Trabajo integrador: Resolución de la ecuación de Boussinesq utilizando PINN con diferentes funciones de activación

Dr. Ing. Benjamin A. TOURN - Ing. Carlos G. MASSOBRIO

Martes 22 de Octubre - B52024

1 Enunciado

En dinámica de fluidos, la aproximación de Boussinesq es una estrategia de modelado válida para ondas acuáticas más bien largas y débilmente no lineales [1]. Fue derivada originalmente por Joseph Boussinesq en respuesta a la observación de John Scott Russell en 1871 sobre la onda de traslación (conocida como onda solitaria o solitón). El artículo científico de Boussinesq introduce las expresiones ahora conocidas como ecuaciones de Boussinesq [2].

Para ondas acuáticas en el flujo de un fluido incompresible e irrotacional en el plano (x, z), las condiciones de borde en la superficie libre de elevación $z = \eta(x, t)$ son [3]:

$$\frac{\eta}{t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} - w = 0, \tag{1.1a}$$

$$\frac{\varphi}{t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = 0, \tag{1.1b}$$

donde:

- u es la componente de velocidad del flujo horizontal: $u = \partial\varphi/\partial x$,
- w es la componente de velocidad de flujo vertical: $w = \partial\varphi/\partial z$,
- g es la aceleración de la gravedad.

Ahpra la aproximación de Boussinesq para el potencial de velocidad φ, dado arriba, se aplica en estas condiciones de borde. Además, en las ecuaciones resultantes solo se retienen los términos lineales y cuadráticos con respecto a η y u_b (con $u_b = \partial\varphi_b/\partial x$ siendo la velocidad horizontal en el lecho $z = -h$). Al asumir que los términos cúbicos y de mayor orden son despreciables, además de otras aproximaciones no especificadas aquí, las ecuaciones de arriba pueden ser reducidas a una única ecuación en derivadas parciales para la superficie libre de elevación η [2]:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{h} + \frac{1}{3}h^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) = 0, \tag{1.2}$$

que, luego de adimensionalizar, queda [4]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(3\psi^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right) = 0, \tag{1.3}$$

con las magnitudes adimensionales de superficie de elevación, tiempo, y posición horizontal dadas respectivamente por:

$$\psi = \frac{\eta}{2h}, \quad \tau = \sqrt{3}t\sqrt{\frac{g}{h}}, \quad \xi = \sqrt{3}\frac{x}{h}.$$

2 Actividades

Las funciones de activación juegan un rol esencial en el proceso de aprendizaje de cualquier red neuronal comúnmente empleada en gran cantidad de problemas [5]. Resolver la ecuación (1.3) mediante PINN:

1. Comparar los resultados para diferentes funciones de activación: $\phi(x) = \text{ReLU}(x)$, $\phi(x) = \tanh(x)$ y $\phi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
2. Comparar los resultados entre funciones de activación fijas y adaptativas.

Referencias

[1] Wikipedia. Boussinesq approximation (water waves).

[2] Jean Boussinesq. *Essai sur la théorie des eaux courantes.* Imprimerie nationale, 1877.

[3] Maarten W Dingemans. Water wave propagation over uneven bottoms. 1994.

[4] Robin Stanley Johnson. *A modern introduction to the mathematical theory of water waves.* Number 19. Cambridge university press, 1997.

[5] Ameya D Jagtap and George Em Karniadakis. How important are activation functions in regression and classification? a survey, performance comparison, and future directions. *Journal of Machine Learning for Modeling and Computing*, 4(1), 2023.