Лабораторна робота №3. Дискретні і неперервні моделі індивідуального позову

1 Теоретична частина

Нехай заданий деякий імовірнісний простір (Ω, G, P) та вимірний простір (R^d, β_{R^d}), де β_{R^d} – σ-алгебра борелівських множин на R^d.

Означення 1 *Випадковою величиною називається G-вимірна функція $\xi : \Omega \to R^d$, тобто $\forall B \in \beta_{R^d} : \xi^{-1}(B) \in G$.*

Якщо в попередньому означенні $d = 1$, то ξ прийнято називати випадковою величиною, при $d > 1$ – випадковим вектором або d-вимірною випадковою величиною.

Випадкові величини умовно поділяють на дискретні та неперервні.

Задати випадкову величину можна так:

1. Функцією розподілу:

$$F_\xi(x) := P(\xi < x),\ x \in R^d; \tag{1}$$

2. Щільністю розподілу (за умови, що вона існує):

$$f_\xi(x) := \frac{dF_\xi(x)}{dx},\ x \in R^d; \tag{2}$$

3. Характеристичною функцією

$$\varphi_\xi(t) := Ee^{i(t,\xi)}, \tag{3}$$

де E – математичне сподівання, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, $(t, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{d} t_i \xi_i$ – скалярний добуток, $t \in R^d_+$.

Дискретну випадкову величину $\xi \in R^1$ можна задати таблично:

Таблиця 1

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

або з допомогою формули

$$p_i := P\{\xi = x_i\}.$$

Модельна задача 1 *Визначити основні характеристики випадкової величини (функцію розподілу, характеристичну функцію), якщо її щільність має вигляд*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Розв'язання. Дана щільність відповідає нормальному закону розподілу $N(0,1)$. Використовуючи (2), обчислимо функцію розподілу

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Знайдемо характеристичну функцію:

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f_\xi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ity} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(ty) e^{-\frac{y^2}{2}} dy + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(ty) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Другий інтеграл дорівнює 0 внаслідок симетричності інтервалу інтегрування та непарності підінтегральної функції. Отже,

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\infty}^{\infty} \cos(ty) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Продиференціювавши по t характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$, отримаємо

$$\varphi'_\xi(t) = -t\varphi_\xi(t). \tag{4}$$

Розв'язуючи (4) з врахуванням $\varphi_\xi(0) = 1$, отримаємо

$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Моделювання випадкових величин

Розглянемо моделювання дискретної випадкової величини $\eta \in R^1$. Припустимо, що дана випадкова величина (ВВ) η задається за допомогою формули

$$p_i = P(\eta = x_i), i = 1..n.$$

Утворимо числову послідовність:

$$q_0 := 0, q_i := q_{i-1} + p_i = \sum_{k=1}^{i} p_k, i = 1..n.$$

Зрозуміло, що послідовність $(q_i)_{i=1}^n$ є неспадною, а $q_n = 1$. Розглянемо напівінтервали $[q_0, q_1)$, $[q_1, q_2)$,..., $[q_{n-1}, q_n)$. Далі розглянемо ВВ $\alpha = \alpha(\omega)$, яка рівномірно розподілена на відрізку $[0, 1]$.

Моделювання значення ВВ η проводиться так:

1. Моделюється значення ВВ α;
2. Перевіряється, в який із напівінтервалів $[q_{i-1}, q_i), i = 1..n$ потрапило дане значення. Припустимо, це i_0-й інтервал $[q_{i_0-1}, q_{i_0})$.
3. Тоді значення ВВ η дорівнює x_{i_0}.

Для неперервних ВВ слід користуватися наведеною методою, попередньо наблизивши дану випадкову величину η деякою дискретною ВВ η_{disk}.

Моделювання ймовірності банкрутства страхової компанії

Ймовірність банкрутства страхової компанії рівна

$$p = P\{\sum_{i=1}^{N} X_i > u\}, \tag{5}$$

ду N – кількість застрахованих, X_i – величина виплати i-му клієнту, u – капітал страхової компанії.

Моделювання ймовірності p проводиться наступним чином: змоделюємо K наборів випадкових величин $(X_1^j, X_2^j, ..., X_N^j)$, $j = 1, ..., K$. Тоді наближена ймовірність банкрутства знаходиться з формули

$$p \approx \frac{Z}{K}, \tag{6}$$

де $Z = \#\{k : \sum_{i=1}^{N} X_i^k > u\}$, K – кількість змодельованих послідовностей $(X_1^j, X_2^j, ..., X_N^j)$, $j = 1, ..., K$.

Завдання до лабораторної роботи №3

1. Змоделювати наступні випадкові величини
   (a) X_1 - рівномірно розподілена ВВ на відрізку $[a, b]$, $0 \le a < b < \infty$.
   (b) X_1 - ВВ, розподілена за законом розподілу Бернуллі у N випробуваннях з імовірністю успіху в одному випробуванні p;
   (c) X_1 - ВВ, яка розподілена за законом розподілу Пуассона з параметром λ;
   (d) X_1 - ВВ, яка розподілена за геометричним законом розподілу з параметром $0 \le p \le 1$;
   (e) X_1 - ВВ, в якої щільність розподілу визначається як

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, \; x < 0; \\ \frac{4}{\pi(e^{-x}+e^{x},)}, x \ge 0; \end{cases}$$

(f) X_1 - ВВ, в якої щільність розподілу визначається як

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ \frac{\sin(x)}{2}, 0 < x \le \pi, \\ 0,\ x > \pi. \end{cases}$$

(g) X_1 - ВВ, в якої щільність розподілу визначається як

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin [0,1], \\ x^N (N+1),\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

(h) X_1 - ВВ, в якої щільність розподілу визначається як

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} x \ge 0; \end{cases}$$

(i) X_1 - ВВ, яка має показниковий закон розподілу з параметром $\lambda > 0$

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x},\ x \ge 0. \end{cases}$$

(j) X_1 - ВВ, яка має гамма-розподіл із параметрами $\lambda > 0$, $\alpha > 0$

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ \frac{\alpha^\lambda x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\lambda)},\ x \ge 0. \end{cases}$$

(k) X_1 - ВВ, в якої щільність розподілу визначається арксинус-щільністю

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin [0,1], \\ \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

(l) X_1 - дискретна ВВ, яка має нижченаведений розподіл

Таблиця 2

x_i	0	1	3	5	7	11
p_i	0,1	0.2	0,25	0,15	0,1	0,2

Вхідні дані: N – кількість відрізків, на який розбивається відрізок дослідження. Вихідні дані: значення випадкової величини.

2. Змоделювати суму

$$\xi := \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

де X_i – випадкові величини з завдання 1. Вхідні дані: n – кількість випадкових величин. Вихідні дані: значення випадкової величини ξ.

3. Нехай випадкові величини X_i, $i = 1, ..., N$ – незалежні та мають наступний розподіл

x	0	b_1	b_2
p	p_0	p_1	p_2

Знайти наближену ймовірність банкрутства страхової компанії, користуючись формулою (6).

Вхідні дані: N – кількість застрахованих; u – капітал компанії; b_1, b_2 – значення виплат страхової компанії, p_0, p_1, p_1 – ймовірності для випадкової величини X_i(ймовірності виплат). Вихідні дані: значення ймовірності банкрутства p.