高雄中學 106 學年度第一學期期末考一年級數學科試題

一、單一選擇題：第1題至第3題，每題選出最適當的一個選項，將答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

1. $i=\sqrt{-1}$,則$\dfrac{2-i}{2+i}=$

   (1)$\dfrac{3-4i}{5}$ (2)$\dfrac{5-4i}{5}$ (3)$\dfrac{3-4i}{3}$ (4)$\dfrac{5-4i}{3}$ (5)$\dfrac{2+i}{2-i}$

2. 雄雄參加政府的儲金計劃,每月初自其薪水轉存x元至其儲金計劃帳戶,銀行按月複利計算,月利率為1%
   ,雄雄在一年期滿後去對帳,對帳時他的儲金計劃帳戶總金額應共有x元的幾倍?

   (1)$(1.01)^{12}$ (2)$101\times(1.01)^{12}$-100 (3) $100\times(1.01)^{12}$-100 (4) $100\times(1.01)^{13}$-101 (5) $101\times(1.01)^{12}$-100

3. $\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}k=$

   (1)$\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$ (2)$\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{12}$ (3)$\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{16}$

   (4)$\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{20}$ (5)$\dfrac{m(m+1)(m+2)}{3}$

二、多重選擇題：第4題至第6題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

4. 下列五個選項皆為互相獨立的敘述,請選出恆正確的選項:

   (1)$\sum_{k=1}^{10}\dfrac{k}{k+1}=\sum_{n=0}^{9}\dfrac{n+1}{n+2}$ (2)$\sum_{k=2}^{8}1=8$ (3) $\sum_{k=1}^{10}(1+2+3+\cdots+k)=\sum_{k=1}^{10}k(11-k)$

   (4) $\sum_{m=1}^{10}\sum_{n=1}^{10}(2m+3n+4)=\sum_{n=1}^{10}\sum_{m=1}^{10}(2m+3n+4)$ (5)$\sum_{k=1}^{10}(1+2+3+\cdots+k)=\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}2+\sum_{k=1}^{n}3+\ldots\ldots+\sum_{k=1}^{n}k$

5. 本題只考慮$x\in R$的情形。設f(x) 為一函數,已知$f(x)\geq 0$的解為x<1, 則下列各選項中的不等式,何者的解也是x<1？

   (1) $f(x)\bullet(x^2+x+1)\geq 0$ (2)$\dfrac{f(x)}{-x^2+\pi x-1}\leq 0$ (3)$\dfrac{1}{f(x)}\geq 0$ (4)$\dfrac{1}{x}>1$

   (5)$x^3-3x^2+kx-4<0$ (其中k為一定實數,$i=\sqrt{-1}$,且$1+\sqrt{3}i$為$x^3-3x^2+kx-4=0$之一根)

6. 下列五個選項皆為互相獨立的敘述,請選出恆正確的選項:(本題中, $i=\sqrt{-1}$)

   (1)x,y皆為複數且$y\neq 0$,若$\dfrac{x^2}{y^2}>1$,則$x^2>y^2$

   (2)方程式$x^2-ix+1=0$中,因其判別式D=$(-i)^2-4\bullet 1\bullet 1=-5<0$, 故其兩根為兩共軛虛根

   (3)若f(x)為三次實係數多項式,則至少有一實數α滿足$f(\alpha^{2017})=\alpha^{106}$

   (4) f(x)為三次實係數多項式, 若相異三數a,b,c滿足f(a)=f(b)=f(c)=0,則(106-a)(106-b)(106-c)必為實數

   (5)若f(x)為三次實係數多項式且f(2i)=0,則$f(i)f(\frac{1}{i})>0$

三、填充題：第7題至第16題為填充題，將答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

7. 兩等差數列$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$,其前n項的和分別為$A_n,B_n$,若$a_n:b_n$=(3n-1):(n+2),則求比值:$\dfrac{A_9}{B_9}$=__________ 。

8. 設$\langle a_n\rangle$為一等比數列,其前n項和為S_n,已知$S_{10}=10,S_{20}=30$,求值:S_{30}=________ 。

9. 觀察一有規律之數列:$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\ldots\ldots$, 則此數列第73項為__________ 。

10. $i=\sqrt{-1}$,解方程式$x^2+(2i-4)x+(11+2i)=0$,得解x=a+bi或c+di (a,b,c,d皆為實數), 求值:a×b×c×d=___________ 。

11.若a是整數,則滿足$(a-1)^{2018}(a+2)^{107}(a-3)(a+4)^{118}$<0的a值共有__________個。

12.設α,β為$x^2-2x+5=0$之二根,求值:$(\alpha^3-2\alpha^2+6\alpha+2)(\beta^2-\beta+7)$=__________ 。

13.若x的二次不等式$ax^2-2ax+(2a-5)<0$無實數解,試求實數a的範圍為________。

14.a 為實數,若方程式$x^3-3x^2-5x+a+3=0$有一根為$3+\sqrt{2}$,求值:a=________ 。

15.有一等差數列$\langle a_n\rangle$,已知其首項為 3, 其前 10 項和為 120; 有一等比實數數列$\langle b_n\rangle$,已知$b_3=\frac{1}{4},b_6=\frac{1}{32}$。

若$\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)=a-\frac{bn+c}{2^n}$,其中 a,b,c 為正整數常數,求值:a+b+c=_________ 。

16.數學習題作業上,有一題是解四次多項式不等式的題目,雄雄解題時,將其x^3與 x 項的係數都看錯,
且誤以為是一題解四次多項式方程式的題目(其餘都沒看錯,計算也無誤),因此他回答該題的答案時,
寫下四個根「x=-1,-1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$」。

當老師發還作業後,雄雄看到該題被老師打叉,回頭翻原始題目,發現題目是
「$x\in R$,解不等式$x^4+7x^3+\blacktriangle^2+7x+\square<0$」, 其中$x^2$項的係數與常數項皆被污漬遮蓋而無法辨識。
請您幫雄雄求出該題不等式的正確解為________。

四、計算證明題：第 17 題為計算證明題，將過程詳細寫在答案卷上。

17.設 a,b 皆為實數,f(x)=$x^3+ax^2+bx-27$, 若 f(x)=0 的三根皆為相異的正整數, 試回答下列各題:

(1)求數對(a,b)=?

(2)試證明:在-1 與 0 之間必存在一實數 c,使得$\frac{f(c)}{c}$=106

高雄中學106學年度第一學期期末考一年級數學科　答案卷

班級：1年______組　　　座號：______　　　姓名：______________

依下列配分表計分。共92分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
總得分	8	16	23	32	40	48	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92

1	**1**	2	**4**	3	**2**	4	**134**
5	**15**	6	**345**	7	2	8	70
9	$\frac{7}{12}$	10	−24	11	3	12	13
13	$a\geq 5$	14	$-6\sqrt{2}$	15	24	16	$-4-\sqrt{15}<x<-4+\sqrt{15}$

17. 計算證明題：

(1) (-13,39)

(2)設 g(x)=f(x)-106x=$x^3-13x^2-67x-27$

因 g(-1)=26,g(0)=-27,

$\therefore$g(-1)g(0)<0,

由勘根定理: 在-1與0之間必存在一實數c,使得 g(c)=0$\Rightarrow$f(c)-106c=0$\Rightarrow\frac{f(c)}{c}$=106