Лекции по модальной логике

Лекция 9. Синтаксис и семантика пропозициональной динамической логики

А. М. Миронов

Содержание

Пропозициональная динамическая логика (называемая также **логикой программ** и обозначаемая знакосочетанием PDL, которое является аббревиатурой её английского названия: Propositional Dynamical Logic) возникла в середине семидесятых годов в работах Пратта (Pratt V.R.), Фишера (Fisher M.J.) и Ладнера (Ladner R.E.).

1 Синтаксис PDL

1.1 Формулы и программы

Пусть заданы

1. счётное множество PV, элементы которого называются **пропозициональными переменными**,
2. и счётное множество ΠV, элементы которого называются **программными переменными**.

Определим индуктивно множество Fm **формул** PDL и множество Pg **программ** PDL следующим образом:

1. (a) Каждая пропозициональная переменная $p \in PV$ принадлежит множеству Fm.
   (b) Символы $\top$ ("истина") и $\bot$ ("ложь") принадлежат множеству Fm.
   (c) Если A и B принадлежат Fm то знакосочетания $\neg A$, $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ тоже принадлежат Fm.
2. (a) Каждая программная переменная $\pi \in \Pi V$ принадлежит множеству Pg.
   (b) Если α и β принадлежат Pg, то знакосочетания $\alpha \circ \beta$, $\alpha \vee \beta$, α^* тоже принадлежат Pg.
3. Если $A \in Fm$, то знакосочетание $A?$ принадлежит множеству Pg.
4. Если $\alpha \in Pg$ и $A \in Fm$, то знакосочетание $[\alpha]A$ принадлежит множеству Fm.

Для каждой программы $\alpha \in Pg$ и каждой формулы $A \in Fm$ знакосочетание $\langle\alpha\rangle A$ является сокращённой записью формулы $\neg[\alpha]\neg A$.

Если X – формула или программа PDL, то

1. знакосочетание $Sf(X)$ обозначает совокупность всех подформул формулы или программы X,

   (**подформулой** называется произвольное подслово слова X, являющееся формулой PDL)

2. а знакосочетание $Sp(X)$ обозначает совокупность всех подпрограмм формулы или программы X

   (**подпрограммой** называется произвольное подслово слова X, являющееся программой PDL).

Для каждого $S \subseteq Fm$ знакосочетание $Sf(S)$ обозначает совокупность всех подформул всех формул из S.

1.2 Неформальное объяснение смысла формул и программ PDL

Формулы и программы PDL предназначены для моделирования последовательных недетерминированных вычислительных процессов.

Под **последовательным недетерминированным вычислительным процессом** (называемом ниже просто **процессом**) понимается некая сущность, обладающая способностью порождать последовательности действий (называемые **вычислениями**), где под **действием** понимается процедура перехода от одного состояния вычислительной системы к другому её состоянию.

Предполагается, что каждое вычисление $(a_1, \ldots, a_n)$ любого процесса удовлетворяет следующему условию: для каждого $i = 1, \ldots, n \perp 1$ то состояние, в которое переходит вычислительная система после выполнения действия a_i, совпадает с тем состоянием, с которого начинается выполнение действия a_{i+1}.

1.2.1 Неформальное объяснение смысла программ PDL

Каждая программа $\alpha \in Pg$ является моделью некоторого процесса $p(\alpha)$.

Предполагая, что процессы, соответствующие программным переменным, уже определены, процессы, соответствующие остальным программам PDL, определяются индукцией по структуре программ:

1. $p(\alpha \circ \beta)$ функционирует путём последовательного выполнения $p(\alpha)$ и $p(\beta)$, т.е. сначала выполняется $p(\alpha)$, и после его завершения выполняется $p(\beta)$,

2. $p(\alpha \vee \beta)$ функционирует следующим образом:

   (a) сначала происходит недетерминированный выбор того, какой из процессов: $p(\alpha)$ или $p(\beta)$ будет исполняться,

   (b) и затем в соответствии с данным выбором исполняется либо $p(\alpha)$, либо $p(\beta)$,

3. $p(\alpha^*)$ функционирует следующим образом:

(a) сначала недетерминированно выбирается число $n \geq 0$ итераций исполнения процесса $p(\alpha)$

(b) и затем n раз исполняется процесс $p(\alpha)$.

4. $p(A?)$ функционирует следующим образом:

   (a) вычисляется значение формулы A

   (b) если формула A истинна, то функционирование процесса $p(A?)$ успешно завершается, а если формула A ложна, то происходит аварийная остановка.

   (таким образом, после исполнения процесса $p(A?)$ система переходит в то же состояние x, в котором она находилась в начале исполнения данного процесса, при условии, что формула A в состоянии x истинна)

Таким образом, для каждой программы $\alpha \in Pg$ и каждого состояния x вычислительной системы определено не одно, а некоторое множество состояний, в которые может перейти система после исполнения процесса $p(\alpha)$, начинающегося в состоянии x (т.е. процесс $p(\alpha)$ может исполняться в системе не одним, а несколькими способами).

1.2.2 Неформальное объяснение смысла формул PDL

Для каждой формулы $A \in Fm$ и каждого состояния x вычислительной системы определено: истинна формула A в состоянии x или ложна.

Предполагая, что для каждой пропозициональной переменной $p \in PV$ и каждого состояния x истинность или ложность p в x уже определена, истинность или ложность остальных формул PDL в состоянии x определяется индукцией по структуре формул:

1. истинность/ложность формул вида $\neg A$, $A \ \& \ B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ в состоянии x определяется стандартным образом,

2. формула $[\alpha]A$ истинна в состоянии x тогда и только тогда, когда после **каждого** исполнения процесса $p(\alpha)$, начинающегося из состояния x, формула A будет истинной в том состоянии, в которое перейдёт система после исполнения процесса $p(\alpha)$,

3. формула $\langle\alpha\rangle A$ истинна в состоянии x тогда и только тогда, когда **существует** такое исполнение процесса $p(\alpha)$, начинающееся из состояния x, что формула A будет истинной в том состоянии, в которое перейдёт система после исполнения процесса $p(\alpha)$.

2 Аксиомы и правила вывода PDL

2.1 Аксиомы PDL

Ниже приводится список схем аксиом PDL. В данных схемах символы A и B обозначают произвольные формулы PDL, а символы α и β – произвольные программы PDL.

Классические тавтологии:

Каждая формула PDL, не содержащая программ и являющаяся классической пропозициональной тавтологией, является аксиомой PDL.

Аксиомы регулярности:

$[\alpha](A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow ([\alpha]A \mathbin{\&} [\alpha]B)$

Аксиомы нормальности:

$[\alpha]\top$

Comp:

$[\alpha \circ \beta]A \leftrightarrow [\alpha][\beta]A$

Un:

$[\alpha \vee \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \mathbin{\&} [\beta]A$

Test:

$[A?]B \leftrightarrow (A \to B)$

Mix:

$[\alpha^*]A \to (A \mathbin{\&} [\alpha][\alpha^*]A)$

Ind:

$A \mathbin{\&} [\alpha^*](A \to [\alpha]A) \to [\alpha^*]A$

2.2 Правила вывода PDL

Modus Ponens:

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Sub: (подстановка)

$$\frac{A}{A(B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n)}$$

где $B_1, \ldots, B_n$ – произвольные формулы из множества Fm, формула $A(B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n)$ получается подстановкой для каждого $i = 1, \ldots, n$ формулы B_i вместо всех вхождений переменной p_i в формулу A,

RE: **(эквивалентная замена)**

$$\frac{A \leftrightarrow B}{[\alpha]A \leftrightarrow [\alpha]B}$$

2.3 Формулы, выводимые в PDL

Формула $A \in Fm$ называется **выводимой** в PDL, если существует последовательность $A_1, \dots, A_n$ формул PDL, такая, что для каждого $i = 1, \dots, n$ формула A_i либо является аксиомой PDL, либо получена по одному из правил вывода PDL из формул данной последовательности, имеющих меньшие номера.

Тот факт, что формула A выводима в PDL, обозначают знакосочетанием $A \in PDL$.

Нетрудно установить, что для каждой формулы A в мономодальном языке, выводимой в логике K, формула PDL $A([\alpha]/\Box)$, получаемая из A заменой всех входящих в A символов $\Box$ на знакосочетание $[\alpha]$ ($\alpha \in Pg$), будет выводима в PDL.

3 Модели PDL

3.1 Определение динамической модели

Динамической моделью называется произвольная тройка
$\Delta = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$, где

1. W – некоторое непустое множество, элементы которого называются **состояниями** (или **точками**),

2. $\{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}$ – совокупность бинарных отношений на множестве W, индексированных программами PDL, и удовлетворяющих следующим условиям:

   (a) $R_{\alpha \vee \beta} = R_\alpha \cup R_\beta$,

   (b) $R_{\alpha \circ \beta} = R_\alpha \circ R_\beta$,
   ($R_\alpha \circ R_\beta$ есть обычное произведение бинарных отношений R_α и R_β),

   (c) $R_{A?} = \{(x, x) \mid x \in \varphi(A)\}$
   (определение функции φ см. ниже)

   для каждой программы $\alpha \in Pg$ отношение R_α называется **отношением перехода**, связанным с программой α,

3. φ есть отображение вида $\varphi : Fm \to \mathcal{P}(W)$ (называемое **оценкой**), удовлетворяющее следующим условиям:

(a) $\varphi(\top) = W$, $\varphi(\bot) = \emptyset$,

(b) $\varphi(\neg A) = W \setminus \varphi(A)$,

(c) $\varphi(A \mathbin{\&} B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$,

(d) $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$,

(e) $\varphi(A \to B) = \varphi((\neg A) \vee B)$,

(f) $\varphi(A \leftrightarrow B) = \varphi((A \to B) \mathbin{\&} (B \to A))$,

(g) $\varphi([\alpha]A) = \{x \in W \mid R_\alpha(x) \subseteq \varphi(A)\}$
(Для каждого подмножества $V \subseteq W$ и каждой программы $\alpha \in Pg$ подмножество $\{x \in W \mid R_\alpha(x) \subseteq V\}$ будет обозначаться ниже символом $[\alpha](V)$. Используя данное обозначение, можно переписать условие, содержащееся в данном пункте, следующим образом: $\varphi([\alpha]A) = [\alpha](\varphi(A))$.)

Если отношения перехода динамической модели $\Delta = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$ удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\forall \alpha \in Pg \quad R_{\alpha^*} = (R_\alpha)^*,$$

то Δ называется **правильной динамической моделью**.

(Напомним, что для каждого бинарного отношения R символ R^* обозначает рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R, т.е. $R^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup\limits_{n \geq 0} R^n$.)

3.2 Однозначная определяемость правильных динамических моделей

Каждая правильная динамическая модель однозначно определяется своими отношениями перехода для программных переменных и оценкой пропозициональных переменных.

Более точно, имеет место следующая теорема:

Теорема.

Для каждой тройки $(W, \{S_\pi \mid \pi \in \Pi V\}, \psi)$, где

1. W – некоторое непустое множество,
2. $\forall \pi \in \Pi V \qquad S_\pi$ – некоторое бинарное отношение на множестве W,
3. ψ есть некоторое отображение вида $\psi : PV \to \mathcal{P}(W)$

существует единственная правильная динамическая модель $(W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\forall \pi \in \Pi V \qquad R_\pi = S_\pi$,

2. $\forall p \in PV \qquad \varphi(p) = \psi(p)$.

Доказательство:

Для каждой программы $\alpha \in Pg$ и каждой формулы $A \in Fm$ отношение $R_\alpha \subseteq W^2$ и подмножество $\varphi(A) \subseteq W$ определяются индукцией по построению соответственно программы α и формулы A.

А именно,

1. Пусть программа $\alpha \in Pg$ такова, что для всех её подпрограмм и подформул соответствующие бинарные отношения (для подпрограмм) и подмножества (для подформул) уже определены.

   Из определения понятия программы вытекает, что возможен ровно один из следующих случаев:
   $\alpha = \pi \in \Pi V, \alpha = \beta \circ \gamma, \alpha = \beta \vee \gamma, \alpha = \beta^*, \alpha = A?$.

   Отношение R_α полагаем равным соответственно отношению
   $S_\pi, R_\beta \circ R_\gamma, R_\beta \cup R_\gamma, (R_\beta)^*, \{(x, x) \mid x \in \varphi(A)\}$.

2. Пусть формула $A \in Fm$ такова, что для всех её подпрограмм и подформул соответствующие бинарные отношения (для подпрограмм) и подмножества (для подформул) уже определены.

   Из определения понятия формулы вытекает, что возможен ровно один из следующих случаев:
   $A = p \in PV, A = \top, A = \bot, A = \neg B, A = B \;\&\; C, A = B \vee C,$
   $A = B \to C, A = B \leftrightarrow C, A = [\alpha]B$.

   Подмножество $\varphi(A)$ полагаем равным соответственно подмножеству
   $\psi(p), W, \emptyset, W \setminus \varphi(B), \varphi(B) \cap \varphi(C), \varphi(B) \cup \varphi(C), \varphi((\neg B) \vee C),$
   $\varphi((B \to C) \;\&\; (C \to B)), \{x \in W \mid R_\alpha(x) \subseteq \varphi(B)\}$.

■

4 Истинность формул PDL в динамических моделях

4.1 Определение понятия истинности формул PDL в динамических моделях

Пусть заданы

1. некоторая динамическая модель $\Delta = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$,

2. некоторый элемент x множества W,

3. некоторая формула $A \in Fm$.

Говорят, что **формула A истинна в точке x модели Δ** (и пишут $\Delta, x \models A$), если имеет место соотношение $x \in \varphi(A)$. Если данное соотношение не имеет места, то говорят, что **формула A ложна в точке x модели Δ** (и пишут $\Delta, x \not\models A$).

Нетрудно установить, что имеют место следующие соотношения:

1. $\Delta, x \models \neg A \Leftrightarrow \Delta, x \not\models A$,
2. $\Delta, x \models (A \,\&\, B) \Leftrightarrow \Delta, x \models A$ и $\Delta, x \models B$,
3. $\Delta, x \models (A \vee B) \Leftrightarrow \Delta, x \models A$ или $\Delta, x \models B$,
4. $\Delta, x \models (A \to B) \Leftrightarrow$ если $\Delta, x \models A$, то $\Delta, x \models B$,
5. $\Delta, x \models (A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \Delta, x \models A$ тогда и только тогда, когда $\Delta, x \models B$,
6. $\Delta, x \models [\alpha]A \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in R_\alpha(x)\ \ \Delta, y \models A$,
7. $\Delta, x \models \langle\alpha\rangle A \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in R_\alpha(x) : \Delta, y \models A$.

Говорят, что **формула A истинна в модели Δ** (и пишут $\Delta \models A$), если для каждой точки $x \in W$ имеет место соотношение $\Delta, x \models A$.

Если существует точка $x \in W$, такая, что имеет место соотношение $\Delta, x \not\models A$, то говорят, что **формула A ложна в модели Δ** (и пишут $\Delta \not\models A$).

4.2 Истинность формул, выводимых в PDL, в правильных динамических моделях

Теорема.

Все формулы, выводимые в PDL, истинны в произвольной правильной динамической модели.

Доказательство:

Данная теорема будет доказана, если будет установлено, что

1. все аксиомы PDL истинны в произвольной правильной динамической модели,
2. и при применении правил вывода к формулам, которые истинны в произвольной правильной динамической модели, получаются формулы, которые тоже истинны в произвольной правильной динамической модели.

Истинность тавтологий, аксиом регулярности и аксиом нормальности в произвольной правильной динамической модели доказывается так же, как для полимодальной логики $K_\Im$.

Истинность формул, получающихся при применении правил вывода PDL к формулам, которые истинны в произвольной правильной динамической модели, тоже доказывается так же, как для полимодальной логики $K_\Im$.

Таким образом, следует лишь обосновать истинность аксиом $Comp, Un$, $Test, Mix$ и Ind в произвольной точке x произвольной правильной динамической модели $\Delta = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$.

Comp:

Соотношение

$$\Delta, x \models [\alpha \circ \beta]A \leftrightarrow [\alpha][\beta]A$$

эквивалентно соотношению

$$\Delta, x \models [\alpha \circ \beta]A \quad \Leftrightarrow \quad \Delta, x \models [\alpha][\beta]A,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$R_{\alpha\circ\beta}(x) \subseteq \varphi(A) \quad \Leftrightarrow \quad R_\alpha(x) \subseteq \varphi([\beta]A).$$

Учитывая соотношение $R_{\alpha\circ\beta} = R_\alpha \circ R_\beta$, получаем:
$R_{\alpha\circ\beta}(x) = (R_\alpha \circ R_\beta)(x) = R_\beta(R_\alpha(x))$.

Таким образом, истинность аксиомы $Comp$ в точке x эквивалентна истинности соотношения

$$R_\beta(R_\alpha(x)) \subseteq \varphi(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y (y \in R_\alpha(x) \Rightarrow R_\beta(y) \subseteq \varphi(A)).$$

Истинность последнего соотношения очевидна.

Un:

Соотношение

$$\Delta, x \models [\alpha \vee \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \,\&\, [\beta]A$$

эквивалентно соотношению

$$\Delta, x \models [\alpha \vee \beta]A \quad \Leftrightarrow \quad \Delta, x \models [\alpha]A \;\text{ и }\; \Delta, x \models [\beta]A,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$R_{\alpha\vee\beta}(x) \subseteq \varphi(A) \quad \Leftrightarrow \quad R_\alpha(x) \subseteq \varphi(A) \;\text{ и }\; R_\beta(x) \subseteq \varphi(A).$$

Истинность последнего соотношения следует из того, что
$R_{\alpha\vee\beta}(x) = R_\alpha(x) \cup R_\beta(x)$.

Test:

Соотношение

$$\Delta, x \models [A?]B \leftrightarrow (A \to B)$$

эквивалентно соотношению

$$\Delta, x \models [A?]B \quad \Leftrightarrow \quad \Delta, x \models A \to B,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$R_{A?}(x) \subseteq \varphi(B) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{ если } \ x \in \varphi(A), \ \text{ то } \ x \in \varphi(B)).$$

Левую часть последнего соотношения можно переписать следующим образом:

$$\forall y(y \in R_{A?}(x) \Rightarrow y \in \varphi(B)),$$

которое, ввиду определения отношения $R_{A?}$, эквивалентно соотношению

$$\forall y((x = y \ \text{ и } \ y \in \varphi(A)) \Rightarrow y \in \varphi(B)).$$

Очевидно, что последнее соотношение эквивалентно соотношению

$$\text{если } \ x \in \varphi(A), \ \text{ то } \ x \in \varphi(B).$$

Mix:

Соотношение

$$\Delta, x \models [\alpha^*]A \to (A \ \& \ [\alpha][\alpha^*]A)$$

эквивалентно соотношению

$$\Delta, x \models [\alpha^*]A \quad \Rightarrow \quad \Delta, x \models A \ \text{ и } \ \Delta, x \models [\alpha][\alpha^*]A,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$(R_\alpha)^*(x) \subseteq \varphi(A) \quad \Rightarrow \quad x \in \varphi(A) \ \text{ и } \ R_\alpha(x) \subseteq \varphi([\alpha^*]A)$$

Таким образом, нужно доказать импликацию

$$\{x\} \cup R_\alpha(x) \cup R_\alpha^2(x) \cup \ldots \subseteq \varphi(A) \quad \Rightarrow \quad x \in \varphi(A) \ \text{ и } \ R_{\alpha^*}(R_\alpha(x)) \subseteq \varphi(A).$$

Данная импликация вытекает из соотношения

$$R_{\alpha^*}(R_\alpha(x)) = R_\alpha(x) \cup R_\alpha^2(x) \cup R_\alpha^3(x) \cup \ldots$$

Ind:

Соотношение

$$\Delta, x \models A \ \& \ [\alpha^*](A \to [\alpha]A) \to [\alpha^*]A$$

эквивалентно соотношению

$$\Delta, x \models A \ \text{ и } \ \Delta, x \models [\alpha^*](A \to [\alpha]A) \quad \Rightarrow \quad \Delta, x \models [\alpha^*]A.$$

Левую часть последнего соотношения можно переписать следующим образом:

$$x \in \varphi(A) \ \text{ и } \ (R_\alpha)^*(x) \subseteq \varphi(A \to [\alpha]A),$$

что эквивалентно соотношению

$$x \in \varphi(A) \text{ и } \forall y(y \in (R_\alpha)^*(x) \text{ и } y \in \varphi(A) \Rightarrow R_\alpha(y) \subseteq \varphi(A)).$$

Из последнего соотношения вытекает следующая последовательность импликаций:

1. $x \in (R_\alpha)^*(x)$ и $x \in \varphi(A) \Rightarrow R_\alpha(x) \subseteq \varphi(A)$,
2. $R_\alpha(x) \subseteq (R_\alpha)^*(x) \cap \varphi(A) \Rightarrow R_\alpha(R_\alpha(x)) = R^2_\alpha(x) \subseteq \varphi(A)$,
3. и т.д.

Поэтому имеет место включение

$$(R_\alpha)^*(x) = \{x\} \cup R_\alpha(x) \cup R^2_\alpha(x) \cup \ldots \subseteq \varphi(A),$$

которое эквивалентно правой части исходного соотношения.

■

5 Некоторые замечания

5.1 Отношение эквивалентности на программах PDL

Программы α и β из множества Pg называются **эквивалентными** (в этом случае пишут $\alpha \sim \beta$) если в каждой правильной динамической модели $\Delta = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$ имеет место соотношение $R_\alpha = R_\beta$.

Можно доказать, что данное условие эквивалентно выводимости в PDL формулы $[\alpha]p \leftrightarrow [\beta]p$.

Например, программы $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ и $\alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ эквивалентны.

Ясно, что при замене произвольной программы в формуле PDL на эквивалентную ей программу получается формула, логические свойства которой совпадают с логическими свойствами исходной формулы.

Представляет интерес исследование сложности решения задачи распознавания эквивалентности произвольных программ из множества Pg.

5.2 О возможности расширения синтаксиса PDL

К синтаксису PDL можно добавлять новые правила построения программ (вместе с соответствующими условиями для отношений перехода, связанных с данными программами).

Например,

1. можно считать, что

(a) для каждой формулы $A \in Fm$ и любых программ $\alpha, \beta \in Pg$ можно образовать программу

$$\textbf{if } \ A \textbf{ then } \ \alpha \textbf{ else } \ \beta$$

(b) и в произвольной динамической модели Δ отношение перехода для данной программы (обозначим её γ) удовлетворяет следующему условию:
$R_\gamma = \{(x, y) \mid$ если $\Delta, x \models A,$ то $(x, y) \in R_\alpha,$
а если $\Delta, x \not\models A,$ то $(x, y) \in R_\beta\},$

2. или, можно считать, что

(a) для каждой формулы $A \in Fm$ и каждой программы $\alpha \in Pg$ можно образовать программу

$$\textbf{while } \ A \textbf{ do } \ \alpha$$

(b) и в произвольной динамической модели $\Delta = (W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$ отношение перехода для данной программы (обозначим её δ) удовлетворяет следующему условию:
$R_\delta = \{(x, y) \mid$ либо $\Delta, x \not\models A$ и $y = x,$ либо $\exists n \geq 2, \exists\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq W:$
$x_1 = x, x_n = y, \forall i = 1, \ldots, n \perp 1 \ \ (x_i, x_{i+1}) \in R_\alpha,$
$\forall i = 1, \ldots, n \perp 1 \ \ x_i \models A, x_n \not\models A\},$

Нетрудно проверить, что имеют место следующие соотношения:

1. $(\textbf{ if } \ A \textbf{ then } \ \alpha \textbf{ else } \ \beta) \sim ((A?) \circ \alpha) \vee ((\neg A?) \circ \beta),$

2. $(\textbf{ while } \ A \textbf{ do } \ \alpha) \sim ((A?) \circ \alpha)^* \circ (\neg A)?.$

Эти соотношения позволяют избежать необходимости введения данных правил построения программ в синтаксис PDL.

Знакосочетания **if** A **then** α **else** β и **while** A **do** α можно рассматривать просто как сокращённую запись программ PDL, стоящих в правой части вышеприведённых соотношений.