**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**
**Том 133, № 2**
**ноябрь, 2002**

 **М. Нешпорски***

# ЛЕСТНИЧНАЯ ДИАГРАММА ЛАПЛАСА ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСОВА ТИПА

Вводится понятие лестничной диаграммы Лапласа для дискретных аналогов уравнений лапласова типа. Получены уравнение, сопряженное дискретному уравнению Мутара, и дискретный аналог нелинейного представления уравнения Гурса.

**Ключевые слова:** лестничная диаграмма Лапласа, решетка Тоды, дискретные иерархии КП.

## 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Через $f(u,v)$ мы будем обозначать функции от непрерывных переменных, т.е. $f:\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto f(u,v) \in \mathbb{R}$, а через $f(m_1,m_2)$ – функции от дискретных переменных, т.е. $f: \mathbb{Z}^2 \ni (m_1,m_2) \mapsto f(m_1,m_2) \in \mathbb{R}$. Частные производные обозначаются запятой, например $f_{,uv}(u,v) := \partial^2 f(u,v)/\partial u\,\partial v$, а нижние индексы в скобках обозначают операторы сдвига, например $f(m_1,m_2)_{(1)} := f(m_1+1,m_2)$, $f(m_1,m_2)_{(2)} := f(m_1,m_2+1)$, $f(m_1,m_2)_{(12)} := f(m_1+1,m_2+1)$, $f(m_1,m_2)_{(-1)} := f(m_1-1,m_2)$ и т.д. Излишние аргументы функций опускаются в случае, когда сами операторы однозначно свидетельствуют о том, функции от каких – дискретных или непрерывных – переменных обсуждаются в данном случае. Разностные операторы обозначаются через $\Delta_i f := f_{(i)} - f$. Введем также специальный оператор четверного отношения $\diamond f := f_{(12)}f/(f_{(1)}f_{(2)})$.

## 2. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Лапласа
$$L\psi(u,v) = 0, \tag{1}$$
где $L$ представляет собой дифференциальный оператор
$$L = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} - A(u,v)\frac{\partial}{\partial u} - B(u,v)\frac{\partial}{\partial v} - C(u,v), \tag{2}$$
часто называется мастер-уравнением в теории $S$-интегрируемых систем. Эта точка зрения подкрепляется существованием широкого класса преобразований типа Дарбу, введенных Йонасом [1] и Эйзенхартом [2] (эти преобразования называются фундаментальными преобразованиями многокомпонентных иерархий уравнения Кадомцева–Петвиашвили), которые действуют на пространстве решений системы уравнений лапласова

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Białymstoku, Białystok, Poland.
E-mail: maciejun@fuw.edu.pl, maciejun@alpha.uwb.edu.pl

типа и порождают преобразования Дарбу–Беклунда для уравнений Дарбу, равно как и формулировкой современного метода $\bar{\partial}$-одевания, примененного к уравнениям Дарбу Захаровым и Манаковым [3].

Как метод $\bar{\partial}$-одевания, так и более важная в данном контексте дискретная версия фундаментального преобразования, действующая на пространствах решений дискретных аналогов уравнений Лапласа,

$$\mathcal{L}\psi(m_1, m_2) = 0, \tag{3}$$

$$\mathcal{L} = \Delta_{(1)}\Delta_{(2)} - \mathcal{A}(m_1, m_2)\Delta_{(1)} - \mathcal{B}(m_1, m_2)\Delta_{(2)} - \mathcal{C}(m_1, m_2), \tag{4}$$

были применены к дискретным аналогам уравнений Дарбу [4], [5]. Теория редукций дискретного фундаментального преобразования была развита в работах [6]–[9].

С другой стороны, Аторн заметил [10], что симметрия лестничной диаграммы Лапласа уравнения лапласова типа накладывает ограничения на операторы $L$, входящие в уравнения лестничной диаграммы. В частности, исследовался случай, когда лестничная диаграмма Лапласа содержит уравнение Мутара

$$\psi_{,uv} = f(u, v)\psi \tag{5}$$

и уравнение Гурса

$$\psi_{,uv} = \frac{1}{2}\big(\ln \lambda(u, v)\big)_{,v}\, \psi_{,u} + \lambda(u, v)\psi, \tag{6}$$

которое, в свою очередь, связано с уравнением (детали соответствия см., например, в работах [11])

$$\vartheta_{,xy} = 2\sqrt{\lambda(x, y)\vartheta_{,x}\vartheta_{,y}}. \tag{7}$$

Преобразования типа Дарбу, которые сохраняют вид уравнения Мутара (5) или уравнения Гурса (6), были найдены соответственно в работах [12] и [11].

Опишем сначала основные моменты теории дискретных уравнений лапласова типа (инвариантное описание и $T$-эквивалентность вводятся в разделе 3). Затем определим две операции, действующие на инвариантах дискретного уравнения лапласова типа, а именно преобразования Лапласа в разделе 4 (следуя работе [13], мы вводим понятие цепочки Лапласа дискретных уравнений лапласова типа) и операцию сопряжения в разделе 5. Объединяя понятия цепочки преобразований Лапласа и операции сопряжения, в разделе 6 мы введем понятие лестничной диаграммы Лапласа дискретных уравнений лапласова типа. Лестничная диаграмма Лапласа оказывается полезной для описания как старых, так и новых вариантов дискретных уравнений Мутара, которые были введены соответственно в работах [6] и [14] (см. раздел 7), равно как и для описания дискретного уравнения Гурса [8] (см. раздел 8).

## 3. ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСОВА ТИПА. $T$-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Дифференциальный оператор (2) сохраняет вид при преобразовании

$$L \mapsto \tilde{L} = \frac{1}{g} \circ L \circ g, \tag{8}$$

где через $g$ обозначен оператор умножения на скалярную функцию $g = g(u, v) \neq 0$. Это преобразование обычно называется *калибровочным преобразованием.* Будем называть два уравнения Лапласа $L\psi(u, v) = 0$ и $\tilde{L}\psi(u, v) = 0$ *эквивалентными* тогда и только тогда, когда существует функция $g$ такая, что операторы $\tilde{L}$ и $L$ связаны преобразованием (8). Следующие функции (*инварианты Лапласа*) оказываются инвариантными относительно калибровочного преобразования:

$$h = AB - A,_u + C, \qquad k = AB - B,_v + C. \tag{9}$$

Если инварианты операторов $L$ и $\tilde{L}$ совпадают ($k = \tilde{k}$ и $h = \tilde{h}$), то существует калибровочное преобразование, которое переводит $\tilde{L}$ в $L$. Упорядоченные пары инвариантов $(h, k)$ нумеруют классы эквивалентности уравнения (1). Более подробное описание непрерывного случая содержится в работе Аторна [10].

Дискретное уравнение лапласова типа (3) можно записать в виде

$$\psi_{(12)} - \alpha\psi_{(1)} - \beta\psi_{(2)} - \gamma\psi = 0, \tag{10}$$

где

$$\alpha := \mathcal{A} + 1, \qquad \beta := \mathcal{B} + 1, \qquad \gamma := \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} - 1. \tag{11}$$

Как и в непрерывном случае, можно ввести комбинации

$$\kappa := \frac{\beta\alpha_{(2)}}{\gamma_{(2)}}, \qquad n := \frac{\alpha\beta_{(1)}}{\gamma_{(1)}}, \tag{12}$$

которые инвариантны относительно дискретных калибровочных преобразований $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}g/g_{(12)}$, являющихся дискретными аналогами калибровочного преобразования (8), в то время как $g$ обозначает оператор умножения на функцию $g = g(m_1, m_2) \neq 0$. Будем называть инварианты (12) *основными инвариантами*, поскольку любые два оператора $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$, имеющие совпадающие инварианты $(n, \kappa) = (\tilde{n}, \tilde{\kappa})$, могут быть связаны калибровочным преобразованием.

В разделе 7 будут также введены порожденные инварианты, которые не обладают этим основным свойством. *Вторичные инварианты первого типа* имеют вид

$$\mathcal{K} := \kappa\kappa_{(1)}, \qquad \mathcal{H} := nn_{(2)}, \tag{13}$$

в то время как *вторичные инварианты второго типа* представляются в виде

$$\mathbf{K} := \frac{n_{(2)}}{\kappa}, \qquad \mathbf{H} := \frac{\kappa_{(1)}}{n}. \tag{14}$$

Пары $(n, \kappa)$ нумеруют классы эквивалентности дискретных уравнений лапласова типа.

Если базисные инварианты двух дискретных операторов Лапласа $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ удовлетворяют соотношениям

$$\kappa = T\tilde{\kappa}, \qquad n = T\tilde{n},$$

где $T$ – оператор сдвига, т.е. $Tf(m_1, m_2) = f(m_1 + k, m_2 + l)$, $k, l \in \mathbb{N}$, то такие уравнения называются *$T$-эквивалентными*, а соответствующие расширенные классы эквивалентности находятся в однозначном соответствии с $T(n, \kappa)$. В дальнейшем рассмотрении $T$-эквивалентность оказывается весьма существенной.

## 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ЦЕПОЧКА ЛАПЛАСА

Чтобы решить дискретное уравнение лапласова типа (3), попробуем факторизовать дискретный оператор Лапласа (4), что может быть сделано только лишь двумя способами:

$$(\Delta_{(1)} - \mathcal{B})(\Delta_{(2)} - \mathcal{A}_{(-1)})\psi - \mathfrak{h}\psi = 0, \tag{15}$$

$$(\Delta_{(2)} - \mathcal{A})(\Delta_{(1)} - \mathcal{B}_{(-2)})\psi - \mathfrak{k}\psi = 0, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathcal{C} - \mathcal{A} + \mathcal{A}_{(-1)}(\mathcal{B}+1) = \gamma + \alpha_{(-1)}\beta, \\ \mathfrak{k} &= \mathcal{C} - \mathcal{B} + \mathcal{B}_{(-2)}(\mathcal{A}+1) = \gamma + \beta_{(-2)}\alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

Если одна из двух функций $\mathfrak{h}$ или $\mathfrak{k}$ тождественно равна нулю, то факторизация возможна (а уравнения при этом разрешимы в квадратурах). Если это не так, то можно ввести функции

$$\psi^{\uparrow} := (\Delta_{(2)} - \mathcal{A}_{(-1)})\psi, \tag{18}$$

$$\psi^{\downarrow} := (\Delta_{(1)} - \mathcal{B}_{(-2)})\psi, \tag{19}$$

в терминах которых уравнения (15) и (16) принимают вид

$$\psi = \frac{1}{\mathfrak{h}}(\Delta_{(1)}\psi^{\uparrow} - \mathcal{B}\psi^{\uparrow}), \tag{20}$$

$$\psi = \frac{1}{\mathfrak{k}}(\Delta_{(2)}\psi^{\downarrow} - \mathcal{A}\psi^{\downarrow}). \tag{21}$$

Исключая функцию $\psi$ из уравнений (18), (19) с помощью формул (20), (21), можно получить, что функции $\psi^{\uparrow}$ и $\psi^{\downarrow}$ удовлетворяют уравнениям

$$\psi^{\uparrow}_{(12)} = \frac{\mathfrak{h}_{(2)}}{\mathfrak{h}}\alpha_{(-1)}\psi^{\uparrow}_{(1)} + \beta_{(2)}\psi^{\uparrow}_{(2)} + \frac{\mathfrak{h}_{(2)}}{\mathfrak{h}}\gamma\psi^{\uparrow}, \tag{22}$$

$$\psi^{\downarrow}_{(12)} = \alpha_{(1)}\psi^{\downarrow}_{(1)} + \frac{\mathfrak{k}_{(1)}}{\mathfrak{k}}\beta_{(-2)}\psi^{\downarrow}_{(2)} + \frac{\mathfrak{k}_{(1)}}{\mathfrak{k}}\gamma\psi^{\downarrow}, \tag{23}$$

а инварианты этих уравнений связаны с инвариантами уравнения (10):

$$\begin{aligned} n^{\uparrow} &= \frac{n_{(-1)}n_{(2)}}{\kappa} \diamond \frac{1}{(1+n)_{(-1)}}, \qquad \kappa^{\uparrow}_{(1)} = n_{(2)}, \\ n^{\downarrow}_{(2)} &= \kappa_{(1)}, \qquad \kappa^{\downarrow} = \frac{\kappa_{(-2)}\kappa_{(1)}}{n} \diamond \frac{1}{(1+\kappa)_{(-2)}}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\uparrow} &= \big(\mathbf{H} \diamond (1+n)\big)_{(-1)}, \qquad \mathbf{K}^{\uparrow}_{(1)} = \left(\mathbf{K}_{(1)} \diamond \frac{1}{1+n}\right)_{(2)}, \\ \mathbf{H}^{\downarrow}_{(2)} &= \left(\mathbf{H}_{(2)} \diamond \frac{1}{1+\kappa}\right)_{(1)}, \qquad \mathbf{K}^{\downarrow} = \big(\mathbf{K} \diamond (1+\kappa)\big)_{(-2)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Можно легко показать, что

$$(n^{\uparrow\downarrow}, \kappa^{\uparrow\downarrow}) = (n^{\downarrow\uparrow}, \kappa^{\downarrow\uparrow}) = (n, \kappa),$$

и преобразования Лапласа для дискретных уравнений лапласова типа, т.е. отображения $(n,\kappa)\mapsto(n^{\uparrow},\kappa^{\uparrow})$ и $(n,\kappa)\mapsto(n^{\downarrow},\kappa^{\downarrow})$, оказываются тем самым взаимно обратными. По аналогии с непрерывным случаем будем называть цепочку уравнений

$$\ldots,(n^{\downarrow\downarrow},\kappa^{\downarrow\downarrow}),(n^{\downarrow},\kappa^{\downarrow}),(n,\kappa),(n^{\uparrow},\kappa^{\uparrow}),(n^{\uparrow\uparrow},\kappa^{\uparrow\uparrow}),\ldots \tag{26}$$

*цепочкой Лапласа дискретных уравнений лапласова типа.* Сделаем три важных замечания. Во-первых, преобразования Лапласа хорошо определены на $T$-эквивалентных классах. Во-вторых, уравнение

$$n^{\uparrow}_{(1)}n^{\downarrow}_{(2)}=nn_{(12)}\diamond\frac{1}{1+n},$$

где преобразования Лапласа $\uparrow$ и $\downarrow$ рассматриваются как соответствующие сдвиги в положительном и отрицательном направлениях по третьей дискретной переменной, представляет собой одну из возможных форм записи уравнения Хироты [15]. Наконец, в-третьих, вводя $\mathcal{X}:=\psi^{\uparrow}/b$ и $\mathcal{Y}:=\psi/a$, где $a$ и $b$ суть решения уравнений $b_{(1)}=\beta b$ и $a_{(2)}=\alpha_{(-1)}a$, можно представить уравнения (18) и (20) в виде

$$\Delta_{(2)}\mathcal{Y}=\mathcal{Q}\mathcal{X},\qquad \Delta_{(1)}\mathcal{X}=\mathcal{P}\mathcal{Y}, \tag{27}$$

где

$$\mathcal{P}=\frac{a\mathfrak{h}}{b_{(1)}},\qquad \mathcal{Q}=\frac{b}{a_{(2)}}, \tag{28}$$

в то время как уравнения (22) и (10) в этой новой калибровке примут вид

$$\mathcal{Y}_{(12)}=\mathcal{Y}_{(1)}+\frac{\mathcal{Q}_{(1)}}{\mathcal{Q}}\mathcal{Y}_{(2)}-\mathcal{M}\frac{\mathcal{Q}_{(1)}}{\mathcal{Q}}\mathcal{Y}, \tag{29}$$

$$\mathcal{X}_{(12)}=\frac{\mathcal{P}_{(2)}}{\mathcal{P}}\mathcal{X}_{(1)}+\mathcal{X}_{(2)}-\mathcal{M}\frac{\mathcal{P}_{(2)}}{\mathcal{P}}\mathcal{X}, \tag{30}$$

где $\mathcal{M}=1-\mathcal{P}\mathcal{Q}$.

## 5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Фундаментальное преобразование, которое связывает пространства решений уравнения (1) с различными (но связанными) коэффициентными функциями, параметризуется двумя функциональными параметрами [2]. Первый из этих параметров есть решение уравнения (1), а второй функциональный параметр представляет собой решение уравнения, сопряженного уравнению (1):

$$\psi^{\dagger}{}_{,uv}+(A\psi^{\dagger})_{,u}+(B\psi^{\dagger})_{,v}-C\psi^{\dagger}=0. \tag{31}$$

Введем теперь уравнение, сопряженное дискретному уравнению (10). Для этого необходимо найти фундаментальное преобразование [5] для дискретного уравнения лапласова типа (1).

Дискретное фундаментальное преобразование отображает пространство решений уравнения (здесь удобно использовать так называемую аффинную калибровку $\mathcal{C}=0$)

$$\Delta_{(1)}\Delta_{(2)}x = \frac{\Delta_{(2)}a}{a}\Delta_{(1)}x + \frac{\Delta_{(1)}b}{b}\Delta_{(2)}x \tag{32}$$

в пространство решений уравнения

$$\Delta_{(1)}\Delta_{(2)}x^1 = \frac{\Delta_{(2)}a^1}{a^1}\Delta_{(1)}x^1 + \frac{\Delta_{(1)}b^1}{b^1}\Delta_{(2)}x^1. \tag{33}$$

Это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{(1)}\left(\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)}\Delta_{(1)}\left(\frac{x^1\vartheta'}{\vartheta}\right) &= \frac{1}{\Delta_{(1)}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)}\Delta_{(1)}\left(\frac{x}{\vartheta}\right), \\ \frac{1}{\Delta_{(2)}\left(\frac{\vartheta'}{\vartheta}\right)}\Delta_{(2)}\left(\frac{x^1\vartheta'}{\vartheta}\right) &= \frac{1}{\Delta_{(2)}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)}\Delta_{(2)}\left(\frac{x}{\vartheta}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Функциональные параметры $\vartheta$ и $\vartheta'$ этого преобразования оказываются не произвольными: функция $\vartheta$ должна быть решением уравнения (32), т.е.

$$\Delta_{(1)}\Delta_{(2)}\vartheta = \frac{\Delta_{(2)}a}{a}\Delta_{(1)}\vartheta + \frac{\Delta_{(1)}b}{b}\Delta_{(2)}\vartheta, \tag{35}$$

а функция $\vartheta'$ должна строиться из $\vartheta$ и решения $\vartheta^\dagger$ уравнения

$$\Delta_{(1)}\Delta_{(2)}\vartheta^\dagger + \Delta_{(1)}\left(\frac{\frac{\Delta_{(2)}a}{a}\vartheta^\dagger}{1+\frac{\Delta_{(2)}a}{a}+\frac{\Delta_{(1)}b}{b}}\right) + \Delta_{(2)}\left(\frac{\frac{\Delta_{(1)}b}{b}\vartheta^\dagger}{1+\frac{\Delta_{(2)}a}{a}+\frac{\Delta_{(1)}b}{b}}\right) = 0. \tag{36}$$

Чтобы найти $\vartheta'$, надо сначала найти вспомогательные функции $\lambda$ и $\chi$ такие, что

$$\begin{gathered} \Delta_{(1)}\lambda = \frac{\frac{\Delta_{(1)}b}{b}\vartheta^\dagger}{1+\frac{\Delta_{(2)}a}{a}+\frac{\Delta_{(1)}b}{b}}, \qquad \Delta_{(2)}\lambda = -\Delta_{(2)}\vartheta^\dagger - \frac{\frac{\Delta_{(2)}a}{a}\vartheta^\dagger}{1+\frac{\Delta_{(2)}a}{a}+\frac{\Delta_{(1)}b}{b}}, \\ \chi = \lambda + \vartheta^\dagger. \end{gathered} \tag{37}$$

Тогда искомая функция $\vartheta'$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta_{(1)}\vartheta' = \chi\Delta_{(1)}\vartheta, \qquad \Delta_{(2)}\vartheta' = \lambda\Delta_{(2)}\vartheta. \tag{38}$$

Условия (35)–(38) обеспечивают то, что функция $x^1$, задаваемая условиями (34), удовлетворяет уравнению (33). Новые функции $a^1$ и $b^1$ связаны с исходными функциями $a$ и $b$ следующим образом:

$$\frac{\Delta_{(2)}a^1}{a^1} = \frac{\Delta_{(2)}\left(a\chi\frac{\vartheta}{\vartheta'}-a\right)}{\left(a\chi\frac{\vartheta}{\vartheta'}-a\right)}, \qquad \frac{\Delta_{(1)}b^1}{b^1} = \frac{\Delta_{(1)}\left(b\lambda\frac{\vartheta}{\vartheta'}-b\right)}{\left(b\lambda\frac{\vartheta}{\vartheta'}-b\right)}. \tag{39}$$

Будем называть уравнение (36) сопряженным уравнению (35). Инварианты $n^\dagger$, $\kappa^\dagger$, $\mathbf{H}^\dagger$ и $\mathbf{K}^\dagger$ уравнения (36) связаны с инвариантами $n$, $\kappa$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{K}$ уравнения (35):

$$n^\dagger = \kappa_{(1)}, \qquad \kappa^\dagger = n_{(2)}, \tag{40}$$

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{K}_{(1)}, \qquad \mathbf{K}^\dagger = \mathbf{H}_{(2)}. \tag{41}$$

Будем называть уравнение $\mathcal{L}^\dagger\psi^\dagger = 0$ сопряженным уравнению $\mathcal{L}\psi = 0$ тогда и только тогда, когда

$$T(n^\dagger,\kappa^\dagger) = T(\kappa_{(1)}, n_{(2)}). \tag{42}$$

Заметим, что $T(n,\kappa)^{\dagger\dagger} = T(n,\kappa)$.

## 6. ЛЕСТНИЧНАЯ ДИАГРАММА ЛАПЛАСА

Рассматривая суперпозиции преобразований Лапласа и сопряжения, получим

$$
\begin{aligned}
(n^{\uparrow\dagger}, \kappa^{\uparrow\dagger}) &= \left(\frac{n_{(-1)}n_{(2)}}{\kappa} \diamond \frac{1}{1+n_{(-1)}}, n\right)_{(2)}, \\
(n^{\dagger\downarrow}, \kappa^{\dagger\downarrow}) &= \left(\frac{n_{(-1)}n_{(2)}}{\kappa} \diamond \frac{1}{1+n_{(-1)}}, n\right)_{(1)}, \\
(n^{\downarrow\dagger}, \kappa^{\downarrow\dagger}) &= \left(\frac{\kappa_{(-2)}\kappa_{(1)}}{n} \diamond \frac{1}{1+\kappa_{(-2)}}, \kappa\right)_{(1)}, \\
(n^{\dagger\uparrow}, \kappa^{\dagger\uparrow}) &= \left(\frac{\kappa_{(-2)}\kappa_{(1)}}{n} \diamond \frac{1}{1+\kappa_{(-2)}}, \kappa\right)_{(2)}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Таким образом, имеем

$$
T(n^{\uparrow\dagger}, \kappa^{\uparrow\dagger}) = T(n^{\dagger\downarrow}, \kappa^{\dagger\downarrow}), \qquad T(n^{\downarrow\dagger}, \kappa^{\downarrow\dagger}) = T(n^{\dagger\uparrow}, \kappa^{\dagger\uparrow}), \tag{44}
$$

в результате получается коммутативная диаграмма, называемая *лестничной диаграммой Лапласа дискретных уравнений лапласова типа*:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & T(n^{\downarrow}, \kappa^{\downarrow}) & \longrightarrow & T(n, \kappa) & \longrightarrow & T(n^{\uparrow}, \kappa^{\uparrow}) & \longrightarrow & T(n^{\uparrow\uparrow}, \kappa^{\uparrow\uparrow}) & \ldots \\
 & | & & | & & | & & | & \\
\ldots & T(n^{\dagger\uparrow}, \kappa^{\dagger\uparrow}) & \longleftarrow & T(n^{\dagger}, \kappa^{\dagger}) & \longleftarrow & T(n^{\dagger\downarrow}, \kappa^{\dagger\downarrow}) & \longleftarrow & T(n^{\dagger\downarrow\downarrow}, \kappa^{\dagger\downarrow\downarrow}) & \ldots .
\end{array}
$$

В этой диаграмме стрелки обозначают преобразования Лапласа $\uparrow$, действующие в "положительном" направлении, в то время как вертикальные линии ("перекладины лестницы") обозначают операции сопряжения $\dagger$.

## 7. ПОДКЛАСС ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МУТАРА

Уравнение Лапласа называется *дискретным уравнением Мутара* тогда и только тогда, когда его инварианты удовлетворяют соотношению $\mathbf{H} = \mathbf{K}$, или, что эквивалентно, $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ или $n_{(2)}n = \kappa_{(1)}\kappa$. Каждое дискретное уравнение Мутара может быть преобразовано к виду

$$
N_{(12)} + N = F(N_{(1)} + N_{(2)}) \tag{45}
$$

с помощью калибровочного преобразования. Уравнение (45) вместе с преобразованием типа Дарбу было введено Ниммо и Шифом [6].

Из формул (41) следует, что естественным инвариантом уравнения, сопряженного дискретному уравнению Мутара, является величина

$$
\mathbf{H}^{\dagger}_{(2)} = \mathbf{K}^{\dagger}_{(1)}. \tag{46}
$$

Таким образом, в отличие от непрерывного случая, дискретное уравнение Мутара оказывается *несамосопряженным*. Уравнение типа Лапласа называется *сопряженным дискретному уравнению Мутара* тогда и только тогда, когда его инварианты связаны преобразованием (46). Всякое сопряженное дискретное уравнение Мутара приводится с помощью калибровочного преобразования к уравнению

$$\mathcal{N}_{(12)} + \mathcal{N} = F_{(1)}\mathcal{N}_{(1)} + F_{(2)}\mathcal{N}_{(2)}. \tag{47}$$

В случае, когда функция $N$ удовлетворяет дискретному уравнению Мутара (45), функция $\mathcal{N}$ вида

$$\mathcal{N} := N_{(1)} + N_{(2)} \tag{48}$$

удовлетворяет сопряженному дискретному уравнению Мутара (47). В силу соотношения (48) уравнение (47) "наследует" свойства интегрируемости, присущие уравнению (45). В частности, дискретное преобразование Мутара [6] приводит к условиям

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{N}'\frac{\Theta_{(1)}}{\Theta} + \mathcal{N}\right)_{(1)} &= \frac{(\Theta_{(1)} + \Theta_{(2)})_{(1)}}{\Theta_{(1)} + \Theta_{(2)}} \left(\mathcal{N}'\frac{\Theta_{(2)}}{\Theta_{(12)}} + \mathcal{N}\right), \\ \left(\mathcal{N}'\frac{\Theta_{(2)}}{\Theta} - \mathcal{N}\right)_{(2)} &= \frac{(\Theta_{(1)} + \Theta_{(2)})_{(2)}}{\Theta_{(1)} + \Theta_{(2)}} \left(\mathcal{N}'\frac{\Theta_{(1)}}{\Theta_{(12)}} - \mathcal{N}\right), \end{aligned} \tag{49}$$

где $\Theta$ есть решение дискретного уравнения Мутара (45):

$$\Theta_{(12)} + \Theta = F(\Theta_{(1)} + \Theta_{(2)}).$$

Свойства уравнения (47) детально обсуждаются в работе [16].

## 8. СИММЕТРИЧЕСКИЙ ПОДКЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГУРСА

Налагая условие

$$n^{\uparrow} = \kappa, \tag{50}$$

или, что эквивалентно, $\mathbf{H}^{\uparrow} = \mathbf{K}$, можно преобразовать уравнения (10) и (22), которые эквивалентны при этом соответственно уравнениям (29) и (30), к виду, в котором естественно называть их *дискретными уравнениями типа Гурса.* Инвариантные характеристики дискретных уравнений типа Гурса имеют вид

$$(n^{\uparrow}_{(2)})^2 = \kappa^{\uparrow}\kappa^{\uparrow}_{(12)} \diamond \frac{1}{1+\kappa^{\uparrow}}, \qquad (\kappa_{(1)})^2 = nn_{(12)} \diamond \frac{1}{1+n}. \tag{51}$$

В терминах функций, определенных в (28), получим [8]

$$\diamond\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}} = \frac{\mathcal{M}_{(2)}}{\mathcal{M}_{(1)}}. \tag{52}$$

Вводя теперь функцию $\tau$,

$$\frac{\tau_{(12)}\tau}{\tau_{(1)}\tau_{(2)}} = \mathcal{M} = 1 - \mathcal{P}\mathcal{Q}, \tag{53}$$

и ввиду того, что уравнения (27) обладают симметрией

$$(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{P},\mathcal{Q}) \to \left(\mathcal{X}V(m_2), \mathcal{Y}U(m_1), \mathcal{P}\frac{U(m_1)}{V(m_2)}, \mathcal{Q}\frac{V(m_2)}{U(m_1)}\right),$$

без потери общности можно положить $\mathcal{P}\tau_{(1)} = \mathcal{Q}\tau_{(2)}$. Вводя функции

$$x := \mathcal{X}\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{(2)}}}, \qquad y := \mathcal{Y}\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{(1)}}}, \tag{54}$$

получим [17]

$$x_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}}}\left(x + \mathcal{P}\sqrt{\frac{\tau_{(1)}}{\tau_{(2)}}}\,y\right), \qquad y_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}}}\left(y + \mathcal{Q}\sqrt{\frac{\tau_{(2)}}{\tau_{(1)}}}\,x\right). \tag{55}$$

Если функции $x$ и $y$ удовлетворяют этой системе уравнений, то существует функция $\theta$ такая, что

$$x^2 = \Delta_{(2)}\theta, \qquad y^2 = \Delta_{(1)}\theta. \tag{56}$$

Также имеем

$$1 - \mathcal{M} = \mathcal{P}^2\frac{\tau_{(1)}}{\tau_{(2)}} = \mathcal{Q}^2\frac{\tau_{(2)}}{\tau_{(1)}},$$

а потому уравнения (55), возведенные в квадрат (дискретные аналоги уравнения (7)), принимают вид

$$\Delta_{(1)}\Delta_{(2)}\theta = \frac{1-\mathcal{M}}{\mathcal{M}}(\Delta_{(1)}\theta + \Delta_{(2)}\theta) \pm 2\sqrt{\frac{1-\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}}\sqrt{\Delta_{(1)}\theta}\sqrt{\Delta_{(2)}\theta}, \tag{57}$$

где знак $\pm$ возникает в результате извлечения квадратного корня из выражений (56). Будем называть уравнение (57) *нелинейной версией дискретного уравнения Гурса.*

В случае редукции Гурса, в полной аналогии с непрерывным случаем, лестничная диаграмма перекручивается и складывается в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
T(n^\dagger,\kappa^\dagger) & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & & \dots \\
\uparrow| & & | & & | & & | & & | & & \\
T(n,\kappa) & \longleftarrow & \cdot & \longleftarrow & \cdot & \longleftarrow & \cdot & \longleftarrow & \cdot & & \dots,
\end{array}$$

поскольку вследствие формул (24), (40) и (50) получается, что $(n^{\uparrow\dagger},\kappa^{\uparrow\dagger}) = (\kappa^{\uparrow}_{(1)}, n^{\uparrow}_{(2)}) = (n_{(2)},\kappa_{(2)})$ и, следовательно, $(n^\dagger,\kappa^\dagger) = (n^{\uparrow}_{(1)},\kappa^{\uparrow}_{(1)})$, т.е.

$$T(n^{\uparrow\dagger},\kappa^{\uparrow\dagger}) = T(n,\kappa), \qquad T(n^\dagger,\kappa^\dagger) = T(n^\uparrow,\kappa^\uparrow).$$

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что в дискретном случае уравнение Мутара расщепляется в дискретное уравнение Мутара и в уравнение, сопряженное дискретному уравнению Мутара. Эта факторизация существенна как для физически важных [14], [18], так и для геометрически значимых [16], [19] систем.

**Благодарности.** Автор благодарен организаторам конференции “NEEDS 2001” за поддержку. Работа была частично поддержана KBN (грант № 2 P03B 126 22).

**Список литературы**


[1] *H. Jonas*. Sitzungsber. Berlin. 1915. V. 14. P. 96.
[2] *L. P. Eisenhart*. Transformation of surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1923.
[3] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков*. Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. № 2. С. 11.
[4] *L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko*. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. L173; *M. Mañas, A. Doliwa, P. M. Santini*. Phys. Lett. A. 1997. V. 232. P. 99.
[5] *A. Doliwa, P. M. Santini, M. Mañas*. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 944.
[6] *J. J. C. Nimmo, W. K. Schief*. Proc. R. Soc. London A. 1997. V. 453. P. 255.
[7] *J. Cieslinski, A. Doliwa, P. M. Santini*. Phys. Lett. A. 1997. V. 235. P. 480; *B. G. Konopelchenko, W. K. Schief*. Proc. R. Soc. London A. 1998. V. 454. P. 3075; *A. Doliwa, S. V. Manakov, P. M. Santini*. Commun. Math. Phys. 1998. V. 196. P. 1.
[8] *A. Doliwa, P. M. Santini*. J. Geom. Phys. 2000. V. 36. P. 60.
[9] *A. Doliwa*. J. Geom. Phys. 1999. V. 30. P. 169.
[10] *C. Athorne*. Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 217.
[11] *E. Goursat*. Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 1; *Е. И. Ганжа*. ТМФ. 2000. Т. 122. № 1. С. 50.
[12] *Th.-F. Moutard*. J. Ec. Pol. 1878. V. 45. P. 1.
[13] *A. Doliwa*. Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 187; *В. Э. Адлер, С. Я. Старцев*. ТМФ. 1999. Т. 121. № 2. С. 271; *И. А. Дынников, С. П. Новиков*. УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 157.
[14] *M. Nieszporski, A. Doliwa, P. M. Santini*. The integrable discretization of the Bianchi-Ernst system. nlin.SI/0104065; *A. Doliwa, M. Nieszporski, P. M. Santini*. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10423.
[15] *A. Doliwa*. Lattice geometry of the Hirota equation. In: SIDE III-Symmetries and Integrability of Difference Equations. Proc. of 3rd Conf. (Sabandia, Italy, May, 1998). CRM Proc. Lect. Notes. V. 25. Eds. D. Levi et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 93.
[16] *A. Doliwa*. Geometric discretization of the Koenigs nets. Submitted to Geom. Dedicata.
[17] *W. K. Schief*. On the unification of classical and novel integrable surfaces: II. Difference geometry. nlin.SI/0104037.
[18] *W. K. Schief*. Stud. Appl. Math. 2001. V. 106. P. 85.
[19] *M. Nieszporski*. J. Geom. Phys. 2002. V. 40. P. 259.