9/3/23 – Διάκονος

<u>Εξίσωση Master</u>: $\frac{dP(u,t|m,t_0)}{dt} = \sum_{l \neq u} w_{ul}(t) P_{1|1}(l,t|m,t_0) - \sum_{l \neq u} w_{lu}(t) P_{1|1}(u,t|m,t_0)$

Εφαρμογή στον τυχαίο τηλέγραφο: RTP

$\vec{y} = \begin{cases} 1 \rightarrow y_1 \\ 0 \rightarrow y_0 \end{cases}$ ~~Εστω~~ Οι ρυθμοί μεταβολής είναι $w_{10} = a$ και $w_{01} = b$ (ανεξάρτητα του χρόνου)

Για $u=0$: $\frac{dP(0,t|m,t_0)}{dt} = \underbrace{w_{01}}_{b} P_{1|1}(1,t|m,t_0) - \underbrace{w_{10}}_{a} P_{1|1}(0,t|m,t_0)$ (1)

Για $u=1$: $\frac{dP(1,t|m,t_0)}{dt} = \underbrace{w_{10}}_{a} P_{1|1}(0,t|m,t_0) - \underbrace{w_{01}}_{b} P_{1|1}(1,t|m,t_0)$ (2)

Γνωρίζω ότι $P_{1|1}(1,t|m,t_0) + P_{1|1}(0,t|m,t_0) = 1 \quad \forall t$

Οπότε $P_{1|1}(1,t|m,t_0) = 1 - P_{1|1}(0,t|m,t_0)$

(1): $\frac{dP_0(0,t|m,t_0)}{dt} = b - P_{1|1}(0,t|m,t_0)(a+b)$

$f(t) \rightarrow P(0,t|m,t_0) = Ae^{-(a+b)t} + B$

$\dot{f} = \cancel{-A(a+b)e^{-(a+b)t}} = +b - (a+b)(\cancel{Ae^{-(a+b)t}} + B) \Rightarrow$

$b - (a+b)B = 0 \Rightarrow B = \frac{b}{a+b}$

Άρα $P_{1|1}(0,t|m,t_0) = Ae^{-(a+b)t} + \frac{b}{a+b}$. Μένει να προσδιορίσουμε το A. 1

Για $t = t_0 \longrightarrow m=0$ τότε $P_{1|1}(0,t_0|m,t_0) = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m=1 \end{cases}$

για $m=0$: $1 = Ae^{-(a+b)t_0} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow A = \frac{a}{a+b} e^{(a+b)t_0}$

Οπότε $P_{1|1}(0,t|0,t_0) = \frac{a}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)} + \frac{b}{a+b}$

για $m=1$: $0 = Ae^{-(a+b)t_0} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow A = \frac{-b}{a+b} e^{(a+b)t_0}$

Οπότε $P_{1|1}(\cancel{0},t|\overset{1}{\cancel{0}},t_0) = \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)}$

Αντίστοιχα για την (2)

$$P_{1|1}(1,t|0,t_0) = \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)}$$

$$P_{1|1}(1,t|1,t_0) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)(t-t_0)}$$

$\langle Y(t) \rangle = \underset{0}{Y_0}\, P_1(0,t) + \underset{1}{Y_1}\, P_1(1,t) = P_1(1,t)$

Για να βρούμε το $P_1(1,t)$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Master ...

Παρατηρούμε ότι η υπό ανάλυση πιθανότητα είναι $\sim e^{(t-t_0)} \rightarrow$ στάσιμη

Άρα στο στάσιμο όριο: $P_1^{(s)}(0) = \frac{b}{b+a}$

Αντίστοιχα, $\langle Y \rangle^{(s)} = P_1^{(s)}(1) = \frac{a}{a+b}$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση στο στάσιμο όριο:

$$\langle Y(t)\, Y(t') \rangle^{(s)} = \sum_{y,y'} y\, y'\, P_2(y,t;y',t')$$

Επειδή $y, y' = \{0,1\}$ η μόνη μη μηδενική τιμή είναι για $y = y' = 1$

$$\langle Y(t)\, Y(t') \rangle = P_2(1,t;1,t') = P_{1|1}(1,t|1,t')\, P_1(1,t')$$

Προσεγγιστικά παίρνουμε την στάσιμη τιμή της $P_1(1,t') \simeq P_1^{(s)}(1,t') = \frac{a}{a+b}$

$$\langle Y(t)\, Y(t') \rangle = \left(\frac{b}{a+b} e^{-(a+b)(t-t')} + \frac{a}{a+b} \right) \frac{a}{a+b}$$

$$K(t-t') = \langle Y(t)\, Y(t') \rangle - \langle Y(t) \rangle \langle Y(t') \rangle$$

$$K(t-t') = \frac{ab}{(a+b)^2} e^{-(a+b)\overset{\tau}{\widetilde{(t-t')}}}$$

Για να ελέγξω αν είναι εργοδική

$$\frac{1}{K(0)} \int_0^\infty d\tau\, |K(\tau)| = t_R \qquad \frac{ab}{(a+b)^2} \int_0^\infty e^{-(a+b)\tau} d\tau = \frac{ab}{(a+b)^2} \frac{1}{a+b}$$

$$K(0) = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

Οπότε $t_R = \frac{ab}{(a+b)^2} \frac{1}{a+b} \frac{1}{K(0)} = \frac{1}{a+b}$

Δηλαδή, RTP εργοδική στοχαστική διαδικασία

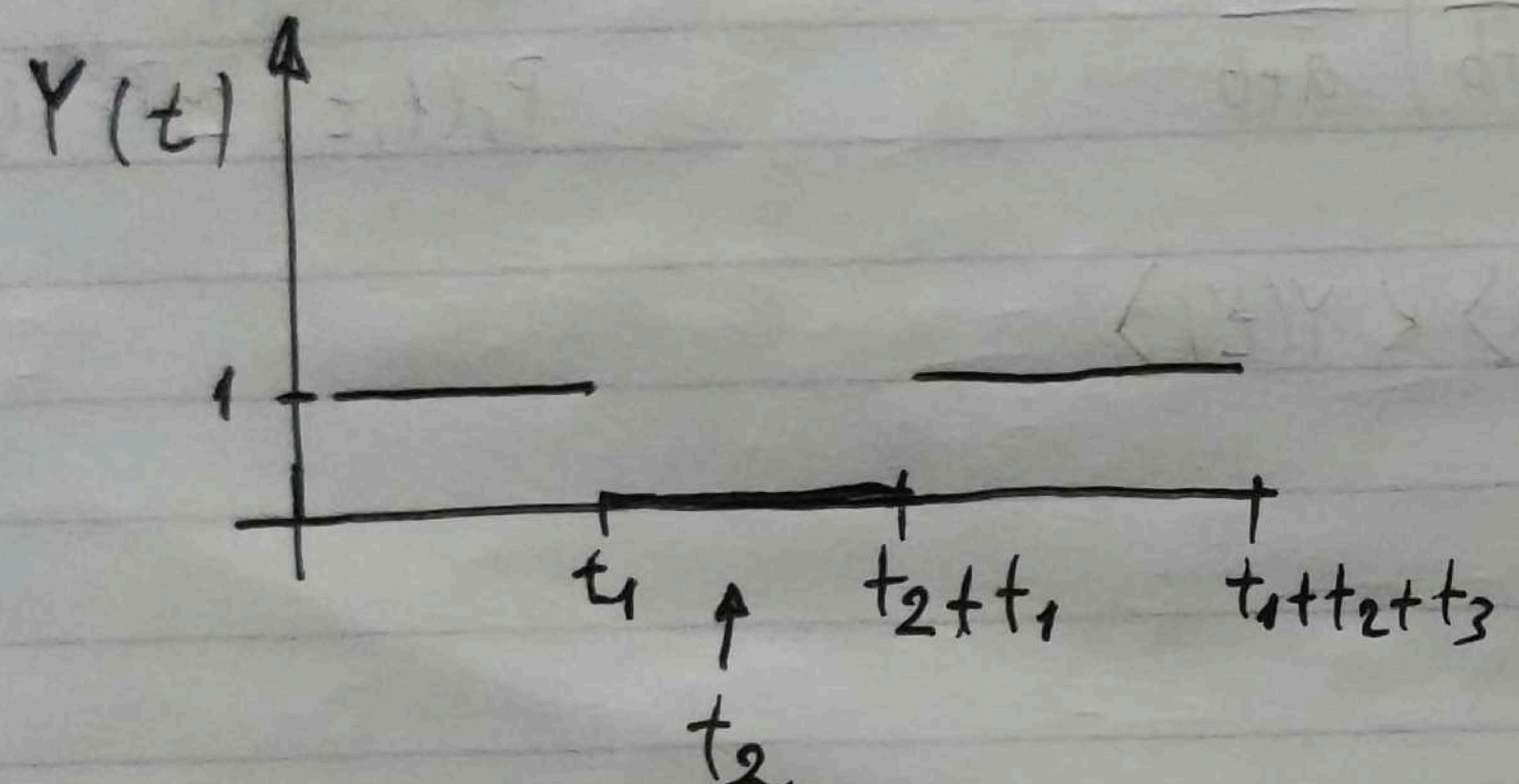
Αλγόριθμος RTP

Κατανομή χρόνων πρώτης μετάβασης

$P(t_1) = b e^{-b t_1}$ Για παραμονή στο 1 στο διάστημα $[0, t_1)$

$p(t_0) = a e^{-b t_0}$

Εκκίνηση, $t_0 = 0$, $y = 1$ $\xrightarrow[r \in [0,1)]{\text{επιλογή}}$ $\underset{t_1}{\overset{-\frac{1}{a}\ln(1-r_1)}{\shortparallel}}$ $\xrightarrow[r_2 \in [0,1)]{\text{επιλογή}}$ $\underset{t_2}{\overset{-\frac{1}{a}\ln(1-r_2)}{\shortparallel}}$



$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\, y(t) = \langle Y \rangle$$

$$\frac{dP(n,t|m,t_0)}{dt} = \sum_{l \neq n} w_{n,l} P_{1|1}(l,t|m,t_0) - \sum_{l \neq n} w_{l,n} P_{1|1}(n,t|m,t_0)$$

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{Bmatrix}$$

b: $0 \leftarrow 1$

a: $1 \leftarrow 0$

Αρχικά η τιμή του Y είναι y_3

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{M} w_{k,3} = W_3 \qquad \Delta t_{3,1} = -\frac{1}{W_3}\ln(1-r)$$

Επιλογή τυχαίου $\rho \in [0,1)$

$$P_i = \frac{w_{i3}}{W_3}$$

$0 < \rho < \frac{w_{13}}{W_3}$ $\begin{cases} \text{ναι} \\ \text{όχι} \rightsquigarrow \end{cases}$

$\rho < \frac{w_{13} + w_{23}}{W_3}$ $\begin{cases} \\ \text{όχι} \end{cases}$