i$.

Definition

Операторы

$$\mathcal{D}_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - k \sum_{j \neq i} \frac{x_{\max\{i,j\}}}{x_i - x_j}(1 - \sigma_{ij})$$

$\dots i = 1, 2, \dots, n$. называются операторами Чередника-Данкла.

Следующая лемма является ключевым свойством операторов Данкла.

Lemma

Операторы Чередника-Данкла коммутируют.

Нужно сдвинуть операторы Данкла, чтобы получить удобные коммутационные соотношения с симметрической группой.

Lemma

Справедливо равенство

$$(\mathcal{D}_{i+1} - \rho_{i+1})\sigma_i - \sigma_i(\mathcal{D}_i - \rho_i) = k, \ \sigma_i = \sigma_{ii+1}$$

Из предыдущей Лемму легко вывести следующее свойство операторов Данкла.

Lemma

Если $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *многочлен инвариантный относительно аффинного действия симметрической группы, то для любой перестановки* σ

$$\sigma f(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) = f(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)\sigma$$

Corollary

Для любого многочлена $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ инвариантного относительно аффинного действия симметрической группы, оператор $f(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ сохраняет пространство симметрических многочленов, а его ограничение является дифференциальным оператором.

Example

При ограничении на пространство симметрических многочленов выполнено равенство

$$\mathcal{L}_2 = (\mathcal{D}_1 - \rho_1)^2 + (\mathcal{D}_2 - \rho_2)^2 + \cdots + (\mathcal{D}_n - \rho_n)^2$$

Теперь мжно построить отображение обратное гомомрфизму Хариш - Чандры.

Theorem

Для любого многочлена f *инвариантного относительно аффинного действия симметрической группы, оператор* $\mathcal{L}_f = f(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ *сохраняет пространство симметрических многочленов и коммутирует с* $\mathcal{L}_2$*. Отображение* $f \to \mathcal{L}_f$ *является изоморфизмом алгебры сдвинутых симметрических функций на алгебру дифференциальных операторов коммутирующих с* $\mathcal{L}_2$ *при не целом значении параметра* k*. Этот гомоморфизм обратен гомоморфизму Хариш-Чандры.*

Дадим доказательство этой Теоремы.

Доказательство.

Достаточно показать, что

$$\varphi(Res[(D_1-\rho_1)^r+\cdots+(D_n-\rho_n)^r)])=(\xi_1-\rho_1)^r+\cdots+(\xi_n-\rho_n)^r$$

Индукцией по r докажем, что $\varphi(ResD_i^r)=\xi_i^r$. Это очевидно верно при $r=1$. Далее

$$ResD_i^r=D_iResD^{r-1}=(\partial_i-k\sum_{i\neq j}\frac{x_{\max\{i,j\}}}{x_i-x_j}(1-\sigma_{ij}))ResD^{r-1}=$$

$$\partial_iResD^{r-1}-k\sum_{i\neq j}\frac{x_{\max\{i,j\}}}{x_i-x_j}(ResD^{r-1}-\sigma_{ij}ResD^{r-1}\sigma_{ij}))$$

□

Но $\varphi(\frac{x_{\max\{i,j\}}}{x_i-x_j})=0$ и утверждение следует.

Мы рассматриваем тригонометрический случай. В этом случае наши операторы имеют полиномиальные собственные функции, которые называются полиномами Джека. Алгебра интегралов, это централизатор $C(\mathcal{L}_2)$. Вместо всей алгебры интегралов мы будем рассматривать подалгебру $\hat{\mathcal{D}}_n$ порожденную интегралами $\mathcal{L}_r,\ r = 1, 2, \ldots$. Эта алгебра естественным образом действует на алгебре симметрических полиномов $\Lambda_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ а также на алгебре симметрических полиномов Лорана $\Lambda_n^{\pm} = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]^{S_n}$. В обоих случаях можно рассмотреть обе эти алгебры как модули над алгеброй $\hat{\mathcal{D}}_n$.

Theorem

Если k не являетсся положительным рациональным числом или нулем, тогда для любого разбиения λ, $l(\lambda) \leq n$ существует единственны многочлен $P_\lambda \in \Lambda_n$ (называемый полиномом Джека) такой, что
1) $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda,\mu} m_\mu$, *где* $u_{\lambda,\mu} \in \mathbb{C}$
2) P_λ *- собственная функция алгебры* $\hat{\mathcal{D}}_n$ *и множество всех* $P_\lambda, l(\lambda) \leq n$ *является базисом алгебры* Λ_n.

Следующая Теорема доказывает существование полиномов Джека в Лорановском случае.

Theorem

Если k не являетсся положительным рациональным числом или нулем, тогда для любой не возрастающей последовательности целых чисел $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ существует единственны многочлен $P_\chi \in \Lambda_n^{\pm}$ (называемый полиномом Джека-Лорана) такой, что
1) $P_\chi = m_\chi + \sum_{\tau < \chi} u_{\chi,\tau} m_\tau$, *где* $u_{\chi,\tau} \in \mathbb{C}$
2) P_χ *- собственная функция алгебры* $\hat{\mathcal{D}}_n$ *и множество всех* P_χ *является базисом алгебры* $\Lambda_n^{\pm}$.

Замечание

Любую невозрастающую последовательность целых чисел $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ *можно представить в виде (не единственным образом)* $\chi = (a, a, \dots, a) + \lambda$, *тогда*

$$P_\chi = (x_1 \dots x_n)^a P_\lambda$$

Example

Пусть $n = 2$. В этом случае можно написать явную формулы для полиномов Джека.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ - общая линейная алгебра Ли и $\mathfrak{f}$ ее подалгебра Картана состоящая из диагональных матриц. Пусть $\mathcal{F}$ - категория конечномерных представлений на которых $\mathfrak{f}$ действует диагональным образом и все собственные значения e_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ целые неотрицательные. Аналогично определяется категория $\mathcal{F}^{\pm}$, с призвольными целочисленными собственными значениями.

Definition

Алгеброй Гротендика над полем $\mathbb{C}$ категории $\mathcal{F}$ (категории $\mathcal{F}^+$) называется алгебра $K(\mathcal{F})$ ($K(\mathcal{F}^+)$ соответственно), порожденная классами изоморфизма конечномерных модулей, подчиненных соотношениям

$$[V] = [V_1] + [V_2], \text{ если } 0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

$$[V_1 \otimes V_2] = [V_1][V_2]$$

Напомним определение характера.

Definition

Пусть V- конечномерный модуль из категории $\mathcal{F}$ или $\mathcal{F}^+$. Рассмотрим его как $\mathfrak{f}$ модуль и разложим в прямую сумму изотипических модулей

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{f}^*} V(\chi)$$

Тогда полином

$$ch(V) = \sum_{\chi} \dim V(\chi) x^{\chi}$$

называется характером представления V.

Пусть $U(\mathfrak{gl}(n))$ - обертывающая алгебра и $Z(\mathfrak{gl}(n))$ - ее центр. Каждый элемент центра действует как скаляр в неприводимом модуле. Тем самым мы имеем естественное действие алгебры $Z(\mathfrak{gl}(n))$ на $K(\mathcal{F}^+)$ и $K(\mathcal{F})$.

Theorem

Отображение взятия характера

$$ch : K(\mathcal{F}) \longrightarrow \Lambda_n^{\pm}$$

является изоморфизмом алгебр и переводит действие $Z(\mathfrak{gl}(n))$ в действие $\mathcal{D}_n^{tr}$ при $k = -1$. При этом неприводимые модули переходят в полиномы Джека-Лорана при $k = -1$.

Симметрическая алгебра Ли это пара $(\mathfrak{g}, \theta)$, где $\mathfrak{g}$ является комплексной полупростой алгеброй Ли, и θ является инволютивным автоморфизмом $\mathfrak{g}$. Мы имеем разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ являются $+1$ и -1 собственными подпространствами θ :

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \ [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Можно также говорить о *симметрической паре* $X = (\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Коммутативная подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ называется *попространством Картана* если она редуктивна в $\mathfrak{g}$ и централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{p}$ совпадает с $\mathfrak{a}$.
Мы имеем разложение $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$ на ненулевые собственные подпространства.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathfrak{a}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(X)} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathfrak{a}}.$$

Соответствующее множество $R(X) \subset \mathfrak{a}^*$ называется *ограниченной системой корней* симметрической пары X и $\mu_\alpha = dim\, \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathfrak{a}}$ называются *кратностями*. Под *зональной функцией* для симметрической пары $X = (\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ мы подразумеваем линейный функционал $f \in U(\mathfrak{g})^*$, который двусторонне $\mathfrak{k}$-инвариантен:

$$f(xu) = f(ux) = 0,\ x \in \mathfrak{k},\ u \in U(\mathfrak{g}).$$

Пространство таких функционалов мы обозначим через $\mathcal{Z}(X) \subset U(\mathfrak{g})^*$.
Пусть $S \subset S(\mathfrak{a})^*$ будет мультипликативным подмножеством порожденным функциями $e^{2\alpha} - 1,\, \alpha \in R(X)$ и $S(\mathfrak{a})^*_{loc} = S^{-1}S(\mathfrak{a})^*$

будест соответствующей локализацией. Пусть $i^* : \mathcal{Z}(X) \to S(\mathfrak{a})^*_{loc}$ будет гомоморфизмом ограничения индуцированным вложением $i : \mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$.

Theorem

Гомоморфизм ограничения i^* иньективен и существует единственный гомоморфизм $\psi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}^{tr}_n$ (где $n = \dim \mathfrak{a}$ и $k_\alpha = \frac{1}{2}\mu_\alpha$) такой, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X) & \xrightarrow{L_z} & \mathcal{Z}(X) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ S(\mathfrak{a})^*_{loc} & \xrightarrow{\psi(z)} & S(\mathfrak{a})^*_{loc}. \end{array} \qquad (5)$$

где L_z является оператором умножения на $z \in Z(\mathfrak{g})$.

гооморфизм ψ называется гомоморфизмом радиальной части.

Рассмотрим случай симметрической пары $(\mathfrak{gl}(n), O(n))$. Пусть U будет конечномерным $\mathfrak{g}$ - модулем и $U^{\mathfrak{k}}$ будет пространством $\mathfrak{k}$-инвариантных векторов $u \in U$, то есть таких что $xu = 0$ для всех $x \in \mathfrak{k}$ и дополнительно $gu = u$ для всех $g \in O(n)$. Рассмотрим также аналогичное пространство $U^{*\mathfrak{k}}$ для двойственного модуля U^*.
Для $u \in U^{\mathfrak{k}}$ и $l \in U^{*\mathfrak{k}}$ мы можем рассмотреть линейный функционал $\phi_{u,l}(x) \in \mathcal{Z}(X) \subset U(\mathfrak{g})^*$ определенный по правилу

$$\phi_{u,l}(x) := l(xu), \quad x \in U(\mathfrak{g}). \tag{6}$$

Обозначим линейную оболочку всех таких функционалов через $C(U, \mathfrak{k})$. Пространство $C(U, \mathfrak{k})$ имеет естественную структуру модуля над алгеброй $Z(\mathfrak{g})$.
Конечномерный модуль $\mathfrak{g}$ - модуль U называется *сферическим* если пространство $U^{\mathfrak{k}}$ не равно нулю. Существует также естественное вложение алгебры $\Lambda_n^{\pm}$ с параметром $k = -1/2$ в алгебру $S(\mathfrak{a})^*$ и мы будем отождествлять алгебру $\Lambda_n^{\pm}$ с ее образом.
Теорема

Theorem

1) *Для любого* $z \in Z(\mathfrak{g})$ *оператор* $\psi(z)$ *сохраняет подпространство* $\Lambda_n^{\pm}$ *и принадлежит алгебре* $\mathcal{D}_n$ *с параметром* $k = -1/2$.
2) *Если* U *- конечномерный неприводимый сферический модуль, то пространство* $C(U, \mathfrak{k})$ *одномерно, а его образ* $i^*(C(U, \mathfrak{k})) \subset \Lambda_n^{\pm}$ *является линейной оболочкой полинома Джека с параметром* $k = -1/2$.
3)

$$\Lambda_n^{\pm} = \bigoplus_U i^*(C(U, \mathfrak{k}))$$

Рассмотрим случай пары $(\mathfrak{gl}(2m), \mathfrak{sp}(2m))$. В симплектическом случае существует также естественное вложение алгебры $\Lambda_m^{\pm}$, параметром $k = -2$ в алгебру $S(\mathfrak{a})^*$ и мы будем отождествлять алгебру $\Lambda_m^{\pm}$ с ее образом.

Theorem

1) *Для любого* $z \in Z(\mathfrak{g})$ *оператор* $\psi(z)$ *сохраняет подпространство* $\Lambda_m^{\pm}$ *и принадлежит алгебре* $\mathcal{D}_m$ *с параметром* $k = -2$.
2) *Если* U *- конечномерный неприводимый сферический модуль, то пространство* $C(U, \mathfrak{k})$ *одномерно, а его образ* $i^*(C(U, \mathfrak{k})) \subset \Lambda_n^{\pm}$ *является линейной оболочкой полинома Джека с параметром* $k = -2$.
3)

$$\Lambda_n^{\pm} = \bigoplus_U i^*(C(U, \mathfrak{k}))$$

Рассмотрим алгебру рациональной задачи КМС $\mathcal{D}_{n+m}^{rat}$ порожденную операторами умножения на функции $f_{ij} = \frac{1}{x_i - x_j}$, $1 \leq i \neq j \leq n + m$ и операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n + m$. Мы предполагаем, что умножения и дифференцирования действуют в алгебре рациональных функций $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_{n+m})$. Напомним, что алгебра $\mathcal{D}_{n+m}$ может быть задана образующими и соотношениями

$$f_{ij} + f_{ji} = 0, \;\; f_{ij}f_{il} + f_{ji}f_{jl} + f_{li}f_{lj} = 0, \;\; i < j < l$$

$$\partial_l f_{ij} - f_{ij}\partial_l = (\delta_{li} - \delta_{lj})f_{ij}^2$$

В этой алгебре мы рассмотрим следующий оператор:

Definition

Рациональным оператором Калоджеро - Мозера - Сазерленда типа $A_{n-1.m-1}$ (или деформированным рациональным оператором) называется дифференциальный оператор вида

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+j}^2} - \sum_{i<j} \frac{2k(k+1)}{(x_i - x_j)^2} -$$

$$\sum_{i<j} \frac{2(k^{-1}+1)}{(x_{n+i} - x_{n+j})^2} - \sum_{i<j} \frac{2(k+1)}{(x_i - x_{n+j})^2}$$

где k - комплексный параметр.

Этот оператор принадлежит алгебре $\mathcal{D}^{rat}_{n+m}$. Обозначим через $C(L_2)$ централизатор в алгебре $\mathcal{D}^{rat}_{n+m}$ оператора L_2.

Example

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Этот оператор коммутирует с L_2 и следовательно принадлежит $C(L_2)$.

Мы хотим описать весь централизатор. Сделаем это сначала для случая $n = m = 1$.

Theorem

Пусть $n = m = 1$. Если k и k^{-1} не являются целыми, то $C(L_2)$ порождается элементами L_1, L_2, L_3.

В деформированном случае вместо симметрической группы мы рассмотрим группу отражений относительно некоторого множества векторов с билинейной формой зависящей от параметра k.
Пусть $I = \{1, \ldots, n+m\}$ будет множеством индексов с функцией

четности $p(i) = 0$ if $1 \leq i \leq n$ и $p(i) = 1$ если $n < i \leq n + m$, где $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$. Пусть также V будет векторным пространством размерности $n + m$ с базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+m}$ и билинейной симметрической формой $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij} k^{p(i)}$.

Пусть R, R^+ будет множеством *корней* и *положительных корней*

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in I;\ i \neq j\}, \quad R^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j \in I;\ i < j\}$$

Множество R может быть естественно представлено в виде $R = R_0 \cup R_1$ четных и нечетных корней, где четность корня $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ это $p(i) + p(j)$.

Definition

Пусь G будет группой порожденной отражениями $s_\alpha, \alpha \in R$ где

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

Заметим, что для четного корня $(\alpha, \alpha) = 2$, а для нечетного

$(\alpha, \alpha) = 1 + k$. Поэтому для $k = -1$ отражение относительно нечетных корней не определено.
Группа G естественным образом действует на симметрической алгебре $S(V)$ пространства V. Вместо алгебры инвариантов мы рассмотрим в этом случае алгебру квазиинвариантов.

Definition

Элемент $f \in S(V)$ называется квази-инвариантом относительно группы G, если :

$$s_\alpha f = f,\, \alpha \in R_0, \quad s_\alpha f - f \in (\alpha^2),\, \alpha \in R_1$$

Предыдущее определение может быть переписано и инфинитезимальной форме. Пусть ∂_α будет дифференцированием алгебры $S(V)$ таким, что $\partial_\alpha(v) = (\alpha, v)$, $v \in V$. Тогда несложно проверить, что квазиинвариантность равносильна условиям

$$s_\alpha f = f,\, \alpha \in R_0, \quad \partial_\alpha f \in (\alpha),\, \alpha \in R_1$$

Пример квазиинвариантов.

Example

Легко проверить, что

$$p_r = \varepsilon_1^r + \cdots + \varepsilon_n^r + \frac{1}{k}(\varepsilon_{n+1}^r + \cdots + \varepsilon_{n+m}^r),\ r = 1, 2, \ldots$$

являются квазиинвариантами.

Примеры квазиинвариантов в дуальном пространстве.

Example

Группа G естественным образом действует на V^* и на алгебре полиномиальных функций на V совпадающей с $S(V^*)$. Полином f называется квазиинвариантом, если $f(s_\alpha v) = f(v)$, $\alpha \in R_0$ и $f(s_\alpha v) - f(v) \in (\alpha, v)^2$, $\alpha \in R_1$. Несложно проверить, что

$$q_r = (\varepsilon_1^*)^r + \cdots + (\varepsilon_n^*)^r + k^{r-1}[(\varepsilon_{n+1}^*)^r + \cdots + (\varepsilon_{n+m}^*)^r],\ r = 1, 2, \ldots$$

являются квазиинвариантами.

Перейдем к описанию централизатора.

Definition

Гомоморфизмом Хариш - Чандры называется гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{D}_{n+m}^{rat} \longrightarrow S(V^*),\ \varphi(f_{ij}) = 0,\ \varphi(\partial_i) = \varepsilon_i^*,\ 1 \leq i, j \leq n+m$$

Легко проверить, что

$$\varphi(L_2) = q_2$$

В общем случае мы имеем следующую Теорему.

Theorem

1) *Для любого $k \neq 0$ ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор L_2 иньективено*
2) *Если $k, \frac{1}{k} \notin \mathbb{Z}$ то образ централизатора содержится в подалгебре многочленов квазиинвариантных относительно группы G.*

Чтобы доказать сюрьективность гомоморфизма Хариш - Чандры необходимо построить достаточное количество интегралов.

Theorem

Определим матрицу L размера $(m+n)\times(m+n)$ с помощью равенств

$$L=(L_{ij})\,,\quad L_{ii}=k^{p(i)}\frac{\partial}{\partial x_i},\quad L_{ij}=\frac{k^{1-p(j)}}{x_i-x_j},\ i\neq j.$$

Тогда

$$L_r=\sum_{ij}(L^r)_{ij}k^{-p(i)} \tag{7}$$

являются дифференциальными операторами порядка r и коммутируют между собой.

Приведем доказательство. Напишем уравнение Лакса в этом случае. Для этого положим $A=\mathcal{D}^{rat}_{n+m}$, $a=L_2$, в качестве M возьмем матрицу

$$M_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^2}, \ i \neq j, \quad M_{ii} = -\sum_{j \neq i} \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^2}.$$

Положим также $e^* = (1 \ldots, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})$ (или $e_i^* = k^{-p(i)}$, $i = 1, \ldots, m + n$), $e = (1, \ldots, 1)$ (или $e_i = 1$, $i = 1, \ldots, n + m$).
Проверим, что элемент a, и матрицы L, $M\, e^*$, e удовлетворяют условиям леммы предыдущего пункта. Условия $e^* M = Me = 0$ очевидны. Представим матрицу L в виде $L = \partial + A$, где ∂ диагональная матрица с элементами $\partial_i = k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n + m$, и запишем элемент L_2 в виде $L_2 = \Delta - f$, где f – это потенциал.
Далее, имеем

$$[L, aE - M] = -[\partial, fE] + [A, \Delta E] - [\partial, M] - [A, M].$$

Нужно показать, что выражения справа равно нулю. Вычислим элементы лежащие вне главной диагонали. Пусть

$i, j \in \{1, \ldots, n+m\}$, $i \neq j$. Тогда несложно проверить, что

$$[\partial, fE]_{ij} = 0, \; ([A, \Delta E] - [\partial, M])_{ij} = \frac{2k^{1-p(j}}{(x_i - x_j)^3}(k^{p(i)} - k^{p(j)}),$$

$$[A, M]_{ij} = \frac{2k^{1-p(j}}{(x_i - x_j)^3}(k^{1-p(j)} - k^{1-p(i)}),$$

и, следовательно, $[L, aE - M]_{ij} = 0$. Аналогично проверяется, что $[L, aE - M]_{ii} = 0, i = 1, \ldots, n+m$. Следовательно, элементы $L_r, r = 1, 2, \ldots$ коммутируют с H_2. Из теоремы о гомоморфизме Хариш-Чандры следует, что они коммутируют между собой.

Corollary

Если $k \notin \mathbb{Q}$,то централизатор порожден элементами L_r, $r = 1, 2, \ldots$, а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом.

Образ при гомомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_r равен

$$\sum_{i=1}(\varepsilon_i^*)^r + k^{r-1}\sum_{j=1}^{m}(\varepsilon_{n+j}^*)^r.$$

Если $k \notin \mathbb{Q}$ то они порождают алгебру квазиинвариантов.

Рассмотрим алгебру тригонометрической задачи КМС $\mathcal{D}^{tr}_{n+m}$ порожденную операторами умножения на функции $f_{ij} = \frac{x_i}{x_i - x_j}$, $1 \le i \ne j \le n+m$ и операторами дифференцирования $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n+m$. Мы предполагаем, что умножения и дифференцирования действуют в алгебре рациональных функций $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n+m})$.

Напомним, что алгебра $\mathcal{D}^{tr}_{n+m}$ может быть задана образующими и соотношениями

$$f_{ij} + f_{ji} = 1, \;\; f_{ij}f_{il} + f_{ji}f_{jl} + f_{li}f_{lj} = 1, \;\; i < j < l$$

$$\partial_l f_{ij} - f_{ij}\partial_l = (\delta_{li} - \delta_{lj})(f_{ij}^2 - f_{ij})$$

Определим тригонометрический деформированный оператор КМС.

Definition

Тригонометрическим оператором Калоджеро - Мозера - Сазерленда типа $A_{n-1.m-1}$ (или деформированным тригонометрическим оператором) называется дифференциальный оператор вида

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + k \sum_{j=1}^{m} \left(x_{n+j} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} \right)^2 - \sum_{i<j} \frac{2k(k+1)x_i x_j}{(x_i - x_j)^2} -$$

$$\sum_{i<j} \frac{2(k^{-1}+1)x_{n+i}x_{n+j}}{(x_{n+i} - x_{n+j})^2} - \sum_{i<j} \frac{2(k+1)x_i x_{n+j}}{(x_i - x_{n+j})^2}$$

где k - комплексный параметр.

Этот оператор принадлежит алгебре $\mathcal{D}^{tr}_{n+m}$. Как и прежде $C(L_2)$ централизатор в алгебре $\mathcal{D}^{tr}_{n+m}$ оператора L_2.

Example

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n+m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Этот оператор коммутирует с L_2 и следовательно принадлежит $C(\mathcal{L}_2)$.

Мы хотим описать весь централизатор. Сделаем это сначала для случая $n = m = 1$.

Theorem

Пусть $n = m = 1$. Если k и k^{-1} не являются целыми, то $C(L_2)$ порождается элементами L_1, L_2, L_3.

Группа G естественным образом действует на алгебре формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[V]]$ пространства V. Обозначим через $\hat{S}(V)$ будет подалгебру порожденную элементами $e^{\pm\varepsilon_1}, \dots, e^{\pm\varepsilon_{n+m}}$. Вместо алгебры инвариантов мы рассмотрим в этом случае алгебру квазиинвариантов. Заметим, что группа G для общего значения k не сохраняет алгебру $\hat{S}(V)$.

Definition

Элемент $f \in C[[V]]$ называется квази-инвариантом относительно группы G, если :

$$s_\alpha f = f,\ \alpha \in R_0, \quad s_\alpha f - f \in (\alpha^2),\ \alpha \in R_1$$

Предыдущее определение может быть для алгебры $\hat{S}(V)$ переписано и инфинитезимальной форме. Пусть ∂_α будет дифференцированием алгебры $S(V)$ таким, что $\partial_\alpha(v) = (\alpha, v)$, $v \in V$. Тогда несложно проверить, что квазиинвариантность равносильна условиям

$$s_\alpha f = f,\ \alpha \in R_0, \quad \partial_\alpha f \in (e^\alpha - 1),\ \alpha \in R_1$$

Легко проверить, что

$$p_r = e^{r\varepsilon_1} + \cdots + e^{r\varepsilon_n} + \frac{1}{k}(e^{r\varepsilon_{n+1}} + \cdots + e^{r\varepsilon_{n+m}}),\ r = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

являются квазиинвариантами.
Группа G естественным образом действует на V^* и на алгебре полиномиальных функций на V совпадающей с $S(V^*)$. Определим аффинные функции на пространстве V

$$l^+_\alpha(v) = (v, \alpha) - \frac{1}{2}(\alpha, \alpha), \quad l^-_\alpha(v) = (v, \alpha) + \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$$

Определим понятие квазиинвариантности в этом случае.

Definition

Полином f называется квазиинвариантом, если

$$f(s_\alpha v) = f(v),\ \alpha \in R_0,\ \text{и}\ f(s_\alpha v) - f(v) \in (l^+_\alpha l^-_\alpha),\ \alpha \in R_1.$$

Несложно проверить, что

$$\sum_{i=1}^{n+m} k^{p(i)} \left[(\varepsilon_i^* + 1/2 + k^{-p(i)})^r - (\varepsilon_i^* + 1/2)^r \right]$$

являются квазиинвариантами.
Перейдем к описанию описания централизатора.

Definition

Гомоморфизмом Хариш - Чандры называется гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{D}^{tr}_{n+m} \longrightarrow S(V^*),\ \varphi(f_{ij}) = 1,\ \varphi(\partial_i) = \varepsilon_i^*,\ 1 \leq i, j \leq n+m$$

Example

$$\varphi(L_2) = (v, v)$$

Теорема о гомоморфизме Хариш -Чандры.

Theorem

1) *Для любого* $k \neq 0$ *ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор* L_2 *иньективено*
2) *Если* $k, \frac{1}{k} \notin \mathbb{Z}$ *то образ централизатора содержится в подалгебре многочленов квазиинвариантных относительно группы* G.

В этом параграфе мы докажем сюрьективность гомоморфизма Хариш - Чандры в случае $k \notin \mathbb{Q}$. Для этого необходимо построить достаточное количество интегралов.

Theorem

Оператор L_2 интегрируем. Более точно определим матрицу L размера $(m+n)\times(m+n)$ с помощью равенства

$$L=(L_{ij})\,,\quad L_{ii}=k^{p(i)}x_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad L_{ij}=\frac{k^{1-p(j)}x_i}{x_i-x_j},\ i\neq j.$$

Тогда

$$L_r=\sum_{ij}(L^r)_{ij}k^{-p(i)} \tag{8}$$

являются дифференциальными операторами порядка r и коммутируют между собой.

Corollary

Если $k \notin \mathbb{Q}$,то централизатор порожден элементами L_r, $r = 1, 2, \ldots,$ а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом.

Старшая компомента образ при гомомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_r равена

$$\sum_{i=1} (\varepsilon_i^*)^r + k^{r-1} \sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{n+j}^*)^r .$$

Если $k \notin \mathbb{Q}$ то они порождают алгебру квазиинвариантов.

Положим

$$\delta = \prod_{i<j} \left(\frac{x_i - x_j}{(x_i x_j)^2} \right)^{\frac{1}{2}(1-p(i)-p(j))} ,$$

. И определим операторы $\mathcal{L}_r$ равенствами

$$\mathcal{L}_r = \delta L_r \delta^{-1},\ r = 1, 2, \dots$$

Следующая Лемма может быть доказана с использованием матрицы Мозера и понятия квазигомоморфизма.

Lemma

Операторы $\mathcal{L}_s$ для всех $s = 1, 2, \dots$ отображают алгебру в себя $\Lambda^{\pm}_{n,m}$.

Поэтому мы можем рассматривать алгебру $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ как модуль над алгеброй $\mathcal{D}^{tr}_{n,m}$. Пусть $\theta : \mathcal{D}_{n,m} \to \mathbb{C}$ будет произвольным гомоморфизмом. Определим соответствующее *обобщенное подпространство* $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\theta)$ как множество $f \in \Lambda^{\pm}_{n,m}$ таких, что для каждого $D \in \mathcal{D}^{tr}_{n,m}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $(D - \chi(D))^N(f) = 0$. Справедливо следующее предложение.

Предложение

Алгебра $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ *как модуль над алгеброй* $\mathcal{D}^{tr}_{n,m}$ *может быть разложена в прямую сумму обобщенных собственных подпространств*

$$\Lambda^{\pm}_{n,m} = \oplus_{\theta} \Lambda^{\pm}_{n,m}(\theta), \tag{9}$$

где сумма берется по некоторому множеству гомоморфизмов θ *(явно описываемому ниже).*

Для того, чтобы описать эти гомоморфизмы введем поятие целого доминантного веса. Целый вес $\chi \in X_{n,m} = \mathbb{Z}^{n+m}$ является *доминантным* если

$$\chi_1 \geq \chi_2 \geq \cdots \geq \chi_n, \ \chi_{n+1} \geq \chi_{n+2} \geq \cdots \geq \chi_{n+m}.$$

Множество доминантных весов обозначается $X^+_{n,m}$. Для каждого $\chi \in X^+_{n,m}$ определим гомоморфизм $\theta_\chi : \mathcal{D}^{tr}_{n,m} \to \mathbb{C}$ по формуле

$$\theta_\chi(D) = \varphi(D)(\chi), \ D \in \mathcal{D}_{n,m}$$

где φ является гомоморфизмом Хариш Чандры.

Definition

Обозначим через $X^+_{reg}(n,m)$ множество весов χ из $X^+(n,m)$ таких, что $(\chi+\rho,\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha,\alpha)\neq 0$ для любого положительного нечетного корня α.

Назовем два веса $\chi,\tilde{\chi}\in X^+(n,m)$ эквивалентными если $\theta_\chi=\theta_{\tilde{\chi}}$.

Предложение

1) *Каждый класс эквивалентности содержит единственный регулярный элемент.*
2) *Пусть E будет классом эквивалентности и $\chi\in E$ единдтвенный регулярный элемент в немт. Тогда существуют попарно коммутирующие элементы $g_1,\dots,g_r$ группы G такие, что*

$$E=\{g_1^{\vartheta_1}\circ g_2^{\vartheta_2}\circ\cdots\circ g_r^{\vartheta_r}\circ(\chi)\mid \vartheta_i=0,1,\ i=1,\dots,r\}$$

Для краткости мы будем писать $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)$ вместо $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\theta_\chi)$.

Следующая теорема дает описание спектрального разложение в терминах системы корней.

Theorem

1) $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ *как модуль над* $\mathcal{D}^{tr}_{n,m}$ *разлагается в сумму обобщенных собственных подпространств*

$$\Lambda^{\pm}_{n,m} = \bigoplus_{\chi \in X^{+}_{\boldsymbol{reg}}(n,m)} \Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi),$$

2) *Размерность* $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)$ *равна* 2^r *где* r *число нечетных положительных корней таких, что* $(\chi+\rho,\alpha)+\frac{1}{2}(\alpha,\alpha)=0$.
3) *Пусть* k *не является рациональным и* $\dim \Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)=2^r$. *Тогда образ алгебры* $\mathcal{D}_{n,m}$ *в алгебре* $End(\Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi))$ *изоморфен* $\mathbb{C}[\varepsilon]^{\otimes r}$, *где* $\mathbb{C}[\varepsilon]$ *является алгеброй двойных чисел, а пространство* $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)$ *является регулярным представлением.*
4) $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ *порождена деформированными суммами*

$$p_s(x_1,\dots,x_{n+m}) = x_1^s+\dots+x_n^s+\frac{1}{k}(x_{n+1}^s+\dots+x_{n+m}^s),\ s=\pm1,\pm2,\dots$$

$s=\pm1,\pm2,\dots.$

Простейшие примеры:

Example

Пусть $n = m = 1$ и $k \notin \mathbb{Q}$.

$$\Lambda_{1,1} = \{f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid \partial_x f - k\partial_y f \in (x-y)\}$$

Определим для целых (λ, μ) :

$$P_{\lambda,\mu} = x^\lambda y^\mu - \frac{\lambda - k\mu}{\lambda - 1 - k(\mu+1)} x^{\lambda-1} y^{\mu+1},$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0,0),\ (1,-1)$$

$$P_{0,0} = 1,\ \ P_{1,-1} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\Lambda^{\pm}_{1,1} = \bigoplus_{(\lambda,\mu)\neq(0,0),(1,1)} < P_{\lambda,\mu} > \oplus < P_{(0,0)},\ P_{(1-1)} > .$$

Если $k \in \mathbb{Q}$ разложение может быть другим.

Example

Пусть $k = -1$. Тогда

$$\Lambda^{\pm}_{1,1} = \{f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid \partial_x f + \partial_y f \in (x - y)\}$$

Это алгебра суперсимметрических полиномов. В этом случае

$$\Lambda^{\pm}_{1,1} = \bigoplus_{\lambda+\mu\neq 0} < P_{\lambda,\mu} > \oplus < \frac{x^a}{y^a}, a \in \mathbb{Z} >$$

и вес обобщенные собственные подпространства являются настоящими собственными и одно из них бесконечномерное.

Следующий пример связан с теорией симметрических супералгебр Ли

Example

Пусть $k = -1/2$. Тогда

$$\Lambda^{\pm}_{1,1} = \{f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid \partial_x f + 1/2\partial_y f \in (x - y)\}$$

В этом случае

$$\Lambda^{\pm}_{1,1} = \bigoplus_{2\lambda+\mu\neq 0,1} < P_{\lambda,\mu} > \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}} < \frac{x^a}{y^{2a}}, \frac{x^a}{y^{2a}}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) >$$

и все обобщенные подпространства имеют размерность 1 или 2.

По теореме ПБВ любая алгебра Ли может быть рассмотрена как линейное подпространство в ассоциативной алгебре A посредством скобки

$$[a, b] = ab - ba, \; a, b \in A$$

Пусть теперь $A = A_0 \oplus A_1$ будет $\mathbb{Z}_2$ градуированной ассоциативной алгеброй, с функцией четности $p(a) = 0$ если $a \in A_0$ и $p(a) = 1$ если $a \in A_1$. Тогда аналогичным образом мы можем определить супер - коммутатор в A на однородных элементах по формуле

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba$$

На неоднородных элементах коммутатор распространяется по линейности.

Example

Супералгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$.
Рассмотрим $n + m$ - мерное пространство $V =< e_1, \dots, e_{n+m} >$ с функцией четности $p(i) = 0,\ 1 \le i \le n,\ p(i) = 1,\ n < i \le n + m$.
Пусть $L(V)$ будет соответствующей алгеброй линейных операторов.
Определим функцию четности на $L(V)$ по правилу
$p(E_{ij}) = p(i) + p(j)$.
тем самым определена $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ градуировка и мы можем определить коммутатор как выше.

Рассмотрим двухмерное пространство $V =< e_1, e_2 >$, с функцией четности $p(1) = 0$, $p(2) = 1$ и соответствующую алгебру линейных операторов с функцией четности суперкоммутатором

$$p(E_{ij}) = p(i) + p(j), \quad [a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba$$

или в явном виде

$$[E_{11}E_{12}] = E_{12},\ [E_{11}E_{21}] = -E_{21},\ [E_{22}E_{12}] = -E_{12}\ [E_{22}E_{21}] = E_{21}$$

$$[E_{12}E_{12}] = 0,\ [E_{21}E_{21}] = 0,\ [E_{12}, E_{21}] = E_{11} + E_{22}$$

Соответственно универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{gl}(1, 1))$ задается соотношениями

$$E_{11}E_{12} - E_{12}E_{11} = E_{12}, \quad E_{11}E_{21} - E_{21}E_{11} = -E_{21}$$

$$E_{22}E_{12} - E_{22}E_{12} = -E_{12}, \quad E_{22}E_{21} - E_{21}E_{22} = E_{21}$$

$$E_{12}^2 = 0, \quad E_{21}^2 = 0, \quad E_{12}E_{21} + E_{21}E_{12} = E_{11} + E_{22}$$

.

Definition

Представление (или модуль) над супералгеброй Ли $\mathfrak{gl}(1,1)$ это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ градуированный модуль над ассоциативной алгеброй $U(\mathfrak{gl}(1,1))$.

Example

Тождественное представление $V =< e_1, e_2 >$ и $E_{ij}e_l = \delta_{jl}e_i$.

Example

Одномерные представления. Для любого λ $L(\lambda, -\lambda) =< v >$

$$E_{11}v = \lambda v,\ E_{22}v = -\lambda v,\ E_{12}v = E_{21}v = 0$$

является одномерным представлением $\mathfrak{gl}(1,1)$.

Модули Каца

Example

Определим двухмерное представление $\mathfrak{gl}(1,1)$ в пространстве $K(\lambda,\mu) =< u, v >$

$$E_{11}u = \lambda u,\ E_{22}u = \mu u,\ E_{12}u = 0,\ E_{21}u = v$$

Несложно проверить, что представление $K(\lambda,\mu)$ неприводимо, если $\lambda + \mu \neq 0$, приводимо (но неразложимо) если $\lambda + \mu = 0$.

Представление называется неприводимым, если не существует нетривиальных градуированных инвариантных подпространств. Мы будем рассматривать представление, которые полупросты над $< E_{11}, E_{22} >$ и имеют целочисленные веса.

Definition

Пусть представление V представлено в виде суммы собственных подпространств относительно $< E_{11}, E_{22} >$

$$V = \bigoplus V(\lambda.\mu)$$

Тогда его суперхарактер это

$$sch(V) = \sum_{\lambda,\mu} sdim V(\lambda.\mu) x^{\lambda} y^{\mu}$$

Example

Если V стандартное представление, то $sch(V) = x - y$. Одномерное представление имеет суперхарактер $sch(L(\lambda)) = x^{\lambda} y^{-\lambda}$. Двумерное представление $K(\lambda, \mu)$ имеет суперхарактер $sch((\lambda, \mu)) = x^{\lambda} y^{\mu} - x^{\lambda-1} y^{\mu+1}$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,m)$ - общая линейная супералгебра Ли и $\mathfrak{f}$ ее подалгебра Картана состоящая из диагональных матриц. Пусть $\mathcal{F}$ - категория конечномерных представлений на которых $\mathfrak{f}$ действует диагональным образом и все собственные значения e_{ii}, $i = 1, \ldots, n+m$ целые неотрицательные. Аналогично определяется категория $\mathcal{F}^{\pm}$, с призвольными целочисленными собственными значениями.

Definition

Алгеброй Гротендика над полем $\mathbb{C}$ категории $\mathcal{F}$ (категории $\mathcal{F}^{+}$) называется алгебра $K(\mathcal{F})$ ($K(\mathcal{F}^{+})$ соответственно), порожденная классами изоморфизма конечномерных модулей, подчиненных соотношениям

$$[V] = [V_1] + [V_2], \text{ если } 0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

$$[V_1 \otimes V_2] = [V_1][V_2]$$

Definition

Пусть V- конечномерный модуль из категории $\mathcal{F}$ или $\mathcal{F}^+$. Рассмотрим его как $\mathfrak{f}$ модуль и разложим в прямую сумму изотипических модулей

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{f}^*} V(\chi)$$

Тогда полином

$$sch(V) = \sum_{\chi} sdim V(\chi) x^{\chi}$$

называется суперхарактером представления V. Здесь $sdim V(\chi) = \dim V_0 - \dim V_1$.

Пусть $U(\mathfrak{gl}(n,m))$ - обертывающая алгебра и $Z(\mathfrak{gl}(n,m))$ - ее центр. Каждый элемент центра действует как скаляр в неприводимом модуле. Тем самым мы имеем естественное действие алгебры $Z(\mathfrak{gl}(n,m))$ на $K(\mathcal{F}^+)$ и $K(\mathcal{F})$.

Theorem

Отображение взятия суперхарактера

$$sch : K(\mathcal{F}) \longrightarrow \Lambda^{\pm}_{n,m}$$

является изоморфизмом алгебр и переводит действие $Z(\mathfrak{gl}(n,m))$ в действие $\mathcal{D}^{tr}_{n,m}$ при $k=-1$. При ограничении на $K(\mathcal{F})^{+}$ неприводимые модули отображаются в суперполиномы Джека при $k=-1$.

Симметрическая супералгебра Ли это пара $(\mathfrak{g},\theta)$, где $\mathfrak{g}$ является комплексной (простой контраградиентной)) супералгеброй Ли, и θ является инволютивным автоморфизмом $\mathfrak{g}$. Мы имеем разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ являются $+1$ и -1 собственными подпространствами θ :

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\ [\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p},\ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k}.$$

В другой терминологии можно говорить о *симметрической паре*

$X = (\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.
Коммутативная подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ называется *попространством Картана* если она редуктивна в $\mathfrak{g}$ и централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{p}$ совпадает с $\mathfrak{a}$.
Мы имеем разложение $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$ на ненулевые собственные подпространства.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathfrak{a}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(X)} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathfrak{a}}.$$

Соответствующее множество $R(X) \subset \mathfrak{a}^*$ называется *ограниченной системой корней* симметрической пары X и $\mu_\alpha = dim\, \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathfrak{a}}$ называются *кратностями*. Под *зональной функцией* для симметрической пары $X = (\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ мы подразумеваем линейный функционал $f \in U(\mathfrak{g})^*$, который двусторонне $\mathfrak{k}$-инвариантен:

$$f(xu) = f(ux) = 0, \; x \in \mathfrak{k}, \; u \in U(\mathfrak{g}).$$

Пространство таких функционалов мы обозначим через $\mathcal{Z}(X) \subset U(\mathfrak{g})^*$.

Пусть $S \subset S(\mathfrak{a})^*$ будет мультипликативным подмножеством порожденным функциями $e^{2\alpha} - 1$, $\alpha \in R(X)$ и $S(\mathfrak{a})^*_{loc} = S^{-1}S(\mathfrak{a})^*$ будест соответствующей локализацией. Пусть $i^* : \mathcal{Z}(X) \to S(\mathfrak{a})^*_{loc}$ будет гомоморфизмом ограничения индуцированным вложением $i : \mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$.

Theorem

Гомоморфизм ограничения i^* иньективен и существует единственный гомоморфизм $\psi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}^{tr}_{n,m}$ (для конкретных значений n, m, k) такой, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X) & \xrightarrow{L_z} & \mathcal{Z}(X) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ S(\mathfrak{a})^*_{loc} & \xrightarrow{\psi(z)} & S(\mathfrak{a})^*_{loc}. \end{array} \tag{10}$$

где L_z является оператором умножения на $z \in Z(\mathfrak{g})$.

Гооморфизм ψ называется гомоморфизмом радиальной части.

Поскольку инвариантная форма на $\mathfrak{g}$ инвариантна также относительно автоморфизма θ, то мы имеем корректно определенную, симметрическую билинейную форму на $\mathfrak{a}$. И можно вычислить радиальную часть оператора соответствующему оператору Казимира

$$C_2 = \sum_i \frac{h_i}{(h_i, h_i)} + \sum_{\alpha \in R} \frac{X_\alpha X_{-\alpha}}{(X_{-\alpha}, X_\alpha)}$$

$$\Omega_{C_2} = \sum_i \frac{\partial_{v_i}^2}{(v_i, v_i)} + (-1)^{p(\alpha)} \frac{\mu_\alpha}{2} \sum_{\alpha \in \tilde{R}^+} \frac{e^{2\alpha} + 1}{e^{2\alpha} - 1} \partial_{2\alpha}$$

Пусть U будет конечномерным $\mathfrak{g}$ - и $U^{\mathfrak{k}}$ будет пространством $\mathfrak{k}$-инвариантных векторов $u \in U$, то есть таких что $xu = 0$ для всех $x \in \mathfrak{k}$ и дополнительно $gu = u$ для всех $g \in O(n)$. Рассмотрим также аналогичное пространство $U^{*\mathfrak{k}}$ для двойственного модуля U^*.
Для $u \in U^{\mathfrak{k}}$ и $l \in U^{*\mathfrak{k}}$ мы можем рассмотреть линейный функционал

$\phi_{u,l}(x) \in \mathcal{Z}(X) \subset U(\mathfrak{g})^*$ определенный по правилу

$$\phi_{u,l}(x) := l(xu), \quad x \in U(\mathfrak{g}).$$

Обозначим линейную оболочку всех таких функционалов через $C(U, \mathfrak{k})$. Пространство $C(U, \mathfrak{k})$ имеет естественную структуру модуля над алгеброй $Z(\mathfrak{g})$.

Definition

Конечномерный модуль $\mathfrak{g}$ - модуль U называется *сферическим* если пространство $U^{\mathfrak{k}}$ не равно нулю. Существует также естественное вложение алгебры $\Lambda^{\pm}_{n;m}$ с параметром $k = -1/2$ в алгебру $S(\mathfrak{a})^*$ и мы будем отождествлять алгебру $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ с ее образом.

Основная Теорема:

Theorem

1) *Для любого* $z \in Z(\mathfrak{g})$ *оператор* $\psi(z)$ *сохраняет подпространство* $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ *и принадлежит алгебре* $\mathcal{D}_{n,m}$ *с параметром* $k = -1/2$.
2) *Пусть*

$$\Lambda^{\pm}_{n,m} = \bigoplus_{\chi} \Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)$$

Разложение алгебры квазинвариантных Лорановских полиномов при $k = -1/2$ *в обобщенные собственные подпространства относительно алгебры* $\mathcal{D}_{n,m}$ *при* $k = -1/2$.
Тогда для любого конечномерного обобщенного собственного подпространства $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)$*найдется единственный неразложимый конечномерный проективный модуль* P *такой, что естественное отображение*

$$C(P, \mathfrak{k}) \longrightarrow \Lambda^{\pm}_{n,m}$$

являетсся изоморфизмом $Z(\mathfrak{g})$ *- модулей* $C(P, \mathfrak{k})$ *и* $\Lambda^{\pm}_{n,m}(\chi)$.

Рассмотрим трехмерное пространство $V = < e_1, e_2, e_3 >$ с функцией четности $p(1) = 0$, $p(2) = p(3) = 1$. Пусть

$$\mathfrak{h} = < E_{11},\ E_{22},\ E_{33} >$$

будет подалгеброй Картана и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ дуальный базис. В данном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1,2)$ можно выбрать автоморфизм так что

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{osp}(1,2) = < \ \frac{1}{2}(E_{22} - E_{33}),\ E_{23},\ E_{32}, \frac{1}{2}(E_{12} + E_{31}),\ \frac{1}{2}(E_{21} - E_{13}) >$$

Эта подалгебра сохраняет билинейную форму $(e_1, e_1) = 1$, $(e_2, e_3) = 1$, $(e_3, e_2) = -1$ и

$$\mathfrak{p} = < \ E_{11},\ \frac{1}{2}(E_{22} + E_{33}),\ E_{23},\ E_{32}, \frac{1}{2}(E_{12} - E_{31}),\ \frac{1}{2}(E_{13} + E_{21}) >$$

Подпространство Картана

$$\mathfrak{a} = < E_{11},\ E_{22} + E_{33} >$$

Заметим, что $U(\mathfrak{a})^*$ естественно изоморфно алгебре формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\varepsilon,\delta]]$ где ε,δ басис двойственного к $\mathfrak{a}$ пространства.
Определим $C(\mathfrak{a})$ как подалг бру $U(\mathfrak{a})^*$ порожденную $x = e^{2\varepsilon}$, $y_j = e^{2\delta}$. Она изоморфна алгебре Лорановских полиномов

$$C(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}].$$

Предположим, что $2\lambda + \mu \neq 0, 1$ и обозначин через $K(2\lambda, \mu.\mu)$ соответствующий модуль Каца

$$K(2\lambda, \mu.\mu) = ind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g_0}\oplus\mathfrak{g}_+} < v >$$

где $< v >$ одномерное представление $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ такое, что

$$E_{11}v = 2\lambda v, E_{22}v = E_{33}v = \mu v, E_{12}v = E_{23}v = E_{32}v = 0$$

Следовательно

$$K(2\lambda, \mu.\mu) =< v,\ E_{21}v,\ E_{31}v,\ E_{21}E_{31}v >$$

Этот модуль неприводим. Легко проверить что вектор

$$\omega = v - \frac{1}{2\lambda + \mu - 1} E_{21} E_{31} v$$

инвариантен относительно $\mathfrak{k}$. Существует линейный функционал $l \in K(2\lambda, \mu.\mu)^*$ инвариантный относительно $\mathfrak{k}$, такой, что $l(v) = 1$. Но

$$l(E_{11}^r (E_{22} + E_{33}))^s v) = (2\lambda)^r (2\mu)^s$$

Следовательно

$$E_{11} E_{21} E_{31} v = (2\lambda - 2) E_{21} E_{31}, \; E_{22} E_{21} E_{31} v = E_{33} E_{21} E_{31} v = (\mu - 1) E_{21} E_{31}$$

Далее

$$l(E_{11}^r (E_{22} + E_{33})^s E_{21} E_{31} v) = (2\lambda - 2)^r (2\mu + 2)^s l(E_{21} E_{31} v)$$

и

$$l(E_{21} E_{31} v) = l((E_{21} - E_{13}) E_{31} v + E_{13} E_{31} v) = l(E_{13} E_{31} v)) = l$$

$$([E_{13}, E_{31}]v) = (E_{11} + E_{33})v = (2\lambda + \mu)v$$

и соответствущий матричный элемент имеет вид

$$f(l, \omega) = e^{2\lambda\varepsilon} e^{2\mu\delta} - \frac{2\lambda + \mu}{2\lambda + \mu - 1} e^{(2\lambda-2)\varepsilon} e^{(2\mu+2)\delta} =$$

$$= x^{\lambda} y^{\mu} - \frac{2\lambda + \mu}{2\lambda + \mu - 1} x^{\lambda-1} y^{\mu+1}$$