

Записки лекций С.А. Гайфуллиной.

"Инвариант Макар-Лиманова и автоморфизмы аффинных алгебраических многообразий".

Лекция 1

1 Основные понятия

Если не оговорено противное, все кольца (алгебры) в данных лекциях будут предполагаться ассоциативными, коммутативными и с единицей. Пусть \mathbb{K} – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. И пусть B – некоторая конечно порождённая \mathbb{K} -область целостности (конечно порождённая \mathbb{K} -алгебра без делителей нуля). Это эквивалентно тому, что B – алгебра $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на некотором неприводимом аффинном алгебраическом многообразии X .

Определение 1.1. Дифференцирование (или более точно \mathbb{K} -дифференцирование) алгебры B – это линейный оператор $\delta: B \rightarrow B$, удовлетворяющий тождеству Лейбница. $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$.

Примеры дифференцирований:

- B – любая, $\delta \equiv 0$;
- $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\delta = \frac{\partial}{\partial x_1}$;
- $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\delta = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $f_i \in B$;
- $B = \mathbb{K}[x, y, z]/(xz - y^2)$, $\delta = 2y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y}$.

В последнем примере стоит отметить, что $\delta(xz - y^2) = \delta(x)z + x\delta(z) - 2y\delta(y) = 2yz + 0 - 2yz = 0$. Следовательно, если $g = f + (xz - y^2)h$, то $\delta(g) = \delta(f) + \delta(xz - y^2)h + (xz - y^2)\delta(h) = \delta(f) + (xz - y^2)\delta(h)$, что доказывает корректность определённость δ на смежных классах по идеалу $(xz - y^2)$.

Лемма 1.2. Дифференцирование достаточно задать на образующих алгебры.

Доказательство. Пусть $\{b_\alpha \mid \alpha \in S\}$ – образующие алгебры B . Тогда любой элемент есть $b = f(b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_k})$, где $f \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_k]$. Из линейности δ и правила Лейбница легко следует, что

$$\delta(b) = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_k}) \cdot \delta(b_{\alpha_j}) \right).$$

□

Следствие 1.3. Любое дифференцирование алгебры $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ имеет вид $\delta = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $f_i \in B$.

Упражнение 1.4. Пусть $B = \mathbb{K}[x_\alpha \mid \alpha \in S]/I$, где $I = (f_\beta \mid \beta \in \Omega)$. Пусть задано дифференцирование δ алгебры $\mathbb{K}[x_\alpha \mid \alpha \in S]$ такое, что $\delta(f_\beta) \in I$ для любого $\beta \in \Omega$. Тогда δ индуцирует дифференцирование $\bar{\delta}$ алгебры B по правилу $\bar{\delta}(h + I) = \delta(h) + I$.

Упражнение 1.5. Любое дифференцирование алгебры $B = \mathbb{K}[x_\alpha \mid \alpha \in S]/I$ является дифференцированием $\bar{\delta}$ для некоторого дифференцирования δ алгебры $\mathbb{K}[x_\alpha \mid \alpha \in S]$ с условием $\delta(f_\beta) \in I$.

Упражнение 1.6. Докажите, что векторное пространство $\text{Der}(B)$ с операцией $[\delta, \zeta] = \delta \circ \zeta - \zeta \circ \delta$ является алгеброй Ли.

Замечание 1.7. В предыдущих двух упражнениях можно заменить $\mathbb{K}[x_\alpha \mid \alpha \in S]$ на любую коммутативную алгебру.

Определение 1.8. Дифференцирование δ алгебры B называется *локально нильпотентным* (ЛНД), если для любого $b \in B$ найдётся натуральное число m такое, что $\delta^m(b) = 0$.

Примеры

- B – любая, $\delta \equiv 0$;
- $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\delta = \frac{\partial}{\partial x_1}$;
- $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\delta = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{i-1}]$, в частности, $f_1 \in \mathbb{K}$.

Дифференцирования из последнего примера называются *треугольными*.

Упражнение 1.9. Локальную нильпотентность можно проверять только для некоторой системы образующих нашей алгебры.

Легко видеть, что если дифференцирование δ в упражнении 1.4 локально нильпотентно, то и $\bar{\delta}$ также локально нильпотентно.

На множестве $LND(B)$ локально нильпотентных дифференцирований данной алгебры B нет операций сложения или коммутирования: сумма двух ЛНД может быть не локально нильпотентной и коммутатор двух ЛНД может быть не локально нильпотентным. Также умножение ЛНД на функцию может быть не ЛНД.

Пример 1.10. Пусть $B = \mathbb{K}[x, y]$. Дифференцирования $\delta_1 = y \frac{\partial}{\partial x}$ и $\delta_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$ являются ЛНД. Но их сумма $D = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ не локально нильпотентна. Действительно, $D^{2k+1}(x) = y$, $D^{2k}(x) = x$.

Коммутатор $P = [\delta_1, \delta_2]$ также не ЛНД: $P(x) = -x$, $P(y) = y$, то есть $P = -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

Пусть $\delta = \frac{\partial}{\partial x}$. Тогда $x\delta$ – не ЛНД.

Есть лишь довольно бедные следующие операции.

Лемма 1.11. Пусть $\delta, \zeta \in LND(B)$, тогда

- если $f \in \text{Ker } \delta$, то $f\delta \in LND(B)$ (ЛНД $f\delta$ называется *репликой* дифференцирования δ);
- если $[\delta, \zeta] = 0$, то $\delta + \zeta \in LND(B)$.
- пусть φ – автоморфизм алгебры B (постоянный на \mathbb{K}). Тогда $\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}$ – также ЛНД.

Доказательство. Упражнение. □

Группу автоморфизмов (постоянных на \mathbb{K}) алгебры B будем обозначать $\text{Aut}(B)$. Иногда будем отождествлять её с группой регулярных автоморфизмов соответствующего многообразия $\text{Aut}(X)$.

Спецификой ЛНД является возможность брать экспоненты.

Определение 1.12. Пусть $\delta \in LND(B)$, тогда *экспонентой* дифференцирования δ называется следующее отображение:

$$\exp(\delta): B \rightarrow B, \quad \exp(\delta) = \text{id} + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \dots$$

Заметим, что хотя сумма в определении бесконечная, при применении к любому элементу $b \in B$ получим конечное число ненулевых слагаемых.

Лемма 1.13. а) Экспонента любого ЛНД является автоморфизмом алгебры.

б) Если δ и ζ – коммутирующие ЛНД, то $\exp(\delta + \zeta) = \exp(\delta) \circ \exp(\zeta)$.

Рассмотрим подгруппу

$$\mathcal{H}_\delta = \{\exp(t\delta) \mid t \in \mathbb{K}\} \subseteq \text{Aut}(B).$$

Легко видеть, что эта подгруппа изоморфна $(\mathbb{K}, +)$ и соответствует алгебраическому действию алгебраической группы $(\mathbb{K}, +)$ на многообразии X . Такие подгруппы в $\text{Aut}(X)$ будем называть \mathbb{G}_a – подгруппами.

Лемма 1.14. Любая \mathbb{G}_a – подгруппа в $\text{Aut}(B)$ имеет вид \mathcal{H}_δ для некоторого $\delta \in LND(B)$.

Определение 1.15. Подгруппа в $\text{Aut}(B)$, порождённая всеми \mathbb{G}_a -подгруппами называется *подгруппой специальных автоморфизмов* и обозначается $\text{SAut}(B)$ (или $\text{SAut}(X)$).

Лемма 1.16. $\text{SAut}(B)$ – нормальная подгруппа в $\text{Aut}(B)$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \text{Aut}(B)$. Из леммы 1.11(в) следует, что если δ – ЛНД, то и $\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}$ – ЛНД. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\varphi \circ \exp(\delta) \circ \varphi^{-1} = \exp(\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1})$. Отсюда следует, что сопряжённая к \mathbb{G}_a -подгруппе также является \mathbb{G}_a -подгруппой. □

Определение 1.17. Пусть δ – ЛНД алгебры B . Определим следующую степенную функцию $\nu_\delta: B \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $\delta^k(b) \neq 0$ и $\delta^{k+1}(b) = 0$, то $\nu_\delta(b) = k$. Здесь $\delta^0(b) = b$.

Упражнение 1.18. Выполнены следующие свойства:

- $\nu_\delta(a + b) \leq \max\{\nu_\delta(a), \nu_\delta(b)\}$;
- $\nu_\delta(ab) = \nu_\delta(a) + \nu_\delta(b)$.

Отсюда следует, что подмножества $U_k = \{b \mid \nu_\delta(b) \geq k\} \cap \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – это пространства, задающие строгую (возрастающую) фильтрацию на B , то есть

- $U_i \subseteq U_{i+1}$;
- $\bigcup_{i \geq 0} U_i = B$;
- если $a \in U_i$, $b \in U_j$, то $ab \in U_{i+j}$;
- если $a \in U_i \setminus U_{i-1}$, $b \in U_j \setminus U_{j-1}$, то $ab \in U_{i+j} \setminus U_{i+j-1}$.

Упражнение 1.19. Докажите это.

Замечание 1.20. Часто спепенную функцию ν_δ обозначают через \deg_δ . Но мы выберем первое обозначение, чтобы не перегружать символ \deg . Также зачастую полагают $\nu_\delta(0) = -\infty$.

Лемма 1.21. Пусть δ – ЛНД алгебры B . И пусть $A = \text{Ker } \delta$. Тогда

- A – подалгебра (область целостности) с единицей в B ;
- обратимые элементы B^\times содержатся в A ;
- A – факториально замкнутая подалгебра в B (то есть если для некоторых $x, y \in B$ выполнено $xy \in A$, то $x, y \in A$);
- A – алгебраически замкнутая подалгебра (то есть если для некоторого $b \in B$ выполнено $f(b) = 0$ для некоторого $f \in A[x]$, то $b \in A$);
- $\text{tr.deg}_\mathbb{K} A = \text{tr.deg}_\mathbb{K} B - 1$.

Упражнение 1.22. Докажите всё, кроме последнего пункта.

Замечание 1.23. Подалгебра A может быть не конечно порождённой. Даже в случае, когда $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Лемма 1.24. Пусть δ – ЛНД алгебры B . Тогда $\text{Ker } \delta = B^{\mathcal{H}_\delta}$ (алгебра инвариантов при действии \mathcal{H}_δ на B).

Доказательство. Если $a \in \text{Ker } \delta$, то

$$\exp(t\delta)(a) = \text{id}(a) + t\delta(a) + \frac{t^2\delta^2(a)}{2!} + \dots = a.$$

Напротив, пусть $\nu_\delta(a) = m$ и $a \in B^{\mathcal{H}_\delta}$. Тогда $\exp(t\delta)(a)$ – многочлен степени m от t с коэффициентами из B . Но этот многочлен для всех t принимает значение a . Так как поле \mathbb{K} бесконечно, получаем, что все коэффициенты, кроме свободного члена равны нулю, а это значит, что $a \in \text{Ker } \delta$. \square

Определение 1.25. Инвариант Макара-Лиманова алгебры B – это пересечение всех ядер всех ЛНД алгебры B .

$$ML(B) = \bigcap_{\delta \in LND(B)} \text{Ker } \delta.$$

Из леммы 1.24 следует, что $ML(X) = B^{\text{SAut}(B)}$.

Предложение 1.26. $ML(B)$ является $\text{Aut}(B)$ -инвариантной подалгеброй.

Доказательство. То, что $ML(B)$ – подалгебра следует из того, что по определению это пересечение подалгебр. В свою очередь $HD(B)$ – по определению подалгебра.

Пусть δ – ЛНД алгебры B , а φ – автоморфизм B . Докажем, что $\varphi(\text{Ker } \delta) = \text{Ker } (\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1})$. В самом деле, если $b \in \text{Ker } \delta$, то $\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}(\varphi(b)) = \varphi \circ \delta(b) = 0$, значит, $\varphi(b) \in \text{Ker } (\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1})$, что означает, что

$$\varphi(\text{Ker } \delta) \subseteq \text{Ker } (\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}).$$

Применив это же утверждение к $\psi = \varphi^{-1}$ и $\zeta = \varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}$, получим

$$\varphi^{-1}(\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}) = \psi(\text{Ker } \zeta) \subseteq \text{Ker } (\psi \circ \zeta \circ \psi^{-1}) = \text{Ker } \delta.$$

Применяя к обоим частям φ , получаем включение, противоположное ранее доказанному. Следовательно, доказано, что $\varphi(\text{Ker } \delta) = \text{Ker } (\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1})$

Теперь $ML(B) = \bigcap_{\delta \in LND(B)} \text{Ker } \delta$. Значит,

$$\varphi(ML(B)) = \bigcap_{\delta \in LND(B)} \varphi(\text{Ker } \delta) = \bigcap_{\delta \in LND(B)} \text{Ker } (\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}) = \bigcap_{\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1} \in LND(B)} \text{Ker } (\varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}) = ML(B).$$

\square

Упражнение 1.27. Пусть B и C – две алгебры. И пусть $\psi: B \rightarrow C$ – изоморфизм этих алгебр. Тогда $\psi(ML(B)) = ML(C)$.

Лемма 1.28. Подалгебра $ML(X)$

- содержит подалгебру $\mathbb{K}[B^\times]$, порождённую всеми обратимыми элементами;
- является факториально замкнутой;
- является алгебраически замкнутой.

Доказательство. Следует из леммы 1.21 \square

Пример 1.29. • $ML(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) = \mathbb{K}$. Действительно, $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbb{K}$.

- $ML(\mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]) = \mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$. В самом деле, эта алгебра порождена обратимыми функциями.
- $ML(\mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}, x_{k+1}, \dots, x_n]) = \mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$. (Упражнение.)

2 Вычисление $ML(X)$

В этом разделе будут собраны некоторые методы (не полный список) и примеры вычисления $ML(B)$. Начнём с совсем простых методов.

1. Явное выписывание некоторых дифференцирований.

Для того, чтобы вычислить $ML(B)$ необходимо доказать, что он не меньше и не больше, чем предполагаемый ответ. Для того, чтобы получить предполагаемый ответ и для того, чтобы доказать, что $ML(B)$ не больше, чаще всего стоит выписать некоторое количество ЛНД, пересечь их ядра и (если больше не получается уменьшить путём пересечения с ядрами других ЛНД) попытаться доказать, что $ML(X)$ не меньше.

Пример 2.1. Пусть $B = \mathbb{K}[x, y, z]/(xz - y^2)$. Докажем, что $ML(B) = \mathbb{K}$. Для этого рассмотрим два ЛНД:

$$\delta_1 : \begin{cases} x \mapsto 2y; \\ y \mapsto z; \\ z \mapsto 0; \end{cases} \quad \delta_2 : \begin{cases} x \mapsto 0; \\ y \mapsto x; \\ z \mapsto 2y. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\text{Ker } \delta_1 = \mathbb{K}[z]$, $\text{Ker } \delta_2 = \mathbb{K}[x]$, и следовательно, $ML(B) = \mathbb{K}$.

Замечание 2.2. Аналогичным образом (рассматривая ЛНД, соответствующие корням Демажюра) можно показать, что инвариант Макар-Лиманова любого нормального невырожденного торического многообразия равен \mathbb{K} .

2. Использование обратимых функций и свойств $ML(B)$.

Как уже было упомянуто, $ML(B)$ содержит $\mathbb{K}[B^\times]$. Можно использовать это вкупе со свойствами $ML(B)$.

Пример 2.3. Пусть

$$B = \mathbb{K}[x, y, z, u, v]/((x^4 + y^5 + z^6)(x^4 + y^5 - z^6)(x^4 - y^5 + z^6) - 1, x^{17} + y^{19} + u^{23}).$$

Тогда $x^4 + y^5 + z^6, x^4 + y^5 - z^6, x^4 - y^5 + z^6 \in B^\times \subseteq ML(B)$. Так как $ML(B)$ – подпространство, имеем $x^4, y^5, z^6 \in ML(X)$. В силу факториальной замкнутости $x, y, z \in ML(B)$. В силу алгебраической замкнутости $u \in ML(B)$. С другой стороны, $\frac{\partial}{\partial v}$ – ЛНД, и его ядро – это алгебра порождённая x, y, z, u . Итак,

$$ML(B) = \mathbb{K}[x, y, z, u]/((x^4 + y^4 + z^4)(x^4 + y^4 - z^4)(x^4 - y^4 + z^4) - 1, x^{17} + y^{19} + u^{23}).$$

На следующей лекции будут рассмотрены другие методы вычисления $ML(B)$. Далее мы перейдём к применениям $ML(B)$ и к модификациям этого инварианта.

Лекция 2

Продолжим перечислять идеи, помогающие при вычислении инварианта Макар-Лиманова.

3. Использование инвариантных подалгебр/идеалов.

Пример 2.4. Рассмотрим $B = \mathbb{K}[u, v, x]/(u^2 - v^3)$. У соответствующей алгебры есть ЛНД $\frac{\partial}{\partial x}$. Его ядро – это подалгебра $\mathbb{K}[u, v]/(u^2 - v^3)$. Докажем, что $ML(B) = \mathbb{K}[u, v]/(u^2 - v^3)$. Воспользуемся тем, что у соответствующего B многообразия множество особых точек имеет вид $\{(0, 0, x)\}$. Идеал элементов B , равных нулю на этом множестве равен $I = (u, v) \triangleleft B$. Этот идеал инвариантен относительно автоморфизмов. Пусть δ – некоторое ЛНД B . Идеал I инвариантен относительно $\text{exp}(t\delta)$ для любого t . Отсюда легко вывести (упражнение), что I инвариантен относительно δ . Отсюда идеал I^2 также δ -инвариантен. Так как δ локально нильпотентно, существует элемент из I^2 , лежащий в ядре δ . Этот элемент имеет вид vh . Значит, $v \in \text{Ker } \delta$. Отсюда, так как $\text{Ker } \delta$ алгебраически замкнуто, $u \in \text{Ker } \delta$. Так как это верно для любого ЛНД δ , получаем $ML(B) \supseteq \mathbb{K}[u, v]/(u^2 - v^3)$.

4. Изучение однородных ЛНД и их степеней.

Тут нам понадобятся ещё некоторые сведения об ЛНД в случае градуированного кольца. Пусть G – абелева группа. На всякий случай напомним, что такое градуированная алгебра.

Определение 2.5. G -градуировка алгебры B – это набор подпространств B_g , $g \in G$ таких, что

1) $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$,

2) если $a \in B_g$ и $b \in B_h$, то $ab \in B_{g+h}$.

При этом B_g называются *однородными компонентами* алгебры B . Если $b \neq 0 \in B_g$, то говорят, что $\deg b = g$, такие элементы называются однородными. Произвольный элемент не является однородным, а выполнено разложение элемента на его однородные компоненты $b = \sum_{g \in G} b_g$, $g \in G$.

Замечание 2.6. Если мы хотим ввести такую градуировку на алгебре $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_k)$, чтобы все образующие x_i были однородны, то можно просто указать их степени и проверить, что для каждого f_j все мономы в нём имеют одинаковую степень. Но безусловно могут существовать и градуировки, для которых образующие не являются однородными.

Определение 2.7. Пусть на алгебре B задана G -градуировка. Скажем, что дифференцирование δ является *однородным*, если образ каждого однородного элемента однороден.

Упражнение 2.8. Пусть δ – однородное дифференцирование G -градуированной алгебры B (без делителей нуля). Тогда существует элемент $g_0 \in G$ такой, что для любого однородного $f \in B_{g_0}$ его степень сдвигается на g_0 , то есть $\delta(f) \in B_{g_0+g_0}$.

Элемент g_0 из предыдущего упражнения называется *степенью* однородного дифференцирования δ .

Упражнение 2.9. Пусть B – (конечно порождённая, без делителей нуля) G -градуированная алгебра и пусть δ – некоторое ненулевое дифференцирование на B . Тогда δ однозначно раскладывается в сумму *однородных компонент* $\delta = \sum_{g \in G} \delta_g$, где δ_g – однородное степени g .

Заметим, что разложение на однородные компоненты есть именно для дифференцирований, а не для ЛНД. То есть если изначальное дифференцирование δ локально нильпотентно, то однородные компоненты δ_g могут не быть ЛНД.

Пример 2.10. Пусть $B = \mathbb{K}[x, y]$, $G = \mathbb{Z}_2$. Пусть $B_0 = \mathbb{K}[x^2, y]$, $B_1 = xB_0$. (То есть мы положили $\deg x = 1$, $\deg y = 0$.) Легко видеть, что это задаёт \mathbb{Z}_2 -градуировку на B . Заметим, что $B = B[u, v]$, где $u = x + y$, $v = x - y$. Рассмотрим ЛНД $\delta = 2v \frac{\partial}{\partial u}$. Перепишем его в изначальных координатах: $\delta(x) = \delta(y) = x - y$, то есть

$$\delta = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial}{\partial y} = \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Легко видеть, что дифференцирование $x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ однородное степени 0, а дифференцирование $-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ однородное степени 1. Однако оба они не являются локально нильпотентными.

Однако в случае градуировки свободной абелевой группой можно утверждать, что если δ локально нильпотентно, то крайние компоненты разложения будут также ЛНД.

Теорема 2.11. (Зайденберг-Фленер) Пусть на B задана \mathbb{Z} -градуировка и пусть δ – локально нильпотентное дифференцирование. Пусть $\delta = \sum_{i=1}^k \delta_i$ – разложение на однородные компоненты. Тогда δ_i и δ_k – ЛНД.

Доказательство. Упражнение. Указание: рассматривать старший (младший) член. □

Следствие 2.12. Пусть на B задана \mathbb{Z}^n -градуировка и пусть δ – локально нильпотентное дифференцирование. Пусть $\delta = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \delta_\alpha$ – разложение на однородные компоненты. Рассмотрим выпуклую оболочку P всех таких α , что $\delta_\alpha \neq 0$. Пусть β – вершина многогранника P . Тогда δ_β – ЛНД.

Определение 2.13. Если алгебра B не допускает ненулевых ЛНД, то она называется *жёсткой*.

То, что B жёсткая эквивалентно тому, что $ML(B) = B$.

Следствие 2.14. Если на B не существует ненулевых однородных ЛНД, то алгебра B жёсткая.

Вернёмся к вычислению инварианта Макар-Лиманова. Если B допускает градуировку свободной группой, то зачастую исследование однородных ЛНД проще, чем всех. В принципе не верно, что для подсчёта $ML(B)$ достаточно рассмотреть только однородные дифференцирования, но особо удачно бывает, когда удаётся доказать для некоторой \mathbb{Z} -градуировки, что степени всех однородных ЛНД имеют один знак.

Пример 2.15. Рассмотрим поверхности Данилевского $S_{n,P} = \{x^n y = P(z)\}$, где $P \in \mathbb{K}[z]$, $\deg P \geq 2$. Алгебра регулярных функций на такой поверхности имеет вид $\mathbb{K}[x, y, z]/(x^n y - P(z))$. Данная алгебра допускает следующую градуировку $\deg x = 1$, $\deg y = -n$, $\deg z = 0$. Заметим, что на B существует следующее ЛНД ζ (однородное степени n):

$$\begin{cases} x \mapsto 0; \\ y \mapsto P'(z); \\ z \mapsto x^n. \end{cases}$$

При этом $\text{Ker } \zeta = \mathbb{K}[x]$. Есть два принципиально разных случая.

Случай 1: $n = 1$. В этом случае есть симметричное (относительно перестановки $x \leftrightarrow y$) ЛНД с ядром $\mathbb{K}[y]$. Значит, $ML(B) = \mathbb{K}$.

Случай 2: $n > 1$. Пусть δ – некоторое \mathbb{Z} -однородное ЛНД допустим, что $\deg \delta \leq 0$. Тогда

$$\deg(\delta(y)) = \deg y + \deg \delta \leq \deg y = -n < 0.$$

Однако из того, что $\deg(\delta(y))$ следует, что $y \mid \delta(y)$.

Лемма 2.16. Если $\delta \in LND(B)$ и $b \mid \delta(b)$, то $\delta(b) = 0$.

Доказательство. Пусть $\delta(b) = bs \neq 0$. Тогда $\nu_\delta(\delta(b)) = \nu_\delta(b) + \nu_\delta(s) \geq \nu_\delta(b)$. С другой стороны из определения следует, что $\nu_\delta(\delta(b)) = \nu_\delta(b) - 1$. Противоречие. Значит, $\delta(b) = 0$. □

Из этой леммы следует, что $\delta(y) = 0$. Применим ещё одну важную идею. **Присоединение элементов из ядра к полю.** Раз $\delta(y) = 0$, то данное ЛНД индуцирует (ненулевое в случае, когда δ не нулевое) ЛНД $\mathbb{K}(y)[x, z]/(x^n y - P(z))$. Мы обещали, что поле будет алгебраически замкнутым (что сейчас совершенно не важно), тогда рассмотрим не $\mathbb{K}(y)$, а его алгебраическое замыкание $\mathbb{L} = \mathbb{K}(y)$. Получается, что существует ненулевое ЛНД алгебры

$$C = \mathbb{L}[x, z]/(x^n y - P(z)) \cong \mathbb{L}[x, z]/(x^n - P(z)).$$

Замечание 2.17. Тут можно было поступить по-другому. После того, как мы сказали, что $\delta(y) = 0$, можно было добавить к идеалу многочлен $y - 1$ и получить ЛНД на $\mathbb{K}[x, y, z]/(x^n y - P(z), y - 1) \cong \mathbb{K}[x, z]/(x^n - P(z))$.

Заметим, что алгебра C может иметь делители нуля, но это не важно в нашем случае.

Лемма 2.18. Алгебра со степенью трансцендентности 1 над \mathbb{K} допускает ненулевое ЛНД тогда и только тогда, когда она изоморфна $\mathbb{K}[t]$.

Однако, $C \not\cong \mathbb{K}[t]$ (упражнение). Значит, не существует ненулевых ЛНД на C , а значит, не существует ненулевых ЛНД неположительной степени на B .

Пусть теперь δ – произвольное (не обязательно однородное) ЛНД алгебры B . Тогда $\delta = \sum_{i=l}^k \delta_i$. При этом δ_l – однородное ЛНД. Значит, $l > 0$. Таким образом

$$\delta(x) = \sum_{i=l}^k \delta_i(x), \text{ где } \deg(\delta_i(x)) = i + 1 > 1.$$

Значит, $x \mid \delta_i(x)$. Отсюда $x \mid \delta(x)$, то есть $\delta(x) = 0$. Следовательно, $x \in ML(B)$, то есть $ML(B) = \mathbb{K}[x]$.

Следствие 2.19. Алгебры $B_1 = \mathbb{K}[x, y, z]/(xy - z^2 + 1)$ и $B_2 = \mathbb{K}[x, y, z]/(x^2 y - z^2 + 1)$ не изоморфны.

Доказательство. Имеем $ML(B_1) = \mathbb{K} \not\cong \mathbb{K}[x] = ML(B_2)$. □

Замечание 2.20. Можно (например, установив явный изоморфизм) показать, что $B_1[t] \cong B_2[t]$. Этот пример даёт отрицательное решение обобщённой проблемы сокращения Зарисского.

Замечание 2.21. Аналогичным образом можно доказать, что $ML(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_k, y, z](x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m} y - P(z))) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$.

Задача 2.22. (На лекции не было, но задачу дать хочется побыстрее. То, что я пока-что не умею считать.) Найти $ML(\mathbb{K}[x, y_1, y_2, z]/(x^2 y_1 y_2 - z^2 + 1))$.

С этой задачей такая проблема: моё предположение, что ML этой алгебры равен $\mathbb{K}[x]$. Легко написать 2 ЛНД таких, что пересечение их ядер – это $\mathbb{K}[x]$. Можно ввести следующую \mathbb{Z} -градуировку: $\deg x = 1$, $\deg y_1 = -2$, $\deg y_2 = \deg z = 0$. Она достраивается до \mathbb{Z}^2 -градуировки (можно рассмотреть симметричную \mathbb{Z} -градуировку). И есть 2 базовых \mathbb{Z}^2 -однородных ЛНД (все остальные – это их реплики). Эти ЛНД имеют вид

$$\delta_1: \begin{cases} x \mapsto 0; \\ y_1 \mapsto 2z; \\ y_2 \mapsto 0; \\ z \mapsto x^2 y_2. \end{cases} \quad \text{и} \quad \delta_2: \begin{cases} x \mapsto 0; \\ y_1 \mapsto 0; \\ y_2 \mapsto 2z; \\ z \mapsto x^2 y_1. \end{cases}$$

И вроде как оба имеют неотрицательную степень по первой градуировке (и значит, $\delta_i(x) = 0$), а именно, $\deg \delta_1 = 2$, $\deg \delta_2 = 0$. Однако, если мы возьмём реплику второго ЛНД, то степень может стать отрицательной. Например, $\deg y_1 \delta_2 = -2$. Это не даёт возмозноть так же, как и раньше доказать, что $x \in ML(B)$.

5. Переход к присоединённой градуированной алгебре.

Как мы видели, бывает удобно разбираться с однородными ЛНД, если есть градуировка. Что же делать, когда её нет? Можно перейти к присоединённой градуированной алгебре, рассмотрев некоторую фильтрацию. Напомним нужные определения.

Определение 2.23. Пусть фиксированы линейные подпространства $U_i \subseteq B$ такие, что

- $U_i \subseteq U_{i+1}$;
- $\bigcup_{i \geq 0} U_i = B$;
- $\bigcap_{i \geq 0} U_i = 0$ (на самом деле мы будем рассматривать только фильтрации с нулевыми пространствами U_i для отрицательных i);
- если $a \in U_i$, $b \in U_j$, то $ab \in U_{i+j}$;

Тогда будем говорить, что на B задана фильтрация.

Определение 2.24. Присоединённой градуированной алгеброй (соответствующей данной фильтрованной алгебре) называется алгебра

$$\text{Gr } B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} U_i / U_{i-1}$$

с умножением $f \in U_i / U_{i-1}$, $g \in U_j / U_{j-1}$, тогда $f \cdot g = fg \in U_{i+j} / U_{i+j-1}$.

Алгебра $C = \text{Gr } B$ обладает \mathbb{Z} -градуировкой с однородными пространствами $C_i = U_i / U_{i-1}$.

Замечание 2.25. Алгебра $\text{Gr } B$ может быть с делителями нуля. При неудачно выбранной фильтрации она может быть даже с нулевым умножением.

Замечание 2.26. Если алгебры B была \mathbb{Z} -градуированной (с нулевыми отрицательными компонентами) и мы взяли следующую соответствующую фильтрацию: $U_i = \bigoplus_{j \leq i} B_j$, то $\text{Gr } B \cong B$.

Пусть $B = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$. Рассмотрим некоторую градуировку на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\deg x_i \geq 0$, и рассмотрим соответствующую фильтрацию: $V_i = \langle x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \mid \sum (a_j \deg x_j) \leq i \rangle$. Положим $U_i = \pi(V_i)$, где $\pi: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B$ – канонический гомоморфизм. Тогда U_i задают фильтрацию на B .

Упражнение 2.27. Если $I = (f)$, то $\text{Gr } B \cong \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]/(\bar{f})$, где \bar{f} , где \bar{f} – максимальная однородная компонента f (в смысле нашей градуировки).

Замечание 2.28. Этот факт обобщается на большее количество образующих. Но там нельзя сказать, что всегда нужно взять в качестве образующих идеала для $\text{Gr } B$ только старшие компоненты образующих идеала I . Нужно взять верную систему образующих. Например, базис Грёбнера относительно обнородно-лексикографического порядка, где однородность понимается в смысле нашей градуировки.

Упражнение 2.29. Пусть для некоторого ЛНД δ алгебры B существует такое k , что $\delta(U_m) \subseteq U_{m+k}$ для всех m . Тогда формула $\tilde{\delta}(b + B_{i-1}) = \delta(b) + B_{i+k-1}$ при $b \in B_i$ задаёт ЛНД на $\text{Gr } B$. И если k минимально с таким свойством, то $\tilde{\delta}$ ненулевое степени k .

Разберём пример вычисления инварианта Макара-Лиманова с помощью этой идеи.

Пример 2.30. Пусть $B = \mathbb{K}[x, y, z]/(x^n y - P(x, z))$, где $P(x, z) = z^d + a_{d-1}(x)z^{d-1} + \dots + a_0(x)$ и $n, d > 1$. Докажем, что $ML(B) = \mathbb{K}[x]$. Для этого рассмотрим следующую градуировку на $\mathbb{K}[x, y, z]$: $\deg x = 0, \deg y = d, \deg z = 1$. Тогда $\text{Gr } B \cong \mathbb{K}[u, v, w]/(u^n v - w^d)$ – градуированная алгебра, $\deg u = 0, \deg v = d, \deg w = 1$. Как мы знаем, $ML(\text{Gr } (B)) = \mathbb{K}[u]$. Пусть ζ – некоторое ЛНД $\text{Gr } (B)$. Тогда $\zeta(u) = 0$ и, присоединяя u к полю, получаем дифференцирование $\mathbb{L}[v, w]/(u^n v - w^d) \cong \mathbb{L}[v, w]/(v - w^d) \cong \mathbb{L}[w]$. На этой алгебре все ЛНД имеют вид $c \frac{\partial}{\partial w}$. Отсюда следует, что любое ЛНД на $\mathbb{K}[u, v, w]/(u^n v - w^d)$ имеет вид $f(x)\zeta_0$, где ζ_0 имеет вид

$$\zeta_0: \begin{cases} u \mapsto 0; \\ v \mapsto dw^{d-1}; \\ w \mapsto u^n. \end{cases}$$

Легко видеть, что все эти ЛНД имеют степень -1 по градуировке $\deg u = 0, \deg v = d, \deg w = 1$.

Лемма 2.31. Пусть $\delta \in LND(B)$. Существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $\delta(U_i) \subseteq U_{i+k}$ для всех i .

Выберем минимальное такое k . По упражнению 2.29 существует ненулевое однородное ЛНД степени k на $\text{Gr } B$. Значит, $k = -1$. Тогда $x \in \delta(U_0) \subseteq U_{-1} = \{0\}$. Это показывает, что $x \in ML(B)$.

С другой стороны, можно выписать следующее ЛНД:

$$\begin{cases} x \mapsto 0; \\ y \mapsto \frac{\partial P(x, z)}{\partial z}; \\ z \mapsto x^n. \end{cases}$$

Его ядро – это $\mathbb{K}[x]$. Таким образом, $ML(B) = \mathbb{K}[x]$.

6 Утверждения типа АВ-теоремы и АВС-теоремы

Это будет кратко упомянуто на следующей лекции, а пока предлагаю обратить внимание на постерный доклад Вероники Киктевой, он про это.