Trabajo práctico integrador: Resolución del problema directo e inverso de propagación de ondas*

Dr. Ing. Benjamin A. TOURN - Ing. Carlos G. MASSOBRIO

Martes 22 de Octubre - B52024

1 Enunciado

La propagación de ondas es un tema ampliamente investigado principalmente debido a sus diversas aplicaciones físicas. El problema de onda unidimensional de segundo orden se da por:

$$u = \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2(x)u_{xx}(x,t) & x \in [l_1, l_2], t \in (0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [l_1, l_2] \\ u(x,0) = v_0(x) & x \in [l_1, l_2] \\ u(x,t) = f(x,t) & x \in \Omega_1, t \in [0,T] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = g(x,t) & x \in \Omega_2, t \in [0,T] \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \{l_1, l_2\},\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\,\} \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $u(x,t)$ es la amplitud de la onda o la presión acústica. Para condiciones iniciales dadas (u_0, v_0) y condiciones de contorno (f, g, para los tipos Dirichlet y Neumann respectivamente), el problema de la onda 1.1 está bien colocado (pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales resultan en pequeñas perturbaciones en la solución).

Se ha desarrollado un *solver* explícito de elementos finitos lineales capaz de obtener la solución numérica del problema que se describe a continuación, que se adoptará como solución *ground-truth*. Por lo tanto, se utilizará tanto para comparar las soluciones obtenidas mediante PINN como para sintetizar datos rotulados de entrenamiento.

2 Dataset

El *solver* utiliza una discretización espacial $\Delta x = 10^{-3}$, mientras que la discretización temporal emplea $\Delta t = \frac{0{,}1\Delta x}{c}$. Se utilizan $\gg 8000$ pasos de tiempo para visualizar una reflexión completa de la onda luego que el impulso alcance el límite izquierdo. Con él, se resolvió la ecuación 1.1 con las siguientes características:

- Velocidad de onda $c = 1$ y dominio $\Omega = [0, 1]$.
- Las condiciones de borde son de tipo Dirichlet configuradas en 0: $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

*Basado en la contribución del Dr. Adar Kahana de la Universidad de Brown para curso NVIDIA Modulus

- La condición inicial es un impulso unitario centrado en $x = 0{,}5$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 0{,}45, \\ 20(x - 0{,}45) & \text{si} \quad 0{,}45 \leq x < 0{,}5, \\ 20(0{,}55 - x) & \text{si} \quad 0{,}5 \leq x < 0{,}55, \\ 0 & \text{si} \quad 0{,}55 \leq x < 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

La figura 1 muestra los resultados obtenidos por el *solver* para distintos instantes de tiempo.

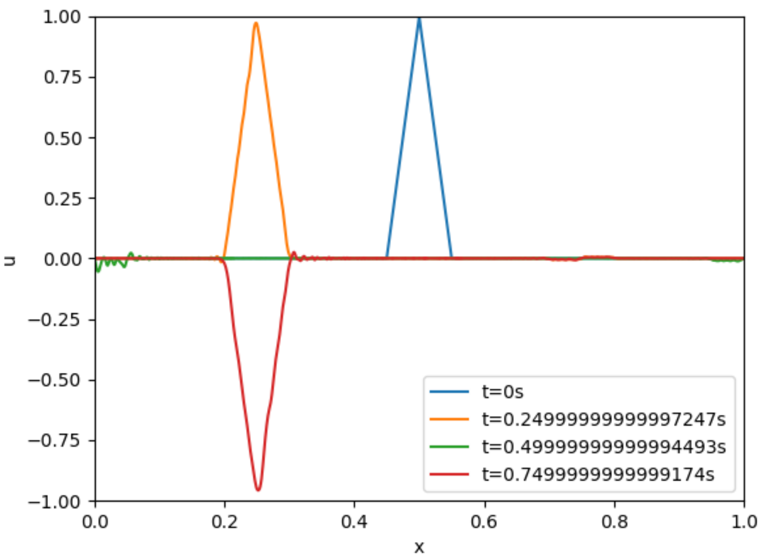

Figura 1: Solución *ground-truth* para diversos instantes de tiempo.

3 Tareas

1. Resolver mediante PINN y comparar con una gráfica los resultados con los obtenidos mediante el *solver*.
2. *Simulando sensores*: De la solución provista por el *solver*, extraer los valores de 19 ubicaciones distribuidas uniformemente en el eje x: $x = 5\Delta x, x = 10\Delta x, ..., x = 1 - 5\Delta x$. Utilizar estos puntos para todos los pasos de tiempo. El dataset para entrenar el modelo PINN consiste en $\{u(x_k, t_n)\}_{k=1,n=1}^{19,N_t}$, donde N_t es el total de pasos de tiempo. Graficar la salida del modelo PINN en $t = 0$ y ver si se puede localizar fácilmente el impulso inicial en $x = 0{,}5$.
3. Ahora, en lugar de usar sensores distribuidos uniformemente para armar el dataset, usar sensores distribuidos aleatoriamente. Luego, cambiar el número de sensores y encontrar el número mínimo de sensores que puedan localizar el impulso inicial. Asegurar de que los resultados sean consistentes (no una elección afortunada de la ubicación de los sensores).

Referencias

[1] Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George E. Karniadakis. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics*, 378:686–707, 2019.

[2] Ameya D. Jagtap and George E. Karniadakis. Extended physics-informed neural networks (xpinns): A generalized space-time domain decomposition based deep learning framework for nonlinear partial differential equations. *Communications in Computational Physics*, 28(5), 2020.