Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Математичні моделі страхової математики

С.В. Антонюк, І.В. Малик, В.К. Ясинський

Чернівці – 2011

УДК 519.2:368.01(075.8) ББК 22.172я73+65.262в611 А 724

Математичні моделі страхової математики // С.В. Антонюк, І.В. Малик, В.К. Ясинський – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011. – 209с.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Інститут математики НАН України,
академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор
Королюк Володимир Семенович

Кафедра математичного моделювання
Чернівецький національний університет
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Готинчан Тетяна Іванівна

Друкується за ухвалою:
Вченої Ради факультету прикладної математики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Посібник охоплює основні розділи страхової математики. А саме, розглянуто основи теорії страхування життя (тривалість життя як випадкова величини, числові характеристики та основні величини, пов'язані з тривалістю життя; короткострокові і довгострокові моделі страхування життя, можливості точного і надлиженого розрахунку ймовірності банкрутства в цих моделях, принципи призначення премій та пенсійні схеми), математичний аналіз ризику в страхуванні (розглянуті статичні та динамічні моделі страхування життя та майна, можливості точного і наближеного розрахунку ймовірності банкрутства в цих моделях, знайдені оцінки для ймовірності банкрутства), можливість аналізувати ризики за допомогою моделювання на ЕОМ. Для студентів, аспірантів і викладачів вищих навчальних закладів.

ISBN 966-978-407-004-1

Зміст

Передмова

Навчальний посібник призначено для тих, хто починає вивчати страхову математику. Він допоможе опанувати основи актуарної математики, ознайомитись із статичними та динамічними моделями страхування життя та майна, виробити навички розв'язування задач (кожна глава містить основні поняття, твердження, факти, вправи). Навчальним посібником можуть користуватись як студенти факультетів прикладної математики та кібернетики університетів, так і студенти технічних, педагогічних, економічних вищих навчальних закладів освіти.

В даному посібнику містяться основні положення теорії страхування життя, а саме, розглядається тривалість життя як випадкова величина, вводяться величини пов'язані із тривалістю життя, розглядаються короткострокові і довгострокові моделі страхування життя, точні і наближені методи розрахунку ймовірності банкрутства в цих моделях, принципи призначення премій, а також пенсійні схеми.

Теорія ризику є найважливішою складовою частиною актуарної математики, яка з відповідними економічними і юридичними дисциплінами утворює теоретичну базу страхової справи. Непередбачувані витрати - результат дії випадку і тому не дивно, що в страхових розрахунках широко використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, математичної статистики. Сучасна актуарна математика є повнокровною гілкою прикладної математики. В посібнику велика увага приділяється аналізу статичних і динамічних моделей страхування (життя та майна), методам точного і наближеного розрахунку ймовірності банкрутства в рамках цих моделей, детально розглядається класична модель ризику.

В розділі 7 розглядаються динамічні моделі страхування, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями з розривними траєкторіями. Стохастичні диференціальні рівняння з розривними траєкторіями вперше з'явились в п'ятидесятих роках в роботах Й.І.Гіхмана і А.В.Скорохода, а зараз теорія стохастичних диференціальних, диференціально-функціональних рівнянь, рівнянь з післядією та різного роду збуреннями є найбільш продуктивними ланками теорії ймовірності. В цьому ж розділі наведена можливість описати динамічну модель страхування за допомогою напівмарковського процесу, що дозволяє одержати час банкрутства компанії.

В главі 8 описується можливість аналізу короткострокових моделей страхування життя і майна за допомогою моделювання на ЕОМ, що дозволяє винести частину розглядуваного теоретичного матеріалу на лабораторні роботи з проведенням обчислювального експерименту.

Під час ознайомлення з курсом необхідно розглянути якомога більше задач. Їх добірку подано в цьому посібнику. Розв'язання цих задач потребує неформального опанування матеріалом.

Кожний розділ посібника має свою нумерацію.

Автори висловлюють вдячність за допомогу при підготовці навчального посібника Готинчан Т.І., Дарійчуку І.В., Королюку В.С.

Вступ

Актуарій – це людина, яка володіє певною кваліфікацією для оцінювання ризиків і ймовірностей, застосовує свої вміння до проблем бізнесу і фінансів, особливо до таких сфер діяльності, як страхування і демографія, що пов'язані з випадковими подіями. (*Урядовий актуарій Великобританії К. Дейкіна.*)

Загальноприйнята назва наукового напрямку, що вивчає застосування математичних методів і моделей у страхуванні – **актуарна математика**. Разом із відповідними економічними та юридичними дисциплінами актуарна математика утворює ширшу галузь знань – актуарну науку, яка є теоретичною базою страхового бізнесу. Актуарна математика широко використовує загальні математичні теорії, особливо теорію ймовірностей і математичну статистику, але її не можна розглядати лише як однин із розділів прикладної математики. Це самостійний науковий напрямок зі своїм предметом, методами і сферою застосування.

Актуарна математика має вікові традиції. Спочатку переважно розроблялись актуарні моделі, пов'язані зі страхуванням життя, як короткострокові, так і довгострокові; цей напрямок і сьогодні продовжує активно розвиватися. Пізніше почали будуватись актуарні моделі і для інших видів страхування.

У всі часи існування професії актуарія її сутність ототожнювалася з експертизою ризиків і невизначеностей у страхуванні (передусім у страхуванні життя), а в наш час завдяки глибокому взаємопроникненню страхування і фінансів вона все більше доповнюється компонентою експерта з фінансової безпеки. Саме походження професії «актуарій» пов'язане з появою перших організацій зі страхування життя, коли виникла потреба в обчисленні премії на реальній науковій основі. Перша «актуарна фірма» виникла у Великобританії в 1762 році. У наступні роки потреби ринку призвели до неперервного зростання кількості таких фірм. Логічним завершення такого процесу стало розуміння необхідності створення професійної організації актуаріїв. Так з'явився Інститут актуаріїв у Лондоні (1848 р.) і факультет актуаріїв у Единбурзі. Їх основним завданням була співпраця в розвитку теорії та практики актуарної справи, удосконалення інформаційного забезпечення актуаріїв, включаючи й компоненту статистичних даних для кваліфікованих розрахунків. Також виникло і розуміння важливості державних актів про страхування, пенсійне забезпечення, які б упорядковували дану сферу суспільних відношень.

Точне походження терміна «актуарій» до тепер так і не визначено , але скоріше за все, він походить від латинського „actuarius“ - клерк, реєстратор, рахівник. До речі, в цьому вузькому сенсі розумілася посада актуарія, введена в Росії Петром I в 1703 році. Сьогодні до актуаріїв відносять тих, хто пройшов університетську підготовку, склав іспити і формально належить до тієї чи іншої національної організації актуаріїв (наприклад, Інститут актуаріїв у Великобританії, Японії, Австралії, товариств актуаріїв США, Канади тощо). У 1895 році національні товариства Бельгії, Франції, Німеччини, Великобританії та США утворили Міжнародну Асоціацію актуаріїв (IAA), яка кожні чотири роки проводить свої Конгреси. Такі конгреси мають велику наукову програму.

Українське актуарне товариство (УАТ) було утворене 17 вересня 1999 р. на I установчому з'їзді.

Організатори УАТ – фізичні особи, які пройшли підготовку на дворічних спеціалізованих курсах, організованих в Україні Лондонським інститутом актуаріїв, успішно склали іспити та захистили дипломні роботи. Ці особи отримали сертифікати, що дають формальне право на виконання актуарних розрахунків у страхових компаніях України.

У даний час у більшості областей України створені регіональні підрозділи Товариства.

УАТ об'єднує фізичних осіб — спеціалістів з актуарної та фінансової математики, які мають відповідну кваліфікацію і можуть займатися актуарними розрахунками.

Основними завданнями Українського актуарного товариства є:

1) Забезпечення високого професійного рівня діяльності актуаріїв, захист їхніх прав та інтересів;

2) Упровадження методів актуарної та фінансової математики у страхову та банківську сфери;

3) Розробка та впровадження програм професійної підготовки, підвищення кваліфікації актуаріїв;

4) Інформаційно-аналітичне забезпечення діяльності актуаріїв;

5) Розвиток зв'язків з міжнародними професійними організаціями.

Вищий орган управління УАТ — конференція його членів. У період між проведенням конференцій діяльністю Товариства керує Рада директорів. Контроль за відповідністю діяльності Товариства його статуту здійснює ревізійна комісія.

В УАТ встановлені дві категорії членства — дійсні й асоційовані члени Товариства.

На сьогодні УАТ претендує на позицію спостережного члена Міжнародної актуарної асоціації (International Actuarial Association).

Щорічно в Україні проводяться і наукові конференції з проблем і перспектив розвитку страхової математики.

Страхування — це соціальний механізм, що дозволяє індивідам і організаціям компенсувати економічні втрати, викликані тими чи іншими несприятливими обставинами.

Страхування має замінити визначеністю ту невизначеність в економічній вартості, що може бути зумовлена майбутніми втратами.

Людство доволі швидко зрозуміло, що найбільш ефективний спосіб зменшення втрат від невизначеності – це кооперативні утворення, які дозволяють розподілити вартість збитків для конкретного індивіда між усіма членами суспільства. Доволі швидко прийшло усвідомлення того, що важко передбачити час, місце, величину збитків, які можуть негативно позначитися на їхньому економічному стані. Страхування виявилося саме тим інструментом, який допомагає індивіду зменшити, пом'якшити вплив невизначеності, невідомості, невпевненості.

Було б неправильно зводити страхування лише до страхування життя чи майна. Страхування варто розуміти у ширшому сенсі, а саме: як страхування ризику, що охоплює ситуації, пов'язані, наприклад, з грою на ринку цінних паперів. Сучасний стан теорії страхування характеризується найтіснішим зв'язком з теорією фінансів. Яскравим прикладом цього можуть бути ф'ючерсні контракти на перестрахування, видані у грудні 1992 року Чиказькою торговельною палатою.

У страхуванні не всі види "невизначеностей", "ризиків" підлягають страхуванню. Щоб "**ризик**" підлягав страхуванню, він мусить задовольняти певні вимоги:

1) має існувати достатньо велика група таких "однорідних" учасників страхування;

2) причини збитків не повинні зачіпати відразу велику кількість учасників страхування;

3) причини і серйозність збитків не повинні зумовлюватися умисними діями тих, хто страхується; ці причини мають бути випадковими; компенсація за ці збитки здійснюється лише за умови можливості визначення природи втрат;

4) такі небезпеки мають давати збитки, які легко ідентифікувати (“втрати важко підробити”);

5) потенційні збитки, викликані небезпеками, мають бути досить великі (“немає сенсу страхувати щось пов’язане з невеликими, легко надолужуваними втратами”);

6) ймовірність збитків має бути досить малою, щоб ціна страхування була економічно можливою;

7) має бути доступною статистика реальних даних як база для розрахунку ймовірностей збитків (“репрезентативність і можливість статистичного розрахунку”).

Ці та інші подібні вимоги утворюють деякий стандарт вимог для страхової справи, деякий мінімум “необхідних” умов для вироблення правил страхування.

Існує багато різних видів страхування. Їх різноманітність найпростіше побачити, розглядаючи:

(a) категорії об’єктів страхування;

(b) причини проблем, що страхуються;

(c) способи платежів (премії, виплати);

(d) способи страхування (соціальне або комерційне).

До групи (a) належать різні об’єкти, що страхуються, наприклад, власність (нерухомість, автотранспорт, літаки, кораблі, різні види товарів і т. ін.).

До групи (b) – такі природні випадковості як пожежі, вибухи, повені, блискавки, землетруси, хвороби, а також випадковості, пов’язані з “неправильною поведінкою” на кшталт непрофесіоналізму; останнім часом страхується навіть персональна відповідальність, скажімо, директорів корпорацій за помилки в управлінні і т. п.

У групі (c) способи платежів (премії, виплати) змінюються від полісу (страхового) до полісу. Найбільш змінні різні форми страхування життя.

Способи страхування (d) – добровільне (чи комерційне) й обов'язкове (чи соціальне) – засновані на подібних принципах, але різні за своєю філософією й організацією.

Актуарії використовують математику та інші дисципліни для розв'язання практичних проблем у страхуванні та суміжних галузях. У двох найбільших сферах – страхових і консультаційних компаніях – актуарії займаються такими питаннями:

1) визначення величини премій;
2) розрахунок нових страхових контрактів;
3) визначення резервів для сплати майбутніх вимог;
4) статистика смертності та народжень;
5) перестрахування;
6) визначення дивідендів для повернення застрахованому;
7) визначення вартості компаній;
8) робота з інвестиційним відділом;
9) перевірка доцільності фінансових операцій;
10) моделювання майбутнього;
11) визначення пенсій.

Історія страхування

Страхування має багатовікову історію і належить до таких же основоположних категорій ринкового господарства, як, наприклад, гроші і кредит.

Для найбільш ранніх форм страхування характерне те, що воно виникло як взаємострахування, в основі якого ідея взаємодопомоги.

Найбільш примітивною формою розкладу збитку було натуральне страхування, що застосовувалось у селянських громадах і ранніх державах. Спеціальні запаси зерна й інших продуктів у громадських і державних амбрах формувалися шляхом об'єднання натуральних поосібних внесків. За їх рахунок, наприклад, у неврожайний рік надавалася матеріальна допомога постраждалим господарствам.

З розвитком товарно-грошових відносин натуральне страхування поступилося місцем страхуванню у грошовій формі, що значно розширило можливості взаємного страхування. Якщо спочатку при взаємному страхуванні страховий фонд формувався «на око», то в подальшому за допомогою теорії ймовірностей в якості основи страхових внесків для формування страхового фонду стала розраховуватися середня величина можливого збитку, яка припадала на кожного учасника страхування.

Особливо бурхливий розвиток страхування припав на кінець 15 століття, коли європейці почали активно досліджувати нові землі. Епоха великих географічних відкриттів породила не лише розвиток мореплавства та міжнародної торгівлі, але й нові небезпеки. Щоб захиститися від морських ризиків, купці та судновласники на період сумісних експедицій домовлялися про те, що у випадку загибелі майна одного з них, збиток буде розподілений між усіма.

Перший морський поліс, що дійшов до наших днів (договір страхування за плату) виданий у 1347 році на перевезення вантажу з Генуї на стрів Майорка на судні «Санта Клара». Це свідчить про те, що поряд із взаємним страхуванням у цей період вже існувало та розвивалося комерційне страхування, яке надавало страховий захист за певну плату (премію). На початку професійними страховиками ставали окремі підприємці, які брали на себе обов'язки покриття збитків під заставу власного майна.

Наприкінці 17 – початку 18 століття виникають перші страхові товариства (фірми, які спеціалізувалися на виробництві послуг зі страхування) морського страхування: у Франції в 1686 році (Париж), в Італії в 1741 році (Генуя).

У міжнародному страхуванні морських вантажоперевезень різко виділялася англійська страхова корпорація «Ллойдс» (Lloyds), яка об'єднувала приватних страховиків, кожен з яких приймав страхування, виходячи з власних фінансових можливостей. Історія «Ллойдса» почалася ще в кінці 17 століття, серед засновників був Едвард Ллойдс, який часто виступав у ролі підписанта. До 1871 року «Ллойдс» існував як приватна, керована комітетом організація, що не мала статусу юридичної особи. У 1871 році парламент Великобританії прийняв закон, згідно з яким «Ллойдс» у подальшому виступав в якості корпорації. Сьогодні «Ллойдс» відіграє роль міжнародного страхового ринку і найкрупнішого центру інформації з морського судноплавства та комерції.

Окрім морського страхування, почали розвиватися й інші види страхової діяльності.

У скупчених містах 17 ст. був надзвичайно великий ризик пожежі. В історію страхування увійшла велика лондонська пожежа 1666 року, яка знищила весь центр міста. Саме після цієї трагічної події був заснований перший в світі «Вогняний офіс» і з'явилося страхування від вогню.

Англія по праву вважається батьківщиною страхування. Тут у 1699 році вперше з'явилась професійна організація, яка займалася страхуванням вдів і сиріт, а потім утворилась страхова компанія „Eckvatell“ для особистого страхування громадян.

З початкових видів страхування – морського, вогневого та страхування життя – поступово виріс широкий спектр різних напрямків страхування. У 1760 році в Західній Європі налічувалося близько 100 різних видів майнового й особистого страхування.

В умовах сучасного суспільства з розвиненою ринковою економікою майже не існує матеріальних об'єктів чи інтересів, не захищених страхуванням.

Розділ 1.

Основи теорії складних відсотків

1.1. Відсоткові ставки, накопичення, приведена вартість

Розглянемо таку просту ситуацію. Припустимо, що в момент t ми взяли в борг на деякий період h певну суму C грн. Зрозуміло, що в момент $t+h$ повернення боргу ми повинні повернути суму $C+C'$. Сума C' – винагорода власнику капіталу C за те, що його кошти використовувалися іншою людиною. Як правило, її вимірюють у відносних одиницях: величина

$$i = \frac{C'}{C}$$

називається **ефективною відсотковою ставкою** за розглядуваний проміжок часу.

Аналогічно, якщо ми даємо в борг суму (наприклад кладемо на свій рахунок в банк, вносимо плату за страховку чи робимо внесок у пенсійний фонд), то через деякий час h можемо розраховувати на певний прибуток $C' = C \cdot i$.

Припустимо, що сума C може інвестуватися на два послідовних проміжки часу. Нехай $i_k,\ k=1,2$ - ефективна відсоткова ставка на k-ому проміжку. Існують дві схеми обчислення прибутку C' на об'єднаному інтервалі:

1) **Принцип простих відсотків** припускає, що відсотки нараховуються лише на основний капітал. Тобто

$$C' = Ci_1 + Ci_2,$$

а, відповідно, підсумкова відсоткова ставка становитиме

$$i = \frac{C'}{C} = i_1 + i_2.$$

2) **Принцип складних відсотків** припускає, що відсоток нараховується не лише на основний капітал, але і на вже зароблені відсотки. Тому в кінці другого інтервалу основний капітал C зросте до величини

$$C + C' = C(1 + i_1)(1 + i_2),$$

а, отже, підсумкова відсоткова ставка становитиме

$$i = i_1 + i_2 + i_1 i_2.$$

Зрозуміло, що якщо інвестор може вільно розпоряджатися своїми коштами, то принцип простих відсотків фактично не може існувати. На сьогодні загальноприйняте використання принципу складних відсотків при визначенні прибутку від вкладення коштів.

Виберемо деякий проміжок часу в якості одиничного (як правило, це буде один рік). Нехай відсоткова ставка за цей проміжок часу дорівнює i. Припустимо, що в момент $t_0 = 0$ сума C інвестується на n одиниць часу. За принципом складних відсотків у момент $t_n = n$ капітал C зросте до величини

$$C(n) = C(1 + i)^n. \tag{1.1}$$

Визначимо прибуток на капітал, який був інвестований на час $\frac{n}{m}$. Позначимо ефективну відсоткову ставку на проміжку $\frac{1}{m}$ через $i_*^{(m)}$. Оскільки одиничний проміжок можна подати як m послідовних проміжків довжиною $\frac{1}{m}$, то за формулою (1.1) одержимо

$$C(1 + i) = C(1 + i_*^{(m)})^m,$$

а отже

$$i_*^{(m)} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1. \tag{1.2}$$

Розглядаючи відрізок $\left[0, \frac{n}{m}\right]$ як n послідовних проміжків довжиною $\frac{1}{m}$ кожний і застосовуючи формули (1.1) і (1.2), одержим таку величину капіталу на момент $t = \frac{n}{m}$

$$C(t) = C(1+i_*^{(m)})^n = C((1+i)^{\frac{1}{m}})^n = C(1+i)^{\frac{n}{m}} = C(1+i)^t.$$

Оскільки будь-яке дійсне число можна як завгодно точно наблизити раціональними числами, припускаючи неперервність функції $C(t)$, одержимо, що формула

$$C(t) = (1+i)^t \tag{1.3}$$

справедлива для довільного $t > 0$.

Формула (1.3) описує процес **накопичення** коштів у ситуації, коли прийнятий принцип складних відсотків і є однією з основних формул фінансової математики.

З формули (1.3) випливає, що відносна швидкість накопичення коштів

$$\frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t} = \frac{(1+i)^{\Delta t} - 1}{\Delta t}.$$

А відповідно, миттєва відносна швидкість накопичення коштів

$$\delta \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1+i)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \ln(1+i) \tag{1.4}$$

Величина δ у фінансовій математиці називається **інтенсивністю відсотків**.

Використовуючи формулу (1.3), легко встановлюються рівності:

$$i = e^{\delta} - 1; \quad C(t) = C \cdot e^{\delta t}.$$

Вище розглядалося питання про те, що розуміти під ефективною відсотковою ставкою $i_*^{(p)}$ за проміжок часу довжиною $\frac{1}{p}$. Але в фінансовій математиці прийнято характеризувати прибутковість від вкладення коштів на проміжку $\frac{1}{p}$ не ефективною, а так званою **номінальною відсотковою ставкою**

$$i^{(p)} = p \cdot i_*^{(p)} \tag{1.5}$$

Номінальна відсоткова ставка є лише зручним способом подання реально застосованої ефективної відсоткової ставки. Поняття ефективної та номінальної відсоткової ставки, що виплачуються з частотою *p*, дуже важливі для розрахунку рент, страхових премій, пенсій.

Розглянемо просту ситуацію: нехай ефективна відсоткова ставка $i = 25\%$, припустимо, що в момент $t = 0$ нам повинні повернути 500 грн. Ми могли б погодитись на повернення 400 грн. у момент $t = -1$. Адже, помістивши ці гроші в банк, ми все одно одержимо в момент $t = 0$ суму 500 грн. Але в момент $t = 1$ ми повинні вже вимагати повернути нам 625 грн., адже, якби нам у момент $t = 0$ повернули 500 грн., то помістивши їх у банк, ми отримали б у момент $t = 1$ суму 625 грн. Отже, суми 400 грн., 500 грн. і 625 грн. в різні моменти часу при фіксованій відсотковій ставці по суті еквівалентні. Тобто вартість грошей з часом постійно змінюється. А, отже, порівнювати, додавати і здійснювати будь-які інші операції над грошовими сумами можна лише тоді, коли всі ці суми розглядаються в один і той самий момент часу.

Зрозуміло, що вартість на момент $t_0 = 0$ суми *C* у момент *t*, незалежно від знака, визначається за формулою

$$P(t) \equiv C \cdot (1+i)^{-t} \tag{1.6}$$

Величина $P(t)$ називається приведеною(сучасною) вартістю суми *C* в момент *t*. Приведена вартість одиничної суми позначається $v(t) \equiv (1+i)^{-t}$.

А величину $v \equiv (1+i)^{-1}$ називають **коефіцієнтом дисконтування**. За його допомогою формулу (1.6) можна записати в такому вигляді

$$P(t) = C \cdot v^t \tag{1.7}$$

Припустимо, що в момент $t_0 = 0$ ми даємо позику величиною *C*. Тоді в момент *t*=1 нам повинні повернути суму $C(1) = C \cdot (1+i) = C + C \cdot i$. Сума відсотків на капітал $C \cdot i$ в момент $t_0 = 0$ буде мати вартість $C \cdot i \cdot (1+i)^{-1}$. Тому відсотки на капітал можуть бути виплачені раніше, а саме: в момент $t_0 = 0$ одержання займу. Ці відсотки, виплачені наперед, складають долю $d \equiv \frac{i}{1+i}$ від суми займу *C*. Величина *d* називається **ефективною обліковою ставкою** за одиницю часу. Використовуючи формулу (1.2) і той факт, що $i = \frac{d}{1-d}$, очевидно, що ефективна облікова ставка $d_*^{(p)}$ за час $\frac{1}{p}$ обчислюється за формулою

$$d_*^{(p)} = 1 - (1-d)^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

У фінансовій математиці прийнято працювати не з ефективними (реальними) обліковими ставками за час $\frac{1}{p}$, а з так званими номінальними (умовними) обліковими ставками $d^{(p)}$, що начислюються з частотою *p*

$$d^{(p)} \equiv p \cdot d_*^{(p)} = p \cdot (1 - (1-d)^{1/p}) \tag{1.9}$$

З погляду застосування до страхування і пенсійних схем найбільш важлива задача оцінювання серії виплат, які повинні бути здійснені в різні моменти часу. Для цього всі ці виплати повинні бути приведені до деякого фіксованого моменту часу, після чого їх можна додавати, порівнювати тощо. Нехай *a* – це сучасна вартість серії з *n* виплат $b_1, b_2, .., b_n$, які будуть здійснені в деякі моменти $t_1, t_2, .., t_n$. Величина *a* може розглядатися, наприклад, як сума, яку людина має внести в пенсійний фонд у момент укладання договору, щоб у майбутньому, в моменти $t_1, t_2, .., t_n$ одержувати пенсію величиною $b_1, b_2, .., b_n$ відповідно. З вищесказаного випливає, що

$$a = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + .. + b_n v^{t_n}.$$

Якщо ж вважати, що людина нараховує пенсію не у вигляді одноразового внеску, а за допомогою серії платежів $c_1, c_2, .., c_k$ здійснених у моменти $\tau_1, \tau_2, .., \tau_n$, то справедливе таке співвідношення між внесками і пенсійними виплатами

$$c_1 v^{\tau_1} + .. + c_k v^{\tau_n} = b_1 v^{t_1} + .. + b_n v^{t_n}. \tag{1.10}$$

Справді, сучасна вартість усіх внесків у пенсійний фонд повинна дорівнювати сучасній вартості всіх пенсійних виплат, тобто остаточний баланс по розглядуваному рахунку повинен бути нульовим.

Описана вище найпростіша детермінована пенсійна схема на практиці не застосовується. Як правило, реально застосовуються схеми, що володіють тією чи іншою формою регулярності як за величиною внесків і виплат, так і за моментами здійснення цих платежів.

1.2. Детерміновані ренти

1.2.1. Детерміновані сталі ренти

Розглянемо *n* послідовних проміжків часу $(0, 1), ..,\ (n-1, n)$. Як одиничний проміжок розглянемо один рік.

Серія з *n* виплат, кожна величиною 1, здійснених на початку цих проміжків, називається **випереджуючою (прямою) сталою рентою**.

Серія з *n* виплат, кожна величиною 1, здійснених у кінці цих проміжків називається, **безпосередньою сталою рентою**.

Приведена вартість випереджуючої ренти позначається в фінансовій математиці $\ddot{a}_{\overline{n|}}$, а безпосередньої - $a_{\overline{n|}}$.

Зрозумілі наступні співвідношення,

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + .. + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1 - v} =$$

$$= \frac{1 - v^n}{1/v - 1} = \frac{1 - v^n}{i}, \tag{1.11}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + .. + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}. \tag{1.12}$$

Для застосувань також важливі так звані відстрочені ренти. Розглянемо послідовні проміжки часу $(m-1, m), (m, m+1), ..(m+n-1, m+n)$.

Серія з *n* виплат, кожна величиною 1, здійснених на початку (в кінці) проміжків $(m, m+1), ..(m+n-1, m+n)$, називається випереджуючою (безпосередньою) відстроченою рентою.

Вартість випереджуючої відстроченої ренти на даний час $t_0 = 0$ позначається $_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$, а сучасна вартість відстроченої безпосередньої ренти позначається через $_{m|}a_{\overline{n}|}$.

Щоб обчислити ці величини необхідно привести кожен із *n* платежів до початкового моменту часу та додати одержані значення:

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + .. + v^{m+n-1} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{1.13}$$

$$_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + .. + v^{m+n} = v^m \cdot a_{\overline{n}|} \tag{1.14}$$

Очевидні і такі співвідношення

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}, \ \ _{m|}a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}. \tag{1.15}$$

Часто буває корисно знати вартість ренти не в початковий момент часу, а в кінці останнього платіжного періоду. Цю вартість можна інтерпретувати як загальну суму, накопичену на банківському рахунку після серії регулярних внесків. Через $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ позначають приведену вартість випереджуючої (прямої) сталої ренти в момент $t_n = n$, а через $s_{\overline{n}|}$ відповідно приведену вартість в момент $t_n = n$ безпосередньої сталої ренти. Формули для накопичень одержуються зведенням кожної з *n* виплат до моменту $t_n = n$ і додаванням одержаних значень

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + .. + (1+i) = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} =$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i/(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}, \tag{1.16}$$

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + .. + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{1.17}$$

Для відстрочених рент спеціальні позначення для накопичень не потрібні, оскільки з погляду останнього проміжку часу відстрочена рента не відрізняється від відповідної звичайної ренти (тобто $_{m|}s_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}}$).

1.2.2. Детерміновані зростаючі ренти

Розглянемо n послідовних проміжків часу $(0,1), .., \ (n-1, n)$. Як одиничний проміжок будемо, як і раніше, розглядати один рік.

Серія з n виплат, кожна величиною $1, \ 2, .., \ n$, здійснених на початку цих проміжків, називається **випереджуючою (прямою) зростаючою рентою**.

Серія з n виплат, величиною $1, \ 2, .., \ n$, здійснених у кінці цих проміжків, називається **безпосередньою зростаючою рентою**.

Приведена вартість прямої зростаючої ренти позначається в фінансовій математиці $(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$, а безпосередньої зростаючої ренти - $(Ia)_{\overline{n|}}$.

Зрозумілі такі співвідношення:

$$(Ia)_{\overline{n|}} = v + 2v^2 + .. + nv^n = v\left(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}\right)' = v \cdot \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \tag{1.18}$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = 1 + 2v + 3v^2 + .. + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2} \tag{1.19}$$

Використовуючи формули (1.11) і (1.12), можна виразити сучасну вартість зростаючих рент через відповідні сучасні вартості сталих рент

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{a_{\overline{n|}}}{1-v} - \frac{nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}}}{d} - \frac{nv^n}{i}, (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d} \tag{1.20}$$

Для застосувань також важливі так звані відстрочені зростаючі ренти. Розглянемо послідовні проміжки часу $(0,1), ..(m-1, m), (m, m+1), ..(m+n-1, m+n)$.

Серія з n виплат, кожна величиною $1,\ 2, .., \ n$, здійснених на початку (в кінці) проміжків $(m, m{+}1), ..(m{+}n{-}1, m{+}n)$, називається випереджуючою (безпосередньою) відстроченою зростаючою рентою.

Вартість відстроченої випереджуючої ренти в теперішній момент $t_0 = 0$ позначається ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$, а сучасна вартість безпосередньої ренти позначається - ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n|}}$.

Обчислити ці величини можна, визначивши вартість ренти в момент $t_m = m$ початку періоду платежів, а потім привести цю вартість до моменту $t_0 = 0$:

$$ {}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = v^m \cdot (I\ddot{a})_{\overline{n|}} \tag{1.21}$$

$$ {}_{m|}(Ia)_{\overline{n|}} = v^m \cdot (Ia)_{\overline{n|}} \tag{1.22}$$

Часто буває корисно знати вартість ренти не в початковий момент часу, а в кінці останнього платіжного періоду. Цю вартість можна інтерпретувати як загальну суму, накопичену на банківському рахунку після серії регулярних внесків. $(I\ddot{s})_{\overline{n|}}$ і $(Is)_{\overline{n|}}$ - це приведена вартість випереджуючої (прямої) і безпосередньої зростаючої ренти в момент $t_n = n$. Формули для накопичень одержують безпосереднім зведенням до моменту $t_n = n$ вартості ренти в момент $t_0 = 0$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{1-v} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{d}, \tag{1.23}$$

$$(Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}} = \frac{s_{\overline{n|}}}{1-v} - \frac{n}{i} = \frac{s_{\overline{n|}}}{d} - \frac{n}{i}. \tag{1.24}$$

За допомогою одержаних формул для найпростіших зростаючих рент можна визначити вартість рент, у яких величина виплат зростає відповідно до довільної арифметичної прогресії. Припустимо, що виплати здійснюються в моменти $t_0 = 0, .., \ t_n = n$ і i-та виплати задається формулою

$$b_i = \alpha + \beta i = (\alpha - \beta) + \beta(i+1),\ i = 0, .., \ n-1. \tag{1.25}$$

Таку змінну ренту можна розглядати як об'єднання двох рент: сталої випереджуючої з величиною виплат $(\alpha - \beta)$ і зростаючої випереджуючої з одиницею вимірювання виплат β. Тому вартість у момент $t_0 = 0$ такої ренти

$$(\alpha - \beta)\ddot{a}_{\overline{n|}} + \beta(I\ddot{a})_{\overline{n|}}, \tag{1.26}$$

а накопичення до моменту $t_n = n$ складає

$$(\alpha - \beta)\ddot{s}_{\overline{n}|} + \beta(I\ddot{s})_{\overline{n}|}. \tag{1.27}$$

1.2.3. Детерміновані ренти, що виплачуються з частотою p

Розглянемо *n* послідовних проміжків часу $(0, 1), .., \ (n-1, n)$. Як одиничний проміжок будемо, як і раніше, розглядати один рік.

Розіб'ємо кожен із *n* одиничних проміжків на *p* рівних частин довжиною $1/p$ кожна

$$(0, 1/p), (1/p, 2/p), .., ((p-1)/p, p/p), (1, 1 + 1/p), .., (n - 1 + (p-1)/p, n)$$

Серія з np виплат, кожна величиною $1/p$, здійснених на початку (в кінці) цих проміжків, називається **прямою (безпосередньою) сталою рентою, що виплачується з частотою** p.

Вартість таких рент у момент $t_0 = 0$ позначається відповідно $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, а вартість у момент $t_n = n$ - відповідно $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $s^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Звернімо увагу на те, що як одиниця вимірювання грошових сум розглядається алгебраїчна сума усіх виплат за одиничний проміжок часу.

Оскільки прямма і безпосередня ренти відрізняються лише в початковий і кінцевий моменти часу, маємо

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}v^n. \tag{1.28}$$

Крім того, величини $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$, як величини $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $s^{(p)}_{\overline{n}|}$, оцінюють одну і ту саму серію платежів, але в різні моменти часу і між ними очевидний наступний такий зв'язок

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}(1+i)^n, \ \ s^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|}(1+i)^n. \tag{1.29}$$

Отже, достатньо одержати формулу для обчислення, наприклад, величини $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$. З цією метою розглянемо як одиничний відрізок *p*-ту долю початкового одиничного відрізка. Ефективна відсоткова ставка на цьому одиничному відрізку $i^{(p)}_*$, відповідна облікова ставка $d^{(p)}_*$, а нове значення коефіцієнта дисконтування

$$v^{(p)}_* = 1 - d^{(p)}_* = (1 + i^{(p)}_*)^{-1} = v^{1/p}$$

Тепер пряму ренту, що виплачується з частотою *p*, можна розглядати як звичайну випереджуючу ренту, що виплачується на проміжку $(0, n/p)$ з величиною кожної виплати $1/p$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{p}\ddot{a}_{\overline{np}|@i^{(p)}_*}, \tag{1.30}$$

де символ @ вказує ефективну відсоткову ставку на проміжку, що розглядається як одиничний.

Використовуючи формули (1.2), (1.8) і (1.12), легко одержимо таке співвідношення

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}}\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{1.31}$$

А для $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ з формули (1.28) матимемо

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|} \tag{1.32}$$

За аналогією зі звичайними відстроченими рентами вводиться поняття відстрочених рент, що виплачуються з частотою *p*. Також, аналогічно звичайним зростаючим рентам, вводиться поняття зростаючих рент, які виплачуються з частотою *p*.

1.2.4. Неперервні ренти

Розглянемо ренти, що виплачуються з частотою *p*, і припустимо, що $p \to \infty$. У цьому випадку можна розглядати надходження коштів як неперервний потік рідини. Підрахуємо швидкість надходження коштів.

Нехай Δ - малий проміжок часу. Він складається з Δp проміжків довжиною $1/p$, і тому на проміжку Δ надійде сума $\frac{1}{p} \cdot \Delta \cdot p = \Delta$. Отже, швидкість надходження коштів у цій неперервній моделі стала і дорівнює 1.

Для підрахунку сучасної вартості коштів, що надходять, розіб'ємо проміжок $[0, n]$ на велику кількість малих проміжків $\Delta_j = (t_j, t_{j+1});\ t_0 = 0 < t_1 < t_2 < .. < t_k = n$. На проміжку Δ_j надійде сума, яка дорівнює наближено Δ_j. Її приведена вартість наближено дорівнює

$$\sum_j v^{t_j} \cdot \Delta_j,$$

причому точність цього наближення збільшується зі зменшенням Δ_j, тобто границя при $\max \Delta_j \to 0$ дасть точне значення приведеної вартості неперервного потоку платежів. Але гранична сума – це не що інше, як інтеграл

$\int\limits_0^n v^t dt$. Тому точне значення приведеної вартості неперервного потоку платежів у момент $t_0 = 0$, що позначається $\overline{a}_{\overline{n}|}$, задається інтегралом

$$\overline{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - v^n}{\delta} \tag{1.33}$$

Неперервний потік платежів, що з'явився в наших міркуваннях, називається **неперервно виплачуваною рентою**.

Фактично ми маємо справу зі сталою неперервною рентою, коли швидкість надходження коштів з часом не змінюється. Розглянемо довільну неперервну ренту на проміжку $[0, n]$, що характеризується деякою довільною швидкістю $\rho(t)$ надходження коштів у момент t. Для такої ренти сума, що надійшла на проміжку $\Delta_j = (t_j, t_{j+1})$, наближено дорівнює $\rho(t_j)\Delta_j$, а її приведена вартість на момент $t_0 = 0$ наближено дорівнює $v^{t_j}\rho(t_j)\Delta_j$, і тому загальна приведена вартість такої ренти наближено дорівнює

$$\sum_j v^{t_j} \cdot \rho(t_j)\Delta_j.$$

Як і раніше, ця сума може розглядатись як інтегральна сума для інтеграла $\int\limits_0^n v^t \rho(t) dt$, що і задає точне значення приведеної вартості розглядуваного неперервного потоку платежів.

Сума накопичень до моменту t при неперервному надходженні коштів зі швидкістю 1 позначається $\overline{s}_{\overline{t}|}$ і дорівнює

$$\overline{s}_{\overline{t}|} = (1+i)^t \overline{a}_{\overline{t}|} = \frac{(1+i)^t - 1}{\delta} \tag{1.34}$$

1.3. Модельні задачі до розділу 1

Модельна задача 1.1. *Відсотки по певному банковському рахунку нараховуються відповідно до змінної інтенсивності відсотків*

$$\delta(t) = \frac{t^2}{100},\ t > 0.$$

В момент $t_0 = 0$ на рахунок кладеться сума 100, а в момент $t = 3$ вноситься додаткова сума X. Знайдіть цю суму, якщо відомо, що вона дорівнює відсоткам, нарахованим за проміжок часу $3 \le t \le 6$.

Розв'язання. Припустимо, що в момент t_1 зроблено внесок у розмірі 1. Позначимо через $A(t_1,\, t_2)$ – величину вкладу в момент t_2. Оскільки (за означенням)

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t, t+h)}{h},$$

справедливою є рівність:

$$A(t_1, t_2) = \exp\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt \right\}.$$

У нашому випадку

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2}{100} dt = \left. \frac{t^3}{300} \right|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_2^3 - t_1^3}{300},$$

отже,

$$A(t_1, t_2) = \exp\left\{ \frac{t_2^3 - t_1^3}{300} \right\}.$$

В момент $t = 3 + 0$ на рахунку буде сума

$$100 \cdot A(0,3) + X = 100 \cdot e^{0,09} + X,$$

а в момент $t = 6$ вона зросте до

$$(100 \cdot e^{0,09} + X) \cdot A(3,6) = (100 \cdot e^{0,09} + X) \cdot e^{0,63}.$$

Тому відсотки за проміжок $3 \leq t \leq 6$ рівні

$$(100 \cdot e^{0,09} + X) \cdot (e^{0,63} - 1).$$

З іншого боку, за умовою ці відсотки рівні X. Розв'язуючи рівняння, матимемо:

$$X = \frac{100 \cdot e^{0,09} \cdot (e^{0,63} - 1)}{2 - e^{0,63}} \approx 784,59.$$

Модельна задача 1.2. *Банк нараховує відсотки по вкладах, використовуючи коефіцієнти накопичення, засновані на змінній інтенсивності відсотків. 1 липня 1983 року клієнт поклав $50\ 000$ грн. у банк. На 1 липня 1985 року його вклад зріс до $59\,102$. Вважаючи, що інтенсивність відсотків була лінійною функцією часу протягом всього періоду з 1 липня 1983 року по 1 липня 1985 року, знайдіть інтенсивність відсотків на 1 липня 1984 року.*

Розв'язання. Приймемо 1 липня 1983 року за початковий момент часу, а 1 рік — за одиницю виміру часу. Тоді 1 липня 1985 року – це момент $t = 2$, а 1 липня 1984 року — це момент $t = 1$.

Оскільки (за умовою) $\delta(t)$— лінійна функція від t вона має вигляд

$$\delta(t) = a + bt,$$

де a і b— деякі параметри. Тоді для коефіцієнту накопичення за проміжок $(0,\, t)$маємо:

$$A(0,\, t) = \exp\left(\int_0^t \delta(u)du\right) = \exp\left(\int_0^t (a+bu)du\right) = \exp\left(au+\frac{bu^2}{2}\Big|_0^t\right) = \exp\left(at+\frac{bt^2}{2}\right).$$

Ми знаємо, що $A(0,\, 2) = 59102/50\,000 = 1,18204$. З іншого боку, з отриманої вище формули для $A(0,\, t)$випливає, що

$$A(0,2) = \exp(2a + 2b).$$

Нас цікавить $\delta(1) = a + b \cdot 1 = a + b$. Сума $a + b$ фігурує в наведеній вище формулі для $A(0,2)$, звідки її легко знайти:

$$a + b = \frac{1}{2}\ln A(0,2) = \frac{1}{2}\ln 1,18204 \approx 0,083621.$$

Отже, інтенсивність відсотків на 1 липня 1984 року була $0,083621$.

Модельна задача 1.3. *Знайдіть вартість ренти, що виплачується в кінці кожного місяця впродовж п'яти років. Перша виплата у розмірі 200 грн. здійснюється через місяць після покупки ренти, а кожна наступна виплата на 200 грн. більша попередньої. Відсотки нараховуються відповідно до номінальної відсоткової ставки $i^{(4)} = 9\,\%$.*

Розв'язання. Приймемо 200 грн. за одиницю виміру грошових сум, один місяць — за одиницю часу, момент придбання ренти — за початковий момент. Тоді дана рента представляє собою серію з $n = 60$ виплат величиною $1,\ 2,\ ...,\ n$, зроблених в моменти $t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ ...,\ t_n = n = 60$.. Такий грошовий потік називається зростаючою безпосередньою рентою (increasing immediate annuity). Приведена вартість цієї ренти у момент $t_0 = 0$ позначається $(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$ і дорівнює

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = v+2v^2+...+nv^n = v(1+2v+...+nv^{n-1}) = v(v+v^2+...+v^n)' = v\left(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}\right) =$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - (n+1)i - 1}{i^2(1+i)^n}.$$

Тут i – ефективна відсоткова ставка для одиничного проміжку часу (тобто одного місяця), яка легко може бути підрахована із співвідношення

$$(i+1)^3 = 1 + i_*^{(4)},$$

де

$$i_*^{(4)} = \frac{1}{4} \cdot i^{(4)} = 2,25\,\%$$

ефективна відсоткова ставка для одного кварталу. Отже

$$i \approx 0,7444\,\%,$$

а шукана вартість ренти рівна

$$(I\ddot{a})_{\overline{60|}@0,7444} \approx 1364,607$$

або в абсолютних цифрах близько $272\,921$ грн.

Модельна задача 1.4. *Борг погашається впродовж п'яти років щомісячними виплатами. Номінальна відсоткова ставка становить $9\,\%$ річних. Перша виплата здійснюється через місяць після отримання позики і рівна 1000. Кожна наступна виплата на $2\,\%$ менша за попередню. Знайдіть розмір невиплаченого боргу після того, як здійснена 40-ва виплата.*

Розв'язання. Приймемо один місяць за одиницю часу і знайдемо ефективну відсоткову ставку $i_{(*)}^{(12)}$ для цього періоду, відповідну номінальній відсотковій ставці $i_{(*)}^{(12)} = 9\,\%$:

$$\mathrm{i}_*^{(12)} = \frac{1}{12} i^{(12)} = 0,75\,\% = 0,0075.$$

Хоч в нашому випадку сума позики і невідома, розміри послідовних виплат змінюються відповідно до простого закону і можуть бути легко визначені. Величина n-ї виплати, p_n, задається формулою:

$$p_n = 1000 \cdot (1 - 0,02)^{n-1},\ n = 1,\ ...,\ 60.$$

Приймемо момент 40 за початковий, отже, для оплати боргу потрібно ще зробити 20 виплат розміром

$$1000 \cdot (0,98)^{\ 40},\ 1000 \cdot (0,98)^{\ 41},\ ..., 1000 \cdot (0,98)^{\ 59}$$

в моменти

$$1, 2, ..., 20$$

відповідно. Приведена вартість цього грошового потоку на момент 0 (тобто відразу після 40-го платежу) дорівнює

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{20} 1000 \cdot (0,98)^{39+n}(1,0075)^{-n} = 1000 \frac{(0,98)^{40}(1,0075)^{-1} - (0,98)^{60}(1,0075)^{-21}}{1 - 0,98/1,0075}$$

$$\approx 6889,11.$$

Модельна задача 1.5. *1 січня 2002 р. чоловік у віці 40 років укладає договір страхування життя на 10 років. Страхова сума дорівнює 100000, а період виплати премій обмежений 5 роками. Відомо, що*
1) страхове відшкодування виплачується у момент смерті;
2) премія у розмірі 4000 платиться на початку року впродовж 5 років; 3)

$$i = 0,05.$$

Підрахуйте величину втрат компанії за цим договором, приведену на момент його укладання, якщо застрахований помирає 30 червня 2004 р.

Розв'язання. Описана в задачі ситуація схематично змальована на рис. 1.1.

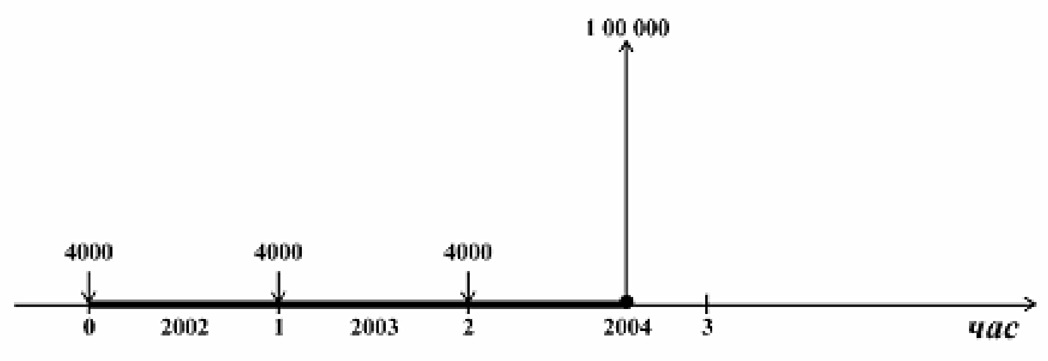

Рис.1.1

Оскільки залишковий час життя T_{40} точно відомий:

$$T_{40} = 2,5,$$

в даній ситуації повністю відсутній чинник випадковості.

Ми точно знаємо зобов'язання компанії: вони полягають у виплаті 100000 в момент $T_{40} = 2,5$ (момент підписання договору приймається за початковий). Приведена вартість цих зобов'язань рівна

$$100000 \cdot (1,05)^{-2,5} \approx 88517.$$

Ми також точно знаємо, що страхувальник виплатив 3 премії (по 4000 кожна): 1 січня 2002 р. , 1 січня 2003 р. і 1 січня 2004 р. Приведена вартість цього грошового потоку дорівнює

$$4000 \cdot (1 \ + \ 1,05^{-1} + 1,05^{-2}) \approx \ 11438.$$

Тому збитки компанії, приведені на момент укладання договору, складають суму 77 079.

1.4. Вправи до розділу 1

1) Експерти банку припускають, що протягом найближчих п'яти років ефективна(фактична) річна ставка i_1 буде дорівнювати 10%, а протягом наступних п'яти років $i_2 = 6\%$. Особа придбала десятирічну ренту з виплатою в кіці кожного року 1000 грн. Підрахуйте її вартість.

2) Учасник пенсійного фонду бажає одержувати пенсію раз на рік протягом 20 років через п'ять років після укладання договору. Перша виплата має становити 1000 грн. з подальшим збільшенням на 200 грн. щорічно. Вважаючи, що ефективна відсоткова ставка $i = 8\%$, визначте вартість цієї ренти у момент укладання договору.

3) Людина одержує щомісячно пенсію розміром 1000 грн., яку виплачують першого числа кожного місяця до 31 травня 2010. Після одержання чергової пенсії 1 вересня 2008 року ця людина побажала одержувати пенсію двічі на місяць (1 і 15 числа). Визначте величину цієї пенсії, якщо фактична відсоткова ставка $i = 12\%$.

4) Учасник пенсійного фонду раз у квартал протягом 5 років робить внесок у фонд, розмір якого щоразу збільшується на 500 грн. Початковий внесок становив 1000 грн. Через 5 років після укладання договору (тобто через 3 місяці після останнього внеску) ця людина одержує раз на рік сталу пенсію протягом 5 років. Визначте величину цієї пенсії, якщо $i = 10\%$.

5) Рента виплачується щорічно із запізненням (безпосередня рента) протягом 20 років. Перша виплата має розмір 8000, а кожна наступна виплата зменшується на 300. Визначте сучасну вартість цієї ренти при $i = 5\%$.

6) 1 січня 1985 року Джим почав накопичувати кошти на старість і вніс 200$ до пенсійного фонду. Пізніше він вносив таку ж суму на початку кожного місяця. У кінці листопада 1989 року Джим втратив роботу і перестав вносити гроші до пенсійного фонду. У кінці 1990 року він знайшов роботу і з 1 січня 1991 року знов прочав вносити по 200$ щомісячно. Яку суму накопичив Джим до кінця 1999 року, якщо $i^{(12)} = 6\%$?

7) Учасник пенсійного фонду, який щойно уклав договір, придбав право на одержання пенсії через 7 років. Він бажав би

   а) здійснити разовий пенсійний внесок на момент укладання договору;
   б) одержувати пенсію раз на рік протягом 12 років;
   в) розмір пенсії повинен враховувати інфляцію і дорівнювати 5000 грн. при теперішніх цінах.

   Припускається, що протягом найближчих 6 років інфляція буде нульовою, а потім складе близько 1,2 % на рік. Фонд розміщує пенсійні резерви і забезпечує учасникам фонду інвестиційний прибуток i розміром 6% річних. Визначте розмір разового пенсійного внеску.

8) 1 липня 2003 року клієнт поклав 50000 грн. у банк. На 1 липня 2005 року його вклад збільшився до 59102 грн. Припускаючи, що інтенсивність відсотків є лінійною функцією часу протягом усього розглядуваного періоду, знайдіть інтенсивність відсотків на 1 липня 2004 року.

9) Пенсійний фонд повинен виплатити учаснику:

   а) 5000 грн. 1 липня 2004 р.;
   б) 3000 грн. 1 березня 2007 р.;
   в) 2000 грн. 1 жовтня 2008 р.;
   г) 8000 грн. 1 квітня 2010 р..

   Знайдіть величину забов'язань фонду по відношенню до цього учасника на 1 січня 2003 року, якщо $i = 5\%$.

10) 1 січня 2002 року людина уклала договір $i = 5\%$ страхування життя на 10 років зі страховою сумою 100000 грн. і 5-річним періодом виплати ренти. Відомо, що премія розміром 4000 сплачується на початку року протягом 5 років, а $i = 5\%$. Підрахуйте величину збитків компанії по цьому договору, якщо застрахований помирає 30 червня 2004 року.

Розділ 2.

Математична модель тривалості життя

2.1. Тривалість життя як випадкова величина. Функція виживання. Крива смертей. Інтенсивність смертності

Невизначеність моменту смерті людини є основним джерелом випадковості при страхуванні життя. Звичайно, щодо моменту смерті окремо взятої людини нічого певного сказати не можна. Та якщо маємо справу з великою однорідною групою людей і не цікавимося долею окремих осіб з цієї групи, то знаходимося в рамках теорії ймовірностей як науки про масові випадкові явища, що володіють властивістю стійкості частот. А, отже, можемо говорити про тривалість життя як про випадкову величину T з функцією розподілу

$$F(x) = \mathbf{P}(T < x).$$

Припускається, що розподіл F випадкової величини T відомий.

В актуарній математиці прийнято працювати не з функцією розподілу $F(x)$, а з додатковою функцією розподілу 1- $F(x)$, яка являє собою ймовірність того, що людина доживе до віку x років. Функція

$$s(x) \equiv 1 - F(x) = \mathbf{P}(T \geq x) \tag{2.1}$$

називається **функцією виживання.**

Функція $s(x)$ володіє такими властивостями:

1) $s(x)$ незростаюча на $[0, \infty)$;

2) $s(x)$ неперервна зліва;

3) $\lim\limits_{x \downarrow 0} s(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = 0$.

Ці властивості характеристичні, тобто, якщо деяка функція $s(x)$ задовольняє ці властивості, то існує такий імовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbf{P})$ і випадкова величина $T(\omega)$ на ньому, така, що додаткова функція розподілу $T(\omega)$, дорівнює $s(x)$. Тобто функція, що задовольняє властивості 1-3 описує деякий закон смертності.

Природно припустити, що $s(x)$ неперервна, оскільки в протилежному випадку існував би деякий фіксований вік, по досягненні якого обов'язково помирала б певна доля населення. Також зрозуміло, що функція виживання повинна бути строго спадною функцією, оскільки інакше існував би фіксований невипадковий віковий проміжок, коли смертність неможлива.

Розглянемо питання, пов'язане з областю значень випадкової величини T. З одного боку, зрозуміло, що людина навряд чи проживе 1000 років. А з іншого – припускати, що людина проживе x сек., але не може прожити x+1 сек., також неприродно. В актуарній математиці залежно від ситуації допускають обидва припущення. У таблицях тривалості життя зазвичай вважають, що існує деякий граничний вік ω і $s(x) = 0$ при $x > \omega$. Як правило, $\omega = 100 - 120$ років. При описуванні смертності аналітичними законами вважають, що тривалість життя необмежена, але підбирають вид і параметри розподілу так, щоб імовірність життя, довша від деякого віку, була надзвичайно мала.

Функція виживання має простий статистичний зміст. Припустимо, що ми спостерігаємо за групою l_0 новонароджених і фіксуємо їх тривалості життя: $T_1, T_2, .., T_{l_0}$. Позначимо кількість живих представників цієї групи у віці x через $L(x)$. Зрозуміло, що

$$L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I(T_i \geq x) = \sum_{i=1}^{l_0} I(T_i > x),$$

де $I(A)$ - індикатор події A.

Для величини $l_x \equiv \mathbf{E} L_x$ матимемо

$$l_x = \sum_{i=1}^{l_0} \mathbf{E}(I(T_i > x)) = \sum_{i=1}^{l_0} \mathbf{P}(T_i > x) = \sum_{i=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x). \tag{2.2}$$

Отже, функція виживання описує середню частку живих представників деякої фіксованої групи новонароджених у момент x.

Величина l_x зазвичай заноситься в таблиці тривалості життя.

Введемо в розгляд величину ${}_tD_x$, яка описує кількість померлих на інтервалі $(x, x+t)$. Очевидно, що

$${}_tD_x = L(x) - L(x+t).$$

Середнє значення цієї величини, тобто середня кількість представників групи, які померли у віці від x до $x+t$ років

$${}_td_x \equiv \mathbf{E}_tD_x = l_x - l_{x+t} = l_0(s(x) - s(x+t)). \tag{2.3}$$

Випадок $t = 1$ зустрічається в актуарних розрахунках особливо часто, причому перший індекс у цьому випадку не пишеться, тобто ${}_1d_x$ позначається просто d_x

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+1)).$$

Застосувавши, формулу Тейлора можна записати

$$d_x = -l_0 s'(c),\ c \in (x, x+1),$$

Але, враховуючи той факт, що функція $s'(x)$ мало змінюється протягом одного року, можна вважати справедливим таку наближену рівність

$$d_x \approx -l_0 s'(x). \tag{2.4}$$

Функція $p(x) = -s'(x) = F'(x)$ в теорії ймовірностей називається щільністю розподілу випадкової величини *T*. В актуарній математиці вона описує частку померлих на інтервалі $(x, x+1)$ з вихідної групи l_0 новонароджених. А точніше, при малих t величина $-s'(x)t$ наближено описує частку померлих на інтервалі $(x, x+t)$ з вихідної групи l_0 новонароджених.

В актуарній математиці функцію $p(x)$ називають **кривою смертей**. До таблиці тривалості життя також внесена величина $d_x \approx l_0 p(x)$, тож уявлення про характер залежності $p(x)$ від можна одержати з таблиць тривалості життя.

Крива смертей задовольняє такі відомі характеристичні властивості:

1) $p(x) \geq 0$;

2) $\int\limits_0^\infty p(x)dx = 1.$

Нагадаємо також зв'язок між функцією виживання і кривою смертей

$$s(x) = \int_x^\infty p(u)du,\ x \in [0, \infty).$$

Розглянемо ймовірність такої події

$$\mathbf{P}(x < T \le x + t\,|T > x) = \frac{\mathbf{P}(x < T \le x + t)}{\mathbf{P}(T > x)} =$$

$$= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \tag{2.5}$$

Ця ймовірність являє собою ймовірність смерті людини, яка дожила до x років, протягом найближчих t років.

Якщо t мале і $p(u)$ мало змінюється на інтервалі $x < u < x + t$, то, застосовуючи формулу Тейлора, можна виписати наближену рівність

$$\mathbf{P}(x < T \le x + t\,|T > x) \approx \frac{p(x)}{1 - F(x)}t.$$

Величина

$$\mu_x \equiv \frac{p(x)}{1 - F(x)} = \frac{p(x)}{s(x)} \tag{2.6}$$

називається **інтенсивністю смертності** і відіграє важливу роль в актуарній математиці, оскільки при малих t величина $\mu_x t$ наближено виражає ймовірність смерті в інтервалі $(x, x+t)$ людини, яка дожила до x років. У таблицях тривалості життя поряд з іншими характеристиками тривалості життя задана функція

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \approx \frac{p(x)}{s(x)} = \mu_x.$$

Означення (2.6) визначає величину μ_x як $-s'(x)/s(x)$, і його можна розглядати як диференціальне рівняння відносно $s(x)$. Звідки легко одержимо формулу

$$s(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu_u du\right\} \tag{2.7}$$

Використовуючи означення (2.6) і властивості функцій $s(x)$ та $p(x)$, легко одержати властивості інтенсивності смертності:

1) $\mu_x \geq 0$;

2) $\int\limits_0^\infty \mu_u du = +\infty$.

З практичного погляду важливими є такі характеристики тривалості життя, як математичне сподівання та дисперсія. Нагадаємо, що

$$\overset{0}{e}_0 \equiv \mathbf{E}T = \int_0^\infty xp(x)dx.$$

Для розв'язування задач страхування зручно виразити середнє через функцію виживання. Зауважимо, що

$$\int_y^\infty xp(x)dx \geq y\int_y^\infty p(x)dx = ys(y),$$

а інтеграл у лівій частині прямує до нуля при $y \to \infty$, отже, $ys(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Інтегруючи частинами, матимемо

$$\overset{0}{e}_0 = -\int_0^\infty xds(x) = -xs(x)\,\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx \tag{2.8}$$

Дисперсія $VarT$ є другим центральним моментом величини T і обчислюється за формулою

$$VarT = \mathbf{E}T^2 - (\mathbf{E}T)^2,$$

Причому, аналогічно тому як було здійснено вище, можна виразити другий момент величини T через функцію виживання

$$\mathbf{E}T^2 = 2\int_0^\infty xs(x)dx.$$

2.2. Аналітичні закони смертності

Для спрощення розрахунків теоретичного аналізу природно спробувати описати отримані емпіричні дані про функцію виживання чи інші характеристки тривалості життя за допомогою простих аналітичних формул. У минулому намагались отримати універсальний аналітичний вираз для розподілу $F(x)$

випадкової величини T з деяких основних постулатів за аналогією із законами фізики. Ці зусилля з погляду нашого століття здаються достатньо наївними та оточеними певною містикою. Аналітична формула, звичайно, має ту перевагу, що $F(x)$ можна швидко обчислити за невеликим числом параметрів. Зокрема, статистичні процедури полегшуються, коли треба оцінити лиш декілька параметрів. Це може виявитися важливим, якщо доступно небагато даних.

Аналітичні формули мають також деякі привабливі теоретичні властивості. Їх популярність має такий же характер, як і популярність нормального розподілу в статистиці: використання нормальної моделі частково мотивується центральною граничною теоремою, але, в основному, легкістю математичної обробки.

Ось деякі приклади аналітичних розподілів, що носять імена своїх "винахідників":
1) **Де Муавр** (1729) запропонував вважати, що тривалість життя рівномірно розподілена на інтервалі $(0, \omega)$, де ω - граничний вік. Отже, в моделі де Муавра

$$p(x) = 1/\omega,\ F(x) = x/\omega,\ s(x) = 1 - x/\omega,\ \mu_x = 1/(\omega - x), x \in (0, \infty).$$

Очевидно, що закон де Мавра не є адекватною моделлю, оскільки аналізуючи навіть першу формулу, бачимо, що в цій моделі крива смертей є горизонтальною лінією, хоч емпіричні дані вказують на пік у районі 80 років.
2) **Гомпертц** (1825) запрпопонував наблизити інтенсивність смертності μ_x показниковою функцією

$$\mu_x = Be^{\alpha x},\ (B=const>0, \alpha=const\ \geq 1) \tag{2.9}$$

Неважко перевірити, що для функції такого вигляду виконуються властивості інтенсивності смертності. Відповідна функція виживання має вигляд

$$s(x) = \exp\left[-B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha\right],$$

А крива смертей $p(x) = B\exp[\alpha x - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]$, що ліпше відображає закон старіння, ніж закон де Муавра, оскільки ця функція вже має максимум у точці $x = \frac{(\ln\alpha - \ln B)}{\alpha}$ і, крім того, знімається припущення про максимальний вік.
3) Закон (2.9) узагальнений **Мейкхемом** (1860), який наблизив інтенсивність смертності функцією виду $A + Be^{\alpha x},\ A > 0,\ B > 0,\ \alpha \geq 1$. Сталий доданок A дозволяє врахувати ризики для життя пов'язані з нещасними випадками (які мало залежать від віку), а доданок $Be^{\alpha x}$ враховує вплив віку

на смертність. Властивості інтенсивності смертності для цієї функції виконуються, тож запропонована функція справді може розглядатись у якості інтенсивності смертності. У цій моделі

$$s(x) = \exp[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]),$$

$$p(x) = (A + Be^{\alpha x}) \exp[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]$$

4) **Вейбулл** (1939) запропонував наближати інтенсивність смертності більш простою степеневою функцією виду kx^n, $n > 0$. Відповідно функція виживання має вигляд

$$s(x) = \exp\left(-kx^{n+1}/(n+1)\right),$$

а крива смертей

$$p(x) = kx^n \exp(-kx^{n+1}/(n+1)).$$

2.3. Залишковий час життя

Страхова компанія має справу з конкретними людьми, які дожили до певного віку. Статистичні властивості тривалості життя таких людей суттєво відрізняються від властивостей тривалості життя новонароджених. Якщо людина віком x (позначатимемо (x)) звернулася до страхової компанії, то вже відомо, що вона точно прожила x років, і тому всі випадкові події, пов'язані з нею, повинні розглядатися за умови $T > x$. У цьому випадку, як правило, розглядають не величину T, а **залишковий час життя** $T_x = T - x$.

Імовірність $P(T_x \leq t)$ в актуарній математиці позначається ${}_tq_x$ і

$${}_tq_x \equiv \mathbf{P}(T_x \leq t) = \mathbf{P}(T - x \leq t\,|T > x) = \frac{\mathbf{P}(x < T < x+t)}{\mathbf{P}(T > x)} =$$

$$= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \tag{2.10}$$

Ця ймовірність виражає ймовірність смерті людини (x) протягом найближчих t років.

Додаткова ймовірність $P(T_x > t)$позначається в актуарній математиці ${}_tp_x$ і виражає ймовірність того, що людина (x) точно проживе принаймні t років. Маємо

$$ {}_tp_x \equiv \mathbf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (2.11)$$

Випадок $t = 1$ відіграє особливо важливу роль і зустрічається найчастіше. Як і раніше, в такому випадку будемо упускати передній індекс у вищенаведених позначеннях.

$$ q_x = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)},\ p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)}. \qquad (2.12)$$

Очевидне просте співвідношення

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+1)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+2)}{s(x+1)} \cdot .. \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t-1)} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot .. \cdot p_{x+t-1}.$$

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що людина (x) проживе ще t років, але помре протягом наступних u років. Позначимо ймовірність такої події через ${}_{t|u}q_x$ і

$$ {}_{t|u}q_x \equiv \mathbf{P}(t < T_x \le t+u) = {}_{t+u}q_x -{}_t q_x = {}_tp_x -{}_{t+u} p_x.$$

Використовуючи формулу (2.12) чи (2.11), виразимо цю ймовірність через основну функцію нашої теорії – функцію виживання

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \qquad (2.13)$$

У випадку $u = 1$ позначення знов зміниться і матимемо

$$ {}_{t|}q_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)} \qquad (2.14)$$

Інтенсивність смертності, пов'язана з величиною T_x співвідношенням

$$ \mu_x(t) = \frac{p_{T_x}(t)}{\overline{F_{T_x}}(t)} = \mu_{x+t}.$$

Це співвідношення означає, що інтенсивність смертності через час t для людини (x) дорівнює інтенсивності смертності у віці $x+t$ новонародженого, тобто інтенсивність смертності в даному віці $x+t$ не залежить від прожитих років.

Математичне сподівання залишкового часу життя в актуарній математиці позначають через $\overset{0}{e}_x$ і може бути виражене через функцію виживання наступним чином

$$\overset{0}{e}_x \equiv \mathbf{E}T_x = \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty s(u)du$$

2.4. Обмежена тривалість життя. Задача інтерполяції для функції виживання

Розглянемо випадкову величину $K_x \equiv [T_x]$, яку називатимемо обмеженою майбутньою тривалістю життя. Це дискретна випадкова величина та її стохастична природа характеризується розподілом $P(K_x = k),\ k = 0, 1, 2, ..,$ причому очевидна рівність

$$\mathbf{P}(K_x = k) = \mathbf{P}(k \leq T_x < k+1) = {}_{k|}q_x = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} \quad (2.15)$$

Математичне сподівання випадкової величини $\mathbf{E}K_x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(K_x = k)$ позначається e_x і справедлива рівність

$$e_x \equiv \mathbf{E}K_x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(K_x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_x \geq k) = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k) \quad (2.16)$$

Аналогічно для $\mathbf{E}\{K_x\}^2$ матимемо

$$\mathbf{E}\{K_x\}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbf{P}(K_x = k) = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)s(x+k) =$$

$$= \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} ks(x+k) - e_x.$$

Ми визначили обмежену майбутню тривалість життя K_x через точну майбутню тривалість життя T_x і виразили характеристики величини K_x через характеристики величини T_x. Але реальна статистика стосується саме обмеженої тривалості життя K_x, причому лише для цілих значень x (у роках). Це пов'язано як зі зручністю збору статистичних даних, так і з традиційною формою їх представлення в таблицях тривалості життя, де аргументи набувають лише цілі значення. Отже, виникає задача визначення характеристик величини T_x через відомі характеристики величини K_x (причому лише для цілих значень). Для цілих значень t і x можна абсолютно точно визначити розподіл T_x через розподіл K_x

$$\mathbf{P}(T_x \leq t) = \mathbf{P}(K_x \leq t-1),\ t = 1, 2, 3, ..$$

Отже, наша задача зводиться до задачі інтерполяції. При цьому достатньо розглянути задачу інтерполяції для функції виживання $s(x)$, оскільки інші величини можуть бути виражені через $s(x)$. В актуарній математиці зазвичай припускають той чи інший вид функції $s(x)$ між вузлами інтерполяції, тобто одержують шукану функцію $s(x)$, "склеюючи"в цілих точках більш прості функції.

Розглянемо такі три припущення

I. Рівномірний розподіл смертей

Найпростіша інтерполяція лінійною функцією

$$s(x) = a_n + b_n x,\ n \leq x \leq n+1.$$

Оскільки значення $s(n)$ і $s(n+1)$ відомі, то з системи

$$\begin{cases} a_n + b_n n = s(n), \\ a_n + b_n(n+1) = s(n+1) \end{cases}$$

можна визначити коефіцієнти

$$\begin{cases} a_n = (n+1)s(n) - ns(n+1), \\ b_n = s(n+1) - s(n). \end{cases}$$

Отже,

$$s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1),\ n \leq x \leq n+1 \tag{2.17}$$

Якщо x подати у вигляді $x = n + t$, де $0 \leq t \leq 1$, то формулу (2.17) можна подати у вигляді

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1),\ 0 \leq t \leq 1 \tag{2.18}$$

Для щільності відповідно матимемо

$$p(x) = -s'(x) = s(n) - s(n+1), n < x < n+1. \tag{2.19}$$

У цьому випадку для інтенсивності смертності справедливе таке наближення

$$\mu_x = \frac{s(n) - s(n+1)}{(n+1)s(n) - ns(n+1) - x[s(n) - s(n+1)]} = \frac{q_n}{1-(x-n)q_n}, \; n < x < n+1 \tag{2.20}$$

чи те саме, що

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1-tq_n}, 0 < t < 1.$$

Зауважимо, що розглядуване наближення викликає зростання інтенсивності смертності між вузлами інтерполяції. А в цілих точках щільність і інтенсивність смертності не визначені.

Розглянемо величину ${}_tq_n$, n - ціле,$t \in (0,1)$

$${}_tq_n = \frac{s(n) - s(n+t)}{s(n)} = t\frac{s(n) - s(n+1)}{s(n)} = t \cdot q_n,$$

далі, для цілого n і $(t, t+u) \subset (0,1)$

$${}_{t|u}q_n = (t+u) \cdot q_n - {}_tq_n = (t+u) \cdot q_n - t \cdot q_n = u \cdot q_n$$

Отже, в припущенні про лінійну інтерполяцію функції виживання ймовірність смерті протягом частини року пропорційна довжині цієї частини. Справедливе й обернене твердження: якщо ймовірність смерті протягом частини року пропорційна довжині цієї частини, то між двома цілими значеннями функція виживання лінійна. Справді,

$${}_tq_n = 1 - \frac{s(n+t)}{s(n)}, \; q_n = 1 - \frac{s(n+1)}{s(n)}$$

і якщо ${}_tq_n = t \cdot q_n$, тоді

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1).$$

Введемо в розгляд випадкову величину τ_x, яка являє собою дробову частину величини T_x: $\tau_x \equiv \{T_x\}$. Ця величина описує момент смерті в середині року. Її умовний розподіл при умові, що смерть настала у віці $x+n$ років, є

$$\mathbf{P}\{\tau_x \le t \,|K_x = n\} = \mathbf{P}\{T_x - K_x < t\,|K_x = n\} = \mathbf{P}\{T_x \le n+t\,|K_x = n\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{T_x \le n+t \,|n \le T_x < n+1\right\} = \frac{\mathbf{P}\left\{n \le T_x < n+t\right\}}{\mathbf{P}\left\{n \le T_x < n+1\right\}} =$$

$$= \frac{s(x+n) - s(x+n+t)}{s(x+n) - s(x+n+1)} = t,\ 0 \le t \le 1$$

Справа стоїть функція розподілу випадкової величини, що рівномірно розподілена на (0,1). Зауважимо також, що функція розподілу величини τ_x не залежить від n.

Справедливе й обернене твердження: якщо величина τ_x рівномірно розподілена на відрізку (0,1) і не залежить від *K*, то між двома сусідніми цілими значення функція виживання лінійна.

II. Стала інтенсивність смертності

Будемо наближати функцію виживання $s(x)$ на відрізку $(n, n+1)$ показниковою функцією $a_n e^{-b_n x}$. Оскільки значення $s(n)$ і $s(n+1)$ відомі, то із системи

$$\begin{cases} a_n e^{-b_n n} = s(n), \\ a_n e^{-b_n (n+1)} = s(n+1) \end{cases}$$

можна визначити коефіцієнти

$$\begin{cases} a_n = s(n)_n^{-n}, \\ b_n = -\ln p_n, \end{cases}$$

де $p_n = \frac{s(n+1)}{s(n)}$ - величина, яка була введена вище, як ймовірність того, що людина (n) точно проживе принаймні рік.

Отже,

$$s(x) = s(n) p_n^{x-n}, \ n \leq x \leq n+1. \tag{2.21}$$

Записуючи x у вигляді $x = n + t$, де $0 \leq t \leq 1$, матимемо

$$s(n+t) = s(n) p_n^t, \ 0 \leq t \leq 1. \tag{2.22}$$

Для щільності відповідно одержимо

$$p(x) = -s(n) p_n^{x-n} \ln p_n, \ n \leq x \leq n+1, \tag{2.23}$$

а для інтенсивності смертності матимемо таке наближення

$$\mu_x = -\ln p_n, \ n \leq x \leq n+1, \tag{2.24}$$

тобто розглядуваній інтерполяції відповідає припущення про сталу інтенсивність смертності між двома днями народження.

III. Припущення Балдуччі

Припущення Балдуччі полягає в інтерполяції лінійними функціями функції $1/s(x)$. Зрозуміло, що одержуються формули аналогічні формулам (2.17), (2.18)

$$\frac{1}{s(x)} = \frac{n+1-x}{s(n)} + \frac{x-n}{s(n+1)}, \ n \leq x \leq n+1,$$

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}, \ 0 \leq t \leq 1.$$

Звідси одержимо при $0 \le t \le 1$

$$s(n+t) = \frac{s(n)s(n+1)}{(1-t)s(n+1) + ts(n)} = \frac{s(n+1)}{p_n + q_n} \tag{2.25}$$

Відповідно матимемо такі формули для щільності й інтенсивності смертності

$$p(n+t) = \frac{s(n+1)q_n}{(p_n + tq_n)^2},\ 0 < t < 1,$$

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + tq_n},\ 0 < t < 1.$$

Припущення Балдуччі призводить до спадання інтенсивності смертності між вузлами інтерполяції.

Розглянемо випадкову величину

$${}_{1-t}q_{n+t} \equiv P(T_{n+t} < 1-t) = 1 - {}_{1-t}p_{n+t} = 1 - \frac{s(n+1)}{s(n+t)} =$$

$$= (1-t)\frac{s(n) - s(n+1)}{s(n)} = (1-t)q_n.$$

Отже, в припущенні Балдуччі ймовірність смерті до чергового дня народження пропорційна часу до цього дня народження. Справедливе і обернене твердження: якщо ймовірність смерті до чергового дня народження пропорційна часу до цього дня народження, то для функції виживання між двома сусідніми цілими значеннями аргументу справедливе припущення Балдуччі.

2.5. Таблиці тривалості життя

Статистичні дані про тривалість життя висвітлені в таблицях тривалості життя. Першу у світі таблицю тривалості життя склав у 1693 році сер Едмунд Галлей (хоча більше визнання цей учений одержав за відкриття комети, названої пізніше кометою Галлея), заклавши тим наукову базу страхування життя. Таблиця Галлея та її послідовниці розглядались як детерміністські закони, тобто кількість смертей у будь-який заданий рік і для будь-якої вікової категорії вважалася конкретним числом, яке можна знайти з таблиці тривалості життя. Але насправді це число випадкове. Тому будь-яка математична трактовка страхування життя повинна опиратися на теорію ймовірностей.

Найпростішим видом таблиць тривалості життя є таблиці, які містять інформацію про статистичні властивості тривалості життя навмання вибраної людини, про яку відомий лише її вік. Такі таблиці називаються спрощеними, чи **загальними**. Вони дозволяють одержати наближену картину смертності. Як правило, до таблиць тривалості життя, для зручності розрахунків, вносяться такі величини: $s(x),\ l_x,\ d_x,\ q_x$. В додатках можна ознайомитись із таблицями тривалості життя людей, які проживають у Чернівецькій області.

Загальні таблиці тривалості життя містять статистичну інформацію про тривалість життя навмання вибраної людини. Та насправді вибір не такий уже й випадковий. Адже страхова компанія має справу не з абстрактними, а абсолютно конкретними людьми, про яких доступна певна інформація (вік, стать, країна проживання, професія, перенесені хвороби, шкідливі звички тощо). Тому зрозуміло, що страхова компанія повинна мати цілий спектр таблиць тривалості життя для різноманітних груп населення. Такі таблиці називаються **таблиці з відбором**.

Цей термін пов'язаний з тим, що люди потрапляють після деякого відбору до групи, для якої складається таблиця. Іноді цей відбір проводиться спеціально, наприклад, медичною комісією перед укладанням угоди, іноді людина сама відбирає себе, заповнюючи анкету, а іноді це відбувається через зовнішні обставини, наприклад, при оформленні пенсії по хворобі.

Смертність серед людей, віднесених до певної групи, залежить не лише від віку, але і від часу, що пройшов від моменту відбору.

Розглянемо, наприклад, групу людей, які успішно пройшли медичний андеррайтинг і уклали договори страхування. Зрозуміло, що ймовірність смерті протягом року для людини з цієї групи істотно менша за ймовірність смерті протягом року навмання вибраної особи того ж віку. Більш цікаво, що ймовірність смерті протягом року для людини з цієї групи, яка щойно пройшла відбір, менша, ніж імовірність смерті протягом року людини з цієї ж групи, такого ж віку, але яка пройшла відбір декілька років тому.

У зв'язку з цим величини, які внсеені до таблиці з відбором, мають два аргументи: x – указує на момент відбору, а t – на час, що пройшов з моменту відбору. Наприклад, $p_{[x]+t}$ – імовірність того, що людина віком $x+t$, яка t років тому пройшла відбір, проживе принаймні рік.

Розглянемо фрагмент таблиці з відбором

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	...
[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$	...
30	$103{\cdot}10^{-5}$	$170{\cdot}10^{-5}$	$209{\cdot}10^{-5}$	$225{\cdot}10^{-5}$	$240{\cdot}10^{-5}$	...
31	$124{\cdot}10^{-5}$	$186{\cdot}10^{-5}$	$222{\cdot}10^{-5}$	$236{\cdot}10^{-5}$	$252{\cdot}10^{-5}$	...
32	$139{\cdot}10^{-5}$	$191{\cdot}10^{-5}$	$231{\cdot}10^{-5}$	$251{\cdot}10^{-5}$	$265{\cdot}10^{-5}$	...
33	$154{\cdot}10^{-5}$	$207{\cdot}10^{-5}$	$244{\cdot}10^{-5}$	$262{\cdot}10^{-5}$	$281{\cdot}10^{-5}$	...
34	$175{\cdot}10^{-5}$	$212{\cdot}10^{-5}$	$251{\cdot}10^{-5}$	$279{\cdot}10^{-5}$	$297{\cdot}10^{-5}$	...

Табл. 3.1.

Тонкий статистичний аналіз указує на те, що вплив відбору триває необмежено довго. Але залежність характеристик смертності від часу, що пройшов з моменту відбору, швидко зменшується, і через деякий час ці характеристики залежатимуть лише від досягнутого віку. Підкреслимо, що сам вплив відбору зберігається в тому розумінні, що ці характеристики відрізняються від популяційних.

Проміжок часу r, після якого залежністю від моменту відбору можна нехтувати і розглядати всі характеристики тривалості життя як функції досягнутого віку, називається **періодом дії відбору**.

Розглянемо таблицю наведену вище. Для віку x=34 матимемо такі ймовірності смертності залежні від проміжку часу t, що пройшов з моменту відбору:

t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
$175{\cdot}10^{-5}$	$207{\cdot}10^{-5}$	$231{\cdot}10^{-5}$	$236{\cdot}10^{-5}$	$240{\cdot}10^{-5}$

Очевидно, що спочатку вплив відбору істотний, але вже останні два значення дуже близькі. Тому наближено можна вважати, що період дії відбору дорівнює трьом рокам, і варто замінити в цій таблиці всі стовпці, що відповідають $t \geq 3$, одним стовпцем, який би давав значення q_x лише як функції віку. Одержана таблиця буде мати вигляд

	t=0	t=1	t=2	
[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}
30	$103{\cdot}10^{-5}$	$170{\cdot}10^{-5}$	$209{\cdot}10^{-5}$	$229{\cdot}10^{-5}$
31	$124{\cdot}10^{-5}$	$186{\cdot}10^{-5}$	$222{\cdot}10^{-5}$	$241{\cdot}10^{-5}$
32	$139{\cdot}10^{-5}$	$191{\cdot}10^{-5}$	$231{\cdot}10^{-5}$	$254{\cdot}10^{-5}$
33	$154{\cdot}10^{-5}$	$207{\cdot}10^{-5}$	$244{\cdot}10^{-5}$	$267{\cdot}10^{-5}$
34	$175{\cdot}10^{-5}$	$212{\cdot}10^{-5}$	$251{\cdot}10^{-5}$	$283{\cdot}10^{-5}$

Табл. 3.2.

Така таблиця називається **таблицею з відбором обмеженої дії.**

Актуарій страхової компанії повинен провести велику дослідницьку роботу, щоб скласти таблицю, яка б відповідала страховому продукту.

Таблиці, про які йшла мова вище, враховували лише зміну смертності залежно від віку, а у випадку таблиць з відбором – ще й від моменту відбору. Хоча на смертність впливає великий ряд факторів. Найбыльш важливий з них – це стать застрахованого. Наприклад, у віці від 20 до 40 років смертність серед чоловіків майже в 4 рази менша ніж у жінок. А для ряду страхових продуктів, наприклад, страхування непрацездатності, ризик вищий для жінок. Тому для чоловіків і жінок слід використовувати різні таблиці тривалості життя.

Вплив паління також загальновизнаний. У середньому віці паління збільшує ймовірність смерті в 2-3 рази, а для людей похилого віку – майже не залежить від фактору паління.

У випадку відбору смертність залежить не лише від моменту відбору, а й від характеру відбору. Наприклад, якщо при укладанні договору страхування життя оцінювання стану здоров'я проводиться лише на основі анкетування, то зменшення смертності по відношенню до популяційної не буде таким значним, як у випадку медичного обстеження.

Усі таблиці, які необхідні для актуарних розрахунків, повинні складатися на основі детальних, реальних, надійних статистичних даних. На дуже розвинених страхових ринках США, Великобританії та ряду інших країн, ці дані справді доступні. На жаль, така статистика в нашій державі майже відсутня. Дані дуже нестійкі, а їх динаміка незрозуміла. Наприклад, неясно, як статистика смертності і захворюваності залежить від рівня андеррайтингу, процедур урегулювання збитків, методів продажу тощо. У цій ситуації страховики просто використовують надзвичайний консервативний підхід до оцінки смертності, непомірно завишаючи вартість страхового продукту.

2.6. Модельні задачі до розділу 2

Модельна задача 2.1. *У таблиці. 2.1 наведені значення функції виживання.*

Таблиця 2.1

x	$s(x)$	x	$s(x)$	x	$s(x)$
0	1,000	40	0,949	80	0,432
5	0,985	45	0,936	85	0,280
10	0,983	50	0,915	90	0,142
15	0,982	55	0,883	95	0,050
20	0,977	60	0,837	100	0,012
25	0,971	65	0,771	105	0,002
30	0,965	70	0,682	110	0
35	0,968	75	0,568		

Підрахуйте середнє значення і дисперсію числа представників вихідної групи $\mathrm{l}_0 = 1000$ *новонароджених, які помруть у віці від* 50 *до* 70 *років.*

Розв'язання. Нехай T_i — тривалість життя i-го представника групи. Загальне число членів групи, які помруть в віці від 50 до 70 років, ${}_{20}D_{50}$, можна представити у вигляді суми

$$ {}_{20}D_{50} = \sum_{i=1}^{l_0} I(50 < T_i \leq 70). $$

Звідси для середнього числа представників групи, померлих в віці від 50 до 70 років, маємо:

$$ {}_{20}d_{50} \equiv \mathbf{E}{}_{20}D_{50} = \sum_{i=1}^{l_0} \mathbf{E}I(50 < T_i \leq 70) = \sum_{i=1}^{l_0} \mathbf{P}(50 < T_i \leq 70) = \sum_{i=1}^{l_0} (s(50) - s(70) = $$

$$ = l_0(s(50) - s(70)) = 1000 \cdot (0,915 - 0,682) = 233(\text{люд.}) $$

Для дисперсії випадкової величини ${}_{20}D_{50}$ в силу незалежності випадкових величин T_i маємо:

$$ \mathbf{Var}{}_{20}D_{50} = 100 \cdot \mathbf{Var}I(50 < T_i \leq 70). $$

Але для індикатора $I(A)$ будь-якої події A

$$ \mathbf{Var}I(A) = \mathbf{E}\left\{I(A)\right\}^2 - \left\{\mathbf{E}I(A)\right\}^2 = \mathbf{E}\left\{I(A)\right\} - \left\{\mathbf{E}I(A)\right\}^2 = $$

$$ = \mathbf{P}(A) - \left\{\mathbf{P}(A)\right\}^2 = \mathbf{P}(A) \cdot (1 - \mathbf{P}(A)). $$

Таким чином,

$$ \mathbf{Var}{}_{20}D_{50} = 1000 \cdot \frac{{}_{20}d_{50}}{1000} \left(1 - \frac{{}_{20}d_{50}}{100}\right) = 233[1 - 233/1000] = 178,711. $$

Модельна задача 2.2. *Нехай функція виживання задається формулою*

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}, 0 \le x \le 110.$$

Підрахуйте ймовірність q_{50} *того, що людина у віці* 50 *років помре на протязі найближчого року, і середній залишковий час життя.*

Розв'язання. За формулою умовної ймовірності матимемо:

$$q_{50} \equiv \mathbf{P}(T_{50} < 1) \equiv \mathbf{P}(T{-}50 < 1|\, T > 50) = \frac{\mathbf{P}(50 < T < 51)}{\mathbf{P}(T > 50)} = \frac{s(50) - s(51)}{s(50)} =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{1 - 51/110}}{\sqrt{1 - 50/110}} = 1 - \sqrt{\frac{59}{60}} \approx 0,84\%.$$

Додаткова функція розподілу величини T_{50} задається формулою:

$$\mathbf{P}(T_{50} > t \equiv \mathbf{P}(T{-}50 > t|\, T > 50) = \frac{\mathbf{P}(T > t + 50)}{\mathbf{P}(T > 50)} = \frac{s(50 + t)}{s(50)} = \sqrt{1 - t/60}$$

при $0 \le t \le 60$. Тому

$$\overset{0}{e}_{50} \equiv \mathbf{E}T_{50} = \int_0^{60} \sqrt{1 - t/60}dt = \frac{2}{3} \cdot (-60) \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right)^{3/2} |_0^{60} = 40(\text{років}).$$

Модельна задача 2.3. *Тривалість життя деякої конкретної людини у віці* 25 *років описується законом де Муавра з граничним віком* $\omega = 100$ *років. У наступному році, він передбачає приймати участь в серії польотів на повітряній кулі. Тому впродовж цього року його смертність характеризуватиметься сталою інтенсивністю* $\mu = 0,1$. *Як це вплине на його середній частковий залишковий час життя впродовж* 11 *найближчих років?*

Розв'язання. Шукана величина $e^0{}_{25:\overline{11|}}$ у загальному випадку може бути обчислена за формулою:

$$\overset{0}{e}_{25:\overline{11|}} = \int_0^{11} tp_x(t)dt + nP(T_x > n) = \int_0^n s_x(t)dt.$$

У вихідній ситуації (без участі в польотах), залишковий час життя T_{25} рівномірно розподілений на проміжку $(0, 75)$ і тому

$$\overset{0}{e}_{25:\overline{11|}} = \int_0^{11} (1 - \frac{t}{75})dt = \frac{1529}{150} \approx 10,1933(\text{років}).$$

В цьому ж випадку, інтенсивність смертності дорівнює

$$\mu_t = \frac{p(t)}{s(t)} = \frac{1/100}{1-t/100} = \frac{1}{100-t}, \ 0 < t < 100.$$

Участь в польотах приводить до того, що для $t \in (25, 26)$ інтенсивність смертності збільшується до величини $0,1$ (раніше в цьому віці інтенсивність смертності була величиною порядку $0,01$):

$$\mu_t^* = \begin{cases} 0,1, & 25 < t < 26, \\ \frac{1}{100-t}, & 26 < t < 100. \end{cases}$$

Тому функція виживання $s_{25}(t) \equiv \mathbf{P}(T_{25} > t)$ набуде вигляду:

$$s_{25}^*(t) = \exp\left(-\int_{25}^{25+t} \mu_u^* du\right) = \begin{cases} e^{-0,1t}, \ 0 < t < 1, \\ e^{-0,1t} \cdot \frac{75-t}{74}, 1 < t < 75. \end{cases}$$

Відповідно,

$$\overset{0*}{e}_{25:\overline{11|}} = \int_0^{11} s_{25}^*(t)dt = \int_0^1 s_{25}^*(t)dt + \int_1^{11} s_{25}^*(t)dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-0,1t}dt + e^{-0,1}\int_1^{11} \frac{75-t}{74}dt \approx 9,3886.$$

Таким чином, участь в польотах призведе до зменшення очікуваної часткової тривалості життя приблизно на $0,8047$ (років).

Модельна задача 2.4. *Використовуючи дані таблиці. 2.2, знайдіть* $\overset{0}{e}_{30:\overline{5|}}$ *в припущенні про лінійну інтерполяцію функції виживання між цілими роками.*

Таблиця 2.2

x	30	31	32	33	34	35
l_x	96 307	96 117	95 918	95 709	95 490	95 260

Розв'язання.

$$\overset{0}{e}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n tp_x dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} tp_x dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 k{+}\tau p_x dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 kp_x{\cdot}\tau p_x{+}kd\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} kp_x \cdot \int_0^1 (1-\tau q_{x+k})d\tau = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} tp_x dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 k+\tau p_x dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 kp_x \cdot \tau p_x + kd\tau = \sum_{k=0}^{n-1} kp_x \cdot \int_0^1 (1-\tau q_{x+k}) d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} kp_x \cdot (1-\frac{1}{2} q_{x+k}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} (1+\frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}}) = \frac{1}{2l_x} (\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} + \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k+1}) = \frac{1}{2l_x} (\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} + \sum_{k=1}^{n-1} l_{x+k}) =$$

$$= \frac{1}{2l_x} (2 \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} + l_x - l_{x+n}) = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{n} l_{x+k} + \frac{1}{2} (1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}).$$

Використовуючи цю формулу, матимемо:

$$\overset{0}{e}_{30:\overline{5}|} \approx 4,97.$$

Модельна задача 2.5. *Відомо що для деякого віку x*

$$tp_x = 1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}, \ \ 0 < t < 100.$$

Знайдіть $\overset{0}{e}_x$.

Розв'язання. Величина tp_x– це $P(T_x > t)$, тобто, фактично додаткова функція розподілу випадкової величини T_x. Тому

$$\overset{0}{e}_x \equiv \mathbf{E} T_x = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_x > t) dt = \int_0^{100} \left(1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}\right) dt = 100 - \frac{100}{2,5} = 60(\text{років}).$$

Модельна задача 2.6. *Відомо, що*

$$e_{75} = 10,5, \ \ e_{76} = 10,0, \ \ e_{77} = 9,5.$$

Підрахуйте ймовірність того, що людина у віці 75 років доживе до 77 років.

Розв'язання. Перш за все відзначимо, що

$$e_x \equiv \mathbf{E} K_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(K_x \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_x \geq n).$$

Але

$$\mathbf{P}(T_x \geq n) \equiv_n p_x = p_x \cdot_{n-1} p_{x+1}.$$

Тому

$$e_x = p_x \sum_{n=1}^{\infty} p_{x+1} = p_x \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_{x+1} = p_x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_n p_{x+1}\right).$$

А сума $\sum_{n=1}^{\infty} {}_np_{x+1}$ за наведеними вище міркуваннями, дорівнює e_{x+1}. Отже,

$$e_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1}),$$

тобто

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}},$$

і ми можемо підрахувати

$$p_{75} = \frac{10,5}{11},\ p_{76} = \frac{10}{10,5}.$$

Шукана ймовірність

$${}_2p_{75} = p_{75} \cdot p_{76} = \frac{10}{11} \approx 0,909.$$

Модельна задача 2.7. *Як зміниться середня обмежена тривалість життя людини у віці x років, якщо впродовж найближчого року її інтенсивність смерті збільшиться на величину $\delta_t = 0,03 - 0,01t, 0 < t < 1$?*

Розв'язання. Нехай μ_t – початкова інтенсивність смертності. За умовою нова інтенсивність смертності μ_t^* задається формулою:

$$\mu_{x+t}^* = \begin{cases} \mu_{x+t} + \delta_t, 0 \le t \le 1, \\ \mu_{x+t}, t > 1. \end{cases}$$

Тому, нова ймовірність дожити до $x + 1$ років p_x^* рівна

$$p_x^* = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t}^* dt\right) = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t}^* dt\right) \cdot \exp\left(-\int_0^1 \delta_t dt\right) = p_x e^{-0,025}.$$

Оскільки смертність після $x + 1$ років не змінюється,

$$e_{x+1}^* \equiv e_{x+1},$$

то, використовуючи формулу

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1}),$$

для нової середньої обмеженої тривалості життя e_x^*, матимемо:

$$e_x^* = p_x^*(1 + e_{x+1}^*) = p_x e^{-0,025}(1 + e_{x+1}) = e^{-0,025} \cdot e_x.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{e}_\mathrm{x}^*}{e_x} = e^{-0,025} \approx 0,975.$$

Інакше кажучи, середня обмежена тривалість життя зменшиться на $2,5\ \%$.

Модельна задача 2.8. *У таблиці 2.3 наведений фрагмент популяційної таблиці тривалості життя населення США в 1979-1981 рр.*

Передбачаючи, що відомі лише значення l_{20}, l_{25}, l_{30}, *а смертність від* 20 *до* 34 *років описується законом Гомпертца, підрахуйте наближені значення* l_x *для* $x \in [20, 34]$.

Таблиця 2.3.

x	l_x	x	l_x	x	l_x
20	97741	25	97110	30	96477
21	97623	26	96982	31	96350
22	97499	27	96856	32	96220
23	97370	28	96730	33	96088
24	97240	29	96604	34	95951

Розв'язання. В моделі Гомпертца інтенсивність смертності на розглядуваному проміжку $20 \le t \le 34$ наближається показниковою функцією вигляду $Be^{\alpha t}$, де $\alpha > 0, \; B > 0$— деякі параметри.

Тоді при $t \in [20, 34]$ функція l_t може бути записана у вигляді:

$$l_t = l_0 \exp\left(-\int_0^t \mu_u du\right) = l_0 \exp\left(-\int_0^{20} \mu_u du\right) \cdot \exp\left(-\int_{20}^t \mu_u du\right) =$$

$$= l_{20} \exp\left(-\int_{20}^t \mu_u du\right) = l_{20} \exp\left(-\frac{B}{\alpha} e^{\alpha u}\Big|_{20}^t\right). =$$

$$= l_{20} \exp\left(-B\frac{e^{\alpha t} - e^{20\alpha}}{\alpha}\right)$$

Отже,

$$l^{25} = l_{20} \exp(-B\frac{e^{25\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}), \;\; l_{30} = l_{20} \exp(-B\frac{e^{30\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}).$$

Звідси

$$\ln l_{20} - \ln l_{25} = B\frac{e^{25\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}, \; \ln l_{20} - \ln l_{30} = \; B\frac{e^{30\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}.$$

Розділивши ці рівності почленно, отримаємо

$$e^{5\alpha} = \frac{\ln l_{25} - \ln l_{30}}{nl_{20} - \ln l_{25}} \equiv A,$$

звідки

$$\alpha = \frac{1}{5}\ln A \approx 0,001935.$$

Тепер одержимо

$$B = \alpha\frac{\ln l_{20} - \ln l_{25}}{A^4(A-1)} \approx 0,001240175.$$

Значення величин l_t, отримані за допомогою наближення Гомпертца, наведені в таблиці. 2.4, вони практично не відрізняються від точних значень, наведених в таблиці. 2.3.

Таблиця 2.4

x	l_x	x	l_x	x	l_x
20	97741	25	97110	30	96477
21	97615	26	96984	31	96350
22	97489	27	96857	32	96223
23	97363	28	96730	33	96096
24	97236	29	96604	34	95969

Модельна задача 2.9. *Для прогнозу смертності в групі з 1000 чоловік у віці 95 років на найближчі 3 роки актуарій використовує припущення, що момент смерті рівномірно розподілений всередині останнього року життя. Частина отриманих ним даних наведена в таблиці. 2.5.*

Відновіть цю таблицю, відповідну таблицю смертності для величин $q_x, x = 95, 96, 97$, а також підрахуйте очікуване число тих, що дожили до $97,5$ років, якщо використовується припущення про сталу інтенсивність смертності між цілими роками.

Таблиця 2.5

Вік	**Число доживших**
95	1000
$95,5$	800
96	600
$96,5$	480
97	-
$97,5$	288
98	-

Розв'язання. Припущення про рівномірний розподіл моменту смерті рівносильне лінійній інтерполяції l_{n+t}:

$$l_{n+t} = l_n(1-t) + tl_{n+1}, 0 \le t \le 1.$$

Зокрема,

$$l_{n+0,5} = \frac{l_n + l_{n+1}}{2},$$

отже,

$$l_{n+1} = 2 \cdot l_{n+0,5} - l_n,$$

і тому

$$l_{97} = 960 - 600 = 360,\ \ l_{98}, = 576 - 360 = 216.$$

Далі ,

$$d_{95} = l_{96} - l_{95} = 400,\ \ d_{96} = l_{97} - l_{96} = 240,\ \ d_{97} = l_{98} - l_{97} = 144,$$

$$q_{95} = \frac{d_{95}}{l_{95}} = \frac{400}{1000} = 0,4,\ \ q_{96} = \frac{d_{96}}{l_{96}} = \frac{240}{600} = 0,4,\ \ q_{97} = \frac{d_{97}}{l_{97}} = \frac{144}{360} = 0,4.$$

В припущенні про сталу інтенсивність смертності

$$l_{97+t} = l_{97}e^{-\mu t},\ \ 0 \le t \le 1.$$

Звідси

$$l_{97,5} = l_{97}e^{-0,5\mu} = l_{97}\sqrt{e^{-\mu}} = l_{97}\sqrt{\frac{l_{98}}{l_{97}}} = \sqrt{l_{97} \cdot l_{98}} = \sqrt{360 \cdot 216} \approx 278,85.$$

Модельна задача 2.10. *Таблиця 2.6. містить ймовірності $q_{[x]+t}$. Підрахуйте величину ${}_2q_{[32]+1}$.*

Таблиця 2.6

$[x]$	$t=0$ $q_{[x]}$	$t=1$ $q_{[x]+1}$	$t=2$ $q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
30	$103 \cdot 10^{-5}$	$170 \cdot 10^{-5}$	$209 \cdot 10^{-5}$	$229 \cdot 10^{-5}$	33
31	$124 \cdot 10^{-5}$	$186 \cdot 10^{-5}$	$222 \cdot 10^{-5}$	$241 \cdot 10^{-5}$	34
32	$139 \cdot 10^{-5}$	$191 \cdot 10^{-5}$	$231 \cdot 10^{-5}$	$254 \cdot 10^{-5}$	35
33	$154 \cdot 10^{-5}$	$207 \cdot 10^{-5}$	$244 \cdot 10^{-5}$	$267 \cdot 10^{-5}$	36
34	$175 \cdot 10^{-5}$	$212 \cdot 10^{-5}$	$251 \cdot 10^{-5}$	$283 \cdot 10^{-5}$	37

Розв'язання. Величина ${}_2q_{[32]+1}$ задає ймовірність того, що людина у віці 33 років, яка була відібрана t = 1 рік тому, помре впродовж найближчих двох років (тобто до настання 35 років). Зручно розраховувати величину

$1 -_2 q_{[32]+1}$, що дорівнює ймовірності того, що людина доживе до 35років. Очевидно, людина доживе до 35 років, якщо:

1) вона доживе до 34 років (ймовірність цієї події є $1 -_2 q_{[32]+1}$);

2) за умови, що вона дожила до 34 років, вона доживе до 35 років (оскільки у віці 34 років з моменту відбору пройде 2 роки, ймовірність цієї події є $1 - q_{[32]+2}$).

Отже,

$$1 -_2 q_{[32]+1} = (1 - q_{[32]+1}) \cdot (1 - q_{[32]+2}),$$

тобто

$${}_2q_{[32]+1} = q_{[32]+1} - q_{[32]+2} - q_{[32]+1} \cdot q_{[32]+2} \approx 422 \cdot 10^{-5}.$$

Модельна задача 2.11. *В таблиці 2.7. наведений фрагмент таблиці тривалості життя з відбором, що діє 2 роки.*

Вважаючи, що момент смерті рівномірно розподілений всередині останнього року життя, підрахуйте ${}_{0,9}q_{[60]+0,6}$.

Таблиця 2.7

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
60	80625	79954	78839	62
61	79137	78402	77252	63
62	77575	76770	75578	64

Розв'язання. Оскільки

$${}_uq_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+u}}{l_{[x]+t}},$$

для шуканої величини ${}_{0,9}q_{[60]+0,6}$, матимемо:

$${}_{0,9}q_{[60]+0,6} = \frac{l_{[60]+0,6} - l_{[60]+1,5}}{l_{[60]+0,6}}.$$

В силу припущення про рівномірний розподіл смертей,

$$l_{[60]+0,6} = 0,6 \cdot l_{[60]+1} + 0,4 \cdot l_{[60]} \approx 80222,4,$$
$$l_{[60]+1,5} = 0,5 \cdot l_{[60]+1} + 0,5 \cdot l_{62} = 79396,5,$$

звідки

$${}_{0,9}q_{[60]+0,6} \approx 1,03\,\%.$$

Модельна задача 2.12. *Розглянемо двох людей у віці x і y відповідно. Будемо вважати, що:*

1) час життя першої людини описується законом де Муавра з граничним віком ω;

2) час життя другої людини при $t \geq y$ характеризується сталою інтенсивністю смертності μ;

3) залишкові тривалості життя T_x та T_y незалежні.

Визначте ймовірність того, що (x) помре впродовж найближчих n років $(n + x < \omega)$ і раніше (y).

Розв'язання. Шукана ймовірність може бути виражена як

$$A = \mathbf{P}(T_x \leq n,\, T_x < T_y).$$

За формулою повної ймовірності

$$A = \int_0^n \mathbf{P}(T_y > t) p_x(t) dt,$$

де $p_x(t)$— щільність залишкового часу життя(x). Як неважко показати, T_x описується законом де Муавра з граничним віком $\omega - x$. Тому

$$p_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, 0 < t < \omega - x.$$

Для $\mathbf{P}(T_y > t)$маємо:

$$\mathbf{P}(T_y > t) \equiv \mathbf{P}(T - y > t |\, T > y) = \frac{\mathbf{P}(T > y + t)}{P(T > y)} =$$

$$= \frac{s(y+t)}{s(y)} = \exp\left\{ - \int_y^{y+t} \mu_u du \right\} = e^{-\mu t}.$$

Тому шукана ймовірність має вигляд

$$A = \int_0^n e^{-\mu t} \frac{1}{\omega - x} dt = -\frac{1}{\mu(\omega - x)}\, e^{-\mu t}\Big|_0^n = \frac{1 - e^{-\mu n}}{\mu(\omega - x)}.$$

2.7. Вправи до розділу 2

1) Доведіть, що функція $p(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x/a}$ може розглядатись як крива смертей. Визначте відповідну функцію виживання $s(x)$, інтенсивність смертності μ_x і середню тривалість життя $\overset{0}{e}_0$.

2) Чи може функція $s(x) = \exp(x - 0.7(2^x - 1))$ може розглядатись як функція виживання?

3) Використовуючи таблицю тривалості життя Чернівецької області(див. Додаток), визначіть ймовірність того, що залишковий час життя (20) належить проміжку від 40 до 50 років.

4) Припустимо, що у віці від 30 до 33 років інтенсивність смертності описується формулою $\mu_x = 0.001x$. Обчисліть ${}_{2|}q_{30}$.

5) Припустимо, що $q_{70} = 0.04$, $q_{71} = 0.05$. Обчисліть ймовірність того, що (70) помре у віці 70,5 до 71,5 років у припущенні Балдуччі й у припущенні про рівномірний розподіл смертей.

6) Відомо, що $q_x = 0.12$. Обчисліть ${}_{0.5}q_x$, якщо прийнято припущення про сталу інтенсивність смертності.

7) Використовуючи таблицю 2.6. для ймовірностей $q_{[x]+t}$, обчисліть ${}_2q_{[32]+1}$.

8) Смертність серед застрахованих характеризується сталою інтенсивністю μ, яка є випадковою величиною, рівномірно розподіленою на проміжку (0,2). Знайдіть імовірність того, що навмання вибраний застрахований помре протягом найближчого року.

9) Відомо, що $\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}$, $0 < t < 85$. Обчисліть ${}_{20}p_x$.

10) Спеціалісти припускають, що розробка нового типу ліків збільшить $\overset{0}{e}_0$ на 4 роки. Припускаючи, що смертність описується законом де Муавра, визначіть як зміниться граничний вік.

11) Обчисліть $\overset{0}{e}_{35:\overline{10}|}$, якщо $\mu_t = \begin{cases} 0.01, & t \in (30,40); \\ 0.02, & t \in (30,40). \end{cases}$

12) Інтенсивність смертності описується законом Мейкхама

$$\mu_x = A + e^{2x},\ x \geq 0.$$

Визначте A, якщо ${}_{0,4}p_0 = 0,5$

13) Знайдіть ймовірність ${}_2q_{80,5}$, якщо

$$\mu_{80,5} = 0,0202,\ \mu_{81,5} = 0,0408,\ \mu_{82,5} = 0,0619,$$

і прийнята лінійна інтерполяція для функції виживання між цілими роками.

14) У пана X від колись пишної зачіски до 40 років залишилось 3 волосини (і немає надії, що виростуть нові). Майбутня «смертність» волосин описується такими припущеннями:

    а) ${}_{k|}q_{40} = 0,1 \cdot (k+1),\ k = 0,1,2,3;$
    б) між цілими роками випадіння волосся описується припущенням Балдуччі;
    в) моменти випадіння волосин незалежні.

    Підрахуйте ймовірність того, що у віці 42,5 роки пан X буде абсолютно лисим.

15) Навчання в інституті триває 4 роки. Із першокурсників $q_0 = 15\%$(з різних причин)не переходять на другий курс. З тих, що розпочали навчання на другому, третьому, четвертому курсах $q_1 = 10\%,\ q_2 = 5\%,\ q_3 = 1\%$ на закінчують відповідний курс. Припускаючи, що в середині року момент відрахування має рівномірний розподіл, знайдіть середній час, який студент другого курсу, проведе в університеті протягом найближчих півтора року.

16) Знайти ймовірність того, що людина (20)

    а) доживе до 50 років;
    б) помре у віці від 40 до 70 років.

    Смертність описується таблицею

x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	100000	40	94086	80	35377
5	98067	45	92164	85	19355
10	97855	50	89272	90	10142
15	97679	55	85454	95	6869
20	97290	60	80404	100	3361
25	96794	65	74071	105	1052
30	96192	70	64544	110	381
35	95354	75	51363	115	0

17) Для деякої таблиці з відбором, яка діє два роки відомо, що

$$1 - \frac{q_{[x]}}{q_x} = 2 \cdot \left(1 - \frac{q_{[x]+1}}{q_{x+1}}\right),$$

    а $l_{[32]} = 90,\ l_{32} = 100,\ l_{33} = 90,\ l_{34} = 63$. Обчисліть $l_{[32]+1}$.

18) Тривалість життя учасників пенсійного фонду описується таблицею з відбором, що діє 2 роки. Пан A, якому тепер 31 рік, і пан B, якому 33 роки, стали учасниками фонду у віці 30 і 31, відповідно. Відомо, що ймовірність смерті пана A протягом наступних 4 років дорівнює 0,05. Визначіть ймовірність того, що обидва пани проживуть принаймні два роки.

Розділ 3.

Аналіз деяких моделей страхування життя

3.1. Аналіз короткострокової моделі страхування життя

3.1.1. Точний розрахунок імовірності банкрутства в короткостроковій моделі страхування життя

Коли мова йде про моделі короткострокового страхування, то перш за все мають на увазі, що в розглядуваній моделі не враховується прибуток від інвестування зібраних премій.

Розглянемо найпростішу короткострокову модель функціонування страхової компанії. Вона базується на таких припущеннях:

1) Аналізується фіксований відносно короткий проміжок часу, зазвичай один рік;

2) Кількість укладених договорів страхування N фіксована і невипадкова;

3) Плата за страховку повністю вноситься на початку періоду;

4) Ніяких інших внесків протягом розглядуваного періоду немає;

5) Ми спостерігаємо кожен договір страхування окремо і знаємо статистичні властивості пов'язаного з ним індивідуального позову X_i (оскільки не всі договори призводять до позову, деякі з випадкових величин $X_1, \ldots, X_N$, де X_i – позов від i-го договору дорівнюють нулю).

Для страхової компанії інтерес представляє не конкретний страховий випадок і пов'язана з ним виплата страхової суми, а загальна сума виплат по всіх договорах. Якщо ця сума S перевищує активи компанії u, то страхова компанія не зможе виплатити усі страхові компенсації. У цьому випадку ми говоримо про банкрутство компанії. Отже, ймовірність банкрутства страхової компанії $\mathbf{P}(S > u)$ – це додаткова функція розподілу величини сумарного збитку, де

$$S \equiv \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Ймовірність банкрутства рівна

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_N > u). \tag{3.1}$$

Припустимо, що в моделі (3.1) випадкові величини $X_1, \ldots, X_N$ – незалежні (тобто, виключаються катастрофічні нещасні випадки, які несуть за собою позови одразу по декількох договорах).

Оскільки сумарний позов являє собою суму незалежних випадкових величин, його розподіл може бути обчислений за допомогою класичних теорем і методів теорії ймовірності.

Перш за все використання згорток. Нагадаємо, що якщо η_1 і η_2 – дві незалежні додатні випадкові величини з функціями розподілу $F_1(x)$ і $F_2(x)$ відповідно, тоді функція розподілу їх суми $\eta_1 + \eta_2$ може бути обчислена за формулою

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y)dF_2(y) \tag{3.2}$$

Операцію, яка ставить у відповідність двом функціям розподілу третю за правилом (3.2), називають згорткою функцій розподілу. Застосовуючи формулу (3.2), можна обчислити функцію розподілу суми довільної кількості доданків.

Якщо випадкові величини η_1 і η_2 володіють щільностями $p_1(x)$ і $p_2(x)$, то щільність суми обчислюється за формулою

$$f(x) = \int_0^x p_1(x-y)p_2(y)dy. \tag{3.3}$$

Якщо випадкові величини η_1 і η_2 – дискретні, то, як правило, працюють із розподілами

$$p_1(n) = P(\eta_1 = n),\ p_2(n) = P(\eta_2 = n), n \geq 0. \tag{3.4}$$

Розподіл суми $p(n) = P(\eta_1 + \eta_2 = n)$ може бути визначений за формулою

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_1(k) \cdot p_2(n-k) \tag{3.5}$$

У випадку коли, мова йде про страхування життя, величини індивідуальних позовів $X_1, .., X_n$ дискретны, оскільки найчастіше договори укладаються на таких умовах:

1) Клієнт виплачує страховій компанії певну суму (премію), а компанія забов'язується у випадку смерті застрахованого протягом року виплатити його спадкоємцям *b* грн. (і не платить нічого, якщо застрахований доживе до кінця року). Для цього виду страхування індивідуальний позов X_i набуває двох значень: 0 чи *b* з деякими ймовірностями p_x і $q_x = 1 - p_x$.

2) Договір страхування, який враховує причину смерті. У простішому випадку він вигдядає так: людина сплачує компанії певну суму, а страхова компанія забов'язується виплатити спадкоємцям застрахованого суму b_1, якщо застрахований загине протягом року внаслідок нещасного випадку, і b_2 – у випадку смерті застрахованого протягом року від "природних " причин. Як правило, $b_1 > b_2$. Для цього виду страхування індивідуальний позов $_i$ набуває трьох значень: 0, b_1, b_2 з деякими ймовірностями $p_x, q^{(1)}, q^{(2)}$. Якщо вік застрахованого на момент укладання договору дорівнює *x* років, то ймовірності $q^{(1)}, q^{(2)}$ пов'язані з введеною раніше ймовірністю q_x очевидним співвідношенням: $q^{(1)} + q^{(2)} = q_x$.

Отже, розглядатимемо дискретні моделі індивідуальних позовів. У цьому випадку для розрахунку згортки послідовностей $p_1(n)$ і $p_2(n)$ зручно утворити матрицю виду

$$\begin{array}{cccc}
p_1(0)p_2(0) & p_1(0)p_2(1) & p_1(0)p_2(2) & \dots \\
p_1(1)p_2(0) & p_1(1)p_2(1) & p_1(1)p_2(2) & \dots \\
p_1(2)p_2(0) & p_1(2)p_2(1) & p_1(2)p_2(2) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Додаючи значення по рядках $i + j = k$, паралельно побычный діагоналі, одержимо

$$p(k) = p_1(k)p_2(0) + p_1(k-1)p_2(1) + \ldots + p_1(0)p_2(k).$$

Обчислення розподілу суми за допомогою згорток надзвичайно кропітка справа, особливо, якщо це здійснювати вручну. Іноді для аналітичних розрахунків зручніше використовувати твірні функції.

Нагадаємо, що твірною функцією $\varphi(z)$ невід'ємної дискретної випадкової величини η з розподілом $p(n) = \mathbf{P}(\eta = n)$ називається математичне сподівання величини z^η

$$\varphi(z) = \mathbf{E}z^\eta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n). \tag{3.6}$$

Найважливіші властивості твірних функцій такі:

1) Твірна функція однозначно визначає розподіл випадкої величини. Справді, щоб визначити $p(n)$ за його твірною функцією $\varphi(z)$, можна розкласти $\varphi(z)$ в ряд Тейлора $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \varphi^{(n)}(0)/n!$. Коефіцієнт при z^n і буде ймовірністю $p(n)$.

2) $\varphi'(1) = \mathbf{E}\eta,\ \varphi''(1) = \mathbf{E}\eta^2 - \mathbf{E}\eta$, а отже

$$\mathbf{Var}\eta = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2$$

3) Якщо випадкові величини η_1 і η_2 незалежні, то твірна функція їх суми дорівнює добутку твірних функцій доданків:

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z)$$

Справді, $\varphi(z) = \mathbf{E}z^{\eta_1+\eta_2} = \mathbf{E}z^{\eta_1}\mathbf{E}z^{\eta_2} = \varphi_1(z)\varphi_2(z)$.

3.1.2. Наближені методи обчислення ймовірності банкрутства

Зазвичай число застрахованих у страховій компанії дуже велике, тому підрахунок імовірності банкрутства припускає розрахунок функції розподілу суми великої кількості доданків. У цьому випадку застосування ЕОМ може призвести до проблеми, пов'язаної з малою ймовірністю. Проте обставини, які ускладнюють точний розрахунок, відкривають можливість швидкого і простого наближеного розрахунку. Це пов'язано з тим, що при збільшенні N імовірність $\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_N \leq x)$ часто має певну границю, яку можна прийняти як наближене значення цієї ймовірності. Точність подібних наближень зазвичай дуже велика і задовольняє практичні потреби. Основним є нормальне (або гаусове) наближення.

Гаусове наближення базується на центральній граничній теоремі теорії ймовірності. У найпростішому формулюванні ця теорема має вигляд: якщо випадкові величини $X_1, \ldots, X_N$ незалежні і однаково розподілені з середнім *a* і дисперсією σ^2, тоді при $N \to \infty$ функція розподілу центрованої і нормованої суми

$$S^* = \frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} = \frac{X_1 + \ldots + X_N - Na}{\sigma\sqrt{N}}$$

має границю, функція розподілу якої рівна

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Отже, якщо число доданків велике, можна записати наближену рівність

$$\mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} < x\right) \approx \Phi(x). \tag{3.7}$$

Існують детальні таблиці як для функції розподілу $\Phi(x)$, так і для щільності нормального розподілу з середнім 0 і дисперсією 1 (див. додаток).

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-x^2/2}.$$

3.1.3. Принципи призначення страхових премій

Питання про те, яку платуню страхова компанія повинна призначити за те, що бере на себе той або інший ризик, дуже складне. При його розв'язанні враховується велика кількість різних факторів: можливість висунення позову, його очікувана величина і можливі флуктуації, зв'язок з іншими ризиками, які вже прийняті компанією, організаційні витрати компанії на ведення справи, співвідношення між попитом і пропозицією з даного виду ризиків на ринку страхових послуг та інше. Але основним є принцип еквівалентності фінансових обов'язків страхової компанії та застрахованого. У розглянених простих видах страхування, коли платня за страховку повністю вноситься в момент укладання договору, обов'язки застрахованого полягають в оплаті премії p. Обов'язки компанії виражаються у виплаті позову X_i. Але не можна виразити принцип еквівалентності зобов'язань рівнянням $p = X_i$, тому що p – детермінована величина, а X_i – випадкова.

Щоб розв'язати цю проблему, можна спробувати замінити випадкову величину X_i її середнім значенням $\mathbf{E}X_i$, тобто призначити в якості премії за страховку очікувану величину позову.

У рамках даної моделі, підрахуємо ймовірність банкрутства.

Оскільки як платня p_i за *i*-тий договір береться $\mathbf{E}X_i$, резервний фонд компанії становить

$$u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}X_i = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbf{E}S.$$

Тому ймовірністю банкрутства є

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}(S > \mathbf{E}S).$$

Застосовуючи гаусове наближення, отримаємо

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}(S - \mathbf{E}S > 0) = P\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} > 0\right) \approx 1 - \varPhi(0) = \frac{1}{2}.$$

Звичайно, це цілком неприйнятна величина ймовірності банкрутства. Це і не дивно, оскільки рівність $p_i = \mathbf{E}X_i$ насправді не виражає еквівалентності зобов'язань компанії та застрахованого. Хоча в середньому і компанія, і застрахований виплачують однакові суми, компанія має ризик, який пов'язаний з тим, що в силу випадкових обставин їй, можливо, доведеться виплатити значно більшу суму, ніж $\mathbf{E}X_i$. Застрахований такого ризику не має. Тому було б справедливо, щоб плата за страховку включала деяку надбавку l_i, яка б була еквівалентом випадковості, який впливає на компанію.

Отже, призначимо як виплате за *i*-ту страхову суму $p_i = \mathbf{E}X_i + l_i$, де l_i – деяка додаткова сума. Тобто, резерви компанії становлять таку величину:

$$u = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{E}X_i + l_i) = \mathbf{E}S + l,$$

де

$$l = \sum_{i=1}^{N} l_i.$$

Відповідно, ймовірність банкрутства компанії дорівнює

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}(S > u) = \mathbf{P}(S > \mathbf{E}S + l).$$

Застосувавши гаусове наближення, матимемо

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} > \frac{l}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right) \approx 1 - \varPhi\left(\frac{l}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right).$$

Щоб імовірність небанкрутства компанії була α (α – деяке число, близьке до 1) треба, щоб $l/\sqrt{\mathbf{Var}S}$ дорівнювало квантилі x_α, тобто

$$l = x_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{Var}S} \tag{3.8}$$

Оскільки $\mathbf{Var}S$ описує величину випадкових флуктуацій сумарного позову навколо його середнього значення, додаткова сума справді, в деякому розумінні, є компенсацією страхової компанії за те, що вона взяла на себе ризики, пов'язані з непередбаченістю позовів.

Рівняння (3.8) дає величину загальної додаткової суми *l*. Тепер потрібно справедливо розподілити цю суму між усіма договорами. Зазвичай суму *l* ділять пропорційно очікуваному позову $\mathbf{E}X_i$, тобто вважають

$$l_i = k \cdot \mathbf{E}X_i. \tag{3.9}$$

Оскільки відомі $\sum l_i = l$ і $\sum \mathbf{E}X_i = \mathbf{E}S$, коефіцієнт пропорційності *k* задається формулою

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\mathbf{E}S}. \tag{3.10}$$

Відповідно для премії маємо:

$$p_i = (1+k) \cdot \mathbf{E}X_i = \mathbf{E}X_i \cdot \left(1 + x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}S}}{\mathbf{E}S}\right). \tag{3.11}$$

Основний внесок у величину p_i зазвичай дає $\mathbf{E}X_i$. Цю суму називають **нетто-премією.** Додаткову суму $l_i = k \cdot \mathbf{E}X_i$ називають **страховою** (або **захисною**) **надбавкою**, а $\theta_i = l_i/\mathbf{E}X_i$ – **відносною страховою надбавкою.** У нашому випадку відносна страхова надбавка однакова для всіх договорів.

Проте призначення індивідуальних премій за правилом (3.11) не справедливе по відношенню до договорів з малою флуктуацією можливого позову, тобто з малими дисперсіями $\mathbf{Var}X_i$(якщо нетто-премія $\mathbf{E}X_i$ велика). Ці договори оплачують випадки, пов'язані з іншими договорами. Враховуючи те, що сумарна надбавка *l* пов'язана саме з сумарною дисперсією $\mathbf{Var}S = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{Var}X_i$, було б справедливо ділити *l* на частини l_i, пропорційні дисперсіям $\mathbf{Var}X_i$ або середнім квадратичним відхиленням $\sqrt{\mathbf{Var}X_i}$, тобто вимагати, щоб

$$l_i = k \cdot \mathbf{Var}X_i \tag{3.12}$$

або

$$l_i = k \cdot \sqrt{\mathbf{Var} X_i} \tag{3.13}$$

Підсумовуючи по $i = 1, \dots, N$ і враховуючи (3.8), матимемо

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var} S}} \tag{3.14}$$

у першому випадку і

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var} S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\mathbf{Var} X_j}} \tag{3.15}$$

у другому.

Відповідно, для індивідуальних премій одержимо

$$p_i = \mathbf{E} X_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var} S}} \cdot \mathbf{Var} X_i \tag{3.16}$$

у першому випадку і

$$p_i = \mathbf{E} X_i + x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var} S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\mathbf{Var} X_j}} \cdot \sqrt{\mathbf{Var} X_i} \tag{3.17}$$

у другому. Відносні страхові надбавки в цих випадках залежать від договорів і дорівнюють

$$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var} S}} \cdot \frac{\mathbf{Var} X_i}{\mathbf{E} X_i}, \tag{3.18}$$

$$\theta_i = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var} S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\mathbf{Var} X_j}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var} X_i}}{\mathbf{E} X_i} \tag{3.19}$$

відповідно.

Величина $\mathbf{Var} X / \mathbf{E} X - 1$ називається коефіцієнтом розсіювання випадкової величини X, а величина $\sqrt{\mathbf{Var} X} / \mathbf{E} X$ – коефіцієнтом варіації. Використовуючи формулу (3.18), можна сказати, що правило (3.12) призначає відносні страхові надбавки відповідно до величини коефіцієнта розсіювання. Отже, формула (3.19) означає, що правило (3.13) призначає відносні страхові надбавки пропорційно коефіцієнтам варіації. Тому відмітність між правилами (3.12) і (3.13) пов'язана з тим, що вважати кількісною мірою "випадковості" – коефіцієнт розсіювання чи коефіцієнт варіації. Питання про те, яке з цих правил більш справедливе (звичайно, з погляду застрахованих; компанія в будь-якому випадку отримає одну і ту ж потрібну суму $l = x_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{Var} S}$), в актуарій математиці однозначно не вирішено. Звичайно, якщо всі договори статистично однорідні, тоді правила (3.9), (3.12) і (3.13) дають однаковий результат

$$l_i = x_\alpha \sqrt{\frac{\mathbf{Var} X_i}{N}}.$$

Крім того, що перехід від найпростішого правила (3.9) до правила (3.12) призводить до зменшення страхової надбавки для i – го договору, якщо

$$\frac{\mathbf{Var} X_i}{\mathbf{E} X_i} < \frac{\mathbf{Var} S}{\mathbf{E} S},$$

тобто, якщо коефіцієнт розсіювання позову, пов'язаного з цим договором, менший, ніж коефіцієнт розсіюваного сумарного позову.

Перехід від найпростішого правила (3.9) до правила (3.12) призводить до зменшення страхової надбавки для i-го договору, якщо

$$\frac{\sqrt{\mathbf{Var} X_i}}{\mathbf{E} X_i} < \sum_{j=1}^{N} \frac{\sqrt{\mathbf{Var} X_j}}{\mathbf{E} X_j} \cdot \frac{\mathbf{E} X_j}{\mathbf{E} S},$$

тобто, якщо коефіцієнт варіації величини індивідуального позову від i-го договору менший, ніж середній коефіцієнт варіації, усереднений по всьому портфелю з вагами $\mathbf{E} X_j / \mathbf{E} S$.

3.2. Аналіз довгострокових моделей страхування життя

3.2.1. Загальна модель довгострокового страхування життя

Довгострокове страхування характеризується тим, що в розрахунках враховується те, що вартість грошей з часом змінюється.

Надалі будемо припускати, що інтенсивність відсотків δ – стала величина.

Страхове покриття як правило виплачується у вигляді одиничної суми в момент смерті застрахованого. Такі види договорів страхування називаються неперервними. Але, з теоретичного погляду, важливий випадок, коли виплата здійснюється не в момент смерті, а в наступний за ним день народження застрахованого – такі види договорів страхування називаються дискретними. Зазвичай, в актуарних розрахунках вважається, що вік застрахованого на момент укладення договору – ціле число, отже, дискретні договори страхування можна описати як договори з виплатою страхової суми в чергову, після моменту смерті, річницю укладання договору.

У найбільш загальному випадку момент виплати страхової суми є деякою функцією $\tau(T_x)$ від залишкового часу життя застрахованого. Величина страхового покриття, як правило, фіксована. Хоча в ряді випадків страхове покриття може змінюватися залежно від моменту виплати. Введемо функцію b_t, яка визначає величину страхового покриття у випадку смерті в момент t.

Проаналізуємо найпростішу довгострокову модель фінансової діяльності страхової компанії. Припустимо, що в момент $t_0 = 0$ портфель компанії містить N договорів страхування життя. Основне припущення розглядуваної моделі полягає в тому, що всі премії повністю внесені в момент $t_0 = 0$.

Нехай через τ_k позначимо момент настання k-ої страхової виплати, а через b_k - відповідна величина цієї виплати. Опишемо динаміку активів компанії $u(t)$.

На момент $\tau_1 - 0$ компанія володіє капіталом $u_0(1+i)^{\tau_1}$, і цей капітал повинен бути не меншим, ніж b_1:

$$u_0(1+i)^{\tau_1} \geq b_1.$$

У цьому випадку компанія виконає свої зобов'язання і в момент $\tau_2 - 0$ володітиме активами $(u_0(1+i)^{\tau_1} - b_1)(1+i)^{\tau_2-\tau_1} = u_0(1+i)^{\tau_2} - b_1(1+i)^{\tau_2-\tau_1}$. Ці активи повинні бути не менші, ніж b_2, тобто

$$u_0(1+i)^{\tau_2} \geq b_1(1+i)^{\tau_2-\tau_1} + b_2$$

і т.д.

Аналогічно, щоб компанія могла здійснити останній платіж у момент τ_N, повинна виконуватися нерівність

$$u_0(1+i)^{\tau_N} \geq b_1(1+i)^{\tau_N-\tau_1} + .. + b_{N-1}(1+i)^{\tau_N-\tau_{N-1}} + b_N.$$

Отже, компанія не збанкротує, якщо виконуються такі N нерівностей:

$$u_0(1+i)^{\tau_k} \geq \sum_{l=1}^{k} b_l(1+i)^{\tau_k-\tau_l},\ k = 1, ..., N.$$

Розділивши почленно на $(1+i)^{\tau_k}$, перепишемо ці нерівності у вигляді

$$\sum_{l=1}^{k} b_l v^{\tau_l} \leq u_0,\ k = 1, ..., N.$$

Зрозуміло, що для виконання всіх цих нерівностей достатньо, щоб виконувалася лише одна з них, що відповідає випадку $k = N$

$$\sum_{k=1}^{N} b_k v^{\tau_k} \leq u_0. \tag{3.20}$$

Сума, що стоїть зліва в (3.20), не залежить від порядку доданків, тож можна вважати, що τ_k - момент настання страхової виплати для k-го договору, а b_k - відповідна величина цієї виплати. Позначимо, через $Z_k \equiv b_k v^{\tau_k}$ - величину виплати по виплаті k-му договору, приведену на момент $t_0 = 0$.

Отже, компанія не збанкротує, якщо виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{N} Z_k \leq u_0 \tag{3.21}$$

Тобто ймовірність банкрутства страхової компанії

$$R = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{N} Z_k > u_0\right) \tag{3.22}$$

Ця формула абсолютно аналогічна формулі (3.1) для ймовірності банкрутства компанії при короткостроковому страхуванні. Тобто при розрахунку ймовірності банкрутства при довгостроковому страхуванні життя все відбувається так, начебто мова йде про короткострокове страхування з величинами збитків Z_k. Зокрема, премія для k-го договору

$$p = \mathbf{E}Z_k(1 + \theta), \tag{3.23}$$

де відносна страхова надбавка θ у найпростішому випадку становитиме

$$\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Var} Z_k}}{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{E} Z_k}.$$

Звичайно, для більш складних довгострокових моделей не вдасться одержати прості формули для ймовірності банкрутства і премій, аналогічних

(3.22), (3.23). Але наведені вище міркування вказують на те, що в будь якому випадку для розрахунку премій треба вміти знаходити приведену вартість майбутніх виплат на момент укладання договору, її середнє (актуарну приведену вартість), дисперсію.

Розглянемо деякий договір довгострокового страхування, що описується функціями $\tau(t)$ і b_t.

Нехай

$$Z_{@\delta} = b_{T_x} \cdot v^{\tau(T_x)} \equiv b_{T_x} \cdot e^{-\delta\tau(T_x)} \tag{3.24}$$

приведена вартість страхового покриття на момент укладання договору з людиною віком x. Запис $Z_{@\delta}$ лише підкреслює залежність випадкової величини Z від відсоткової ставки (зауважимо, що вказується інтенсивність відсотків, а не ефективна відсоткова ставка).

Позначимо через

$$A_{@\delta} \equiv \mathbf{E}Z_{@\delta}$$

актуарну приведену вартість майбутньої страхової виплати.

Припустимо, що в нашій загальній моделі величина страхового покриття не залежить від моменту виплати (майже всі відомі види договорів страхування життя задовольняють цю умову). Тоді $b_t^j = b_t$ і тому

$$Z_{@\delta}^j = b_{T_x} \cdot e^{-(j\delta)\tau(T_x)} = Z_{@j\delta} \tag{3.25}$$

Аналогічну рівність матимемо для середніх значень

$$\mathbf{E}Z_{@\delta}^j = A_{@j\delta}.$$

Зокрема, для дисперсії одержимо

$$\mathbf{Var}Z_{@\delta} = \mathbf{E}Z_{@\delta}^2 - (\mathbf{E}Z_{@\delta})^2 = A_{@2\delta} - (A_{@\delta})^2 \tag{3.26}$$

У випадку, коли розглядається деяка фіксована відсоткова ставка, величини $Z_{@\delta}$, $A_{@\delta}$ позначають просто Z і A відповідно, а величину $A_{@j\delta}$ позначають ${}^jA$. Отже, формула (3.26) може бути записана у вигляді.

$$\mathbf{Var}Z = {}^2A - A^2.$$

3.2.2. Разова нетто-премія для основних типів договорів страхування

І. Довічне страхування – найпростіший приклад довгострокового страхування. При цьому виді страхування фіксована страхова сума $b = 1$ виплачується в момент смерті застрахованого, тому

$$\tau(t) = t, \; b_t = 1$$

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком x позначається $\overline{Z}_x$ і обчислюється

$$\overline{Z}_x = v^{T_x} = e^{-\delta T_x}.$$

Зверху над величиною Z ставиться риска для того, щоб підкреслити, що розглядуваний договір страхування неперервний, тобто страхове покриття виплачується в момент смерті застрахованого.

Актуарна сучасна приведена вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком x позначається $\overline{A}_x = \mathbf{E}\overline{Z}_x$. Очевидно, що $\overline{A}_x$ є перетворенням Лапласа залишкового часу життя T_x в точці δ.

Виходячи із загальновідомих теорем теорії ймовірностей, можна так виразити $\overline{A}_x$ через введені раніше характеристики тривалості життя

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t p_{T_x}(t)dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t p(t)dt,$$

де $p_{T_x}(t)$ - щільність величини T_x, а $p(t)$ - крива смертей.

Інтегруючи частинами можна переписати цю формулу у вигляді

$$\overline{A}_x = -\frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty e^{-\delta t} ds(t) = 1 - \delta \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t s(t)dt. \qquad (3.27)$$

Розглянемо випадок дискретного договору довічного страхування, тобто договір довічного страхування з виплатою страхової суми в кінці останнього року життя. У цьому випадку

$$\tau(t) = [t] + 1, \; b_t = 1$$

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання такого дискретного договору з людиною віком x позначається Z_x і задається формулою

$$Z_x = v^{[T_x]+1} \equiv v^{K_x+1} = e^{-\delta(K_x+1)}.$$

Відповідно для актуарної сучасної вартості страхової суми в момент укладання договору матимемо

$$A_x \equiv \mathbf{E}Z_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\mathbf{P}(K_x = k). \tag{3.28}$$

II. *n*-річне чисто накопичувальне страхування

При цьому виді страхування виплата страхової суми фіксованої величини $b = 1$ відбувається в момент *n*, якщо застрахований дожив до цього моменту. У випадку смерті застрахованого до моменту *n* страхова компанія не платить нічого.

$$\tau(t) = n,\ b_t = \begin{cases} 1, t > n; \\ 0, t \le n. \end{cases}$$

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком *x* позначається $Z_{x:\overset{1}{\bar{n}|}}$ і задається формулою

$$Z_{x:\overset{1}{\bar{n}|}} = \begin{cases} 0, T_x \le n; \\ v^n, T_x > n. \end{cases}$$

Актуарна приведена вартість страхової суми задається формулою

$$A = \mathbf{E}Z_{x:\overset{1}{\bar{n}|}} = v^n\mathbf{P}(T_x > n) = v^n {}_np_x = v^n\frac{s(x+n)}{s(x)} = v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{3.29}$$

III. *n*-річне тимчасове страхування життя

При цьому типі страхування виплата фіксованої страхової суми $b = 1$ здійснюється в момент смерті застрахованого, якщо застрахований помер протягом *n* років з моменту укладання договору. Якщо застрахований прожив ці *n* років, то страхова компанія не платить нічого. Тобто

$$\tau(t) = t,\ b_t = \begin{cases} 1, t \le n; \\ 0, t > n. \end{cases}$$

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком *x* позначається $\overline{Z}^1_{x:\bar{n}|}$ і задається формулою

$$\overline{Z}^1_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, T_x \le n; \\ 0, T_x > n. \end{cases}$$

Актуарна приведена вартість страхової суми задається формулою

$$\overline{A}^1_{x:\bar{n}|} \equiv \mathbf{E}\overline{Z}^1_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t p_{T_x}(t)dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+n} v^t p(t)dt.$$

Інтегруючи частинами, матимемо

$$\overline{A}^1_{x:\bar{n}|} = -\frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+n} v^t ds(t) = 1 - \frac{v^{x+n} s(x+n)}{v^x s(x)} - \delta \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+n} v^t s(t)dt. \tag{3.30}$$

Розглянемо випадок дискретного договору *n*-річного тимчасового страхування, тобто з виплатою страхової суми в кінці року смерті.

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком *x* позначається $Z^1_{x:\bar{n}|}$ і задається формулою

$$Z^1_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} v^{K_x+1}, K_x \le n; \\ 0, K_x > n. \end{cases}$$

Для актуарної сучасної вартості страхової суми в момент укладання договору матимемо

$$A^1_{x:\bar{n}|} = \mathbf{E}Z^1_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \mathbf{P}(K_x = k). \tag{3.31}$$

IV. n -річне мішане страхування

При цьому виді страхування страхова виплата $b = 1$ здійснюється в момент смерті застрахованого, якщо застрахований помер до моменту *n* або в момент *n*, якщо застрахований дожив до моменту закінчення дії договору.

$$\tau(t) = \min(t, n), \ b_t = 1$$

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком *x* позначається $\overline{Z}_{x:\bar{n}|}$ і задається формулою

$$\overline{Z}_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, T_x \le n; \\ v^n, T_x > n. \end{cases}$$

Очевидне таке співвідношення

$$\overline{Z}_{x:\bar{n}|} = Z_{x:\stackrel{1}{\bar{n}}|} + \overline{Z}^1_{x:\bar{n}|}.$$

Аналогічна формула буде мати місце для середніх значень, тобто актуарна приведена вартість страхової суми задається формулою

$$\overline{A}_{x:\bar{n}|} = A_{x:\stackrel{1}{\bar{n}|}} + \overline{A}^{1}_{x:\bar{n}|} \tag{3.32}$$

Розглянемо випадок дискретного договору n-річного змішаного страхування, тобто коли страхова виплата здійснюється в кінці року смерті.

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання такого дискретного договору з людиною віком x позначається $Z_{x:\bar{n}|}$ і задається формулою

$$Z_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} v^{K_x+1}, K_x \le n; \\ v^n, K_x > n. \end{cases}$$

Як і в неперервному випадку справедливе очевидне співвідношення

$$Z_{x:\bar{n}|} = Z_{x:\stackrel{1}{\bar{n}|}} + Z^{1}_{x:\bar{n}|},$$

Тому для середніх значень матимемо

$$A_{x:\bar{n}|} = A_{x:\stackrel{1}{\bar{n}|}} + A^{1}_{x:\bar{n}|} \tag{3.33}$$

V. Довічне страхування, відстрочене на m років

При цьому виді страхування страхова виплата $b = 1$ здійснюється в момент смерті застрахованого, але тільки якщо смерть настала по закінченні m років після укладання договору:

$$\tau(t) = t,\ b_t = \begin{cases} 0, t \le m; \\ 1, t > m. \end{cases}$$

За аналогією з довічним страхуванням, відстроченим на m років, можна ввести й інші види договорів відстроченого страхування.

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком x позначається ${}_{m|}\overline{Z}_x$ і задається формулою

$${}_{m|}\overline{Z}_x = \begin{cases} 0, T_x \le m; \\ v^{T_x}, T_x > m. \end{cases}$$

Очевидне таке співвідношення

$${}_{m|}\overline{Z}_x = \overline{Z}_x - \overline{Z}^{1}_{x:\bar{m}|}.$$

Аналогічна формула матиме місце для середніх значень

$$_{m|}\overline{A}_x = \overline{A}_x - \overline{A}^1_{x:\bar{m}|}. \tag{3.34}$$

Розглянемо випадок дискретного договору довічного страхування, відстроченого на m років. Сучасна вартість страхової суми в момент укладання такого дискретного договору з людиною віком позначається $_{m|}Z_x$ і обчислюється

$$_{m|}Z_x = \begin{cases} 0, K_x \leq m; \\ v^{K_x+1}, K_x > m. \end{cases}$$

Як і в неперервному випадку справедливе очевидне співвідношення

$$_{m|}Z_x = Z_x - Z^1_{x:\bar{m}|}.$$

Тож для середніх значень матимемо

$$_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\bar{m}|}. \tag{3.35}$$

VI. Довічне страхування зі зростаючою страховою сумою

У всіх розглянених вище прикладах величина страхових виплат була фіксована і не залежала від моменту виплати. Існує велика кількість видів договорів страхування, в яких страхове покриття може змінюватись. Як приклад розглянемо найпростіший з них – довічне страхування зі зростаючою страховою сумою.

$$\tau(t) = t, \ b_t = t.$$

Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком x позначається $(I\bar{Z})_x = T_x v^{T_x}$.

Актуарна приведена вартість страхової суми задається формулою

$$(I\bar{A})_x \equiv \mathbf{E}(I\bar{Z})_x = \mathbf{E}T_x v^{T_x}.$$

Її можна так виразити через характеристики тривалості життя

$$(I\bar{A})_x = \int_0^\infty t v^t p_{T_x}(t)dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_0^\infty t v^t p(t)dt. \tag{3.36}$$

Розглянемо дискретний договір довічного страхування зі щорічно зростаючою страховою сумою. Сучасна вартість страхової суми в момент укладання договору з людиною віком x позначається $(IZ)_x = (K_x + 1)v^{K_x+1}$.

Актуарна приведена вартість страхового покриття на момент укладання договору буде такою:

$$(IA)_x = \mathbf{E}(K_x+1)v^{K_x+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\mathbf{P}(K_x=k) \tag{3.37}$$

3.2.3. Зв'язок між неперервними та дискретними договорами страхування

Хоч різні види страхування з виплатою страхової суми в кінці року смерті представляють обмежений інтерес для страхування безпосередньо, вони відіграють винятково важливу теоретичну роль. По-перше, тому, що характеристики дискретних видів страхування виражаються через характеристики, внесені до таблиць тривалості життя. При певних припущеннях щодо смертності між цілими роками неперервні види договорів страхування, як буде показано нижче, дуже просто пов'язуються із відповідними дискретними видами договорів страхування, а отже, характеристики наперервних договорів страхування життя можуть бути виражені через ті самі таблиці.

Щоб пов'язати неперервні і дискретні договори страхування, треба зробити припущення щодо смертності між цілими роками. Зазвичай у такій ситуації припускають рівномірний розподіл смертей у середині останнього року життя.

Розглянемо неперервний договір довічного страхування. Маємо

$$\bar{A}_x = \mathbf{E}v^{T_x} = \mathbf{E}(v^{K_x+1}v^{\tau_x-1}) = \mathbf{E}v^{K_x+1}\mathbf{E}e^{\delta(1-\tau_x)} =$$

$$= A_x\int_0^1 e^{\delta t}dt = \frac{i}{\delta}A_x. \tag{3.38}$$

Аналогічно одержуються співвідношення

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}A^1_{x:\overline{n|}};\ {}_{m|}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\,{}_{m|}A_x;$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}A_{x:\overline{n|}} + \frac{\delta-i}{\delta}\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}.$$

Для договорів страхування зі зростаючою страховою сумою матимемо

$$(I\bar{A})_x \equiv \mathbf{E}T_xv^{T_x} = \mathbf{E}(K_x+\tau_x)v^{(K_x+\tau_x)} = \mathbf{E}(K_x+1+\tau_x-1)v^{(K_x+1+\tau_x-1)} =$$

$$=\mathbf{E}(K_x+1+\tau_x-1)v^{(K_x+1+\tau_x-1)} = \mathbf{E}(K_x+1-\tau_x)v^{(K_x+1-\tau_x)} =$$

$$=\mathbf{E}(K_x+1)v^{K_x+1}\mathbf{E}v^{-\tau_x}-\mathbf{E}v^{(K_x+1)}\mathbf{E}\tau_x v^{-\tau_x}=$$

$$=\mathbf{E}(K_x+1)v^{K_x+1}\mathbf{E}e^{\delta\tau_x}-\mathbf{E}v^{(K_x+1)}\mathbf{E}\tau_x e^{\delta\tau_x}=\frac{i}{\delta}(IA)_x-\frac{i\delta+\delta-i}{\delta^2}A_x.$$

3.3. Модельні задачі до розділу 3

Модельна задача 3.1. *Актуарій встановив, що розмір страхового покриття для певного виду нещасних випадків є випадковою величиною X з твірною функцією моментів*

$$\psi x(t)=\frac{1}{(1-2500t)^4}.$$

Визначте середнє квадратичне відхилення для розміру страхового покриття.

$$(A)340;(B)5000;(C)8660;(D)10000;(E)11180.$$

Розв'язання Розкладавши функцію $\psi(t)=(1-2500t)^{-4}$ в ряд за степенями t, отримаємо:

$$\psi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-4}{n}(-2500t)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)\cdot(-4-1)\cdot\ldots\cdot(-4-n+1)}{n!}(-2500)^n t^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+3)}{n!}2500^n t^n.$$

Звідси

$$\mathbf{E}X^n=4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+3)\cdot2500^n.$$

Зокрема,

$$\mathbf{E}X=4\cdot2500=10\ 000,\ \ \mathbf{E}X^2=4\cdot5\cdot2500^2=125\ 000\ 000.$$

Тому

$$\mathbf{Var}X=\mathbf{E}X^2-(\mathbf{E}X)^2=25000000 sigma_X=\sqrt{\mathbf{Var}X}=5000.$$

Отже, вірним є варіант (B).

Модельна задача 3.2. *Компанія уклала* $\mathrm{N} = 10\,000$ *однотипних договорів страхування життя строком на* 1 *рік. Відповідно до умов договору компанія виплачує* 1 *млн. грн. в разі смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку,* 100 *млн. грн. в разі смерті застрахованого протягом року від природних причин і не платить нічого, якщо застрахований доживе до кінця року. Ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює* $5 \cdot 10^{-4}$*, ймовірність смерті від природних причин рівна* $2{\cdot}10^{-3}$*. Компанія встановила плату за страховку, виходячи з* 95% *ймовірності виконання зобов'язань по даному портфелю лише за рахунок зібраних премій. Враховуючи значний розмір страхового відшкодування (якщо смерть застрахованого настає в результаті нещасного випадку), страхова компанія передбачає укласти договір перестрахування надмірних втрат з межею утримання* r *між* $100\,000$ *грн. і* $1\,000\,000$ *грн.*

Перестрахова компанія бере як плату за перестрахування такого ризику суму, рівну 160% *від величини очікуваних виплат (тобто перестрахова компанія встановлює відносну страхову надбавку на рівні* 60%*).*

Визначте значення межі власного утримання, яке б мінімізувало ймовірність того, що для виплат по даному портфелю буде потрібно залучати додаткові засоби (ймовірність банкрутства).

Розв'язання. Для розрахунків зручно використовувати $100\,000$ грн. як одиницю виміру грошових сум, так що виплата X за одним договором набуває значень $10,\ 1$ і 0 з ймовірністю $5{\cdot}10^{-4}$, $20{\cdot}10^{-4}$ і $1-25{\cdot}10^{-4}$відповідно. Середнє значення виплати за одним договором є

$\mathbf{E}X = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10 + 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 7 \cdot 10^{-3}$ (умовних одиниць) $= 700$ грн., а дисперсія

$$\mathbf{Var}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 100 + 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 - 49 \cdot 10^{-6} \approx 5,2 \cdot 10^{-2}.$$

Таким чином, нетто-премія $p_0 \equiv \mathbf{E}X = 7 \cdot 10^{-3}$, а оскільки компанія встановила брутто-премію p такою, щоб ймовірність небанкрутсва була 95 %, маємо:

$$p = \mathbf{E}X + \frac{x_{95\%}\sqrt{\mathbf{Var}\ X}}{\sqrt{N}} = 7{\cdot}10^{-3} + \frac{1,645 \cdot \sqrt{5,2}\ \cdot 10^{-1}}{10^2} \approx 10,75{\cdot}10^{-3} \equiv 1075\text{грн.},$$

так що загальна премія рівна $Np = 107$ (умовних одиниць).

Вважатимемо тепер, що компанія вирішує перестрахувати позови, що перевищують r грн., $100\,000 \ \le \mathrm{r} \le 1000000$, в перестраховій компанії. Оскільки ми використовуємо $100\,000$ грн. як одиницю вимірювання грошових сум, r змінюється від 1 до 10. В цьому випадку виплата передаючої компанії за одним договором, $X^{(r)}$, набуває три значення: $1, r$ і 0 з ймовірностями $20 \cdot 10^{-4},\ 5 \cdot 10^{-4}$ і $1 - 25 \cdot 10^{-4}$відповідно. Її середнє значення і дисперсія рівні

$$\mathbf{E}X^{(r)} = 1 \cdot 20 \cdot 10^{-4} + r \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot (r+4),$$

$$\mathbf{Var}\ X^{(r)} = 1^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} + r^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-8} \cdot (r+4)^2 \approx 5(r^2+4) \cdot 10^{-4}.$$

Для перестрахової компанії середнє значення виплати за одним договором є

$$\mathbf{E}X - \mathbf{E}X^{(r)} = 70 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4} \cdot (r+4) = 5 \cdot 10^{-4}(10-r).$$

і тому плата за перестрахування одного договору рівна

$$1,6 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot (10-r) = 8 \cdot 10^{-4} \cdot (10-r).$$

Для передаючої компанії середнє значення і дисперсія сумарних виплат по всьому портфелю є:

$$10^4 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot (10-r) = 8 \cdot (10-r)$$

і тому після перестрахування премія, зібрана компанією, зменшиться з $Np = 107,5$ до величини

$$u^{(r)} = 107,5 - 8 \cdot (10r) = 27,5 + 8r.$$

Для ймовірності $R^{(r)}$ того, що сумарні виплати страхової компанії $S^{(r)}$, більші, ніж активи компанії, $u^{(r)}$, за допомогою гауссового наближення маємо:

$$R^{(r)} = P(S^{(r)} > u^{(r)}) = P(\frac{S^{(r)} - ES^{(r)}}{\sqrt{Var\, S^{(r)}}} > \frac{u^{(r)} - ES^{(r)}}{\sqrt{Var\, S^{(r)}}}) \approx 1 - \Phi(\frac{u^{(r)} - ES^{(r)}}{\sqrt{Var\, S^{(r)}}}) =$$

$$= 1 - \Phi(\frac{27,5 + 8r - 5r - 20}{\sqrt{5r^2+20}}) = 1 - \Phi(\frac{7,5+3r}{\sqrt{r^2+20}}).$$

Таким чином, якщо ми хочемо мінімізувати ймовірність $R^{(r)}$, потрібно вибрати параметр r так, щоб функція

$$h(r) = \frac{(7,5+3r)^2}{5r^2+20}$$

набувала найбільшого значення. Оскільки

$$h'(r) = \frac{2 \cdot (7,5+3r)(12-7,5r)}{5(r^2+4)^2},$$

оптимальне значення rрівне $\frac{12}{7,5} = 1,6$, що в абсолютних цифрах відповідає $160\ 000$ грн..

Зауваження. Оскільки $\sqrt{h(1,6)} \approx 2,15$, ймовірність банкрутства при цій межі утримання дорівнює приблизно $1,6\,\%$. Очікуваний прибуток компанії до перестраховки був рівний $Np - Np_0 = 3\ 750\ 000$ грн. (він підраховується як різниця між зібраними преміями і очікуваними виплатами). Після перестрахування очікуваний прибуток компанії став $u^{(r)} - ES^{(r)} = 7,5 + 3r = 12,3$ (умовних одиниць) $=\ 1230\ 000$ грн. Таким чином, зменшення ймовірності розорення досягнуто ціною зменшення очікуваного прибутку на 2520000 грн. Відзначимо, крім того, що для досягнення такої ж ймовірності банкрутства без перестрахування необхідно збільшити премію до величини $\mathrm{p}' = \mathbf{E}X + \frac{x_{98,4\%}\sqrt{\mathbf{Var}X}}{\sqrt{N}} = 7\cdot 10^{-3} + \frac{2,2\cdot\sqrt{5,2}\cdot 10^{-1}}{10^2} \approx 12,02\cdot 10^{-3}$ (умовних одиниць) $\equiv\ 1202$ грн., тобто на $12\,\%$. Це означає збільшення загальної премії по всьому портфелю до $12\ 020000$ грн., а очікуваного прибутку компанії до 5020000 грн. Звичайно, з точки зору страхової компанії це набагато краще, ніж $1230\ 000$ грн. очікуваного прибутку в разі придбання договору перестрахування, але не треба забувати про ринкові чинники — страхувальники можуть не погодитися купувати дорожчий продукту, і тоді доведеться забути взагалі про будь-який прибуток.

Модельна задача 3.3. *Портфель страховика складається з незалежних договорів страхування життя на один рік, структура цього блоку бізнесу наведена в таблиці. 3.1.*

Таблиця 3.1

Число договорів	*Страхова сума*
500	100
300	50
100	40

Страховик оцінює ймовірність настання страхового випадку за одним договором як $0,020$ *і призначає загальну премію за цей блок бізнесу у розмірі* 2000. *За перестрахову премію у розмірі* 860 *перестраховик пропонує покрити всі індивідуальні виплати понад власне утримання страховика у розмірі* 40 *по одному договору. Навантаження перестраховика удвічі перевищує відносну захисну надбавку страховика. Визначте ймовірність настання страхового випадку по одному договору з точки зору перестрахової компанії.*

$$(A)0,014; (B)0,018; (C)0,022; (D)0,026; (E)0,030.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку ситуацію з точки зору прямого страхувальника. Очікувані збитки за одним договором кожного виду даються таблицею. 3.2.

Таблиця 3.2

Число договорів в групі	**Очікувані виплати по одному договору**	**Очікувані виплати по групі договорів**
500	$100 \cdot 0,02 = 2$	$500 \cdot 2 = 1000$
300	$50 \cdot 0,02 = 1$	$300 \cdot 1 = 300$
100	$40 \cdot 0,02 = 0,8$	$100 \cdot 0,8 = 80$

Тому, очікувані виплати по даному портфелю рівні 1380 — це сумарна нетто-премія. Оскільки загальна премія рівна 2000, відносна захисна надбавка, що використовує страхувальник, рівна

$$\theta = \frac{2000 - 1380}{1380} \approx 0,45.$$

Відповідно, відносна захисна надбавка, що використовує перестраховик, рівна

$$\theta' = 2\theta \approx 0,9.$$

Розглянемо тепер ситуацію з точки зору перестраховика. Оскільки він покриває лише перевищення індивідуальних виплат над власним утриманням прямого страховика у розмірі 40, по договорам першого типу перестраховик платить 60, по договорам другого типу —10, а в договорах третього типу не бере участь зовсім. Тому для перестраховика очікувані витрати за одним договором кожного виду подані в таблиці. 3.3 (нижче q – ймовірность настання страхового випадку, оцінена перестраховиком).

Таблиця 3.3

Число договорів в групі	Очікувані виплати по одному договору	Очікувані виплати по групі договорів
500	$60 \cdot \mathrm{q} = 60\mathrm{q}$	$500 \cdot 60\mathrm{q} = 30\,000\mathrm{q}$
300	$10 \cdot \mathrm{q} = 10\mathrm{q}$	$300 \cdot 10\mathrm{q} = 3000\mathrm{q}$
100	0	0

Отже, для перестраховика очікувані виплати по перестрахованому портфелю рівні $33\ 000\ \mathrm{q}$ — це сумарна нетто-премія. Оскільки відносна захисна надбавка, що використовує перестраховик, дорівнює $0,9$, загальна премія рівна $62\ 700\ \mathrm{q}$. З іншого боку, ця премія рівна 860. Звідси $\mathrm{q} \approx\ 0,0137$, і тому вірним є варіант (A).

Модельна задача 3.4. *Страхувальник купує договір групового страхування для групи, що складається з чотирьох людей. Страховик призначає* *премію за всю групу у розмірі 5 і заключає договір перестраховки надмірних (індивідуальних) втрат з межею власного утримання 1 (по кожному ризику). Відносна захисна надбавка, що використовує перестраховик, рівна 20 %.*

В кінці терміну дії договору страховик підраховує баланс доходів і витрат. Доходи включають премію, а витрати складаються з виплачених страхових відшкодувань (виключаючи долю перестраховика), плати за перестраховку і адміністративні витрати у розмірі 20 % від премії. Якщо доходи перевищують витрати, страховик повертає різницю страхувальнику.

Визначте очікуваний розмір виплати страхувальникові по закінченні договору, якщо розподіл індивідуальних втрат задається таблицею. 3.4.

Таблиця 3.4

Величина втрат	***Ймовірність***
0	$0,50$
1	$0,25$
2	$0,25$

$$() \ 0,90; \ () \ 0,92; \ (!) \ 0,94; \ (\mathrm{D}) 0,96; \ () \ 0,98.$$

Розв'язання

Нехай X_i – розмір виплати i-му застрахованому (таблиця. 3.4 містить розподіл цих випадкових величин), $X_i' = \min(X_i, 1)$ – доля страховика, $X_i'' = max(X_i - 1, 0)$ – доля перестраховика в страховому відшкодуванні по i-му застрахованому.

Розподіл випадкових величин X_i', X_i'' є:

$$\mathbf{P}(X_i' = 0) = 0,50, \mathbf{P}(X_i' = 1) = 0,50,$$
$$\mathbf{P}(X_i'' = 0) = 0,75, \mathbf{P}(X_i'' = 1) = 0.25$$

Очікувані втрати перестраховика по одному застрахованому рівні $\mathbf{E}X_i'' = 0,25$. Відповідно загальні очікувані втрати перестраховика рівні 1. А отже, плата за перестраховку становить $1,2$.

Нехай $S' = X_1' + X_2' + X_3' + X_4'$ – доля страховика в сумарних збитках за договором. Знайдемо розподіл цієї випадкової величини. Для цього підрахуємо її твірну функцію:

$$\mathbf{E}z^{S'} = (\mathbf{E}z^{X_i'})^4 = (0,5 + 0,5z)^4 = \frac{1}{16}(1+z)^4 = \frac{1}{16}(1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4).$$

Коефіцієнти при степенях z дають шуканий розподіл, що наведений в таблиці. 3.5.

Таблиця 3.5

n	0	1	2	3	4
$P(S' = n)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Оскільки премія за договором страхування рівна 5, плата за перестрахове покриття дорівнює $1,2$, адміністративні витрати рівні 1, розмір виплати страхувальникові після закінчення договору рівний $D = \max(2,8 - S', 0)$. Розподіл випадкової величини D легко отримати з розподілу випадкової величини S'; він наведений в таблиці. 3.6.

Таблиця 3.6

n	$2,8$	$1,8$	$0,8$	0
$P(D = n)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{5}{16}$

Тому для середнього маємо

$$\mathbf{E}D = \frac{1}{16} \cdot 2,8 + \frac{4}{16} \cdot 1,8 + \frac{6}{16} \cdot 0,8 = 0,925,$$

Отже, вірним є варіант ().

3.4. Вправи до розділу 3

1) Портфель складається з чотирьох однакових договорів страхування життя, укладених на однакових умовах. Страхова компанія виплачує спадкоємцям 250 тис. грн. у разі смерті застрахованого від «природних» причин, і 500 тис. грн. – у разі смерті від нещасного випадку. Для всіх договорів ймовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.1, і від природних причин – 0.1. Установіть залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії.

2) Страхова компанія уклала 10000 договорів страхування життя на таких умовах: у випадку смерті застрахованого протягом року компанія виплачує спадкоємцям 1 млн.грн., а у випадку смерті від природних причин – 250 тис.грн. Імовірність смерті від нещасного випадку однакова для всіх договорів і становить 0.05. Імовірність смерті від природних причини залежить від віку і для 4000 застрахованих становить – 0.004, а для решти 6000 застрахованих – 0.002. Обчисліть величину премії, яку має сплатити за договір кожний застрахований, і яка б гарантувала з імовірністю 95%, виконання компанією своїх забов'язань.

3) Припустимо, що в компанії застраховано N=3000 людей з імовірністю смерті протягом року $q = 0,003$. Компанія виплачує суму $b = 250000$

грн. у випадку смерті застрахованого протягом року і не платить нічого, якщо застрахований доживе до кінця року. Визначте сумарну премію, достатню, щоб забезпечити ймовірність банкрутства не більше 5%.

4) Страхова компанія пропонує договори страхування життя на один рік. У разі смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія виплатить суму 500 000 грн., у разі смерті застрахованого від «природних причин» – 1000 000 грн.. Імовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0.1, а від «природних» причин – 0.01. Відносна страхова надбавка $\theta = 20\%$. Визначте скільки договорів повинен продати страховик, щоб зібрана премія з імовірністю 95% покривала сумарні збитки (використати нормальне наближення для розподілу сумарних виплат) .

5) Підприємство пропонує укласти договір групового страхування життя для своїх працівників. Структура персоналу задається такою таблицею

Професійний клас	*Кількість працівників*	*Страхова сума*	*Імовірність страхового випадку*
1	*100*	*1*	*0.1*
2	*100*	*1*	*0.2*
3	*200*	*2*	*0.1*
4	*200*	*2*	*0.2*

Адміністрація підприємства пропонує внести до страхового фонду суму, що дорівнює очікуваним виплатам страхових покриттів. Кожен працівник повинен буде внести суму, яка дорівнює певній долі від розміру очікуваної виплати. Розмір цієї долі розраховується так, щоб компанія з імовірністю 95% виконала свої забов'язання. Визначте розмір внеску для робітників четвертого професійного класу.

6) Портфель складається з N=20 000 договорів страхування життя. Відповідно умовам договору, страхова компанія виплачує спадкоємцям певну суму в разі смерті застрахованого протягом року, і не платить нічого, якщо застрахований доживе до кінця року. Всі застраховані мають однакову ймовірність смерті протягом року q=0.1. З 20 тисяч застрахованих $N_1 = 10\ 000$ людей уклали договір на суму $b_1 = 100\ 000$ грн., $N_2 = 5\ 000$ - на суму $b_2 = 200\ 000$ грн., $N_3 = 4\ 000$ - на суму $b_3 = 500\ 000$ грн., $N_4 = 1\ 000$ - на суму $b_4 = 1\ 000\ 000$ грн. Відносна страхова надбавка встановлена компанією в розмірі $\theta = 15\%$. Компанія уклала договір перестрахування надмірних збитків з межею утри-

мання $r = 500\ 000$ грн. Відносна страхова надбавка перестрахувальної компанії $\theta^* = 20\%$. Визначте, як зміниться ймовірність банкрутства й очікуваний прибуток страхової компанії.

7) Страхова компанія планує укласти договір довічного страхування на суму 100 000 грн. з людиною віком $x = 30$ років. Припустимо, що смертність описується законом Муавра з граничним віком $\omega = 100$, а премія складає 25000 грн. Страхова компанія при розрахунках використовує технічну відсоткову ставку $i = 6\%$. Враховуючи лише надходження премій, виплати страхових сум та інвестиційний прибуток, обчисліть середнє значення та середнє квадратичне відхилення приведеного прибутку страховика на момент укладання договору.

8) Припустимо, що крива смертей має вигляд

$$p(x) = 0.0004 \cdot x \cdot e^{-0.02x}, x \geq 0.$$

і страховик використовує при актуарних розрахунках технічну відсоткову ставку $i = 4\%$. Обчисліть разову нетто-премію по договору довічного страхування зі страховою сумою 100 000 грн., укладеному з людиною віком 20 років.

9) Підрахуйте нетто-премію при укладанні договору 3-річного змішаного страхування з людиною віком $x = 25$ років на суму 100 000 грн. При розрахунках використовуйте таблицю 1 тривалості життя, наведену в додатках, ефективну відсоткову ставку $i = 25\%$ та припущення про рівномірний розподіл смертей між цілими роками.

10) Страховик використовує в актуарних розрахунках наступну таблицю смертності з відбором, що діє 3 роки, і технічну відсоткову ставку $i = 3\%$

[x]	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	x+3
60	*0.09*	*0.11*	*0.13*	*0.15*	*63*
61	*0.1*	*0.12*	*0.14*	*0.16*	*64*
62	*0.11*	*0.13*	*0.15*	*0.17*	*65*
63	*0.12*	*0.14*	*0.16*	*0.18*	*66*
64	*0.13*	*0.15*	*0.17*	*0.19*	*67*

Людина, віком 60 років, уклала відстрочений на два роки договір страхування життя на 2 роки з виплатою страхового покриття в кінці року смерті. Обчислити актуарну сучасну вартість цього покриття ${}_2A_{[60]:\overline{2}|}$.

11) Тривалість життя описується законом Муавра з граничним віком $\omega = 120$ років, а ефективна відсоткова ставка $i = 15\%$. Підрахуйте нетто-премію для людини віком 40 років, якщо укладається договір:

   а) довічного страхування;
   б) 5-річного страхування життя;
   в) 5-річного змішаного страхування;
   г) довічного страхування , відстроченого на 2 роки

12) Страхова компанія уклала 10 000 договорів довічного страхування зі страховою сумою 100 000 грн. кожний. Припустимо, що залишкова тривалість життя кожного із застрахованих характеризується сталою інтенсивністю смертності $\mu = 0.04$, а інтенсивність відсотків $\delta = 6\%$. Підрахуйте величину премії, яка б гарантувала з імовірністю 95% виконання компанією своїх забов'язань.

13) 1 січня 2010 року 120 студентів 3-го курсу факультету прикладної математики створили товариство взаємного страхування на таких умовах

   а) 1 січня 2010 року всі вносять одну і туж суму P;
   б) у випадку смерті протягом найближчих 10 років виплати не відбуваються;
   в) у випадку смерті застрахованого після 10-річного періоду спадкоємцю негайно виплачується сума 1000.

   Відомо, що смертність описується сталою інтенсивністю смертності $\mu = 0.01$, активи фонду інвестуються і приносять прибуток, що відповідає інтенсивності відсотків $\delta = 7\%$. Яке має бути P, щоб з імовірністю 95% товариство змогло здійснити всі виплати ?

14) Студенти 3-го курсу факультету прикладної математики створили страховий фонд на таких умовах:

   а) кожен студент вносить одну і ту саму суму P;
   б) якщо протягом навчального року студента відраховують з університету, то він одержує з фонду 1000 гривень;
   в) всі, хто успішно закінчать третій курс, одержують назад свої внески

   Припускаючи, що кошти фонду будуть приносити прибуток $i = 21\%$ річних, відрахування можливе лише в кінці семестру, причому після зимової сесії відраховують з імовірністю $q_1 = 10\%$ студентів, а після літньої - $q_2 = 11\%$, визначте розмір індивідуального внеску P.

15) Страховик уклав велику кількість договорів страхування життя на два роки з виплатою 100 000 в кінці року смерті. Одна третина застрахованих – курці, а дві третини – не палять. Залишкова тривалість життя описується законом

$$
{}_tp_x = \exp\left(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right),
$$

де $\theta = 1.5$ для курців і $\theta = 2$ для тих, хто не палить. Компанія вирішила призначити разову премію для всіх договорів. Визначте розмір цієї премії, якщо $i = 5\%$(надбавка не враховується)

16) Разова нетто-премія по договору 20-річного страхування життя з людиною віком 40 років дорівнює 13. Згідно з умовами договору, в разі смерті застрахованого протягом k-го року дії договору в кінці цього року виплачується сума 21-k. При розрахунках страхова компанія використала технічну відсоткову ставку $i = 6\%$ і таблицю смертності з $q_{40} = 0.2$. Як зміниться нетто-премія за цим договором, якщо q_{40} зменшиться удвічі?

Розділ 4.

Довічні ренти

4.1. Довічні ренти, що виплачуються раз на рік

I. Довічна рента.

Найпростіша довічна рента може бути описана так: з деякого моменту $t_0 = 0$ людина раз на рік починає одержувати певну суму, яку приймемо за одиницю вимірювання грошових сум. Виплати здійснюються лише за життя людини. Згідно з термінологією першого розділу, таку ренту належить називати прямою рентою. Але оскільки теорія прямих рент аналогічна теорії безпосередніх рент, а практичний інтерес здебільшого представляють прямі ренти, то надалі будемо розглядати лише прямі ренти.

Позначимо через x вік людини в момент $t_0 = 0$ початку платежів, T_x – залишкову тривалість життя, $K_x = [T_x]$ – обмежена залишкова тривалість життя. Оскільки виплати здійснюються в моменти $0, 1, ..., K_x$, довічна рента може розглядатись як пряма щорічна рента з випадковою кількістю виплат $n = K_x + 1$. Тож приведена вартість ренти в момент $t_0 = 0$ також буде випадковою величиною, яку позначатимемо через $\ddot{Y}_x$

$$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d}. \tag{4.1}$$

Враховуючи позначення, введене в попередньому розділі $Z_x = v^{K_x+1}$, можна записати (4.1) у вигляді

$$\ddot{Y}_x = \frac{1 - Z_x}{d} \tag{4.2}$$

Отже, розрахунок характеристик довічної ренти зводиться до розрахунку характеристик відповідного виду страхування.

Зокрема, середнє значення $\mathbf{E}\ddot{Y}_x$ сучасної вартості довічної ренти, яке називається актуарною сучасною вартістю, задається формулою

$$\ddot{a}_x \equiv \mathbf{E}\ddot{Y}_x = \frac{1 - A_x}{d}, \tag{4.3}$$

де $A_x = \mathbf{E}Z_x$.

Для оцінювання ймовірності банкрутства і розрахунку страхової надбавки важливе значення дисперсії випадкової величини $\ddot{Y}_x$

$$\mathbf{Var}\ddot{Y}_x = \frac{1}{d^2}({}^2A_x - A_x^2) \tag{4.4}$$

Актуарну вартість ренти можна було одержати з таких міркувань: виплати можливі в будь-який момент часу k=0,1,2. . . , причому виплата в момент k здійснюється, якщо людина ще жива, тобто якщо $T_x > k$. Тому величина виплати в момент k - це індикатор події $\{T_x > k\}$, а отже, матимемо

$$\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I\{T_x > k\}.$$

Тому

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbf{E}I\{T_x > k\} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbf{P}\{T_x > k\} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{s(x+k)}{s(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x}.$$

Це значення повністю збігається із формулою (4.3), якщо в (4.3) підставити значення A_x, одержане в попередньому розділі.

II. Тимчасова довічна рента

n-річна тимчасова довічна рента визначається як серія виплат одиничної суми, що здійснюється раз на рік, починаючи з моменту , але не більше ніж n разів. Сучасна вартість такої ренти позначається $\ddot{Y}_{x:\bar{n}|}$ і визначається

$$\ddot{Y}_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\bar{n}|}, & \text{якщо } T_x \geq n; \\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{якщо } T_x < n. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-v^n}{d}, & \text{якщо } T_x \geq n; \\ \frac{1-v^{K_x+1}}{d}, & \text{якщо } T_x < n. \end{cases}$$

Чи те саме, що

$$\ddot{Y}_{x:\bar{n}|} = \frac{1 - Z_{x:\bar{n}|}}{d},$$

де $Z_{x:\bar{n}|}$– сучасна вартість одиничної страхової суми при n-річному змішаному страхуванні з виплатою страхової суми в кінці року смерті. А отже,

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{1 - A_{x:\bar{n}|}}{d}. \tag{4.5}$$

Розглядувану ренту можна визначити як послідовність виплат, які здійснюються в моменти $k = 0, 1, .., n-1$, причому виплата в момент k здійснюється, якщо людина жива. Отже, величину $\ddot{Y}_{x:\bar{n}|}$ можна подати у вигляді

$$\ddot{Y}_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k I(T_x > k),$$

а для актуарної вартості матимемо

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbf{E} I(T_x > k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbf{P}(T_x > k) = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^k l_{x+k} \qquad (4.6)$$

III. Відстрочена довічна рента визначається як серія виплат, що починаються в момент *m* і здійснюються щорічно, поки людина жива. Сучасна вартість такої ренти

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } T_x \le m; \\ v^m + .. + v^{K_x} = \frac{v^m - v^{K_x+1}}{d}, & \text{якщо } T_x > m. \end{cases}$$

Очевидне таке співвідношення

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \ddot{Y}_x - \ddot{Y}_{x:\bar{m}|}.$$

Тому для актуарної приведеної вартості матимемо

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\bar{m}|} = \frac{A_{x:\bar{m}|} - A_x}{d}. \qquad (4.7)$$

Якщо використати метод поточних платежів, то можна подати сучасну вартість ренти у вигляді

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k I(T_x > k),$$

а отже для актуарної вартості

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k \mathrm{E} I(T_x > k) = \sum_{k=m}^{\infty} v^k \mathbf{P}(T_x > k) = \frac{1}{l_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^k l_{x+k} \qquad (4.8)$$

4.2. Актуарна вартість і актуарне накопичення

З формули (4.8) може бути одержаний такий цікавий факт:

$$
{}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x}\sum_{k=m}^{\infty} v^k l_{x+k} = \frac{v^m}{l_x}\sum_{k=m}^{\infty} v^{k-m} l_{x+k} = \frac{v^m}{l_x}\sum_{j=0}^{\infty} v^j l_{x+m+j} =
$$

$$
= \frac{v^m l_{x+m}}{l_x}\cdot\frac{1}{l_{x+m}}\sum_{j=0}^{\infty} v^j l_{x+m+j} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x}\ddot{a}_{x+m} \tag{4.9}
$$

Ця формула аналогічна формулам (1.13), (1.14), але на відміну від детермінованого випадку, коефіцієнт дисконтування для періоду $(0, m)$ дорівнює не v^m, а ${}_mE_x = v^m \cdot \frac{l_{x+m}}{l_x}$, тобто менший.

Це легко пояснити на такому прикладі: розглянемо пенсійний фонд, до якого в момент $t_0 = 0$ *N* осіб віком *x* років внесли по одиничній сумі. До моменту *t* ця сума зросте до величини $N(1+i)^t$. Одночасно зменшиться і кількість учасників фонду – їх буде $N\mathbf{P}(T_x > t) = Nl_{x+t}/l_x$. Тому на кожного з них припадає сума

$$
A(x;t) = \frac{l_x}{l_{x+t}}(1+i)^t \tag{4.10}
$$

Це **актуарне накопичення**, і воно більше, ніж звичайне накопичення $(1+i)^t$ в теорії складних відсотків, оскільки поряд зі зростанням пенсійного фонду, за рахунок прибутку від відсотків зменшується кількість живих учасників цього фонду, які претендують на долю коштів фонду. Тому для одержання одиничної суми в момент *t* кожна з *N* осіб повинен внести в момент $t_0 = 0$ суму

$$
{}_tE_x = \frac{1}{A(x;t)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}v^t \tag{4.11}
$$

Це і є **актуарний коефіцієнт дисконтування** на відрізку $[0, t]$ для людини віком *x* років у момент $t_0 = 0$.

Розглянемо наступну ситуацію: припустимо, що з моменту $t_0 = 0$ на початку кожного року кожен член великої групи з *N* людей вносить до фонду суму 1. Розглянемо деякий момент *n* і підрахуємо кошти, накопичені до цього моменту.

Зауважимо, що з *N* живих представників вихідної групи в момент $t_0 = 0$ лише $N\mathbf{P}(K_x \geq n)$ людей проживе *n* років. Приведена вартість здійснених кожним із них платежів на момент *n* становить

$$(1+i)^n + .. + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Окрім того, $N\mathbf{P}(K_x = k)$ людей помруть на проміжку $[k, k+1)$. Приведена вартість здійснених кожним із них платежів у момент *n* становить

$$(1+i)^n + .. + (1+i)^{n-k} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-k-1}}{d}.$$

Тому загальна сума накопичень на момент $n-0$ становить

$$\sum_{k=0}^{n-1} N\mathbf{P}(K_x = k)\frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-k-1}}{d} + NP(K_x \geq n)\frac{(1+i)^n - 1}{d} =$$

$$= N\frac{(1+i)^n}{d}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\mathbf{P}(K_x = k) - v^n\mathbf{P}(K_x \geq n)\right) =$$

$$= N\frac{(1+i)^n}{d}(1 - A_{x:\bar{n}|}) = N(1+i)^n\ddot{a}_{x:\bar{n}|}.$$

Отже, на кожного з живих представників вихідної групи на момент *n* припадає сума

$$\ddot{s}_{x:\bar{n}|} = \frac{N(1+i)^n\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}{N\mathbf{P}(T_x > n)} = \frac{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}{{}_nE_x} \qquad (4.12)$$

Формула (4.12) визначає актуарне накопичення на момент *n* для довічної ренти.

4.3. Довічні ренти, що виплачуються з частотою p

Повна довічна рента. З моменту $t_0 = 0$ людина віком *x* років *p* разів на рік одержує суму $1/p$. Виплати здійснюються лише протягом життя людини, тобто в моменти

$$0, 1/p, ..., K_x, K_x + 1/p, .., K_x + m(x)/p,$$

де *m*(*x*) таке, що $K_x + m(x)/p < T_x \leq K_x + (m(x)+1)/p$.

Приведену вартість такої ренти позначимо через $\ddot{Y}_x^{(p)}$, а її середнє (актуарну приведену вартість) – через $\ddot{a}_x^{(p)}$.

На відміну від повної довічної ренти, для **тимчасової довічної ренти** період виплат обмежений деяким числом *n*. Якщо людина проживе ці *n* років, то буде здійснено *np* виплат. Якщо людина помре до моменту *n*, то буде здійснено $(K_x-1)p+m(x)+1$ виплат. Приведену вартість такої ренти позначимо через $\ddot{Y}_{x:\bar{n}|}^{(p)}$, а її середнє (актуарну приведену вартість) – через $\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(p)}$.

Очевидно, що

$$\ddot{Y}_{x:\bar{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p} I(T_x > l/p),$$

а отже, для актуарної приведеної вартості матимемо

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p} \mathrm{E} I(T_x > l/p) = \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p} \mathbf{P}(T_x > l/p).$$

Подамо індекс підсумовування *l* у вигляді $l = kp+j$, $k = 0,1,..,n-1; j = 0,1,..,p-1$.

Одержимо

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1} v^{k+j/p}\mathbf{P}(T_x > k+j/p) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p}\mathbf{P}(T_x > k+j/p).$$

Оскільки в цій формулі з'явилися дробові значення віку, то для подальших перетворень слід прийняти припущення щодо розподілу тривалості життя між цілими роками. Використаємо найпростіше з них – припущення про рівномірний розподіл смертей(див. Розділ 3). Матимемо

$$\mathbf{P}(T_x > k+j/p) = \frac{s(x+k+j/p)}{s(x)} = \frac{s(x+k)(1-j/p)+s(x+k+1)j/p}{s(x)} =$$

$$= (1-j/p)\mathbf{P}(T_x > k) + \frac{j}{p}\mathbf{P}(T_x > k+1).$$

А тому

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n-1} v^k P(T_x > k)\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n-1} v^k \left(\mathbf{P}(T_x > k) - \right.$$

$$\left. - \mathbf{P}(T_x > k+1)\right)\sum_{j=1}^{p-1}\frac{j}{p}v^{j/p}. \tag{4.13}$$

Суми, що входять у (4.13), можна спростити:

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k P(T_x > k) = \ddot{a}_{x:\bar{n}|}. \tag{4.14}$$

$$\sum_{k}^{n-1} v^k(\mathbf{P}(T_x > k) - \mathbf{P}(T_x > k+1)) = \sum_{k}^{n-1} v^k \mathbf{P}(T_x > k) - \frac{1}{v}\sum_{k}^{n-1} v^{k+1}\mathbf{P}(T_x > k) =$$

$$= \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - \frac{1}{v}(\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - 1 + v^n \mathbf{P}(T_x > n)) = \frac{1-(1-v)\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - {}_nE_x}{v} =$$

$$= \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - {}_nE_x}{1-d}. \tag{4.15}$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} = \frac{1-v}{1-v^{1/p}} = \frac{d}{1-(1-d)^{1/p}} = \frac{dp}{d^{(p)}}. \tag{4.16}$$

Для спрощення останньої суми про диференціюємо співвідношення (4.16) по v

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{j v^{\frac{j}{p}-1}}{p} = \frac{-(1-v^{1/p}) + (1-v)\frac{1}{p}v^{1/p-1}}{(1-v^{1/p})^2}.$$

Отже,

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{j}{p} v^{\frac{j}{p}} = \frac{-vp(1-v^{1/p}) + (1-v)v^{1/p}}{p(1-v^{1/p})^2} = \frac{-(1-d)pd^{(p)} + d(p-d^{(p)})}{(d^{(p)})^2} =$$

$$= \frac{-pd^{(p)} + pdd^{(p)} + pd - dd^{(p)}}{(d^{(p)})^2} \tag{4.17}$$

Підставляючи (4.14)-(4.17) в (4.13), одержимо

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\bar{n}|} = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}}\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}}(1 - {}_nE_x) \tag{4.18}$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо аналогічну формулу для актуарної вартості повної довічної ренти

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\bar{n}|} = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}} \tag{4.19}$$

4.4. Неперервні довічні ренти

При $p \to \infty$ можна розглядати процес надходження коштів як неперервний. Швидкість надходження коштів стала і дорівнює 1, тобто за малий проміжок часу Δ надійде сума Δ. Єдиною відмінністю повної неперервної довічної ренти від неперервної ренти, введеної в розділі 1, є те, що період платежів T_x – випадкова величина. Тому приведена вартість неперервної довічної ренти є

$$\bar{Y}_x = \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_x}{\delta}.$$

Тобто неперервні ренти відповідають неперервним видам страхування. Актарна вартість повної довічної ренти дорівнюватиме

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}. \tag{4.20}$$

Методом поточних платежів можна виразити актуарну приведену вартість через характеристики тривалості життя

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \mathbf{P}(T_x > t)dt = \frac{1}{s(x)}\int_x^\infty v^t s(x+t)dt = \frac{1}{v^x s(x)}\int_x^\infty v^t s(t)dt. \tag{4.21}$$

За аналогією до дискретних рент можна розглянути тимчасову неперервну довічну ренту як неперервний потік платежів, що відбуваються зі швидкістю 1 довічно, але не більше, ніж час t. Якщо x – вік людини на момент укладання договору, то період платежів - $\min(T_x, t)$. Приведена вартість такої ренти в момент $t_0 = 0$ позначається $\bar{Y}_{x:\bar{t}|}$. Метод сумарної виплати дає

$$\bar{Y}_{x:\bar{t}|} = \frac{1 - v^{\min(T_x,t)}}{\delta} = \frac{1 - \bar{Z}_{x:\bar{t}|}}{\delta}.$$

Тож для актуарної приведеної вартості матимемо

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\bar{t}|}}{\delta} \tag{4.22}$$

Методом поточних платежів одержимо

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = \int_0^t v^u P(T_x > u) = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+t} v^u s(u) du$$

Розглянемо велику групу з N осіб, віком x. Припустимо, що з моменту $t_0 = 0$ кожен член цієї групи неперервно зі швидкістю $\rho(t) = 1$ вносить до фонду гроші. Ці кошти накопичуються відповідно до ефективної відсоткової ставки i. Доля накопичених коштів на момент t, що припадає на одного живого представника вихідної групи, називається актуарним накопиченням і позначається $\bar{s}_{x:\bar{t}|}$. Для підрахунку актуарного накопичення визначимо спочатку динаміку загальної накопиченої суми $x(t)$. Розглянемо приріст $x(t)$ за малий проміжок часу

$$x(t + dt) = x(t)e^{\delta t} + N\mathbf{P}(T_x > t)dt.$$

Віднявши в обох частина рівності $x(t)$, розділивши обидві частини рівності на dt і перейшовши до границі при $dt \to 0$, матимемо

$$x'(t) = \delta x(t) + N\mathbf{P}(T_x > t).$$

Із урахуванням початкової умови $x(0) = 0$ одержимо розв'язок

$$x(t) = Ne^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta u} \mathbf{P}(T_x > u) du = Ne^{\delta t} \bar{a}_{x:\bar{t}|}.$$

Тому

$$\bar{s}_{x:\bar{t}|} = \frac{x(t)}{N\mathbf{P}(T_x < t)} = \frac{\bar{a}_{x:\bar{t}|}}{v^t \mathbf{P}(T_x < t)} = \frac{\bar{a}_{x:\bar{t}|}}{{}_tE_x}. \tag{4.23}$$

4.5. Модельні задачі до розділу 4

Модельна задача 4.1. *Виробнича компанія вирішила укласти груповий договір довічного страхування своїх співробітників з разовою виплатою премії у момент укладення договору. Страхова сума дорівнює* 1000 *для кожного працівника. Премія, яку установив страховик за це покриття, рівна* $P_0 = 449,35$, *на одного застрахованого.*

Проте страхувальник може виділити на одного застрахованого лише суму $P = 400$. *Оскільки сума, яку має в своєму розпорядженні страхувальник, недостатня для оплати договору на описаних вище умовах, страховик запропонував відкласти покриття на деякий термін* m *(тобто забезпечити співробітникам страхувальника відстрочене страхування життя) і за рахунок цього знизити премію.*

Знайдіть значення m, *вважаючи, що страховик розраховує премію так, щоб з деякою ймовірністю* α, *яка визначається політикою компанії і є фіксованою величиною у всіх актуарних розрахунках, виконати свої зобов'язання по цьому портфелю без залучення додаткових засобів. Крім того, при актуарних розрахунках страховик використовує технічну відсоткову ставку* $i = e^{0,06} - 1$ *і вважає, що інтенсивність смертності для всіх застрахованих стала і рівна* $\mu = 0,04$.

Розв'язання. Приймемо страхову суму за одиницю вимірювання грошових сум. Тоді величина страхового відшкодування, наведена з моменту заключення договору, задається формулою

$$_{m|}\bar{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, T_x > m, \\ 0, T_x < m. \end{cases}$$

Разова нетто-премія по цьому покриттю є

$$_{m|}\bar{A}_x = \mathbf{E}(v^{T_x}, T_x > m) = \int_m^{+\infty} e^{-\delta t}\mu e^{-\mu t}dt = \frac{\mu}{\mu+\delta}e^{-(\mu+\delta)m}.$$

Другий початковий момент величини страхового покриття, приведений на моментукладення договору, дорівнює

$$\mathbf{E}(_{m|}\bar{Z}_x) = \overset{2}{m|}\, \bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta}e^{-(\mu+2\delta)m}.$$

Отже, для дисперсії маємо

$$\mathbf{Var}(_{m|}\bar{Z}_x) = \frac{\mu}{\mu+2\delta}e^{-(\mu+2\delta)m} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^2}e^{-2(\mu+\delta)m}.$$

Тепер можна знайти відносну страхову надбавку (нижче N– число застрахованих по груповому договору що розглядається):

$$\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathbf{Var}}\ {}_{m|}\bar{Z}_x}{{}_{m|}\bar{A}_x \sqrt{N}} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(\mu+\delta)^2}{\mu(\mu+2\delta)} e^{\mu m - 1}}.$$

Тому премія за одного застрахованого рівна

$$P =_{m|} \bar{A}_x \cdot (1+\theta) = \frac{\mu}{\mu+\delta} e^{-(\mu+\delta)m} \left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(\mu+\delta)^2}{\mu(\mu+2\delta)} e^{\mu m - 1}} + 1 \right).$$

Вихідна ситуація (звичайне довічне страхування) відповідає випадку $m = 0$, і правильною є рівність:

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu+\delta} \left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \frac{\delta}{\sqrt{\mu(\mu+2\delta)}} + 1 \right).$$

З цієї рівності можна знайти величину $\frac{x_\alpha}{\sqrt{N}}$:

$$\frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} = (P_0 \frac{\mu}{\mu+\delta} - 1) \frac{\sqrt{\mu(\mu+2\delta)}}{\delta} \approx 0,1645.$$

Тепер приведену вище формулу для P можна розглядати як рівняння з однією невідомою m, звідки

$$m \approx 1,23789 \approx 1\text{рік } 3\text{місяці}.$$

Модельна задача 4.2. *Для того, щоб застрахувати життя однієї людини у віці $m = 30$, була організована спеціальна страхова компанія з капіталом $u_0 = 10$. Премії платяться неперервно з швидкістю $c = 2$ впродовж всього життя людини, а страхове відшкодування виплачується негайно після смерті. В разі смерті від «природніх» причин (умовна ймовірність $0,9$) страхове відшкодування рівне 40, а в разі смерті від нещасного випадку (умовна ймовірність $0,1$) – 80. Відомо, що $l_{30} = 96\,307,\ l_{45} = 92\ 181,\ l_{65} = 78\ 160$, а $i = 0\,\%$. Підрахуйте ймовірність банкрутства компанії.*

Розв'язання. Активи страховика до моменту смерті застрахованого будуть рівні $u = u_0 + c \cdot T_{30} = 10 + 2T_{30}$. Компанія збанкротує, якщо розмір страхового відшкодування (позначимо його через Y) буде більший, ніж u. Тому, позначаючи через R подію «компанія збанкротувала», за формулою повної ймовірності маємо:

$$\mathbf{P}(R) = P(10 + 2T_{30} < Y) = \mathbf{P}(10 + 2T_{30} < Y | Y = 40) \cdot \mathbf{P}(Y = 40) +$$

$$+\mathbf{P}(10+2T_{30} < Y \,|\, Y = 80)\cdot\mathbf{P}(Y = 80) = 0,9\mathbf{P}(T_{30} < 15)+0,1\mathbf{P}(T_{30} < 35) =$$

$$= 0,9\frac{l_{30} - l_{45}}{l_{30}} + 0,1\frac{l_{30} - l_{45}}{l_{30}} = \frac{l_{30} - 0,9l_{45} - 0,1l_{65}}{l_{30}} \approx 5,74\,\%.$$

Модельна задача 4.3. *Договір страхування життя на три роки передбачає виплату страхового відшкодування в кінці останнього року життя. Страхова сума складає $300\ 000$ в разі смерті застрахованого протягом першого року дії договору, $350\ 000$ в разі смерті застрахованого протягом другого року дії договору і $400\ 000$ в разі смерті застрахованого протягом третього року дії договору. При актуарних розрахунках компанія використовує технічну відсоткову ставку $\mathrm{i} = 6\%$ і передбачає, що ймовірність смерті застрахованого протягом k-го року дії договору, $q_{k+x}, k + 0,1,2$, задається формулою:*

$$q_{x+k} = 0,02 \cdot (k + 1).$$

Чому дорівна актуарна сучасна вартість зобов'язань страхувальника по виплаті страхового відшкодування?

Розв'язання. Нехай T_x – залишковий час життя застрахованого, $K_x = [T_x]$ – обмежений час життя, $v = (1+i)^{-1}$ – коефіцієнт дисконтування, Z— приведена (на момент укладання договору) вартість страхового відшкодування. За умовою

$$Z = \begin{cases} 300\ 000, K_x = 0, \\ 350\ 000, K_x = 1, \\ 400\ 000, K_x = 2. \end{cases}$$

Тому

$$\mathbf{E}Z = 300\ 000v\cdot\mathbf{P}(K_x = 0)+350\ 000v^2\cdot\mathbf{P}(K_x = 1)+400\ 000v^3\cdot\mathbf{P}(K_x = 2).$$

Але

$$\mathbf{P}(K_x = 0) = \mathbf{P}(T_x < 1) = q_x = 0,02,$$

$$\mathbf{P}(K_x = 1) = \mathbf{P}(1 < T_x < 2) = 1|\,q_x = p_x \cdot q_{x+1} = 0,98 \cdot 0,04 = 0,0392$$

$$\mathbf{P}(K_x = 2) = \mathbf{P}(2 < T_x < 3) = 2|\,q_x =$$

$$= p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} = 0,98 \cdot 0,96 \cdot 0,06 = 0,056448.$$

Отже, $\mathbf{E}Z = 36\ 829$.

Модельна задача 4.4. *Страховик уклав велику кількість однотипих договорів страхування життя на два роки з виплатою 100000 в кінці року* *смерті. Одна третина застрахованих є курцями, а дві третини — ні. Залишковий час життя описується законом*

$$ {}_tp_x = \exp(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2), $$

де $\theta = 1,5$ для курців і $\theta = 2$ для тих, хто не палить. Компанія вирішила призначити одну разову премію для всіх застрахованих. Визначите цю премію, якщо $i = 5\,\%$ (навантаження не враховується).

Розв'язання. Разова нетто-премія по даному вигляду страхування становить

$$ \mathbf{P} = 100\ 000 A^1_{x:\bar{2}|} = 100\ 000 \cdot (v \cdot P(T_x < 1) + v^2 \cdot P(1 < T_x < 2)). $$

Але

$$ \mathbf{P}(T_x < 1) \equiv q_x = 1 - p_x \equiv 1 -_1 p_x, $$

$$ \mathbf{P}(1 < T_x < 2) = \mathbf{P}(T_x > 1) - P(T_x > 2) \equiv_1 p_x -_2 p_x. $$

Для курців:

$$ \mathbf{P}(T_x < 1) \equiv 0,35882, \ \ \mathbf{P}(1 < T_x < 2) = 0,47217. $$

Для тих, хто не палить:

$$ \mathbf{P}(T_x < 1) \equiv 0,2212 \ \ \mathbf{P}(1 < T_x < 2) = 0,41092. $$

Тому для курців разова нетто-премія становить 77000, а для тих, хто не палить — 58338. Усереднюючи ці премії з вагами $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$ відповідно, отримаємо $\mathbf{P} = 64\ 559$.

Модельна задача 4.5. *Людина віком $\mathrm{E} = 35$ років купує довічну пенсію, починаючи з віку 65 років. Пенсія величиною 1000 грн. повинна виплачуватися раз на рік. Плата за пенсію R вноситься у вигляді разової премії у момент укладення договору. При цьому в разі смерті до настання пенсійного віку плата за пенсію R повертається спадкоємцям в кінці року смерті. Визначте R.*

Розв'язання На Рис. 1 умовно зображені два можливих сценарії розвитку подій.

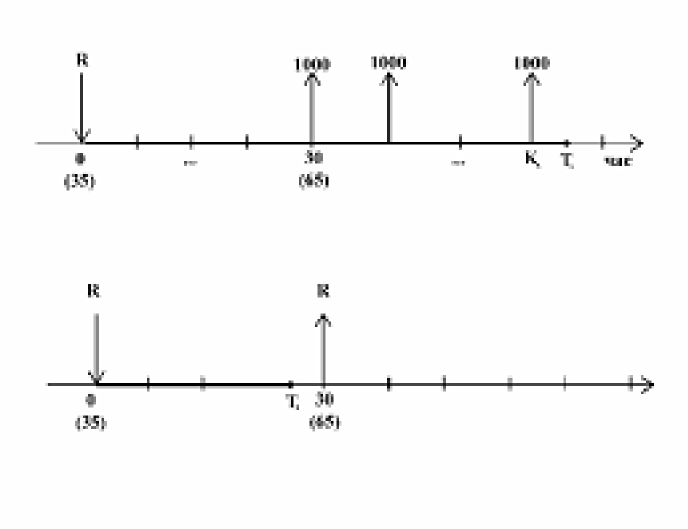

Рис. 1

Зобов'язання учасника пенсійного фонду полягає у виплаті суми R у момент укладання договору.

Зобов'язання пенсійного фонду полягають у виплаті відстроченої на $m = 30$ років довічної ренти (її приведена вартість на момент укладання договору є $1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35}$) і виплаті допомоги R за договором дискретного тимчасового (не більше $m = 30$ років) страхування життя (його приведена вартість на момент укладання договору є $R \cdot A^1_{35:\,30|}$).

Принцип еквівалентності зобов'язань дає:

$$R = 1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot R \cdot A^1_{35:\,30|},$$

звідки

$$R = 1000 \cdot \frac{{}_{30|}\ddot{a}_{35}}{1 - A^1_{35:\,30|}}.$$

Модельна задача 4.6. *Підрахуйте щорічну нетто-премію по наступному дискретному договору страхування життя:*

1) *вік застрахованого* 30 *років;*

2) *страхова сума дорівнює* 1 *протягом перших* 20 *років дії договору і* 5 *після цього;*

3) *період виплати премій не більше* 35 *років;*

4) *протягом перших* 35 *років щорічна премія повинна складати* $1/5$ *від щорічної премії в подальші* 15 *років;*

5) $i = 0,06;$

6) $A^1_{30:\,\overline{20}|} = 0,02933$, $A_{30} = \ 0,1024835$, $A_{30:\,\overline{20}|} \ = \ 0,32307$;

7) $\ddot{a}_{30:\,\overline{35}|} = \ 14,835 \ = \ 14,835$.

Розв'язання. Зобов'язання страховика на момент укладання договору є

$$Z = \begin{cases} v^{K_{30}+1}, T_{30} < 20, \\ 5 \cdot v^{K_{30}+1}, T_{30} > 20, \end{cases} = 5 \cdot v^{K_{30}+1} - 4 \cdot Z^1_{30:\overline{20}|},$$

де

$$Z^1_{30:\overline{20}|} = \begin{cases} v^{K_{30}+1}, \ O:I > \ T_{30} < 20, \\ 0, \qquad O:I > \ T_{30} > 20. \end{cases}$$

Тому актуарна сучасна вартість зобов'язань страховика є

$$\alpha_B = 5A_{30} - 4\mathrm{A}^1_{30:\,\overline{20}|} = 0,39508.$$

Аналогічно, актуарна сучасна вартість зобов'язань страхувальника є (нижче P – розмір щорічної премії впродовж перших 20 років дії договору):

$$\alpha_C = 5P\ddot{a}_{30:\,\overline{35}|} - 4P\ddot{a}_{30:\,\overline{20}|}.$$

Величину $\ddot{a}_{30:\,\overline{20}|}$ можна підрахувати за допомогою $A_{30:\,\overline{20}|}$:

$$\ddot{a}_{30:\,\overline{20}|} = \frac{1 - A_{30:\,\overline{20}|}}{d} \approx 11,959.$$

Тому

$$\alpha_{\mathrm{C}} \approx 26,339 \cdot P.$$

Із принципу еквівалентності маємо:

$$P \approx \frac{0,39508}{26,339} \approx 0,015.$$

Модельна задача 4.7. *Використовуючи принцип еквівалентності, підрахуйте премію за договором довічного страхування, який укладений з людиною віком $x = 80$ років на наступних умовах:*

1) *премія вноситься рівними долями у момент укладання договору і на початку третього року його дії (якщо договір ще діє);*

2) страхова сума 1000 *виплачується в кінці року смерті;*

3) якщо застрахований помирає впродовж першого або третього року дії договору, то в кінці року смерті додатково виплачується половина премії, внесеної на початку відповідного року;

Відомо, що якби був укладений звичайний дискретний договір довічного страхування, то разова нетто-премія дорівнювала б $665,7528$. *При актуарних розрахунках використовуйте технічну відсоткову ставку* $\mathrm{i} = 0,06$ *і таблицю тривалості життя 4.1.*

Таблиця 4.1

x	l_x
80	$39\ 143,64$
81	$36\ 000,37$
82	$32\ 845,41$
83	$29\ 704,95$

Розв'язання. Нехай P – премія, яка вноситься на початку першого і третього року. Тоді актуарна вартість зобов'язань страхувальника, приведена до моменту укладання договору, задається формулою

$$a_C = P + P \cdot v^2 \cdot \mathbf{P}(T_{80} > 2).$$

Актуарна сучасна вартість зобов'язань страховика задається формулою:

$$a_B = 1000 \cdot A_{80} + \frac{P}{2} \cdot v \cdot \mathbf{P}(T_{80} < 1) + \frac{P}{2} \cdot v^3 \cdot \mathbf{P}(2 < T_{80} < 3).$$

З принципу еквівалентності $a_C = a_B$ можна знайти P:

$$aP = 1000 \frac{A_{80}}{1 + v^2 \cdot \mathbf{P}(T_{80} > 2) - \frac{1}{2} v \cdot \mathbf{P}(T_{80} < 1) - \frac{1}{2} v^3 \cdot \mathbf{P}(2 < T_{80} < 3)}.$$

За умовою

$$A_{80} = 0,6657528,\ v = 1/(1+i) \approx 0,9434.$$

Крім того,

$$\mathbf{P}(T_{80} < 1) = \frac{\mathrm{l}_{81}}{l_{80}} \approx 0,08030,$$

$$\mathbf{P}(1 < T_{80} < 2) = \frac{\mathrm{l}_{82}}{l_{80}} \approx 0,83910,$$

$$\mathbf{P}(2 < T_{80} < 3) = \frac{\mathrm{l}_{82} - \mathrm{l}_{83}}{l_{80}} \approx 0,08023.$$

Тому

$$P \approx 397,41.$$

Модельна задача 4.8. *Страхова компанія уклала договір довічного страхування з людиною віком x років з виплатою страхової суми $S = 1$ у момент смерті. Премія платиться неперервно зі сталою швидкістю на протязі всього терміну дії договору. При актуарних розрахунках передбачається, що $\mu_{x+t} = 0,02$ для $t \geq 0$; $\delta = 0,07$; відносна страхова надбавка $\theta = 50\,\%$.*

Позначимо через I прибуток за договором, приведеним до моменту його завершення. Знайдіть $\mathbf{Var}I$.

Розв'язання. За умовою задачі залишковий час життя застрахованого має експоненціальний розподіл з параметром $\mu = 0,01$. Тому актуарна сучасна вартість зобов'язань страховика є:

$$\bar{A}_x = \mathbf{E}e^{-\delta T_x} = \frac{\mu}{\mu + \delta},$$

а актуарна сучасна вартість зобов'язань страхувальника:

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} = \frac{1}{\mu + \delta},$$

і, отже, нетто-премія рівна

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \mu.$$

Відповідно, брутто-премія премія P рівна $(1 + \theta) \cdot \mu$.

Випадкову величину I можна записати у вигляді

$$I = P \cdot \bar{a}_{\overline{T_x}|} - e^{-\delta T_x} = P\frac{1 - e^{-\delta T_x}}{\delta} - e^{-\delta T_x} = \frac{P}{\delta} - \left(1 + \frac{P}{\delta}\right) e^{-\delta T_x}.$$

Тому

$$\mathbf{Var}I = \left(1 + \frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot \mathbf{Var}e^{-\delta T_x} = \left(1 + \frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot (\mathbf{E}e^{-2\delta T_x} - (\mathbf{E}e^{-\delta T_x})^2) =$$

$$= \left(1 + \frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot ({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2) = \left(1 + \frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + 2\delta} - \frac{\mu^2}{(\mu + \delta)^2}\right) =$$

$$= (\delta + P)^2 \frac{\mu}{(\mu + 2\delta)\,(\mu + \delta)^2} = \frac{25}{162} \approx 0,154.$$

Модельна задача 4.9. *Страхова компанія уклала договір довічного страхування з людиною віком $x = 30$. Страхова сума $SA = 1000$ виплачується в кінці року смерті. Премія величиною $P = 20$ платиться раз на рік в річницю укладання договору. Відомо, що $i = 5\%$, l_{30}= 96 307, $l_{54} =$ 87 621.*

Знайдіть ймовірність того, що цей договір не буде збитковий для страховика.

Розв'язання. Нехай L – розмір збитку по договору, приведений до моменту його завершення:

$$L = SA{\cdot}v^{K_x+1} - P{\cdot}\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} = SA{\cdot}v^{K_x+1} - P\frac{1-v^{K_x+1}}{d} = (SA+\frac{P}{d}){\cdot}v^{K_x+1} - \frac{P}{d}.$$

Нас цікавить ймовірність того, що $L \le 0$. Для неї маємо:

$$\mathbf{P}(L \le 0) = \mathbf{P}\left(\left(SA + \frac{P}{d}\right) \cdot e^{-\delta(K_x+1)} \le \frac{P}{d}\right) = \mathbf{P}\left(e^{\delta(K_x+1)} \ge 1 + \frac{SA \cdot d}{P}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(K_x + 1 \ge \frac{1}{\delta}\ln\left(1 + \frac{SA \cdot d}{P}\right)\right) = \mathbf{P}\left(K_{30} + 1 \ge \ln\left(1 + \frac{1000}{21 \cdot 20}\right) / \ln\ 1{,}05\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(K_{30} + 1 \ge 24{,}975\right) = \mathbf{P}(K_{30} \ge 24) = \mathbf{P}(T_{30} \ge 24) =$$

$$= \frac{l_{54}}{l_{30}} \approx 91\,\%.$$

Модельна задача 4.10. *Договір страхування сімейної пари передбачає виплату страхової суми $S = 1$ у момент другої смерті. Премії платяться неперервно зі сталою швидкістю P до моменту першої смерті.*

Вважаючи, що моменти смерті дружини і чоловіка є незалежними випадковими величинами з однією і тією ж сталою інтенсивністю смертності $\mu = 0{,}07$, а інтенсивність відсотків, що використовується для розрахунків премій, рівна $\delta = 0{,}05$, підрахуйте P.

Розв'язання. Нехай $T_x^{(f)}(T_y^{(m)})$— тривалість життя дружини (чоловіка),

$T_{x:y} = \min\left(T_x^{(f)},\ T_y^{(m)}\right)$— момент першої смерті,

$T_{\overline{xy}} = \max\left(T_x^{(f)},\ T_y^{(m)}\right)$— момент другої смерті.

В силу незалежності величин $T_x^{(f)}$ і $T_y^{(m)}$, розподіл випадкових величин $T_{x:y}$ і $T_{\overline{xy}}$ задається формулами :

$$\mathbf{P}(T_{x:y} > t) = \mathbf{P}(T_x^{(f)} > t,\, T_y^{(m)} > t\,) = \mathbf{P}(T_x^{(f)} > t) \cdot \mathbf{P}(T_y^{(m)} > t) = e^{-0,14t},$$

$$\mathbf{P}(T_{\overline{xy}} < t) = \mathbf{P}(T_x^{(f)} < t,\, T_y^{(m)} < t\,) = \mathbf{P}(T_x^{(f)} < t) \cdot \mathbf{P}(T_y^{(m)} < t) = (1 - e^{-0,07t})^2.$$

Зобов'язання страховика полягає у виплаті страхової суми у момент $T_{\overline{xy}}$. Її вартість у момент укладання договору рівна

$$\overline{Z}_{\overline{xy}} = v^{T_{\overline{xy}}}.$$

Відповідно, актуарна сучасна вартість зобов'язань страхувальника рівна

$$\overline{A}_{\overline{xy}} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} dP(T_{\overline{xy}} < t) = \int_0^{+\infty} e^{-0,05t} \cdot 2 \cdot (1 - e^{-0,07t}) \cdot 0,07 e^{-0,07t} dt =$$

$$= 0,14 \cdot \left(\frac{1}{0,12} - \frac{1}{0,19} \right) = \frac{49}{114}.$$

Зобов'язання страхувальника полягає у виплаті неперервної ренти зі швидкістю P до моменту $T_{x:y}$. Його актуарну вартість у момент укладання договору найпростіше підрахувати методом поточного платежу; вона рівна

$$P \cdot \overline{a}_{x:y} = P \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} P(T_{x:y} > t) dt = P \cdot \int_0^{+\infty} e^{-0,19t} dt = \frac{100}{19} P.$$

Тепер з принципу еквівалентності зобов'язань можна знайти :

$$P = \frac{49}{600} \approx 0,0817.$$

4.6. Вправи до розділу 4

1) Відомо, що $l_{30} = 96307$, $l_{31} = 96117$, $l_{32} = 95918$. Обчисліть актуарну приведену вартість 3-річної тимчасової ренти, що виплачується раз на рік на початку року в розмірі 10000 грн. Вік людини на момент укладання договору – 30 років. Ефективна відсоткова ставка $i = 25\%$.

2) Припустимо, що тривалість життя описується законом Муавра з граничним віком $\omega = 100$ років, а ефективна річна відсоткова ставка $i = 10\%$. Визначте актуарну сучасну вартість повної довічної ренти, яка виплачуватиметься щомісячно в розмірі 1000 грн. Вік людини на момент укладання договору - 45 років.

3) Після страхового випадку, що призвів до тимчасової втрати працездатності застрахованого, страхова компанія повинна виплачувати застрахованому допомогу в розмірі **B** один раз на рік. Припускаючи, що виплати здійснюються неперервно, а час до одужання має гамма-розподіл з середнім *E* і дисперсією *V*, обчисліть актуарну приведену вартість зобов'язань страховика на момент початку виплат.

4) Людина віком $x = 40$ років виграла $B = 10000$ в актуарій лотереї. Переможець може замість негайного одержання цієї суми одержувати довічно в кожну річницю лотереї сталу суму S з гарантованою виплатою цієї суми протягом 10 років. Визначте S, якщо $i = 4\%$; $A_{40} = 0.3$; $A_{50} = 0.35$; $A^1_{40:\overline{10}|} = 0.09$.

5) Щоб оплатити виграші поточного року в лотерею, створюється спеціальний фонд. Відомо, що

   а) загальна кількість переможців – 100; вік усіх переможців – 40;
   б) кожен переможець одержує один раз на рік суму 10;
   в) розмір фонду визначається за допомогою нормального наближення так, щоб з імовірністю 95% можна було здійснити всі платежі;
   г) $i = 6\%$; $A_{40} = 0.1632$; ${}^2A_{40} = 0,0486$.

   Підрахуйте початковий розмір фонду.

6) Страхова компанія встановила плату за довічну ренту, виходячи з технічної відсоткової ставки $i = 5\%$ і таблиці смертності

x	40	41	...
q_x	1%	5%	...

   Відомо, що $a_{41} = 6.951$. Визначте a_{40}

7) Тривалість життя тих, хто не палить, має експоненціальний розподіл з середнім 33 роки і 4 місяці. Інтенсивність смертності для курців вдвічі вища, ніж інтенсивність смертності для тих, хто не палить. Припускаючи, що $i = 4\%$, знайдіть коефіцієнт варіації величини $\bar{Y}_x$.

8) Страхова компанія взяла на себе зобов'язання щорічно виплачувати 150 000 грн. робітнику, який отримав виробничу травму. Виплати починаються негайно і виплачуються щорічно протягом життя цього робітника. Після того, як страховик сплатить 500 000 грн., решту платежів здійснює перестрахова компанія. Відносно смертності робітника після такого роду травм відомо, що

$$ {}_tp_x = \begin{cases} (0.7)^t, 0 < t \le 5.5; \\ 0, t > 5.5. \end{cases} $$

Знайдіть актуарну приведену вартість зобов'язань перестрахової компанії, якщо $i = 5\%$.

Розділ 5.

Складові фінансового ризику страхової компанії

5.1. Моделі індивідуального ризику

Договори страхування укладаються для того, щоб позбутися фінансових втрат, пов'язаних з непередбачуваністю тих чи інших випадкових подій. До укладання договору страхування клієнт мав певний ризик, який міг би призвести до випадкових втрат X. Після укладання договору страхування, заплативши деяку невипадкову суму p, клієнт позбувся цього ризику. Іншими словами, клієнт іде на певні невеликі детерміновані витрати, щоб позбутися випадкових втрат, які хоч і малоймовірні, але можуть бути катастрофічно великими для нього. Але сам ризик не зник – його взяла на себе страхова компанія. Тому фінансовий ризик і пов'язана з ним небезпека банкрутства об'єктивно присутні в діяльності будь-якої страхової компанії. **Оцінка цього ризику представляє фундаментальний інтерес для компанії і є основою для прийняття рішення.**

Проблеми забезпечення фінансової стійкості страхової компанії комплексні: її вивчення та розв'язування припускає зусилля спеціалістів у різних сферах, передусім юристів та економістів. Але багато важливих задач носять чисто математичний характер. У рамках спеціальної математичної теорії – теорії ризику, розроблена система понять, моделей і методів, які дозволяють кількісно оцінювати фінансові ризики в діяльності страхової компанії. Враховуючи присутність випадкових факторів, фундаментом теорії ризику є теорія ймовірностей та математична статистика.

Елементарною складовою фінансового ризику компанії є індивідуальний позов. Залежно від ситуації іноді будемо розуміти під індивідуальним позовом будь-який конкретний позов, а іноді позов, породжений одним договором страхування. При страхуванні життя кожен окремий договір міг призвести лише до одного позову. У випадку майнового страхування часто трапляється, що один договір може призвести до декількох позовів.

Тому теорія ризику починається з побудови моделей для індивідуальних позовів. Випадкові величини, що описують індивідуальні позови, не є абсолютно довільними, а мають певні властивості. В ході розвитку актуарної математики виділені основні типи випадкових величин, які адекватно описують розміри індивідуальних позовів до страхової компанії. Крім того, були виділені основні операції над цими величинами, які представляють інтерес для моделювання конкретних ситуацій, що зустрічаються у страховій справі.

У найпростіших схемах страхування індивідуальний позов X набуває скінченну кількість значень $b_0 = 0, b_1, .., b_n$ з деякими ймовірностями $p_0, p_1, .., p_n$. Зокрема, при страхуванні життя, індивідуальний позов X є дискретною випадковою величиною.

В актуарній математиці прийнято у певний спосіб структурувати випадкову величину X, яка описує індивідуальний позов. Наприклад, якщо розглядати деякий договір страхування життя, то природно було б записати індивідуальний позов X у вигляді добутку

$$X = I \cdot Y, \tag{5.1}$$

де I – індикатор випадкової події {відбувся страховий випадок}, а Y описує розмір страхового покриття у випадку, якщо позов був справді поданий.

Зрозуміло, що I є індикатором події $X > 0$:

$$I = \begin{cases} 1, X > 0; \\ 0, X = 0. \end{cases} .$$

Тому її розподіл може бути визначений за допомогою розподілу індивідуального позову за формулами:

$$\mathbf{P}(I = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = p_0, \ \mathrm{P}(I = 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p_0$$

Розподіл випадкової величини Y – це умовний розподіл позову X за умови, що X >0:

$$\mathbf{P}(Y = b_i) = \mathbf{P}(X = b_i \,|X > 0) = \frac{\mathbf{P}(X = b_i)}{\mathbf{P}(X > 0)} = \frac{p_i}{1 - p_0}, i = 1, .., n$$

З другого боку, якщо відомі розподіли випадкових величин I та Y, то можна підрахувати розподіл індивідуального позову X. Зрозуміло, що $\mathbf{P}(I = 0) = \mathbf{P}(X = 0)$. Крім того, для $b_i > 0$

$$\mathbf{P}(X = b_i) = \mathbf{P}(I \cdot Y = b_i) =$$

$$= \mathbf{P}(I \cdot Y = b_i \,|I = 1) \cdot \mathbf{P}(I = 1) + \mathbf{P}(I \cdot Y = b_i \,|I = 0) \cdot \mathbf{P}(I = 0) =$$

$$= \mathbf{P}(Y = b_i) \cdot \mathbf{P}(I = 1)$$

У багатьох видах договорів майнового страхування один договір може призвести до декількох позовів за час своєї дії (наприклад страхування автомобілів). У цьому випадку природно подати величину X у вигляді суми

$$X = Y_1 + Y_2 + .. + Y_\nu, \tag{5.2}$$

де випадкова величина ν описує кількість позовів, породжених даним договором, а випадкові величини Y_i описують суми справді висунених позовів. Модель (5.1) є частинним випадком моделі (5.2). Як правило, припускають, що в моделі (5.2) випадкові величини Y_i і ν незалежні.

Опис індивідуального позову за допомогою моделей (5.1) та (5.2) зручний тим, що дозволяє розділити вплив різних факторів на величину позову від даного договору. Як правило, на частоту появи страхових випадків, яка описується величинами I та ν, впливають одні фактори, а на величину справді висуненого позову Y – зовсім інші.

Наприклад, частота автомобільних аварій ν серед людей, що уклали договори страхування з певною компанією, залежить від вікової структури клієнтів компанії (зрозуміло, що ймовірність потрапити в аварію велика для людей молодих і похилого віку), погоди в даному регіоні в розглядуваний проміжок часу та ін. Але ці фактори не впливають на величину страхової виплати Y для ремонту автомобіля після аварії, ця сума передусім визначається маркою авто.

Відзначимо такі важливі формули для розрахунку моментів структурованого позову (5.2):

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(Y_1 + .. + Y_\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) \cdot \mathbf{E}(Y_1 + .. + Y_\nu \,|\nu = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) \cdot n \cdot \mathrm{E}Y = \mathrm{E}\nu \cdot \mathrm{E}Y \tag{5.3}$$

Зокрема в моделі (5.1):

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y \cdot \mathbf{P}(I = 1) \tag{5.4}$$

Далі,

$$\mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}(Y_1 + .. + Y_\nu)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) \cdot \mathbf{E}(Y_1 + .. + Y_n)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) \cdot \mathbf{E}(Y_1^2 + .. + Y_n^2 + 2(Y_1 Y_2 + .. + Y_{n-1} Y_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) \cdot (n\mathbf{E}Y^2 + 2\frac{n(n-1)}{2}\mathbf{E}Y \cdot \mathbf{E}Y) =$$

$$= \mathbf{E}\nu \cdot \mathbf{E}Y^2 + \mathbf{E}(\nu(\nu - 1)) \cdot (\mathbf{E}Y)^2$$

і тому

$$\mathbf{Var}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}\nu \cdot \mathbf{E}Y^2 + (\mathbf{E}\nu^2 - \mathbf{E}\nu) \cdot (\mathbf{E}Y)^2 - (\mathbf{E}\nu)^2 \cdot (\mathbf{E}Y)^2 =$$

$$= \mathbf{E}\nu \cdot (\mathbf{Var}Y + (\mathbf{E}Y)^2) + (\mathbf{E}\nu^2 - (\mathbf{E}\nu)^2)(\mathbf{E}Y)^2 - \mathbf{E}\nu \cdot (\mathbf{E}Y)^2 =$$

$$= \mathbf{E}\nu \cdot \mathbf{Var}Y + \mathbf{Var}\nu \cdot (\mathbf{E}Y)^2. \tag{5.5}$$

Зокрема для моделі (5.1):

$$\mathbf{Var}X = \mathbf{Var}Y \cdot \mathbf{P}(I = 1) + (\mathbf{E}Y)^2 \cdot \mathbf{P}(I = 1) \cdot \mathbf{P}(I = 0) \tag{5.6}$$

Звичайно, індивідуальний позов X не може мати неперервний розподіл оскільки завжди є додатна ймовірність того, що позов дорівнює 0, більше того, ця ймовірність дуже близька до 1. Тому, ведучи мову про неперервну модель індивідуального, ми маємо на увазі, що неперервний розподіл має величина справді заявленого позову Y в представленні (5.1) чи (5.2).

Найбільший інтерес представляють собою такі розподіли величини справді заявленого позову як: рівномірний, експоненціальний, розподіл Парето, гамма-розподіл.

Рівномірний розподіл. Випадкова величина Y має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність стала на цьому відрізку (і дорівнює нулю поза цим відрізком):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a, b], \\ 0, x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Тож функція розподілу задається формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$$

Для середнього матимемо:

$$\mathbf{E}Y = \int_0^\infty xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b+a}{2}$$

Аналогічно, $\mathbf{E}Y^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$. Отже:

$$\mathbf{Var}Y = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Рівномірний розподіл позовів не є типовим для реальних статистичних даних. Як правило, для багатьох видів страхування характерна наявність великої кількості малих позовів і можливі великі позови. Тим не менше, в силу простоти рівномірний розподіл часто використовується в ілюстративних прикладах.

Експоненціальний розподіл. Випадкова величина Y має експоненціальний розподіл з параметром λ>0, якщо її щільність задається формулою

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

Відповідно, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0$. Для експоненціального розподілу $\mathbf{E}Y = \mathbf{Var}Y = 1/\lambda$

На відміну від рівномірного розподілу, експоненціальний розподіл відображає деякі характерні особливості реальних статистичних даних при різних видах страхування. Саме експоненціальна модель визначає велику кількість малих позовів і можливість хоч і рідких, але дуже великих позовів.

Та зауважимо, що хоч у рамках експоненціальної моделі теоретично можливі які завгодно великі позови, реально вони майже ніколи не спостерігаються. Це пов'язано з тим , що ймовірність позову Y, який перевищує середнє значення, скажімо, в 10 разів, дорівнює $\mathbf{P}(Y > 10/\lambda) = e^{-\lambda\cdot 10/\lambda} \approx 4,5\cdot 10^{-5}$ дуже мала.

Крім того, для експоненціального розподілу величин середнє значення дорівнює дисперсії. Це досить жорстка умова, яка не виконується для багатьох видів страхування. Від цих недоліків позбавлений розподіл Парето.

Розподіл Парето. Випадкова величина Y має розподіл Парето з параметрами $\lambda >$0 і $\alpha > 0$, якщо її щільність задається формулою

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1},\ x > 0.$$

Для середнього значення матимемо:

$$\mathbf{E}Y = \int_0^\infty (1-F(x))dx = \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} dx =$$

$$= \left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}\cdot\frac{\lambda}{-\alpha+1}\,|_0^\infty = \frac{\lambda}{\alpha-1}.$$

Так, розподіл Парето має скінчене середнє лише тоді коли $\alpha > 1$. Аналогічно для другого моменту матимемо:

$$\mathbf{E}Y^2 = 2\int_0^\infty x(1-F(x))dx = 2\int_0^\infty x\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} dx =$$

$$= \frac{2\lambda}{-\alpha+1}\int_0^\infty xd\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1} =$$

$$= \frac{2\lambda}{-\alpha+1}x\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}|_0^\infty - \frac{2\lambda}{-\alpha+1}\int_0^\infty\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+1}dx =$$

$$= \frac{2\lambda}{\alpha-1}\cdot\frac{\lambda}{-\alpha+2}\left(\frac{\lambda+x}{\lambda}\right)^{-\alpha+2}\Bigg|_0^\infty = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

і тому

$$\mathbf{Var}Y = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Отже, розподіл Парето має скінченну дисперсію тільки у випадку $\alpha > 2$. Звідси, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_Y = \sqrt{\mathbf{Var}Y} = \frac{\lambda}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}},$$

а коефіцієнт варіації

$$c_Y = \frac{\sigma_Y}{\mathbf{E}Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}$$

Коефіцієнт варіації розподілу Парето завжди більший за 1. На відміну від експоненціального розподілу, для розподілу Парето ймовірності великих значень позовів відносно великі; вони спадають за степеневим законом, а не за показниковим. Іншими словами, розподілу Парето характерна частіша поява більших позовів. Наприклад, імовірність позову Y, що перевищує середнє значення в 10 разів, буде:

$$\mathbf{P}(Y > 10\mathbf{E}Y) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 10\frac{\lambda}{\alpha - 1}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 9}\right)^{\alpha},$$

і, скажімо, при $\alpha=3$ дорівнює $6 \cdot 10^{-3}$, тоді як для експоненціального розподілу ця ймовірність дорівнювала $4,5 \cdot 10^{-5}$.

Гамма-розподіл. Випадкова величина Y має гамма-розподіл з параметрами $\lambda>0$ і $\alpha > 0$, якщо її щільність задається формулою:

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x}, x > 0,$$

де $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha - 1} e^{-t} dt$ – класична гамма-функція.

Нагадаємо, що $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$, і тому для цілочислових значень параметра α справедлива дуже проста формула: $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

У загальному випадку функцію розподілу $F(x)$ величини Y неможливо виразити в явному вигляді. Та якщо параметр α – ціле число, то $F(x) = F_{\alpha}(x)$ може бути підраховане. Тож, інтегруючи частинами, матимемо:

$$F_{\alpha}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} e^{-\lambda t} dt = -\int_0^x \frac{\lambda^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} d e^{-\lambda t}$$

$$= -\frac{\lambda^{\alpha - 1} t^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}\bigg|_0^x + \int_0^x \frac{\lambda^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} dt^{\alpha - 1} =$$

$$= -\frac{\lambda^{\alpha-1}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x} + \int_0^x \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda t}t^{\alpha-2}dt =$$

$$= F_{\alpha-1}(x) - \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x} = F_{\alpha-1}(x) - \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{-\lambda x}.$$

Оскільки $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x}$(нагадаємо, що при α=1 гамма-розподіл зводиться до експоненціального розподілу), то з цієї рекурентної формули одержимо:

$$F_\alpha(x) = 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + (\lambda x) + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + .. + \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right).$$

Для середнього значення матимемо:

$$\mathbf{E}Y = \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^\alpha x^\alpha e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}x^\alpha de^{-\lambda x} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}x^\alpha e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Аналогічно, $\mathbf{Var}Y = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Тому середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації будуть такі:$\sigma_Y = \sqrt{\mathbf{Var}Y} = \sqrt{\alpha}/\lambda$, $c_Y = \sigma_Y/\mathbf{E}Y = 1/\sqrt{\alpha}$.

Середнє і дисперсія гамма-розподілу можуть бути підраховані і за допомогою перетворення Лапласа:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(s+\lambda)x}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt(s+\lambda)^{-\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

А отже,

$$\mathbf{E}Y = -\varphi'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha-1}|_{s=0} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$EY^2 = \varphi''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha-2}\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Гамма-розподіл в певному розумінні займає проміжне положення між експоненціальним розподілом і розподілом Парето; при $x \to \infty$ щільність гамма-розподілу спадає швидше, ніж щільність розподілу Парето, але повільніше, ніж експоненціальна щільність. Крім того, відзначимо, що при $\alpha > 1$ гамма-розподіл добре моделює ситуацію, коли в основному позови групуються навколо певного значення, а невеликі позови хоч і можливі, але малоймовірні.

Гамма-розподіл відіграє надзвичайно важливу роль в актуарній математиці, оскільки виникає в цілому ряді розділів, зовнішньо ніяк не пов'язаних між собою. Наприклад., сума квадратів $\chi^2 = X_1^2 + .. + X_n^2$ n незалежних випадкових величин $X_1, .., X_n$, кожна з яких нормально розподілена з середнім 0 і дисперсією 1, має гамма-розподіл з параметрами $\alpha = n/2$, $\lambda = 0{,}5$. Величина χ^2 надзвичайно корисна у статистиці.

Якщо ж незалежні випадкові величини $X_1, .., X_n$ мають один і той же експоненціальний розподіл, то величина $Y = X_1 + .. + X_n$ має гамма-розподіл з параметрами λ і $\alpha = n$.

Розглянемо деякий договір страхування і припустимо, що за період дії договору може бути заявлено лише один позов. Позначимо через U втрати клієнта за цей проміжок часу. Поряд з цим розглянемо структуровану модель вигляду

$$U = J \cdot Z, \tag{5.7}$$

де J – індикатор події "був нещасний випадок", а випадкова величина Z описує розподіл втрат клієнтів при умові, що вони справді були (тобто розподіл реальних втрат).

Раніше ми неявно припускали, що позов X до страхової компанії заявлявся на всю величину витрат U. Відповідно індикатор I події "було заявлено позов" збігається з індикатором J події "відбувся нещасний випадок", а величина Y, що описує реальні виплати страхової компанії у випадку пред'явлення позову в моделі (5.1), збігається з величиною Z моделі (5.7).

Але реально договори страхування містять деякі додаткові умови, які призводять до того, що оплачується не вся величина збитків, а лише деяка її частина. Математичним відображенням цих умов є специфічна форма залежності величини позову X від величини збитків U.

Розглянемо, наприклад, таку умову: якщо втрати клієнта менші, ніж деякий рівень d, то позов узагалі не розглядається; якщо ж втрати клієнта перевищують рівень d, то задовольняється лише частина позову, що перевищує рівень d. Математично це можна виразити формулою

$$X = \begin{cases} 0, \text{ якщо } U \leq d, \\ U - d, \text{ якщо } U > d. \end{cases}$$

Використовуючи позначення $a^+ = \max(a, 0)$, це співвідношення можна записати у вигляді:

$$X = (U - d)^+.$$

Розподіл величини реальних виплат компанії Y пов'язаний з розподілом величини реальних витрат Z співвідношенням:

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x \,|X > 0) = \mathbf{P}((U-d)^+ \leq x \,|(U - d)^+ > 0) =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(0 < (U - d)^+ \leq x)}{\mathbf{P}((U - d)^+ > 0)} = \frac{\mathbf{P}(d < U \leq d + x)}{\mathbf{P}(U > d)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(d < Z \leq d + x)}{\mathbf{P}(Z > d)} = \frac{F_Z(x + d) - F_Z(d)}{1 - F_Z(d)} \tag{5.8}$$

Якщо величина Z неперервна, то щільність величини Y дорівнює:

$$p_Y(x) = F'_Y(x) = p_Z(x + d)/(1 - F_Z(d)) \tag{5.9}$$

Припустимо, що договір страхування містить умову: збитки клієнта відшкодовуються тільки до певної суми L. Іншими словами, якщо втрати клієнта менші ніж L, то компанія повністю відшкодовує їх. Якщо ж витрати більші ніж рівень L, то компанія відшкодовує лише суму L. Математично це можна записати таким чином

$$X = \begin{cases} U, \text{ якщо } U \leq L, \\ L, \text{ якщо } U > L. \end{cases} \tag{5.10}$$

Іншими словами

$$X = \min(U, L)$$

Розподіл величини справді заявленого позову Y задається формулою:

$$\mathbf{P}(Y \leq x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \geq L \\ \mathbf{P}(Z \leq x), \text{ якщо } x < L \end{cases} \tag{5.11}$$

Припустимо, що компанія уклала договір страхування деякого ризику за суму p. Якщо втрати U клієнта більші, ніж p (тобто настає страховий випадок з відносно важкими наслідками), то компанія зазнає збитків величиною $U - p$; якщо ж $U < p$ (тобто страховий випадок зовсім не наступає чи його наслідки відносно незначні), то компанія отримує прибуток $p - U$. Часто власник договору має можливість впливати на частоту настання цих випадків. Наприклад, при медичному страхуванні людина може більше часу приділяти здоровому способу життя, при страхуванні автомобілів водій може обирати менш небезпечні маршрути, звертати увагу на безпечність місця стоянки та ін. Щоб стимулювати власника договору, компанія готова ділитися з ним своїм прибутком у випадку, якщо $U < p$. Саме в цьому випадку компанія готова взяти собі лише певну суму $(1-k)p$, $1 < k < 1$, щоб покрити витрати на ведення справи, забезпечити деякий прибуток і т.д., а різницю повернути клієнту. Оскільки при $U \in (kp, p)$, прибуток компанії менший, ніж $(1-k)p$, то в цьому випадку поділ прибутку не відбувається. Отже, заплативши за договір фіксовану суму p, власник договору в усіх випадках одержує повне відшкодування своїх збитків U, а, крім того, при $U < kp$ – ще й частину прибутку D, що дорівнює $kp - U$.

У цьому випадку позов до компанії величиною U реально перетворюється на виплату суми

$$X = U + D = U + (kp - U)^{+} = \max(kp, U),$$

де $D = (kp - U)^{+}$- доля клієнта в прибутку страхової компанії.

Цю формулу можна переписати:

$$X = kp + (U - kp)^{+}.$$

5.2. Моделі процесу позовів

Найпростіша статична модель, що описує надходження позовів, базується на таких припущеннях:

1) аналізується фіксований проміжок часу;

2) число договорів N фіксоване і невипадкове;

3) кожен договір за розглядуваний період часу може спричинити лише один позов (а може і не привести до позову);

4) ризики, що пов'язані з договорами, незалежні, тобто настання чи ні страхового випадку за однин договір не впливає на настання страхових випадків за іншими договорами;

5) договори однорідні в тому розумінні, що ймовірність q позову за розглядуваний період часу одна і та ж для всіх договорів;

6) ми цікавимося лише загальною кількістю ν позовів за розглядуваний період часу, не звертаючи уваги на моменти настання позовів.

Для розрахунку характеристик випадкової величини ν, яка в розглядуваній моделі є величиною, що характеризує настання позовів, введемо такі індикаторні величини $I_1, .., I_N$. $I_i = 1$ чи 0 відповідно до того, привів чи ні i-тий договір до позову (іншими словами, I_i – кількість позовів, що породжена i-тим договором). Це дозволяє записати величину ν у вигляді суми:

$$\nu = I_1 + .. + I_N \tag{5.12}$$

Випадкові величини $I_1, .., I_N$ однаково розподілені за законом:

$$\mathbf{P}(I = 1) = q,\ \mathrm{P}(I = 0) = p = 1 - q$$

з твірною функцією

$$z^0 \cdot \mathbf{P}(I = 0) + z^1 \cdot \mathbf{P}(I = 1) = p + zq.$$

Оскільки величини $I_1, .., I_N$ незалежні , то твірна функція $\pi(z)$ величини ν дорівнює добутку твірних функцій випадкових величин $I_1, .., I_N$:

$$\pi(z) = (p + zq)^N.$$

Нагадаємо, що за означенням, $\pi(z) = \sum_{i=0}^{N} P(\nu = i)z^i$. З другого боку, за формулою бінома Ньютона:

$$(p + zq)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i (zq)^i p^{N-i} = \sum_{i=0}^{N} C_N^i q^i p^{N-i} z^i,$$

де $C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!} = \frac{N(N-1)..(N-i+1)}{i!}$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z, можна знайти розподіл числа позовів:

$$\mathbf{P}(\nu = i) = C_N^i q^i p^{N-i} \tag{5.13}$$

Ця формула може бути одержана і за допомогою комбінаторних роздумів. Усього є C_N^i варіантів розвитку подій, при яки заявлено рівно *i* позовів, а ймовірність кожного конкретного варіанта дорівнює $q^i p^{N-i}$.

Розподіл (5.13) називається біноміальним розподілом, а випадкова величина ν – біноміальною випадковою величиною.

Використовуючи твірну функцію легко знайти моменти випадкової величини ν

$$\pi'(z) = N(P + qz)^{N-1}q, \pi''(z) = N(N-1)(p + qz)^{N-2}q^2,$$

отже, маємо

$$\mathbf{E}\nu = \pi'(1) = Nq, \mathbf{Var}\nu = \pi''(1) + \pi'(1) - [\pi'(1)]^2 = Npq$$

У розглядуваній статичній моделі було б природно припустити, що кількість договорів N велика, а ймовірність заявлення позову q – мала. При цьому середнє число позовів $\mathbf{E}\nu = Nq$ за розглядуваний проміжок часу, як правило, є деяким числом $\lambda \in (0, \infty)$. У цій ситуації (коли $N \to \infty$, $q \to 0$, $Nq \to \lambda \in (0, \infty)$) можна апрокисмувати біноміальний розподіл (5.13) для числа позовів більш простим розподілом – так званим розподілом Пуассона. Справді, при зроблених припущеннях:

1) $(1-q)^{N-i} = \exp((N-i)\ln(1-q)) = \exp((N-i)(-q + o(q))) =$

$$= \exp(-Nq + o(1)) = \exp(-\lambda + o(1)) \to e^{-\lambda};$$

2) $N(N-1)..(N-i+1)q^i = Nq(Nq-q)..(Nq-(i-1)q) \to \lambda^i$

Тому

$$\mathbf{P}(\nu = i) = C_N^i q^i p^{N-i} \to \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}. \tag{5.14}$$

Важливі такі властивості випадкових величин, що мають пуассоновий розподіл:

1) $\mathbf{E}\nu = \lambda, \mathbf{Var}\nu = \lambda$;

2) Якщо величини ν_1, ν_2 - незалежні і розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_1, λ_2 відповідно, то їх сума $\nu_1 + \nu_2$ теж має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ці властивості легко довести, використовуючи твірну функцію. Твірна функція розподілу Пуассона дорівнює

$$\pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{\lambda z - \lambda}.$$

Тому $\pi'(z) = \lambda e^{\lambda z - \lambda}$, $\pi''(z) = \lambda^2 e^{\lambda z - \lambda}$ і , отже,

$$\mathbf{E}\nu = \pi'(1) = \lambda, \mathbf{Var}\nu = \pi''(1) + \pi'(1) - [\pi'(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Твірна. функція суми $\nu_1 + \nu_2$ дорівнює

$$e^{\lambda_1 z - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 z - \lambda_2} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) z - (\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

А це є твірна функція пуассонової випадкової величини з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Наголосимо, що пуассонове наближення для кількості позовів за фіксований проміжок часу справедливе і для більш загальних моделей, ніж та, яка була описана на початку. Припустимо, наприклад., що кожен індивідуальний договір може виробити довільну кількість позовів згідно з деяким розподілом p_0, p_1, p_2.... Припустимо, як і раніше, що число договорів *N* дуже велике, тобто $N \to \infty$, а ймовірності p_n при $N \to \infty$ поводиться так:

$$p_1 = \frac{\lambda}{N} + o(\frac{1}{N}),\ p_1 = 1 - \frac{\lambda}{N} + o(\frac{1}{N}),\ \sum_{n=2}^{\infty} p_n = o(\frac{1}{N})$$

(тобто, ймовірність одного позову мала, але ймовірність більше ніж одного позову – нескінченно мала величина вищого порядку).

Оскільки ми все ще припускаємо незалежність і однакову розподіленість випадкових величин $I_1, .., I_N$, які описують кількість позовів, що породжені договорами, для твірної функції сумарної кількості позовів справедлива формула :

$$\pi(z) = [h(z)]^N,$$

де $h(z) = p_0 + z p_1 + z^2 p_2 + \ldots$– твірна функція кількість позовів, породжених одним договором за розглядуваний проміжок часу.

Оскільки $p_0 + p_1 + .. = 1$, то $h(z)$ можна подати у вигляді:

$$h(z) = 1 - p_1 - p_2 - .. + z p_1 + z^2 p_2 + .. = 1 - t,$$

де $t = [(1 - z) p_1 + (1 - z^2) p_2 + (1 - z^3) p_3 + ..]$.

Далі:

$$|t| \le |1-z|\,p_1 + \left|1-z^2\right| p_2 + \left|1-z^3\right| p_3 + .. \le 2(p_1+p_2+p_3+..)$$

і тому при $N \to \infty$ величина $t \to 0$.

Крім того,

$$|Nt - \lambda(1-z)| = \left|(1-z)(Np_1-\lambda) + N(1-z^2)p_2 + N(1-z^3)p_3 + ..\right| \le$$

$$\le 2\,|Np_1-\lambda| + 2N(p_2+p_3+...) = o(1),$$

тобто $Nt \to \lambda(1-z)$.

Тому

$$\pi(z) = \exp(N \ln h(z)) = \exp(N\ln(1-t)) =$$

$$= \exp(-Nt + o(Nt) = \exp(-\lambda(1-z) + o(1)) \to \exp(\lambda z - \lambda).$$

Справа стоїть твірна функція розподілу Пуассона з параметром λ. В силу теореми неперервності для твірних функцій справедливо, що

$$P(\nu = i) \to \frac{\lambda_i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Модель (5.13) та її узагальнення, яке було розглянено – статичне, тобто не містить сценарій надходження позовів з часом. Вона фіксує лише взаємодію індивідуальних договорів. Розглянемо динамічну модель для кількості позовів за фіксований проміжок часу. У цій моделі фіксується взаємодія кількості позовів, що надійшли за різні неперетинні проміжки часу, й ігнорується структура портфеля та взаємодія індивідуальних договорів. Тому вона може застосовуватися і для опису процесу надходження позовів від окремого договору, якщо договір за час своєї дії може виробити декілька позовів.

Позначимо через $\nu(t)$ – кількість позовів, що надійшли за час $(0,t)$. Через цю змінну можна виразити і величину $\nu(t_1,t_2)$, що дорівнює кількості позовів, які надійшли за проміжок (t_1,t_2).

Припустимо, що:

1) процес надходження позовів однорідний, тобто розподіл ВВ $\nu(t_1,t_2)$ залежить від довжини t_2-t_1 розглядуваного проміжку (t_1,t_2) і не залежить від його положення на осі часу;

2) процес ординарний у тому розумінні, що надходження 2-х чи більше позовів за малий проміжок часу Δt майже неможливе. Математично це записується так: $\mathbf{P}(\nu(\tau, \tau + \Delta t) \geq 2) = o(\Delta t)$;

3) процес надходження позовів є процесом з незалежними приростами, тобто величини

$$\nu(t_1, t_2),\ \nu(t_2, t_3), .., \ \nu(t_{n-1}, t_n),\ t_1 < t_2 < .. < t_n,$$

що виражають кількість позовів, які надійшли за неперетинні проміжки часу, незалежні.

Уведені припущення досить природні як при описі всього портфеля договорів, так і при описі надходження позовів від індивідуального договору у випадку, коли договір за час своєї дії може викликати декілька позовів.

Як ми зараз покажемо, що для деякого λ>0

$$P_n(t) \equiv \mathbf{P}(\nu(\tau, \tau + t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \tag{5.15}$$

тобто розподіл кількості позовів, що надійшли за фіксований проміжок часу, є пуассоновим процесом.

Передусім відзначимо таку властивість пуассонового процесу, яка випливає з припущень 1, 2, 3:

$$P_n(u + v) = P_n(u) \cdot P_0(v) + P_{n-1}(u) \cdot P_1(v) + .. + P_0(u) \cdot P_n(v) \tag{5.16}$$

Для доведення цієї рівності розіб'ємо інтервал $(0, u+v)$ на два інтервали $(0, u)$ і $(u, u + v)$. Зрозуміло, що

$$\nu(0, u + v) = \nu(0, u) + \nu(u, u + v).$$

Випадкові величини $\nu(0, u + v)$, $\nu(0, u)$, $\nu(u, u + v)$ мають розподіли $P_n(u+v)$, $P_n(u)$, $P_n(v)$ відповідно (аксіома стаціонарності). Крім того, величини $\nu(0, u)$, $\nu(u, u+v)$ - незалежні. Отже, розподіл $P_n(u+v)$ є згорткою розподілів $P_n(u)$, $P_n(v)$, що і виражає рівність (5.16).

Зокрема, при *n*=0 рівність (5.16) набуде вигляду:

$$P_0(u + v) = P_0(u) \cdot\ P_0(v)$$

Припустивши, що $v = u$, $2u$, ..., послідовно одержимо, що $P_0(nu) = (P_0(u))^n$. Оскільки число *u* довільне, його можна замінити на *v*/*n*, що дає:

$$P_0(v) = \left(P_0\left(\frac{v}{n}\right)\right)^n$$

тобто $P_0(\frac{v}{n}) = (P_0(v))^{\frac{1}{n}}$.

Для довільного числа *u* і довільних *m*, *n* матимемо:

$$P_0\left(u \cdot \frac{m}{n}\right) = P_0\left(\frac{u}{n} \cdot m\right) = \left(P_0\left(\frac{u}{n}\right)\right)^m = \left(P_0(u)^{\frac{1}{n}}\right)^m = (P_0(u))^{\frac{m}{n}}.$$

Оскільки довільне дійсне число *v* можна наблизити раціональними числами, то

$$P_0(u \cdot v) = (P_0(u))^v \tag{5.17}$$

З цієї рівності випливає, що $0 < P_0(t) < 1$ при всіх *t*. Справді, якщо для деякого *T* справедлива рівність $P_0(T) = 0$, то з (5.16) при $u = T,\ v = \frac{t}{T}$ випливає, що $P_0(t) = 0$ при всіх *t*. Отже, що $\nu(t) \geq 1$ при всіх t. Розбиваючи відрізок (0,*t*) на *n* частин $\Delta_1, .., \Delta_n$, ми би одержали, що

$$\nu(t) = \nu(\Delta_1) + .. + \nu(\Delta_n) \geq n,$$

тобто $\nu(t)$ більше від будь-якого наперед заданого числа. Іншими словами, ми б мали рівність $\nu(t) = \infty$, що неможливо.

Крім того, якщо для деякого *T* справедлива рівність $P_0(T) = 1$, то при $u = T,\ v = \frac{t}{T}$ ми би мали $P_0(t) = 1$ при всіх *t*. Це означає, що $\nu(t) \equiv 0$, тобто позови взагалі не заявляються.

Тому можна розглянути $\ln P_0(1)$ і гарантувати, що він строго від'ємний. Позначимо

$$\lambda = -\ln P_0(1),$$

отже,

$$P_0(1) = e^{-\lambda}. \tag{5.18}$$

Припустивши в рівності (5.17), що $u = 1,\ v = t$ і, використовуючи (5.18), одержимо:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{5.19}$$

Отже, довели справедливість бажаного результату (5.15) для $n = 0$.

Щоб довести справедливість (5.15) при всіх *n*, ми одержимо диференціальне рівняння, яке описує розподіл кількості позовів. З цією метою в рівності (5.16) припустимо, що $u = t,\ v = \Delta t$:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)\cdot P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)\cdot P_1(\Delta t) + .. + P_0(t)\cdot P_n(\Delta t)$$

Перепишемо цю рівність у вигляді

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_n(t)\frac{P_0(\Delta t)-1}{\Delta t} + P_{n-1}(t)\frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} +$$

$$+\frac{1}{\Delta t}(P_{n-2}(t)P_2(\Delta t) + .. + P_0(t)P_n(\Delta t)) \tag{5.20}$$

Оскільки

$$P_{n-2}(t)P_2(\Delta t) + .. + P_0(t)P_n(\Delta t) \le P_2(\Delta t) + .. + P_n(\Delta t) \le$$

$$\le P_2(\Delta t) + .. = \mathbf{P}(\nu(\Delta t) \ge 2) = o(\Delta t),$$

при $\Delta t \to 0$ останній член у правій частині (5.20) прямує до нуля. Крім того,

$$\frac{P_0(\Delta t)-1}{\Delta t} = \frac{e^{-\lambda\Delta t}-1}{\Delta t} = \frac{1-\lambda\Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -\lambda + o(1),$$

і тому

$$\frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1 - P_0(\Delta t) - \mathbf{P}(\nu(\Delta t)\ge 2)}{\Delta t} = \frac{1 - P_0(\Delta t) + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda + o(1)$$

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$ в рівності (5.20), одержимо:

$$P_n^{'}(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t),\ n \ge 1 \tag{5.21}$$

Оскільки $P_0(t)$ вже відоме, то з (5.21) можна послідовно визначити всі ймовірності $P_n(t)$; при $n \ge 1$ початкова умова, очевидно, має вигляд: $P_n(0) = 0$. Технічно це зручно зробити за допомогою твірної функції числа позовів:

$$\pi(z,t) = \mathbf{E}z^{\nu(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)$$

Помноживши обидві частини (5.21) на z^n і підсумовуючи по $n = 0, 1, 2...$, перетворимо систему з нескінченного числа диференціальних рівнянь з нескінченною кількістю невідомих в одне диференціальне рівняння з однією невідомою функцією $\pi(z,t)$:

$$\pi'_z(z,t) = \lambda(z-1)\pi(z,t).$$

Звідси

$$\pi(z,t) = \pi(z,0) \cdot e^{\lambda(z-1)t}.$$

Оскільки

$$\pi(z,0) = P_0(0) + zP_1(0) + z^2P_2(0) + ... = 1 + z \cdot 0 + z^2 \cdot 0 + .. = 1,$$

остаточно одержимо

$$\pi(z,t) = e^{\lambda t(z-1)}$$

Справа стоїть твірна функція Пуассона з параметром λt, що і завершує доведення.

5.3. Вправи до розділу 5

1) Протягом розглядуваного періоду один договір може призвести лише до одного позову. Крім того, відомо, що

   а) нетто-премія дорівнює 2;
   б) дисперсія величини справді заявленого позову Y дорівнює 16;
   в) дисперсія індивідуального ризику X дорівнює 30

   Визначте ймовірність настання страхового випадку і середній розмір страхового покриття.

2) Щомісячні виплати страхової компанії моделюються як неперервна додатна випадкова величина Y із щільністю пропорційною $(1+x)^{-4}$ при $x > 0$. Визначте середні виплати компанії за місяць.

3) Договір групового страхування покриває медичні збитки співробітників деякої компанії. Сумарні річні виплати страховика моделюються випадковою величиною

$$V = 100000Y,$$

де Y - випадкова величина зі щільністю виду

$$p_Y(x) = \begin{cases} k(1-y)^4, 0 < x < 1; \\ 0, x \notin (0,1) \end{cases}$$

Яка ймовірність того, що V перевищить 40 000, якщо точно більше ніж 10 000?

4) Час від моменту купівлі обладнання до моменту його виходу з ладу має експоненціальний розподіл з середнім 10 років. Власник обладнання вирішив застрахувати його на випадок раннього виходу з ладу. За умовами договору, страхова компанія сплачує певну страхову суму x у випадку виходу з ладу обладнання протягом першого року експлуатації, 50% від цієї суми у випадку виходу з ладу обладнання протягом другого чи третього років експлуатації і не платить нічого, якщо обладнання безвідмовно працює три роки. Відомо, що очікувані виплати страхової компанії за цим договором становлять 1000. Знайдіть розмір страхової суми x.

5) Розмір збитку, який спричиняє житловим будинкам ураган, моделюється незалежними випадковими величинами зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, \text{ якщо } x > 1; \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Припустимо, що було заявлено три таких позови. Чому дорівнює середнє значення найбільшого з них?

6) Щоб покрити збитки Y, рівномірно розподілені на відрізку [0,1000], укладається договір страхування. Щоб зменшити премію, страхова компанія пропонує укласти договір, відповідно з яким клієнт самостійно покриває збитки до певного рівня d, а залишок оплачує страховик. На якому рівні треба встановити межу d, щоб середня важкість страхового випадку зменшилась в 4 рази?

7) Розмір збитку після настання страхового випадку моделюється випадковою величиною зі щільністю

$$p(x) = xe^{-x}, x > 0$$

У наступному році страховик очікує $N = 100$ страхових випадків. Як зміниться ця випадкова величина, якщо страховик введе межу утримання $d = 1$(тис.грн.)

8) Підприємство купує річний страховий поліс, щоб застрахувати свій прибуток на випадок поганої погоди, яка призводить до припинення роботи. Протягом року кількість випадків погіршення погоди, що приводять до припинення роботи підприємства, має розподіл Пуассона із середнім 1.5. Відповідно до умов договору страховик, не платить нічого при першому випадку погіршення погоди, але сплачує по 10 000 при кожному наступному погіршенні погоди. Обчисліть очікувані виплати страховика за таким договором.

9) Страховий агент одержує винагороду, якщо за укладеними договорами збитковість менша за 70%. Відомо, що:

   а) збитковість розраховується як відношення усіх виплачених страхових сум до зібраних премій;
   б) агент одержує долю від зібраної премії, що становить 1/3 різниці між 70% і збитковістю;
   в) винагорода не виплачується, якщо збитковість більша 70%;
   г) сумарні збитки за договорами розподілені за законом Парето:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{600000}{x + 600000}\right)^3, \ x > 0$$

   Обчисліть очікувану винагороду.

10) Величина збитку при пожежі, якщо вона відбулася, має експоненціальний розподіл з середнім $m = 2000$ грн. Страхова компанія встановила верхню межу своєї відповідальності $L = 5000$ грн. Визначте середній розмір реальних виплат компанії для цього страхового випадку.

11) Кількість страхових випадків за одним договором страхування розподілене за законом Пуассона. Для половини договорів середня кількість страхових випадків на рік дорівнює 2, а для іншої половини – 4. За навмання вибраним договором два роки підряд було заявлено по 4 страхових випадки на рік. Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за цим договором у наступному році?

12) Актуарій страхової компанії встановив, що за час дії певного виду договорів застраховані заявляють два страхових випадки в три рази частіше, ніж чотири страхових випадки. Знайдіть дисперсію кількості страхових випадків, якщо вона має розподіл Пуассона.

13) Компанія уклала 1250 договорів страхування. Число страхових випадків, заявлених за одним договором протягом року, має розподіл Пуассона з середнім значенням 2. Припускаючи, що кількість страхових випадків, заявлених різними страхувальниками, незалежні, підрахуйте ймовірність того, що по всьому портфелю за рік буде заявлено від 2450 до 2600 страхових випадків.

14) Розподіл кількості страхових випадків є рандомізованим пуассоновим розподілом із середнім значенням, що рівномірно розподілене на відрізку [0,5]. Обчисліть імовірність того, що відбудеться принаймні два страхових випадки.

15) Відомо, що кількість страхових випадків ν має розподіл Пуассона з параметром, який має гамма-розподіл з середнім 1 і дисперсією 2. Підрахуйте ймовірність того, що $\nu = 1$.

16) Актуарій страхової компанії встановив, що для навмання взятого договору розподіл кількості страхових випадків, заявлений протягом року, має від'ємно-біноміальний розподіл з середнім 0.2 і дисперсією 0.4. З іншого боку, від'ємно-біноміальний розподіл – це рандомізований пуассоновий розподіл, у якому параметр має гамма-розподіл. Знайдіть дисперсію цього гамма-розподілу.

17) Процес настання страхових випадків – пуассоновий з параметром 2. Визначте середній час до настання п'ятого страхового випадку.

18) За місяць відбувається в середньому 100 страхових випадків. При цьому 2% з них призводять до збитку, що перевищує 30 000 грн. Припускаючи, що моменти настання страхових випадків утворюють пуассоновий процес, визначте, скільки повних місяців треба збирати дані, щоб зафіксувати принаймні 3 страхових випадки, які перевищують 30 000 грн., з імовірністю не менше, ніж 90%.

19) Страхова компанія встановила тариф для певному виду ризиків з припущення, що частота настання страхових випадків дорівнює 0.01 протягом року, а середня важкість страхового випадку – 980 грн., і уклала 1000 договорів страхування таких ризиків. Через рік виявилося, що по

цьому портфелю сталось 15 страхових випадків, а середній розмір страхового покриття склав 989.7 грн. Тоді як середній розмір страхового покриття досить добре відповідає початковому припущенню, реальна кількість страхових випадків на 50% перевищує очікування. Чи можна вважати, що актуарій припустився помилки при розрахунках, чи це просто наслідок неблагополучного збігу обставин?

20) Розглянемо ситуацію, описану в попередній задачі, і припустимо, що на наступний рік компанія уклала 2600 договорів. По закінченні року виявилося, що ці договори привели до 32 страхових випадків, що знов перевищує очікувану кількість страхових випадків, щоправда не на 50%, а на 23%. Проаналізуйте точність початкових припущень щодо частоти настання страхових випадків.

Розділ 6.

Короткострокові моделі майнового страхування

6.1. Модель індивідуального ризику

Модель індивідуального ризику – це найпростіша короткострокова модель функціонування страхової компанії для розрахунку ймовірності банкрутства. Вона базується на таких припущеннях:

1) аналізується фіксований відносно короткий проміжок часу(зазвичай це один рік);

2) кількість договорів страхування N фіксоване і невипадкове;

3) плата за страхування повністю вноситься на початку періоду і ніяких інших внесків протягом цього періоду немає;

4) спостерігаємо кожен окремий договір страхування і знаємо статистичні властивості пов'язаного з ним індивідуального позову X (оскільки не всі договори призводять до позову, деякі з випадкових величин $X_1, \ldots, X_N$, де X_i – позов від i – го договору, дорівнюють нулю).

У цій моделі банкрутство визначається сумарним позовом $S = X_1 + \ldots + X_N$ до страхової компанії. Якщо цей сумарний позов більший за резерв компанії, тоді компанія не зможе виконати всі свої зобов'язання і збанкротує. Отже, ймовірність банкрутства компанії становить

$$R = \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_N > u) \tag{6.1}$$

Тобто ймовірність банкрутства – це додаткова функція розподілу величини сумарного позову до компанії за розглянений проміжок часу.

Розподіл сумарного позову являє собою суму незалежних випадкових величин і може бути обчислений класичними методами теорії ймовірностей, зокрема, за допомогою згорток.
Нагадаємо: якщо η_1 і η_2 – дві незалежні додатні випадкові величини з функціями розподілу $F_1(x)$ і $F_2(x)$ відповідно, тоді функція розподілу їх суми $\eta_1 + \eta_2$ може бути обчислена за формулою

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y)dF_2(y) \tag{6.2}$$

Застосовуючи формулу (6.2) потрібну кількість разів, можна буде обчислити функцію розподілу суми відповідної кількості доданків.

Якщо випадкові величини η_1 і η_2 – неперервні, тоді зазвичай працювати треба зі щільностями $p_1(x)$ і $p_2(x)$. Щільність суми може бути обчислена за формулою

$$p(x) = \int_0^x p_1(x-y)p_2(y)dy.$$

Аналогічна короткострокова модель розглядалася в третьому розділі для функціонування компанії, що займається страхуванням життя. Майновому страхуванню притаманні неперервні розподіли для величин реально заявлених позовів. Як і в розгляненій у третьому розділі короткостроковій моделі, на випадок майнового страхування матимуть місце методи наближеного розрахунку ймовірності банкрутства і принципи призначення страхових премій.

6.2. Модель колективного ризику

Модель колективного ризику – це модель функціонування страхової компанії, призначена для розрахунку ймовірності банкрутства. Вона базується на таких припущеннях:

1) аналізується фіксований, короткий проміжок часу;

2) плата за страховку повністю вноситься на початку аналізованого періоду і ніяких нових внесень протягом цього періоду немає;

3) заявлені позови $Y_1, Y_2, \ldots$ не пов'язуються з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії. Випадкові величини Y_i – незалежні й однаково розподілені без атома в нулі;

4) як головна сумарна характеристика портфеля розглядається не число укладених договорів *N*, а загальна кількість позовів ν за період, який розглядається. Випадкова величина ν і величини $Y_1, Y_2, \ldots$ – незалежні.

Як і в моделі індивідуального ризику, в моделі колективного ризику банкрутство визначається сумарним позовом $S = Y_1 + \ldots + Y_\nu$ до страхової компанії. Якщо цей сумарний позов більший, ніж резерви компанії *u*, тоді компанія не може виконувати свої обов'язки і банкротує. Тому ймовірність банкрутства така:

$$R = \mathbf{P}(Y_1 + \ldots Y_\nu > u) \tag{6.3}$$

Тобто ймовірність банкрутства – це додаткова функція розподілу величини сумарного позову до компанії за розглянений проміжок часу.

Використовуючи формулу повної ймовірності, запишемо (6.3) у вигляді:

$$R = \mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u | \, \nu = n) \cdot \mathbf{P}(\nu = n)$$

Позначимо $\pi_n = \mathbf{P}(\nu = n)$ – розподіл кількості позовів. Оскільки випадкові величини $\nu,\ Y_1,\ Y_2, \ldots$– незалежні, а

$$\mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u | \, \nu = 0) = \mathbf{P}(0 > u) = 0$$

матимемо

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_n > u) \cdot \pi_n \tag{6.4}$$

Імовірність $\mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u)$ є додатковою функцією розподілу незалежних і однаково розподілених випадкових величин. Її можна визначити за допомогою згорток. Якщо величини Y_i – неперервні, тоді

$$\mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_n > u) = \int_u^{\infty} p_{Y_1 + \ldots + Y_n}(x) dx,$$

де $p_{Y_1 + \ldots + Y_n}$ – щільність суми $Y_1 + \ldots + Y_n$. Отже, ймовірність банкрутства можна подати у вигляді

$$R = \int_u^{\infty} p_S(x) dx,$$

де $p_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n p_{Y_1+\ldots+Y_n}(x)$ - щільність сумарного позову. Якщо величини Y_i – дискретні, тоді

$$\mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_n > u) = \sum_{k=u+1}^{\infty} p_{Y_1+\ldots+Y_n}(k),$$

де

$$p_{Y_1+\ldots+Y_n}(k) = \mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_n = k)$$

розподіл суми $Y_1 + \ldots + Y_n$. У цьому випадку ймовірність банкрутства може бути подана у вигляді

$$R = \sum_{k=u+1}^{\infty} p_S(k)$$

Де $p_S(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n p_{Y_1+\ldots+Y_n}(k)$ - розподіл сумарного позову.

Обчислення з сумами незалежних випадкових величин спрощуються при використанні твірних функцій для дискретних величин, або перетворень Лапласа для довільних додатних величин.

Позначимо через

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \pi_n = \mathrm{E} z^{\nu}$$

твірну функцію кількості позовів ν, а через

$$\varphi(s) = \varphi_{Y_i}(s) \equiv \mathbf{E} e^{-sY_i} = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_{Y_i}(x)$$

перетворення Лапласа величини заявленого позову (оскільки всі заявлені позови однаково розподілені, $\varphi(s)$не залежить від номера *i* позову).

Тоді перетворення Лапласа сумарного позову $S = Y_1 + \ldots + Y_\nu$, яке позначимо через $\Phi(s)$, буде дорівнювати

$$\Phi(s) = \mathbf{E} e^{-s(Y_1+\ldots+Y_\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{-s(Y_1+\ldots+Y_\nu)} \Big| \nu = n) \mathbf{P}(\nu = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E} e^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} \pi_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(s))^n \pi_n = \pi(\varphi(s)). \tag{6.5}$$

Якщо індивідуальні позови мають дискретний розподіл, тоді сумарний позов також має дискретний розподіл. У такому випадку прийнято працювати з твірними функціями $g(z) = \mathbf{E} z^{Y_i}$ і $G(z) = \mathbf{E} z^S$, а не з перетворенням Лапласа. Аналогічно одержується наступне співвідношення

$$G(z) = \pi(g(z)) \tag{6.6}$$

Його можна отримати із (6.5) заміною змінної $z = e^{-s}$.

З формули (6.5) за допомогою диференціювання по s в точці $s = 0$ можна отримати формули для моментів сумарного позову $\mathbf{E}S$ і $\mathbf{Var}S$, які необхідні при наближеному розрахунку ймовірності банкрутства:

1) Оскільки $\Phi'(s) = \pi'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$, при $s = 0$ отримаємо: $\Phi'(0) = \pi'(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0)$. Але, $\varphi(0) = 1,\ \pi'(1) = \mathbf{E}\nu,\ \varphi'(0) = -\mathbf{E}Y$, $\Phi'(0) = -\mathbf{E}S$. Отже,

$$\mathbf{E}S = \mathbf{E}Y \cdot \mathbf{E}\nu \tag{6.7}$$

2) Оскільки $\Phi''(s) = \pi''(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^2 + \pi'(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s)$ при $s = 0$ отримаємо:

   $\Phi''(0) = \pi''(\varphi(0)) \cdot (\varphi'(0))^2 + \pi'(\varphi(0)) \cdot \varphi''(0).$

Зауважимо, що

$$\varphi(0) = 1,\ \pi'(1) = \mathbf{E}\nu,$$

$$\pi''(1) = \mathbf{E}\nu(\nu - 1) = \mathbf{E}\nu^2 - \mathbf{E}\nu = \mathbf{E}\nu^2 - (\mathbf{E}\nu)^2 + (\mathbf{E}\nu)^2 - \mathbf{E}\nu =$$

$$= \mathbf{Var}\nu - \mathbf{E}\nu + (\mathbf{E}\nu)^2,$$

$$\varphi''(0) = \mathbf{E}Y^2 = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2 + (\mathbf{E}Y)^2 = \mathbf{Var}Y + (\mathbf{E}Y)^2,$$

$$\Phi''(0) = \mathbf{E}S^2 = \mathbf{Var}S + (\mathbf{E}S)^2.$$

Отже,

$$\mathbf{Var}S + (\mathbf{E}S)^2 = (\mathbf{Var}\nu - \mathbf{E}\nu + (\mathbf{E}\nu)^2) \cdot (\mathbf{E}Y)^2 + \mathbf{E}\nu \cdot (\mathbf{Var}Y + (\mathbf{E}Y)^2)$$

Використовуючи (6.7), матимемо

$$\mathbf{Var}S = \mathbf{Var}\nu \cdot (\mathbf{E}Y)^2 + \mathbf{Var}Y \cdot \mathbf{E}\nu \tag{6.8}$$

Реальні статистичні дані та загальні міркування про характер заявлених позовів показують, що ν добре описується пуассоновим або від'ємно-біноміальним розподілами. Для розподілу величини позовів Y є набагато більше можливостей, проте клас можливих розподілів не дуже широкий.

6.2.1. Складений пуассоновий розподіл

Припустимо, що кількість позовів ν має розподіл Пуассона із середнім λ:

$$\pi_i = \mathbf{P}(\nu = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}.$$

У цій ситуації розподіл величини сумарного позову $S = Y_1 + \ldots + Y_\nu$ називається **складеним пуассоновим розподілом.** Перетворення Лапласа величини S може бути отримане з (6.5) при $\pi(z) = \exp(\lambda z - \lambda)$:

$$\Phi(s) = \mathbf{E}e^{-sS} = e^{\lambda\varphi(s)-\lambda}, \tag{6.9}$$

де $\varphi(s) = \mathbf{E}e^{-sY}$ — перетворення Лапласа величини реально заявленого позову.

Це дозволяє дати означення **складеного пуассонового розподілу**: невід'ємна випадкова величина S має складений пуассоновий розподіл, якщо її перетворення Лапласа Ф(s) може бути представлене у вигляді (6.9), де $\varphi(s)$ – перетворення Лапласа деякої невід'ємної випадкової величини Y.

Параметр λ вихідного пуассонового розподілу π_i і розподіл *F(x)* індивідуального позову Y називаються **параметрами складеного пуассонового розподілу**.

Якщо індивідуальні позови Y_i мають дискретний розподіл з твірною функцією $g(z)$, то складений пуассоновий розподіл також є дискретним і його твірна функція $G(z)$ задається формулою:

$$G(z) = \mathbf{E}z^S = e^{\lambda g(z)-\lambda} \tag{6.10}$$

Для моментів складеного пуассонового розподілу із загальних формул (6.7), (6.8) матимемо:

$$\mathbf{E}S = \lambda \mathbf{E}Y \tag{6.11}$$

$$\mathbf{Var}S = \lambda \mathbf{E}Y^2 \tag{6.12}$$

Легко одержати наступний результат для третього центрального моменту

$$\mathbf{E}(S - \mathbf{E}S)^3 = \lambda \cdot \mathbf{E}Y^3, \tag{6.13}$$

який є кількісною мірою асиметрії. Додатна асиметрія означає досить велику ймовірність більших значень позову. Тобто в розглядуваній моделі сумарний позов завжди має додатну асиметрію

Складений пуассоновий розподіл володіє декількома спеціальними властивостями, які допускають природну інтерпретацію в термінах моделі колективного ризику й дозволяють глибше зрозуміти статистичні властивості цієї моделі.

Властивість 1. Припустимо, що випадкові величини $S_1, S_2, \ldots$ – незалежні і мають складений пуассоновий розподіл з параметрами $\lambda_1, F_1(x); \lambda_2, F_2(x); \ldots$ відповідно. Припустимо, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ – збігається (ця умова виконується, якщо кількість доданків скінчена). Тоді сума $S = S_1 + S_2 + \ldots$ також має складений пуассоновий розподіл і його параметри $\lambda, F(x)$ задаються формулами:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \tag{6.14}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x) \tag{6.15}$$

Доведення. Позначимо через

$$\varphi_i(s) = \int_o^{\infty} e^{-sx} dF_i(x)$$

перетворення Лапласа-Стілтьєса функції $F_i(x)$ і підрахуємо перетворення Лапласа величини S:

$$\Phi(s) = \mathbf{E}\exp\left(-s\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\exp(-sS_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\lambda_i \varphi_i(s) - \lambda_i) =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(s) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right) = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s) - \lambda\right)$$

Для перетворення Лапласа-Стілтьєса функції розподілу $F(x)$, що визначається (6.15), маємо:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) = \sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty e^{-sx} d\left(\frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda_i}{\lambda} \int_0^\infty e^{-sx} dF_i(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s).$$

Отже,

$$\Phi(s) = \exp(\lambda\varphi(s) - \lambda).$$

А це означає, що величина S має складений пуассоновий розподіл з параметрами λта $F(x)$.

Доведену властивість можна інтерпретувати в термінах моделі колективного ризику так: припустимо, що маємо декілька незалежних груп договорів страхування; надходження позовів від i-ої групи за аналізований проміжок часу описується пуассоновою величиною із середнім λ_i, а величина заявленого позову має розподіл $F_i(x)$. Тоді, якщо об'єднати всі договори в одну велику групу, то надходження позовів від цього сумарного портфеля буде характеризуватися розподілом Пуассона із середнім $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, а величина заявленого позову буде мати розподіл $F(x)$.

Властивість 2. Припустимо, що випадкова величина S має складений пуассоновий розподіл з параметрами λ та $F(x)$. Припустимо, що розподіл величини заявленого позову представлено у вигляді суміші з вагами p_1, p_2,... (величини p_i – невід'ємні і їх сума дорівнює 1) розподілів $F_i(x)$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^\infty p_i F_i(x).$$

Тоді розподіл величини S співпадає з розподілом суми незалежних випадкових величин S_1, S_2,... , кожна з яких має складений пуассоновий розподіл з параметрами $\lambda_i = \lambda p_i$ і $F_i(x), i = 1, 2$,... .

Доведення. Розглянемо набір незалежних величин S_1, S_2,... , які мають складений пуассоновий розподіл з параметрами $\lambda_1 = \lambda p_1,\ F_1(x);\ \lambda_2 = \lambda p_2,\ F_2(x); \ldots$

Оскільки ряд $\sum \lambda_i = \sum \lambda p_i = \lambda \sum p_i = \lambda$ – збігається, то за властивістю 1, сума $S_1 + S_2 +$... має складений пуассоновий розподіл з параметрами

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) = F(x),$$

тобто збігається, за розподілом, з вихідною величиною S. Відзначимо, що ми не стверджуємо рівність величин S і $S_1 + S_2 +$ ... , а лише рівність їхніх розподілів.

Властивість 2 дозволяє розбивати портфель договорів зі складеним розподілом величин заявлених позовів на декілька незалежних портфелів з більш простими розподілами величин заявлених позовів.

6.2.2. Складений від'ємно-біноміальний розподіл

Припустимо, що число позовів ν має від'ємно-біноміальний розподіл з параметрами p і α:

$$\pi_i = P(\nu = i) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!} q^i p^\alpha,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $q = 1 - p$.

У цій ситуації розподіл величини сумарного позову $S = Y_1 + ... + Y_\nu$ називається **складеним від'ємно-біноміальним розподілом**. Перетворення Лапласа величини S може бути отримане з (6.5):

$$\Phi(s) = \mathbf{E}e^{-sS} = \left(\frac{p}{1 - q\varphi(s)}\right)^\alpha, \tag{6.16}$$

де $\varphi(s) = \mathbf{E}e^{-sY}$ – перетворення Лапласа величини заявленого індивідуального позову. Це дозволяє дати альтернативне визначення складеного від'ємно-біноміального розподілу: невід'ємна випадкова величина S має від'ємно-біноміальний розподіл, якщо її перетворення Лапласа $\Phi(s)$ можна подати у вигляді (6.16), де $\varphi(s)$ – перетворення Лапласа деякої невід'ємної випадкової величини Y.

Параметри p і α вихідного від'ємно-біноміального розподілу π_i, і розподілу $F(x)$ індивідуального позову Y називаються параметрами складеного від'ємно-біноміального розподілу.

Якщо індивідуальні позови Y_i мають дискретний розподіл з твірною функцією $g(z)$, тоді складений від'ємно-біноміальний розподіл також є дискретним і його твірна функція задається формулою:

$$G(z) = \mathbf{E}z^S = \left(\frac{p}{1 - qg(z)}\right)^\alpha \tag{6.17}$$

Для моментів складеного від'ємно-біноміального розподілу з формул (6.7), (6.8), матимемо

$$\mathbf{E}S = \frac{\alpha q}{p} \cdot \mathbf{E}Y \tag{6.18}$$

$$\mathbf{Var}S = \frac{\alpha q}{p^2} \cdot (\mathbf{E}Y)^2 + \frac{\alpha q}{p} \cdot \mathbf{Var}Y = \frac{\alpha q}{p}\mathbf{E}Y^2 + \frac{\alpha q}{p^2}(\mathbf{E}Y)^2 \tag{6.19}$$

Окрім того, відзначимо результат для третього центрального моменту:

$$\mathbf{E}(S - \mathbf{E}S)^3 = \frac{\alpha q}{p} \cdot \mathbf{E}Y^3 + \frac{3\alpha q^2}{p^2} \cdot \mathbf{E}Y \cdot \mathbf{E}Y^2 + \frac{2\alpha q^3}{p^3} \cdot (\mathbf{E}Y)^3 \tag{6.20}$$

Важливо відзначити, що (як і для складеного пуассонового розподілу) у цій моделі сумарний позов завжди має додатню асиметрію (навіть якщо індивідуальні позови мають нульову або від'ємну асиметрію).

Кожен складений від'ємно-біноміальний розподіл можна розглядати як складений пуассоновий розподіл у певний спосіб підібраними параметрами.

Нехай величина S має складений від'ємно-біноміальний розподіл з параметрами p, α і $F(x)$. Відомо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -\ln(1-q)$$

Іншими словами, сума чисел числа

$$p_n = -\frac{q^n}{n\ln(1-q)}, \ \ n = 1, 2, \dots$$

дорівнює 1.

Оскільки вони невід'ємні, їх можна розглядати як розподіл імовірностей деякої дискретної величини μ. Його твірною функцією є

$$\pi_\mu(z) = \frac{\ln(1-qz)}{\ln(1-q).}$$

Позначимо $F_n(x)$ – n-кратну згортку розподілу $F(x)$ і розглянемо зважену суму функцій розподілу $F_n(x)$ з вагою p_n :

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x).$$

$H(x)$ також є функцією розподілу. У термінах введеної вище випадкової величини μ функцію $H(x)$ можна представити як функцію розподілу величини $Z = Y_1 + \ldots + Y_\mu$. Перетворення Лапласа-Стілтьєса функції $H(x)$ дорівнює:

$$\varphi_H(s) = Ee^{-sZ} = \pi_\mu(\varphi(s)) = \frac{\ln(1 - q\varphi(s))}{\ln(1-q)}$$

Розглянемо тепер складений пуассоновий розподіл з параметрами $\lambda = -\alpha \ln(1-q)$ і $H(x)$.

Його перетворенням Лапласа є

$$\Phi(s) = \exp(\lambda H(s) - \lambda) = \exp\left(-\alpha \ln(1-q) \cdot \frac{\ln(1 - q\varphi(s))}{\ln(1-q)} + \alpha \ln(1-q)\right) =$$

$$= \exp\left(\alpha \ln \frac{1-q}{1-q\varphi(s)}\right) = \left(\frac{1-q}{1-q\varphi(s)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{p}{1-q\varphi(s)}\right)^{\alpha}$$

Як видно, побудований складений пуассоновий розподіл збігається з вихідним складеним від'ємно-біноміальним розподілом. Тому, складений від'ємно-біноміальний розподіл має ті ж спеціальні властивості, що і складений пуассоновий розподіл. Так, оскільки зв'язок параметрів обох видів розподілів дуже складний, ці властивості не виглядають так само природно, як і відповідні властивості складеного пуассонового розподілу.

6.3. Наближені методи розрахунку ймовірності банкрутства

Зазвичай у моделі колективного ризику очікувана кількість позовів від усього портфеля договорів ν досить велика. Для складеного пуассонового розподілу це означає, що параметр λ досить великий. Для складеного від'ємно-біноміального розподілу це має місце, якщо параметр α великий або параметр p дуже малий. У цьому випадку точний розрахунок імовірності банкрутства може призвести до проблем, пов'язаних з малою ймовірністю.

Однак обставина, що ускладнює точний розрахунок імовірності банкрутства, відкриває можливість швидкого та простого наближеного розрахунку ймовірності банкрутства.

6.3.1. Гаусове наближення

Припустимо, що в моделі колективного ризику розподіл $F(x)$ величини заявленого позову фіксоване й має скінчене середнє m і дисперсію σ^2, а твірна функція розподілу числа позовів може бути подана у вигляді

$$\pi(z) = (q(z))^{\lambda}, \tag{6.21}$$

де $q(z)$ – твірна функція деякого фіксованого розподілу q_n із середнім a і дисперсією b^2, а параметр $\lambda \to \infty$. Уведемо випадкову величину μ, що має розподіл q_n.

Оскільки

$$\pi'(z) = \lambda \cdot (q(z))^{\lambda-1} \cdot q'(z),$$

$$\pi''(z) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (q(z))^{\lambda-2} \cdot (q'(z))^2 + \lambda \cdot (q(z))^{\lambda-1} \cdot q''(z),$$

для середнього й дисперсії кількості позовів матимемо

$$\mathbf{E}\nu = \pi'(1) = \lambda \cdot \mathbf{E}\mu = \lambda a,$$

$$\mathrm{Var}\nu = \pi''(1) + \pi'(1) - (\pi'(1))^2 =$$

$$= \lambda(\lambda - 1) \cdot (\mathbf{E}\mu)^2 + \lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\mu - 1) + \lambda \cdot \mathbf{E}\mu - \lambda^2 \cdot (\mathbf{E}\mu)^2 =$$

$$\lambda \cdot \mathbf{Var}\mu = \lambda b^2.$$

Перехід при $\lambda \to \infty$ означає, що середня кількість позовів $\mathbf{E}v$ велика, а коефіцієнт розсіювання $\mathbf{Var}v/\mathbf{E}v - 1$ – фіксований.

Крім того, для середнього й дисперсії сумарного позову одержимо

$$\mathbf{E}S = \lambda a \cdot m$$
$$\mathbf{Var}S = \lambda b^2 \cdot m^2 + \sigma^2 \cdot \lambda a = \lambda \cdot \left(b^2 m^2 + a\sigma^2\right)$$

Головний результат полягає в тому, що в описаній вище ситуації розподіл центрованого та нормованого сумарного позову

$$S^* = \frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}$$

прямує до стандартного гаусового розподілу

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}} < x\right) = \Phi\left(x\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \tag{6.22}$$

Доведення цього факту базується на теоремі неперервності для характеристичних функцій.

Нагадаємо, що **характеристичною функцією** довільної випадкової величини ξ з функцією розподілу $F(x)$ називається комплексна функція $\psi(t)$ дійсного аргументу t, яка визначається за формулою:

$$\psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} dF(x),$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Для стандартного гаусового розподілу характеристичною функцією є функція $\exp(-t^2/2)$. Якщо величина ξ – невід'ємна, тоді працюють із перетворенням Лапласа $\varphi(s) = \mathbf{E}e^{-s\xi}$, для таких величин характеристична функція дорівнює $\varphi(-it)$.

Властивості характеристичних функцій подібні до властивостей перетворення Лапласа і твірних функцій:

1)

$$\psi'(0) = i\mathbf{E}\xi, \ \psi''(0) = -\mathbf{E}\xi^2.$$

2) якщо випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні, тоді характеристична функція їх суми дорівнює добутку характеристичних функцій доданків:

$$\psi_{\xi_1 + \ldots + \xi_n}(t) = \psi_{\xi_1}(t) \cdot \ldots \cdot \psi_{\xi_n}(t).$$

3) якщо послідовність характеристичних функцій $\psi_n(t)$ деяких розподілів $F_n(x)$ збігається до характеристичної функції $\psi\left(t\right)$ розподілу F(x), тоді

$$\lim_{n \to \infty} F_n\left(x\right) = F\left(x\right)$$

в усіх точках неперевності функції $F(x)$.

Властивість 3 називається **теоремою неперервності**. Враховуючи цю теорему і той факт, що нормальна функція розподілу $\Phi(x)$ непреревна, досить довести, що характеристична функція центрованого і нормованого позову при $\lambda \to \infty$ збігається до $\exp\left(-t^2/2\right)$. Насамперед відзначимо, що

$$\begin{gathered}\psi_{S^*}(t) \equiv \mathbf{E}\exp\left(it\frac{S-\mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right) = \\ = \exp\left(-it\frac{\mathbf{E}S}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}\right)\cdot\mathbf{E}\exp\left(\frac{it}{\sqrt{\mathbf{Var}S}}S\right) = \\ = \exp\left(-it\frac{\sqrt{\lambda a m}}{\sqrt{b^2m^2+a\sigma^2}}\right)\cdot\Phi\left(-\frac{it}{\sqrt{\lambda(b^2m^2+a\sigma^2)}}\right).\end{gathered}$$

Позначаючи $u = -it\sqrt{\lambda\left(b^2m^2+a\sigma^2\right)}$ та використовуючи (6.5), одержимо

$$\begin{aligned}&\psi_{S^*}(t) = \exp\left(\lambda a m u\right)\cdot\pi\left(\varphi\left(u\right)\right) = \\ &= \exp\left(\lambda a m u\right)\cdot\left(q\left(\varphi\left(u\right)\right)\right)^{\lambda} = \\ &= \exp\left(\lambda a m u + \lambda\ln q\left(\varphi\left(u\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{6.23}$$

При $\lambda \to \infty$ змінна $u \to 0$. Тому функцію

$$h\left(u\right) \equiv q\left(\varphi\left(u\right)\right) \tag{6.24}$$

можна розкласти в ряд Тейлора:

$$h\left(u\right) = h\left(0\right) + uh'\left(0\right) + \frac{u^2}{2}h''\left(0\right) + o\left(u^2\right)$$

Оскільки функція $h\left(u\right)$ має вигляд (6.24), її можна розглядати як перетворення Лапласа сумарного позову $Y_1 + ... + Y_\mu$ у моделі колективного ризику з кількістю позовів μ. Тому $h(0) = 1$ і

$$h'\left(0\right) = -\mathbf{E}Y\cdot\mathbf{E}\mu = -am$$

$$h''(0) = \mathbf{Var}\mu\cdot\left(\mathbf{E}Y\right)^2 + \mathbf{Var}Y\cdot\mathbf{E}\mu + a^2m^2 = m^2b^2 + \sigma^2a + a^2m^2.$$

Отже, $h(u)$ має вигляд

$$h(u) = 1 - z,$$

де $z = amu - \left(m^2a^2 + m^2b^2 + \alpha\sigma^2\right)u^2/2 + o\left(u^2\right)$.

Використовуючи розклад у ряд Тейлора логарифмічної функції: $\ln\left(1-z\right) = -z - \frac{z^2}{2} + o\left(z^2\right)$, можна подати (6.23) у вигляді:

$$\psi_{S^*}(t) = \exp\left(\lambda\left(amu - z - \frac{z^2}{2} + o\left(z^2\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\lambda\left(amu - amu + \left(m^2a^2 + m^2b^2 + a\sigma^2\frac{u^2}{2} - \frac{a^2m^2u^2}{2} + o\left(u^2\right)\right)\right)\right) =$$

$$= exp\left(\lambda\left(\frac{\left(m^2b^2 + a\sigma^2\right)}{2} + o\left(u^2\right)\right)\right).$$

Згадуючи, як визначали змінну u, одержимо

$$\psi_{S^*}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right).$$

А, отже,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\psi_{S^*}(t) = e^{-t^2/2}.$$

За допомогою доведеного результату можна описати випадки, коли можливе застосування гауссового наближення для найбільш важливих спеціальних моделей колективного ризику – складеного пуассонового розподілу та складеного від'ємно-біноміального розподілу.

Оскільки твірна функція розподілу Пуассона може бути подана у вигляді (6.21)

$$\pi(z) = (q(z))^{\lambda},$$

де $q(z) = e^{z-1}$ – твірна функція розподілу Пуассона з фіксованим параметром 1, то при $\lambda \to \infty$ можна застосувати гаусове наближення (6.22) для складеного пуассонового розподілу.

Оскільки твірна функція від'ємно-біноміального розподілу може бути подана у вигляді (6.21)

$$\pi(z) = (q(z))^{\alpha},$$

де $q(z) = (1-q)/(1-qz)$ – твірна функція геометричного розподілу з фіксованим параметром q, то при $\alpha \to \infty$, можна застосовувати гаусове наближення (6.22) для складеного від'ємно-біноміального розподілу.

Звернімо увагу на те, що в розгляненому наближенні імовірність банкрутства компанії залежить тільки від середнього значення та дисперсії індивідуальних позовів. Цей результат про нечутливість ймовірності банкрутства до вигляду розподілу величини індивідуального позову дуже важливий з прикладного погляду, тому що часто доступна лише найпростіша інформація про цю випадкову величину у вигляді оцінки її середнього та дисперсії.

Підкреслимо: якщо у випадку пуассонового розподілу умова $\lambda \to \infty$ рівносильна тому, що $\mathbf{E}\nu \to \infty$, а у випадку від'ємно-біноміального розподілу умова, при якій застосовується гаусова апроксимація, більш жорстка. Тут $E\nu \to \infty$ не тільки при $\alpha \to \infty$, але і при $p \to 0$.

У випадку $p \to 0$ гаусове наближення не застосовується , а виникає інший клас граничних розподілів – гамма-розподіл.

6.3.2. Гамма-наближення

Апроксимація розподілу величини сумарного позову за допомогою гамма-розподілу менш зручна для практичного застосування, ніж гаусове наближення. Однак вона забезпечує більшу точність і дозволяє глибше зрозуміти властивості розподілу величини сумарного позову.

Гамма-розподіл виникає як граничний розподіл для нормованої величини сумарного позову

$$\frac{S}{\mathbf{E}S} = \frac{pS}{\alpha q \mathbf{E}Y}$$

у складеній від'ємно-біноміальній моделі, якщо параметр *p* від'ємно- біноміального розподілу прямує до нуля.

Враховуючи подальші застосування, змінимо нормування, а саме: розглянемо наступну випадкову величину

$$S^* = 2\alpha\frac{S}{\mathbf{E}S} = \frac{2pS}{q\mathbf{E}Y}. \tag{6.25}$$

При $p \to 0$ розподіл величини S^* прямує до гамма-розподілу з параметрами 0.5 та α.

Доведення цього факту базується на теоремі неперервності, причому розглянені випадкові величини невід'ємні, можна працювати з перетворенням Лапласа, а не з характеристичними функціями. Використовуючи (6.5), матимемо

$$\mathbf{E}e^{-sS^*} = \mathbf{E}e^{-\frac{2spS}{qm}} = \left(\frac{p}{1 - q\varphi\left(\frac{2sp}{qm}\right)}\right)^{\alpha},$$

де $m = \mathbf{E}Y$ середнє значення величини заявленого позову.

Оскільки параметр $p \to 0$, розкладемо перетворення Лапласа $\varphi(u)$ величини позову в ряд Тейлора:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + o(u) =$$

$$= 1 - mu + o(u).$$

Звідси

$$\varphi\left(\frac{2sp}{qm}\right) = 1 - \frac{2sp}{q} + o(p),$$

а, отже,

$$\frac{p}{1 - q\varphi\left(\frac{2sp}{qm}\right)} = \frac{p}{1 - (1-p)\left(1 - \frac{2sp}{1-p} + o(p)\right)} =$$

$$= \frac{p}{1 - 1 + p + 2sp + o(p)} = \frac{1}{1 + 2s + o(1)}.$$

Тому

$$\lim_{p\to 0} \mathbf{E}e^{-sS^*} = (1+2s)^{-\alpha}.$$

Справа стоїть перетворення Лапласа гамма-розподілу з параметрами 0,5 і α, відповідно з середнім 2α та дисперсією 4α. Застосовуючи теорему неперервності для пертворення Лапласа, отримаємо

$$\lim_{p\to 0} \mathbf{P}\left(\frac{2\alpha S}{\mathbf{E}S} < x\right) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t/2} dt$$

Якщо число 2α – ціле, то такий гамма-розподіл відомий у статистиці під назвою χ^2-розподіл з *т* ступенями вільності.

Позначимо через $\chi^2(m)$ будь-яку випадкову величину, що має гамма-розподіл з середнім *m* і дисперсією *2m*. Якщо число *m* – дробове, то розподіл $\chi^2(m)$ можна приблизно обчислити за допомогою лінійної інтерполяції. Доведену теорему можна записати у вигляді

$$\frac{2\alpha S}{\mathbf{E}S} \approx \chi^2(2\alpha). \qquad (6.26)$$

6.4. Перестрахування

Фізичні та юридичні особи укладають договори страхування зі страховими компаніями для того, що позбутись фінансових збитків, пов'язаних з невизначеністю настання тих чи інших випадкових подій. До укладання договору страхування страхувальник мав деякий ризик, що міг призвести до випадкових збитків X. Після укладання договору страхування страхувальник позбувся цього ризику. Тобто він пішов на невеликі детерміновані витрати (виплата премії) для того, щоб позбутися випадкових збитків, які хоч і малоймовірні, але можуть бути катастрофічно великими для нього. Але сам ризик не зник. Його взяла на себе страхова компанія. Інша справа, що маючи великий портфель договорів, страхова компанія забезпечує собі значно меншу ймовірність банкрутства. Тим не менше, можливі дуже великі виплати, які призведуть до банкрутства компанії. З цього погляду, компанія потрапляє в ту саму ситуацію, в якій на початку опинився сам страхувальник (до моменту укладання договору). Для розв'язання цієї проблеми страхові компанії також вдаються до страхування свого ризику в іншій страховій компанії. Такий вид страхування називається **перестрахуванням**.

При перестрахуванні можуть перестраховуватися, як надмірно великі індивідуальні ризики, так і ризик надмірно великих сумарних збитків за певний період, наприклад за рік.

Якщо страховик має великий портфель добре збалансованих ризиків, достатні активи, відмінно працюють служби андеррайтингу та врегулювання збитків, то в перестрахуванні немає потреби. На ринках, що розвиваються, для молодих компаній ці умови не виконуються. Формування зрілого ринку страхових послуг, збільшення фінансової спроможності компанії потребує великих затрат часу і коштів. Захист за рахунок перестрахування може бути організований досить швидко, потребує відносно невеликих ресурсів, і тому співробітництво з перестраховиками є важливим інструментом підвищення фінансової стійкості страхових компаній.

Зауважимо, що прямий страховик може бути зацікавлений у перестрахуванні і за інших причин: необхідність фінансування нового бізнесу, розробка нових продуктів тощо. У зв'язку з цим розроблено багато стандартних перестрахових схем.

Один із розповсюджених типів перестрахування полягає ось у чому. Передаюча компанія самостійно оплачує всі збитки до певної межі d грн. Якщо це правило стосується кожного індивідуального договору, то такий вид перестрахування називається перестрахуванням надмірних збитків. Якщо ж це правило застосовується до загальних виплат по портфелю за деякий період, то такий вид перестрахування називається перестрахуванням, що зупиняє збитки.

6.5. Модельні задачі до розділу 6

Модельна задача 6.1. *Розподіл загальних втрат має наступні параметри:*

1) розподіл кількості страхових випадків:

$$P(v = 0) = 0.5, P(v = 1) = 0.3, P(v = 2) = 0.2;$$

2) розподіл розміру індивідуальних втрат:

$$P(Y = 1) = 0.8, P(Y = 4) = 0.2.$$

Знайти ймовірність того, що сумарні втрати перебільшуть своє середнє більше, ніж у два раза.

(A) 0.132; (B) 0.138; (C) 0.144; (D) 0.150; (E) 0.156

Розв'язання. Нехай v – число страхових випадків, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_v$ – розміри втрат для відповідних страхових випадків. Тоді довільна функція числа страхових випадків, $\pi(z) \equiv \mathbf{E}z^v$, і довільна функція величини збитку при настанні страхового випадку, $g(z) \equiv \mathbf{E}z^{Y_i}$, дається формулами:

$$\pi(z) = 0.5z^0 + 0.3z^1 + 0.2z^2 = 0.1 \times (5 + 3z + 2z^2),$$

$$g(z) = 0.8z^1 + 0.2z^4 = 0.2z \times (4 + z^3).$$

Величина сумарних втрат $S = Y_1 + \ldots + Y_v$ є цілочисельною випадковою величиною. Тому будемо характеризувати її розподіл (як і розподіл розміру індивідуальних втрат) довільною функцією $G(z) \equiv \mathbf{E}z^s$. За формулою повного математичного сподівання маємо:

$$G(z) = \sum n = 0^{+\infty} \mathbf{P}(v = n)\mathbf{E}(z^{Y_1+\ldots+Y_v} | v = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(v = n)\mathbf{E}(z^{Y_1+\ldots+Y_n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(v = n)(\mathbf{E}z^{Y_i})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(v = n)(g(z))^n = \pi(g(z)) =$$

$$= 0.1 \times (5 + 3g(z) + 2g^2(z)) =$$

$$= 0.5 + 0.24z + 0.128z^2 + 0.06z^4 + 0.064z^5 + 0.08z^8$$

Звідси диференціюємо по z у точці $z = 1$ можна отримати середнє значення сумарних втрат $\mathbf{E}S$:

$$\mathbf{E}S = 1.12.$$

Крім того, коефіцієнти при степенях z дають розподіл ймовірностей випадкової величини S; він наведений у наступній таблиці.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(S=n)	0.5	0.24	0.128	0	0.06	0.064	0	0	0.08

Тому шукана ймовірність $\mathbf{E}(S > \mathbf{E}S)$ рівна:

$$\mathbf{P}(S > 2.24) = \mathbf{P}(S \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(S = 0) - \mathbf{P}(S = 1) - \mathbf{P}(S = 2) =$$

$$= 1 - 0.5 - 0.24 - 0.128 = 0.132$$

Отже, правильним є варіант (A).

Модельна задача 6.2. *Страхова компанія забезпечує страховий захист концертного залу від втрат внаслідок відмови системи електропостачання. Відомо, що*

1) *число відмов електропостачання протягом року має розподіл Пуассона з середнім 1;*

2) *розподіл величини збитку внаслідок однієї відмови системи електропостачання задається таблицею*

x	*Ймовірність значення x*
10	*0.3*
20	*0.3*
50	*0.4*

3) *число відмов системи електоропостачання і величини втрат незалежні;*

4) *страхувальник сплачує втрати сам до тих пір, поки вони не перебільшать 30.*

Порахувати очікувані виплати страхувальника за одну годину.
(A) 5; (B) 8; (C) 10; (D) 12; (E) 14.

Розв'язання. Нехай v – число відмов системи електропостачання за один рік. Оскільки випадкова величина v має розподіл Пуассона, правильними є рівності:

$$\mathbf{P}(v = n) = \frac{1}{n!}e^{-1}, \mathbf{E}v = 1$$

Нехай, далі, $Y_1, \ldots, Y_v$ – величини втрат вніслідок відмов. Приймаючи суму 10 в якості одиниці виміру грошових сум, ми отримаєм для розподілу випадкових величин Y_i наступну таблицю, так, що $\mathbf{E}Y_i = 2.9$, $\mathbf{E}z^{Y_i} = 0.3z + 0.3z^2 + 0.4z^5$.

x	$P(Y_i = x)$
1	0.3
2	0.3
3	0.4

Накінець, нехай $S = Y_1 + \ldots + Y_v$— сумарні втрати за один рік. Довільна функція випадкової величини S є

$$\mathbf{E}z^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(z^s \,|v = n)\mathbf{P}(v = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{E}z^{Y_i})^n \mathbf{P}(v = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(0.3z + 0.3z^2 + 0.4z^5)^n}{n!} e^{-1} = e^{0.3z+0.3z^2+0.4z^5-1}.$$

Диференціюючи по z у точці $z = 1$, отримаємо:

$$\mathbf{E}S = \mathbf{E}v \times \mathbf{E}Y = 1 \times 2.9 = 2.9$$

Крім того, розкладаючи довільну функцію $\mathbf{E}z^s$ у ряд за степенями z до z^2, ми отримаємо:

$$\mathbf{E}z^s = e^{-1} \times (1 + (0.3z + 0.3z^2 + 0.4z^5) + \frac{(0.3z + 0.3z^2 + 0.4z^5)^2}{2} + \ldots) =$$

$$= e^{-1} \times (1 + 0.3z + 0.3z^2 + 0.045z^2 + \ldots) = e^{-1} \times (1 + 0.3z + 0.345z^2 + \ldots).$$

що дає розподіл сумарних втрат за один рік у точках 0, 1,2:

$$\mathbf{P}(S = 0) = e^{-1}, \mathbf{P}(S = 1) = 0.3e^{-1}, \mathbf{P}(S = 2) = 0.345e^{-1}.$$

За умовами договору, страхова компанія погашає тільки перебільшені витрати власним утриманням срахувальника, тобто виплати страхової компанії подаються формулою:

$$S' = \begin{cases} 0, S \leq 3, \\ S - 3, S > 3. \end{cases}$$

Отже,

$$\mathbf{E}S' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(S' = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(S-3 = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(S = n+3) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-3)\mathbf{E}(S = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n-3)\mathbf{P}(S=n) - \sum_{n=0}^{2}(n-3)\mathbf{P}(S=n) = \mathbf{E}S - 3\mathbf{P}(S=0) + 2\mathbf{P}(S=1) +$$

$$+1\mathbf{P}(S=2) = 2.9 - 3 + (3 + 0.6 + 0.345)e^{-1} \approx 1.3513$$

Модельна задача 6.3. *На протязі минулого року за умовами колективного договору медичного страхування працівників було подано 800 страхових випадків. Розподіл розміру повернених по одному страховому випадків задається таблицею:*

Витрати	*Ймовірність*
50	*0.3*
100	*0.2*
200	*0.2*
300	*0.1*
400	*0.1*
500	*0.1*

Урегулювання кожного розміру повернення за один договір коштує страховій компанії 50 у.о. Крум того, незалежно від числа страхових випадків страхової компанія має загальні адміністративні витрати у сумі 50000.

Актуарій страхової компанії припускає, що у наступному році:

1) *через інфляцію медичні витрати по одному страховому випадку зростять на 20% ;*

2) *заходи на покращення умов праці зменшать захворюваність на 5% ;*

3) *через інфляцію всі адміністративні витрати на 15 %.*

Припустимо $d = 60$. Обчислити очікуванні виплати за договір у наступному році.

Розв'язання. Нехай Y – розмір медичних витрат по одному договору страхового випадку у минулому році, $Y' = 1.2Y$ – розмір медичних витрат по одному страховому випадку у наступному році. Розподіл випадкової величини Y' задається наступною таблицею

Витрати	Ймовірність
60	0.3
120	0.2
240	0.2
3690	0.1
480	0.1
600	0.1

Запишемо $q_{(d)} = \mathbf{P}(Y' > d) = 0.7$. Очікуване число страхових випадків у наступному році після введення обчислення буде рівне $n' = 800 \times 0.95 \times 0.7 = 532$.

Величина страхового повернення після введення обчислення, $Y_{(d)}$ буде мати розподіл,який задається наступною таблицею

Витрати	Ймовірність
60	2/7
180	1/7
300	1/7
420	1/7
540	1/7

$$\mathbf{E}Y_{(d)} = \frac{1740}{7} \approx 248.57$$

Тому для середнього значення сумарних виплат за договором у наступному році маєм:

$$\mathbf{E}S_{(d)} = n' \times \mathbf{E}Y_{(d)} = 532 \times \frac{1740}{7} = 132240.$$

Сумарні адміністративні витрати будуть у середньому рівні

$$50000 \times 1.15 + 532 \times 50 \times 1.15 = 88090,$$

так, що очікувані загальні витрати страхувальника рівні 220330. Оскільки $\mathbf{E}Y = 195$, у попередньому році загальні витрати страхувальника були рівні $800(\mathbf{E}Y + 50) + 50000 = 246000$, тобто у наступному році можна очікувати їх зменшення приблизно на 10.4%.

Модельна задача 6.4. *Для медичного договору страхові випадки, пов'язані із звичайними захворюваннями і стоматологічними проблемами, описуються незалежним розподілом Пуассона з характеристиками, наведеними у наступній таблиці*

Характер захворювання	*Розподіл величини медичних витрат*	λ
Загальне	*Рівномірне на (0, 100)*	*2*
стоматологічне	*Рівномірне на (0, 200)*	*3*

За умовами договору, якщо медичні витрати по деякому страховому випадку менші, ніж 100, то їх повністю оплачує застрахована особа. Якщо ж *ці розходи більші, ніж 100, застрахований оплачує перші 100, а страхова компанія — іншу частину.*

Знайти середнє значення одного страхового повернення.

(A) 161; (B) 167; (C) 172; (D) 177; (E) 183.

Розв'язання. Припустимо, що випадкові величини $S_1, S_2, \ldots$— незалежні і мають пуассоновий розподіл з параметрами $\lambda_1, F_1(x); \lambda_2, F_2(x); \ldots$ відповідно. Припустимо, далі, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ збігається; ця умова виконується, якщо це число скінченне. Знайдемо розподіл суми $S = S_1 + S_2 + \ldots$.

Позначимо через

$$\psi_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_i(x)$$

перетворення Лапласа-Стільтєса функції $F_i(x)$ і обчислимо перетворення Лапласа величини S:

$$\Psi(s) \equiv \mathbf{E}\exp(-sS) = \mathbf{E}\exp\left(-s\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\exp(-sS_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\lambda_i \psi_i(s) - \lambda_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \psi_i(s) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right) = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda}\psi_i(s) - \lambda\right).$$

Функція

$$\psi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda}\psi_i(s)$$

може розглядатися як перетворення Лапласа-Стільтєса функції розподілу F(x), яка задається формулою

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{sx} d\left(\frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)\right) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \psi_i(s) = \psi(s)$$

Тому

$$\Psi(s) = \exp\{\lambda\psi(s) - \lambda\}.$$

Це означає, що величина S має пуассоновий розподіл з параметрами $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ та $F(x)$.

Доведену властивість мозна інтерпретувати в термінах моделі колективного ризку.

Припустимо, що ми маємо декілька незалежних груп страхових договорів. Настання страхових випадків від і-ої групи за проаналізований проміжок часу описується пуассоновою величиною з середнім λ_i, а величина страхового повернення має розподіл $F_i(\lambda)$. Тоді, якщо ми об'єдимо всі договори в один портфель, то настання страхових випадків від цього сумарного портфеля буде характеризуватися розподілом Пуассона з середнім $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$, а величина страхового повернення буде мати розподіл F(x), який є середнім з $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ значення розподілу $F_i(x)$.

Застосуємо цей загальний результат до задачі, ми можемо сказати, що розподіл страхових випадків за договір є пуассоновим розподілом з середнім $\lambda = 2 + 3 = 5$, а розподіл величини медичних витрат Y після настання страхового випадку є сумішшю 2/5, 3/5 рівномірного розподілу на (0, 1000), (0, 200) відповідно. Тому щільність випадкової величини Y є

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \frac{17}{5000}, 0 < x < 200, \\ \frac{2}{5000}, 200 < x < 1000, \\ 0, x > 1000. \end{cases}$$

Розмір страхової виплати після настання страхового випадку пов'язаний з величиною медичних витрат Y співвідношенням

$$B = \begin{cases} 0, Y \le 100, \\ Y - 100, Y > 100. \end{cases}$$

Тому шукана величина рівна

$$\mathbf{E}B = \int_{100}^{1000} (x - 100) f_y(x) dx = \int_{100}^{200} (x - 100) f_Y(x) dx +$$

$$+ \int_{200}^{1000} (x - 100) f_Y(x) dx = \frac{17}{5000} \int_{100}^{2000} (x - 100) dx +$$

$$+ \frac{2}{5000} \int_{200}^{1000} (x - 100) dx = 17 + 160 = 177.$$

Отже, правильним є варіант (D).

Модельна задача 6.5. *Страхова компанія на початку року заключає безстроковий договір перестрахування надмірних індивідуальних втрат за договорами автомобільного страхування. Відомо, що:*

1) загальні очікувані втрати страхувальника по блоку, що розглядається у наступному році рівні 10000000;

2) розподіл розміру індивідуального страхового повернення описується законом Парето

$$F(x) = 1 - \left(\frac{2000}{x + 2000}\right)^2, x > 0;$$

3) перестрахувальник сплачує всі індивідуальні виплати поверх власного утримання страхувальника у розмірі 30200 по одному договору;

4) на початку кожного року перестрахувальник отримує перестраховану премію, рівну 110 % від очікуваних втрат;

5) внаслідок інфляції кожний рік розмір страхового повернення після настання страхового випадку збільшується на 5 %;

6) частота настання страхових випадків не змінюється.

Підрахувати розмір перестрахованої премії на наступний рік. Як зміниться ця премія на наступний рік?

Розв'язання. Перш за все підрахуємо очікуваний розмір страхового покриття після настання страхового випадку:

$$\mathbf{E}Y = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2000}{x + 2000}\right)^2 dx = -2000^2 \times \frac{1}{x + 2000} \Big|_0^{+\infty} = 2000.$$

Оскільки сумарні витрати за рік, $\mathbf{E}S$, рівні добутку очікуваному числу страхових випадків, $\mathbf{E}v$, і середньому розміру страхових виплат після настання страхового випадку, $\mathbf{E}Y$, очікуване число страхових випадків за рік є:

$$\mathbf{E}v = \frac{\mathbf{E}S}{\mathbf{E}Y} = \frac{10000000}{2000} = 5000.$$

Нехай $d = 3000$ – розмір власного утримання страхувальника, Y – важкість страхового випадку, $Y_{(d)} \equiv Y_{(3000)}$ — частка перестрахування у страховій виплаті:

$$Y_{(3000)} = \begin{cases} 0, Y \le 3000, \\ Y - 3000, Y > 3000. \end{cases}$$

Точка x=0 є атомом розподілу випадкової величини $Y_{(3000)}$; його маса рівна ймовірності того, що

$$\mathbf{P}\left(Y_{(30000)} = 0\right) = \mathbf{P}\left(Y \le 3000\right) = 1 - \left(\frac{2000}{3000 + 2000}\right)^2 = \frac{21}{25}.$$

При $x > 0$ додаткова функція розподулу випадкової величини $Y_{(3000)}$ є:

$$\mathbf{P}\left(Y_{(30000)} > x\right) = \mathbf{P}\left(Y > 3000 + x\right) = \left(\frac{2000}{5000 + x}\right)^2.$$

Відмітимо, що

$$\mathbf{P}\left(Y_{(30000)} > x\right) = \frac{4}{25} \times \left(\frac{2000}{5000 + x}\right)^2,$$

тобто $Y_{(3000)}$ можна розглядати як добуток індикаторної величини I, яка рівна 1 або 0 у відповідності з тим, перевищує або не немає затрат власного утримання безпосереднього страхувальника, і не залежної від I вмпадкової величини Z, яка має розподіл Парето

$$F_Z\left(x\right) = 1 - \left(\frac{5000}{x + 5000}\right)^2, x > 0,$$

Середній розмір участі перестрахувальника в одному страховому випадку є

$$\mathbf{E}Y_{(3000)} = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(Y_{(30000)} > x\right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2000}{x + 5000}\right)^2 dx =$$

$$= -2000^2 \times \frac{1}{x + 5000} \left.\right|_0^{+\infty} = 800.$$

Середні сумарні втрати перестрахувальника за рік, $\mathbf{E}S_{re}$, рівні добутку очікуваного числа страхових випадків, $\mathbf{E}v$, і середнього розміру участі перестрахувальника в одній страховій виплаті, $\mathbf{E}Y_{(3000)}$:

$$\mathbf{E}S_{re} = 5000 \times 800 = 4000000.$$

Тому перестахована премія на наступний рік рівна

$$110\% \mathbf{E}S_{re} = 1.1 \times 4000000 = 4400000.$$

Припустимо, що пройшов рік. Нехай Y' — розмір втрат після аварії через один рік. Умова задачі відносно впливу інфляції означає, що випадкова величина $Y'/1.05$ розподілена тк як і розмір втрат після аварії у наступному році, Y. Тому додаткова функція розподілу випадкової величини Y'дається формулою:

$$\mathbf{P}\left(Y' > x\right) = \mathbf{P}\left(Y > \frac{x}{1.05}\right) = \left(\frac{2100}{x + 2100}\right)^2, \ x > 0.$$

Відповідно, додаткова функція розподілу випадкової величини $Y'_{(3000)}$, яка описує участь перестрахувальника в індивідуальних втратах, є

$$P\left(Y'_{(3000)} > x\right) = P\left(Y' > 3000 + x\right) = \left(\frac{2100}{x + 2100}\right)^2.$$

Середній розмір участі перестрахувальника в одній страховій виплаті є

$$\mathbf{E}Y'_{(3000)} = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(Y'_{(30000)} > x\right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2100}{x + 5100}\right)^2 dx =$$

$$= -2100^2 \times \frac{1}{x + 5100} \Big|_0^{+\infty} \approx 864.7058824.$$

Середні сумарні втрати перестрахувальника за рік , $\mathbf{E}S'_{re}$, рівні добутку очікуваного числа страхових випадків, $\mathbf{E}v$, які не підлягають впливу інфляції і за умовами не змінилось, і середнього розміру участі перестрахувальника в одній страховій виплаті, $\mathbf{E}Y'_{(3000)}$:

$$\mathbf{E}S'_{re} \approx 4323529.$$

Тому перестрахована премія на наступний рік рівна

$$110\%\mathbf{E}S'_{re} \approx 4755882.$$

Таким чином, у порівнянні з попереднім роком перестрахована премія зросла на 8.1%, хоча інфляція зросла на 5%.

6.6. Вправи до розділу 6

1) Імовірність пожежі в певній структурі за даний період дорівнює 0,02. Якщо пожежа відбулася, то втрати структури рівномірно розподілені на інтервалі (0,a). Обчисліть середнє та дисперсію втрат за вказаний період.

2) Розглянемо портфель з 32 договорами страхування з імовірністю позову q=1/6 . Величина позову для кожної страховки має таку щільність розподілу:

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y); & 0 < y < 1; \\ 0; & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Позначимо через S сумарний позов. Знайдіть $\mathbf{P}\left\{S > 4\right\}$, використовуючи нормальну апроксимацію

3) Припустимо, що портфель складається з двох договорів страхування будівель від пожежі; вартість першої будівлі c_1 =1 млн.грн., а другої - c_2 =2 млн.грн. Імовірність пожежі на першому об'єкті дорівнює q_1 =0.2, а на другому q_2 =0.1. Збитки від пожежі Y_1 (Y_2), якщо вона відбувається, рівномірно розподілені від 0 до повної вартості об'єкта. Визначте залежність імовірності банкрутства від капіталу.

4) Припустимо, що щомісячна кількість пожеж серед застрахованих об'єктів описується пуассоновим розподілом з середнім $\lambda = 9$, а величина втрат при пожежі має експоненціальний розподіл з середнім 5000 грн. Обчислити ймовірність банкрутства, якщо резервний фонд дорівнює 105000 грн.

5) Припустимо, що страхова компанія уклала N=10000 договорів страхування життя строком на один рік на таких умовах: у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія виплачує спадкоємцям 1000000 грн., а в випадку смерті протягом року від природних причин компанія виплачує спадкоємцям 250000 грн. Компанія не платить нічого, якщо застрахований не помре протягом року. Імовірність смерті від нещасного випадку для всіх застрахованих однакова і дорівнює 0.0005. Імовірність смерті від природних причин залежить від віку. В першому наближенні можна розбити N застрахованих на дві вікові групи: $N_1 = 4000$ і $N_2 = 6000$ з імовірностю смерті протягом року від природних причин $q_1 = 0.004$ і $q_2 = 0.002$ відповідно. Підрахуйте величину премії, що забезпечує ймовірність виконання компанією своїх забов'язань, яка дорівнює 95%.

6) Розглянемо страхову компанію, що займається страхуванням автомобілів. Припустимо, що річна кількість аварій серед застрахованих автомобілів описується від'ємно-біноміальним розподілом з середнім 50 і середнім квадратичним відхиленням 20. Середня вартість ремонту пошкодженого автомобіля 500 грн. Оцініть величину резервного фонду компанії, достатню, щоб забезпечити 95% імовірність виконання своїх забов'язань.

7) Страхова компанія продає договори, для яких: імовірність настання страхового випадку $1/2$; розмір збитку при настанні страхового випадку задається формулою $1000e^{-0,05T}$, де T – випадкова величина, рівномірно розподілена на (0,20); портфель складається з N незалежних договорів; премія за договором дорівнює 350; загальна премія дорівнює очікуваним сумарним виплатам по всьому портфелю плюс

125% стандартного відхилення сумарних виплат від свого середнього. Знайдіть N.

8) Розподіл загальних втрат має такі параметри:

   а) розподіл кількості страхових випадків:

$$P(v = 0) = 0.5, P(v = 1) = 0.3, P(v = 2) = 0.2;$$

   б) розподіл розміру індивідуальних втрат:

$$P(Y = 1) = 0.8, P(Y = 4) = 0.2.$$

   Знайдіть імовірність того, що сумарні витрати перебільшують своє середнє більше, ніж у два рази.

9) Страхова компанія забезпечує страховий захист концертного залу від втрат унаслідок відмови системи електропостачання. Відомо, що

   а) число відмов електропостачання протягом року має розподіл Пуассона з середнім 1;

   б) розподіл величини збитку внаслідок однієї відмови системи електропостачання задається таблицею

x	Імовірність
10	0.3
20	0.3
50	0.4

   в) страхувальник оплачує витрати сам до тих пір, поки вони не перевищать 30.

   Підрахуйте очікувані виплати страхувальника за один рік.

10) Протягом минулого року за умовами колективного договору медичного страхування працівників було подано 800 страхових випадків. Розподіл розміру повернених по одному страховому випадку задається таблицею:

Витрати	50	100	200	300	400	500
Імовірність	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

   Урегулювання кожного розміру повернення за один договір коштує страховій компанії 50 грн. Крім того, незалежно від числа страхових випадків, страхова компанія має загальні адміністративні витрати у сумі 50000.

Актуарій страхової компанії припускає, що у наступному році:

а) через інфляцію медичні витрати по одному страховому випадку зростуть на 20% ;

б) заходи на поліпшення умов праці зменшать захворюваність на 5%;

в) через інфляцію всі адміністративні витрати збільшаться на 15 %.

Припустимо, що $d = 60$. Обчисліть очікуванні виплати страховика у наступному році.

11) Для медичного договору страхові випадки, пов'язані із звичайними захворюваннями і стоматологічними проблемами, описуються незалежним розподілом Пуассона з характеристиками, наведеними у наступній таблиці

Характер захворювання	Розподіл величини медичних витрат	λ
Загальне	Рівномірний на (0, 100)	2
Стоматологічне	Рівномірний на (0, 200)	3

За умовами договору, якщо медичні витрати по деякому страховому випадку менші ніж 100, то їх повністю оплачує застрахована особа. Якщо ж ці витрати більші ніж 100, застрахований оплачує лише 100, а страхова компанія — іншу частину. Знайдіть середнє значення одного страхового покриття.

12) Людина віком понад 65 років протягом одного року купує ліки випадкову кількість разів, яка має розподіл Пуассона з середнім 25. При кожній покупці витрати на ліки рівномірно розподілені на відрізку [5, 95]. Визначте ймовірність того, що річні витрати коштів на ліки перевищать 2000 грн.

13) Вантажники на електроламповому заводі інколи випускають з рук ящики з готовою продукцією.

Середнє число розбитих ящиків	50
Дисперсія числа розбитих ящиків	100
Середня вартість розбитих ламп у одному ящику	200
Дисперсія вартості розбитих ламп у одному ящику	400

Дана таблиця містить статистичні дані про збитки за один місяць. Якщо загальні збитки за місяць не перебільшать 8000 грн., бригада вантажників отримає премію. Використовуючи Гаусове наближення, підрахуйте ймовірність того, що вантажники отримають премію.

14) Виробнича компанія у середньому 2 рази на рік має втрати від непередбачених аварій. Індивідуальна втрата набуває значення 1,2 або 3 з ймовірностями 1/3 кожна. Для захисту від цих втрат компанія уклала договір страхування надмірних втрат, відповідно з якими страхувальник погашає всі втрати, які перебільшують власні утримання застрахованої особи у розмірі 2 (на рік). Визначте очікувані річні виплати страхувальника за цим договором, припускаючи, що число страхових випадків на рік розподілені за законом Пуассона.

15) Для розподілу Пуассона, який описує сумарні виплати страхової компанії, відомо, що:

    а) $\lambda = 2$;

    б) страхові виплати можуть бути тільки 1,2 або 3;

    в) $ES = 4.6$;

    г) $VarS = 11.8$.ї

    Підрахуйте $P(S = 3)$.

16) Портфель компаній складається з $N = 20$ тисяч договорів страхування життя терміном на один рік. Відповідно до умов договору, компанія виплачує певну суму у тому випадку смерті застрахованої особи протягом року і не виплачує нічого, якщо застрахований дожив до кінця року. Всі застраховані мають одну і ту же ймовірність смерті протягом року: $q = 0.01$. Із 20 тисяч застрахованих $N_1 = 10$ тисяч людей уклали договір на суму $b_1 = 100000$ грн. кожен, $N_2 = 5000$ людей — на суму $b_2 = 200000$ грн. кожен, $N_3 = 4000$ людей — на суму $b_3 = 500000$ грн. кожен і $N_4 = 1000$ людей — на суму $b_4 = 1$млн.грн. кожен. Відносна страхова надбавка встановлена компанією у розмірі $\theta = 15\%$. Компанія уклала договір перестрахування надмірних втрат при границі утримання $r = 500000$ грн. Компанія перестрахування встановлює свій тариф на основі тієї же статистики смертності, що і компанія, яка передає, але з відносною страховою надбавкою $\theta^* = 20\%$. Визначте, як зміниться ймовірність банкрутства передаючої компанії та її очікуваний прибуток.

17) Сумарні виплати страхової компанії за рік описуються від'ємним біноміальним розподілом. Середнє число страхових випадків за один рік – 9, а його середнє квадратичне відхилення – 6. Індивідуальні втрати можуть бути лише 1 або 3 з імовірністю 1/3 і 2/3 відповідно. Компанія уклала договір перестрахування з межею власного утримання d=3. Визначте розмір очікуваних виплат перестрахувальника.

18) Страхувальник має портфель договорів, структура яких описується такою таблицею:

Вид договорів	Число договорів у групі	Страхова сума	Імовірність страхового випадку
1	50	4	0.05
2	100	10	p

Збитки, які перебільшують рівень 2 для кожного договору, перестраховані за перестраховану премію, що є 0.02 за погашення ризику збитків у розмірі 1. Імовірність того, що сума втрат по утриманому ризику і вартості перестрахування перебільшить 30, рівна 0.10. Визначте p.

Розділ 7.

Динамічна модель банкрутства

7.1. Класична модель ризику

У динамічній моделі події розгортаються у часі. Найпростіша модель такого роду охоплює 2 процеси: настання премій і виплати страхових повернень.

У простішому випадку надходження премій характеризується одним параметром – швидкістю надходження страхових внесків (премій), яку ми позначимо c. Це означає, що якщо в деякий момент часу t компанія мала активи u_t і до моменту $t{+}h$ страхові випадки не наставали, то активи u_{t+h} компанії в момент $t + h$ рівні $u_t + ch$.

За просту модель процесу настання страхових випадків береться пуассоновий процес; нехай λ – інтенсивність цього процесу. Позначимо через T_n момент настання *n*-го страхового випадку, $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ – інтервал між *n*-им (*n*-1)-им страховими випадками.

Розміри виплат, що їх проводить страхова компанія, утворюють послідовність незалежних випадкових величин $\{Y_k, k \geq 1\}$, однаково розподілених з функцією розподілу $F(x)$. Ми будемо припускати, що $F(0)$=0 (тобто величини Y_k додатні). Існують математичне сподівання $\mathbf{E}Y_k = m$ та дисперсія $\mathbf{Var}Y_k = \sigma^2$.

Кількість ν_t страхових виплат на відрізку $[0, t]$ є пуассоновим процесом з інтенсивністю λ. Отже, $\mathbf{E}\nu_t = \lambda \cdot t$. Припускається також , що процес ν_t і послідовність Y_k взаємно незалежні. Момент τ_k *k*-го стрибка процесу N_t є моментом надходження до страхової компанії *k*-ої вимоги, і в цей момент компанія виплачує суму Y_k.

Випадковий процес

$$S_t = \sum_{k=1}^{\nu_t} Y_k \tag{7.1}$$

виражає суму виплат, які проведені компанією на відрізку часу $[0, t]$ (припускається, що $\sum_{k=1}^{0} Y_k = 0$). За теоремою про математичне сподівання суми випадкового числа випадкових величин

$$\mathbf{E}S_t = \mathbf{E}\nu_t \mathbf{E}Y_k = \lambda \cdot m \cdot t. \tag{7.2}$$

Прибуток компанії за час $[0, t]$ дорівнює

$$Q_t = ct - S_t, \tag{7.3}$$

де c – константа, яка характеризує інтенсивність надходження страхових внесків (премій). Математичне сподівання цього прибутку дорівнює

$$\mathbf{E}Q_t = ct - \lambda \cdot m \cdot t = (c - \lambda \cdot m)t. \tag{7.4}$$

Відносна страхова надбавка визначається так :

$$\theta = \frac{\mathbf{E}Q_t}{\mathbf{E}S_t} = \frac{c - \lambda \cdot m}{\lambda \cdot m} = \frac{c}{\lambda \cdot m} - 1. \tag{7.5}$$

Означення 7.1. . *Нехай u – початковий капітал компанії. Процесом ризику називається випадковий процес*

$$U_t = u + ct - S_t. \tag{7.6}$$

Зазначимо, що U_t – сумарний капітал компанії в момент часу t.
Природно поставити питання про ймовірність банкрутства страхової компанії, яка має початковий капітал u, на інтервалі часу $[0, \infty)$.
Позначимо цю ймовірність через $R(u)$. Очевидно,

$$R(u) = \mathbf{P}\{U_t < 0,\ t > 0\} \tag{7.7}$$

Ми будемо розглядати також функцію

$$\bar{R}(u) = 1 - R(u), \tag{7.8}$$

яка виражає ймовірність того, що на інтервалі часу $[0, \infty)$ банкрутство не відбувається.

Теорема 7.1. *Функція $\bar{R}(u)$ диференційована і задовольняє інтегро-диференціальне рівняння*

$$\bar{R}^{/}(u) = \frac{\lambda}{c}\bar{R}(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \bar{R}(u - z)dF(z). \tag{7.9}$$

Доведення. Припустимо, що функція $\bar{R}(u)$ диференційована. Розглянемо малий інтервал $(0, \Delta]$. Подія " банкрутство на інтервалі $[0, \infty)$ не відбувається при початковому капіталі *u* " може здійснитися, коли відбудеться одна з трьох таких подій, які між собою несумісні:

1) на інтервалі $(0, \Delta]$ не надійде жодна вимога виплати, а на інтервалі $[0, \infty)$ банкрутство не відбудеться при початковому капіталі $u + c\Delta$;

2) на інтервалі $(0, \Delta]$ з'явиться одна вимога виплати, розмір виплати *z* не перевищуватиме $u + c\Delta$, а на інтервалі $[\Delta, \infty)$ банкрутство не відбудеться при початковому капіталі $u + c\Delta - z$;

3) на інтервалі $[0, \Delta]$ з'явиться більше ніж одна вимога, а на інтервалі $[\Delta, \infty)$ банкрутство не відбудеться.

Враховуючи те, що ν_t– пуассоновий процес, а S_t– процес з незалежними приростами, зазначимо, що ймовірність події 1) дорівнює

$$[1 - \lambda\Delta + o(\Delta)]\, \bar{R}(u + c\Delta),$$

ймовірність події 2) дорівнює

$$(\lambda\Delta + o\,(\Delta)) \int_0^{u+c\Delta} \bar{R}(u + c\Delta - z)dF(z),$$

а ймовірність події 3) є $o(\Delta)$.Тому,

$$\bar{R}\,(u) = [1 - \lambda\Delta + o(\Delta)]\, \bar{R}(u + c) +$$

$$[\lambda\Delta + o(\Delta)] \int_0^{u+c\Delta} \bar{R}(u + c\Delta - z)dF(z) + o(\Delta). \tag{7.10}$$

Оскільки припускаємо, що функція $\bar{R}(u)$ диференційована, то за формулою Тейлора

$$\bar{R}\,(u + c\Delta) = \bar{R}(u) + \bar{R}^{/}(u)c\Delta + o(\Delta).$$

Тому з рівняння (7.10) одержимо

$$\bar{R}\,(u) = [1 - \lambda\Delta + o(\Delta)] \left[[\bar{R}\,(u) + \bar{R}^{/}\,(u)\,c\Delta + o(\Delta)] + (\lambda\Delta + o\,(\Delta)) \right] \times$$

$$\times \int_0^{u+c\Delta} \bar{R}(u + c\Delta - z)dF(z) + o(\Delta),$$

звідки

$$\bar{R}(u) = \bar{R}(u) - \lambda\Delta\varphi(u) + \bar{R}^{/}(u)c\Delta + o(\Delta) +$$

$$+(\lambda\Delta + o(\Delta)) \int_0^{u+c\Delta} \bar{R}(u + c\Delta - z)dF(z) + o(\Delta). \tag{7.11}$$

Поділивши обидві частини рівності (7.11) на Δ, і, переходячи до границі, при $\Delta \to 0$, одержимо (7.9).

Теорема 7.2. *Функція $\bar{R}(u)$ задовольняє інтегральне рівняння*

$$\bar{R}(u) = \bar{R}(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{R}(u - z)\left[1 - F(z)\right] dz. \tag{7.12}$$

Це твердження легко встановлюється, якщо проінтегрувати по *u* обидві частини рівняння (7.9)

Функція $\bar{R}(u)$ обмежена (це ймовірність, і тому $0 \le \bar{R}(u) \le 1$) і монотонно не спадає (при збільшенні початкового капіталу ймовірність небанкрутства збільшується). Тому існує $\lim\limits_{u\to\infty} \bar{R}(u) = \bar{R}(+\infty)$. Переходячи до границі при $u \to \infty$ в обох частинах рівності (7.12), будемо мати

$$\bar{R}(+\infty) = \bar{R}(0) + \frac{\lambda}{c} m\bar{R}(+\infty), \tag{7.13}$$

Звідси

$$\bar{R}(0) = \left(1 - \frac{\lambda m}{c}\right) \bar{R}(+\infty).$$

Якщо існує ненульовий розв'язок інтегрального рівняння (7.12), то природно вважати, спираючись на теоретико-ймовірнісний зміст $\bar{R}(u)$, що $\bar{R}(+\infty) = 1$(при нескінченному початковому капіталі банкрутство не відбудеться). Отже,

$$\bar{R}(0) = 1 - \left[\frac{\lambda m}{A}\right].$$

Оскільки $\bar{R}(0) \ge 0$, то $\frac{\lambda m}{A} \le 1$.
Відзначимо, що

$$\frac{Q_t}{t} = \frac{ct - S_t}{t} = c - \frac{S_t}{t}.$$

Випадковий процес S_t є однорідним процесом з незалежними приростами і $ES_t = \lambda mt$. Тому за посиленим законом великих чисел з імовірністю одиниця $\frac{S_t}{t} \to \lambda m$. Для застосування закону великих чисел досить зауважити, що при будь-якому t і будь-якому n S_t можна представити у вигляді суми n незалежних однаково розподілених випадкових величин:

$$S_t = \sum_{k=1}^{n} \left[S\left(\frac{k}{n}t\right) - S\left(\frac{k-1}{n}t\right) \right].$$

Якщо $c < \lambda m$, то процес Q_t з імовірністю одиниця прямує до $-\infty$ і тому при будь-якому u з ймовірністю одиниця відбувається банкрутство. У цьому випадку $\bar{R}(u) \equiv 0($ рівняння (7.12) не має обмеженого розв'язку). У випадку $c = \lambda m$ також рівняння (7.12) має лише нульовий розв'язок. Надалі будемо припускати, що $c > \lambda m$.

Модельна задача 7.1. *Якщо виплати є показниково розподіленими випадковими величинами з математичним сподіванням m, то ймовірність банкрутства $R(u)$ при початковому капіталі u дорівнює*

$$R(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+\theta} e^{\frac{-\theta}{(1+\theta)m} u}, \ c > \lambda m, \\ 1, \ c \le \lambda m. \end{cases} \tag{7.14}$$

Розв'язання. Розв'яжемо інтегро-диференціальне рівняння (7.9) у тому випадку, коли виплати Y_k розподілені за показниковим законом з математичним сподіванням μ. Тоді

$$F'(z) = \frac{1}{m} e^{-\left(\frac{z}{m}\right)}.$$

При $z > 0$ матимемо

$$\bar{R}'(u) = \frac{\lambda}{c} \bar{R}(u) - \frac{\lambda}{cm} \int_0^u \bar{R}(u-z) e^{-\left(\frac{z}{m}\right)} dz.$$

Обчислюючи похідну від обох частин рівняння, матимемо

$$\bar{R}''(u) = \frac{\lambda}{c} \bar{R}'(u) - \frac{\lambda}{cm} \bar{R}(0) e^{-\left(\frac{u}{m}\right)} - \frac{\lambda}{cm} \int_0^u \bar{R}'(u-z) e^{-\left(\frac{z}{m}\right)} dz =$$

$$= \frac{\lambda}{c} \bar{R}'(u) - \frac{\lambda}{cm} \bar{R}(0) e^{-\left(\frac{u}{m}\right)} + \frac{\lambda}{cm} \int_0^u e^{-\left(\frac{z}{m}\right)} d\bar{R}(u-z) =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\bar{R}'(u) - \frac{\lambda}{cm}\bar{R}(0)\,e^{-\left(\frac{u}{m}\right)} + \frac{\lambda}{cm}\bar{R}(0)\,e^{-\left(\frac{u}{m}\right)} - \frac{\lambda}{cm}\bar{R}(u) + \frac{\lambda}{cm^2}\int_0^u \bar{R}(u-z)\,e^{-\left(\frac{z}{m}\right)}dz =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\bar{R}'(u) - \frac{1}{m}\left[\frac{\lambda}{c}\bar{R}(u) + \frac{\lambda}{cm}\int_0^u \bar{R}(u-z)\,e^{-\left(\frac{z}{m}\right)}dz\right] = \frac{\lambda}{c}\bar{R}'(u) - \frac{1}{m}\bar{R}'(u) =$$

$$= -\left(\frac{c-\lambda m}{cm}\right)\bar{R}''(u) = -\frac{\theta}{m(1+\theta)}\bar{R}'(u),$$

де $\theta = \left(\frac{c-\lambda m}{\lambda m}\right) = \frac{c}{\lambda m} - 1$.

Розв'язуючи диференціальне рівняння

$$\bar{R}''(u) = -\frac{\theta}{m(1+\theta)}\bar{R}'(u),$$

матимемо $\bar{R}(u) = C_1 - C_2 e^{-\frac{\theta u}{m(1+\theta)}}$.

Якщо $c > \lambda m$, то $\theta > 0$, $\bar{R}(+\infty) = 1$ і $\bar{R}(0) = 1 - \frac{\lambda m}{c} = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$ і тому $\bar{R}(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{m(1+\theta)}u}$.

З рівняння (7.12) можна одержати перетворення Лапласа функції $\bar{R}(u)$. Нехай $\Phi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su}\bar{R}(u)\,du$ – перетворення Лапласа функції $\bar{R}(u)$, $\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}dF(u)$ – перетворення Лапласа-Стілтьєса функції *F(x)*.

Лема 7.1. *Якщо*

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}dF(u)$$

– перетворення Лапласа-Стілтьєса функції F(x), то перетворення Лапласа функції 1- F(x) дорівнює

$$\frac{1-\varphi(s)}{s},$$

а перетворення Лапласа функції F(x) дорівнює

$$\frac{\varphi(s)}{s}.$$

Доведення. Справді, інтегруючи частинами, маємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,[1-F(x)]\,dx = -\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}[1-F(x)]\,d(e^{-sx}) =$$

$$= -\frac{1}{s}\,[1-F(x)]\,e^{-sx}\Big|_0^{\infty} - \left(-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx}dF(x)\right) = \frac{1-\varphi(s)}{s}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}F(x)dx = -\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}F(x)d(e^{-sx}) = -\frac{1}{s}F(x)e^{-sx}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-sx}dF(x) =$$

Переходячи до перетворень Лапласа в рівнянні (7.12), будемо мати

$$\Phi(s) = \frac{\bar{R}\,(0)}{s} + \Phi(s)\frac{1-\varphi(s)}{s}\frac{\lambda}{c}, \qquad (7.15)$$

звідки

$$\Phi(s) = \frac{1-\frac{\lambda m}{c}}{1-\frac{\lambda}{c}\frac{1-\varphi(s)}{s}}\frac{1}{s}. \qquad (7.16)$$

Теорема 7.3. *Перетворення Лапласа функції $\bar{R}\,(u)$ обчислюється за формулою (7.16).*

Використовуючи обернене перетворення Лапласа, знайдене за формулою (7.16), одержимо явний вигляд функції $\bar{R}(u)$.

7.2. Асимптотична поведінка ймовірності банкрутства при $u \to \infty$

Дослідимо асимптотичну поведінку ймовірності банкрутства $R\,(u)$ на проміжку $[0, +\infty)$ при початковому капіталі u, якщо $u \to \infty$.

Користуючись рівнянням (7.12), установимо рівняння для функції $R\,(u)$. Маємо, беручи до уваги, що

$$\bar{R}\,(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c},$$

$$1 - R\,(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u [1 - R\,(u-z)]\,[1 - F\,(z)]\,dz =$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{c}\left\{m - \int_0^u [1 - F(z)]\,dz + \int_0^u R(u-z)\,[1 - F(z)]\,dz\right\} =$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{c}\left\{\int_u^\infty [1 - F(z)]\,dz + \int_0^u R(u-z)\,[1 - F(z)]\,dz\right\}$$

(використана рівність $m = \int_0^\infty [1 - F(z)]\,dz$). Отже,

$$R(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^{+\infty} [1 - F(z)]\,dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u R(u-z)\,[1 - F(z)]\,dz. \qquad (7.17)$$

Інтегральне рівняння (7.17) є рівнянням відновлення.
Нехай

$$L(z) \equiv \frac{\lambda}{c}\int_0^z [1 - F(v)]\,dv, \qquad (7.18)$$

$$z(u) \equiv \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} [1 - F(v)]\,dv. \qquad (7.19)$$

Тоді рівняння (7.17) набере вигляду

$$R(u) = z(u) + \int_0^u R(u-z)\,dL(z). \qquad (7.20)$$

Оскільки

$$L(+\infty) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} [1 - F(v)]\,dv = \frac{\lambda m}{c} < 1,$$

то (7.17) є нерекурентним рівнянням відновлення і при $u \to +\infty$

$$R(u) \approx e^{-ru}\frac{\int_0^{+\infty} e^{rs} z(s)\,ds}{\int_0^{+\infty} e^{ry} y dL(y)}, \qquad (7.21)$$

де r – додатний корінь рівняння

$$\int_0^{+\infty} e^{ry} y dL(y) = 1,$$

що в нашому випадку набуває вигляду

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{ry}[1-F(y)]dy = 1. \tag{7.22}$$

Відзначимо також, що

$$\int_0^{+\infty} e^{rs} z\left(s\right)ds = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{rs}\left\{\int_0^{+\infty}\left[1-F\left(v\right)\right]dv\right\} = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\left[1-F\left(v\right)\right]\left\{\int_0^{v} e^{rs}ds\right\}$$

$$= \frac{\lambda}{cr}\int_0^{+\infty}\left[1-F\left(v\right)\right]\left(e^{rv}-1\right)dv = \frac{1}{r}\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\left[1-F\left(v\right)\right]e^{ru}dv-$$

$$-\frac{1}{cR}\int_0^{+\infty}\left[1-F\left(v\right)\right]dv = \frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\lambda m}{c} = \frac{1}{r}\frac{c-\lambda m}{c} = \frac{1}{r}\frac{r}{1+\theta} \tag{7.23}$$

Позначимо

$$\overline{\mu} = \int_0^{+\infty} e^{ry} y dL\left(y\right) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} y e^{Ry}\left[1-F\left(y\right)\right]dy. \tag{7.24}$$

Підсумуємо все вище сказане у вигляді теореми, яка є однією з найважливіших в актуарній математиці.

Теорема 7.4. *(Крамера-Лундберга). Нехай $\frac{\lambda m}{A} < 1$, рівняння 7.22 має корінь r і . Тоді при $u \to \infty$*

$$R\left(u\right) \approx \frac{\theta}{\left(1+\theta\right) r\overline{\mu}} e^{-ru}. \tag{7.25}$$

Якщо $\overline{\mu} \to +\infty$, то

$$R\left(u\right) = 0\left(e^{-ru}\right). \tag{7.26}$$

Дослідимо більш детально умови існування кореня рівняння (7.22).
Нехай

$$h\left(s\right) = \int_0^{+\infty} e^{sz} dF(z) - 1 \tag{7.27}$$

Зробимо таке основне припущення: Існує $s_{\infty} > 0$ таке, що $h(s) \uparrow +\infty$, коли $s \uparrow s_{\infty}$ (допускається і можливість $s_{\infty} = +\infty$).

Очевидно, $h(0) = 0$, $h(s)$ зростає, опукла вниз і неперервна на $[0, s_\infty)$. Виключимо випадок, коли $h(s_\infty - 0) < \infty$, але $h(s_\infty) = \infty$ при $s > s_\infty$. Зауважимо, що

$$\int_0^{+\infty} e^{rz}(1 - F(z))\,dz = \frac{1}{r}\int_0^{+\infty}[1 - F(z)]\,d(e^{rz}) =$$

$$= \frac{1}{r}[1 - F(z)]\,e^{rz}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} e^{rz}dF(z) =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\int_0^{+\infty} e^{rz}dF(z) - 1\right] = \frac{h(r)}{r}$$

Тому рівняння (7.22) запишеться у вигляді

$$h(r) = \frac{c}{\lambda}r. \tag{7.28}$$

Лема 7.2. *При зроблених припущеннях рівняння (7.28) має єдиний корінь r, причому $r < s_\infty$.*

Доведення випливає з властивостей функції $h(r)$.

Зауважимо, що

$$\bar{\mu} = \int_0^{+\infty} e^{rz}ydL(y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{ry}y\,[1 - F(y)]\,dy = \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}[1 - F(y)]\,d\left[\left(\frac{y}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{r}\right.$$

$$= \frac{\lambda}{c}\left(\frac{y}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{ry}[1 - F(y)]\Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{ry}dF(y) =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} ye^{ry}dF(y) - \frac{1}{r^2}\int_0^{+\infty} e^{ry}dF(y)\right).$$

Оскільки

$$h'(r) = \int_0^{+\infty} ye^{ry}dF(y)$$

і

$$h(r) = \frac{c}{\lambda}r,$$

то

$$\bar{\mu} = \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{r}\frac{1}{m}\left[h'(r) - \frac{c}{\lambda}\right].$$

Отже, теорема Крамера-Лундберга може бути переформульована так.

Теорема 7.5. *(теорема Крамера-Лундберга). При зроблених припущеннях відносно $h(r)$ і $u \to \infty$*

$$R(u) \approx \frac{\theta m}{h'(r) - \frac{c}{\lambda}} e^{-ru}, \tag{7.29}$$

де r корінь рівняння $h(r) = \frac{c}{\lambda} r$.

Праву частину (7.29) називають апроксимацією Крамера-Лундберга.

7.3. Оцінка для ймовірності банкрутства у класичній моделі ризику

Продовжуємо вивчати ймовірність $R(u)$ банкрутства на $[0, +\infty)$ у класичній моделі ризику при початковому капіталі u. Будемо вважати, що $c > \lambda m$ (якщо $c \leq \lambda m$, то банкрутство відбувається з імовірністю одиниця). У попередньому параграфі при певних припущеннях були встановлені асимптотичні формули для $R(u)$ при великих u.

Виявляється, що можна вказати оцінку зверху для ймовірності $R(u)$, яка справедлива при всіх $u > 0$. А саме має місце така теорема.

Теорема 7.6. *Нехай рівняння*

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{Ru}\left[1 - F(y)\right] dy = 1 \tag{7.30}$$

має додатний корінь r. Тоді при всіх $u > 0$ виконується нерівність

$$R(u) \leq e^{-ru}. \tag{7.31}$$

Нерівність (7.31) називають нерівністю Крамера-Лундберга, а число r –коефіцієнтом Лундберга, або підладженим коефіцієнтом.

Нехай *A* – випадкова подія, яка полягає в тому, що банкрутство відбудеться на інтервалі $[0, +\infty)$, $_n$– подія, яка полягає в тому, що банкрутство відбудеться не пізніше моменту появи n-ї вимоги на виплату.

Імовірність події $_n$ позначимо $R_n(u)$. Тоді $= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$і $A_n \subset A_{n+1}$. Тому згідно з властивістю неперервності ймовірності, $\mathbf{P}(A) = R(u) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(u)$. Отже, щоб довести нерівність (7.31), досить установити, що

$$R_n(u) \le e^{-ru} \tag{7.32}$$

для всіх n та $u > 0$.

При появі j-ї вимоги на виплату відбувається банкрутство, якщо

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_j > u + c\tau_1 + c(\tau_2 - \tau_1) + ... + c(\tau_j - \tau_{j-1}), \tag{7.33}$$

тобто

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} [Y_i - c(\tau_i - \tau_{i-1})] = \sum_{i=1}^{j} \tilde{Y}_i > u, \tag{7.34}$$

де $\tilde{Y}_i = c(\tau_i - \tau_{i-1}) - Y_i$. Відзначимо, що

$$R_n(u) = P\{S_k > u \text{ для деякого } k \le n\}. \tag{7.35}$$

Доведемо нерівність (7.32) методом повної математичної індукції. Нехай $G(u)$ функція розподілу випадкової величини -$\tilde{Y}_i$. Тоді

$$R_1(u) = P\{S_1 > u\} = P\left\{-\tilde{Y}_1 > u\right\} = 1 - G(u). \tag{7.36}$$

Зауважимо, що

$$\mathbf{E}e^{-t\tilde{Y}_1} = \mathbf{E}e^{t\left(-\tilde{Y}\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tY} dG(y) = \int_{-\infty}^{u} e^{ty} dG(y) + \int_{u}^{+\infty} e^{ty} dG(y) \ge$$

$$\ge \int_{-\infty}^{u} e^{ty} dG(y) + e^{ty}[1 - G(u)].$$

Отже,

$$R_1(u) = 1 - G(u) \le e^{-tu}\left\{\mathbf{E}e_1^{-t\tilde{\tilde{Y}}} - \int_{-\infty}^{u} e^{ty} dG(y)\right\}. \tag{7.37}$$

Вираз у фігурних дужках не перевищує одиниці для всіх t, для яких $Ee^{-t\tilde{Y}_1} \le 1$ і, зокрема, для $t = r$, де $r-$ корінь рівняння

$$\mathbf{E}e^{-r\tilde{Y}_1} = 1. \tag{7.38}$$

Отже,

$$R_1(u) \le e^{-ru}$$

для всіх u, якщо r– корінь рівняння (7.38).

Припустимо, що $R_n(u) \le e^{-ru}$, де r – корінь рівняння (7.38) , і доведемо, що тоді $R_{n+1}(u) \le e^{-ru}$.

Подія "банкрутство відбудеться не пізніше $(n+1)$-ї виплати" може відбутись так: банкрутство відбудеться при першій же вимозі на виплату (ймовірність цього $\mathbf{P}\left\{-\tilde{Y}_1 > u\right\} = 1 - G(u)$), або ж $-\tilde{Y}_1 = y < u$, капітал страхової компанії після першої виплати становитиме

$$u + c\tau_1 - Y_1 = u + \tilde{Y}_1 = u - \left(-\tilde{Y}\right) = u - y$$

і банкрутство відбудеться не пізніше n-ї вимоги, якщо вести після першої вимоги новий відлік. Тому

$$R_{n+1}(u) = 1 - G(u) + \int_{-\infty}^{u} R_n(u-y)\, dG(y). \tag{7.39}$$

Використаємо тепер припущення індукції $R_n(u) \le e^{-ru}$, де r – корінь рівняння (7.38). Маємо

$$R_{n+1}(u) = e^{-ru} \int_{u}^{+\infty} e^{ru} dG(y) + \int_{-\infty}^{u} R_n(u-y)\, dG(y) \le$$

$$\le e^{-ru} \int_{u}^{+\infty} e^{ru} dG(y) + \int_{-\infty}^{u} e^{-r(u-y)} dG(y) =$$

$$\le e^{-ru} \left\{ \int_{u}^{+\infty} e^{ry} dG(y) + \int_{-\infty}^{u} e^{ry} dG(y) \right\} =$$

$$= e^{-ru} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} dG(y) = e^{-ru} E e^{-r\tilde{Y}_1} = e^{-ru}$$

бо згідно з (7.38)

$$\mathbf{E} e^{-r\tilde{Y}_1} = 1.$$

Тобто, при всіх натуральних n і $u > 0,\ R_n(u) \le e^{-ru}$, а отже, і $R(u) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(u) \le e^{-ru}$.

Залишається лише більш уважно вивчити рівняння (7.38). Оскільки $-\tilde{Y}_1 = Y_1 - c\tau_1$, а випадкова величина τ_1 має показниковий розподіл з параметром λ, то рівняння (7.38) набуває такого вигляду:

$$1 = \mathbf{E}e^{-r\tilde{Y}_1} = \mathbf{E}e^{r(Y_1 - c\tau_1)} = \mathbf{E}e^{rY_1}\mathbf{E}e^{-c\tau_1} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-rcx}\lambda e^{-\lambda x}dx \int_{-\infty}^\infty e^{ry}dF(y) =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + rc}\int_0^\infty e^{ry}dF(y) = -\frac{\lambda}{\lambda + rc}\int_0^\infty [1 - F(y)]\, e^{ry}dy =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + rc} + \frac{\lambda r}{\lambda + rc}\int_0^\infty [1 - F(y)]\, e^{ry}dy,$$

звідси

$$\frac{\lambda r}{\lambda + rc}\int_0^\infty [1 - F(y)]\, e^{ry}dy = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + rc} = \frac{rc}{\lambda + rc}.$$

Отже,

$$\int_0^\infty [1 - F(y)]\, e^{ry}dy = \frac{c}{\lambda}.$$

Теорему доведено.

7.4. Динамічні моделі, описані стохастичними диференціалами

Нехай у момент часу t_i надходить i-й позов, $y_0 = d > 0$– рівень (франшиза), позови, величини яких менші за *d*, не будуть розглядатися. Рівень K обмежує величину позову (відзначимо, що неважко розглянути і випадок, коли).

Нехай

$$d = y_0 < y_1 < ... < y_k < y_{k+1} < ... < y_{m-1} < y_m = K$$

деяке розбиття відрізка, $\nu(y_k - y_{k-1}, t - s)$ – кількість позовів, які надійшли за проміжок часу від *s* до *t* і величини яких знаходились у межах від y_{k-1}

до y_k. Нехай $\tilde{y}_k \in [y_{k-1}, y_k]$ – деяка середня точка, тоді $\tilde{y}_k \nu(y_k - y_{k-1}, t-s)$ – середній сумарний позов до компанії, від отриманих вимог на проміжку від *s* до *t*, величини позовів яких знаходились від y_{k-1} до y_k. Розіб'ємо відрізок точками

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ... < t_n = t,$$

тоді величина $\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{y}_k \nu(y_k - y_{k-1}, t_{i+1} - t_i)$ приблизно дорівнює сумарній величині позовів, що надійшли за час від 0 до *t*, величини яких знаходились у межах від y_{k-1} до y_k.

Величина

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{y}_k \nu(y_k - y_{k-1}, t_{i+1} - t_i)$$

близька при великих «*m*» до сумарної величини всіх позовів, що надійшли до страхової компанії за час від 0 до *t*. Переходячи до границі, отримаємо, що сумарна величина позовів до компанії, які будуть прийняті до розгляду (величина позову не менша, ніж *d*) дорівнює

$$X_d(t) = \int_0^t \int_d^K y\nu(dy, ds)$$

Зазначимо, що якщо позов величиною «*y*», то він може бути лише частково задоволений, наприклад буде виплачена сума *y* – *d*, величина позову може бути також трансформована за допомогою деякої функції, залежної від часу, наприклад буде проведено дисконтування

$$e^{-\delta s} y, \text{ де } \delta = \ln(1+i).$$

У даному випадку приведена вартість потоку позовів, очевидно, дорівнюватиме величині

$$y_d^{\delta}(t) = \int_0^t \int_d^K y e^{-\delta s} \nu(dy, ds)$$

В останньому легко переконатися, повторивши попередні міркування з дисконтуванням.

У загальному випадку є сенс розглянути перетворення величини позову «*y*» вигляду *f(y,s)*. У цьому випадку сумарний результат від такого перетворення потоку позовів буде дорівнювати

$$Y_d(t) = \int_0^t \int_d^K f(y, s)\nu(dy, ds)$$

Проаналізуємо властивості функції $\nu(y_k - y_{k-1}, t)$:

1) При кожному фіксованому t – це міра (випадкова міра) відрізка $[y_{k-1}, y_k]$;

2) Для фіксованого відрізка $[y_{k-1}, y_k]$ – це неспадна функція t. Справді,

$$\nu([y_{k-1}, y_k], s) \leq \nu([y_{k-1}, y_k], t)$$

якщо $s \leq t$;

3) $\nu([y_{k-1}, y_k], 0) = 0$;

4) Для неперетинних відрізків $[y_{k-1}, y_k)$ та $[y_{j-1}, y_j)$

$$\nu(\,[y_{k-1}, y_k) \cup [y_{j-1}, y_j)\,, t) = \nu(y_{k-1}, y_k, t) + \nu(y_{j-1}, y_j, t);$$

5) Якщо F_t – потік σ-алгебр, породжений процесом надходження позовів на $[0, t]$, то $\nu(A, t)$ – F_t-вимірна випадкова величина;

6) $\nu(A, t)$ для будь-якого $A = [a, b)$ – міра.

У силу теорем Мейєра справедливе, причому єдине, представлення

$$\nu(A, t) = \pi(A, t) + \mu(A, t)$$

де $\pi(A, t)$ – монотонно неспадний інтегровний передбачуваний процес, компенсатор міри $\nu(A, t)$, а $\mu(A, t)$ – мартингальна міра, тобто при фіксованому

$$\mathbf{E}\left\{\mu(A, t)/\mathrm{F}_s\right\} = \mu(A, s).$$

В отриманому розкладі міри $\nu(A, t)$ функція $\pi(A, t)$ відіграє подвійну роль. З одного боку, різниця $\nu(A, t) - \pi(A, t)$ є мартингалом, з другого – функція $\pi(A, t)$ є характеристикою $\mu(A, t)$ (нагадаємо, що $\pi(A, t)$ буде характеристикою мартингала $\mu(A, t)$, якщо $\mu^2(A, t) - \pi 2(A, t)$ знову буде мартингалом, у загальному випадку міра $\pi(A, t)$ випадкова). Ця обставина – досить важливе узагальнення елементарного факту: математичне сподівання і дисперсія пуассонового процесу збігаються. Якщо виконані перелічені властивості, то мартингальна міра називається ортогональною. Надалі будемо розглядати тільки ортогональні міри. Якщо процес надходження позовів буде процесом з незалежними приростами (це буде, якщо кількість отриманих позовів на проміжку (s, t) і величини позовів не будуть залежати від того, що буде далі і від того, що було раніше на $(0, s)$), то міра $\nu(A, t)$ буде пуассоновою, тобто

$$\mathbf{P}\{\nu(A,t)-\nu(A,t)=k\}=\frac{[\pi(A,t)-\pi(A,t)]^k}{k!}e^{\pi(A,t)-\pi(A,t)}, 0\leq s\leq t.$$

У даному випадку $\pi(A,t)=\mathbf{E}\nu(A,t)$.

Це випливає з того, що в силу єдиності розкладу

$$\nu(A,t)=\pi(A,t)+\mu(A,t)$$

і того, що у випадку процесу з незалежними приростами

$$\nu(A,t)-\mathbf{E}\nu(A,t)$$

теж є мартингалом, тобто міра $\pi(A,t)$ має дорівнює математичному сподіванню $\mathbf{E}\nu(A,t)$. Підкреслимо, що міра $\pi(A,t)=\mathbf{E}\nu(A,t)$ дорівнює середній кількості позовів до компанії, що надійшли за час від 0 до t, величини яких знаходились у множині A, неоднорідній за часом, це означає, наприклад для різних пір року (зимовий період, літній і т.д.) різну інтенсивність аварій. Нехай $A(t)(A(0)=0, A(t)\geq A(s), t\geq s)$ – потік грошових засобів, що надійшли до страхової компанії за період від 0 до t, $A(t)$ може бути і випадковою функцією часу, u – власні засоби компанії, тоді дохід із вирахуванням страхових виплат буде описуватися таким процесом.

Побудуємо експоненціальну оцінку для ймовірності банкрутства компанії. Очевидно, що банкрутство настане, якщо для будь-якого $t>0$. Тоді

$$\mathbf{P}\{\zeta_t<0,\forall t>0\}=\lim_{T\to\infty}P\left\{\inf_{t\in[0,T]}\zeta_t<0\right\}=\lim_{T\to\infty}P\left\{\sup_{t\in[0,T]}\xi_t>u\right\}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}P\left\{\sup_{t\in[0,T]}Y_t>exp\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\{u+A(t)+\int\limits_0^t\int\limits_d^K(l^{f(y,s)}-1)\pi(dy,ds)\right\}\right)\right\}.$$

Випадковий процес ξ має вигляд

$$\xi(t)=-\int\limits_0^t\int\limits_d^K(l^{f(y,s)}-1-f(y,s))\pi(dy,ds)+\int\limits_0^t\int\limits_d^K(f(y,s))\mu(dy,ds);$$

$$Y_t=e^{\xi_t}.$$

Нехай $F_t^\xi, t \in [0, T]$ – потік σ-алгебр, породжений процесом $\xi_s, 0 \leq s \leq t$. Неважко переконатися у тому, що випадковий процес Y_t буде мартингалом відносно потоку F_t^ξ. Для цього потрібно застосувати узагальнену формулу Іто до функції . Справді, якщо

$$d\xi_t = \alpha(t)dt + \int\limits_d^K \varphi(y,t)[\nu(dy,dt) - \pi(dy,dt)] =$$

$$= \alpha(t)dt + \int\limits_d^K \varphi(y,t)\mu(dy,dt).$$

то для $f(x,t)$ за цією формулою маємо:

$$df(\xi_t,t) = f_t'(\xi_t,t) + \alpha(t)f_x'(\xi_t,t) +$$

$$+ \int\limits_d^K [f(\xi_t + \varphi(y,t),t) - f(\xi_t,t) - f_x'(\xi_t,t)\varphi(y,t)]\pi(dy,dt) +$$

$$\int\limits_d^K [f(\xi_t + \varphi(y,t),t) - f(\xi_t,t)]\mu(dy,dt).$$

У нашому випадку

$$Y_t = Y_s + \int\limits_s^t \int\limits_d^K [e^{f(y,\tau)} - 1]\pi(dy,d\tau).$$

Нагадаємо, що при інтегруванні останнього члена у цій формулі отримали стохастичний інтеграл за мартингальною мірою.

Як відомо, умовне математичне сподівання такого інтегралу дорівнює нулю, тобто

$$\mathbf{E}\left\{\int_s^t \int_d^K \left(l^{\xi_\tau + f(y,\tau)} - l^{\xi_\tau}\right)\mu(dy,ds)/F_s^\xi\right\} = 0$$

або

$$E\left\{\int_s^t \int_d^K Y_t/\mathrm{F}_s^\xi\right\} = Y_s,\ EY_t = 1.$$

Якщо вимагати, щоб

$$A(t) \geq \int\limits_s^t e^{\xi_t} \int\limits_d^K [e^{f(y,\tau)} - 1]\pi(dy, d\tau)$$

з імовірністю 1, то, застосувавши нерівність Колмогорова, отримаємо

$$P\left\{\zeta_t < 0, \forall t > 0\right\} \leq \lim_{T\to\infty} P\left\{\sup_{t\in[0,T]} Y_t > e^u\right\} \leq e^{-u} \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}Y_t$$

Отже, ймовірність банкрутства страхової компанії у випадку, якщо власний капітал її дорівнював «u», а надходження відбуваються так

$$A(t) = \int\limits_s^t e^{\xi_t} \int\limits_d^K [e^{f(y,\tau)} - 1]\pi(dy, d\tau)$$

не більше, ніж e^{-u}, звідси також випливає, що, якщо

$$A(t) > \int\limits_s^t e^{\xi_t} \int\limits_d^K [e^{f(y,\tau)} - 1]\pi(dy, d\tau)$$

то ймовірність банкрутства страхової компанії не перевищує e^{-u}.

Підкреслимо, що у загальному випадку міра $\pi(A, t)$ – випадкова, тож співвідношення

$$A(t) \geq \int\limits_s^t e^{\xi_t} \int\limits_d^K [e^{f(y,\tau)} - 1]\pi(dy, d\tau)$$

повинно виконуватися з ймовірністю 1.

7.5. Динамічна модель страхування, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням

Припустимо, що швидкість надходжень до страхової компанії залежить від стану компанії, а саме від її поточного капіталу. Нехай ζ_t – капітал компанії на момент часу t, тобто дохід за вирахуванням страхових виплат. Нехай

$A(t) \geq 0$ – сума, що надійшла до страхової компанії від клієнтів за час від *0* до *t*, (очевидно, що $0 = A(0) \leq A(s) \leq A(t)$, якщо $0 \leq s \leq t$). Нехай за час від t до $t + \Delta t$ до страхової компанії надійде величина

$$A(t + \Delta t) - A(t) = a(t, \zeta_t)\Delta t$$

тоді $A(t) = \int\limits_0^t a(s, \zeta_s)ds$, і $a(t, x)$ – швидкість надходження засобів. Обґрунтуємо можливу залежність $a(t, x)$ від x.

Нехай $a(t, x)$ – невипадкова, така, що $0 \leq a(t, x) \leq a(t, y)$, якщо $0 \leq x \leq y$, тобто чим більший поточний капітал компанії, тим більший притік засобів – «гроші» до «грошей». Цей факт можна пояснити, наприклад, якісною рекламою, яку можна реалізувати за наявності достатніх засобів, або, наприклад, виплатою дивідендів, яка можлива (це обумовлено теоретично), якщо капітал компанії досить великий. Чим більший капітал компанії, тим менша ймовірність її банкрутства, отже, вона надійніша, з погляду клієнта, і він укладе з нею договір страхування. Тому будемо вважати, що ми привели достатньо доказів для того, щоб обґрунтувати умову

$$0 \leq a(t, x) \leq a(t, y), \text{ якщо } 0 \leq x \leq y$$

.

Природно, якщо $A(t)$ є функціоналом від траєкторії , це означає, що надходження залежать від динаміки процесу накопичення компанією засобів за час від 0 до t, а не тільки від стану компанії на момент часу t.

Багатьом клієнтам важливо знати, наскільки стабільний капітал, чи є зростання, з якою швидкістю і т.ін. Усе це може бути враховано у відповідному функціоналі $A_\zeta(t)$.

Сумарні виплати страхової компанії за час від 0 до t у загальному випадку також мають вигляд

$$X_d(t) = \int\limits_0^t \int\limits_d^K f(s, \zeta_s, u)\nu(du, ds).$$

Наприклад, якщо в моменти надходження позову клієнту виплачується ще і дивіденд *D*, а дивіденд, як правило, залежить від поточного капіталу компанії ζ на даний момент, тобто $D = D(\zeta)$, це сумарні виплати компанії з урахуванням дисконтування (до речі, δ – сила зростання відсотка може бути залежною від s, якщо відсоткова ставка r змінюється у часі, тобто якщо

$r = r(s)$, то $\delta(s) = \ln(1+r(s)))$ за час від 0 до t всім своїм клієнтам будуть дорівнювати:

$$X_d^\delta(t) = \int_0^t \int_d^K (y + D(\zeta_s))e^{-\delta(s)}\nu(du, ds).$$

Тобто поточний капітал ζ_t страхової компанії у момент часу t буде задовольняти стохастичне диференціальне рівняння (ζ_t – буде його розв'язком)

$$\zeta_t = u + \int_0^t a(s, \zeta_s)ds - \int_0^t \int_d^K (y + D(\zeta_s))e^{-\delta(s)}\nu(du, ds),$$

тут u – початковий капітал компанії. Із теорії стохастичних диференціальних рівнянь відомо, що рівняння матиме єдиний сильний розв'язок, якщо, наприклад, відповідні коефіцієнти зростають не швидше, ніж лінійна функція на безмежності і вони досить «гладкі» по фазовій змінній, наприклад, задовольняють умові Ліпшица.

Аналогічно тому, як це вже робилося, побудуємо експоненціальну оцінку для ймовірності банкрутства страхової компанії, якщо поточний капітал компанії $\zeta(t)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$\zeta_t = u + \int_0^t a(s, \zeta_s)ds - \int_0^t \int_d^K f(s, \zeta_s, y)\nu(dy, ds), \tag{7.40}$$

Будемо припускати, що розв'язок цього рівняння існує і єдиний. Займемося побудовою експоненціальної оцінки для ймовірності банкрутства страхової компанії. Очевидно, що банкрутство настане, якщо $\zeta_t < 0$ при будь-якому $t > t_0$. Тоді

$$\mathbf{P}\{\zeta_t < 0, \forall t > 0\} = \lim_{T\to\infty} P\left\{\inf_{t\in[0,T]} \zeta_t < 0\right\} = \lim_{T\to\infty} P\left\{\sup_{t\in[0,T]} \xi_t > u\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} P\left\{\sup_{t\in[0,T]} Y_t > e^u\right\}.$$

тут випадковий процес ζ_t має вигляд

$$\zeta_t = -\int_0^t a(s, \zeta_s)ds + \int_0^t \int_d^K f(s, \zeta_s, y)\nu(dy, ds),$$

$$Y_t = e^{\zeta_t},$$

ζ_t– поточний капітал компанії, який є розв'язком рівняння (7.40). Нехай $\Im_t^{\zeta}$ – неспадний потік σ-алгебр, породжений на основному ймовірнісному просторі процесом ζ. Вияснимо умови, при яких випадковий процес Y_t буде мартингалом відносно сімейства $\Im_t^{\zeta}$. Застосувавши узагальнену формулу Іто до функцій Y_t, маємо

$$dY_t = e^{\xi_t}\left[\int\limits_d^K f(t,\zeta_t,y)\pi(dy,dt) - a(t,\zeta_t)dt + \right.$$

$$\left.\int\limits_d^K \left(e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1 - f(t,\zeta_t,y)\right)\pi(dy,dt)\right] + e^{\xi_t}\int\limits_d^K \left(e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1\right)\mu(dy,dt),$$

де $\mu(A,t) = \eta(A,t) - \pi(A,t)$.

Інтегруючи останній вираз у межах від s до t, отримаємо

$$Y_t = Y_s + \int\limits_s^t e^{\xi_\tau}\left[\int\limits_d^K (e^{f(\tau,\zeta_\tau,y)} - 1)\pi(dy,d\tau) - a(\tau,\zeta_\tau)d\tau\right] +$$

$$+\int\limits_s^t\int\limits_d^K (e^{f(\tau,\zeta_\tau,y)} - 1)\mu(dy,d\tau).$$

Скориставшись властивостями умовних математичних сподівань від стохастичних інтегралів за інтегральними мірами, отримаємо

$$\mathbf{E}\left\{Y_t/\Im_s^{\xi}\right\} = Y_s + \mathbf{E}\left\{\int_s^t e^{\xi_\tau}\left[\int_d^K (e^{f(\tau,\zeta_\tau,y)} - 1)\pi(dy,dt) - a(\tau,\zeta_\tau)d\tau\right]/\Im_t^{\xi}\right\}$$

тобто для того, щоб Y_t був мартингалом відносно сімейства $\Im_t^{\xi}$, потрібно вимагати, щоб з імовірністю 1 виконувалося співвідношення

$$\int\limits_s^t a(\tau,\zeta_\tau)d\tau = \int\limits_s^t e^{\xi_\tau}\int\limits_d^K (e^{f(\tau,\zeta_\tau,y)} - 1)\pi(dy,d\tau).$$

Тоді

$$dY_t = e^{\xi_t}\int\limits_d^K (e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1)\pi(dy,dt), Y_0 = 1$$

і

$$Y_T = \int\limits_0^T e^{\xi_t} \int\limits_d^K (e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1)\mu(dy, dt),$$

звідки $\mathbf{E}Y_T = 1$.

Тепер, скориставшись знову нерівністю Колмогорова, отримаємо

$$P\{\zeta_t < 0, \forall t > 0\} = \lim_{T\to\infty} P\left\{\sup_{t\in[0,T]} Y_t > e^u\right\} \le e^{-u} \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}Y_t = e^{-u}.$$

У силу того, що $\xi_t = \zeta_t - u$ процес Y_t буде мартингалом, якщо

$$\int\limits_s^t a(\tau, \zeta_\tau)d\tau = \int\limits_s^t e^{\xi_\tau} \int\limits_d^K (e^{f(\tau,\zeta_\tau,y)} - 1)\pi(dy, d\tau),$$

останнє буде виконане, якщо, наприклад,

$$dA(t) = a(t, \zeta_t)dt = e^{\xi_t} \int\limits_d^K (e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1)\pi(dy, dt),$$

тобто достатньою умовою для того, щоб процес Y_T був мартингалом, буде виконання рівності

$$A(T) = \int\limits_0^T e^{\xi_t} \int\limits_d^K (e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1)\pi(dy, dt),$$

де $A(t)$ – процес надходження засобів до компанії, який є неупередженим функціоналом від $\{\zeta_s, 0 \le s \le t\}$. Очевидно, що, якщо з імовірністю 1

$$A(T) \ge \int\limits_0^T e^{\xi_t} \int\limits_d^K (e^{f(t,\zeta_t,y)} - 1)\pi(dy, dt)$$

то ймовірність банкрутства компанії також не буде перевищувати e^{-u}.

Модельна задача 7.2. *Нехай компанія уклала N однотипних договорів, потік позовів від одного клієнта з невипадковою компенсуючою мірою $\pi(A, t) = \pi(A)t$, тобто потік однорідний у часі; позови окремих клієнтів утворюють незалежні між собою потоки з однаковими інтенсивностями $\pi(A)$. Тоді $\nu_N(A, t)$ – міра, яка характеризує сумарний потік позовів N*

клієнтів до страхової компанії буде з інтенсивністю $N\pi(A)$. Нехай

$$\int\limits_d^K \pi(dy) = c_0, \int\limits_d^K y\pi(dy) = c_1,$$

ціна одного страхового полісу c, тоді сума, отримана від застрахованих на початку періоду страхування, очевидно, рівна cN, нехай u – власний капітал страхової компанії на початок періоду страхування. Припустимо, що сума $cN + u$ покладена на банківський рахунок, наприклад, під складні відсотки з відсотковою ставкою $r > 0$, тоді через час t на банківському рахунку страхової компанії буде сума $(cN + u)(1 + r)^t$, за цей же період страховою компанією за вимогою клієнтів буде виплачена сума (всім клієнтам)

$$\int\limits_0^t \int\limits_d^K (y + \rho\zeta_s)\nu_N(dy, ds)$$

тут ζ_t – поточний капітал страхової компанії на момент часу t, тобто

$$\zeta_t = (cN + u)(1 + r)^t - \int\limits_0^t \int\limits_d^K (y + \rho\zeta_s)\nu_N(dy, ds).$$

Поставимо наступну задачу: *знайти ціну страхового полісу $c > 0$, яка забезпечила б у «середньому» приріст капіталу страхової компанії до кінця строку T.*

Нехай

$$\mu(A, t) = \nu_N(A, t) - N\pi(A)t, \mathbf{E}\nu_N(A, t) = N\pi(A, t)$$

тоді

$$\zeta_t = (cN + u)(1 + r)^t - N \int\limits_0^t \int\limits_d^K (y + \rho\zeta_s)\pi(dy)ds -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_d^K (y + \rho\zeta_s)\mu(dy, ds)$$

Нехай $\varphi_t = \mathbf{E}\zeta_t$, тоді, враховуючи співвідношення

$$\mathbf{E}\int_0^t \int_d^K (y + \rho\zeta_s)\mu(dy, ds) = 0,$$

маємо

$$\varphi_t = (cN+u)(1+r)^t - N\int\limits_0^t \int\limits_d^K (y+\rho\zeta_s)\pi(dy)ds$$

або

$$\varphi_t = (cN+u)(1+r)^t - Nc_1t - N\rho c_0\int\limits_0^t \varphi(s)ds.$$

Тобто

$$\varphi_t' = (cN+u)(1+r)^t\ln(1+r) - Nc_1 - N\rho c_0\varphi(t).$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо

$$\varphi_t = \frac{(cN+u)\ln(1+r)}{N\rho c_0+\ln(1+r)}[(1+r)^t+e^{-N\rho c_0 t}] - \frac{c_1}{\rho c_0}(1+e^{-N\rho c_0 t})+$$

$$+(cN+u)e^{-N\rho c_0 t}.$$

Нехай $t = T$ – кінець періоду страхування, при великих N, тобто при великій кількості застрахованих, середній капітал страхової компанії на кінець періоду страхування T, очевидно, буде еквівалентний величині (при $N\to\infty$)

$$\varphi_T \approx \frac{c\ln(1+r)(1+r)^T}{\rho c_0} - \frac{c_1}{\rho c_0}.$$

Щоб страхова компанія мала до кінця розглядуваного періоду доход (у середньому) потрібно, щоб її середній капітал був більший за початковий – «u» на d. Тому, для знаходження ціни страхового полісу $c>0$ потрібно розв'язати рівняння

$$\frac{c\ln(1+r)(1+r)^T - c_1}{\rho c_0} = u+d,$$

звідки

$$c = \frac{(u+d)\rho c_0 + c_1}{\ln(1+r)(1+r)^T.}$$

Отже,

$$c = \frac{u\rho c_0+c_1}{\ln(1+r)(1+r)^T} + \delta, \delta = \frac{d\rho c_0}{\ln(1+r)(1+r)^T}.$$

де δ – навантаження.

У випадку простих відсотків маємо

$$\zeta_t = (cN+u)(1+rt) - N\int_0^t\int_d^K (y+\rho\zeta_s)\pi(dy)ds-$$

$$-\int_0^t\int_d^K (y+\rho\zeta_s)\mu(dy,ds)$$

звідки, позначивши $\varphi_t = \mathbf{E}\zeta_t$, отримаємо

$$\varphi_t = (cN+u)(1+rt) - Nc_1t - N\rho c_0\int_0^t\int_d^K \varphi_s ds$$

тобто

$$\varphi_t = \frac{r(cN+u)-Nc_1}{N\rho c_0}[1-e^{-N\rho c_0 t}] + (cN+u)e^{-N\rho c_0 t}.$$

При великій кількості застрахованих N, φ_t еквівалентно величині

$$\varphi_t = \frac{rc-c_1}{\rho c_0}$$

Розв'язавши рівняння

$$\varphi_t = u+d,$$

отримаємо

$$c = \frac{u\rho c_0 + c_1}{r} + \delta, \delta = \frac{d\rho c_0}{r},$$

де δ – навантаження.

7.6. Динамічні моделі, що описуються напівмарковськими процесами

Напівмарковський процес $\eta(t)$ в евклідовому просторі R^1 породжується процесом марковського відновлення (ПМВ)

$$\eta_n, \tau_n, n \geq 0.$$

Зробимо пояснення на рахунок змінних: η_n – кількість грошей, якими може користуватися страхова компанія, тобто її капітал; τ_n – час надходження коштів(відшкодувань, компенсацій) до страхової компанії. Випадкові величини τ_n також невідємні з імовірністю 1 – моменти надходження коштів до компанії.

ПМВ визначається стохастичним ядром, яке задає умовні імовірності величини стрибків та функціями розподілу часів перебування в станах

$$Q(u, dv, t) := \mathbf{P}\{\eta_{n+1} \in dv, \theta_{n+1} \le t | \eta_n = u\} = \Gamma(u, dv) F_u(t).$$

$$\Gamma(u, dv) := \mathbf{P}\{\Delta\eta_{n+1} \in dv | \eta_n = u\}, \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n, u \in R^d, dv \in \mathcal{R}^d,$$

$$F_u(t) := \mathbf{P}\{\theta_{n+1} \le t | \eta_n = u\} = P(\theta_u \le t), t \ge 0.$$

Уведемо нормований малим параметром серії $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$ випадковий процес:

$$\zeta^\varepsilon(t) := \varepsilon \eta\left(t/\varepsilon\right); \tag{7.41}$$

Дана сімя випадкових процесів характеризує середню кількість капіталу страхової компанії при швидкому "обороті"грошей, тобто дану модель буде доцільно використовувати, коли кількість людей, що страхуються, дуже велика.

Уведемо позначення:

$$a(u) := \int\limits_{R^d} v\Gamma(u, dv), B(u) := \int_{R^d} v^* v \Gamma(u, dv)$$

$$b(u) := 1/f(u), f(u) := \int\limits_0^\infty \bar{F}_u(t) dt, \bar{F}_u(t) := 1 - F_u(t).$$

Теорема 7.7. *Нехай виконуються наступні умови:*

У1: $\int\limits_{R^d} |v| \Gamma(u, dv) = c_1 < \infty$;

У2: $\|B(u)\| = c_2 < \infty$.

У3: *Рівномірна інтегровність*

$$\sup_{u \in R^d} \int_T^\infty \overline{F}_u(t) dt \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

У4: *Для будь-якого* $u \in R^d$, *та* $\varepsilon > 0$ $\exists C > 0$ *таке, що*

$$Ee^{-\varepsilon\theta_u} \leq 1 - C\varepsilon.$$

У5: *Має місце збіжність початкових умов*

$$\eta^\varepsilon(0) \to \eta(0) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

та

$$\sup_{\varepsilon>0} E|\eta^\varepsilon(0)| \leq C < +\infty.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta^0(t), \varepsilon \to 0,$$

де $\zeta^0(t)$ *розвязок диференціального рівняння*

$$d\zeta^0(t)/dt = C\left(\zeta^0(t)\right),$$

де $C(u) = a(u)b(u)$.

Зауваження. Очевидний факт, що граничний процес має визначатися середньою величиною стрибків, поділеною на середній час між стрибками. Тому, отримане значення функції $C(u)$ – природнє.

Доведення. Доведення проведемо в декілька етапів.

Означення 1. [?, 19] Компенсуючий оператор НМП $\zeta^\varepsilon(t), t \geq 0$, він же генератор супроводжуючого марковського процесу (СМП) $\zeta_0^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, що діє на тест-функціях $\varphi(u,t)$, визначається рівністю

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u,t) := E\left[\varphi(\zeta_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u,t)\ |\zeta_n^\varepsilon = u, \tau_n^\varepsilon = t\right]/E[\theta_{n+1}^\varepsilon|\zeta_n^\varepsilon = u]. \tag{7.42}$$

Лема 7.3. *КО має вигляд*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u,t) = \varepsilon^{-1}b(u)\int_0^\infty F_u(ds)\int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+\varepsilon v, t+\varepsilon s) - \varphi(u,t)\right]\Gamma(u,dv). \tag{7.43}$$

Доведення. Справді,

$$\zeta_{n+1}^\varepsilon - \zeta_n^\varepsilon = \varepsilon(\eta_{n+1} - \eta_n) =: \varepsilon\Delta\eta_{n+1};\ \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n.$$

Отже,

$$b^\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1} b(u).$$

Тоді обчислюємо

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u,t) = E\left[\varphi(\zeta^\varepsilon_{n+1}, \tau^\varepsilon_{n+1}) - \varphi(u,t) \;|\zeta^\varepsilon_n = u, \tau^\varepsilon_n = t\right] / E[\theta^\varepsilon_{n+1} | \zeta^\varepsilon_n = u] =$$

$$E\left[\varphi(\zeta^\varepsilon_n + \Delta\zeta^\varepsilon_{n+1}, t + \varepsilon\theta_{n+1}) - \varphi(u,t) \;|\zeta^\varepsilon_n = u\right] / E[\varepsilon\theta_{n+1} | \zeta^\varepsilon_n = u] =$$

$$\varepsilon^{-1} b(u) \int_0^\infty F_u(ds) \int\limits_{R^d} \left[\varphi(u + \varepsilon v, t + \varepsilon s) - \varphi(u,t)\right] \Gamma(u, dv).$$

Лема 7.3 доведена.

Лема 7.4. Асимптотичне представлення КО. *На тест-функціях $\varphi(u)$, що мають обмежені похідні будь-якого порядку, КО має асимптотичне представлення*

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \Gamma^0 \varphi(u) + R^\varepsilon \varphi(u),$$

де Γ^0 задається співвідношенням

$$\Gamma^0 \varphi(u) = c(u) \varphi'(u), \tag{7.44}$$

та

$$|R^\varepsilon \varphi(u)| \to 0, \varepsilon \to 0, \varphi(u) \in C^3(R^d). \tag{7.45}$$

Доведення.

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} b(u) \int\limits_{R^d} \left[\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)\right] \Gamma(u, dv) =$$

$$\varepsilon^{-1} b(u) \int\limits_{R^d} \left[\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) \pm \varepsilon v \varphi'(u)\right] \Gamma(u, dv) =$$

$$b(u) \varphi'(u) \int\limits_{R^d} v \Gamma(u, dv) +$$

$$\frac{b(u)}{\varepsilon}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u)-\varepsilon v\varphi'(u)]\,\Gamma(u,dv)$$

$$\Gamma^0\varphi(u)+R^\varepsilon\varphi(u),$$

де Γ^0 визначається (7.44). Доведемо (7.45)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|R^\varepsilon\varphi(u)|\le\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{b(u)}{\varepsilon}\int\limits_{R^d}|\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u)-\varepsilon v\varphi'(u)|\,\Gamma(u,dv)\le$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}b(u)\sup_{u\in R^d}|\varphi''(u)|\varepsilon B(u)=0.$$

Лема 7.4 доведена.

Доведемо компактність процесів $\zeta^\varepsilon(t),\varepsilon\to 0,\varepsilon>0$.

Лема 7.5.

$$|\Gamma^\varepsilon\varphi(u)|\le C_\varphi \tag{7.46}$$

для тест-функцій $\varphi(u)\in C_0^2(R^d)$ простору фінітних обмежених неперервних функцій, що мають обмежені похідні до порядку 2 включно.

Доведення. Скористаємось результатом леми 2:

$$|\Gamma^\varepsilon\varphi(u)|=|\Gamma^0\varphi(u)+R^\varepsilon\varphi(u)|\le|\Gamma^0\varphi(u)|+|R^\varepsilon\varphi(u)|\le$$

$$|b(u)|\sup_{u\in R^d}|\varphi'(u)|\int\limits_{R^d}|v|\Gamma(u,dv)+$$

$$\left|b(u)\sup_{u\in R^d}|\varphi''(u)|\varepsilon B(u)\right|.$$

За означенням функції φ маємо, що $\sup\limits_{u\in R^d}|\varphi'(u)|<K_1<\infty$, $\sup\limits_{u\in R^d}|\varphi''(u)|<K_2<\infty$. Для доведення леми залишилося довести, що $|b(u)|<c<\infty$.

Скористаємось умовою У4. З

$$Ee^{\varepsilon\theta_u}\le 1-C\varepsilon$$

випливає:

$$f(u) \geq \delta > 0, \forall u \in R^d.$$

Дане твердження, за означенням $b(u)$, еквівалентне ось чому:

$$b(u) \leq 1/\delta = c < \infty.$$

Насправді аналогічними міркуваннями можна довести сильніший факт:

$$\sup_{u \in R^d} |b(u)| < c < \infty.$$

Для цього лише зазначимо, що він рівносильний такому:

$$\inf_{u \in R^d} f(u) > \delta > 0.$$

Тоді

$$|\Gamma^\varepsilon \varphi(u)| \leq c \left(K_1 c_1 + \varepsilon K_2 c_2\right),$$

де сталі K_1, K_2 – залежні від φ.

Лема 7.5 доведена.

Лема 7.6. *Нехай сім'я моментів відновлення $\theta_u, u \in R^d$, що мають функції розподілу F_u, задовольняє умови* ***У3***, ***У4***.

Тоді має місце таке співвідношення

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \gamma^\varepsilon(t) \geq \delta\right) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

для будь-яких $\delta > 0$ та $T > 0$, де $\gamma^\varepsilon(t) := t - \tau^\varepsilon(t)$.

Лема 7.7. $\zeta^\varepsilon(t), t \geq 0, \varepsilon > 0$ – *відносно компактна сім'я.*

Доведення. Умови відносної компактності сім'ї ζ^ε згідно з теоремою 1.2 [11] такі: умова субмартингальності $\xi^\varepsilon(t) := \varphi(\zeta^\varepsilon(t)) + C_\varphi t$ для невід'ємної фінітної нескінченно диференційовної φ та деякої константи $C_\varphi \geq 0$ і нерівність (7.46).

Доведемо, що випадковий процес $\xi^\varepsilon(t)$ є невід'ємним субмартингалом відносно потоку σ - алгебр $\Im_t^\varepsilon := \sigma\left(\tau_+^\varepsilon(s), s \leq t\right)$, де $\tau_+^\varepsilon(t) = \tau^\varepsilon(t) + 1$:

$$E\left[\xi^\varepsilon(t) - \xi^\varepsilon(s) | \Im_s^\varepsilon\right] = E\left[\varphi(\zeta^\varepsilon(t)) - \varphi(\zeta^\varepsilon(s)) | \Im_s^\varepsilon\right] + C_\varphi(t - s) =$$

$$E\left[\int_s^t \Gamma^\varepsilon\varphi(\zeta^\varepsilon(u))du|\Im_s^\varepsilon\right]+C_\varphi(t-s)=E\left[\int_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)}(\Gamma^\varepsilon\varphi(\zeta^\varepsilon(u))+C_\varphi)du|\Im_s^\varepsilon\right]+$$

$$E\left[\left(\int_s^{\tau_+^\varepsilon(s)}+\int_{\tau_+^\varepsilon(t)}^t\right)\Gamma^\varepsilon\varphi(\zeta^\varepsilon(u))du|\Im_s^\varepsilon\right]+C(t-\tau_+^\varepsilon(t)-s+\tau_+^\varepsilon(s)).$$

За лемою 4 два останні доданки прямують до 0 при $\varepsilon\to 0$. За лемою 3

$$E\left[\int_{\tau_+^\varepsilon(s)}^{\tau_+^\varepsilon(t)}(\Gamma^\varepsilon\varphi(\zeta^\varepsilon(u))+C_\varphi)du|\Im_s^\varepsilon\right]\ge 0.$$

Вимірність процесу $\xi^\varepsilon(t)$ відносно потоку $\Im_t^\varepsilon$ очевидна.
Отже, $(\xi^\varepsilon(t),\Im_t^\varepsilon)$ – невідємний субмартингал.
Лема 7.7 доведена.

Лема 7.8. *За умов теореми зі збіжності*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi\to\Gamma^0\varphi$$

випливає слабка збіжність

$$\zeta^\varepsilon(t)\Rightarrow\zeta^0(t).$$

Доведення. Нехай $\varphi\in C^2(R^d)$ – фінітна обмежена функція. Тоді, використовуючи представлення напівмарівського процесу, отримаємо

$$|\varphi(\zeta^\varepsilon(t))-\varphi(\zeta^0(t))|\le$$

$$|\varphi(\zeta^\varepsilon(0))-\varphi(\zeta^0(0))|+\left|\int_0^t\left(\Gamma^\varepsilon(\varphi(\zeta^\varepsilon(s)))-\Gamma^0(\varphi(\zeta^0(s)))\right)ds\right|\le$$

$$|\varphi(\zeta^\varepsilon(0))-\varphi(\zeta^0(0))|\exp\left\{\int_0^t\left|\Gamma^\varepsilon(\varphi(\zeta^\varepsilon(s)))-\Gamma^0(\varphi(\zeta^0(s)))\right|ds\right\}\le$$

$$|\varphi(\zeta^\varepsilon(0))-\varphi(\zeta^0(0))|e^{2C_\varphi t}.$$

Тут використано лему 3 та нерівість Белмана. На основі У5 отримаємо, що

$$|\varphi(\zeta^{\varepsilon}(0)) - \varphi(\zeta^{0}(0))| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Тоді

$$|\varphi(\zeta^{\varepsilon}(t)) - \varphi(\zeta^{0}(t))| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

рівномірно по $t \in [0, T]$ для $\forall T < \infty$.

Лема 7.8 доведена.

Теорема доведена.

7.7. Модельні задачі до розділу 7

Модельна задача 7.3. *Відносно динаміки активів страхової компанії відомо, що:*

1) *розміри страхових повернень взаємно незалежні і рівномірно розподілені на проміжку (0, 10);*
2) *в кожен момент часу 1, 2, 3,... відбувається з точністю один страховий випадок;*
3) *в інші моменти страхові випадки не відбуваються;*
4) *відносна захисна надбавка рівна 0.2;*
5) *премії сплачуються неперервно;*
6) *початкові активи рівні 1,*

Обчислити ймовірність банкрутства в момент 2.

(A) 0.05; (B) 0.06; (C) 0.07; (D) 0.08; (E) 0.09.

Розв'язання. Кожну одиницю часу відбувається рівно один страховий випадок і страхове повернення рівне у середньому 5. Тому в одиницю часу повинна відбуватися нетто-премія 5. Оскільки відносна захисна надбавка рівна 0.2, загальний збір премії в одиницю часу повинен бути $1.2 \times 5 = 6$.

До моменту 1 активи компанії будуть рівні 1+6=7. Оскільки компанія не повинна у цей час збанкрутіти, страхові повернення Y_1 по одному страховому випадку, який відбувся у момент 1, не повинна перебільшувати 7:

$$Y_1 \leq 7.$$

Після виплати цього страхового повернення активи компанії будуть рівні $7 - Y_1$ і до моменту 2 вони зростять до величини $7 - Y_1 + 6 = 13 - Y_1$. У цей момент настане наступний страховий випадок і компанія повинна буде виплатити страхову виплату величиною Y_2. Компанія збанкрутіє у момент 2, якщо розмір цієї страхової виплати більший, ніж активи компанії:

$$Y_2 > 13 - Y_1.$$

Отже шукана величина $\Re$ рівна

$$P(Y_1 \leq 7, Y_2 > 13 - Y_1).$$

Оскільки випадкові величини Y_1, Y_2 незалежні і рівномірно розподілені на проміжку (0, 10), точка (Y_1, Y_2) рівномірно розподілені на квадраті

$$K = \{(x, y)\,|0 < x, y < 10\}.$$

Шукана ймовірність розглядається як ймовірнісь попадання випадкової точки (Y_1, Y_2) в область

$$D = \{(x, y)\,|0 < x \leq 7, y > 13 - x\}.$$

Тому $\Re$ рівна відношенню площ D і K. Площа квадрата K очевидно рівна 100. Область D, як легко бачити є рівнобедреним прямокутним трикутником з катетами 4, тому іі площа рівна 8. Отже, $\Re = 0.08$, тобто правильним є варіант (D).

Модельна задача 7.4. *Страхова компанія почала операції у момент 0 з початковими активами 3. На початку кожного року вона збирає премії у розмірі 2 і на протязі року виплачує страхові внески, загальний розмір яких за рік має розподіл, який задається у наступній таблиці. Розміри виплат за різні роки є незалежними випадковими величинами.*

(1)	*Активи у кінці попереднього року*		*0.5856*	
(2)	*Ймовірність*		*0.09*	
(3)	*Річна премія*		*2*	
(4)	*Активи на початку року: (4)=(1)+(3)*		*2.5856*	
(5)	*Виплати за рік*	*0*	*3*	*8*
(6)	*Ймовірність*	*0.6*	*0.3*	*0.1*
(7)	*Активи у кінці року: (7)=(4)*(1+i)-(5)*	*2.79448*	*-0.207552*	*-5.207552*
(8)	*Ймовірність: (6)=(2)*(6)*	*0.054*	*0.027*	*0.009*

Сума	*Ймовірність*
0	*0.15*
4	*0.25*
2	*0.40*
4	*0.2*

Розв'язання. Нехай u_n – активи компанії у кінці n-го року, S_n – розмір страхових виплат, які повинні бути сплачені на протязі n-го року. При цьому будем вважати, що якщо $u_{n-1} + 2 \leq S_n$ (тобто компанія збанкрутіє на протязі n-го року), то $u_n = u_{n+1} = \ldots = 0$.

При зроблених припущення послідовність випадкових величин u_n утворює ланцюг Маркова з фазовим простором $\{0, 1, 2, 3\}$ (0 – поглинаючий стан) і наступною матрицею перехода:

$$P = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.15 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{array} 0 \right)$$

Справді,

1) якщо $u_n = 0$, то в силу зробленого припущення на наступному $(n+1)$-му кроці стан не зміниться. Інакше кажучи, умови розподілу u_{n+1} при умові, що $u_n = 0$, тоюто перший рядок матриці P, якщо

$$P\left(u_{n+1} = 0 \,|u_n = 0\right) = 1,$$

$$P\left(u_{n+1} = 1 \,|u_n = 0\right) = 0,$$
$$P\left(u_{n+1} = 2 \,|u_n = 0\right) = 0,$$
$$P\left(u_{n+1} = 3 \,|u_n = 0\right) = 0,$$

2) якщо $u_n = 1$, то (за рахунок зібраних премій) у момент $n + 0$ активи збільшаться до величини 3 (тут символом $n + 0$ ми підкреслюємо ту ситуацію, що активи у момент n враховують премії, які надійшли в момент n).

   Якщо втрати на протязі $(n + 1)$-го року рівні 4 (ймовірність цієї події рівна 0.2), то страхувальник не зможе виплатити страхові виплати і збанкрутіє, тобто $u_{n+1} = 0$.

   Якщо втрати на протязі $(n + 1)$-го року рівні 0, 1 або 2 (ймовірність цієї події рівна 0.15, 0.25 або 0.4 відповідно), то в кінці $(n+1)$ - го року активи будуть рівні 3, 2 або 1 відповідно. В іншому випадку дивіденди не виплачуються, тому $u_{n+1} = 3$, 2 або 1 відповідно. Отже, умовний розподіл u_{n+1} при умові, що $u_n = 1$, тобто другий рядок матриці P, є

$$P\left(u_{n+1} = 0\,|u_n = 1\right) = 0.2,$$

$$P\left(u_{n+1} = 1\,|u_n = 1\right) = 0.4,$$

$$P\left(u_{n+1} = 2\,|u_n = 1\right) = 0.25,$$

$$P\left(u_{n+1} = 3\,|u_n = 1\right) = 0.15,$$

3) якщо $u_n = 2$, то (за рахунок зібраних премій) у момент $n + 0$ активи збільшаться до величини 4.

   Якщо втрати на протязі $(n+1)$ - го року рівні 4 (ймовірність цієї події рівна 0.2) , то страхувальник виплатить страхові виплати, але його активи зменшаться до величини 0, що означає, що $u_{n+1} = 0$.

   Якщо втрати на протязі $(n + 1)$- го року рівні 0, 1, або 2 (ймовірність цієї події рівна 0.15, 0.25 або 0.4 відповідно), то в кінці $(n + 1)$ - го року активи будуть 4, 3 або 2 відповідно. У першому випадку будуть виплачені дивіденди у розмірі 1 і активи зменшаться до 3. Отже, умовний розподіл u_{n+1} при умові, що $u_n = 2$, тобто третій рядок матриці P, є

$$P\left(u_{n+1} = 0\,|u_n = 2\right) = 0.2,$$

$$P\left(u_{n+1} = 1\,|u_n = 2\right) = 0,$$

$$P\left(u_{n+1} = 2\,|u_n = 2\right) = 0.4,$$

$$P\left(u_{n+1} = 3\,|u_n = 2\right) = 0.4.$$

4) якщо $u_n = 3$, то (за рахунок зібраних премій) в момент $n + 0$ активи компанії збільшаться до величини 5. Оскільки максимальна страхова виплата рівна 4, в цьому випадку банкрутство неможливе, тобто

$$P\left(u_{n+1} = 0\,|u_n = 3\right) = 0.$$

Якщо втрати на протязі $(n+1)$ - го року рівні 0, 1, 2 або 4 (ймовірність цієї події рівна 0.15, 0.25, 0.4 або 0.2 відповідно), то в кінці $(n+1)$ - го року активи будуть рівні 5, 4, 3 або 1 відповідно. В першому і другому випадках будуть виплачені дивіденди у розмірі 2 або 1 відповідно і активи зменшаться до величини 3.

Отже, умовний розподіл u_{n+1} при умові, що $u_n = 3$, тобто четвертий рядок матриці P, є

$$P\left(u_{n+1} = 0\,|u_n = 3\right) = 0,$$

$$P\left(u_{n+1}=1\,|u_n=3\right)=0.2,$$

$$P\left(u_{n+1}=2\,|u_n=3\right)=0,$$

$$P\left(u_{n+1}=3\,|u_n=3\right)=0.15+0.25+0.4=0.8$$

Початковий розподіл ланцюга u_n є:

$$p_0=0,p_1=0,p_2=0,p_3=1$$

Розподіл станів ланцюга у момент 3 може бути отримано множенням вектора $\pi_0=(0,0,0,1)$, утвореного із початкового розподілу, на матрицю P^3. Технічно зручно послідовно знаходити вектори $\pi_1=\pi_0\times P$, $\pi_2=\pi_1\times P$:

$$\pi_1=(0,0,0,1)\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0.2&0.4&0.25&0.15\\0.2&0&0.4&0.4\\0&0.2&0&0.8\end{pmatrix}=(0,0.2,0,0.8)$$

$$\pi_2=(0,0.2,0,0.8)\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0.2&0.4&0.25&0.15\\0.2&0&0.4&0.4\\0&0.2&0&0.8\end{pmatrix}=(0.04,0.24,0.05,0.67)$$

$$\pi_3=(0.4,0.24,0.05,.067)\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0.2&0.4&0.25&0.15\\0.2&0&0.4&0.4\\0&0.2&0&0.8\end{pmatrix}=$$
$$=(0.098,0.230,0.08,0.592)$$

Страхова компанія не збанкрутіє на протязі трьох перших років, якщо $u_3>0$. Ймовірність такої події рівна

$$0.23+0.08+0.592=0.902.$$

Модельна задача 7.5. *Визначити ймовірність банкрутства $R(u)$, якщо величина індивідуальних втрат має експоненціальний розподіл.*

Розв'язання. Претворення Лапласа показникового розподілу з середнім m дається формулою:

$$\varphi(s)=\frac{1}{1+ms}.$$

Тому загальне рівняння для перетворення Лапласа ймовірності банкрутства набуде вигляду

$$\rho(s) = \frac{m}{\theta + (1+\theta)ms} = \frac{m}{\theta} \frac{\frac{\theta}{(1+\theta)m}}{\frac{\theta}{(1+\theta)} + s}.$$

Оскільки дріб вигляду $\frac{a}{a+s}$ є перетворенням Лапласа експоненціальної щільності ae^{-au}, звідси перетворенням перетворення Лапласа ми отримаєм кінцевий результат:

$$\begin{array}{l} R(u) = \frac{m}{\theta} \times \frac{\theta}{(1+\theta)m} \times \exp\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right) = \\ = \frac{1}{1+\theta} \times \exp\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right) \end{array}.$$

Модельна задача 7.6. *Для динамічної моделі банкрутства, яка описується пуассоновим розподілом, відомо:*

1) *очікуване число страхових випадків до моменту t рівне 5t, t>0;*
2) *всі виплати мають постійну величину k;*
3) *швидкість надходження премій рівна 50;*
4) *характеристичний коефіцієнт рівний 0.85.*

Визначте k.
(A) 2.6; (B) 2.8; (C) 3.0; (D) 3.2; (E) 3.4.

Розв'язання. В даній ситуації випадкові величини Y_i, які описують розмір індивідуальних втрат, є детермінованими, так, що $\psi(z) \equiv \mathbf{E}e^{zY_i} = e^{kz}$. Крім того, оскільки $\lambda = 5$, $c = 50$, $m = k$, відносна захисна надбавка є:

$$\theta = \frac{50 - 5k}{5k} = \frac{10}{k} - 1.$$

Тому характеристичне рівняння у даній ситуації має наступний вигляд:

$$e^{kz} = 1 + 10z.$$

Оскільки $z = r = 0.85$ для цього рівняння, то

$$e^{0.85k} = 9.5,$$

звідки

$$k = \frac{\ln 9.5}{0.85} \approx 2.64858,$$

і тому правильним є варіант (A).

Модельна задача 7.7. *Розв'яжемо інтегро-диференціальне рівняння (7.9) у тому випадку, коли виплати Y_k розподілені за показниковим законом з математичним сподіванням μ.*

Тоді

$$F'(z)=\frac{1}{\mu}e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)}.$$

При $z>0$, і ми матимемо

$$\varphi'(u)=\frac{\alpha}{c}\varphi(u)-\frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u\varphi(u-z)\,e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)}dz.$$

Обчислюючи похідну від обох частин рівняння, матимемо

$$\varphi''(u)=\frac{\alpha}{c}\varphi'(u)-\frac{\alpha}{c\mu}\varphi(0)\,e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)}-\frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u\varphi'(u-z)\,e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)}dz=$$

$$=\frac{\alpha}{c}\varphi'(u)-\frac{\alpha}{c\mu}\varphi(0)\,e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)}+\frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)}d\varphi(u-z)=$$

$$=\frac{\alpha}{c}\varphi'(u)-\frac{\alpha}{c\mu}\varphi(0)\,e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)}+\frac{\alpha}{c\mu}\varphi(0)\,e^{-\left(\frac{u}{\mu}\right)}-\frac{\alpha}{c\mu}\varphi(u)+\frac{\alpha}{c\mu^2}\int_0^u\varphi(u-z)\,e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)}dz=$$

$$=\frac{\alpha}{c}\varphi'(u)-\frac{1}{\mu}\left[\frac{\alpha}{c}\varphi(u)+\frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u\varphi(u-z)\,e^{-\left(\frac{z}{\mu}\right)}dz\right]=\frac{\alpha}{c}\varphi'(u)-\frac{1}{\mu}\varphi'(u)=$$

$$=-\left(\frac{c-\alpha\mu}{c\mu}\right)\varphi'(u)=-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}\varphi'(u),$$

де $\rho=\left(\frac{c-\alpha\mu}{\alpha\mu}\right)=\frac{\alpha}{c\mu}-1.$

Розв'язуючи диференціальне рівняння

$$\varphi''=-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}\varphi'(u),$$

матимемо $\varphi(u)=C_1-C_2e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}}$.

Якщо $c>\alpha\mu$, то $\rho>0$, $\varphi(+\infty)=1$ і $\varphi(0)=1-\frac{\alpha\mu}{c}=1-\frac{1}{1+\rho}=\frac{\rho}{1+\rho}$. Тому $\varphi(u)=1-\frac{1}{1+\rho}e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}}$.

Модельна задача 7.8. *Припустимо виплати Y_k розподілені за показниковим законом з математичним сподіванням μ.* Тоді

$$h(r)=\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}e^{rz}e^{-\frac{z}{\mu}}dz-1=\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}e^{-z\left(\frac{1}{\mu}-r\right)}dz-1=\frac{1}{\left(\frac{1}{\mu}-r\right)\mu}-1=\frac{\mu r}{1-\mu r},$$

якщо $r < \frac{1}{\mu}$ (при $r \geq \frac{1}{\mu}$ інтеграл розбігається). Отже, $r_\infty = \frac{1}{\mu}$.

Рівняння має місце співвідношення

$$\frac{\mu r}{1 - \mu r} = \frac{c}{\alpha} r,$$

звідки $R = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)}$.

Тому

$$h'(R) = \frac{\mu}{(1 - \mu R)^2} = \mu (1 + \rho)^2,$$

і

$$\frac{\rho\mu}{h'(R) - \frac{c}{\alpha}} = \frac{\rho\mu}{\mu(1+\rho)^2 - \frac{c}{\alpha}} = \frac{\rho}{(1+\rho)^2 - (1+\rho)} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Згідно з теоремою Крамера-Лундберга при $u \to +\infty$

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}}.$$

Зауважимо, що згідно з модельною задачею 7.7

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{\mu(1+\rho)}},$$

тобто у випадку показникового розподілу апроксимація Крамера-Лундберга є точною.

7.8. Вправи до розділу 7

1) Про динаміку активів страхової компанії відомо, що:

   а) розміри страхових компенсацій взаємно незалежні і рівномірно розподілені на проміжку (0, 10);

   б) у кожен момент часу 1, 2, 3,... відбувається з точністю один страховий випадок;

   в) в інші моменти страхові випадки не відбуваються;

   г) відносна захисна надбавка дорівнює 0.2;

   д) премії сплачуються неперервно;

   е) початкові активи дорівнює 1.

   Обчисліть імовірність банкрутства в момент 2.

2) Визначте ймовірність банкрутства $R(u)$, якщо величина індивідуальних втрат має експоненціальний розподіл.

3) Для динамічної моделі банкрутства, яка описується пуассоновим розподілом, відомо, що:

   а) очікуване число страхових випадків до моменту t рівне 5t, t>0;
   б) всі виплати мають постійну величину k;
   в) швидкість надходження премій рівна 50;
   г) характеристичний коефіцієнт рівний 0.85.

   Визначте *k*.

4) Для страхової компанії з початковими активами 2 сумарні річні виплати S мають наступний розподіл:

$$P(S=0)=0.6,\ P(S=3)=0.3,\ P(S=8)=0.1$$

   та

   а) страхові випадки виплачуються в кінці року;
   б) на початку кожного року збирається премія 2.

   Обчисліть імовірність того, що страхова компанія не збанкрутує в кінці третього року.

5) Визначте характеристичний коефіцієнт, якщо розподіл індивідуальних втрат є експоненціальним з середнім m.

6) Визначте характеристичний коефіцієнт, якщо величина індивідуальних втрат рівномірно розподілена на $[0, 2m]$

7) Процес динаміки активів страхувальника описується пуассоновим процесом з експоненціальним розподілом страхових виплат. Премії надходять неперервно зі швидкістю 5. Крім того, відомо, що:

   а) ймовірність банкрутства при початкових активах *u*=50 дорівнює 1%.
   б) відносна захисна надбавка дорівнює 25%.

   Обчисліть середнє число страхових випадків за одиницю часу.

8) Щоб застрахувати одне підприємство, організована одна спеціальна страхова компанія. Ризик полягає в єдиному можливому страховому випадку. Відомо, що:

   а) величина втрати має такий розподіл:

Сума	Ймовірність
100	0.6
200	0.4

   б) імовірність того, що страховий випадок не відбудеться до моменту t, дорівнює $1/(1+t)$;

   в) активи компанії в момент t задаються формулою $U(t) = 60 = 20t - S(t)$, де $S(t)$- сумарні виплати до моменту ;

   г) страхові виплати виплачуються миттєво.

   Обчисліть ймовірність банкрутства страхової компанії.

Розділ 8.

Аналіз ризиків за допомогою моделювання на ЕОМ

8.1. Моделювання дискретних випадкових величин

Розглянемо приклад страхування життя на 1 рік, коли страхова компанія платить певну суму b_1 грн. у випадку загибелі застрахованого протягом року від нещасного випадку (нехай $q^{(1)}$ – імовірність цієї події) і суму b_2 грн. у випадку смерті застрахованого протягом року від природних причин (нехай $q^{(2)}$ – імовірність цієї події). Компанія не платить нічого, якщо застрахований доживе до кінця року (ймовірність цієї події дорівнює $p = 1 - q^{(1)} - q^{(2)}$). Отже, індивідуальний позов X, породжений таким договором, набуває три значення: $0,\ b_1$ та b_2 з імовірностями $p,\ q^{(1)}$ та $q^{(2)}$ відповідно.

Щоб змоделювати величину цього позову, розіб'ємо відрізок [0,1] на три частини:

$$\Delta_0 = [0, p)\,, \Delta_1 = \left[p, p + q^{(1)}\right)\,, \Delta_2 = \left[p + q^{(1)}, 1\right)$$

довжиною p, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, і згенеруємо рівномірно розподілену величину Z.

Знайдемо нову випадкову величину Y, прирустивши, що

$$Y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } Z \in \Delta_0; \\ b_1 \text{ якщо } Z \in \Delta_1; \\ b_2, \text{ якщо } Z \in \Delta_2. \end{cases}$$

$P\,(Y = b_1) = q^{(1)},\ P\,(Y = b_2) = q^{(2)}$. Отже, величина Y має той же розподіл, що й величина X, тобто може розглядатися як її стохастична копія.

Припустимо, що випадкова величина X приймає довільне число дискретних значень $b_0, b_1, b_2...$ з певними вірогідностями $p_0, p_1, p_2,...$. Розіб'ємо відрізок [0,1] на частини

$$\Delta_0 = [0, p_0)\,,\ \Delta_1 = [p_0, p_0 + p_1)\,, ..., \Delta_n = [p_. + ...p_{n-1}, p_0 + ...p_n)\,, ...$$

довжиною $p_0, p_1, ..., p_n$, ... відповідно й згенеруємо рівномірно розподілену випадкову величину *Z*.

Визначимо нову величину *Y*, припустивши, що $Y = b_i$, якщо$Z \in \Delta_i$, тобто

$$p_0 + ... + p_{i-1} \leq Z < p_0 + ... + p_i.$$

Ця величина набуває дискретні значення $b_0, b_1, ..., b_n$, ... Оскільки подія $\{Y = b_i\}$ рівносильна події $\{Z \in \Delta_i\}$, його ймовірність дорівнює довжині проміжку Δ_i, тобто p_i.

Отже, можемо розглядати побудовану у цей спосіб випадкову величину *Y* як реалізацію випадкової величини *X*.

Великий інтерес представляють два види розподілів: пуассоновий та від'ємно-біномінальний.

Розглянемо пуассонову випадкову величину ν з параметром λ. Як відомо,

$$P(\nu = i) = \pi_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Імовірності π_i зручно обчислювати за рекурентною формулою:

$$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot \frac{\lambda}{i}, \quad i \geq 1,$$

з початковою умовою

$$\pi_0 = e^{-\lambda}.$$

Ця рекурентна формула дозволяє легко змоделювати пуассонову випадкову величину на ЕОМ.

Нехай тепер ν має від'ємно- біноміальний розподіл з параметрами *p* і α, тобто

$$P(\nu = i) = \pi_i = \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot ... \cdot (\alpha + i - 1)}{i!} p^\alpha q^i.$$

Імовірності π_i зручно обчислювати за рекурентною формулою:

$$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot \frac{\alpha + i - 1}{i} \cdot q, \ \ i \geq 1,$$

з початковою умовою

$$\pi_0 = p^\alpha.$$

8.1.1. Моделювання неперервних випадкових величин

Нехай $F(x)$ – неперервна функція, що монотонно зростає, розподілена так, що на проміжку $0 < y < 1$ визначена обернена функція $x = F^{-1}(y)$. Тоді випадкова величина $F^{-1}(Z)$, де Z – випадкова величина, рівномірно розподілена на [0, 1] і має розподіл $F(x)$. Справді,

$$\mathbf{P}\left\{F^{-1}(Z) \le x\right\} = \mathbf{P}\left\{Z \le F(x)\right\} = F(x).$$

Обернена функція F^{-1} може бути точно підрахована для більшості неперервних розподілів, тобто відповідні випадкові величини часто моделюються простими операторами. Розглянемо декілька конкретних прикладів.

Експоненціальний розподіл

Функція розподілу експоненціальної випадкової величини задається формулою $y = 1 - e^{-\lambda x}$. Оберненою функцією є $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$. Тому випадкова величина $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-Z)$, де Z – рівномірно розподілена на [0, 1] має експоненціальний розподіл з параметром λ. Оскільки величина $-Z$ також рівномірно розподілена на [0, 1], експоненціально розподілену випадкову величину можна одержати за формулою $-\frac{1}{\lambda}\ln(Z)$.

Розподіл Парето

Функція розподілу випадкової величини, яка має розподіл Парето з параметрами λ й α, задається формулою

$$y = F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha}.$$

Оберненою функцією є:

$$x = F^{-1}(y) = \lambda \cdot (1-y)^{-1/\alpha} - \lambda.$$

Тому випадкова величина

$$\lambda \cdot (1-Z)^{-1/\alpha} - \lambda,$$

де Z – випадкова величина, рівномірно розподілена на [0, 1], має розподіл Парето з параметрами λ й α. Оскільки величина $-Z$ також рівномірно розподілена на [0, 1], можна використати більш просте перетворення:

$$\lambda \cdot Z^{-1/\alpha} - \lambda.$$

8.2. Аналіз моделей індивідуального та колективного ризику

Моделі індивідального ризику

Якщо задане число договорів страхування N і розподіл випадкових величин $X_1, ..., X_N$, які описують індивідуальні позови від договорів, то можемо змоделювати ці величини і тим змоделювати величину сумарного позову компанії $S = X_1 + ... + X_N$. Якщо фіксована величина резервного фонду u, то з кожним окремим циклом моделювання сукупності позовів пов'язана випадкова величина , яка дорівнює 1 або 0 відповідно до того, що $S > u$ або $S \leq u$.

Проведемо велике число K циклів моделювання. Вони приведуть до певних значень $p_1, p_2, ..., p_K$ індикатора події "компанія збанкрутувала". Для кожної з випадкових нелнчин p_i маємо:

$$\mathbf{E}p_i = \mathbf{P}\left(p_i = 1\right) = R,$$

$$\mathbf{Var}p_i = \mathbf{P}\left(p_i = 1\right) \cdot \mathbf{P}\left(p_i = 0\right) = R\left(1 - R\right).$$

Тому сумарне число "успіхів"$p_1 + ... + p_K$ має середнє $K \cdot \mathbf{E}p = KR$ і дисперсію $K \cdot \mathbf{Var}p = KR\left(1 - R\right)$. Відповідно середнє арифметичне $\overline{R} = \left(p_1 + ... + p_K\right)/K$ має математичне очікування R і дисперсію $R\left(1 - R\right)/K$. При великих значеннях K дисперсія буде мала. Тому випадкова величина R буде мало відрізнятися від свого середнього значення R і, виходить, $\overline{R}$ можемо розглядати як наближене значення невідомої ймовірності банкрутства R.

Моделі колективного ризику

Якщо заданий розподіл π_i кількості позовів ν і розподіл $F(x)$ величин заявлених позовів $Y_1, Y_2, \ldots$, тоді можна змоделювати ці величини і тим змоделювати величину сумарного позову компанії $S = Y_1 + \ldots + Y_\nu$. Якщо фіксована величина резервного фонду u, то з кожним окремим циклом моделювання пов'язана випадкова величина , яка дорівнює 1 або 0.

Знову ж таки проведемо велике число K циклів моделювання. Вони приведуть до певних значень $p_1, p_2, ..., p_{\underline{K}}$ індикатора події "компанія збанкрутувала". Тоді середнє арифметичне $\overline{R} = \left(p_1 + ... + p_K\right)/K$ може бути прийнято в якості оцінки шуканої ймовірності банкрутства.

8.3. Приклади

8.3.1. Модель індивідуального ризику

Припустимо, що портфель складається з чотирьох однакових договорів страхування життя, які враховують смерть від нещасного випадку: якщо смерть застрахованого наступила від нещасного випадку, то його спадкоємцям виплачується 500000 грн; у випадку смерті від "природних" причин страхова виплата дорівнює 250000 грн. Для кожного застрахованого імовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0,1, ймовірність смерті від природних умов дорівнює 0,1 і імовірність дожиття дорівнює 0,8.

Знайдіть залежність ймовірності банкрутства R від величини капіталу компанії.

Розв'язання. Для обчислення зручно прийняти 250000 грн. у якості одиниці виміру грошової суми. Тоді кожна з випадкових величин X_1, X_2, X_3, X_4 має розподіл, який задається таблицею:

n	0	1	2
$p(n)$	0.8	0.1	0.1

Для розрахунку суми $X_1 + X_2$ утворюємо матрицю розмірністю 3х3 з елементами $p_1(i)\, p_2(j)$:

$$\begin{matrix} 0.64 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.01 & 0.01 \\ 0.08 & 0.01 & 0.01 \end{matrix}$$

Тому для $q(n) = P(X_1 + X_2 = n)$ маємо таблицю:

n	0	1	2	3	4
$q(n)$	0.64	0.16	0.17	0.02	0.01

(оскільки $X_1, X_2 \leq 2$, їх сума не перевищує 4).
Для розрахунку $r(n) = P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = P((X_1 + X_2) + X_3 = n)$ утворюємо матрицю з трьох рядків і п'яти стовпчиків з елементами $p_3(i) \cdot q(j)$:

$$\begin{matrix} 0.512 & 0.128 & 0.136 & 0.016 & 0.008 \\ 0.064 & 0.016 & 0.017 & 0.002 & 0.001 \\ 0.064 & 0.016 & 0.017 & 0.002 & 0.001 \end{matrix}$$

Тому для розподілу $X_1 + X_2 + X_3$ маємо таблицю:

n	0	1	2	3	4	5	6
$r(n)$	0.512	0.192	0.216	0.049	0.027	0.003	0.001

Для розрахунку $p(n) = P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = n)$ утворюємо матрицю з трьох рядків і семи стовпчиків з елементами $p_4(i)\,r(j)$:

0.4096	0.1536	0.1728	0.0392	0.0216	0.024	0.0008
0.0512	0.0192	0.0216	0.0049	0.0027	0.0003	0.0001
0.0512	0.0192	0.0216	0.0049	0.0027	0.0003	0.0001

Тому для розподілу сумарного позову маємо таблицю:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.4096	0.2048	0.2432	0.0800	0.0481	0.0100	0.0038	0.0004	0.0001

Відповідно для функції розподілу $P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq n)$ маємо таблицю:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.4096	0.6141	0.8576	0.9376	0.9857	0.9957	0.9995	0.9999	1.0000

Отже, залежність імовірності банкрутства $R = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > n)$ від величини існуючого капіталу *n* задається таблицею:

капітал	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ймовірність банкрутства	0.5905	0.3856	0.1424	0.0624	0,0143	0,0043	0.0005	0.0001	0

Розглянемо програму, написану мовою DELPHI, для обчислення ймовірності банкрутства в моделі індивідуального ризику для даного прикладу. Для чіткості зазначимо, що резерв компанії *n*=4, *p*=0.8, *q1*=0.1, *q2*=0.1

```
var
  Form1: TForm1;
  n:byte;
  q1,q2,p:array[1..100]of real;

implementation

{$R *.dfm}
```

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var k:longint;
r,i:word;
s,z:real;
x:array[1..100]of real;

begin
Memo3.Lines.Clear;
Memo4.Lines.Clear;

//кількість укладених договорів у компанії

n:=UpDown1.Position;

//введення ймовірностей смерті та обчислення ймовірності дожиття
for i:=1 to n do
  begin
    q1[i]:=StrToFloat(Memo1.Lines[i-1]);
    q2[i]:=StrToFloat(Memo2.Lines[i-1]);
    p[i]:=1-q1[i]-q2[i];
    Memo3.Lines.Add(FloatToStr(p[i]));
  end;

//обчислення ймовірності банкрутства

randomize;
r:=0;
for k:=1 to 100000 do
  begin
    s:=0;
    for i:=1 to n do

      begin
        z:=random;

        if z$<$p[i] then x[i]:=0
          else
          if z$<$p[i]+q1[i] then x[i]:=1
            else x[i]:=2;
```

```
        s:=s+x[i];
      end;

    if s$>$n then inc(r);

    if (k mod 10000 = 0) then Memo4.Lines.Add(IntToStr(k)+' : '+FloatTo
  end;
end;

//дані про к-ть договорів і ймовірності

недожиття до певного віку беруться з таблиці Excel

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var MsExcel: Variant;
i:word;
q:real;
begin
MsExcel := CreateOleObject('Excel.Application');

if (OpenDialog1.Execute) then
  begin
    MsExcel.Visible := false;
    MsExcel.DisplayAlerts:=False;
    MsExcel.Workbooks.Open(OpenDialog1.FileName);
    n:=MsExcel.Workbooks[1].Worksheets[1].Cells[1,2];
    UpDown1.Position:=n;
    Memo1.Lines.Clear;
    Memo2.Lines.Clear;

//обчислення q1 i q2
    for i:=1 to n do
      begin
        q:=MsExcel.Workbooks[1].Worksheets[1].Cells[i+1, 2];
        q1[i]:=0.8*q;
        Memo1.Lines.Add(FloatToStr(q1[i]));
        q2[i]:=0.2*q;
        Memo2.Lines.Add(FloatToStr(q2[i]));
```

```
      end;
    end;

  MsExcel.Application.Quit;
  MsExcel:=UnAssigned;

  end;
  end.
```

Бачимо, що ймовірність банкрутства дорівнює 0,0143.

Розглянемо випадок, коли всі договори в компанії укладені на різних умовах. Нехай компанія уклала 10 договорів на таких умовах:

За результатами K=1000000 циклів моделювання можна стверджувати, що

R=2E-5=0,02.

8.3.2. Модель колективного ризику

Нехай щомісячна кількість пожеж серед застрахованих об'єктів описуються пуассоновим розподілом з середнім $\lambda = 9$, а величина збитків при пожежі має експоненціальний розподіл з середнім 5000 грн. Оцініть імовірність банкрутства, якщо резервний фонд становить 105000 грн.

Розв'язання: Візьмемо середню велечину індивідуального позову в якості одиниці виміру грошових сум (тобто резервний фонд дорівнює 21у.о.).

Для експоненціального розподілу з середнім τ=1

$$\mathbf{E}Y = 1,\ \mathbf{E}Y^2 = 2,\ \mathbf{E}Y^3 = 6$$

Оскільки маємо справу зі складеним пуассоновим розподілом, застосуємо формулу (??), яка дає таке наближення для величини

сумарного позову:

$$S \approx -3 + \frac{3}{4} \cdot \chi^2(16)$$

Тому для ймовірності банкрутства маємо:

$$R = P(S > 21) \approx P(-3 + \frac{3}{4}\chi^2(16) > 21) = (\chi^2(16) > 32) = 1\%.$$

Точне значення R може бути оцінене за допомогою ЕОМ:

```
var
  Form1: TForm1;
  u,lambda,m:integer;
  nu,k,j:longint;
  r,z,pi,s,y: Currency;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.FC;
label
  l1,l2;

begin
 Form1.Memo1.Clear;
 randomize;
 r:=0;
 for k:=1 to 1000000 do

  begin
   z:= random;
   pi:=exp(-lambda);
   s:=pi;
   nu:=0;

l2:if z$<$u then goto l1;

   nu:=nu+1;
   pi:=pi+lambda/nu;
   s:=s+pi;
   goto l2;

l1:s:=0;

   for j:=1 to nu do
    begin
     y:=-m*ln(random);
     s:=s+y;
```

```
     end;

    if s$>$u then r:=r+1;
    if int(k/100000)*100000=k then
      Form1.Memo1.Lines.Add(inttostr(k)+':   '
      +floattostr(r/k)+'.'+inttostr(random(k*2)));
   end;
 end;

 procedure TForm1.BitBtn1Click(Sender: TObject);
 begin
  if (Form1.LabeledEdit1.Text='')or(Form1.LabeledEdit2.Text='')or
    (Form1.LabeledEdit3.Text='') then
   Showmessage('Enter data!!! ')
    else
     begin
      U:=strtoint(Form1.LabeledEdit1.Text);
      lambda:=strtoint(Form1.LabeledEdit2.Text);
      m:=strtoint(Form1.LabeledEdit3.Text);
      Form1.FC;
     end;
 end;
 end.
```

Результат програми:

За результатами K=1000000 циклів моделювання можна стверджувати, що

R=0.974672.

Додаток А.

Основні таблиці

Цей додаток містить усі необхідні для роботи з підручником таблиці. Зокрема, наведено квантилі, верхні границі, критичні значення основних розподілів: стандартного нормального, Стьюдента, Фішера, χ^2-розподілу.

Нехай $F_\xi(x)$ абсолютно неперервний розподіл ВВ ξ.

Для кожного $0 < \beta < 1$ число x_β, яке є розв'язком рівняння $F_\xi\left(x_\beta\right) = \beta$, або, що те саме, $F_\xi\left((-\infty, x_\beta)\right) = \beta$, будемо називати β-квантиллю розподілу $F_\xi(x)$.

Для кожного $0 < \alpha < 1$ число z_α, яке є розв'язком рівняння $1 - F_\xi\left(z_\alpha\right) = \alpha$, або, що те саме, $F_\xi\left([z_\alpha, +\infty)\right) = \alpha$, будемо називати верхньою α-границею (верхньою 100α-відсотковою границею, 100α-відсотковою точкою, 100α-критичним значенням) розподілу $F_\xi(x)$.

Очевидно, верхня α-границя z_α розподілу $F_\xi(x)$ та $(1-\alpha)$-квантиль збігаються: $x_{1-\alpha} = z_\alpha$.

А.1. Нормальний розподіл

Позначення: $N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Параметри і область їх зміни: $\mu \in R^1, \sigma > 0$.

Щільність розподілу: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$.

Характеристична функція: $\exp\left\{it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$.

Математичне сподівання: μ.

Дисперсія: σ^2.

У таблиці А.1 наведено значення функції $\Phi(x)$ нормального розподілу з параметрами $(0,1)$ (квантилі нормального розподілу): для заданих x табульовані значення функції

$$N_{0,1}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\} ds.$$

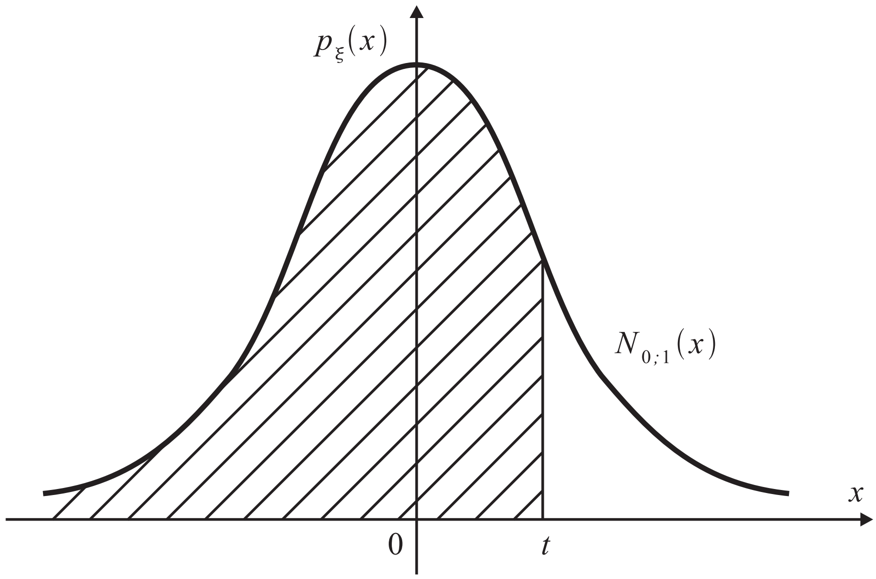

Рис. А.1. До означення квантилі нормального розподілу; $p_\xi(x)$ – щільність розподілу $N_{0,1}$

Для кожного x значення $N_{0,1}(x)$ чисельно дорівнює площі заштрихованої на рис. А.1 області. Значення $N_{\mu;\sigma^2}(x)$ – функції нормального розподілу з параметрами μ і σ^2 – обчислюється за значеннями табульованої функції $N_{0,1}(x) = \Phi(x)$ нормального розподілу $N_{0,1}$:

$$N_{\mu;\sigma^2}(x) = N_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Таблиця А.1 допускає лінійну інтерполяцію.

Значення функції $\Phi(x)$. **Табл. А.1**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0339	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.9	.0288	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014

x	-3.0	-3.1	-3.2	-3.3	-3.4	-3.5	-3.6	-3.7	-3.8	-3.9
$\Phi(x)$	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9900	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9923	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
$\Phi(x)$	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	.1000

А.2. Розподіл Пірсона (χ^2_n-розподіл)

Позначення: χ^2_n.

Параметри і область їх зміни: n – ціле додатне число.

Щільність розподілу: $\frac{x^{\frac{n}{2}-1}\exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, x \geq 0$.

Характеристична функція: $(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$.

Математичне сподівання: n.

Дисперсія: $2n$.

У таблиці А.2 наведено значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$, або, що те саме, верхні α-границі (100α-критичні значення) розподілу Пірсона (χ^2_n-розподілу) з n ступенями вільності.

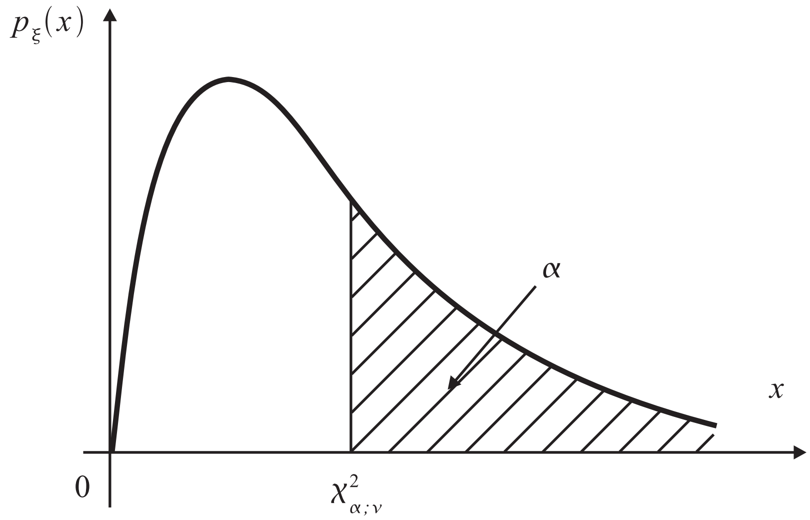

Рис. А.2. До означення $\chi^2_{\alpha;n}$ – верхньої α-границі розподілу Пірсона з n ступенями вільності; $p_\xi(x)$ – щільність $\chi^2_{\alpha;n}$-розподілу

Значення $\chi^2_{\alpha;n}$ для заданих α та n визначається як розв'язок рівняння

$$\int\limits_{\chi^2_{\alpha;n}}^{+\infty} p_\xi(x)dx = \alpha,$$

де $p_\xi(x)$ – щільність $\chi^2_{\alpha;n}$-розподілу (розподілу Пірсона); $\chi^2_{\alpha;n}$ – число, що відтинає правий «хвіст» $\chi^2_{\alpha;n}$-розподілу, на який припадає «маса» α (рис. А.2).

Значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$. **Табл. А.2**

n	Значення α							
	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
5	0.55	0.83	1.14	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.90	2.70	3.32	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.86	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.58	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.56	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.02	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.92
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.26
29	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
40	22.16	24.43	26.51	29.05	51.80	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.40
80	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.90	106.60	112.30
90	61.75	65.65	69.13	73.29	107.60	113.10	118.10	124.10
100	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.30	129.60	135.80

А.3. Біномний розподіл

Значення функції $P(i;n;p) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$. **Табл. А.3**

		p						
n	i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
	0	0.34868	0.10737	0.02825	0.00605	0.00098	10	
	1	.38742	.26844	.12106	.04031	.00977	9	
	2	.19371	.30199	.23347	.12093	.04395	8	
	3	.05740	.20133	.26683	.21499	.11719	7	
	4	.01116	.08808	.20012	.25082	.20508	6	
10	5	0.00149	0.02642	0.10292	0.20066	0.24609	5	10
	6	.00014	.00551	.03676	.11148	.20508	4	
	7	.00001	.00079	.00900	.04247	.11719	3	
	8		.00007	.00145	.01062	.04395	2	
	9			.00014	.00157	.00977	1	
	10			.00001	.00010	.00098	0	
	0	0.20589	0.03518	0.00475	0.00047	0.00003	15	
	1	.34315	.13194	.03052	.00470	.00046	14	
	2	.26690	.23090	.09156	.02194	.00320	13	
	3	.12851	.25014	.17004	.06339	.01389	12	
	4	.04284	.18760	.21862	.12678	.04166	11	
	5	0.01047	0.10318	0.20613	0.18594	0.09164	10	
	6	.00194	.04299	.14724	.20660	.15274	9	
15	7	.00028	.01382	.08113	.17708	.19638	8	15
	8	.00003	.00345	.03477	.11806	.19638	7	
	9		.00067	.01159	.06121	.15274	6	
	10		0.0001	0.00298	0.02449	0.09164	5	
	11		.00001	.00058	.00742	.04166	4	
	12			.00008	.00165	.01389	3	
	13			.00001	.00025	.00320	2	
	14				.00002	.00046	1	
	15					.00003	0	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	i	n
		p						

		p						
n	i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
20	0	0.12158	0.01153	0.00080	0.00004		20	20
	1	.27017	.05765	.00684	.00049	.00002	19	
	2	.28518	.13691	.02785	.00309	.00018	18	
	3	.19012	.20536	.07160	.01235	.00109	17	
	4	.08978	.21820	.13042	.03499	.00462	16	
	5	0.03192	0.17456	0.17886	0.07465	0.01479	15	
	6	.00887	.10910	.19164	.12441	.03696	14	
	7	.00197	.05455	.16426	.16588	.07393	13	
	8	.00036	.02216	.11440	.17971	.12013	12	
	9	.00005	.00739	.06537	.15974	.16018	11	
	10	0.00001	0.00203	0.03082	0.11714	0.17620	10	
	11		.00046	.01201	.07099	.16018	9	
	12		.00009	.00386	.03550	.12013	8	
	13		.00001	.00102	.01456	.07393	7	
	14			.00022	.00485	.03696	6	
	15			0.00004	0.00129	0.01479	5	
	16			.00001	.00027	.00462	4	
	17				.00004	.00109	3	
	18					.00018	2	
	19					.00002	1	
	20						0	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	i	n
		p						

n	i	p 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
25	0	0.07179	0.00378	0.00013			25	25
	1	.19942	.02361	.00144	.00005		24	
	2	.26589	.07084	.00739	.00038	.00001	23	
	3	.22650	. 13577	.02428	.00194	.00007	22	
	4	.13842	.18668	.05723	.00710	.00038	21	
	5	0.06459	0.19602	0.10302	0.01989	0.00158	20	
	6	.02392	.16335	.14717	.04420	.00528	19	
	7	.00722	.11084	.17119	.07999	.01433	18	
	8	.00180	.06235	.16508	.11998	.03223	17	
	9	.00038	.02944	.13364	.15109	.06089	16	
	10	0.00007	0.01178	0.09164	0.16116	0.09742	15	
	11	.00001	.00401	.05355	.14651	.13284	14	
	12		.00117	.02678	.11395	.15498	13	
	13		.00029	.01148	.07597	.15498	12	
	14		.00006	.00422	.04341	.13284	11	
	15		0.00001	0.00132	0.02122	0.09742	10	
	16			.00035	.00884	.06089	9	
	17			.00008	.00312	.03223	8	
	18			.00002	.00092	.01433	7	
	19				.00023	.00528	6	
	20				0.00005	0.00158	5	
	21				.00001	.00038	4	
	22					.00007	3	
	23					.00001	2	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	i	n
		p						

А.4. Розподіл Пуассона

Позначення: $\Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Щільність розподілу: $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Характеристична функція: $\left(1 - \frac{i \cdot t}{\lambda}\right)^{-1}$.

Математичне сподівання: λ^{-1}. Дисперсія: λ^{-2}.

Значення функції $p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. **Табл. А.4**

	Значення λ								
k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494
4		.0001	.0003	.0067	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111
5				.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020
6							.0001	.0002	.0003

	Значення λ								
k	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	.3679	.1353	.0498	.0183	.0067	.0025	.0009	.0003	.0001
1	.3679	.2707	.1494	.0733	.0337	.0149	.0064	.0027	.0011
2	.1839	.2707	.2240	.1465	.0842	.0446	.0223	.0107	.0050
3	.0613	.1804	.2240	.1954	.1404	.0892	.0521	.0286	.0150
4	.0153	.0902	.1680	.1954	.1755	.1339	.0912	.0573	.0337
5	.0031	.0361	.1008	.1563	.1755	.1606	.1277	.0916	.0607
6	.0005	.0120	.0504	.1042	.1462	.1606	.1490	.1221	.0911
7	.0001	.0034	.0216	.0595	.1044	.1377	.1490	.1396	.1171
8		.0009	.0081	.0298	.0653	.1033	.1304	.1396	.1318
9		.0002	.0027	.0132	.0363	.0688	.1014	.1241	.1318
10			.0008	.0053	.0181	.0413	.0710	.0993	.1186
11			.0002	.0019	.0082	.0225	.0452	.0722	.0970
12			.0001	.0006	.0034	.0113	.0264	.0481	.0728
13				.0002	.0013	.0052	.0142	.0296	.0504
14				.0001	.0005	.0022	.0071	.0169	.0324
15					.0002	.0009	.0033	.0090	.0194
16						.0003	.0014	.0045	.0109
17						.0001	.0006	.0021	.0058

Додаток Б.

Таблиця середньої очікуваної тривалості життя

Введемо такі позначення:

x – вік, років,
a_x – імовірність не дожити до наступного віку,
p_x – імовірність дожити до наступного віку,
d_x – число осіб, які вмирають у даному віці,
l_x – число осіб, які доживають до даного віку,
L_x – число осіб, які живуть у даному віці,
T_x – число чоловіко-років майбутнього життя,
t_x – середня очікувана тривалість життя,
P_x – коефіцієнт доживання до наступного віку.

Чернівецька область. Міські поселення та сільська місцевість (2005-2006 рік). **Табл. В.1**

x	a_x	p_x	d_x	l_x	L_x	T_x	t_x	P_x
0	0,01181	0,98819	1181	100000	99410	7051828	70,52	0,99362
1	0,00088	0,99912	87	98819	98776	6952418	70,36	0,99914
2	0,00084	0,99916	83	98732	98691	6853642	69,42	0,99918
3	0,00079	0,99921	78	98649	98610	6754951	68,47	0,99952
4	0,00016	0,99984	16	98571	98563	6656341	67,53	0,99974
5	0,00037	0,99963	36	98555	98537	6557778	66,54	0,99977
6	0,00010	0,99990	10	98519	98514	6459241	65,56	0,99979
7	0,00034	0,99966	33	98509	98493	6360727	64,57	0,99955
8	0,00055	0,99945	54	98476	98449	6262234	63,59	0,99961
9	0,00022	0,99978	22	98422	98411	6163785	62,63	0,99974

Продовження на наступній сторінці

x	a_x	p_x	d_x	l_x	L_x	T_x	t_x	P_x
10	0,00030	0,99970	30	98400	98385	6065374	61,64	0,99973
11	0,00025	0,99975	25	98370	98358	5966989	60,66	0,99977
12	0,00020	0,99980	20	98345	98335	5868631	59,67	0,99975
13	0,00031	0,99969	30	98325	98310	5770296	58,69	0,99980
14	0,00011	0,99989	11	98295	98290	5671986	57,70	0,99970
15	0,00048	0,99952	47	98284	98261	5573696	56,71	0,99947
16	0,00057	0,99943	56	98237	98209	5475435	55,74	0,99940
17	0,00064	0,99936	63	98181	98150	5377226	54,77	0,99936
18	0,00064	0,99936	63	98118	98087	5279076	53,80	0,99925
19	0,00087	0,99913	85	98055	98013	5180989	52,84	0,99910
20	0,00093	0,99907	91	97970	97925	5082976	51,88	0,99912
21	0,00083	0,99917	81	97879	97839	4985051	50,93	0,99908
22	0,00100	0,99900	98	97798	97749	4887212	49,97	0,99899
23	0,00102	0,99898	100	97700	97650	4789463	49,02	0,99902
24	0,00095	0,99905	93	97600	97554	4691813	48,07	0,99907
25	0,00090	0,99910	88	97507	97463	4594259	47,12	0,99884
26	0,00142	0,99858	138	97419	97350	4496796	46,16	0,99853
27	0,00153	0,99847	149	97281	97207	4399446	45,22	0,99838
28	0,00169	0,99831	164	97132	97050	4302239	44,29	0,99835
29	0,00161	0,99839	156	96968	96890	4205189	43,37	0,99829
30	0,00183	0,99817	177	96812	96724	4108299	42,44	0,99827
31	0,00162	0,99838	157	96635	96557	4011575	41,51	0,99808
32	0,00220	0,99780	212	96478	96372	3915018	40,58	0,99782
33	0,00217	0,99783	209	96266	96162	3818646	39,67	0,99778
34	0,00225	0,99775	216	96057	95949	3722484	38,75	0,99767
35	0,00243	0,99757	233	95841	95725	3626535	37,84	0,99722
36	0,00312	0,99688	298	95608	95459	3530810	36,93	0,99670
37	0,00349	0,99651	333	95310	95144	3435351	36,04	0,99653
38	0,00344	0,99656	327	94977	94814	3340207	35,17	0,99633
39	0,00390	0,99610	369	94650	94466	3245393	34,29	0,99589
40	0 0043	0,99568	407	94281	94078	3150927	33,42	0,99595
41	0,00378	0,99622	355	93874	93697	3056849	32,56	0,99536
42	0,00551	0,99449	515	93519	93262	2963152	31,69	0,99456
43	0,00537	0,99463	499	93004	92755	2869890	30,86	0,99461
44	6,00540	0,99460	500	92505	92255	2777135	30,02	0,99402
45	0,00657	0,99343	604	92005	91703	2684880	29,18	0,99378

Продовження на наступній сторінці

x	a_x	p_x	d_x	l_x	L_x	T_x	t_x	P_x
46	0,00588	0,99412	537	91401	91133	2593177	28,37	0,99311
47	0,00791	0,99209	719	90864	90505	2502044	27,54	0,99149
48	0,00911	0,99089	821	90145	89735	2411539	.26,75	0,99101
49	0,00888	0,99112	793	89324	88928	2321804	25,99	0,99058
50	0,00996	0,99004	882	88531	88090	2232876	25,22	0,98981
51	0,01044	0,98956	915	87649	87192	2144786	24,47	0,98941
52	0,01072	0,98928	930	86734	86269	2057594	23,72	0,98902
53	0,01125	0,98875	965	85804	85322	1971325	22,97	0,98829
54	0,01217	0,98783	1032	84839	84323	1886003	22,23	0,98710
55	0,01366	0,98634	1145	83807	83235	1801680	21,50	0,98615
56	0,01405	0,98595	1161	82662	82082	1718445	20,79	0,98600
57	0,01394	0,98606	1136	81501	80933	1636363	20,08	0,98538
58	0,01531	0,98469	1230	80365	79750	1555430	19,35	0,98371
59	0,01729	0,98271	1368	79135	78451	1475680	18,65	0,98185
60	0,01903	0,98097	1480	77767	77027	1397229	17,97	0,98066
61	0,01968	0,98032	1501	76287	75537	1320202	17,31	0,97988
62	0,02057	0,97943	1538	74786	74017	1244665	16,64	0,97865
63	0,02215	0,97785	1622	73248	72437	1170648	15,98	0,97750
64	0,02287	0,97713	1638	71626	70807	1098211	15,33	0,97616
65	0,02485	0,97515	1739	69988	69119	1027404	14,68	0,97370
66	0,02780	0,97220	1897	68249	67301	958285	14,04	0,97131
67	0,02962	0,97038	1965	66352	65370	890984	13,43	0,96931
68	0,31780	0 96822	2046	64387	63364	825614	12,82	0,96702
69	0,03424	0,96576	2135	62341	61274	762250	12,23	0,96429
70	0,03721	0,96279	2240	60206	59086	700976	11,64	0,96060
71	0,04168	0,95832	2416	57966	56758	641890	11,07	0,95636
72	0,04570	0,95430	2539	55550	54281	585132	10,53	0,95287
73	0,04859	0,95141	2576	53011	51723	530851	10,01	0,94989
74	0,05171	0,94829	2608	50435	49131	479128	9,50	0,94659
75	0,05519	0,94481	2640	47827	46507	429997	8,99	0,94265
76	0,05964	0,94036	2695	45187	43840	383490	8,49	0,93732
77	0,06592	0,93408	2801	42492	41092	339650	7,99	0,93072
78	0,07287	0.92713	2892	39691	38245	298558	7,52	0,92428
79	0,07880	0,92120	2900	36799	35349	260313	7,07	0,91805
80	0,08539	0,91461	2895	33899	32452	224964	6,64	0,90944
81	0,09620	0,90380	2983	31004	29513	192512	6,21	0,89815

Продовження на наступній сторінці

x	a_x	p_x	d_x	l_x	L_x	T_x	t_x	P_x
82	0,10805	0,89195	3028	28021	26507	162999	5,82	0,88754
83	0,11740	0,88260	2934	24993	23526	136492	5,46	0,87720
84	0,12891	0,87109	2844	22059	20637	112966	5,12	0,86548
85	0,14093	0,85907	2708	19215	17861	92329	4,81	0,85684
86	0,14575	0,85425	2406	16507	15304	74468	4,51	0,84814
87	0,15909	0,84091	2243	14101	12980	59164	4,20	0,82874
88	0,18582	0,81418	2203	11858	10757	46184	3,89	0,80859
89	0,19838	0,80162	1915	9655	8698	35427	3,67	0,79754
90	0,20744	0,79256	1606	7740	6937	26729	3,45	0,78579
91	0,22290	0,77710	1367	6134	5451	19792	3,23	0,77123
92	0,23634	0,76366	1127	4767	4204	14341	3,01	0,75547
93	0,25514	0,74486	929	3640	3176	10137	2,78	0,73772
94	0,27185	0,72815	737	2711	2343	6961	2,57	0,71490
95	0,30310	0,69690	598	1974	1675	4618	2,34	0,67881
96	0,34769	0,65231	478	1376	1137	2943	2,14	0,65523
97	0,34073	0,65927	306	898	745	1806	2,01	0,66980
98	0,31493	0,68507	186	592	499	1061	1,79	0,67335
99	0,34812	0,65188	141	406	336	562	1,38	0,67262
100	0.40574	0,59426	108	265	226	226	0,85	0,67189

Бібліографія

[1] **Бенинг В.Е., Королев В.Ю.** *Введение в математическую теорию риска.* –М.:Изд-во факультета ВмиК МГУ, 2000. – 280 с.

[2] **Боднарев Б.В.** *Математические модели в страховании.* –Донецк: Апекс, 2002. – 116 с.

[3] **Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.** *Актуарная математика (В 3-х томах).* –Москва: Янус-К, 2001.

[4] **Гихман И.И., Скороход А.В.** *Стохастические дифференциальные уравнения и их применения.* – Киев: Наукова думка, 1982. –612 с.

[5] **Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М.И.** *Теория вероятностей и математическая статистика.* – К.: Вища школа, 1979. –468 с.

[6] **Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М. Й.** *Теоретико-ймовірнісні моделі та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці.* – К.: Інформтехніка, 1995. –380 с.

[7] **І.В.Самойленко, І.В.Малик***Збіжність напівмарковського і супроводжуючого марковського процесу до марковського процесу,* Укр. матем. журн., 2010, т.62, №5, С. 674-681. 674-681.

[8] **Фалин Г.И.** *Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем.* – М.: Анкил, 2002. –262 с.

[9] **Фалин Г.И., Фалин А.И.** *Теория риска для актуариев в задачах.* – М.:Мир, 2004. –240 с.

[10] **Штрауб Э.** *Актуарная математика имущественного страхования.* – М.:Мир, 1995. –147 с.

[11] **Свириденко М.Н.** (1986). *Об условиях сходимости семейства полумарковских процессов к марковскому процессу*, ВИНИТИ, препр. №37.

[12] **Скороход А.В.** *Лекції з теорії випадкових процесів.* – Київ:Либідь, 1990. – 168 с.

[13] **Ethier S.N., Kurtz T.G.** (1986). *Markov Processes: Characterization and convergence*, J. Wiley & Sons, New York.

[14] **Gerber H.U.** (1995). *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

[15] **Grandell J.** (1991). *Aspects of risk Theory*, Springer-Verlag, New York.

[16] **Jacod J., Shiryaev A.N.** (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlang, Berlin.

[17] **Koroliuk V.S., Limnios N.** (2005). *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific Publishers, Singapore.

[18] **Stroock D.W., Varadhan S.R.** (1979). *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, Berlin.

[19] **Wentzell A.D.** (1990). *Limit Theorems on Large Deviations for Markov Stochastic Processes*, Kluwer, Dordrecht.