

9/3/23 - Διακονος

Εξίσωση Master:  $\frac{dP(u,t|m,t_0)}{dt} = \sum_{l \neq u} w_{ul}(t) P_{111}(l,t|m,t_0) - \sum_{l \neq u} w_{ul}(t) P_{111}(u,t|m,t_0)$

Εφαρμογή στο τυχαίο τηλεγράφο: RTP

$$\vec{y} = \begin{cases} 1 \rightarrow y_1 \\ 0 \rightarrow y_0 \end{cases}$$

~~Εξίσωση~~

Οι πιθανότητες μετάβασης είναι

$w_{10} = a$  και  $w_{01} = b$  (ανεξάρτητα ως προς  $t$ )

Για  $u=0$ :  $\frac{dP(0,t|m,t_0)}{dt} = \underbrace{b}_{w_{00}} P_{111}(1,t|m,t_0) - \underbrace{a}_{w_{10}} P_{111}(0,t|m,t_0) \quad (1)$

Για  $u=1$ :  $\frac{dP(1,t|m,t_0)}{dt} = \underbrace{a}_{w_{10}} P_{111}(0,t|m,t_0) - \underbrace{b}_{w_{01}} P_{111}(1,t|m,t_0) \quad (2)$

Γνωρίζω ότι  $P_{111}(1,t|m,t_0) + P_{111}(0,t|m,t_0) = 1 \quad \forall t$

Οπότε  $P_{111}(1,t|m,t_0) = 1 - P_{111}(0,t|m,t_0)$

(1):  $\frac{dP_0(0,t|m,t_0)}{dt} = b - P_{111}(0,t|m,t_0)(a+b)$

$f(t) \rightarrow P(0,t|m,t_0) = A e^{-(a+b)t} + B$

$\dot{f} = -A(a+b) e^{-(a+b)t} = +b - (a+b)(A e^{-(a+b)t} + B) \Rightarrow$

$b - (a+b)B = 0 \Rightarrow B = \frac{b}{a+b}$

Άρα  $P_{111}(0,t|m,t_0) = A e^{-(a+b)t} + \frac{b}{a+b}$ . Νέμε να υπολογίσουμε το  $A$



$$A. \quad \Gamma_{m, t=t_0} \rightarrow m=0 \quad \text{for } t > t_0 \quad P_{111}(0, t_0 | m, t_0) = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m=1 \end{cases}$$

$$\Sigma: \text{ για } m=0: 1 = A e^{-(a+b)t_0 + \frac{b}{a+b}} \Rightarrow A = \frac{a}{a+b} e^{(a+b)t_0}$$

$$\text{Οπότε } P_{111}(0, t | 0, t_0) = \frac{a}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)} + \frac{b}{a+b}$$

$$\text{για } m=1: 0 = A e^{-(a+b)t_0} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow A = -\frac{b}{a+b} e^{(a+b)t_0}$$

$$\text{Οπότε } P_{111}(1, t | 1, t_0) = \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)}$$

Αντίστοιχα για την (2)

$$P_{111}(1, t | 0, t_0) = \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)}$$

$$P_{111}(1, t | 1, t_0) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)}$$

$$\langle Y(t) \rangle = Y_0 \underset{\uparrow 0}{P_1(0, t)} + Y_1 \underset{\uparrow 1}{P_1(1, t)} = P_1(1, t)$$

Για να βρούμε το  $P_1(1, t)$  αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Master ...

Παρατηρούμε ότι η υπό ανάλυση πιθανότητα είναι  $\sim e^{(t-t_0)} \rightarrow$  στάθμης

$$\text{Άρα στο στάθμο όριο: } P_1^{(s)}(0) = \frac{b}{b+a}$$

$$\text{Αντίστοιχα, } \langle Y \rangle^{(s)} = P_1^{(s)}(1) = \frac{a}{a+b}$$



Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε την αυτοσχετίωση στο στάσιμο όριο:

$$\langle Y(t) Y(t') \rangle = \sum_{y, y'} y y' P_2(y, t; y', t')$$

Επειδή  $y, y' \in \{0, 1\}$  η μόνη μη μηδενική πηί είναι θα  $y = y' = 1$

$$\langle Y(t) Y(t') \rangle = P_2(1, t; 1, t') = P_{111}(1, t | 1, t') P_1(1, t')$$

↑ προσεγγιστικά παίρνουμε  
την σταθιμή πηί πηί  
 $P_1(1, t') \simeq P_1^{(st)}(1, t') = \frac{a}{a+b}$

$$\langle Y(t) Y(t') \rangle = \left( \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)(t-t')} + \frac{a}{a+b} \right) \frac{a}{a+b}$$

$$K(t-t') = \langle Y(t) Y(t') \rangle - \langle Y(t) \rangle \langle Y(t') \rangle$$

$$K(t-t') = \frac{ab}{(a+b)^2} e^{-\tau (a+b)(t-t')}$$

↑ Για να ελέγξω αν είναι ερгодική

$$\frac{1}{K(0)} \int_0^\infty d\tau |K(\tau)| = tr \quad \left\{ \frac{ab}{(a+b)^2} \int_0^\infty e^{-(a+b)\tau} d\tau = \frac{ab}{(a+b)^2} \frac{1}{a+b} \right.$$

$$K(0) = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

$$\text{οπότε } tr = \frac{ab}{(a+b)^2} \frac{1}{a+b} \frac{1}{K(0)} = \frac{1}{a+b}$$

Άρα, RTP ερгодική σταθιμή διαδικασία



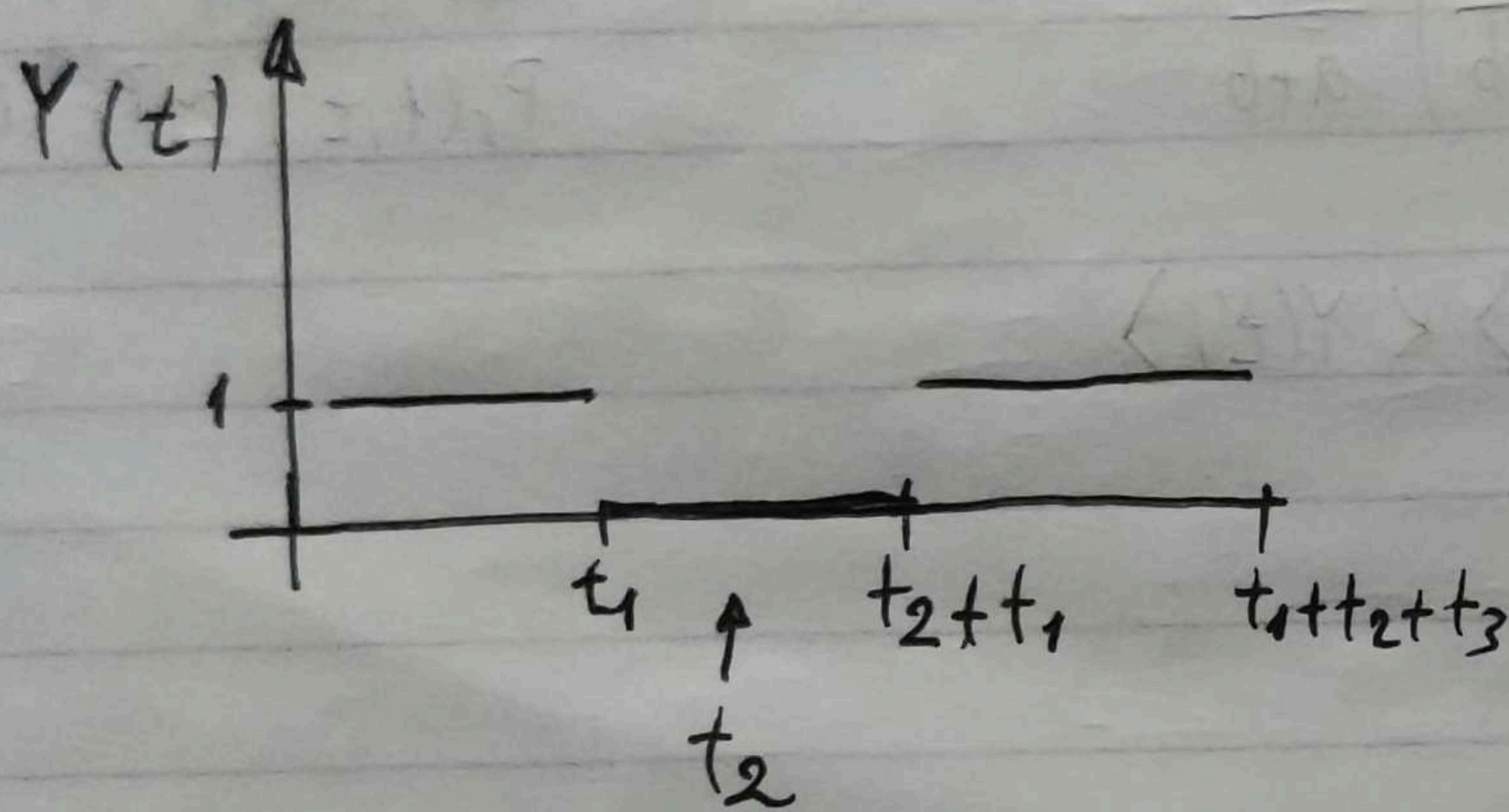
Αλγόριθμος RTP

Κατανομή χρόνου πρώτης μετάβασης

$$P(t_1) = b e^{-b t_1} \quad \text{Για παραμονή στο 1 στο διάστημα } [0, t_1]$$

$$P(t_0) = a e^{-b t_0}$$

$$\text{Εκτίμηση, } t_0 = 0, y = 1 \xrightarrow[r \in [0,1)]{\text{Επιλογή}} \begin{matrix} -\frac{1}{a} \ln(1-r_1) \\ \parallel \\ t_1 \end{matrix} \xrightarrow[r_2 \in [0,1)]{\text{Επιλογή}} \begin{matrix} -\frac{1}{a} \ln(1-r_2) \\ \parallel \\ t_2 \end{matrix}$$



$$\frac{1}{T} \int_0^T dt y(t) = \langle Y \rangle$$

$$\frac{dP(y,t|m,t_0)}{dt} = \sum_{l \neq n} w_{n,l} P_{l,1}(l,t|m,t_0) - \sum_{l \neq n} w_{n,l} P_{l,1}(y,t|m,t_0)$$

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{Bmatrix}$$

$$b: 0 \leftarrow 1$$

$$a: 1 \leftarrow 0$$

Αρχικά η πιθανότητα Y είναι y3

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^M w_{k,3} = W_3$$

$$\Delta t_{3,1} = -\frac{1}{W_3} \ln(1-r)$$

$$P_i = \frac{w_{i,3}}{W_3}$$

Επιλογή τυχαία  $p \in [0,1)$

$$0 < p < \frac{w_{1,3}}{W_3} \begin{cases} \text{val} \\ \text{ox1} \rightarrow w_{1,3} \\ p < \frac{w_{1,3} + w_{2,3}}{W_3} \rightarrow \text{ox1} \end{cases}$$