Лабораторна робота №2. Детерміновані ренти

Розглянемо n послідовних проміжків часу $(0,1),..,\ (n-1,n)$. Як одиничний проміжок розглянемо один рік.

Означення 1. *Серія з n виплат, кожна величиною 1, здійснених на початку цих проміжків, називається* ***випереджуючою (прямою) сталою рентою****.*

Означення 2. *Серія з n виплат, кожна величиною 1, здійснених у кінці цих проміжків називається,* ***безпосередньою сталою рентою****.*

Приведена вартість випереджуючої ренти позначається в фінансовій математиці $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, а безпосередньої - $a_{\overline{n}|}$.

Зрозумілі наступні співвідношення,

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + .. + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1-v} =$$

$$= \frac{1-v^n}{1/v - 1} = \frac{1-v^n}{i}, \tag{1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + .. + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} \tag{2}$$

де i – відсоткова ставка та

$$v := \frac{1}{1+i}, d := \frac{i}{1+i}.$$

Для застосувань також важливі так звані відстрочені ренти. Розглянемо послідовні проміжки часу $(m-1,m),(m,m+1),..(m+n-1,m+n)$.

Означення 3. *Серія з n виплат, кожна величиною 1, здійснених на початку (в кінці) проміжків $(m,m+1),..(m+n-1,m+n)$, називається випереджуючою (безпосередньою) відстроченою рентою.*

Вартість випереджуючої відстроченої ренти на даний час $t_0 = 0$ позначається ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$, а сучасна вартість відстроченої безпосередньої ренти позначається через ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$.

Щоб обчислити ці величини необхідно привести кожен із n платежів до початкового моменту часу та додати одержані значення:

$${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + .. + v^{m+n-1} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{3}$$

$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + .. + v^{m+n} = v^m \cdot a_{\overline{n}|} \tag{4}$$

Очевидні і такі співвідношення

$${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|},\ \ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}. \tag{5}$$

Часто буває корисно знати вартість ренти не в початковий момент часу, а в кінці останнього платіжного періоду. Цю вартість можна інтерпретувати як загальну суму, накопичену на банківському рахунку після серії регулярних внесків. Через $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ позначають приведену вартість випереджуючої (прямої) сталої ренти в момент $t_n = n$, а через $s_{\overline{n|}}$ відповідно приведену вартість в момент $t_n = n$ безпосередньої сталої ренти. Формули для накопичень одержуються зведенням кожної з n виплат до моменту $t_n = n$ і додаванням одержаних значень

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n + .. + (1+i) = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} =$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i/(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}, \tag{6}$$

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + .. + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{7}$$

Для відстрочених рент спеціальні позначення для накопичень не потрібні, оскільки з погляду останнього проміжку часу відстрочена рента не відрізняється від відповідної звичайної ренти (тобто ${}_{m|}s_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}}$).

Розглянемо n послідовних проміжків часу $(0,1), .., (n-1, n)$. Як одиничний проміжок будемо, як і раніше, розглядати один рік.

Означення 4. *Серія з n виплат, кожна величиною $1, 2, .., n$, здійснених на початку цих проміжків, називається **випереджуючою (прямою) зростаючою рентою**.*

Означення 5. *Серія з n виплат, величиною $1, 2, .., n$, здійснених у кінці цих проміжків, називається **безпосередньою зростаючою рентою**.*

Приведена вартість прямої зростаючої ренти позначається в фінансовій математиці $(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$, а безпосередньої зростаючої ренти - $(Ia)_{\overline{n|}}$.

Зрозумілі такі співвідношення:

$$(Ia)_{\overline{n|}} = v + 2v^2 + .. + nv^n = v\left(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}\right)' = v \cdot \frac{1 - (n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \tag{8}$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = 1 + 2v + 3v^2 + .. + nv^{n-1} = \frac{1 - (n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2} \tag{9}$$

Використовуючи формули (1) і (2), можна виразити сучасну вартість зростаючих рент через відповідні сучасні вартості сталих рент

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{a_{\overline{n|}}}{1-v} - \frac{nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}}}{d} - \frac{nv^n}{i}, (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d} \tag{10}$$

Для застосувань також важливі так звані відстрочені зростаючі ренти. Розглянемо послідовні проміжки часу $(0,1), ..(m-1, m), (m, m+1), ..(m+n-1, m+n)$.

Означення 6. *Серія з n виплат, кожна величиною $1,\ 2, .., \ n$, здійснених на початку (в кінці) проміжків $(m, m+1), ..(m+n-1, m+n)$, називається випереджуючою (безпосередньою) відстроченою зростаючою рентою.*

Вартість відстроченої випереджуючої ренти в теперішній момент $t_0 = 0$ позначається ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$, а сучасна вартість безпосередньої ренти позначається - ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n|}}$.

Обчислити ці величини можна, визначивши вартість ренти в момент $t_m = m$ початку періоду платежів, а потім привести цю вартість до моменту $t_0 = 0$:

$$ {}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = v^m \cdot (I\ddot{a})_{\overline{n|}} \tag{11} $$

$$ {}_{m|}(Ia)_{\overline{n|}} = v^m \cdot (Ia)_{\overline{n|}} \tag{12} $$

Часто буває корисно знати вартість ренти не в початковий момент часу, а в кінці останнього платіжного періоду. Цю вартість можна інтерпретувати як загальну суму, накопичену на банківському рахунку після серії регулярних внесків. $(I\ddot{s})_{\overline{n|}}$ і $(Is)_{\overline{n|}}$ - це приведена вартість випереджуючої (прямої) і безпосередньої зростаючої ренти в момент $t_n = n$. Формули для накопичень одержують безпосереднім зведенням до моменту $t_n = n$ вартості ренти в момент $t_0 = 0$

$$ (I\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{1-v} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{d}, \tag{13} $$

$$ (Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}} = \frac{s_{\overline{n|}}}{1-v} - \frac{n}{i} = \frac{s_{\overline{n|}}}{d} - \frac{n}{i}. \tag{14} $$

За допомогою одержаних формул для найпростіших зростаючих рент можна визначити вартість рент, у яких величина виплат зростає відповідно до довільної арифметичної прогресії. Припустимо, що виплати здійснюються в моменти $t_0 = 0, .., \ t_n = n$ і i-та виплати задається формулою

$$ b_i = \alpha + \beta i = (\alpha - \beta) + \beta(i+1), \ i = 0, .., \ n-1. \tag{15} $$

Таку змінну ренту можна розглядати як об'єднання двох рент: сталої випереджуючої з величиною виплат $(\alpha - \beta)$ і зростаючої випереджуючої з одиницею вимірювання виплат β. Тому вартість у момент $t_0 = 0$ такої ренти

$$ (\alpha - \beta)\ddot{a}_{\overline{n|}} + \beta(I\ddot{a})_{\overline{n|}}, \tag{16} $$

а накопичення до моменту $t_n = n$ складає

$$ (\alpha - \beta)\ddot{s}_{\overline{n|}} + \beta(I\ddot{s})_{\overline{n|}}. \tag{17} $$

Розглянемо n послідовних проміжків часу $(0,1), .., \ (n-1, n)$. Як одиничний проміжок будемо, як і раніше, розглядати один рік.

Розіб'ємо кожен із n одиничних проміжків на p рівних частин довжиною $1/p$ кожна

$$ (0, 1/p), (1/p, 2/p), .., ((p-1)/p, p/p), (1, 1+1/p), .., (n-1+(p-1)/p, n) $$

Означення 7. *Серія з пр виплат, кожна величиною* $1/p$*, здійснених на початку (в кінці) цих проміжків, називається* ***прямою (безпосередньою) сталою рентою, що виплачується з частотою*** p.

Вартість таких рент у момент $t_0 = 0$ позначається відповідно $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, а вартість у момент $t_n = n$ - відповідно $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $s^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Звернімо увагу на те, що як одиниця вимірювання грошових сум розглядається алгебраїчна сума усіх виплат за одиничний проміжок часу.

Оскільки пряма і безпосередня ренти відрізняються лише в початковий і кінцевий моменти часу, маємо

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}v^n. \tag{18}$$

Крім того, величини $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$, як величини $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ і $s^{(p)}_{\overline{n}|}$, оцінюють одну і ту саму серію платежів, але в різні моменти часу і між ними очевидний наступний такий зв'язок

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}(1+i)^n, \;\; s^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|}(1+i)^n. \tag{19}$$

Отже, достатньо одержати формулу для обчислення, наприклад, величини $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$. З цією метою розглянемо як одиничний відрізок p-ту долю початкового одиничного відрізка. Ефективна відсоткова ставка на цьому одиничному відрізку $i^{(p)}_*$, відповідна облікова ставка $d^{(p)}_*$, а нове значення коефіцієнта дисконтуванням.

$$v^{(p)}_* = 1 - d^{(p)}_* = (1 + i^{(p)}_*)^{-1} = v^{1/p}$$

Тепер пряму ренту, що виплачується з частотою p, можна розглядати як звичайну випереджуючу ренту, що виплачується на проміжку $(0, n/p)$ з величиною кожної виплати $1/p$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{p}\ddot{a}_{\overline{np}|@i^{(p)}_*}, \tag{20}$$

де символ @ вказує ефективну відсоткову ставку на проміжку, що розглядається як одиничний.

Використовуючи формули (**??**), (**??**) і (2), легко одержимо таке співвідношення

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}}\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{21}$$

А для $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ з формули (18) матимемо

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|} \tag{22}$$

За аналогією зі звичайними відстроченими рентами вводиться поняття відстрочених рент, що виплачуються з частотою p. Також, аналогічно звичайним зростаючим рентам, вводиться поняття зростаючих рент, які виплачуються з частотою p.

Завдвння до лабораторної роботи №2

1) Обчислити вартість безпосередньої та випереджаючої ренти, користуючись формулами (1), (2). Вхідні дані: відсоткова ставка i. Вихідні дані: вартість ренти $a_{\overline{n}|}$ та $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

2) Користуючись формулами (3) та (4), обчислити вартість відстрочених рент. Вхідні дані: відсоткова ставка i та період відстрочки m. Вихідні дані: вартість відстроченої ренти ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$ та ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$.

3) Припустимо, що в i-й період нараховується не умовна одиниця, а D_i - умовних одиниць. Тоді вартість випереджаючої та безпосередньої рент обчислюються за формулами

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{i=1}^{n} v^i D_i;$$

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{i=1}^{n} v^{i-1} D_i;$$

Вхідні дані: відсоткова ставка i. Вихідні дані: вартість ренти $a_{\overline{n}|}$ та $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Вказівка: в даному завданні вхідні дані зчитувати з файла в такому порядку - n, D_1, D_2,..., D_n.