Lectura 2.1.: Repaso ecuaciones diferenciales

Introducción a las redes neuronales informadas por física
Especialización en Inteligencia Artificial

B. A. Tourn[1] C. G. Massobrio[2]

[1]CIT-CONICET-UNRaf

[2]Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Octubre 2024

Table of Contents

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

$$F(t, u(t), u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), \cdots, u^{(m)}(t)) = 0 \tag{1}$$

- EDO de orden m, donde F representa una función genérica
- Resolver la EDO en el intervalo $t \in [0, T]$ implica encontrar un mapeo $t \to u(t) \in \mathbb{R}$ tal que u y todas sus derivadas satisfagan la EDO en el intervalo propuesto
- Sistemas de ODEs: en lugar de u tenemos $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_N(t))$.

.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

$$F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y), \cdots$$
$$u_{xx}(x,y), u_{xy}(x,y), u_{yx}(x,y), u_{yy}(x,y)) = 0 \quad (2)$$

- EDP de orden 2
- Resolver la EDP implica encontrar un mapeo $(x, y) \to u(x, y) \in \mathbb{R}$ tal que u y todas sus derivadas satisfagan la EDP para todos los parámetros admisibles
- Sistemas de EDPs: en lugar de u tenemos $\boldsymbol{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_N(x, y))$.

Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

Un caso de interés es el de EDPs que dependen tambien de la variable tiempo t, y que se escriben de manera genérica como

$$u_t + F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), \cdots \\ u_{xx}(x, y), u_{xy}(x, y), u_{yx}(x, y), u_{yy}(x, y)) = 0 \quad (3)$$

La EDPs puede incluir también derivadas respecto al tiempo de orden superior.

Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

- Se suele referir a las EDP como ecuaciones de “Física Matemática” porque describen fenómenos físicos como vibraciones, elasticidad, electromagnetismo, sismología, mecánica cuántica, hidro- y aerodinamica, etc.
- También describen fenómenos en otros campos científicos como matemática financiera, química, ciencias de la computación, etc.

Concepto de “problema”

Consideremos algunas EDPs que depeden de constantes arbitrarias:

- Sea $u_x = 0$. La solución es de la forma $u(x, y) = \phi(y)$
- Sea $v_{xx} = 0$. La solución es de la forma $v(x, y) = \rho(y)x + \nu(y)$.
- Sea $w_{xy} = 0$. La solución es de la forma $w(x, y) = f(x) + g(y)$.
- $\phi, \psi\, \rho, \nu, f, g$: son todas funciones arbitrarias de una o dos variables según el caso.
- Observamos que las soluciones a las EDPs no dependen solo de constantes arbitrarias, sino tambien de funciones arbitrarias de $n - 1$ variables.

Concepto de "problema"

Para seleccionar soluciones adecuadas, necesitamos algunas condiciones extra denominadas "problemas". Algunos típicos son:

- **Problemas de Valores de Borde (PVB):** las condiciones se imponen sobre las fronteras $\partial\Omega$ del dominio espacial Ω, por ejemplo $u|_{\partial\Omega} = \phi \rightarrow$ "Condiciones de borde".
- **Problemas de Valores Iniciales (PVI):** una de las variables es interpretada como tiempo t y se imponen condiciones sobre algun instante, por ejemplo $u|_{t=t_0} = u_0 \rightarrow$ "Condición inicial".
- **Problemas de Valores Iniciales y de Borde (PVIB):** combina los dos casos previos en uno.

.UBA fiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

Condiciones de borde (CB) y condición inicial (CI)

Tipo	EDO ($x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$)	EDP ($\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$)
Dirichlet	$u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$u(\boldsymbol{x})\big\vert_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$
Neumann	$u'(a) = \alpha,\ u'(b) = \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\frac{\partial u}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\Big\vert_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$
Robin	$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = \alpha$ $c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{R}$	$c_1 u(\boldsymbol{x}) + c_2 \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = \alpha,\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ $c_1, c_2, \alpha \in \mathbb{R}$
Cauchy	$u(a) = \alpha,\ u'(a) = \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$u(\boldsymbol{x}) = \alpha,\ \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = \beta,\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Problemas bien y mal colocados

En general buscamos que las soluciones a las ED (junto con sus restricciones) cumplan las "condiciones de Hadamard":

- Existencia
- Unicidad
- Estabilidad

Si este es el caso, el problema se encuentra "bien colocado" (well-posed). En caso contrario, se conoce como "mal colocado" (ill-posed).

Problemas directos e inversos

- **Problemas directos:** Conocemos el valor de los coeficientes, el término independiente, las condiciones de borde e iniciales, y hallamos $u(x, y, \cdots)$. *El descrito es un problema bien colocado (en general)*.
- **Problemas inversos:** Desconocemos el valor de alguno de los coeficientes, o del término independiente, o de alguna CB o CI, pero conocemos la solución u en algún punto $(x_i, y_i, \cdots)$. *El descrito es un problema mal colocado*.

.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

Ecuaciones lineales

- Ecuación lineal de 2do orden no homogenea con coeficientes constantes:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x, y) \tag{4}$$

- Si $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ en una región del plano xy, la ecuación es de 2do orden en esa región. Allí, puede establecerse la analogía con las secciones cónicas:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \cdots = 0 \tag{5}$$

- Pueden clasificarse las EDPs de 2do orden en **elípticas**, **parabólicas** e **hiperbólicas** de acuerdo al valor del discriminante $B^2 - AC$

.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

Ecuaciones lineales

Tipo	$B^2 - AC$	Pueden expresarse como	Ejemplo
Elípticas	< 0	$u_{xx} + u_{yy} + \cdots = 0$	Ec. de Laplace
Parabólicas	$= 0$	$u_{xx} + \cdots = 0$	Ec. del calor
Hiperbólicas	> 0	$u_{xx} - u_{yy} + \cdots = 0$	Ec. de onda

Esta clasificación también vale para ecuaciones no lineales.

.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

Ecuaciones no lineales

- **Semi-lineales**

$$a_1(x,y)u_{xx} + a_2(x,y)u_{xy} + a_3(x,y)u_{yx} + a_4(x,y)u_{yy} + f(u_x, u_y, u, x, y) = 0 \quad (6)$$

- **Quasi-lineales**

$$a_1(u_x,u_y,u,x,y)u_{xx} + a_2(u_x,u_y,u,x,y)u_{xy} + a_3(u_x,u_y,u,x,y)u_{yx} + a_4(u_x,u_y,u,x,y)u_{yy} + f(u_x, u_y, u, x, y) = 0 \quad (7)$$

- **Totalmente no lineales**

Principales métodos

- Analíticos y semi-analíticos: separación de variables, método de las características, cambio de variables, principio de superposición, series de Fourier, transformadas de Fourier/Laplace, etc.
- Métodos variacionales
- Métodos computacionales "clásicos": Runge-Kutta, FD, FEM, FVM, EFG, etc.
- **Deep Learning: data-driven o basados en física (ej.: PINN)**

Referencias

- Wikipedia.
- Olver, P. J. (2014). Introduction to partial differential equations (Vol. 1). Berlin: Springer.
- Evans, L. C. (2022). Partial differential equations (Vol. 19). American Mathematical Society.
- Ivrii, Victor (2016). Partial Differential Equations, Departamento de Matemática, Universidad de Toronto. Curso APM346.

.UBAfiuba FACULTAD DE INGENIERÍA

¿Dudas o preguntas?