

Trabajo integrador: Problema inverso de identificación de módulo de corte en un material hiperelástico*

Dr. Ing. Benjamin A. TOURN - Ing. Carlos G. MASSOBRIO

Martes 22 de Octubre - B52024

1 Enunciado

Los problemas inversos de identificación de módulo en un material no homogéneo emergen en escenarios prácticos de ensayos no destructivos, incluyendo imágenes médicas (elastografía), aseguramiento de calidad, entre otros [1, 2]. En tales casos, se busca identificar la distribución del módulo de una pieza de material no homogéneo mediante mediciones de campo completo de desplazamientos o de esfuerzos mecánicos. El objetivo de este trabajo es implementar una solución de PINN para identificar la distribución de tal módulo.

Considere el escenario biomédico de elastografía. El objetivo es detectar e identificar tejidos enfermos que están rodeados por tejidos normales. Para ello, reconstruimos la distribución del módulo de los tejidos blandos a través de los datos de desplazamiento de campo completo del tejido bajo una carga cuasi-estática. Al examinar el cambio local del módulo, podemos inferir la existencia de tejidos enfermos. Considere un problema de valor de borde de deformación plana para sólidos hiperelásticos. La figura 1 (izq.) muestra el problema en la configuración de referencia/no deformada. Un tejido de forma cuadrada $OABC$ se ubica en $[-0,5, 0,5] \otimes [-0,5, 0,5]$ en el plano X_1 - X_2 . La arista OC se encuentra fija en la dirección X_1 ; el vértice inferior izquierdo O se encuentra también fijo en dirección X_2 ; la arista derecha AB se encuentra sujeta a una carga uniforme $P_0 = 0,3$ en la dirección X_1 . El tejido se modela como un material incompresible Neo-Hookeano [3] con módulo de corte $\mu(X_1, X_2)$ desconocido. Se cuenta con mediciones de desplazamiento del tejido en una grilla uniforme de 21×21 puntos distribuida en el dominio (ver figura 1, derecha). Con tales datos, el objetivo es estimar $\mu(X_1, X_2)$ mediante PINN.



Figura 1: Izquierda: configuración del problema. Derecha: Campo completo de desplazamientos.

Las ecuaciones de gobierno del problema se resumen a continuación. La configuración de referencia/no deformada se identifica como X . Con la carga aplicada, la configuración actual/deformada es $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$,

*Basado en la contribución del Dr. Enrui Zhang de la Universidad de Brown para curso NVIDIA Modulus

por lo que el campo de desplazamientos es $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, en descripción Lagrangiana con \mathbf{X} como variable independiente [3].

El primer paso es derivar el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} a partir del campo de desplazamientos \mathbf{u} [3]:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Notar que para materiales incompresibles, la condición de incompresibilidad debe satisfacerse:

$$\det \mathbf{F} = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = 1. \quad (1.2)$$

El segundo paso es analizar el módulo de corte $\mu(\mathbf{X})$ para derivar el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} a partir del gradiente de deformación \mathbf{F} :

$$P_{11} = -pF_{11}^{-1} + \mu F_{11}, \quad (1.3a)$$

$$P_{12} = -pF_{21}^{-1} + \mu F_{12}, \quad (1.3b)$$

$$P_{21} = -pF_{12}^{-1} + \mu F_{21}, \quad (1.3c)$$

$$P_{22} = -pF_{22}^{-1} + \mu F_{22}, \quad (1.3d)$$

donde

- $p = p(X_1, X_2)$ es el campo de presión hidrostática, que es una variable de estado independiente del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ (es decir, p no puede ser derivado de \mathbf{u} , a diferencia de \mathbf{F} y \mathbf{P}).
- F_{ij}^{-1} refiere al elemento (i, j) de \mathbf{F}^{-1} , no a $1/F_{ij}$.
- $\mu = \mu(X_1, X_2)$ es el campo del módulo de corte. Para materiales incompresibles Neo-Hookeanos, este parámetro es el único que describe al material.
- Notar que el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} no es, en general simétrico ($P_{12} \neq P_{21}$). De manera similar, el gradiente de deformación \mathbf{P} tampoco es simétrico.

Finalmente, las ecuaciones de equilibrio (sin fuerzas de cuerpo) son:

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial X_2} = 0, \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial X_2} = 0, \quad (1.4b)$$

mientras que las ecuaciones de borde son:

$$\text{Izquierda: } u_1|_{OC} = 0, \quad P_{21}|_{OC} = 0, \quad u_2|_O = 0, \quad (1.5a)$$

$$\text{Derecha: } P_{21}|_{AB} = 0, \quad P_{22}|_{AB} = P_0, \quad (1.5b)$$

$$\text{Superior e inferior: } P_{12}|_{OA} = P_{22}|_{OA} = P_{12}|_{BC} = P_{22}|_{BC} = 0. \quad (1.5c)$$

2 Dataset

Los datos se encuentran en forma de arreglo de tamaño (441, 4) en el archivo `data.npy`. El número de filas refiere a los puntos sobre lo que se tienen registro de datos ($21 \times 21 = 441$), mientras que las cuatro columnas corresponden con x_1 , x_2 , u_1 y u_2 , respectivamente.

3 Actividades

1. Diseñar un modelo PINN [4] acorde para resolver este problema. Piense acerca de las siguientes interrogantes (ver la sección de *hints*):
 - ¿Qué campos mecánicos deberían ser aproximados directamente con DNNs?
 - ¿Qué componentes deberían incluirse en la función de pérdida?
2. Obtener el módulo de corte $\mu(X_1, X_2)$. Asegúrese de utilizar los datos de desplazamientos de la grilla de 21×21 puntos. Compare su predicción $\hat{\mu}(X_1, X_2)$ con la solución *ground-truth* dada por la siguiente expresión:

$$\mu^*(X_1, X_2) = 0,333 + 0,05[(X_1 + 1)^2 + (X_2 + 0,5)^2] + 0,133 \exp\{-22,22[(X_1 - 0,1)^2 + (X_2 - 0,2)^2]\} \quad (3.1)$$

¿Cuál es el error en sus predicciones?

3. Remueva la pérdida para la condición de borde $P_{21}|_{OC} = 0$ en su modelo PINN y resuelva el problema nuevamente. Debería encontrar que la predicción es similarmente precisa en comparación con los resultados previos. Sin embargo, la remoción de tal restricción torna el problema de valores de borde en una problema mal colocado. ¿Por qué los resultados son precisos?
4. Provea al modelo PINN con menor cantidad de datos de desplazamientos, es decir a partir de grillas 11×11 y 6×6 . ¿Cómo cambia el desempeño del modelo?

4 Hints

- u_1, u_2, p y μ deberían servir como entradas directas de la red neuronal. En particular, p no puede ser derivada de u_1 y u_2 en materiales incompresibles, por lo cual es importante que tal parámetro sea incluido.
- La función de pérdida debería incluir factores de penalización en los términos de satisfacción de PDEs, condiciones de borde, datos, e incompresibilidad.

Referencias

- [1] Enrui Zhang, Minglang Yin, and George Em Karniadakis. Physics-informed neural networks for nonhomogeneous material identification in elasticity imaging. *arXiv preprint arXiv:2009.04525*, 2020.
- [2] Enrui Zhang, Ming Dao, George Em Karniadakis, and Subra Suresh. Analyses of internal structures and defects in materials using physics-informed neural networks. *Science advances*, 8(7):eabk0644, 2022.
- [3] Raymond W Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation, 1997.
- [4] Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George E Karniadakis. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics*, 378:686–707, 2019.