Лекции по модальной логике

Лекция 10. Каноническая модель PDL

А. М. Миронов

Содержание

1 PDL–непротиворечивые и PDL–полные множества

Определения PDL–непротиворечивого и PDL–полного множества полностью совпадают с соответствующими определениями в мономодальном случае.

Подмножество U множества Fm формул PDL называется PDL–**непротиворечивым**, если для каждого конечного подмножества $\{A_1, \ldots, A_n\}$ множества U $(n \geq 0)$ имеет место соотношение: $\neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \notin PDL$ (если $n = 0$, то знакосочетание $A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$ по определению совпадает с формулой $\top$).

Подмножество U множества Fm формул PDL называется PDL–**полным**, если

1. U является PDL–непротиворечивым,
2. для каждой формулы $A \in Fm$ либо $A \in U$, либо $\neg A \in U$.

Можно доказать, что совокупность всех формул, выводимых в PDL, является PDL–непротиворечивым множеством, и что каждое PDL–непротиворечивое множество содержится в некотором PDL–полном множестве (это доказывается так же, как соответствующий факт в мономодальном случае).

2 Определение канонической модели PDL

Канонической моделью PDL называется динамическая модель

$$\mathcal{M}_{PDL} \stackrel{\text{def}}{=} (W_{PDL}, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi_{PDL}),$$

компоненты которой определяются следующим образом:

1. W_{PDL} есть совокупность всех PDL–полных множеств,

2. для каждого $\alpha \in Pg$

$$R_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in W^2_{PDL} \mid \forall A \in Fm([\alpha]A \in x \Rightarrow A \in y)\}$$

3. $\forall A \in Fm \quad \varphi_{PDL}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in W_{PDL} \mid A \in x\}$
(отметим, что данное определение является аналогом утверждения теоремы о канонической модели в мономодальном случае)

3 Свойства канонической модели PDL

Теорема.

$\mathcal{M}_{PDL}$ является динамической моделью, и, кроме того, удовлетворяет следующему условию: $\forall \alpha \in Pg \quad (R_\alpha)^* \subseteq R_{\alpha^*}$.

Для некоторых программ $\alpha \in Pg$ имеет место соотношение $(R_\alpha)^* \neq R_{\alpha^*}$.

Доказательство:

φ_{PDL} сохраняет булевские и модальные операции:

Сохраняемость булевских операций вытекает из соответствующих свойств PDL–полных множеств (которые доказываются так же как в мономодальном случае), а именно:

1. $\forall x \in W_{PDL} \quad \top \in x$, поэтому $\varphi_{PDL}(\top) = W$,
2. $\forall x \in W_{PDL} \quad \bot \notin x$, поэтому $\varphi_{PDL}(\bot) = \emptyset$,
3. $\forall x \in W_{PDL}, \forall A, B \in Fm \quad A \mathbin{\&} B \in x \Leftrightarrow A \in x$ и $B \in x$, поэтому $\varphi_{PDL}(A \mathbin{\&} B) = \varphi_{PDL}(A) \cap \varphi_{PDL}(B)$,
4. и т.д.

Покажем, что φ_{PDL} сохраняет и модальные операции,
т.е. $\forall \alpha \in Pg, \forall A \in Fm$ имеет место соотношение

$$\varphi_{PDL}([\alpha]A) = [\alpha](\varphi_{PDL}(A)).$$

Данное соотношение эквивалентно соотношению $x \in \varphi_{PDL}([\alpha]A) \Leftrightarrow R_\alpha(x) \subseteq (\varphi_{PDL}(A))$, которое, в свою очередь, эквивалентно соотношению $[\alpha]A \in x \Leftrightarrow \forall y(y \in R_\alpha(x) \Rightarrow A \in y)$.

Импликация $[\alpha]A \in x \Rightarrow \forall y(y \in R_\alpha(x) \Rightarrow A \in y)$ непосредственно вытекает из определения отношения R_α.

Обратная импликация доказывается "от противного".

А именно, пусть соотношение $[\alpha]A \in x$ не имеет места. В этом случае множество $S \stackrel{\text{def}}{=} \{B \mid [\alpha]B \in x\} \cup \{\neg A\}$ будет PDL–непротиворечивым (это доказывается так же как соответствующий факт в мономодальном случае), и поэтому существует PDL–полное множество y, содержащее S.

Нетрудно установить, что $y \in R_\alpha(x)$ и $A \notin y$.

$\underline{R_{\alpha\circ\beta} = R_\alpha \circ R_\beta}$:

Покажем, что $\forall x, y \in W_{PDL}$ имеет место эквиваленция

$$(x, y) \in R_{\alpha\circ\beta} \Leftrightarrow \exists z \in W_{PDL} : (x, z) \in R_\alpha,\ (z, y) \in R_\beta$$

т.е. эквивалентны следующие условия:

A: $\forall A \in Fm([\alpha \circ \beta]A \in x \Rightarrow A \in y)$

B: $\exists z \in W_{PDL} : \ \forall B \in Fm([\alpha]B \in x \Rightarrow B \in z)$
и $\forall C \in Fm([\beta]C \in z \Rightarrow C \in y)$

Отметим, что ввиду схемы аксиом $Comp$ соотношение $[\alpha \circ \beta]A \in x$ эквивалентно соотношению $[\alpha][\beta]A \in x$.

Доказательство (A) $\Rightarrow$ (B):

Отметим, что соотношение $\forall C \in Fm([\beta]C \in z \Rightarrow C \in y)$ эквивалентно соотношению $\forall C \in Fm(C \in y \Rightarrow \langle\beta\rangle C \in z)$.

Пусть символ U обозначает следующее множество формул PDL:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{B \mid [\alpha]B \in x\} \cup \{\langle\beta\rangle C \mid C \in y\}.$$

Докажем, что множество U является PDL–непротиворечивым.

Пусть множество U является PDL–противоречивым, т.е. в PDL выводима формула

$$\neg(B_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_m \,\&\, \langle\beta\rangle C_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \langle\beta\rangle C_n)$$

где $m, n \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m\ \ [\alpha]B_i \in x, \forall j = 1, \ldots, n\ \ C_j \in y$.

Отсюда следует, что в PDL выводима формула

$$(B_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_m) \to ([\beta](\neg C_1) \vee \ldots \vee [\beta](\neg C_n)).$$

Из выводимости в K формулы $(\Box p_1 \vee \ldots \vee \Box p_n) \to \Box(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$ вытекает выводимость в PDL формулы

$$([\beta](\neg C_1) \vee \ldots \vee [\beta](\neg C_n)) \to [\beta]((\neg C_1) \vee \ldots \vee (\neg C_n)).$$

Применяя правило силлогизма, заключаем, что в PDL выводима формула

$$(B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_m) \to [\beta]((\neg C_1) \vee \ldots \vee (\neg C_n)).$$

Применяя допустимое правило вывода

$$\frac{(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n) \to B}{([\alpha]A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ [\alpha]A_n) \to [\alpha]B}$$

к данной формуле, заключаем, что в PDL выводима формула

$$([\alpha]B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ [\alpha]B_m) \to [\alpha][\beta]((\neg C_1) \vee \ldots \vee (\neg C_n)).$$

Следовательно, последняя формула принадлежит множеству x.

Ввиду того, что $([\alpha]B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ [\alpha]B_m) \in x$ (так как по предположению $\forall i = 1, \ldots, m \ \ [\alpha]B_i \in x$), заключаем, что $[\alpha][\beta]((\neg C_1) \vee \ldots \vee (\neg C_n)) \in x$.

Так как имеет место **A**, то из последнего соотношения вытекает соотношение $((\neg C_1) \vee \ldots \vee (\neg C_n)) \in y$, откуда ввиду PDL–полноты множества y следует, что $\exists y \in \{1, \ldots, n\} : \neg C_i \in y$. Данное соотношение противоречит соотношению $C_i \in y$.

Таким образом, множество U является PDL–непротиворечивым.

Как уже было отмечено выше, каждое PDL–непротиворечивое множество (в частности, множество U) содержится в некотором PDL–полном множестве. В качестве искомого z можно взять произвольное PDL–полное множество, содержащее U.

Соотношения $\forall B \in Fm \ \ ([\alpha]B \in x \Rightarrow B \in z)$ и $\forall C \in Fm \ \ ([\beta]C \in z \Rightarrow C \in y)$ вытекают из определения множества U и из того, что $U \subseteq z$.

Доказательство (B) $\Rightarrow$ (A):

$[\alpha][\beta]A \in x \Rightarrow [\beta]A \in z \Rightarrow A \in y.$

$\underline{R_{\alpha\vee\beta} = R_\alpha \cup R_\beta}$**:**

Покажем, что $\forall x, y \in W_{PDL}$ имеет место эквиваленция

$$(x, y) \in R_{\alpha\vee\beta} \Leftrightarrow (x, y) \in R_\alpha, \ \ \text{или} \ \ (x, y) \in R_\beta$$

т.е. эквивалентны следующие условия:

A: $\forall A \in Fm([\alpha \vee \beta]A \in x \Rightarrow A \in y)$

B: $\forall A \in Fm([\alpha]A \in x \Rightarrow A \in y)$ или $\forall A \in Fm([\beta]A \in x \Rightarrow A \in y)$

Заметим, что из того, что x и y содержат формулу $[\alpha \vee \beta]A \leftrightarrow [\alpha]A \;\&\; [\beta]A$ (являющуюся частным случаем схемы аксиом Un), вытекает, что $[\alpha \vee \beta]A \in x \Leftrightarrow [\alpha]A \in x$ и $[\beta]A \in x$, а также $[\alpha \vee \beta]A \in y \Leftrightarrow [\alpha]A \in y$ и $[\beta]A \in y$.

Теперь докажем эквивалентность двух приведённых выше условий.

Доказательство (A) $\Rightarrow$ (B):

Пусть **(A)** имеет место, а **(B)** – нет, т.е. $\exists B \in Fm : [\alpha]B \in x, B \notin y$ и $\exists C \in Fm : [\beta]C \in x, C \notin y$.

Обозначим символом A формулу $B \vee C$.

Нетрудно установить, что формула $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$ выводима в K (так как она истинна в каждой модели Крипке). Поэтому формулы $([\alpha]B \vee [\alpha]C) \to [\alpha](B \vee C)$ и $([\beta]B \vee [\beta]C) \to [\beta](B \vee C)$ выводимы в PDL, и, следовательно, принадлежат множеству x.

По предположению, $[\alpha]B \in x$ и $[\beta]C \in x$. Используя вышесказанное, заключаем, что имеют место соотношения $[\alpha](B \vee C) \in x$ и $[\beta](B \vee C) \in x$.

Таким образом, имеют место соотношения

1. $[\alpha \vee \beta](B \vee C) \in x$,
   так как $([\alpha](B \vee C) \;\&\; [\beta](B \vee C) \leftrightarrow [\alpha \vee \beta](B \vee C)) \in x$,
2. $(B \vee C) \notin y$,
   так как $B \notin y$ и $C \notin y$.

Это противоречит **(A)**.

Доказательство (B) $\Rightarrow$ (A):

Пусть **(B)** имеет место, а **(A)** – нет, т.е. $\exists A \in Fm : [\alpha \vee \beta]A \in x, A \notin y$.

Как уже было отмечено выше, из $[\alpha \vee \beta]A \in x$ вытекает $[\alpha]A \in x$, откуда по предположению следует $A \in y$, что противоречит соотношению $A \notin y$.

<u>$R_{A?} = \{(x, x) \mid x \in \varphi_{PDL}(A)\}$</u>**:**

Покажем, что $\forall x, y \in W_{PDL}$ имеет место эквиваленция

$$(x, y) \in R_{A?} \Leftrightarrow x = y \;\text{ и }\; x \in \varphi_{PDL}(A)$$

Левую часть в данной эквиваленции можно переписать следующим образом: $\forall B \in Fm([A?]B \in x \Rightarrow B \in y)$, или (учитывая аксиому $Test$) – $\forall B \in Fm((A \to B) \in x \Rightarrow B \in y)$.

Правую часть в данной эквиваленции можно переписать (учитывая определение отображения φ_{PDL}) следующим образом: $x = y$ и $A \in x$.

Таким образом, надо доказать, что эквивалентны следующие условия:

A: $\forall B \in Fm((A \to B) \in x \Rightarrow B \in y)$

B: $x = y$ и $A \in x$

Доказательство (A) $\Rightarrow$ (B):

Для доказательства соотношения $x = y$ достаточно доказать включение $x \subseteq y$ (так как ситуация, когда одновременно $x \subseteq y$ и $x \neq y$, невозможна ввиду того, что x и y – PDL–полные множества).

Если $B \in x$, то $(A \to B) \in x$ (так как x содержит тавтологию $B \to (A \to B)$). Согласно **A**, из $(A \to B) \in x$ следует, что $B \in y$. Таким образом, $\forall B \in Fm(B \in x \Rightarrow B \in y)$, т.е. $x \subseteq y$.

Соотношение $A \in x$ обосновывается следующим образом. Если в **A** в качестве формулы B взять формулу A, то импликация в **A** примет вид $(A \to A) \in x \Rightarrow A \in y$. Посылка данной импликации истинна, т.к. формула $A \to A$ является тавтологией. Поэтому имеет место соотношение $A \in y$. Учитывая доказанное выше равенство $x = y$, получаем: $A \in x$.

Доказательство (B) $\Rightarrow$ (A):

Из $A \in x$ и $A \to B \in x$ следует, что $B \in x$.

$(R_\alpha)^* \subseteq R_{\alpha^*}$**:**

Для доказательства включения $(R_\alpha)^*(= Id_{W_{PDL}} \cup R_\alpha \cup (R_\alpha)^2 \cup \ldots) \subseteq R_{\alpha^*}$ достаточно доказать, что

1. $Id_{W_{PDL}} \subseteq R_{\alpha^*}$
2. и $R_\alpha \circ R_{\alpha^*} \subseteq R_{\alpha^*}$.

Доказательство включения $Id_{W_{PDL}} \subseteq R_{\alpha^*}$**:**

Надо доказать, что $\forall x \in W_{PDL}\ \ (x, x) \in R_{\alpha^*}$,
т.е. $\forall x \in W_{PDL}, \forall A \in Fm([\alpha^*]A \in x \Rightarrow A \in x)$.

Данное соотношение вытекает из того, что x содержит формулу $[\alpha^*]A \to (A \,\&\, [\alpha][\alpha^*]A)$ являющуюся частным случаем схемы аксиом Mix.

Доказательство включения $R_\alpha \circ R_{\alpha^*} \subseteq R_{\alpha^*}$**:**

Надо доказать, что из $(x, z) \in R_\alpha$ и $(z, y) \in R_{\alpha^*}$ следует, что $(x, y) \in R_{\alpha^*}$, т.е. из

1. $\forall A \in Fm([\alpha]A \in x \Rightarrow A \in z)$, и
2. $\forall B \in Fm([\alpha^*]B \in z \Rightarrow B \in y)$

следует, что $\forall C \in Fm([\alpha^*]C \in x \Rightarrow C \in y)$.

Если $[\alpha^*]C \in x$, то, учитывая аксиому Mix, заключаем, что $[\alpha][\alpha^*]C \in x$.

Согласно (1), из $[\alpha][\alpha^*]C \in x$ следует $[\alpha^*]C \in z$, откуда согласно (2) следует, что $C \in y$.

$\underline{\forall \pi \in \Pi V \quad (R_\pi)^* \neq R_{\pi^*}}$**:**

Пусть U есть следующее множество формул PDL:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle \pi^* \rangle p, \neg p, [\pi]\neg p, [\pi^2]\neg p, \ldots, [\pi^k]\neg p, \ldots\}$$

(где $p \in PV, \pi \in \Pi V, \forall k \geq 1 \ \ \pi^k = \pi \circ \ldots \circ \pi$ (k раз)).

Покажем, что множество U является PDL–непротиворечивым.

Пусть это не так, т.е. существует некоторое конечное подмножество $U' \subset U$, такое, что формула, являющаяся отрицанием конъюнкции формул из множества U' (обозначим данную формулу знакосочетанием $\neg(\& U')$) выводима в PDL.

Пусть N есть такое натуральное число, что $\forall n \geq N \quad [\pi^n]\neg p \notin U'$ (такое N существует ввиду того, что множество U' конечно).

Определим тройку $(W, \{S_\gamma \mid \gamma \in \Pi V\}, \psi)$ следующим образом:

1. $W \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \ldots\}$ (множество всех натуральных чисел),
2. $S_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \{(k, k+1) \mid k \geq 0\}$;
   отношение перехода для всех остальных программных переменных произвольно,
3. $\psi(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{N+1, N+2, \ldots\}$;
   значение отображения ψ на всех остальных пропозициональных переменных произвольно.

Как уже было отмечено выше, данную тройку можно доопределить до некоторой правильной динамической модели $(W, \{R_\alpha \mid \alpha \in Pg\}, \varphi)$.

Нетрудно доказать, что в точке 0 этой модели истинны все формулы из множества U', и, следовательно, формула $\neg(\& U')$ в точке 0 данной модели ложна.

Но если формула $\neg(\& U')$ выводима в PDL, то она истинна в каждой правильной динамической модели. Поэтому формула $\neg(\& U')$ истинна в точке 0 вышеуказанной модели, что невозможно.

Таким образом, множество U является PDL–непротиворечивым, и, следовательно, существует некоторое PDL–полное множество x, содержащее U.

Так как $\neg[\pi^*]\neg p(= \langle\pi^*\rangle p) \in U \subseteq x$ и $[\pi^*]\top \in x$ (так как эта формула является аксиомой нормальности), то $[\pi^*](\top \to \neg p) \notin x$.

Действительно, если $[\pi^*](\top \to \neg p) \in x$, то (ввиду того, что $[\pi^*](\top \to \neg p) \to ([\pi^*]\top \to [\pi^*]\neg p) \in x$) заключаем, что $([\pi^*]\top \to [\pi^*]\neg p) \in x$, откуда (ввиду того, что $[\pi^*]\top \in x$) следует: $[\pi^*]\neg p \in x$, что противоречит соотношению $\neg[\pi^*]\neg p \in x$.

Из соотношения $[\pi^*](\top \to \neg p) \notin x$ следует, что $\exists y \in R_{\pi^*}(x)$: $(\top \to \neg p) \notin y$. (Это доказывается так же как импликация $\Box A \notin x \Rightarrow \exists y \in R(x) : A \notin y$ для канонической модели произвольной мономодальной логики.)

Из соотношения $(\top \to \neg p) \notin y$ следует, что $\neg p \notin y$ (так как если $\neg p \in y$, то, ввиду того, что y содержит тавтологию $\neg p \to (\top \to \neg p)$, получаем, что $(\top \to \neg p) \in y$).

Из $\neg p \notin y$ следует, что $p \in y$.

Покажем, что $(x, y) \notin (R_\pi)^*$, т.е. $\forall k \geq 0 \quad (x, y) \notin (R_\pi)^k$.

Так как $\neg p \in U \subseteq x$ и $p \in y$, то $x \neq y$, т.е. $(x, y) \notin Id_{W_{PDL}}$ $(= (R_\pi)^0)$.

Если $\exists k \geq 1 : (x, y) \in (R_\pi)^k$ $(= R_{\pi^k})$, то, ввиду того, что $[\pi^k]\neg p \in U \subseteq x$, получаем соотношение $\neg p \in y$, которое противоречит установленному выше соотношению $p \in y$.

Таким образом,

1. $(x, y) \notin (R_\pi)^*$,
2. $(x, y) \in R_{\pi^*}$ (это следует из определения y),

и, следовательно, множества $(R_\pi)^*$ и R_{π^*} не совпадают, что и требовалось доказать.

■