Mathematik für Informatiker I

Andre Johnson

5. Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Aussagen

1.1.1 Logische Verknüpfungen (Junktoren)

Definition 1.1

Seine im Folgenden A und B Aussagen

(i) Die *Negation* von A ist die Aussage "nicht A". Wir verwenden die Schreibweise

$$\neg A \tag{1.1}$$

Wenn A wahr ist, dann ist $\neg A$ falsch. Wenn A falsch ist, dann ist $\neg A$ wahr.

(ii) Die Verbindung von A und B durch "und" heißt *Konjunktion*. Wir schreiben

$$A \wedge B \tag{1.2}$$

$A \wedge B$ ist wahr, wenn A und B wahr sind, sonst falsch.

(iii) Die Verkettung von A und B durch "oder" heißt *Disjunktion* wir schreiben

$$A \vee B \tag{1.3}$$

$A \vee B$ ist falsch, wenn A und B beide falsch sind.

(iv) Die Verkettung von A und B zu "wenn A, dann B" heißt *logische Folgerung* oder *Implikation*. Wir schreiben

$$A \Rightarrow B \tag{1.4}$$

A heißt *Voraussetzung*, B *Behauptung* der Implikation. Die Implikation ist wahr, wenn A falsch ist oder B wahr ist, andernfalls ist die falsch.

(v) Die Verkettung von A und B zu "genau dann A, wenn B" heißt *Äquivalenz*. Wir schreiben

$$A \Leftrightarrow B \tag{1.5}$$

Die Äquivalenz ist wahr, wenn A und B den selben Wahrheitswert haben.

Wahrheitstafel

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow b$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Definition 1.2

Ein logischer Ausdruck, der für beliebige Wahrheitswerte der enthaltenen Aussagen immer wahr ist, heißt *Tautologie*.

Satz 1.3

A und B seien Aussagen.
Dann sind folgende Aussagen Tautologien:

a) *De Mogan'sche Regeln*:

$$\neg\,(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \tag{1.6}$$
$$\neg\,(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \tag{1.7}$$

b)

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1.8}$$

1.2 Mengen

Schreibeweise:

$x \in M$ steht für die Aussage "x ist ein *Element* der Menge M"

Definition 1.4: Standardbezeichnungen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\} \textit{ natürliche Zahlen} \tag{1.9}$$
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\} \textit{ natürliche Zahlen mit Null} \tag{1.10}$$
$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} \textit{ ganze Zahlen} \tag{1.11}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \textit{ rationale Zahlen} \tag{1.12}$$
$$\mathbb{R} \quad \textit{reele Zahlen} \tag{1.13}$$
$$\emptyset \quad \textit{leere Menge} \tag{1.14}$$

1.2.1 Beschreibung von Mengen

Beschreibung von Mengen

- Durch *Aufzählen der Elemente*
  Bsp.:

$$M = \{1, 2, 3\} \tag{1.15}$$
$$G = \{2, 4, 6, 8, ...\} \tag{1.16}$$

- in *beschreibender Form*
  Bsp.:

$$G = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist gerade}\} \tag{1.17}$$
$$= \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\} \tag{1.18}$$

Allgemeine Form:

$$M = \{x : A(x)\}\ A \text{ Aussage} \tag{1.19}$$

- in *abgekürzter beschreibender Form*
  Bsp.:

$$G = \{2m : m \in \mathbb{N}\} \tag{1.20}$$

1.3 Existenz- und Allquantoren

Definition 1.5

Sei M eine nicht-leere Menge, und für jedes $x \in M$ sei $A(x)$ eine Aussage.

(i) Die Aussage "Für Alle $x \in M$ gilt $A(x)$." bezeichnen wir mit

$$\forall\ x \in M : A(x)\ (\forall\ \textit{Allquantor}) \tag{1.21}$$

(ii) Die Aussage "Es gibt ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt" bezeichnen wir mit

$$\exists\ x \in M : A(x)\ (\exists\ \textit{Existenzquantor}) \tag{1.22}$$

(iii) Die Aussage "Es gibt genau ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt" bezeichnen wir mit

$$\exists!\ x \in M : A(x) \tag{1.23}$$

Lemma 1.6

Sei M eine nicht leere Menge und für jedes $x \in M$ sei $A(x)$ eine Aussage. Dann gilt:

$$\neg\,(\forall\ x \in M : A(x)) \Leftrightarrow (\exists\ x \in M : A(x)) \tag{1.24}$$

1.4 Mengenoperationen

Definition 1.7

Seien X und Y Mengen

- X heißt *Teilmenge* von Y, falls gilt

$$\forall\, x \in X : x \in Y \tag{1.25}$$

  Wir schreiben dann:

$$X \subseteq Y \tag{1.26}$$

  (*Inklusion* von X in Y)

- Wenn X keine Teilmenge von Y ist, schreiben wir

$$X \nsubseteq Y \tag{1.27}$$

- X heißt Teilmenge von Y und $X \neq Y$: Wir schreiben dann

$$X \subset Y \text{ oder } X \subsetneq Y \tag{1.28}$$
$$(\forall\, x \in X : x \in Y) \wedge (\exists\, y \in Y \notin X) \tag{1.29}$$

- *Durchschnitt*

$$X \cap Y := \{z : z \in X \wedge z \in Y\} \tag{1.30}$$

- *Vereinigung*

$$X \cup Y := \{z : z \in X \vee z \in Y\} \tag{1.31}$$

- *Differenzmenge*

$$X \setminus Y := \{z : z \in X \wedge z \notin Y\} \tag{1.32}$$

- Falls $Y \subseteq X$, dann heißt $X \setminus Y$ das *Komplement* von Y in X
- Wenn $X \cap Y = \emptyset$, dann heißen X und Y *disjunkt*

Satz 1.8

Sei M eine Menge und X, Y, Z Teilmengen von M. Dann gelten

a)

$$M \cap \emptyset = \emptyset \tag{1.33}$$
$$X \cup M = M \tag{1.34}$$
$$X \cup \emptyset = X \tag{1.35}$$
$$X \cap M = M \tag{1.36}$$

b) *Idempotenz*

$$X \cup X = X \tag{1.37}$$
$$X \cap X = X \tag{1.38}$$

c) *Kommutativität*

$$X \cap Y = Y \cap X \tag{1.39}$$
$$x \cup Y = Y \cup X \tag{1.40}$$

d) *Assoziativität*

$$(X \cup Y) \cap Z = X \cap (Y \cup Z) \tag{1.41}$$
$$(X \cap Y) \cup Z = X \cup (Y \cap Z) \tag{1.42}$$

e)

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \tag{1.43}$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \tag{1.44}$$

f)

$$M \setminus (X \cap Y) = (M \setminus X) \cup (M \setminus Y) \tag{1.45}$$
$$M \setminus (X \cup Y) = (M \setminus X) \cap (M \setminus Y) \tag{1.46}$$

Um zu beweisen, dass zwei Mengen A und B gleich sind, zeigt man oft $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

Definition 1.9

Seien X, Y Mengen.
Das *kartesische Produkt* von X und Y ist

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} \tag{1.47}$$

$(x, y) \in X \times Y$ heißt *geordnetes Paar*.
Allgemein definiert man für Mengen $X_1, X_2, ..., X_n$

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i \text{ für alle } i \in [1, n]\} \tag{1.48}$$

$(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ heißt *geordnetes n-Tupel*

Kapitel 2

Relationen & Funktionen

2.1 Grundbegriffe zu Relationen

Definition 2.1

Seien A, B Mengen, $G \subseteq A \times B$
Dann bezeichnet man das Tripel (A, B, G) als zweistellige/binäre *Relation* zwischen A und B. G heißt *Graph* der Relation.
Wenn $(a, b) \in G$, dann sagen wir, dass a und b in *Relation zueinander stehen*, oder *reliert* sind. Wir schreiben dann

$$a \sim b \tag{2.1}$$

Falls $A = B$, heißt (A, A, G) *Relation auf A*
Bemerkung: Manchmal wird $\sim$ oder G als Relation bezeichnet.

Definition 2.2

Sei A eine Menge, (A, A, G) Relation auf A. Die Relation heißt

- *reflexiv*, falls $a \sim a$ für jedes $a \in A$
- *symmetrisch*, falls aus $a \sim b$ stets folgt, dass $b \sim a$

- *antisymmetrisch*, falls aus $a \sim b$ und $b \sim a$ stets folgt, dass, $a = b$[1]
- *transitiv*, falls aus aus $a \sim b$ und $b \sim c$ stets folgt, dass, $a \sim c$

Definition 2.3

Sei (A, B, G) eine Relation. Setze

$$G^{-1} := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in G\} \tag{2.2}$$

(B, A, G^{-1}) heißt die zu (A, B, G) *inverse Funktion*. Falls $(b, a) \in G^{-1}$, schreiben wir

$$b \overset{-1}{\sim} a \tag{2.3}$$

2.2 Abbildungen und Funktionen

Definition 2.4

Seien X, Y Mengen
Eine *Abbildung* (*Funktion* von X nach Y) ist gegeben durch eine *Vorschrift* f, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Man schreibt

$$y = f(x) \tag{2.4}$$

Für die gesamte Abbildung schreibt man

$$f : X \to Y \tag{2.5}$$

Für $x \in X$ schreiben wir

$$x \mapsto f(x) \tag{2.6}$$

X heißt der *Definitionsbereich* von f
Y heißt der *Ziel-/Wertebereich* von f
Bemerkung: Die *Zuordnung* f definiert eine Relation (X, Y, G) durch

$$(x, y) \in G :\Leftrightarrow y = f(x) \tag{2.7}$$

[1] antisymetrisch $\Leftrightarrow \forall\ (a, b) \in A \times B : ((a, b) \in G \wedge (b, a) \in G \Rightarrow a = b)$

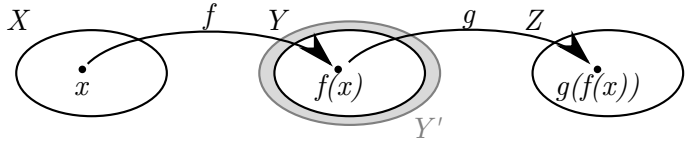


Abbildung 2.1: Komposition

Definition 2.5

Sei $f : X \to Y$ Abbildung

- Für $Z \subseteq X$ definieren wir

$$f(Z) := \{y \in Y : \exists x \in Z : f(x) = y\} \tag{2.8}$$
$$= \{f(x) : x \in Z\} \tag{2.9}$$

  $f(Z)$ heißt das *Bild von Z unter f*
  $f(X)$ heißt das *Bild von f*

- Für $M \subseteq Y$ definieren wir

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : f(x) \in M\} \tag{2.10}$$

  f^{-1} heißt das *Urbild von M unter f*

Definition 2.6

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y' \to Z$, wobei $Y \subseteq Y'$
Die *Komposition/Verkettung/Hintereinanderausführung*

$$g \circ f : X \to Z \tag{2.11}$$

ist definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g\,(f\,(x)) \text{ für alle } x \in X \tag{2.12}$$

Lemma 2.7

Die Komposition von Abbildungen ist *assoziativ*, d. h. wenn $f : X \to Y, g : Y' \to Z$ und $h : Z' \to W$ Abbildungen sind mit $Y \subseteq Y'$ und $Z \subseteq Z'$, dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f \tag{2.13}$$

Definition 2.8

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*: falls für alle $a, b \in X$ gilt

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \tag{2.14}$$

- *surjektiv*: falls

$$f(X) = Y \tag{2.15}$$

- *bijektiv*: wenn f surjektiv und injektiv ist

Lemma 2.9

Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y, g : Y \to Z$

1) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
2) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
3) Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv.

Definition 2.10

Sei M eine Menge. Die Abbildung

$$\mathrm{id}_X : X \to X \tag{2.16}$$
$$\mathrm{id}_X(x) : x \mapsto x \text{ für alle } x \in X \tag{2.17}$$

heißt *identische Abbildung*.

Satz 2.11

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(A) f ist bijektiv (2.18)

(B) Es gibt eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $g = f = \mathrm{id}_X$ und $f = g = \mathrm{id}_Y$ (2.19)

Beweis: siehe **??**, S. **??**

2.3 Äquivalenzrelationen

Definition 2.12

Sei M eine nicht-leere Menge.
Eine Relation auf M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv[2], symmetrisch[3] und transitiv[4] ist. Für $x \in M$ nennt man

$$[x]_\sim := [x] := \{y \in M : x \sim y\} \tag{2.20}$$

die *Äquivalenzklasse* von x.
Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet man mit $M/\sim$

Definition 2.13

Sei M eine nicht-leere Menge, I eine Indexmenge.
Eine *Partition* von M ist eine Menge

$$\{A_i : A_i \subseteq M, i \in I\} \tag{2.21}$$

von Teilmengen von M, so dass

(i)

$$A_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I \tag{2.22}$$

[2]reflexiv: $\forall\, a \in A : a \sim a$, d. h. $(a, a) \in G$
[3]symmetrisch: $\forall\, a \in A : \forall\, b \in A : a \sim b \Rightarrow b \sim a$
[4]transitiv: $\forall\, a \in A : \forall\, b \in A : \forall\, c \in A : (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$

(ii) für $i, j \in I$ mit $i \neq j$,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \tag{2.23}$$

(iii) [5]

$$\bigcup_{i \in I} A_i = M \tag{2.24}$$

Satz 2.14

Sei M eine nichtleere Menge

a) Für jede Äquivalenzklasse auf M ist $M/\sim$ eine Partition von M

b) Ist $\{A_i \subseteq M : i \in I\}$ eine Partition von M, dann ist

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{ Es gibt ein } i \in I \text{ so dass } x, y \in A_i \tag{2.25}$$

eine Äquivalenzrelation auf M. Es gilt

$$M/\sim = \{A_i : i \in I\} \tag{2.26}$$

Definition 2.15

Zwei Mengen X, Y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.
Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie gleichmächtig ist zu einer Menge der Form $\{1, 2, 3, ..., n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. $n \in N$ heißt *Mächtigkeit* von M. Wir schreiben

$$|M| = n \tag{2.27}$$

Ist M nicht endlich, so schreibt man

$$|M| = \infty \tag{2.28}$$

[5] Vereinigung aller Mengen A_i mit $i \in I$

2.4 Ordnungsrelation

Definition 2.16

a) Eine *Halbordnung* auf eine Menge M ist eine reflexive, antisymmetrische[6] und transitive Relation auf M.

b) Eine *totale/binäre Ordnung* auf M ist eine Halbordnung auf M, so dass für alle $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ oder $y \sim x$

Notation: Für Halbordnungen schreiben wir für $x \sim y$ gerne

$$x \preccurlyeq y \tag{2.29}$$

Bemerkung: Halbordnungen können durch *Hasse-Diagramme* dargestellt werden. Man verbindet a und b durch eine Kante, wenn $a \preccurlyeq b$ und es kein drittes Element c ($c \neq a, c \neq b$) gibt, so dass $a \preccurlyeq c \preccurlyeq b$. Im Hasse-Diagramm steht b über a.
Bsp.: $\{1, 2, 3\}$ mit $\leq$ Relation:

Definition 2.17

Sei A eine halbgeordnete Menge, $T \subseteq A$ Teilmenge.

① Ein Element $m \in T$ heißt *minimal* in T, wenn es kein $t \in T$ mit $t \neq m$ und $t \preccurlyeq m$. (entsprechend "*maximal*")

② Wenn $m \in T$ und $m \preccurlyeq t$ für alle $t \in T$, dann heißt m *Minimum* von T. (entsprechend "*Maximum*")

③ Wenn $s \in A$ und $s \preccurlyeq t$ für alle $t \in T$, dann heißt s *untere Schranke* für T in A. (entsprechend "*obere Schranke*")

[6] antisymmetrisch: $\forall\ (a, b) \in M \times M : a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$

Beispiel Betrachte Menge $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ mit Halbordnung gegeben durch Hasse-Diagramm. Betrachte Teilmenge $T = \{a, b, c\}$

Bemerkung Die "größte" untere Schranke e (d. h. e ist untere Schranke und für jede untere Schranke s gilt $s \preccurlyeq e$) heißt *Infimum* von T in A.
Die "kleinste" obere Schranke heißt *Supremum*.

Kapitel 3

Zahlenbereiche

3.1 Natürliche Zahlen: Definition

Definition 3.1: Peano-Axiome

① 1 ist eine natürliche Zahl.

② Jede natürliche Zahl hat genau einen von 1 verschiedenen Nachfolger n^+, der eine natürliche Zahl ist (gemeint ist $n+1$).

③ Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

④ Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und der Eigenschaft, dass für alle $n \in M$ auch $n^+ \in M$ folgt, so gilt $M = \mathbb{N}$

3.1.1 Notation: Produkt- und Summenschreibweise

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$\sum_{j=k}^{n} a_j := \begin{cases} 0 \text{ falls } n < k \\ a_k \text{ falls } n = k \\ \sum_{j=k}^{n-1} \text{ falls } n > k \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\prod_{j=k}^{n} a_j := \begin{cases} 1 \text{ falls } n < k \\ a_k \text{ falls } n = k \\ \prod_{j=k}^{n-1} \text{ falls } n > k \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 Vollständige Induktion

Idee Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über n. Ist die Aussage $A(1)$ wahr ("*Induktionsanfang*") und folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n+1)$ ("*Induktionsschritt*"), dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweisskizze Sei

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr}\} \tag{3.3}$$

Dann

$$1 \in M \text{ (Induktionsanfang)} \tag{3.4}$$

Falls $n \in M$, dann gilt

$$(n+1) \in M \text{ (Induktionsschritt)} \tag{3.5}$$

Nach Peano ④ $M = \mathbb{N}$ $\square$

Lemma 3.2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + \cdots + n := \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.6}$$

Definition 3.3

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{C}$ setzt man

$$a^n := \prod_{j=1}^{n} a \tag{3.7}$$

$$\text{Insbesondere: } a^0 = 1 \tag{3.8}$$

Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ setzt man

$$a^n := (a^{-1})^{-n}, a^{-1} = \frac{1}{a} \tag{3.9}$$

Lemma 3.4

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$1 + x + \cdots + x^n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} \tag{3.10}$$

3.3 Rekursive Abbildungen

Beispiel:

$$\sum_{j=n}^{n} a_j := a_n, \sum_{j=n}^{N} := \sum_{j=n}^{N-1} a_j + a_N \text{ für } N > n \tag{3.11}$$

$$\prod_{j=n}^{n} a_j := a_n, \prod_{j=n}^{N} := \left(\prod_{j=n}^{N-1} a_j \right) \cdot a_N \text{ für } N > n \tag{3.12}$$

Definition 3.5

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$n! := \begin{cases} 1 \text{ falls } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n \text{ falls } n \geq 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

D. h.: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ für $n \geq 1$

Lemma 3.6

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt

$$n! > 2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n \text{ Faktoren}} \tag{3.14}$$

Beispiel: Die Fibonacci-Zahlen

$$F(n), n \in \mathbb{N} \text{ sind rekursiv definiert:} \tag{3.15}$$
$$F(1) := 1, F(2) := 1, F(n+1) := F(n) + F(n-1), n \geq 2 \tag{3.16}$$
$$\text{Also: } F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2 \tag{3.17}$$
$$F(4) = F(3) + F(2) = 3 \tag{3.18}$$
$$F(5) = 5 \tag{3.19}$$

Lemma 3.7

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $F(n) < 2^n$

3.4 Ganze, rationale und reelle Zahlen

Wir werden die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \tag{3.20}$$

die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} \tag{3.21}$$

und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht mathematisch sauber einführen, sondern "naiv" verwenden. Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{3.22}$$

und wir verwenden die bekannte Totalordnung auf diese Mengen

$$\text{Wichtig: } a \geq b \Leftrightarrow -b \geq -a \tag{3.23}$$

Für rationale Zahlen ("Brüche") $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ definiert man

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \tag{3.24}$$

$$\text{Bsp.: } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} = \frac{8+3}{12} \tag{3.25}$$

und

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{3.26}$$

$$\text{Bsp.: } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \tag{3.27}$$

Die reellen Zahlen kann man sich vorstellen, als die Menge aller Dezimaldarstellungen. Der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ "füllt" man die "Löcher" im Zahlenstrahl.

3.5 Komplexe Zahlen

Wir starten bei $\mathbb{R}$ und fügen das Element i dazu mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1 \tag{3.28}$$

i heißt auch *imaginäre Zahl*.

Definition 3.8

Wir definieren die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \tag{3.29}$$

wobei

$$a + bi = a' + b'i :\Leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \tag{3.30}$$

Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man

$$a = \mathrm{Re}(z) \text{ den } \textit{Realteil} \text{ und} \tag{3.31}$$
$$b = \mathrm{Im}(z) \text{ den } \textit{Imaginärteil} \tag{3.32}$$

Bemerkung $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ sind reelle Zahlen.

Definition 3.8 (fortgesetzt)
Für komplexe Zahlen $a + bi, c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definiert man

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \qquad \text{und} \tag{3.33}$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{3.34}$$

Addition von komplexen Zahlen entspricht der Addition von Vektoren.

Definition.3.9

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt

- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ der *Betrag* von z
- $\overline{z} := a - bi \in \mathbb{C}$ die *konjugent-komplexe Zahl*

Lemma 3.10

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(v) $|\overline{z}| = |z|$

Kapitel 4

Folgen und Grenzwerte

Definition 4.1

Eine (reelle) *Folge* ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir schreiben $a_n = a(n)$.
a_n heißen *Glieder* der Folge a.

Definition 4.2: Beschränktheit

Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}. |a_n| \leq L \tag{4.1}$$

4.1 Konvergenz

Definition 4.3

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, und $a_* \in \mathbb{R}$. Die Folge a konvergiert gegen a_*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N_0 : |a_n - a_*| < \varepsilon \tag{4.2}$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_*$ oder $a_n \to a_*$.
a_* heißt dann *Grenzwert* der Folge a

a heißt *konvergent*
Falls eine Folge nicht konvergent ist, heißt sie *divergent*

Bemerkung:

- Eine Folge, die gegen 0 konvergiert heißt *Nullfolge*
- Eine Folge a ist genau dann eine Nullfolge, wenn $|a| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, |a|_n := |a_n|$ eine Nullfolge ist
- Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergiert gegen $a_* \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $(a - a_*) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, (a - a_*)_n := a_n - a_*$ eine Nullfolge ist
- Eine Menge der Form $(-\varepsilon + x, x + \varepsilon), \varepsilon > 0$ heißt (offene) Umgebung von x. Konvergiert eine Folge a gegen a_*, dann liegen in jeder Umgebung von a_* alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

Satz 4.4

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine konvergente Folge. Dann ist der Grenzwert a_* eindeutig bestimmt.

Satz 4.5

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 4.6

Seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergente Folgen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_*$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_*$. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a_* + \beta b_*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n = a_* + b_*)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a_*|$

Satz 4.7: Sandwich-Theorem

Seien $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Folgen und $N_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g = \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \text{und} \tag{4.3}$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

Dann konvergiert auch b und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = g$

Bemerkung Wenn es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass eine Aussage für für alle $n \geq N_0$ gilt, dann sagt man, die Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$. (D. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele)

Korollar 4.8

Ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beschränkt und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Nullfolge, so gilt $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Lemma 4.9

Seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \tag{4.5}$$

Definition 4.10

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine wachsende Funktion:

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < \tag{4.6}$$

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reelle Folge: Dann heißt

$$a_f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a_f(n) = a_{f(n)} \tag{4.7}$$

Teilfolge von a.

Beispiel

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = 2n \tag{4.8}$$

$$a_f : a_2, a_4, a_6, \ldots \tag{4.9}$$

Bemerkung Wenn a konvergiert, dann konvergieren auch alle Teilfolgen gegen den selben Grenzwert.
Eine Folge kann konvergente Teilfolgen haben, ohne selbst zu konvergieren.
(Bsp.: $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, a_n = (-1^n)$)

4.2 Monotone Folgen

Definition 4.11

Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- *monoton*, wenn die monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ monoton fallend, $b_n = n$ monoton wachsend

Satz 4.12 Monotoniekriterien

Sei $a\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine monotone und beschränkte Folge. Dann konvergiert a, d. h. es gibt $a_* \in \mathbb{R}$ so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_*$

4.3 Uneigentliche Konvergenz

Definition 4.13

Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *(uneigentlich) konvergent gegen* ∞, wenn gilt

- $a_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

- $\frac{1}{a_n} \to 0$

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \tag{4.10}$$

(uneigentlich) konvergent gegen $-\infty$, falls gilt

- $a_n < 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{a_n} \to 0$

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{4.11}$$

Beispiel

- $a_n = n$: uneigentlich konvergent gegen ∞
- $b_n = -n$: uneigentlich konvergent gegen $-\infty$
- $c_n = (-1)^n \cdot n$: nicht uneigentlich konvergent

Satz 4.14

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton und nicht beschränkt. Dann ist a uneigentlich konvergent.

4.4 Landau-Symbole

Definition 4.15

Sei $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Referenzfolge

$$\mathcal{O}(r) := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists c > 0 \text{ so dass } |a_n| \leq c \cdot |r_n| \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\} \tag{4.12}$$

$$o(r) := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \text{ Für jedes } c > 0 \text{ gilt } |a_n| \leq c \cdot |r_n| \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\} \tag{4.13}$$

$$\Theta(r) := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : a \in \mathcal{O}(r) \text{ und } r \in \mathcal{O}(a)\} \tag{4.14}$$

Lemma 4.16

$$a \in o(r) \implies a \in \mathcal{O}(r) \tag{4.15}$$

Es gilt:

$$\cdots \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \subseteq \mathcal{O}(1) \subseteq \mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}\left(n^2\right) \subseteq \ldots \tag{4.16}$$

Satz 4.17

Sei $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt

a)

$$\mathcal{O}(r) = \left\{ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \underbrace{\left|\frac{a}{r}\right|}_{\text{Folge mit Gliedern } \frac{a_n}{r_n}} \text{ beschränkt} \right\} \tag{4.17}$$

b)

$$o(r) = \left\{ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{r_n}\right| = 0 \right\} \tag{4.18}$$

Satz 4.18 L'Hospital'sche Regel

Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ seinen gegeben durch differenzierbare Funktionen, d. h. $a_n = \tilde{a}, r_n = \tilde{r}$ mit diff.baren Funktionen $\tilde{a}, \tilde{r}$.
Falls gilt

- $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n| = 0$
- $r'(n) \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a'(n)}{r'(n)}$ existiert eigentlich oder uneigentlich

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a'(n)}{r'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{r(n)} \tag{4.19}$$

Kapitel 5

Der Ring $\mathbb{Z}$

5.1 Gruppen

Definition 5.1

Sei M eine Menge. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf M ist eine Abbildung

$$\circ : M \times M \to M \tag{5.1}$$

Die Verknüpfung heißt *assoziativ*, falls

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ für alle } x, y, z \in M \tag{5.2}$$

Sie heißt *kommutativ*, falls

$$x \circ y = y \circ x \text{ für alle } x, y \in M \tag{5.3}$$

Definition 5.2

a) Eine Menge H mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ$ heißt *Halbgruppe* $(H, \circ)$.

b) Eine Halbgruppe $(H, \circ)$ heißt *Monoid*, wenn es ein $e \in M$ gibt mit

$$e \circ m = m \circ e = m \text{ für alle } m \in M \tag{5.4}$$

Dann heißt e *neutrales Element* des Monoid.

c) Ein Monoid $(G, \circ)$ heißt *Gruppe*, falls gilt: Zu jedem $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$ so dass

$$x \circ x' = x' \circ x = e \tag{5.5}$$

Dann heißt x' *"zu x inverses Element"*.

d) Eine Gruppe mit kommutativer Verknüpfung heißt *kommutative* oder *abelsche Gruppe*.

Beispiele

- "$+$" ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- $(\mathbb{N}, +)$ ist kein Monoid, da $0 \notin \mathbb{N}$.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist abelsche Gruppe, 0 ist neutrales Element.
- "$\cdot$" ist assoziative Verknüpfung auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- $(\mathbb{Q}, \times)$ ist Monoid aber keine Gruppe, da 0 kein inverses Element hat.
- $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.

Lemma 5.3

Ein Monoid hat genau ein neutrales Element.

Beweis Angenommen e und f sind neutrale Elemente. $e = e \circ f = f$ □

Lemma 5.4

Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und $x \in G$. Dann gibt es genau ein inverses Element $y \in G$ zu x.

Beweis Seien $y, z \in G$ inverse Elemente zu x. Dann gilt
$y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z$ □

Lemma 5.5

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $x, y \in G$. Seien x' das inverse Element zu x, und y' das inverse Element zu y. Dann ist $(x \circ y)' := y' \circ x'$ das inverse Element zu $x \circ y$.

Beweis $(x \circ y) \circ (y' \circ x') = (x \circ (y \circ y')) \circ x' = (x \circ e) \circ x' = x \circ x' = e$ □

5.2 Ringe und Körper

Definition 5.6

Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen

- $\oplus$ *Addition*
- $\otimes$ *Multiplikation*

so dass gilt

1) $(R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in \mathbb{R}$
2) $(R, \otimes)$ ist Halbgruppe:
3) *Distributivität*:

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \text{ und} \tag{5.6}$$
$$(y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x) \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Dann ist $(R, \oplus, \otimes)$ ein *Ring*.

- $(R, \oplus, \otimes)$ heißt *Ring mit Eins*, falls $(R, \otimes)$ ein Monoid ist, dessen neutrales Element $1 \in \mathbb{R}$ ungleich dem neutralen Element 0 er Addition ist.
- Der Ring $(R, \oplus, \otimes)$ heißt *kommutativ*, falls $\otimes$ kommutativ ist.
- Ein kommutativer Ring mit Eins $(R, \oplus, \otimes)$ heißt *Körper*, wenn jedes Element $x \neq 0$ ein multiplikatives Inverses hat.

Beispiele

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins
- $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring ohne Eins
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Körper
- Auf $M = \{0, 1\}$ definiere

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Körper

Lemma 5.7

Sei $(R, \oplus, \otimes)$ ein Ring, 0 das neutrale Element bzgl. der Addition. Dann gilt

$$0 \otimes x = x \otimes 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

5.3 Division mit Rest

Lemma 5.8

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$.
Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ so dass $a = q \cdot m + r$.

Definition 5.9

Mit den Bezeichnungen von Lemma 5.8 heißt r der *Rest von a bei Division mit m*.
Schreibweisen:

$$r = a \underset{\texttt{a\%m}}{\bmod} m \tag{5.9}$$

$$q = a \underset{\texttt{a/m}}{\operatorname{div}} m = \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor \tag{5.10}$$

Korollar 5.10

Für $a \in \mathbb{Z}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a \operatorname{div} n) \operatorname{div} m = a \operatorname{div}(n \cdot m) \tag{5.11}$$

Definition 5.11

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.

1) a *teilt* b, wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = a \cdot z$. Schreibweise: $a \mid b$
   b heißt *Vielfaches* von a

2) Eine Zahl d heißt *größter gemeinsamer Teiler (*ggT*)* von a und b, falls gilt

   - $d \mid a$ und $d \mid b$
   - falls $z \in \mathbb{Z}$ so dass $z \mid a$ und $z \mid b$, dann gilt $z \mid d$.

   Schreibweise:

   $$d = \mathrm{ggT}(a, b) \tag{5.12}$$

   Wir definieren:

   $$\mathrm{ggT}(0, 0) := 0 \tag{5.13}$$

3) Falls $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, dann heißen a und b *teilerfremd*.

Beispiel $\mathrm{ggT}(27, 12) = 3; \mathrm{ggT}(5, 20) = 5$

5.4 Euklidischer Algorithmus

Ziel: Finde $\mathrm{ggT}(a, b)$
Eingabe: $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$
Ausgabe: $d \in \mathbb{N}$

1) Finde $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, \ldots, a-1\}$ mit $b = q \cdot a + r$

2) Falls $r = 0$, dann $d := a$ und STOP

3) Falls $r \neq 0$ rufe Algorithmus rekursiv auf mit $b := a$ und $a := r$

Beispiel

$$a = 7, b = 143 \tag{5.14}$$
$$\rightarrow 143 = 20 \cdot 7 + 3 \tag{5.15}$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \tag{5.16}$$
$$3 = 3 \cdot 1 + 0 \tag{5.17}$$
$$\rightarrow d = 1 = \mathrm{ggT}(7, 143) \tag{5.18}$$

Es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ so dass $d = x \cdot a + y \cdot b$

Satz 5.12

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$.
Dann terminiert der Euklidische Algorithmus.
Für die Ausgabezahl $d \in \mathbb{N}$ gilt:

① $d = \mathrm{ggT}(a, b)$

② Es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $d = x \cdot a + y \cdot b$

Korollar 5.13 Lemma von Bezout

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$\mathrm{ggT}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b \tag{5.19}$$

Korollar 5.14

Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind teilerfremd (d. h. $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$) genau dann, wenn es ganze Zahlen gibt mit

$$1 = x \cdot a + y \cdot b \tag{5.20}$$

Lemma 5.15

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b) = 1$. Dann gibt es $m \in \mathbb{Z}$ so dass

$$a \mid (m \cdot b - 1) \tag{5.21}$$

5.5 Primfaktorzerlegung (PFZ)

Lemma 5.16

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Falls $\mathrm{ggT}(a, c) = 1$ und $a \mid (b \cdot c)$, dann $a \mid b$.

Definition 5.17

Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt *Primzahl*, wenn sie "nur von 1 und sich selbst geteilt wird". Präzise Def.:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} : (m \mid n \implies m \in \{1, n\}) \tag{5.22}$$

Satz 5.18 Hauptsatz der Arithmetik

1) Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r; p_1, \ldots, p_r \text{ Primzahlen} \tag{5.23}$$

2) Die PFZ von n ist eindeutig im folgenden Sinne

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_r; p_i \text{ prim} \tag{5.24}$$
$$n = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_s; p_j \text{ prim} \tag{5.25}$$

Falls

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots \leq p_r \text{ und} \tag{5.26}$$
$$q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \cdots \leq q_s \tag{5.27}$$

dann

$$r = s \text{ und} \tag{5.28}$$
$$p_i = q_j \tag{5.29}$$

Satz 5.18a

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis durch Widerspruch
Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r; r \in \mathbb{N}$. Betrachte

$$n := p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r + 1 \tag{5.30}$$

Nach Satz 5.18 (S. 41) hat n eine PFZ. Aber keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilt n. $\lightning\square$

Bemerkung Aus der PFZ einer natürlichen Zahl n kann man alle natürlichen Teiler ($\neq 1$) von n durch Produkte der Primfaktoren erhalten.

Beispiel

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \tag{5.31}$$

Natürliche Teiler von 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Definition 5.19

Falls $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, dann ist das *kleinste gemeinsame Vielfache (*kgV*)* von a und b, die kleinste natürliche Zahl, die sowohl Vielfaches von a, als auch b ist. Wir schreiben:

$$\text{kgV}(a, b) := \min\{n \in \mathbb{N} : a \mid n \text{ und } b \mid n\} \tag{5.32}$$

Falls $a = 0$ oder $b = 0$,

$$\text{kgV}(a, b) := 0 \tag{5.33}$$

Beispiel $a = 125, b = 265$; PFZ: $a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$, $b = 5 \cdot 3$
$\text{ggT}(125, 265) = 5; \text{kgV}(125, 265) = 5^3 \cdot 53 = 6625 = \frac{125 \cdot 265}{\text{ggT}(125,265)}$

Lemma 5.20

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b \geq 2$
Die erweiterten PFZ seien

$$\left.\begin{array}{l} a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{\alpha_r} \\ b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{\beta_r} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{mit } p_1, \ldots, p_r \text{ prim und} \\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0 \text{ für } i = 1, \ldots, r \end{array} \tag{5.34}$$

Dann gilt

$$\text{① } \operatorname{ggT}(a,b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min\{\alpha_i \beta_i\}} \tag{5.35}$$

$$\text{② } \operatorname{kgV}(a,b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max\{\alpha_i \beta_i\}} \tag{5.36}$$

$$\text{③ } a \cdot b = \operatorname{ggT}(a,b) \cdot \operatorname{kgV}(a,b) \tag{5.37}$$

Bemerkung ggT und kgV kann man auch für mehr als zwei Zahlen definieren, aber

$$\operatorname{ggT}(a,b,c) \cdot \operatorname{kgV}(a,b,c) \neq a \cdot b \cdot c \text{ für manche } a, b, c \in \mathbb{N} \tag{5.38}$$

5.6 Rechnen modulo n

5.6.1 Addition & Multiplikation modulo n

Definition 5.21

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$x \equiv y \mod n \tag{5.39}$$

falls gilt

$$n \mid (x - y) \tag{5.40}$$

Wir sagen dann, dass x und y *kongruent modulo* n sind.

Vorsicht Nicht verwechseln mit $x = y \bmod n \in \{0, \ldots, n-1\}$

Bemerkung Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \equiv y \mod n \tag{5.41}$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Beispiele: $6 \equiv 12 \mod 6$, $6 \equiv 0 \mod 6$, $15 \equiv 21 \mod 6$
Wir betrachten die Äquivalenzklassen

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z} : y \equiv x \mod n\} \tag{5.42}$$
$$= \{y \in \mathbb{Z} : n \mid (y - x)\} \tag{5.43}$$

$$\mathbb{Z}/_\sim = \{[0], [1], \ldots [n-1]\} \tag{5.44}$$

ist eine Partition von $\mathbb{Z}$ (Satz 2.14, S. 18). Schreibweise: $\mathbb{Z}/_\sim =: \mathbb{Z}_n$

Definition 5.22

Für $[x], [y] \in \mathbb{Z}_n$ definieren wir

$$[x] + [y] := [x + y] \tag{5.45}$$
$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y] \tag{5.46}$$

Satz 5.23

1. Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{Z}_n$ sind wohldefiniert, d. h. unabhängig vom Repräsentanten.

2. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

Beispiele $n = 2, \mathbb{Z}_2 = \{ \underbrace{[0]}_{\text{gerade Zahlen}} , \underbrace{[1]}_{\text{ungerade Zahlen}} \}$

$+$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$

$n = 3, \mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[1]$

$n = 4, \mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[0]$	$[2]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Beobachtung bei Multiplikation: In den Zeilen der Klassen, die teilerfremd zu n sind, kommen alle Äquivalenzklassen vor (z. B.die Zeilen [1] und [3] bei $n = 4$).

5.6.2 Einheiten und Inverse

Definition 5.24

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Ein Element heißt *Einheit* oder *invertierbar*, falls es $y \in R$ gibt, mit

$$x \cdot y = y \cdot x = \underbrace{1}_{\text{Eins-Element}} \tag{5.47}$$

Schreibweise:

$$R^* := \{x \in R : x \text{ ist Einheit}\} \tag{5.48}$$

Beispiel $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$
In einem Körper $(K, +, \cdot)$ gilt

$$K^* = K \backslash \{0\} \tag{5.49}$$

Lemma 5.25

Sei $(R, +, \cdot)$ Ring mit Eins. Dann ist $(R^*, \cdot)$ eine Gruppe. D. h.

- $R^* \times R^* \to R^* \Leftrightarrow R^* \cdot R^* \in R^*$
- Assoziativität
- Eins-Element (neutrales Element bzgl. $\cdot$)
- inverses Element

Beispiel

- $\mathbb{Z}_2^* = \{[1]\}$, denn $[1] \cdot [1] = [1 \cdot 1] = [1]$
- $\mathbb{Z}_3^* = \{[1], [2]\}$, denn $[2] \cdot [2] = [4] = [1]$
- $\mathbb{Z}_4^* = \{[1], [3]\}$, denn $[3] \cdot [3] = [9] = [1]$

Satz 5.26

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{Z}_n^* = \{[a] : \text{ggT}(a, n) = 1\}$

Beispiel

- $\mathbb{Z}_7^* = \{[1], [2], [3], [4].[5].[6]\}$
- $\mathbb{Z}_{16}^* = \{[1], [3], [5].[7], [9], [11], [13], [15]\}$

Bemerkung Für p prim ist in $\mathbb{Z}_p$ jedes Element außer $[0]$ eine Einheit.

Satz 5.27

Für jede Primzahl p ist $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ein Körper.

Lemma 5.28

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Seien $a, b \in G$. Dann hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung $x \in G$.

Beispiel Betrachte $\mathbb{Z}_5, a = [2], b = [3]$. Suche Lösungen von $[2] \cdot \underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}_5} = [3]$. Durch Ausprobieren ergibt sich, $x = [4]$ ist eindeutige Lösung.

Korollar 5.29

Sei $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$

$$\mathbb{Z}_n^* + \{[a] \cdot [x] : [x] \in \mathbb{Z}_n^*\} \tag{5.50}$$

Satz 5.30 Kleiner Satz von Fermat

Sei p Primzahl. Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$. Dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p \tag{5.51}$$

Beispiel $p = 5$

$$2^{p-1} = 2^4 = 16 \equiv 1 \mod 5 \tag{5.52}$$
$$3^{p-1} = 3^4 = 81 \equiv 1 \mod 5 \tag{5.53}$$
$$4^{p-1} = 4^4 = 256 \equiv 1 \mod 5 \tag{5.54}$$

Definition 5.31

Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \tag{5.55}$$
$$\varphi(n) := |\{k \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}| \tag{5.56}$$

heißt *Eulersche φ-Funktion.*

Bemerkung $\varphi(n)$ gibt die Anzahl der Einheiten in $\mathbb{Z}_n$ an.
Für p Primzahl: $\varphi(p) = p - 1$

Beispiel
$$\begin{array}{llll} \varphi(1) = 1 & \varphi(3) = 2 & \varphi(5) = 4 & \varphi(7) = 6 \\ \varphi(2) = 1 & \varphi(4) = 2 & \varphi(6) = 2 & \varphi(8) = 4 \end{array}$$

Lemma 5.32

Sei $p \geq 2$ Primzahl, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\varphi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p-1) \tag{5.57}$$

Beispiele $\varphi(2^3) = 2^2 \cdot (2-1) = 4 \cdot 1 = 4$
$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^1 \cdot (3-1) = 3 \cdot 3 = 6$

Lemma 5.33

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \tag{5.58}$$

Satz 5.34 Satz von Euler-Fermat

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Dann gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n \tag{5.59}$$

Korollar 5.35

Seien p, q prim, $p \neq q$, $n = p \cdot q$. Dann gilt für alle $a < n$ und $k \in \mathbb{N}$

$$a^{k \cdot \varphi(n)+1} \equiv a \mod n \tag{5.60}$$

RSA-Verschlüsselung

Es gibt:

$n \in \mathbb{N}$	öffentliche Zahl (groß!)
$e \in \mathbb{N}$	öffentlicher Schlüssel
$d \in \mathbb{Z}$	privater Schlüssel
$m < n$	Nachricht in Klartext
$c \in \mathbb{N}$	verschlüsselte Nachricht

Ablauf:

Empfänger B

1. B wählt große Primzahlen $p \neq q$ und setzt $n := p \cdot q$
2. B wählt e mit $\text{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$
3. B berechnet d so dass $d \cdot e \equiv 1 \mod \varphi(n)$
4. B veröffentlicht n und e

Sender A

5. A verschlüsselt Nachricht $m < n - 1$ durch $c := m^e \bmod n$

Empfänger B

6. B entschlüsselt $m = c^d \bmod n$

Kapitel 6

Gruppentheorie

6.1 Untergruppen

Definition 6.1

Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe[1] mit neutralem Element e, und $H \subseteq G$. Dann heißt $(H, \otimes)$ *Untergruppe* von G, falls gilt:

- $e \in H$
- $x, y \in H \rightarrow x \otimes y \in H$
- $x \in H \implies x^{-1} \in H$

[1] $(G, \otimes)$ heißt Gruppe, wenn:

- G Menge
- $\otimes : G \times G \rightarrow G$ assoziative Verknüpfung
- Es gibt $e \in G : e \otimes g = g \otimes e = g$ für alle $g \in G$
- Zu jedem $g \in G$ gibt es $g^{-1} \in G : g \otimes g^{-1} = g^{-1} \otimes g = e$

Lemma 6.2

Eine Untergruppe ist selbst eine Gruppe.

Beispiele

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$
- $(2\mathbb{Z}, +)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\{-1, 1\}, \cdot)$ sind Untergruppen von $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$

Notation Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Seien $x \in G, n \in \mathbb{N}_0$.

$$\text{Dann } x^n := \begin{cases} e & \text{für } n = 0 \\ x \otimes x^{n-1} = x^{n-1} \otimes x & \text{für } n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{6.1}$$

$$x^{-n} := (\underbrace{x^{-1}}_{\text{inv. Elem. zu x}})^n \tag{6.2}$$

Bemerkung Für $q, r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$x^{q+r} = x^q \otimes x^r = x^r \otimes x^q \tag{6.3}$$

Definition 6.3

Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe, $H \subseteq G$. Dann heißt die kleinste Untergruppe $(\tilde{H}, \otimes)$ von G, so dass $\tilde{H} \subseteq H$, die *von H erzeugte Untergruppe.*

Beispiele

- Betrachte Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ und $H = \{3\}$. Dann ist die von H erzeugte Untergruppe $(3\mathbb{Z}, +)$.
- Betrachte $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot), H = \{2\}$. Dann ist die von H erzeugte Untergruppe $(2^{\mathbb{Z}}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_5, +), H_1 = \{[1]\}$, von H_1 erzeugte Untergruppe $(\mathbb{Z}_5, +)$
  $H_2 = \{[2]\}$ von H_2 erzeugte Untergruppe $(\mathbb{Z}_5, +)$

Lemma 6.4

Sei $(G, \otimes)$ Gruppe und $g \in G$. Dann ist $\langle g \rangle := \{g^z : z \in Z\}$ die von $\{g\}$ erzeugte Halbgruppe.

Lemma 6.5

Sei $(G, \otimes)$ eine endliche Gruppe, d. h. $|G| < \infty$, mit neutralem Element e. Sei $g \in G$. Setze $k := |\langle g \rangle| \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$g^k = e \text{ und} \tag{6.4}$$

$$\langle g \rangle = \left\{g^0, g^1, g^2, \dots g^{k-1}\right\} \tag{6.5}$$

Beispiel $(\mathbb{Z}_5, +), [2] \in \mathbb{Z}_5$. Dann

$$\langle [2] \rangle \overset{\text{Lemma 6.4, S. 53}}{=} \{[2]^n : n \in \mathbb{Z}\} \tag{6.6}$$

Es gilt $[2]^0 = [0]$, $[2]^1 = [2]$, $[2]^2 = [2+2] = [4]$, $[2]^3 = [2+2+2] = [6] = [1]$, $[2]^4 = [8] = [3]$ $\implies \langle [2] \rangle = \mathbb{Z}_5$

Also $k := |\langle [2] \rangle| = 5$,
$[2]^5 = [2+2+2+2+2] = [10] = [0] = e$,
$\langle [2] \rangle = \mathbb{Z}_5 = \left\{[2]^0, [2]^1, [2]^2, [2]^3, [2]^4\right\}$

6.2 Gruppenordnungen & Satz von Lagrange

Definition 6.6

Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe.

a) Die *Ordnung* von G ist

- unendlich, falls G unendlich viele Elemente enthält.
- die Kardinalität von G, falls G endlich viele Elemente enthält.

b) Die *Ordnung eines Elements* $g \in G$ ist die Ordnung der von $\{g\}$ erzeugten Untergruppe $\langle g \rangle$.

Schreibweise:

$$\text{ord}(g) := |\langle g \rangle| \tag{6.7}$$

Beispiel Betrachte[2] $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$. Es gilt $\mathbb{Z}_5^* = \{[1], [2], [3], [4]\}$. Ordnung der Elemente:
$\langle [1] \rangle = \{[1]\} \implies \text{ord}([1]) = 1$
$\langle [2] \rangle = \{[2], [1], [4], [3]\} \implies \text{ord}([2]) = 4$
$\langle [3] \rangle = \{[1], [3], [4], [2]\} \implies \text{ord}([3]) = 4$
$\langle [4] \rangle = \{[1], [4]\} \implies \text{ord}([4]) = 2$

Satz 6.7 Satz von Lagrange

Sei $(G, \otimes)$ eine endliche Gruppe. Ist $(H, \otimes), H \subseteq G$ eine Untergruppe von G, so teilt die Ordnung von H die Ordnung von G.

Definition 6.8

Sei $(G, \otimes)$ eine abelsche Gruppe, $(H, \otimes)$ Untergruppe. Dann heißt

$$[G : H] := \frac{[G]}{[H]} \tag{6.8}$$

der *Index* von H in G.

Korollar 6.9

Sei $(G, \otimes)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e, und sei $g \in G$. Dann ist die Ordnung von g ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ und es gilt

$$g^{[G|} = e \tag{6.9}$$

[2] $R^* := \{x \in R : x \text{ ist Einheit}\}$ (Def. 5.24, S. 45)
$x \in R$ heißt Einheit oder invertierbar, falls $\exists y \in R : x \otimes y = 1$ (1 := Eins-Element)

6.3 Zyklische Gruppen

Definition 6.10

Eine Gruppe $(G, \otimes)$ heißt *zyklisch*, wenn es ein $g \in G$ gibt, so dass $G = \langle g \rangle$.

Beispiele

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch mit Erzeuger 1
- $(\{-1, +1\}, \cdot)$ ist zyklisch mit Erzeuger -1
- $(\mathbb{Z}_{37}, +)$ ist zyklisch mit Erzeuger [1]

Lemma 6.11 Konsequenzen aus Lemma 6.5 (S. 53)

Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, und sei $g \in G$ von endlicher Ordnung. Dann

a) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$g^x = g^y \iff \mathrm{ord}(g) \mid (x - y) \tag{6.10}$$

b)

$$\mathrm{ord}(g) = \min \{n \in \mathbb{N} : g^n = e\} \tag{6.11}$$

c) Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$g^z = e \iff \mathrm{ord}(g) \mid z \tag{6.12}$$

d) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{ord}\left(g^k\right) = \frac{\mathrm{ord}(g)}{\mathrm{ggT}(k, \mathrm{ord}(g))} \tag{6.13}$$

Korollar 6.12

Sei $(G, \otimes)$ zyklische Gruppe von Ordnung n, $G = \langle g \rangle$

$$G = \left\langle g^k \right\rangle \Longleftrightarrow \mathrm{ggT}(k, \underbrace{\mathrm{ord}(g)}_{n}) = 1 \tag{6.14}$$

Insbesondere gibt es $\varphi(n)$ Erzeuger.

Kapitel 7

Lineare Algebra

7.1 Vektorräume

Definition 7.1

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper[1].
Ein K-*Vektorraum* ist ein Tripel $(V, \oplus, \otimes)$, wobei V eine Menge ist,

$$\oplus : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v \oplus w \tag{7.1}$$
$$\otimes : K \times V \to V, (s, v) \mapsto s \otimes v \tag{7.2}$$
$$\text{für } v, w \in V, s \in K \tag{7.3}$$

so dass gilt

1. $(V, \oplus)$ ist kommutative Gruppe. Schreibweise:
   Neutrales Element ist $\mathbf{0} \in V$ (*"Nullvektor"*)
   Inverses Element zu $v \in V$ ist $-v \in V$

[1] Körper $(K, +, \cdot)$, d. h.

- kommutativer Ring mit Eins, bei dem jedes Element $x \neq o$ ein multiplikatives Inverses hat.
- Nullelement $0 \in K$ als neutrales Element bzgl. $+$
- Einselement $1 \in K$ als neutrales Element bzgl. $\cdot$

2.

$$\underbrace{1}_{\text{Eins-Element in } K} \otimes v = v \text{ für alle } v \in V \tag{7.4}$$

3.

$$(s \cdot t) \otimes v = s \otimes (t \otimes v) \text{ für alle } s, t \in K, v \in V \tag{7.5}$$

4.

$$(s + t) \otimes v = (s \otimes v) \oplus (t \otimes v) \text{ für alle } s, t \in K, v \in V \tag{7.6}$$

5.

$$s \otimes (v \oplus w) = (s \otimes v) \oplus (s \otimes w) \text{ für alle } s \in K, v, w \in V \tag{7.7}$$

Elemente in V heißen *Vektoren*.

Beispiele

a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist K^n ein Vektorraum (VR) mit

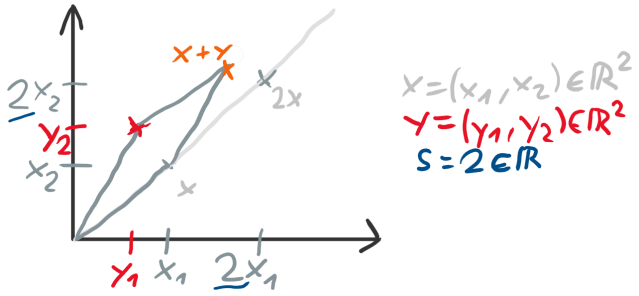
$$(x_1, \ldots, x_n) \oplus (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \tag{7.8}$$

$$s \otimes (x_1, \ldots, x_n) = (s \cdot x_1, \ldots, s \cdot x_n) \tag{7.9}$$

$$\text{für } x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in K, s \in K \tag{7.10}$$

Spezialfälle, $(K, +, \cdot)$ ist K-VR

- $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$



b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist $\mathbb{C}$-VR, $\mathbb{R}$-VR, $\mathbb{Q}$-VR.

c) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Sei $V := \{f : M \to K\}$. Betrachte

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x) \tag{7.11}$$
$$(s \otimes f)(x) := s \cdot (f(x)) \tag{7.12}$$
$$\text{für } f, g \in V, x \in M, s \in K \tag{7.13}$$

Dann ist $(V, \oplus, \otimes)$ ein K-VR.

Lemma 7.2 Rechenregeln

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, \oplus, \otimes)$ ein K-Vektorraum (VR). Dann gilt

a)

$$0 \cdot v = \mathbf{0} \text{ für alle } v \in V \tag{7.14}$$

b)

$$s \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ für alle } s \in K \tag{7.15}$$

c) Für alle $s \in K$ und $v \in V$ gilt

$$s \otimes v = \mathbf{0} \iff s = \mathbf{0} \wedge v = \mathbf{0} \tag{7.16}$$

d) Für alle $s \in K$ und $v \in V$ gilt

$$\Big(\underbrace{-s}_{\substack{\text{inv. Elem.}\\ \text{zu } s \text{ in } K\\ (\text{bzgl. } +)}}\Big) \otimes v = \underbrace{-(s \otimes v)}_{\substack{\text{inv. Elem.}\\ \text{bzgl. } \oplus \text{ zu}\\ (s \otimes v)}} \tag{7.17}$$

7.2 Unterräume

Definition 7.3

Sei $(K, +, \cdot)$ Körper, $(V, \oplus, \otimes)$ ein K-VR. Dann heißt $U \subseteq V$ *Unter(vektor)raum oder Teilraum* von V, falls gilt

1. $U \neq \emptyset$
2. $v, w \in U \implies v \oplus w \in U$
3. $s \in K, v \in U \implies s \otimes v \in U$

Bemerkung Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum (UVR) dann ist $(U, \oplus, \otimes)$ ein K-VR.

Beispiele

a) $V, \{\mathbf{0}\}$ sind UVR.

b) Sei $v \in V \backslash \{\mathbf{0}\}$. Dann ist $\{v\}$ kein UVR, denn $0 \otimes v = \mathbf{0} \notin \{v\}$.

c) Für $v \in V$ ist

$$\langle v \rangle := \{s \otimes v : s \in K\} \tag{7.18}$$

ein UVR.

7.3 Erzeugendensysteme

Definition 7.4

a) Sei $(V, \oplus, \oplus)$ ein K-VR, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann heißt $V \in V$ *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$, falls es $s_1, \ldots, s_n$ gibt mit

$$v = (s_1 \otimes v_1) \oplus (s_2 \otimes v_2) \oplus \ldots \oplus (s_n \otimes v_n) \tag{7.19}$$

b) Ist $M \subseteq V$ mit $M \neq \emptyset$, so definieren wir das *Erzeugnis* von M als

$$\langle M\rangle := \{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von endlich vielen Vektoren von } M\} \tag{7.20}$$

$$=: \operatorname{span}(M) \tag{7.21}$$

Wir definieren:

$$\langle\emptyset\rangle := \{\mathbf{0}\} \tag{7.22}$$

Bemerkung Der K-VR $(K, +, \cdot)$ hat nur die Untervektorräume K und $\{\underbrace{0}_{=\mathbf{0}}\}$.

Lemma 7.5

Sei $(V, \oplus, \otimes)$ ein K-VR, $M \subseteq V$ beliebige Teilmenge. Dann ist $\langle M\rangle$ ein UVR von V.

7.4 Lineare Unabhängigkeit

Definition 7.6

Sei $(V, \oplus, \otimes)$ ein K-VR.

a) Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, falls folgendes gilt:

$$(s_1 \otimes v_1) \oplus \ldots \oplus (s_n \otimes v_n) = \mathbf{0} \text{ mit } s_1, \ldots, s_n \in K \implies s_1 = \cdots = s_n = 0 \tag{7.23}$$

Andernfalls heißen $v_1, \ldots, v_n$ *linear abhängig*.

b) Eine Teilemenge $M \subseteq V, M \neq \emptyset$ heißt *linear unabhängig*, falls je endlich viele paarweise verschiedene Vektoren aus M linear unabhängig sind. Wir definieren $\emptyset$ als linear unabhängig. Ist $M \subseteq V$ nicht linear unabhängig, so heißt M *linear abhängig*.

Bemerkung

- Jede Menge, die eine linear abhängige Teilmenge enthält ist linear abhängig.
- Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

Satz 7.7

Sei $(V, \oplus, \otimes)$ ein K-VR, $M \subseteq V, M \neq \emptyset, M \neq \{\mathbf{0}\}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. M ist linear abhängig.
2. Jeder Vektor $w \in \langle M \rangle$ kann **eindeutig** geschrieben werden als Linearkombination von Vektoren aus M, bis auf die Reihenfolge der Summanden, d. h.

$$\text{für } v_1, \ldots, v_n \in M, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n \in K \tag{7.24}$$
$$\text{mit } w = (s_1 \otimes v_1) \oplus \ldots \oplus (s_n \otimes v_n) = (t_1 \otimes v_1) \oplus \ldots \oplus (t_n \otimes v_n) \tag{7.25}$$
$$\text{gilt } s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n \tag{7.26}$$

3. Für alle $v \in M$ gilt

$$v \notin \langle M \backslash \{v\} \rangle \tag{7.27}$$

4. Für alle $v \in M$ gilt

$$\langle M \backslash \{v\} \rangle \neq \langle M \rangle \tag{7.28}$$

7.5 Basis und Dimension

Definition 7.8

Sei $V, \oplus, \otimes$ K-VR, $M \subseteq V$.

a) M heißt *Erzeugendensystem* von V, falls

$$\langle M \rangle = V \tag{7.29}$$

b) M heißt *Basis* von V, falls V ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

c) V heißt *endlich erzeugt*, falls V ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Beispiel $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-VR.
$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, denn für beliebiges $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(x,y,z) = (x \otimes (1,0,0)) \oplus (y \otimes (0,1,0)) \oplus (z \otimes (0,0,1)) \tag{7.30}$$

sogar Basis, da linear unabhängig. Insbesondere ist $\mathbb{R}^3$ endlich erzeugt.

Bemerkung Jeder VR $(K, \oplus, \otimes)$ hat ein Erzeugendensystem, z. B. V selbst.

Frage Hat jeder endlich erzeugte VR ein Basis?

Beispiel $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-VR.

$$\varepsilon = \{(1,0,0),(0,0,0),(0,1,0),(3,4,0),(0,0,1)\} \text{ ist Erzeugendensystem von } \mathbb{R}^3 \tag{7.31}$$

Bastele Basis $B \subseteq \varepsilon$ von $\mathbb{R}^3$: Gehe Vektoren der Reihe nach durch:

$$\begin{array}{ll}
(1,0,0) \in B, \text{ denn} & (1,0,0) \notin \langle\emptyset\rangle = \{\mathbf{0}\} = \{(0,0,0)\} \\
(0,0,0) \notin B, \text{ denn} & (0,0,0) \in \langle\{(1,0,0)\}\rangle \\
(0,1,0) \in B, \text{ denn} & (0,1,0) \notin \langle\{(1,0,0)\}\rangle \\
(3,4,0) \notin B, \text{ denn} & (3,4,0) \in \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle \\
(0,0,1) \in B, \text{ denn} & (0,0,1) \notin \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle \\
\multicolumn{2}{c}{\rightarrow B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}}
\end{array}$$

Es gilt $B \subseteq \varepsilon$ und B Basis von $\mathbb{R}^3$. Andere Basis $B' = \{(3,4,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$.

Satz 7.9

Jeder endlich erzeugte VR besitzt eine Basis.

Beweis

$$\varepsilon = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V \text{ Erzeugendensystem für } V \tag{7.32}$$

Bastele B wie folgt:

1. Falls $v_1 \notin \langle\emptyset\rangle = \{\mathbf{0}\}$, dann $v_1 \in B$.
   Falls $v_1 \in \langle\emptyset\rangle = \{\mathbf{0}\}$, dann $v_1 \notin B$.

2. Für $i = 2, \ldots, n$:
   Falls $v_i \in \langle\{v_1, \ldots, v_i - 1\} \cap B\rangle$, dann $v_i \notin B$, andernfalls $v_i \in B$.

Satz 7.10

Sei $(V, \oplus, \otimes)$ ein endlich erzeugter VR. Dann haben je zwei Basen die gleiche Anzahl an Elementen.

Beweis siehe A.1, Seite 71

Definition 7.11

Sei $(V, \oplus, \otimes)$ endlich erzeugter VR. Dann heißt V *n-dimensional*, $n \in \mathbb{N}_0$, falls es ein Basis mit n Elementen gibt. n heißt die *Dimension* von V.

Kapitel 8

Lineare Algebra II: Lineare Abbildungen

8.1 Grundlagen und Isomorphismen

Definition 8.1

a) Seinen V, W K-VR. Eine Abbildung

$$f : V \to W \tag{8.1}$$

heißt *linear* oder *Homomorphismus*, falls gilt

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) \tag{8.2}$$
$$f(s \otimes x) = s \otimes f(x) \tag{8.3}$$
$$\text{für alle } x, y \in V, s \in K \tag{8.4}$$

Wir setzen

$$L(V, W) := \{f : V \to W : f \text{ ist linear}\} \tag{8.5}$$

b) Eine bijektive lineare Abbildung heißt *Isomorphismus*. Falls es einen Isomorphismus zwischen V und W gibt, so heißen V und W *isomorph*.

Notation (ker = kernel = Kern, Im = Image = Bild)

$$\text{für } f : V \to W \text{ linear} \tag{8.6}$$

$$\ker(f) = \text{Kern}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}_W\}) = \{v \in V : f(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V \tag{8.7}$$

$$\text{Im}(f) = \{w \in W : \text{ es gibt ein } v \in V : f(v) = w\} \subseteq W \tag{8.8}$$

Lemma 8.2

Seien U, V, W K-VR.
Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ linear, dann ist auch $g \circ f : U \to W$ linear.

Satz 8.3

Seien V, W K-VR, $\{b_1 \dots b_n\}$ Basis von V, $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(b : i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

Satz 8.4

Seien U, V, W K-VR.

- Ist $f : U \to V$ ein Isomorphismus[1] (Iso), dann ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Iso.
- Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Iso, dann ist auch $g \circ f : U \to W$ ein Iso.
- Auf der Menge aller K-VR ist durch

$$U \cong V :\Longleftrightarrow U \text{ und } V \text{ sind isomorph} \tag{8.9}$$

  eine Äquivalenzrelation gegeben.

Satz 8.5

Seien U, V K-VR mit $\dim U = \dim V \in \mathbb{N}_0$. Dann sind U und V isomorph.

[1] Isomorphismus = bijektive lineare Abbildung

8.2 Kern und Bild, Dimensionsformel

Definition 8.6

Seien U, V K-VR, $f : U \to V$ linear. Dann ist

$$\ker(f) = \text{Kern}(f) = \{u \in U : f(u) = \mathbf{0}_V\} \tag{8.10}$$
$$\text{Im}(f) = \text{Bild}(f) = f(U) \tag{8.11}$$
$$= \{v \in V : \text{ es gibt ein } u \in U \text{ mit } f(u) = v\} \tag{8.12}$$
$$= \{f(u) : u \in U\} \tag{8.13}$$

Bemerkung $\ker(f)$ ist UVR von U. $\text{Im}(f)$ ist UVR von V.

Satz 8.7

Seien U, V K-VR, $f : U \to V$ linear.

1. Es gilt:
$$f \text{ ist injektiv} \iff \ker(f) = \{\mathbf{0}_U\} \tag{8.14}$$
2. Es gilt (nach Definition von Surjektivität):
$$f \text{ ist surjektiv} \iff \text{Im}(f) = V \tag{8.15}$$
3. Falls $U = \langle\{u_1, \ldots, u_n\}\rangle$ endlich erzeugt ist, dann ist
$$\text{Im}(f) = \langle\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}\rangle \tag{8.16}$$

Lemma 8.8

Sei V ein endlich erzeugter K-VR, $V \neq \{\mathbf{0}\}, B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. B ist Basis von V.

2. B ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem für V.
3. B ist linear unabhängig und $|B| = \dim(V)$.
4. B ist linear unabhängig und $B \cup \{v\}$ ist linear abhängig für alle $v \in V \backslash B$.
5. B ist ein Erzeugendensystem für V, und $B \backslash \{b_i\}$ ist kein Erzeugendensystem für alle $b_i \in B$.
6. Jedes $v \in V$ ist eine eindeutige Darstellung der Form
$$v = (s_1 \otimes b_1) \oplus \ldots \oplus (s_n \otimes b_n) \text{ mit } s_1, \ldots s_n \in K \tag{8.17}$$
7. Ist $A = \{a_1 \ldots, a_k\} \subseteq V$ linear unabhängig, dann $k \leq n$, und es gibt $(n-k)$ Elemente in B so dass A und diese Elemente $b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n-k}}$ eine Basis von V bilden.

Satz 8.9

Seien U, V K-VR, $\dim(U) = n \in \mathbb{N}_0$. Sei $f : U \to V$ linear. Dann gilt
$$\dim(U) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \tag{8.18}$$

Korollar 8.10

Seien U, V K-VR mit $\dim(U) = \dim(V) \in \mathbb{N}_0, f : U \to V$ linear. Dann gilt
$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv} \iff f \text{ bijektiv} \tag{8.19}$$

8.3 Matrizen

Idee

U, V K-VR, $f : U \to V$ linear, U endlich erzeugt.
f ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis von U.
$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von U

$$\begin{bmatrix} f(b_1) & \cdots & f(b_n) \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

Notation

Von jetzt an schreiben wir Vektoren von K^n "vertikal", also

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K, i = 1, \ldots, n \right\} \text{ mit} \tag{8.21}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

$$s \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot x_1 \\ \vdots \\ s \cdot x_n \end{pmatrix}, \text{ für } x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, s \in K \tag{8.23}$$

Definition 8.11

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$-*Matrix mit Einträgen aus* K ist ein rechteckiges Schema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

aus m Zeilen und n Spalten mit Einträgen $a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.
$i \in \{1, \ldots, m\}$ ist Zeilenindex, $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist Spaltenindex.
Schreibweise: (a_{ij}) oder $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$
Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus K bezeichnen wir mit $K^{(m \times n)}$.

Bemerkung Wir identifizieren $K^n \hat{=} K^{n \times 1}$

Definition 8.12

Seien U, V zwei K-VR, $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq U$ Basis von U, $P = \{p_1, \ldots, p_m\} \subseteq V$ Basis von V. Sei $f : U \to V$ linear. Für $j = 1, \ldots, n$

$$f(b_j) = (a_{1j} \otimes p_1) \oplus \ldots \oplus (a_{mj} \otimes p_m) \tag{8.25}$$

$$\text{mit } a_{ij} \in K \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \tag{8.26}$$

Dann heißt $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ die *Darstellungsmatrix* von f bezüglich der Basen B und P.

Bemerkung "In der Darstellungsmatrix stehen in den Spalten die Basen der Basisvektoren."

Beispiele Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \\ x-y \end{pmatrix}$

- Betrachte Standardbasen $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$,
  $P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$
  Dann

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus 0 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.27}$$

Anhang A

Beweise

A.1 zu Kapitel 8 Lineare Algebra II: Lineare Abbildungen

Beweis Satz 7.10

Satz 7.10 (7.5, Seite 64)
Sei $(V, \oplus, \otimes)$ ein endlich erzeugter VR. Dann haben je zwei Basen die gleiche Anzahl an Elementen.

Idee des Beweises: "Basisaustausch".

Beispiel $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-VR, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ Basis.
Betrachte $A = \{(1,1),(5,3),(3,5)\}$. Beobachtung: $A \not\subseteq \langle\{(1,0)\}\rangle$
Wir haben z. B.

$$\underbrace{(1,1)}_{\in A} = (1,0) \oplus (0,1) \tag{A.1}$$

$$\Longrightarrow (0,1) = (1,1) \oplus [(-1) \otimes (0,1)] \tag{A.2}$$

$$\Longrightarrow \{(1,1),(0,1)\} \text{ ist Erzeugendensystem von } \mathbb{R}^2 \tag{A.3}$$

Nächster Schritt: Es gilt

$$(5,3) = (5 \otimes (1,1)) \oplus ((-2) \otimes (0,1)) \implies (0,1) \in \langle\{(5,3),(1,1)\}\rangle \tag{A.4}$$

$$\implies \{(5,3),(1,1)\} \text{ ist Erzeugendensystem von } \mathbb{R}^2 \tag{A.5}$$

$$\implies (3,5) \in \langle\{(5,3),(1,1)\} \implies A \text{ ist linear abhängig} \tag{A.6}$$

Beweis des Satzes: Wir zeigen: Falls $\{b_1, \ldots, b_n\}, n \in \mathbb{N}_0$ ein Erzeugendensystem von V ist und $A = \{a_1, \ldots a_{n+1}\}, |A| = n+1$, dann ist A linear abhängig, also insbesondere keine Basis.
Vollständige Induktion nach n:

I. A.: $n = 0$

$$V = \langle\emptyset\rangle = \{\mathbf{0}\} \implies A = \{\mathbf{0}\} \text{ (einzige Teilmenge von } V \text{ mit einem Element)} \tag{A.7}$$

$$\implies A \text{ linear abhängig} \tag{A.8}$$

I. V.: Falls $\tilde{V} \subseteq V$ von k Vektoren aus V erzeugt wird mit $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest, dann ist je $(k+1)$ Vektoren aus $\tilde{V}$ linear abhängig.

I. S.: Sei $\tilde{V} = \langle\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}\rangle, A = \{a_1, \ldots, a_{n+2}\}, |A| = n+2$

Angenommen A ist linear unabhängig.
Zwei Möglichkeiten:

1. $\underbrace{A}_{\text{2 Vektoren}} \subseteq \{\{b_2, \ldots, b_{n+1}\}\} \implies$ nach I. V. ist A linear unabhängig. ↯

2. Es gibt ein $a \in A$, o. E.[1] a_1 (umnummerieren möglich), so dass

$$a_1 \in \langle\{b_2, \ldots, b_{n+1}\}\rangle \tag{A.9}$$

[1] ohne Einschränkung

$\Longrightarrow$ Jede Linearkombination $a_1 = (s_1 \otimes b_1) \oplus \ldots \oplus (s_{n+1} \otimes b_{n+1}), s_i \in K$ erfüllt $s_1 \neq 0$

$$\Longrightarrow b_1 = s_1^{-1} \cdot a_1 - s_1^{-1} \cdot [(s_2 \otimes b_2) \oplus \ldots \oplus (s_{n+1} \otimes b_{n+1})] \quad \Longrightarrow \{a_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\} \tag{A.10}$$

Falls $\underbrace{\{a_2, \ldots, a_{n+1}\}}_{n+1 \text{ Vektoren}} \subseteq \langle \underbrace{\{\cancel{a_1}, b_3, \ldots b_{n+1}\}}_{\cancel{n}\nearrow n-1 \text{ Vektoren}}$, dann sind $a_2, \ldots a_{n+2}$ linear abhängig. $\lightning$

Ähnlich wie oben: o. E.

$$\{a_1, a_2, b_3, \ldots, b_{n+1}\} \text{ Erzeugendensystem} \tag{A.11}$$

Rest: Übungsblatt

Index