Funkcje ciągłe i różniczkowalne

Witold Bołt

30 listopada 2010

Spis treści

1 Funkcje ciągłe

Definicja 1.1. (funkcja ciągła). Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, oraz nie $x_0 \in (a, b)$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_x \in (a, b)\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Przykład 1.2. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład 1.3. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Jest ciągła w każdym punkcie poza $x_0 = 0$.

Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych.

Przykład 1.4. Funkcja f dana zworem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład 1.5. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale nie jest ciągła w pozostałych punktach dziedziny.

Zadanie 1. Udowodnij prawdziwość podanych przykładów.

Definicja 1.6. Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny A to mówimy krótko, że jest ciągła.

Poniższe twierdzenie zbiera podstawowe własności zbioru funkcji ciągłych.

Twierdzenie 1.7. *Niech funkcje $f, g : R \to \mathbb{R}$ będą ciągłe, oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje:*

a) $h_1(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$*,*

b) $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$*,*

c) $h_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(o ile $g(x) \notin 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$),*

d) $h_4(x) = f(g(x))$*,*

są ciągłe.

Następne twierdzenie zwane powszechnie „własnością Darboux" lub twierdzeniem o wartości pośredniej ma liczne praktyczne zastosowania. Mówi ono o tym, że jeśli funkcja ciągła przyjmuje jakieś dwie wartości, to przy odpowiednich założeniach co do dziedziny, przyjmuje też wszystkie wartości pośrednie. Możemy sobie to łatwo wyobrazić na przykładzie funkcji, która opisuje zmianę temperatury w czasie. Jeśli o 7:00 było $-1°$C a o 9:00 było 2°C, to zapewne gdzieś między 7:00 a 9:00 był taki moment, że temperatura wynosiła dokładnie 0°C.

Twierdzenie 1.8. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła, oraz niech $f(a) \neq f(b)$. Wtedy dla dowolnego $y_0 \in conv\{f(a), f(b)\}$ istnieje $x_0 \in [a, b]$ takie, że $f(x_0) = y_0$.*

2 Różniczkowalność

Definicja 2.1. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ oraz f ciągła w otoczeniu punktu x_0. Jeśli istnieje granica:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i jest skończona, to oznaczamy ją przez $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 2.2. Jeśli funkcja f posiada pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy, że f jest różniczkowalna. Istnieje wtedy funkcja f', która każdemu punktowi z dziedziny funkcji f przyporządkowuje wartość pochodnej pochodnej funkcji f w tym punkcie.

Przykład 2.3. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne są różniczkowalne w każdym punkcie dziedziny.

Przykład 2.4. Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie posiada pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

Twierdzenie 2.5. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła i różniczkowalna na (a, b). Dodatkowo niech $f'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, oraz niech $m = min_{x \in [a,b]} f(x), M = max_{x \in [a,b]} f(x)$. Wtedy na pewno $f(a) = m$, $f(b) = M$ lub $f(a) = M$ i $f(b) = m$*