

## НЕ 2\_3: Елементи теорії портфеля (лабораторне заняття 2 год, 10 балів).

**Задача 1.** Сподівана норма прибутку акцій виду  $A_1$  становить 60%, оцінка ризику цих акцій (середньоквадратичне відхилення) — 20%. Для акцій виду  $A_2$  відповідно сподівана норма прибутку — 40%, оцінка ризику — 15%. Коефіцієнт кореляції для цих акцій  $\rho_{12} = 0,35$ . На основі цих акцій створюється ПЦП. Необхідно:

1) обчислити сподівану норму прибутку та оцінити ризик ПЦП, якщо акції виду  $A_1$  складають 20% вартості цього портфеля;

2) обчислити сподівану норму прибутку та оцінити ризик ПЦП, якщо акції виду  $A_1$  складають 80% вартості ПЦП;

3) створити оптимальний ПЦП (тобто такий, що має мінімальний ризик).

**Розв'язання.** 1) Згідно з умовою частка акцій виду  $A_1$  в ПЦП  $x_1 = 0,20$ , а тому частка акцій виду  $A_2$   $x_2 = 0,80$ . Тоді

$$m_{\Pi} = x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0,20 \cdot 60 + 0,80 \cdot 40 = 44(\%)$$

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{0,20^2 \cdot 20^2 + 0,80^2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 0,20 \cdot 0,80 \cdot 0,35 \cdot 20 \cdot 15} = 13,91(\%).$$

2) Оскільки в цьому випадку  $x_1 = 0,80$ ,  $x_2 = 0,20$ , то отримуємо:

$$m_{\Pi} = 0,8 \cdot 60 + 0,2 \cdot 40 = 56(\%);$$

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{0,8^2 \cdot 20^2 + 0,2^2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,35 \cdot 20 \cdot 15} = 17,28(\%).$$

3) Оскільки  $\rho_{12} = 0,35 < \frac{15}{20} = 0,75$ , то

$$x_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2} = \frac{15^2 - 0,35 \cdot 20 \cdot 15}{20^2 + 15^2 - 2 \cdot 0,35 \cdot 20 \cdot 15} = 0,29;$$

$$x_2^* = 1 - x_1^* = 0,71;$$

$$m_{\Pi}^* = x_1^* m_1 + x_2^* m_2 = 45,8(\%);$$

$$\sigma_{\Pi}^* = \sqrt{(x_1^*)^2 \sigma_1^2 + (x_2^*)^2 \sigma_2^2 + 2 x_1^* x_2^* \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} = 13,79(\%).$$

**Задача 2.** Виходячи з умови задачі 1, знайти структуру ПЦП:

а) сподівана норма прибутку якого становила б 50%;

б) оцінка ризику якого становила б 16%.

**Розв'язання.** а) Скориставшись тим, що

$$\begin{cases} m_{\Pi} = x_1 m_1 + x_2 m_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases},$$

отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 50 = 60x_1 + 40x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримуємо, що  $x_1 = 0,5$ ,  $x_2 = 0,5$ ,

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{0,5^2 \cdot 20^2 + 0,5^2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,35 \cdot 20 \cdot 15} = 14,45(\%).$$

б) Скориставшись тим, що

$$\begin{cases} x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = \sigma_{\Pi}^2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases},$$

отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 400x_1^2 + 225x_2^2 + 210x_1x_2 = 256 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

Ця система рівнянь зводиться до квадратного рівняння:

$$415 x_1^2 - 240 x_1 - 31 = 0,$$

яке має корені  $x' = -0,109$  та  $x'' = 0,687$ . Оскільки  $x' < 0$ , то в ПЦП частка ЦП виду  $A_1$  становить  $x_1 = x'' = 0,687$ , виду  $A_2$  —  $x_2 = 1 - x'' = 0,313$ .

Сподівана норма прибутку отриманого ПЦП становить  
 $m_{II} = x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0,69 \cdot 60 = 0,31 \cdot 40 = 53,84(\%)$ .

**Задача 3. (Надання кредиту).**

Інвестор сформував ефективний портфель з параметрами:  $m_E = 46,84\%$ ,  $\sigma_E = 12,388$ . Він прийняв рішення щодо розміщення 75% грошових засобів у ринковий портфель, решту — у цінні папери, що необтяжені ризиком:  $R_F = 10\%$ .

Необхідно обчислити сподівану норму прибутку та оцінити ризик портфеля інвестора.

**Розв'язання.** Оскільки  $m_E = 46,84\%$ ,  $\sigma_E = 12,388$ ,  $R_F = 10\%$ ,  $x = 0,75$ , то

$$m_{II} = (1 - x) \cdot R_F + x \cdot m_E = 0,25 \cdot 10 + 0,75 \cdot 46,84 = 37,63(\%),$$

$$\sigma_{II} = x \cdot \sigma_E = 0,75 \cdot 12,388 = 9,291(\%).$$

**Задача 4. (Отримання кредиту).**

Інвестор посідає ефективний портфель з параметрами:  $m_E = 46,84\%$ ,  $\sigma_E = 12,388$ . Він прийняв рішення щодо розміщення у ринковий портфель капіталу, який становить 120% по відношенню до власного капіталу.

Необхідно обчислити частку позичкових засобів, сподівану норму прибутку та оцінити ризик цього портфеля.

**Розв'язання.** Оскільки  $m_E = 46,84\%$ ,  $\sigma_E = 12,388$ ,  $R_F = 10\%$ ,  $x = 1,2$ , то

$$m_{II} = (1 - 1,2) \cdot 10 + 1,2 \cdot 46,84 = 54,208(\%),$$

$$\sigma_{II} = 1,2 \cdot 12,388 = 14,866(\%).$$

Частка позичкових засобів становить 20% ( $20\% = 120\% - 100\%$ ) обсягу власного капіталу.

### Задачі

1. Котирування акцій українських підприємств впродовж 2010 року (11 періодів) наведено в таблиці

Емітент	Періоди										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Жидачівський ЦПК	0,16	0,16	0,2	0,25	0,1	0,25	0,1	0,08	0,07	0,15	0,15
Запоріж-транспорт	0,15	0,12	0,15	0,1	0,11	0,11	0,11	0,12	0,11	0,11	0,18
Пивзавод «Рогань»	40	37	35	40	80	110	40	30	33	35	60

Необхідно:

- оцінити сподівану норму прибутку та ризик (середньоквадратичне відхилення) кожної акції;
- визначити коваріаційну та кореляційну матриці для норм прибутку цих акцій;
- на основі цих акцій сформувати ПЦП щодо збереження капіталу;
- сформувати ПЦП щодо одержання бажаного прибутку, якщо  $m_{II} = 5\%$ ;
- побудувати множину допустимих та ефективних ПЦП.

2. Акції виду  $A_1, A_2$  мають норми прибутку  $m_1$  і  $m_2$ , ступінь ризику  $\sigma_1, \sigma_2$  відповідно, коефіцієнт кореляції  $\rho_{12}$ .

- Обчислити частки акції  $A_1$  та  $A_2$  у портфелі з мінімальним ризиком.
- Обчислити сподівану норму прибутку та оцінку ризику портфеля з мінімальним ризиком.
- За якої структури портфель буде мати оцінку ризику  $\sigma_n$  (%)?
- За якої структури портфель буде мати сподівану норму прибутку  $m_c$  (%).

	$A_1$		$A_2$		$\rho_{12}$	Портфель	
	$m_1$ (%)	$\sigma_1$ (%)	$m_2$ (%)	$\sigma_2$ (%)		$m_c$ (%)	$\sigma_n$ (%)
1	10	5	50	20	-0,6	35	10
2	20	10	50	15	-1	30	12
3	40	10	60	15	-0,8	55	10
4	30	10	60	15	0,8	40	12
5	20	10	30	15	-0,3	25	10
6	25	20	50	30	-0,2	35	25

7	40	15	50	20	-0,3	46	15
8	30	15	50	20	0,6	45	16
9	40	15	20	10	0,7	35	13
10	45	10	20	5	-0,5	30	6
11	30	10	40	15	0,5	35	10
12	10	6	50	30	-0,4	40	10
13	30	15	50	30	0,4	45	20
14	25	10	40	20	0,8	35	15
15	20	10	40	15	-0,8	35	10

3. Акції виду  $A_1, A_2, A_3$  мають, відповідно, сподівані норми прибутку 10%, 20% та 50%, середньоквадратичні відхилення 2%, 10% та 20%, коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 0$ ,  $\rho_{13} = 0$  та  $\rho_{23} = -0,6$ .  
Необхідно:

- визначити структуру ПЦП щодо задачі збереження капіталу;
- визначити структуру ПЦП щодо задачі одержання бажаного прибутку при  $m_{\pi} = 30\%$ ;
- визначити структуру ПЦП щодо забезпечення приросту капіталу при  $\sigma_{\pi} = 15\%$ ;
- для всіх отриманих ПЦП обчислити сподівану норму прибутку та оцінку ризику;
- побудувати множини допустимих та ефективних ПЦП.

4. Акції виду  $A_1, A_2, A_3$  мають, відповідно, сподівані норми прибутку 20%, 40% та 60%, середньоквадратичні відхилення 10%, 18% та 30%, коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 1$ ,  $\rho_{13} = -1$  та  $\rho_{23} = -1$ .  
Необхідно:

- визначити структуру ПЦП, що має найбільшу сподівану норму прибутку при мінімальному ризику;
- побудувати множини допустимих та ефективних ПЦП.

5. Акції виду  $A_1, A_2, A_3$  мають, відповідно, сподівані норми прибутку 10%, 30% та 45%, середньоквадратичні відхилення 0%, 10% та 15%, коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 0$ ,  $\rho_{13} = 0$  та  $\rho_{23} = -0,8$ .  
Необхідно:

- визначити структуру ПЦП, що має найбільшу сподівану норму прибутку при мінімальному ризику;
- побудувати множини допустимих та ефективних ПЦП.

6. Інвестор володіє портфелем ЦП, сподівана норма прибутку якого становить  $m_n\%$ , а оцінка ризику  $\sigma_n\%$ . На ринку ЦП доступні державні облігації (майже безризикові), норма прибутку яких становить  $m_q\%$ . Інвестор прийняв рішення щодо розміщення  $x_n\%$  засобів у ринковий портфель, решту – у державні облігації.

- Обчислити сподівану норму прибутку та оцінку ризику такого портфеля.
- Знайти структуру портфеля, оцінка ризику якого має бути рівною  $\sigma_{pn}\%$ .

$m_n(\%)$	50	40	50	50	40	30	40	30	50	30
$\sigma_n(\%)$	20	15	20	20	15	12	15	14	20	13
$m_q(\%)$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$x_n(\%)$	80	60	120	75	70	110	90	70	85	55
$\sigma_{pn}(\%)$	15	11	15	12	10	5	12	8	10	11

7. Сподівані норми прибутку акцій виду  $A_1, A_2, A_3$  та  $A_4$  становлять відповідно 60%, 50%, 40% та 70%. Ризики цих акцій становлять 40%, 30%, 25% та 50%. Тісноту зв'язку між нормами прибутку цих акцій відображають коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 0,2$ ;  $\rho_{13} = -0,3$ ;  $\rho_{23} = -0,5$ ;  $\rho_{14} = 0,9$ ;  $\rho_{24} = 0,7$ ;  $\rho_{34} = -0,3$ .

Необхідно сформулювати з цих акцій ПЦП, що має мінімальний ризик. Оцінити його сподівану норму прибутку та його ризик.

8. З акцій виду  $A_1, A_2, A_3$  та  $A_4$ , описаних у прикладі 7, сформулюйте ефективний портфель, якщо  $R_F = 0$ . Розв'яжіть задачу 8, якщо  $R_F = -10\%$ , якщо  $R_F = -100$ .

9. Результати спостережень за нормами прибутку акцій виду  $A_1$  та  $A_2$  протягом минулих 5 періодів подано в табл.

Період	Норма прибутку (%)	
	$A_1$	$A_2$
1	15	16
2	13	20
3	12	12
4	13	20
5	17	12

Необхідно:

- побудувати множину ефективних ПЦП;
- знайти структуру ПЦП, що має мінімальний ризик;
- знайти структуру ринкового ПЦП, якщо  $R_E = 0\%$ ;  $R_F = 10\%$ .
- знайти оптимальну структуру ПЦП, сподівана норма прибутку якого становить 15,25%;
- знайти оптимальну структуру ПЦП, сподівана норма прибутку якого становить 3,5%;
- для всіх отриманих ПЦП обчислити сподівану норму прибутку та величину ризику.

**10.** Акції виду  $A_1, A_2, A_3$  мають, відповідно, сподівані норми прибутку 10%, 20% та 50%, середньоквадратичні відхилення 2%, 10% та 20%, коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 0$ ,  $\rho_{13} = 0$  та  $\rho_{23} = -0,6$ .

Необхідно:

- побудувати множини допустимих та ефективних ПЦП;
- визначити оптимальну структуру ПЦП щодо збереження капіталу;
- визначити оптимальну структуру ПЦП щодо збільшення приросту капіталу при  $m_C = 30\%$ ;
- визначити оптимальну структуру ПЦП щодо максимального збільшення приросту капіталу при  $\sigma_C = 15\%$ ;
- для всіх отриманих ПЦП обчислити сподівану норму прибутку та величину ризику.

**11.** Акції виду  $A_1, A_2, A_3$  мають, відповідно, сподівані норми прибутку 20%, 40% та 60%, середньоквадратичні відхилення 10%, 18% та 30%, коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 1$ ,  $\rho_{13} = -1$  та  $\rho_{23} = -1$ .

Необхідно:

- побудувати множини допустимих та ефективних ПЦП;
- визначити структуру ПЦП, що має найбільшу сподівану норму прибутку при мінімальному ризику;
- обчислити сподівану норму прибутку та величину ризику для отримання ПЦП.

**12.** Акції виду  $A_1, A_2, A_3$  мають, відповідно, сподівані норми прибутку 10%, 30% та 45%, середньоквадратичні відхилення 0%, 10% та 15%, коефіцієнти кореляції  $\rho_{12} = 0$ ,  $\rho_{13} = 0$  та  $\rho_{23} = -0,8$ .

Необхідно:

- для ЦП, обтяжених ризиком, побудувати множину ефективних ПЦП;
- встановити, як поступив інвестор, коли виявилось, що ПЦП, сформований з усіх наявних ЦП, має сподівану норму прибутку 25%;
- встановити, у якому випадку ПЦП матиме сподівану норму прибутку в межах 40%;
- визначити рівні ризиків для цих ПЦП;
- проаналізувати, до якої категорії людей можна віднести інвестора у випадку б) та у випадку в).