



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE BOGOTÁ

FACULTAD DE INGENIERÍA  
Vicedecanatura Académica  
POSGRADOS

## PRESENTACIÓN PROPUESTA

TESIS DE MAESTRÍA: ☐ TRABAJO FINAL DE ESPECIALIZACIÓN: ☐

1. PROPONENTE: Alexander Pinzón Fernández CÓDIGO: 02 299802

2. PROGRAMA: Maestría en Ingeniería de Sistemas y Computación

3. DIRECTOR PROPUESTO: Eduardo Romero Castro

DEPARTAMENTO: Ingeniería de Sistemas e Industrial.

4. TÍTULO: Operador Laplaciano Adaptado para Mallas Híbridas de Triángulos y Cuadrángulos.

ÁREA: Ciencias de la Computación

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Computación gráfica, procesamiento de imágenes, procesamiento de video.

NOTA: La metodología de este proyecto está orientada por los resultados y organizada en paquetes de trabajo, tal y como se hace de manera estándar en todos los proyectos de la Unión Europea (Condición impuesta por mi director de tesis).

## 5. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN:

El operador de Laplace es una ecuación diferencial que representa la divergencia de un campo de gradientes.

Numerosas aplicaciones del operador de Laplace han sido estudiadas dentro del área de la geometría diferencial sobre variedades como curvas, superficies y cuerpos, estas variedades son representadas en la práctica por mallas de polígonos compuestas por triángulos (1) (2) (3). En estudios recientes se ha trabajado con mallas compuestas exclusivamente por cuadrángulos (4) (5) (6).

Las versiones discretas del operador de Laplace han sido usadas en los últimos años en el desarrollo de nuevas herramientas para el modelamiento tridimensional de mallas de polígonos, pero restringiéndose a mallas compuestas exclusivamente por triángulos o cuadrángulos. Sin embargo desde el punto de vista del artista la forma como están distribuidos los bordes, los polígonos y su topología afecta directamente los procesos de animación y texturizado, usando conexiones manuales de los vértices que permitan facilitar los procesos mencionados (7).

## 5.1 Variedades

Una variedad es un espacio topológico  $M$  tal que:

Si  $x \in M$  entonces existe alguna vecindad  $N(x)$  y algún entero  $n > 0$  tal que  $N(x)$  es homeomórfico a  $\mathbb{R}^n$ .

Las variedades que representan una superficie en un espacio Euclideo tridimensional son homeomórfico a  $\mathbb{R}^2$ .

Las variedades son representadas de forma discreta generalmente mediante mallas de polígonos conectadas por bordes y compuestas por triángulos y cuadrángulos.

## 5.2 Operador de Laplace

El operador de Laplace ha sido adaptado desde distintas aproximaciones hacia el mundo discreto debido a la necesidad de trabajar con objetos tridimensionales del mundo real que son representados por mallas de polígonos. Este es un operador lineal que trabaja sobre funciones definidas por mallas de polígonos, estas funciones son definidas por los valores en los vértices.

Considere una variedad compacta y suave  $M$  de dimensión  $m$  isométricamente embebida en un espacio euclidiano en  $\mathbb{R}^d$ .

Dada una función doblemente diferenciable  $f \in C^2(M)$ , donde  $\nabla_M f$  denota el gradiente del campo vectorial de  $f$  en  $M$ .

El operador de Laplace–Beltrami  $\Delta_M$  de  $f$  es definido como la divergencia del gradiente así

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\nabla_M^2 f = \Delta_M = 0$$

$$\Delta_M = \text{div}(\nabla_M f)$$

Entonces, si la malla  $M$  tiene  $n$  vértices, las funciones en  $M$  son representadas por vectores con  $n$  componentes y el Laplaciano de una malla serán descritos por una matriz de  $n \times n$  (8).

El operador Laplaciano calcula localmente la distancia entre el valor de una función en un vértice y el promedio ponderado de los valores de primer orden es decir con su anillo de vecinos adyacentes, por lo tanto la matriz Laplaciana  $L$  tiene una forma local dada por

$$L(f)_i = b_i^{-1} \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (f_i - f_j)$$

donde los  $w_{ij}$  son los pesos entre el vértice  $i$  y el vértice  $j$ .  $b_i^{-1}$  Son los factores que dependen de la región adyacente al vértice  $i$ .  $N(i)$  Denota los vecinos adyacentes al vértice  $i$ .

### 5.3 Suavizado Laplaciano

Los datos recopilados mediante escáneres 3d de objetos del mundo real contienen ruido. El suavizado Laplaciano permite remover el ruido en los datos mientras preserva los detalles geométricos manteniendo la forma original de los objetos.

En el trabajo de Desbrun et al. (9) se usa un filtro de respuesta infinita al impulso para remover el ruido representado como las altas frecuencias usando los eigenvectores de la matriz Laplaciana como un símil de las “frecuencias” de la malla este método trabaja únicamente con mallas compuestas por triángulos, siendo necesario convertir las mallas compuestas por cuadrángulos en una malla de triángulos para poderla procesar.

### 5.4 Extracción del esqueleto

La extracción del esqueleto permite reducir la cantidad de datos a procesar y reduce la dimensionalidad de una estructura geométrica 3D

formada por mallas de polígonos a una estructura geométrica 1D compuesta únicamente por líneas y curvas (10).

La extracción del esqueleto propuesta por Au et al. (11) usa la contracción producida por el suavizado Laplaciano de forma iterativa para contraer una malla de polígonos hasta que su volumen sea menor que un umbral muy cercano a cero. Este método estira la malla en los puntos de mayor divergencia garantizando que se preservara de la mejor forma posible la topología original del objeto.

Durante la fase de suavizado los vértices se desplazan en la dirección del Laplaciano se mueven en la dirección de la superficie mínima siguiendo el flujo de la curvatura la superficie de la malla (12).

Au et al (11). Propone el siguiente sistema de ecuaciones para de forma iterativa contraer la malla hasta que el volumen sea cero

$$\begin{bmatrix} W_L \\ W_H \end{bmatrix} X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_H X_t \end{bmatrix}$$

donde  $L$  es la matriz Laplaciana,  $W_L$  es el factor de suavidad y  $W_H$  es el factor de restricción de atracción.

$W_L$  y  $W_H$  cambian durante cada iteración, el factor de suavizado  $W_L^{t+1} = S_L W_L^t$  con  $S_L$  que es una constante, y la restricción de atracción  $W_H^{t+1} =$

$$W_{H,i}^0 \sqrt{\frac{A_i^0}{A_i^t}}$$

$A_i^t$  y  $A_i^0$  son las áreas actuales y iniciales del área del anillo alrededor del vértice  $x_i$ .

## 6. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA:

La versión discreta del operador Laplaciano propuesta por Pinkall en 1993 (12) trabaja únicamente con mallas compuestas por triángulos, la versión de Xiong de 2011 (6) trabaja exclusivamente con cuadrángulos. Estas versiones presentan los siguientes inconvenientes.

- Se debe realizar un procesamiento previo de las mallas de polígonos para representarlas únicamente mediante triángulos o cuadrángulos para que puedan ser procesadas por los operadores de Laplace discretos, perdiendo la topología original que fue determinada por los artistas para facilitar las fases de animación y texturizado.
- No es posible trabajar con mallas híbridas compuestas por triángulos y cuadrángulos y los actuales operadores de Laplace discretos en tareas propias del modelamiento 3D como reducción de ruido, realce, remallado, mapeado UV, posado y esqueletonización que usan el operador de Laplace como elemento central en sus procesos.



## 7. OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

### **Objetivo General:**

Adaptación del operador Laplaciano para trabajar con mallas híbridas compuestas de triángulos y cuadrángulos.

### **Objetivos Específicos:**

1. Proponer una aproximación discreta del operador Laplaciano para mallas híbridas compuestas por triángulos y cuadrángulos.
2. Comparar los resultados de uso del operador Laplaciano adaptado con los operadores existentes para mallas compuestas únicamente por triángulos y únicamente por cuadrángulos.
3. Diseñar un sistema que permita visualizar el suavizado de mallas y la extracción del esqueleto usando el operador Laplaciano adaptado propuesto.

## 8. METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES POR OBJETIVOS:

Objetivo 1.

**Proponer una aproximación discreta del operador Laplaciano para mallas híbridas compuestas por triángulos y cuadrángulos.**

Estudio del Operador de Laplace sus propiedades y aplicaciones en Variedades.

Estudio del Operador de Laplace sobre mallas triangulares.

Estudio del Operador de Laplace sobre mallas cuadrangulares.

Estudio de la matriz Laplaciana y su convergencia en sistemas de ecuaciones lineales.

### **Actividades:**

- 1.1. Identificar las propiedades del Operador de Laplace.
- 1.2. Identificar los procesos para obtener las discretizaciones del operador de Laplace para mallas triangulares y cuadrangulares.
- 1.3. Proponer una adaptación discreta del Operador Laplaciano para mallas híbridas de triángulos y cuadrángulos.

### **Entregable:**

Adaptación del Operador Laplaciano para mallas híbridas de triángulos y cuadrángulos.

Objetivo 2.

**Comparar los resultados de uso del operador Laplaciano adaptado con los operadores existentes para mallas compuestas únicamente por triángulos y únicamente por cuadrángulos:**

Estudio de modelos matemáticos para el suavizado y el realce usando el operador Laplaciano sobre mallas compuestas únicamente por triángulos y únicamente por cuadrángulos.

Estudio de métodos de integración para el cálculo de soluciones de ecuaciones que usen el operador Laplaciano sobre mallas compuestas únicamente por triángulos y únicamente por cuadrángulos.

**Actividades:**

- 2.1. Seleccionar e implementar una técnica de suavizado para mallas compuestas por triángulos.
- 2.2. Seleccionar e implementar una técnica de suavizado para mallas compuestas por cuadrángulos.
- 2.3. Desarrollar e implementar un método de suavizado para la mallas híbridas de triángulos y cuadrángulos.

**Entregable:**

Archivos de datos con información geométrica tridimensional de los resultados obtenidos con cada uno de los operadores usados para realizar el suavizado.

### Objetivo 3.

**Diseñar un sistema que permita visualizar el suavizado de mallas y la extracción del esqueleto usando el operador Laplaciano adaptado propuesto.**

Estudio de técnicas de extracción del esqueleto usando el Operador de Laplace.

Estudio de técnicas de suavizado usando el Operador de Laplace.

#### **Actividades:**

- 3.1. Seleccionar e implementar una técnica de suavizado de mallas usando el Operador de Laplace.
- 3.2. Seleccionar e implementar una técnica de extracción del esqueleto usando el Operador de Laplace.
- 3.3. Desarrollar e implementar un programa de computación que permita visualizar, suavizar y obtener el esqueleto de mallas de polígonos.

#### **Entregable:**

Archivos con programa ejecutable para la visualización y procesamiento de mallas de polígonos.

## 9. CRONOGRAMA: Vea la Figura 1.

ACTIVIDADES/SEMANAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Escribir el estado del arte																																
Identificar las propiedades del Operador de Laplace.																																
Identificar los procesos para obtener las discretizaciones del operador de Laplace.																																
Proponer una adaptación discreta del Operador Laplaciano.																																
Seleccionar e implementar una técnica de suavizado para mallas compuestas por triángulos.																																
Seleccionar e implementar una técnica de suavizado para mallas compuestas por cuadrángulos.																																
Desarrollar e implementar un método de suavizado para la mallas híbridas de triángulos y cuadrángulos.																																
Seleccionar e implementar una técnica de suavizado de mallas usando el Operador de Laplace.																																
Seleccionar e implementar una técnica de extracción del esqueleto usando el Operador de Laplace.																																
Desarrollar e implementar un programa de computación que permita visualizar, suavizar y obtener el esqueleto de mallas de polígonos.																																
Documentar el sistema																																
Análisis de Requerimientos																																
Diseño del sistema																																
Implementar el diseño																																
Documentación																																
Escribir la Tesis de Maestría																																
Elaboración de Artículos																																

Figura 1: Cronograma para el desarrollo de las actividades

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

1. *Geometric modeling based on triangle meshes*. **Botsch, Mario, y otros, y otros**. New York, NY, USA : ACM, 2006. ACM SIGGRAPH 2006 Courses. ISBN: 1-59593-364-6 DOI: 10.1145/1185657.1185839.
2. **Meyer, Mark, y otros, y otros**. Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds. [ed.] Hans-Christian Hege y Konrad Polthier. *{V}isualization and {M}athematics III*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2003, págs. 35-57.
3. *Convergent discrete Laplace-Beltrami operators over triangular surfaces*. **Xu, Guoliang**. 2004. Geometric Modeling and Processing. págs. 195-204. ISSN: DOI: 10.1109/GMAP.2004.1290041.
4. *Combined Laplacian and Optimization-based Smoothing for Quadratic Mixed Surface Meshes*. **Chen, Zhijian, Tristano, Joseph R. y Kwok, Wa**. 2003. IMR'03. págs. -1--1.
5. *A discrete scheme of Laplace-Beltrami operator and its convergence over quadrilateral meshes*. **Liu, Dan, Xu, Guoliang y Zhang, Qin**. 6, Tarrytown, NY, USA : Pergamon Press, Inc., #mar# de 2008, Comput. Math. Appl., Vol. 55, págs. 1081-1093. ISSN: 0898-1221 DOI: 10.1016/j.camwa.2007.04.047.
6. **Xiong, Yunhui, Li, Guiqing y Han, Guoqiang**. Mean Laplace-Beltrami Operator for Quadrilateral Meshes. [ed.] Zhigeng Pan, y otros, y otros. *Transactions on Edutainment V*. s.l. : Springer Berlin / Heidelberg, 2011, Vol. 6530, págs. 189-201.
7. **Mullen, Tony**. *Introducing character animation with Blender*. s.l. : Indianapolis, Ind. Wiley Pub. cop., 2007. págs. 28-29. ISBN: 978-0-470-10260-2.
8. **Ranjan, Pawas**. *Discrete Laplace Operator: Theory and Applications*. The Ohio State University. Columbus, OH, USA : Ohio State University, 2012. Ph.D. dissertation. ISBN: 978-1-267-68282-6.
9. *Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow*. **Desbrun, Mathieu, y otros, y otros**. New York, NY, USA : ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1999. SIGGRAPH '99: Proceedings of the

- 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. págs. 317-324. ISBN: 0-201-48560-5 DOI: <http://doi.acm.org/10.1145/311535.311576>.
10. *Curve-Skeleton Properties, Applications, and Algorithms*. **Cornea, Nicu D. y Min, Patrick**. 3, Piscataway, NJ, USA : IEEE Educational Activities Department, 2007, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol. 13, págs. 530-548. ISSN: 1077-2626 DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2007.1002>.
11. *Skeleton Extraction by Mesh Contraction*. **Au, Oscar Kin-Chung, y otros, y otros**. 3, 2008, ACM Transactions on Graphics, Vol. 27, pág. 10.
12. *Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates*. **Pinkall, Ulrich, Juni, Strasse Des y Polthier, Konrad**. 1993, Experimental Mathematics, Vol. 2, págs. 15-36.
13. *Anisotropic diffusion of surfaces and functions on surfaces*. **Bajaj, Chandrajit L. y Xu, Guoliang**. New York, NY, USA : ACM, January de 2003, ACM Trans. Graph., Vol. 22, págs. 4-32. ISSN: 0730-0301 DOI: <http://doi.acm.org/10.1145/588272.588276>.
14. *On Linear Variational Surface Deformation Methods*. **Botsch, Mario y Sorkine, Olga**. 1, Piscataway, NJ, USA : IEEE Educational Activities Department, 2008, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol. 14, págs. 213-230. ISSN: 1077-2626 DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2007.1054>.
15. *Eigen Deformation of 3D Models*. **Dey, Tamal K., Ranjan, Pawas y Wang, Yusu**. 6-8, Secaucus, NJ, USA : Springer-Verlag New York, Inc., #jun# de 2012, Vis. Comput., Vol. 28, págs. 585-595. ISSN: 0178-2789 DOI: 10.1007/s00371-012-0705-0.
16. *Eigenvalues of Laplacians on a closed riemannian manifold and its nets*. **Fujiwara, Koji**. 1995. AMS. Vol. 123, págs. 2585-2594.
17. *Surface simplification using quadric error metrics*. **Garland, Michael y Heckbert, Paul S.** New York, NY, USA : ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1997. Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. págs. 209-216. ISBN: 0-89791-896-7 DOI: <http://dx.doi.org/10.1145/258734.258849>.
18. **Rosenberg, Steven**. *The Laplacian on a Riemannian manifold: an introduction to analysis on manifolds*. s.l. : Cambridge University Press, 1997.
19. **Spivak, Michael**. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3rd. s.l. : {Publish or Perish, Inc}, 1999. Vol. 2. ISBN: 0914098853.
20. *Embedded deformation for shape manipulation*. **Sumner, Robert W., Schmid, Johannes y Pauly, Mark**. New York, NY, USA : ACM, 2007. SIGGRAPH '07: ACM SIGGRAPH 2007 papers. ISSN: 0730-0301 DOI: <http://dx.doi.org/10.1145/1275808.1276478>.
21. *A signal processing approach to fair surface design*. **Taubin, Gabriel**. New York, NY, USA : ACM, 1995. Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques. págs. 351-358. ISBN: 0-89791-701-4 DOI: <http://doi.acm.org/10.1145/218380.218473>.
22. *Discrete Laplace-Beltrami operators and their convergence*. **Xu, Guoliang**. 8, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands : Elsevier Science Publishers B. V., 2004, Comput. Aided Geom. Des., Vol. 21, págs. 767-784. ISSN: 0167-8396 DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2004.07.007>.
23. *Discrete Laplacians on general polygonal meshes*. **Alexa, Marc y Wardetzky, Max**. 4, New York, NY, USA : ACM, #jul# de 2011, ACM Trans. Graph., Vol. 30, págs. 102:1--102:10. ISSN: 0730-0301 DOI: 10.1145/2010324.1964997.
24. *Discrete laplace operator on meshed surfaces*. **Belkin, Mikhail, Sun, Jian y Wang, Yusu**. New York, NY, USA : ACM, 2008. Proceedings of the twenty-fourth annual symposium on Computational geometry. págs. 278-287. ISBN: 978-1-60558-071-5 DOI: 10.1145/1377676.1377725.
25. **Blender-Foundation**. Blender open source 3D application for modeling, animation, rendering, compositing, video editing and game creation. *Blender open source 3D application for modeling, animation, rendering, compositing, video editing and game creation*. 2012.
26. **Loop, C**. *Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles*. University of Utah. Utah, USA : s.n., 1987. Department of Mathematics.
27. *Modeling smooth shape using subdivision on differential coordinates*. **Zhu, Lifeng, Li, Shengren y Wang, Guoping**. 9, Newton, MA, USA : Butterworth-Heinemann, #sep# de 2011, Comput. Aided Des., Vol. 43, págs. 1126-1136. ISSN: 0010-4485 DOI: 10.1016/j.cad.2011.05.006.

## RECURSOS FÍSICOS:

Recurso	Dependencia
Computador estación de trabajo	Estudiante
Conexión a internet	Universidad Nacional
Software de procesamiento	Software Libre
Herramientas de desarrollo de software	Software Libre
Textos y artículos electrónicos	Universidad Nacional
Papelería y fotocopias	Estudiante

Figura 2. Recursos Físicos.

Este proyecto se desarrollara con los recursos expuestos en la Figura 2., en las instalaciones del Centro de Telemedicina de la Universidad Nacional de Colombia.

## 10. COSTOS DEL TRABAJO Y FUENTES DE FINANCIACIÓN:

Ver el cuadro en la Figura 3.

Ítem	Cantidad	Valor		Total
		Universidad Nacional	Estudiante	
Computador	1		\$ 1.500.000	\$ 1.500.000
Conexión a internet (horas)	1600	\$ 2.000		\$ 3.200.000
Video Cámaras	6	\$ 200.000		\$ 1.200.000
Materiales e insumos	1		\$ 3.000.000	\$ 3.000.000
Textos y artículos electrónicos (suscripción)	3	\$ 200.000		\$ 600.000
Honorarios Director (4 horas / semana)	32	\$ 320.000		\$ 10.240.000
Honorarios Estudiante (20 horas / semana)	32	\$ 400.000		\$ 12.800.000
			<b>TOTAL</b>	<b>\$ 32.540.000</b>

Figura 3. Costos del trabajo y fuentes de financiación

## 11. COMENTARIO CON VISTO BUENO DEL DIRECTOR:

### **Organización:**

La estructura y organización del documento es adecuada de acuerdo con la metodología de paquetes de trabajo, en la cual un paquete de trabajo es constituido por un objetivo una metodología para lograrlo, un conjunto de actividades y un producto entregable.

### **Pertinencia:**

El grupo de investigación Bioingenium ha venido trabajando en el desarrollo de un laboratorio de marcha funcional, cuenta con la experiencia formada a través de varios trabajos de maestría desarrollados alrededor de esta área. Tales como el "*Modelo de Seguimiento para Análisis Biomecánico de la Marcha en un Sistema de Realidad Aumentada*" por parte del estudiante de la Maestría en Ingeniería Biomédica Fabio Martínez Carrillo y la "*Captura de la marcha en un ambiente con iluminación semicontrolada sin uso de marcadores*" por parte de la estudiante de la Maestría en Ingeniería Biomédica Lorenza Henao Murillo. Dados los anteriores elementos es pertinente continuar investigando métodos para mejorar los sistemas de seguimiento de movimiento.

### **Relevancia:**

La adaptación del operador Laplaciano que se desea desarrollar contribuirá en el mejoramiento de los métodos de extracción del esqueleto para el



seguimiento del movimiento en laboratorios de marcha, tales como el laboratorio del hospital universitario, ayudando en el diagnóstico de patologías asociadas con la marcha, para mejorar la salud y calidad de vida de la población colombiana.

**Originalidad:**

Con el desarrollo de una adaptación del operador Laplaciano se evitara el preprocesamiento de mallas de polígonos cuadrangulares o híbridas que es la forma habitual como los actuales sistemas de procesamiento lo realizan.

12. FIRMA DEL PROPONENTE

---

Alexander Pinzón Fernández

13. FIRMA DEL DIRECTOR (ASESORES)

---

Eduardo Romero Castro

14. FECHA

29 de octubre del año 2015